经济批量问题的数学模型与算法新进展*

谢金星
(清华大学应用数学系　北京100084)

〖摘　要〗　经济批量问题的研究已经有几十年的历史了，它一般是讨论稳定的外部需求和有限的生产能力条件下实际生产过程的优化计划排产，具有重要应用价值。本文在综合大量国内外有关文献的基础上，对经济批量问题的数学模型和算法新进展作了比较系统、全面的介绍.

〖关键词〗　数学模型, 算法, 生产计划, 经济批量, 库存, 排序

1、引　　言

经济批量问题(ELSP——Economic Lotsizing and Scheduling Problem)的研究已经有几十年的历史了.当需要在一定生产设备上生产多个产品，且产品的外部需求比较稳定，计划期较长时，可以认为满足ELSP的条件。虽然单件生产是未来生产的典型模式，但在零部件加工车间等环境中一般仍可按照ELSP算法排产，因此其研究具有重要应用价值，仍然是近年来运筹学、管理科学和工业工程等领域的研究热点之一，并针对实际生产计划排产的需要提出了一些新的数学模型和算法，如讨论的生产能力不再仅限于单一设备，而是开始考虑并联和串联设备等。本文在综合大量国内外有关文献的基础上, 较全面地介绍ELSP的数学模型及算法, 并指出一些值得深入研究和努力实践的新方向. 由于目前的研究一般不考虑随机性, 所以本文只讨论确定性问题。

2、单机经济批量问题的模型

从不同批量模型的比较中可以看出[1]，ELSP可以看作与单层能力受限的批量问题（CLSP / SLCR——Capacitated Lotsizing and Scheduling Problem / Single Level with Constrained Resources）讨论的情形类似，但时间是连续无穷长的且需求定常.因此，普通的ELSP考虑的是在单台设备上生产多个产品的问题，且对于每个产品，需求率和生产率是给定的常数，库存费用正比于库存量和库存时间（边际库存费用是给定的常数），不许有欠量。ELSP的目标是确定生产批量，使总生产费用（只考虑生产准备费用和库存费用）最小。文献[2][3]给出了单机ELSP较完整的综述。

问题可描述如下：

- i — 产品指标（i=1,…,N为产品总数）;
- r_i — 产品i的需求率（单位时间的件数，i=1,…,N);
- p_i — 产品i的生产率（单位时间的件数，i=1,…,N);
- s_i — 产品i的生产准备时间（i=1,…,N);
- A_i — 产品i的生产准备费用（i=1,…,N);
- h_i — 产品i的边际库存费用（单位时间的单件库存费用，i=1,…,N)。

由于考虑的是无限长的计划期，因此一般假定每个产品都固定周期生产（非周期方法见§3。5），这不仅可以使问题的研究简化，生产实际中也更易于组织和管理。这时，产品i的生产周期$T_i(i=1,\cdots,N)$就是ELSP的决策变量。在每个周期T_i中产品i的单位时间总费用为

---

* 国家高技术计划（863）CIMS主题资助项目。本文已发表于《运筹与管理》杂志第4卷第1期（1995年），第44-50页。

$$C_i(T_i) = A_i/T_i + H_i T_i/2 \qquad (2.1)$$

其中 $H_i = h_i r_i(1-\rho_i), \rho_i = r_i/p_i$, (i=1, …, N).

因此ELSP的目标是在可行条件下求解

$$\text{(P1)} \qquad \underset{T_i}{Min}\sum_{i=1}^{N} C_i(T_i) = \sum_{i=1}^{N} A_i/T_i + (1/2)\sum_{i=1}^{N} H_i T_i \qquad (2.2)$$

可以看出，只要$\sum_{i=1}^{N}\rho_i < 1$,（本文讨论中均作此假定），则该问题一定有可行解，从而也一定有最优解。困难的是可行条件难以验证，文献[4]已经证明了给定$\{T_i\}_{i=1}^{N}$后判定ELSP的可行性是NP—难题，并给出了测试可行性的混合整数规划方法。即使N=2，3时，判定可行性也相当困难（[5][6]）。因此，现在一般算法都是从算法过程本身考虑有解的充分条件，即从外部来保证解的可行性，而不是去由$\{T_i\}_{i=1}^{N}$验证其可行性。

3、单机经济批量问题的一些算法

1、独立解（IS—Independent Solution)

如果对每个产品i分别考虑，可知当$T_i = (2A_i/H_i)^{1/2}$时（2.1）取最小值。又考虑到i的可行性条件，必须保证有足够的生产准备时间，即要求$T_i \ge s_i/(1-\rho_i)$,于是可得最优解为

$$T_i^* = Max\left\{(2A_i/H_i)^{1/2}, s_i/(1-\rho_i)\right\}, \quad \text{i=1, …, N.} \qquad (3.1)$$

这样得到的解$\{T_i^*\}_{i=1}^{N}$称为独立解。显然，它是ELSP的一个下界，但不一定可行。如果是可行解，则它就是最优解。

2、公共周期方法（CC—Common Cycle)

另一种简单的考虑方法是，如果假定所有产品有公共周期，即$T_i = T$(i=1, …, N),则由（2.2）可知问题等价于

$$\underset{T_i=T}{Min}\sum_{i=1}^{N} C_i(T_i) = \left(\sum_{i=1}^{N} A_i\right)\Big/T + \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{N} H_i\right)T \qquad (3.2)$$

考虑到可行条件，必须有足够的时间进行生产准备，必须满足$T \ge \sum_{i=1}^{N} s_i \Big/ (1-\sum_{i=1}^{N}\rho_i)$,于是（2.2）的最优解为

$$T_i^* = T^* = Max\left\{\left(2\sum_{i=1}^{N} A_i \Big/ \sum_{i=1}^{N} H_i\right)^{1/2}, \sum_{i=1}^{N} s_i \Big/ (1-\sum_{i=1}^{N}\rho_i)\right\} \qquad (3.3)$$

这样得到的解是ELSP的一个可行解，因此由此可以得到其最优解的上界。此方法研究较早[7,8,9]，其优点在于简单、可行，且容易增加其它额外的约束条件（通过Lagrange乘子解优化问题[10]）；缺点是解的费用可能较高，离最优解较远。

1989年, Jones和Inman在一定条件下给出了CC和IS解的相对误差界的估计[11]。

3、基本时段方法（BP—Basic Period)

如果假定所有产品i的生产周期都是某基本时段的正整数倍，即$T_i = n_i W$(n_i为正整数，i=1, …, N),则（2。2）式为

$$\underset{W,n_i}{Min}\sum_{i=1}^{N} C_i(T_i) = (\sum_{i=1}^{N} A_i/n_i)\Big/W + \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{N} n_i H_i\right)W \qquad (3.4)$$

同时，为保证可行性，该方法直接要求在W时段中可以容纳每个产品至少生产一次，这是保证可行性的一个充分条件：

$$\sum_{i=1}^{N}\left(s_i+\rho_i n_i W\right)\le W \tag{3.5}$$

1966年，Bomberger提出此方法时给出了一种动态规划算法[12]，当W给定时可确定出最优的序列$\{n_i^*\}_{i=1}^N$。这样，就必须对不同的W值进行大量计算后进行比较，因此计算量非常之大，没有多大的实用价值。1968年，Madigan给出了该算法的一种近似实施方案[13].

考虑到（3。5），若$\{n_i\}_{i=1}^N$给定，则最优的基本时段可用下式求出：

$$W^*=\left\{2\sum_{i=1}^{N}(A_i/n_i)\Big/\sum_{i=1}^{N}H_i n_i\right\}^{1/2} \tag{3.6}$$

于是，在BP方法提出后大量研究者采用启发式迭代算法求解最优值W^*和$\{n_i^*\}_{i=1}^N$（如文献[14,15]介绍的算法）。这2算法的最大缺点在于难以保证收敛到可行解，因此算法在迭代过程中不一定保证仍满足条件（3。5）。

保证求得可行解的算法归因于1976年Haessler和Hogue的工作[16]，他们以整数线性规划形式给出了可行性条件。更重要的是，他们给出了一种巧妙的启发式方法，通过限定$n_i=2^{k_i}$（k_i为非负整数），可以从一个不可行的计划转化得到一个可行的计划。而且，这种思想可以说是下节将要讨论的方法的早期雏形，对后来ELSP的研究的影响巨大。

4、扩展的基本时段法（EBP—Extended Basic Period)

BP方法为保证可行性，对W作了非常严格的要求，即条件（3。5）。在这样生成的计划中可能会产生大量的机器闲置，使得总的生产费用增加。EBP方法则对（3。5）进行了放宽，不再要求在一个基本时段W中能容纳所有产品的生产，而是在多个基本时段中综合考虑可行性条件。

Stankard和Gupta早在1969年提出的算法（称为“Paired Round Robin Scheduling”方法）已经可以看作是属于这一类[17]，相当于限定$n_i\in\{1,k\}$。给定k后，可将产品分组，在kW的时间周期中安排生产，保证可行性。但目前文献中一般认为1977年Elmaghraby正式提出这一方法[2]，因为他首先使用了“EBP”这一概念，并给出了动态规划算法，相当于在2W时间周期中考虑可行性，即对n_i为奇数或偶数分别位于一个基本时段W内保证可行性。

1978年，Fujita限定n_i只取1或偶数，以而进一步简化了计算[18]。1979年，Haessler则进一步限定$n_i=2^{k_i}$（k_i为非负整数，i=1,…,N),使得对EBP方法中的可行性验证更为容易[19]。1988年，Laraneta和Onieva寻找某整数m，使得$n_i\equiv 1$(i=1,…,m-1),再确定其它n_i(i=m,…,N),也是一样的目的[20]。1988年，Geng和Vickson也提出了一种改进算法[21]。

此外，对于N=2的情形，1982年Boctor实际上也提出了EBP型的求解算法[22]。1983年，Maxwell和Singh讨论了对n_i作某些特殊限定时，对最终解的性能的影响，结论是影响并不明显[23]。

5、非周期方法（N-CY ---- Non-Cyclic)

上述所有方法都要求每种产品按照固定的周期生产，这在一般实际生产中虽然是有利的，但毕竟大大缩小了原问题的求解空间。少数研究者采用非固定的生产周期，即在一个

相当长的运行时段T内，产品i可以有不相等的生产周期，从而没次生产可以有不相等的生产批量。

对非周期方法的早期研究只有1958年Rogers的工作[24]。直到1977年，才又有作者开始研究这类方法[25]。该方法的研究一般都要建立线性规划模型，应用数学规划理论来求解[26]，除非问题规模非常小。

对N=2的特殊情形，文献[27]28]也都讨论了非周期方法。

6、生产准备与生产排序相关时的ELSP（SDS ——– Sequence-Dependent Setup）

上述模型中都假定产品的生产准备时间或费用独立于生产产品序列。如果考虑到实际生产中大多数情况下生产准备时间或费用与排序有关，即当设备从生产产品j转换到生产产品i时，产品i的生产准备时间或费用分别为t_{ji}或$A_{ji}(1\le i, j\le N)$，则问题的复杂性将进一步增加。

对此模型一般有两种处理方法：其一是取平均值后采用前述方法进行计算[29]，即计算$t_i = \sum_{j=1}^{N} t_{ji} \Big/ N$, $A_i = \sum_{j=1}^{N} A_{ji} \Big/ N$（i=1,…,N）.其二是先求解旅行商问题，确定生产顺序，然后按照这个固定的生产顺序及其相关的生产准备时间或费用进行求解[3]。

4、经济批量问题的扩展及算法

1、并联系统经济批量问题

1986年，Maxwell和Singh证明了同型号并联机周期性生产的一些性质[30]; 1990年，Carreno首次给出了同型号并联机上多产品生产的经济批量问题的解法[31]。假设并联机总数为M，则问题有解的充分必要条件是

$$\sum_{i=1}^{N} \rho_i < M \tag{4.1}$$

Carreno将该问题的求解空间作了如下简化：（1）同一产品只在一台机器上加工（从成组技术的观点来说，这样的假设在实际生产中也有许多优点）。（2）“零切换”规则，即没一产品只有当它库存降低为0时才开始生产。（3）在所有机器上都采用公共周期(CC)方法. 在上述简化条件下，(4.1)不再是保证存在可行解的充分条件，因此需要显式地表示存在可行解的充分条件。简化后的问题可表示成如下的非线性混合整数规划问题：

（P2） $$Min\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}\left(A_j/T_j + \frac{1}{2}H_i T_j\right)X_{ij} \tag{4.2}$$

s.t. $$\sum_{j=1}^{M} X_{ij} = 1 \qquad i=1,\cdots,N \tag{4.3}$$

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\rho_i + {s_i}\Big/{T_j}\right)X_{ij} \le 1 \qquad j=1,\cdots,M \tag{4.4}$$

$$X_{ij} \in \{0,1\} \qquad i=1,\cdots,N \quad j=1,\cdots,M \tag{4.5}$$

$$T_j > 0 \qquad j=1,\cdots,M \tag{4.6}$$

其中 A_i, H_i, ρ_i, s_i意义同前，整数变量X_{ij}表示产品i是否分配在机器j上加工，T_j则是在j上加工的产品的公共周期。启发式方法按如下步骤计算：

Step 1. 找到（P2）的一个初始可行解，并计算其总费用作为上界Z_u。

Step 2. 固定T_j令$a_{ij} = A_i/T_j + H_i T_j/2, u_{ij} = \rho_i + s_i/T_j$ ，求解如下的广义赋值问题的一个可行解，并使目标函数值$Z < Z_u$

$$Z=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}a_{ij}X_{ij} \tag{4.7}$$

s.t. $$\sum_{j=1}^{M}X_{ij}=1 \qquad i=1,\cdots,N \tag{4.8}$$

$$\sum_{i=1}^{N}u_{ij}X_{ij}\le 1 \qquad j=1,\cdots,M \tag{4.9}$$

$$X_{ij}\in\{0,1\} \quad i=1,\cdots,N \quad j=1,\cdots M \tag{4.10}$$

如果找不到这样的解X_{ij}则停止。目前的解作为（P2）的解

Step 3. 将Step 2.中求得的X_{ij}固定，重新计算T_j和总费用，将其作为新的上界Z_u，回到Step 2.

2、串联系统经济批量问题

1992年，Karimi讨论了在一般的串联系统上单产品生产的经济批量问题[32]，是他1989年考虑的两阶段串联系统经济批量问题的推广[33]。

假定串联生产系统由N道工序串联而成，其中第一道工序是原材料供应商，最后一道工序是最终产品销售市场。再假定：（1）没道工序都按自己的生产周期生产；（2）不许缺货；（3）产品是无限可分的（或批量足够大，可以近似这样看待）；（4）不妨设只有工序N是连续生产工序（因为否则的话，可以以中间连续生产工序为分界线将串联系统分解两个独立的串联系统求解）。

对多个生产工序的经济批量问题，一般可采取如下四种策略：（1）整数分解批量策略（ISL — Integer Split Lotsizing),即后继工序的批量是其前趋工序批量的整数倍；（2）整数合并批量策略（IML — Integer Merge Lotsizing),即前趋工序的批量是其后继工序批量的整数倍；（3）整数分解合并批量策略（ISML），是（1）和（2）的综合；（4）非整数分解合并批量策略（NISML）。

采用NISML策略，单产品串联系统经济批量问题可描述如下：

（P3） $$Min\sum_{i=1}^{N}A_j\big/T_i+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N-1}H_jT_j \tag{4.11}$$

s.t. $$\beta_{i1}T_i=\beta_{i2}T_{i+1} \qquad i=1,\cdots,N-1 \tag{4.12}$$

$$GCM(\beta_{i1},\beta_{i2})=1 \qquad i=1,\cdots,N-1 \tag{4.13}$$

$$\beta_{i1},\beta_{i2}\in Z^{+} \qquad i=1,\cdots,N-1 \tag{4.14}$$

$$T_i\ge 0 \qquad i=1,\cdots,N \tag{4.15}$$

其中 A_i,H_i,T_i意义同前（只是这里的指标i表示工序号而不再是表示产品号），$GCM(i,j)$表示整数i和j的最大公因数，Z^{+}表示正整数集合。

Karimi给出了上述问题的解的性质，并提出了一种分枝定界最优算法和三种启发式求解方法。

5. 小　　结

有关ELSP的主要研究情况参见表1。此外，研究了平衡的经济批量问题[34]，研究了经济批量问题的可行性[35]，也给出了一篇有关综述[36]。ELSP的进一步理论研究和理论结果的实际应用是非常必要的。从研究内容上看，至少有如下几点值得引起特别的重视:

●应继续深入地进行最优算法和近似算法、启发式算法的研究: 各种经济批量算法的测试比较, 复杂度分析, 新算法的研究及应用等.

●进一步研究复杂生产环境中的经济批量问题, 如对组装系统的ELSP目前尚无研究。

●应重视对动态事件的考虑，因为实际生产环境总是动态的而不是纯静态的. 如考虑设备故障、能力的可替代性等，则研究更具实际意义. ●迫切需要建立和研究随机批量模型，因为实际生产环境总是存在不确定性.

表1。ELSP主要研究

方法类	文献	研究者	简要评述
CC	[7]	Eilon (1959)	有关公共周期的分析结果
	[8]	Krone (1964)	
	[9]	Maxwell (1964)	
BP	[12]	Bomberger (1966)	动态规划
	[13]	Madigan (1968)	非严格按BP计算
	[14]	Doll等 (1973)	迭代近似解
	[15]	Goyal (1973)	迭代近似解
	[16]	Haessler等 (1973)	整数线性规划，启发式保证可行
EBP	[17]	Stankard等 (1969)	周期乘子为1或K
	[2]	Elmaghraby (1978)	动态规划
	[18]	Fnjita (1978)	周期乘子为1或偶数
	[19]	Haessler (1979)	周期乘子为2的乘方
	[20]	Larraneta等 (1988)	周期乘子为1（i<m）
	[21]	Geng等 (1988)	改进方法
	[22]	Bocter (1982)	N=2
N-CY	[24]	Rogers (1968)	最早的非周期方法
	[25]	Delporte等 (1977)	数学规划
	[26]	Dobson (1987)	数学规划
	[27]	Goyal (1984)	N=2且setup time=0
	[28]	Lee等 (1989)	N=2
SDS	[29]	Galvin (1987)	采用ＣＣ方法
其它	[31]	Carreno (1990)	并联系统ELSP问题的研究
	[33]	Karamil (1992)	串联系统ELSP问题的研究

〖致谢〗 衷心感谢中国科学院韩继业先生对本研究课题的大力支持和清华大学应用数学系姜启源、谭泽光教授及邢文训同志对本文提出的意见和建议.

参考文献

[1] 谢金星，批量问题的数学模型新进展. (北京清华大学应用数学系技术报告,1994)

[2] Elmaghraby S. E., The Economic Lot Scheduling Problem (ELSP):Review and Extensions, Mgmt. Sci., 24/6(1978), 587-598.

[3] Lopez M. A. N., B. G. Kingsman, The Economic Lot Scheduling Problem: Thery and Practice, Int. J. Prod. Econ., 23/2(1991), 147-164.

[4] Hsu W.-L., On the General Feasibility Test of Scheduling Lotsizes for Several Products on One Machine, Mgmt. Sci., 29/1(1983), 93-105.

[5] Vemuganti R. R., On the Feasibility of Scheduling Lot Sizes for Two Products on One Machine, Mgmt. Sci., 24/12(1978), 1668-1673.

[6] Glass C. A., Feasibility of Scheduling Lot Sizes of Three Products on One Machine, Mgmt. Sci., 38/10(1992), 1482-1494.
[7] Eilon S., Economic Batch-Size Determination for Multi-Product Scheduling, Opnl. Res. Q., 10/4(1959), 217-227.
[8] Krone K., A Note on the Economic Lot Size for Multi-Purpose Equipment, Mgmt. Sci., 10/3(1964), 461-464.
[9] Maxwell W., The Scheduling of Economic Lot Sizes, Naval Res. Logist. Q., 11/2(1964), 89-124.
[10] Parsons R. J., Multiproduct Lot Size Determination When Certain Restrictions are Active, J. IE, 17/7(1966), 360-363.
[11] Jones P. C., R. R. Inman, When is the Economic Lot Scheduling Problem Easy? IIE Trans., 21/1(1989), 11-20.
[12] Bomberger E., A Dynamic Programming Approach to a Lot Size Schduling Problem, Mgmt. Sci., 12/11(1966), 778-784.
[13] Madigan J., Scheduling a Multi-Product Single Maching System for an Infinite Planning Period, Mgmt. Sci., 14/11(1968), 713-719.
[14] Doll C. L., D. C. Whybark, An Iterative Procedure for the Single-Machine Multi-Product Lot Scheduling Problem, Mgmt. Sci., 20/1(1973), 50-55.
[15] Goyal S. K., Scheduling a Multi-Product Single-Maching System, Opnl. Res. Q., 24/2(1973), 261-269.
[16] Haessler R., S. L. Hogue, A Note on the Single Machine, Multi-Product Lot Scheduling Problem, Mgmt. Sci., 22/8(1976), 909-912.
[17] Stankard M., S. Gupta, A Note on Bomberger's Approach to the Lot Size Scheduling: Heuristic Proposed, Mgmt. Sci., 15/7(1969), 449-452.
[18] Fujita S., The Application of Marginal Analysis to the Economic Lot Scheduling Problem, AIIE Trans., 10/4(1978), 354-361.
[19] Haessler R., Improved Extended Basic Period Procedure for Solving the Economic Lot Scheduling Problem, AIIE Trans., 11/4(1979), 336-340.
[20] Larraneta J., L. Onieva, The Economic Lot Scheduling Problem: A Simple Approach, J. Opnl. Res. Soc., 39/4(1988), 373-379.
[21] Geng P., R. Vickson, Two Heuristics for the Economic Lot Scheduling Problem: An Experimental Study, Naval Res. Logist. Q., 35/4(1988), 605-617.
[22] Bocter F. F., The Two-Product, Single-Machine, Static-Demand, Infinite-Horizon Lot Scheduling Problem, Mgmt. Sci., 28/8(1982), 798-807.
[23] Maxwell W., H. Singh, The Effect of Restricting Cycle Time in the Economic Lot Scheduling Problem, IIE Trans., 15/3(1983), 235-241.
[24] Rogers J., A Computational Approach to the Economic Lot Scheduling Problem, Mgmt. Sci., 4/3(1958), 264-291.
[25] Delporte C., L. Thomas, Lot Scheduling and Sequencing for Products on One Facility, Mgmt. Sci., 23/10(1977), 1070-1079.
[26] Dobson G., The Economic Lot Scheduling Problem: Achieving Feasibility Using Time-Varying Lot Sizes, Opns. Res., 35/5(1987), 764-771.
[27] Goyal S. K., Determination of Economic Production Quantities for a Two-Product Single Machine System, Int. J. Prod. Res., 22/1(1984), 121-126.

[28] Lee C. Y., S. Danusaputro, Economic Lot Scheduling for Two-Product Problem, IIE Trans., 21/2(1989), 162-169.
[29] Galvin T., Economic Lot Scheduling Problem with Sequence Dependent Setup Costs, Prod. Invent. Mgmt., 28/1(1987), 96-105.
[30] Maxwell W., H. Singh, Scheduling Cyclic Production on Several Identical Machines, Opns. Res., 32/3(1986), 460-463.
[31] Carreno J. J., Economic Lot Scheduling for Multiple Products on Parallel IndenticalProcessors, Mgmt. Sci., 36/3(1990), 348-358.
[32] KaramiI. I. A., Optimal Cycle Times in Multistage Serial Systems With Set-Up and Inventory Costs, Mgmt. Sci., 30/10(1992), 1467-1481.
[33] KaramiI. I. A., Optimal Cycle Times in a Two-Stage Serial Systems With Set-Up and Inventory Costs, IIE Trans., 21/4(1989), 324-332.
[34] Kono H., Z. Nakamura, The Balanced Lot Size for a Single-Machine Multi-Product Lot Scheduling Problem, J. Opnl. Res. Soc. Jan., 33/2(1990), 119-138.
[35] Davis G., Scheduling Economic Lot Size Production Runs, Mgmt. Sci., 36/8(1990), 985-998.
[36] Goyal S. K., A. Gunasekaran, Multi-Stage Production-Inventory System, Eur. J. Opnl. Res., 46/1(1990), 1-20.

New Developments of Mathematical Models and Algorithms of ELSP

Xie Jinxing
Dept. of Appl. Math., Tsinghua University
Beijing 100084, P.R.China

Abstract

The economic lotsizing and scheduling problem (ELSP) is becoming more and more interested by researchers on the fields of operations research (OR), management science (MS), and industrial engineering (IE), etc. This paper surveys the major studies of ELSP by now, especially the recent developments of the models and solution algorithms of ELSP, and points out some new directions for further researches and applications.

Keywords: Production/Inventory, Planning/Scheduling,
Economic Lotsizing Problems, Mathematical Models, Algorithms