DOI:10.16208/j.issn1000-7024.2014.02.067

2014 年 2 月
第 35 卷 第 2 期

计算机工程与设计
COMPUTER ENGINEERING AND DESIGN

Feb. 2014
Vol. 35 No. 2

快速收敛的混合遗传算法

李炯城[1]，王阳洋[1,2]，李桂愉[1]，王 强[1,2]，肖恒辉[1]，刘海林[2]

（1. 广东省电信规划设计院有限公司 研发中心，广东 广州 510630；
2. 广东工业大学 应用数学学院，广东 广州 510520）

摘 要：针对传统的遗传算法在后期搜索能力差和收敛速度慢的缺点，提出了一种基于共轭梯度法和遗传算法的快速收敛混合算法。在充分利用遗传算法的全局搜索能力和共轭梯度法的快速局部搜索能力后，加快了遗传算法的收敛速度，提升了遗传算法的搜索精度。以复杂的一维函数和含圈脊的二维多峰函数 Shaffer 的全局优化问题为例，验证了这种混合遗传算法的性能优于单独的共轭梯度法和遗传算法，并取得较好的效果。

关键词：共轭梯度法；遗传算法；混合遗传算法；快速收敛；全局优化

中图法分类号：TP301.6 **文献标识号**：A **文章编号**：1000-7024（2014）02-0686-04

Fast convergence of Hybrid genetic algorithm

LI Jiong-cheng[1], WANG Yang-yang[1,2], LI Gui-yu[1], WANG Qiang[1,2], XIAO Heng-hui[1], LIU Hai-lin[2]

(1. Research and Development Center, Guangdong Planning and Designing Institute of Telecommunications Company, Guangzhou 510630, China; 2. School of Applied Mathematics, Guangdong University of Technology, Guangzhou 510520, China)

Abstract: In view of the low efficiency and low convergence of the traditional genetic algorithm in the later stage, a hybrid genetic algorithm based on conjugate gradient method and genetic algorithm is proposed. To speed up the convergence and improve searching precision of genetic algorithm, the global search ability of genetic algorithm and fast local search ability of conjugate gradient method are made full use of by the algorithm. Using complicated one dimensional function and two-dimensional multi-modal Shaffer function in complex global optimization problems as examples, which shows that performance of this hybrid genetic algorithm is better than single conjugate gradient method and genetic algorithm and have achieved good results.

Key words: conjugate gradient method; genetic algorithm; hybrid genetic algorithm; fast convergence; global optimization

0 引 言

对连续可微函数的优化问题，有许多传统的数值优化方法可以求解，如牛顿法[1]，最速下降法[2]，共轭梯度法[3,4]等。由于最速下降法和牛顿法均要求计算函数的二阶导数，这个条件比较苛刻，一般的函数较难满足。而考虑到共轭梯度法只需求解函数的一阶导数，并且共轭梯度法也具有牛顿法“二次收敛性”。目前也有求解全局优化问题的算法，如填充函数法[5]，但这类算法通常非常复杂，而且不容易求解到全局最优解。而以遗传算法[6,7]为代表的进化算法目前已经广泛地应用于各个领域，其优点在于能进行全局搜索，并且具有高度的鲁棒性。因而本文提出一种新的结合共轭梯度法和遗传算法的混合算法。这种混合算法既结合了共轭梯度的确定性数学算法能快速收敛的好处，又能利用遗传算法以避免陷入局部最优点，因此能更快地收敛到精确全局最优解。

1 传统的遗传算法

传统的遗传算法对于全局优化问题具有一定的优势，具有全局收敛的优点，其具体的步骤如下：

随机产生初始种群，并设置好初始的参数

Repeat

收稿日期：2013-03-12；**修订日期**：2013-06-15

作者简介：李炯城（1972-），男，广东台山人，博士，高级工程师，研究方向为最优化算法、非线性数学物理方程、无线通信算法、软件系统架构；王阳洋（1986-），女，湖北襄阳人，硕士研究生，研究方向为智能计算；李桂愉（1984-），女，广东韶关人，硕士，助理工程师，研究方向为数学最优化、无线通信；王强（1987-），男，山东诸城人，硕士研究生，研究方向为最优化处理、多目标进化算法；肖恒辉（1980-），男，江西赣州人，博士，高级工程师，研究方向为最优化算法、无线通信；刘海林（1963-），男，河南安阳人，博士，教授，博士生导师，研究方向为无线网规划与优化、智能计算、盲信号分离。E-mail：liguiyu@gpdi.com

?1994-2016 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

执行选择算子，选择优良的个体，并淘汰适应度低的个体

执行交叉算子

执行变异算子

计算每个个体的适应度

Until 结束迭代逻辑条件满足

2 共轭梯度法

步骤1 取初始点 $x^{(1)}$，置精度要求 ε，置 $k=1$；

步骤2 如果 $\|\nabla f(x^{(k)})\| \leqslant \varepsilon$，则停止计算（$x^{(k)}$ 作为无约束问题的解）；否则置

$$d^{(k)} = -\nabla f(x^{(k)}) + \beta_{k-1} d^{(k-1)}$$

其中

$$\beta_{k-1} = \begin{cases} 0, k=1, \\ \dfrac{\|\nabla f(x^{(k)})\|^2}{\|\nabla f(x^{(k-1)})\|^2}, k>1, \end{cases}$$

或

$$\beta_{k-1} = \begin{cases} 0, k=1, \\ \dfrac{\nabla f(x^{(k)})^T (\nabla f(x^{(k)}) - \nabla f(x^{(k-1)}))}{\nabla f(x^{(k-1)})^T \nabla f(x^{(k-1)})}, k>1; \end{cases}$$

步骤3 一维搜索。求解一维问题

$\min \varphi(\alpha) = f(x^{(k)} + \alpha d^{(k)})$，

的 α_k，置 $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha_k d^{(k)}$；

步骤4 置 $k=k+1$，转步骤2。

3 混合遗传算法分析

考虑无约束最优化问题

$$\min f(x), x \in R^n$$

一般地，假设函数 $f(x)$ 的一阶偏导数均存在。

求解此问题的方法有很多，包括确定性方法和随机性方法。确定性方法主要有：最速下降法、牛顿法和共轭梯度法等。最速下降法和牛顿法均要求目标函数的二阶导数，不仅对函数光滑性要求较高，而且涉及计算 Hessian 矩阵，计算量较大，为 $O(n^2)$。因此，我们采用共轭梯度法，这个算法有很多优点：首先，算法产生的搜索方向是函数的下降方向；其次，算法不必计算 Hessian 矩阵，只需计算目标函数值和梯度值；最后，算法具有良好的特性，即具有“二次终止性”。但是，该算法与其它确定性算法一样，对于求解全局优化问题，有可能失效。原因是算法终止的条件是梯度的模小于给定值或者算法已经达到迭代次数，这就意味着算法有可能收敛到局部最优解。而对于随机性方法，应用较多的则是遗传算法，该算法能以较大的概率收敛到全局最优解，并且算法具有较强的鲁棒性。但对于连续可微函数的优化问题，由于受到收敛性相对较慢，编码长度对精度影响较大，种群规模要求较大等因素的影响，与确定性算法相比，并不具有明显的优势。

共轭梯度法和遗传算法都各具优势和不足，因而考虑将两者结合起来，取长补短。两者结合的算法我们称之为混合遗传算法。该算法的优势是结合遗传算法的全局搜索能力和共轭梯度法的快速收敛特性。利用共轭梯度算法提高遗传算法的收敛速度，从而能更快收敛到精确解，同时利用遗传算法帮助共轭梯度法跳出局部最优解。

目前，已经有学者进行这方面的研究。文献［8］提出了一种基于梯度信息指导交叉的遗传算法，通过确定当前种群中个体的最速下降方向，使个体在确定的有效范围内进行交叉操作，能较快收敛。文献［9］提出了嵌入共轭梯度算子的遗传算法，采用共轭梯度法在局部进行搜索，能够较快寻优。文献［10，11］提出了一种基于牛顿法和遗传算法的混合遗传算法，用于求解非线性方程组。文献［12］提出一种基于共轭梯度法和遗传算法的混合遗传算法，该算法先执行若干步遗传算法，再执行若干步共轭梯度法，该算法执行过程较低效。

本文中将共轭梯度法嵌入到遗传算法，不必像文献［8］那样将遗传算法种群中所有的个体均执行共轭梯度法，只需考虑对遗传算法种群的中心执行共轭梯度法即可。所谓中心，即为种群个体的平均值。假设种群个数为 m，个体分别为：$a_i \in R^n, i=1,\cdots,m$，则种群的中心为：$a_0 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} a_i$。

将此个体 a_0 作为共轭梯度法的初始搜索点。由于共轭梯度法具有二次终止性，即对于二次函数，算法可在 n 步迭代后终止。对于非二次函数，执行 n 步也可得到较好的效果。因此，将 a_0 作为共轭梯度法的初始搜索点并执行 n 步共轭梯度法，所得到的结果即为 $a^{(n)}$。

计算 $a^{(n)}$ 的适应度函数，并据 $a^{(n)}$ 生成一个个体，加入到种群中，替换掉适应度最小的个体，使种群规模保持为 m。再执行下一次遗传算法迭代，并循环上述过程，即可得到混合遗传算法。

4 基于共轭梯度法的混合遗传算法描述

根据上述分析，可得基于求最大值的共轭梯度法的混合遗传算法具体过程，如下：

步骤1 产生初始种群；

步骤2 计算个体适应度函数 F；

步骤3 执行交叉算子和变异算子；

步骤4 计算种群的中心 a_0；

步骤5 将 a_0 作为共轭梯度法的初始搜索点，置 $k=1$，置迭代次数 n_0，置精度要求 ε，执行下述算法：

（1）如果 $\|\nabla f(a^{(k)})\| \leqslant \varepsilon$，则停止计算（$a^{(k)}$ 作为无线约束问题的解）；否则置

$$d^{(k)} = \nabla f(a^{(k)}) + \beta_{k-1} d^{(k-1)}$$

?1994-2016 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

其中，$\beta_{k-1}=\begin{cases}0, k=1\\ \dfrac{\|\nabla f(a^{(k)})\|^2}{\|\nabla f(a^{(k-1)})\|^2}, k>1\end{cases}$

（2）一维搜索。求解一维问题

$\max\phi(\alpha)=f(a^{(k)}+\alpha d^{(k)})$，得 α_k，置

$a^{(k+1)}=a^{(k)}+\alpha_k d^{(k)}$

（3）置 $k=k+1$，转步骤 5 里的（1）。将结果记为 $a^{(n)}$；

步骤 6　计算 $a^{(n)}$ 的适应度函数，并据 $a^{(n)}$ 生成一个个体，加入种群中，替换种群中适应度最小的个体，转步骤 3。

从算法描述可以看出，基于共轭梯度的混合遗传算法仅需对种群的中心个体交替执行遗传算法和共轭梯度法，这样就可以充分利用遗传算法的全局搜索特性和共轭梯度法的快速收敛特性，使算法能快速地收敛到全局最优解。算法的流程图见图 1。

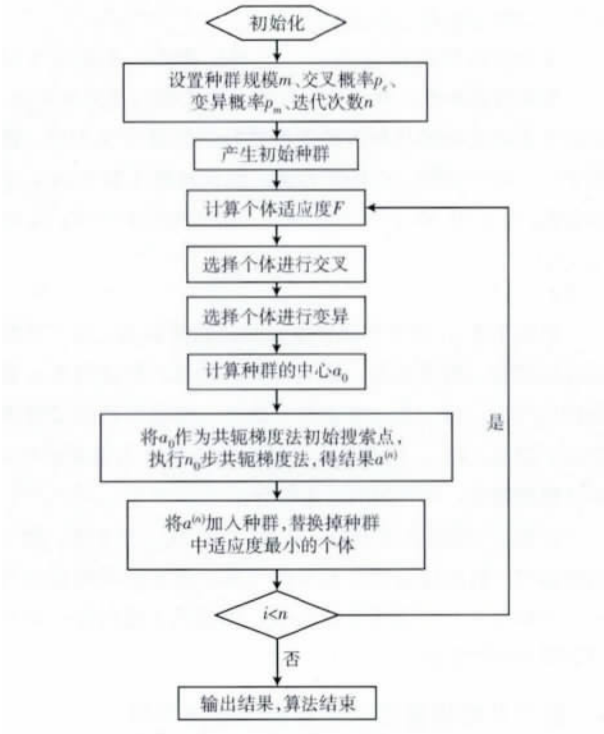

图 1　混合遗传算法流程

5　算例验证

为了检验遗传算法寻找全局最优化的性能，

De Jong 早在 1975 年就提出了几个性能测试函数，后来一些学者也陆续提出更多的性能测试函数。本文采用其中的一些测试函数来测试我们的算法，并分别与遗传算法和共轭梯度法的结果相比较。测试函数具体如下

$$\max f(x)=x-e^{\frac{x}{2\pi}}\cdot\sin(x), x\in[0,6\pi] \tag{1}$$

$$\min f(x_1,x_2)=0.5+\frac{\sin^2\sqrt{x_1^2+x_2^2}-0.5}{[1+0.001(x_1^2+x_2^2)]^2},$$
$$x_1\in[0,10], x_2\in[0,10] \tag{2}$$

其中，函数（1）的全局最优解为 $x_1=17.4976$，全局最大值 $f_1=33.3084$。函数（2）的全局最优解 $X_2=(0,0)$，全局最小值 $f_2=0$。

5.1　测试函数（1）的结果与分析

分别利用共轭梯度法、遗传算法以及本文所提的基于共轭梯度和遗传算法的混合算法进行求解测试函数（1）。遗传算法和本文所提的算法参数均设置为：种群规模为 50，交叉概率 $p_c=0.8$，变异概率 $p_m=0.075$，迭代次数为 80。共轭梯度法的初始搜索点随机给出，则可得到结果如图 2 所示。

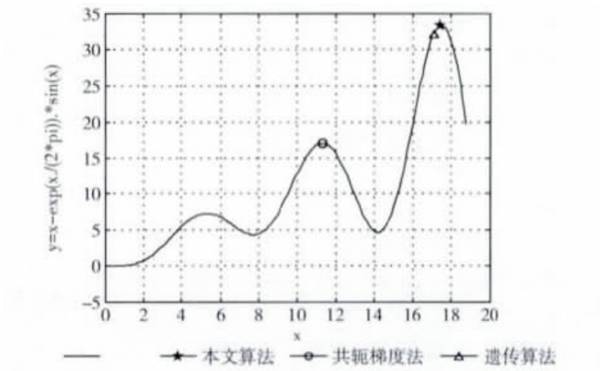

图 2　3 种算法的结果比较

其中“o”为共轭梯度法所求解的结果，“△”遗传算法所求解的结果，“☆”为本文提出算法所求解的结果。可以看出，本文的算法结果明显优于其它两种算法，具体结果见表 1。

表 1　3 种算法的结果比较

执行算法	初始点	最优解 x^*	最优值 $f(x^*)$	收敛代数
共轭梯度法	11	11.3172	17.0635	2
	16	17.4736	33.3036	3
遗传算法	—	17.1	32.0616	40
本文算法	—	17.4736	33.3036	10

从表 1 可以看出，共轭梯度算法收敛很快，这是由于该算法具有二次终止性，由表还可以看出最优解的搜索情况与初始值的选取有关，共轭梯度法的结果取决于初始搜索点，具有不确定性，因此需要多次搜索才能搜索到较好的结果。共轭梯度法具有局部收敛性，所以对于处理多峰问题，只用共轭梯度法不一定能够找到最优解。从上表 1 可以看出，遗传算法的收敛速度较慢，并且求解的最优解的精度也不高。而本文提出的算法所计算的结果不仅非常接近于全局最优解，而且收敛速度远快于传统的遗传算法。这说明了该算法能够充分利用遗传算法的全局搜索特性和共轭梯度法的快速收敛特性，提高运行效率，使之能够更快的收敛到精确解。

?1994-2016 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

5.2 测试函数（2）的结果与分析

测试函数（2）是遗传算法经典的测试函数 Shaffer 函数，Shaffer 函数是个极其复杂的经典测试函数，此函数最小值峰周围有一个圈脊，拥有无数个极小点。在求解该函数的最小值时很容易陷入局部极小点，它们的取值均为 0.009717，因此很容易停滞在此局部极小点。

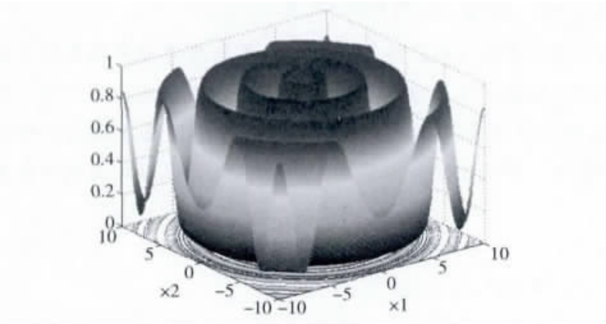

图 3 Shaffer 函数

从图 3 可以看出，这个函数确实非常复杂，函数具有很多局部极小点。同样地，分别利用共轭梯度法、遗传算法以及本文所提的基于共轭梯度和遗传算法的混合算法进行求解测试函数（2）。遗传算法和本文所提的算法参数均设置为：种群规模为 50，交叉概率 $p_c=0.8$，变异概率 $p_m=0.09$，迭代次数为 80。共轭梯度法的初始搜索点随机给出两个，则可得到结果见图 4。

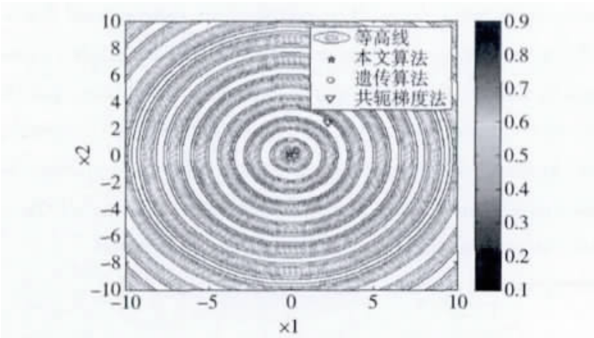

图 4 3 种算法计算结果的等高线

图 4 中，“☆”表示本文算法的计算结果，“o”表示遗传算法的计算结果，“▽”为共轭梯度法的计算结果。可以看出，本文所提算法的计算结果比共轭梯度法和遗传算法的结果要好很多。具体的计算结果见表 2。

从表 2 可以看出，共轭梯度法给定的初始值不同，所求的最优解的值也不同，收敛速度比较快，但是该算法具有一定的随机性，可见共轭梯度法只能收敛到局部极小点；遗传算法收敛到比较接近全局最优解的地方，但遗传算法的收敛速度比较慢。而本文所提的算法，在迭代到第 40 步的时候能精确收敛到全局最优解。不仅计算速度很快，而且计算结果非常准确。因而再次说明了本文所提的算法是非常有效的。

表 2 3 种算法的结果比较

执行算法	初始点	最优解 x^*	最优值 $f(x^*)$	收敛代数
共轭梯度法	（3.91，3.89）	（2.23，2.44）	0.0368	10
	（0.5，0.5）	（0.0135，0.0092）	0.00026	20
遗传算法	—	（0.34，0.34）	0.2140	80
本文算法	—	（0，0）	0	40

由上述的两个测试函数的比较结果可知，本文提出的混合遗传算法能结合确定性数学算法快速收敛的特点，因此该算法优点就是能更快地收敛到精确的全局最优解，并能够使得种群规模显著减小，提高了运算效率，可见该算法是一个有效性和鲁棒性的算法。

6 结束语

通过研究共轭梯度法的快速收敛特性以及遗传算法善于全局搜索的特点，本文提出了一种结合共轭梯度法和遗传算法的混合算法。该算法能充分利用共轭梯度法和遗传算法的优点，又能规避共轭梯度法可能收敛到局部最优以及遗传算法收敛较慢的缺点。本文最后通过两个测试函数进行测试，分别比较共轭梯度法、遗传算法和本文所提算法，结果表明本文所提的算法确实能更快地收敛到精确的全局最优解，其性能比共轭梯度法和遗传算法都好很多。

参考文献：

[1] XUE Yi. Principle and method of optimization [M]. Beijing: Beijing University of Technology Press, 2008: 163-169 (in Chinese). [薛毅. 最优化原理与方法 [M]. 北京：北京工业大学出版社，2008：163-169.]

[2] WU Feng, LI Xiumei, ZHU Xuhui, et al. Some important improvement for the gradient method [J]. Journal of Guangxi Unversity, 2010, 35 (4): 596-600 (in Chinese). [吴锋，李秀梅，朱旭辉，等. 最速下降法的若干重要改进 [J]. 广西大学学报，2010，35 (4)：596-600.]

[3] JIANG Jinsan, HE Chunxiong, PAN Shaohua. Optimization computation method [M]. Guangzhou: South China University of Technology Press, 2007: 132-138 (in Chinese). [蒋金山，何春雄，潘少华. 最优化计算方法 [M]. 广州：华南理工大学出版社，2007：132-138.]

[4] HONG Ling, MO Liliu. A new conjugate gradient method of global convergence [J]. Operations Research Transations, 2009, 13 (1): 95-106 (in Chinese). [洪玲，莫利柳. 一个新的全局收敛的共轭梯度法 [J]. 运筹学学报，2009，13 (1)：95-106.]

（下转第 699 页）

?1994-2016 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

191 (in Chinese). [**赵永屹，宿红毅，胡韶辉．基于 AJAX 与 J2EE 的新型 Web 应用的设计与实现** [J]. **计算机工程与设计**，2007，28 (1)：189-191.]

[11] Dmethvin. jQuery 1.9.1 Released [EB/OL]. http://blog.jquery.com/2013/02/04/jquery-1-9-1-released/html,2013.

[12] GAO Yang. Design and realization of three layers structure software framework based on.NET [J]. Computer Technology and Development, 2011, 21 (2): 77-81 (in Chinese). [**高扬．基于.NET 平台的三层架构软件框架的设计与实现** [J]. **计算机技术与发展**，2011，21 (2)：77-81.]

[13] LU Lu, LIU Fagui. Web-based remote monitoring system [M]. Beijing: Publishing House of Tsinghua University, 2008 (in Chinese). [**陆璐，刘发贵．基于 Web 的远程监控系统** [M]. **北京：清华大学出版社**，2008.]

[14] ZHENG Aqi. Visual C# network programming [M]. Beijing: Publishing House of Electronics Industry, 2011 (in Chinese). [**郑阿奇．Visual C# 网络编程** [M]. **北京：电子工业出版社**，2011.]

[15] MA Fengjie, LI Lihong, WANG Shujuan. Design and application of monitoring center in coal yield remote monitoring system [J]. Software, 2011, 32 (2): 90-93 (in Chinese). [**马丰杰，李丽宏，王淑娟．煤炭产量远程监测系统监控中心的设计与应用** [J]. **软件**，2011，32 (2)：90-93.]

[16] Matthew MacDonald, Adam Freeman, Mario Szpuszta. Pro ASP.NET 4 in C# 2010 [M]. Beijing: Post & Telecom Press, 2011 (in Chinese). [Matthew MacDonald, Adam Freeman, Mario Szpuszta. ASP.NET 4 **高级程序设计** [M]. **博思工作室，译．北京：人民邮电出版社**，2011.]

（上接第 689 页）

[5] Wang Chengjun, Yang Yongjian, Jing Li. A new filled function method for unconstrained global [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2009, 225 (1): 68-79.

[6] CAO Daoyou, CHENG Jiaxing. A genetic algorithm based on modified selection operator and crossover operator [J]. Computer Technology and Development, 2010, 20 (2): 44-51 (in Chinese). [**曹道友，程家兴．基于改进的选择算子和交叉算子的遗传算法** [J]. **计算机技术与发展**，2010，20 (2)：44-51.]

[7] BIAN Xia, MI Liang. Development on algorithm theory and its applications [J]. Application Research of Computers. 2010, 27 (7): 2426-2434 (in Chinese). [**边霞，米良．遗传算法理论及其应用研究进展** [J]. **计算机应用研究**，2010，27 (7)：2426-2434.]

[8] LIANG Ximing, XIAO Wei, LONG Wen, et al. Instructed-crossover genetic algorithm based on gradient information [J]. Journal of Computer Application, 2010, 30 (10): 2582-2569 (in Chinese). [**梁昔明，肖伟，龙文，等．基于梯度信息指导交叉的遗传算法** [J]. **计算机应用**，2010，30 (10)：2582-2569.]

[9] ZHENG Zhoushun, YANG Xiaohui, HUANG Guanghui. Genetic algorithm based on conjugate gradient algorithm [J]. Journal of Shangrao Normal University, 2008, 28 (3): 76-79 (in Chinese). [**郑洲顺，杨晓辉，黄光辉．嵌入共轭梯度算子的遗传算法** [J]. **上饶师学院学报**，2008，28 (3)：76-79.]

[10] YE Hai. Study on hybrid genetic algorithm for solving nonlinear problems [D]. Fuzhou: Fujian Normal University, 2009 (in Chinese). [**叶海．求解非线性问题的混合遗传算法研究** [D]. **福州：福建师范大学**，2009.]

[11] YE Hai, MA Changfeng. A hybrid genetic algorithm for nonlinear inequalities problems [J]. Journal of Fujian Normal University, 2010, 26 (1): 18-21 (in Chinese). [**叶海，马昌凤．求解非线性不等式组的混合遗传算法** [J]. **福建师范大学学报**，2010，26 (1)：18-21.]

[12] XUE Lingxiao. Researches on hybrid genetic algorithm based on conjugate gradient algorithm [D]. Fuzhou: Fujian Normal University, 2009 (in Chinese). [**薛凌霄．基于共轭梯度法的混合遗传算法研究** [D]. **福州：福建师范大学**，2009.]

?1994-2016 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net