

实数遗传算法交叉策略的改进

陈小平¹, 于盛林²

(1. 苏州大学电子信息学院, 江苏苏州 215021; 2. 南京航空航天大学测试工程系, 江苏南京 210016)

摘 要: 本文介绍了实数遗传算法交叉策略的一种改进方法, 采用新的交叉策略决定遗传算法中子代个体的位置, 可以使子代快速地向更高适应度的区域移动. 实验结果说明使用这种改进的实数遗传算法可以极大地提高算法获得最优解的速度.

关键词: 遗传算法; 交叉策略; 适应度

中图分类号: TP301.6 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112(2003)01-0071-04

Improvement on Crossover Strategy of Real-valued Genetic Algorithm

CHEN Xiao-ping¹, YU Sheng-lin²

(1. School of Elecronics and Information Engineering, Suzhou University, Suzhou, Jiangsu 215021, China;

2. Dept of Measurement and Testing Engineering, NUA, Nanjing, Jiangsu 210016, China)

Abstract: This paper presents an improvement on real-valued genetic algorithm that utilizes a new crossover strategy to steer the location of offspring in genetic algorithm. The use of such a crossover strategy provides the capacity of quickly moving offspring toward regions with improved fitness. Experimental results demonstrate that improved real-valued genetic algorithm could greatly accelerate the speed on obtaining optimal solutions.

Key words: genetic algorithms; crossover strategy; fitness

1 引言

遗传算法(Genetic Algorithm, GA)是 Darwin 生物进化理论的哲学思想启发的搜索技术. GA 的基本概念和理论框架, 是由 Holland 首先提出的^[1], 并由 Goldberg 作了广泛的探索^[2]. GA 最具有吸引力的特点是它不需要指导搜索的附加知识. 一般而言, GA 通过生物进化启发的复制、交叉和变异算子搜索字符串的各种结构. 模式定理证明了 GA 具有全局搜索的能力. GA 中常用的编码方法有二进制编码、实数表示和树编码等. 对于连续变量情况, 实数表示可以解决精度要求和计算量之间的矛盾. 交叉类似于生物繁殖过程中基因成分的交换. 这种操作算子被认为是贡献于 GA 的全局搜索性能的最重要的因素^[3], 尽管变异算子在一定程度上也有这种贡献. 一般的实数 GA 中的交叉策略有以下疑问. 首先是两个父体经交叉操作后得到的子体限定于两个父体区间内, 使整个群体寻找最优受到了限制, 并有未成熟收敛于局部最优的可能, 子体若要跳出两个父体的区间, 只能借助于算法中的变异操作, 而变异操作的概率一般是很小的, 若一味地加大变异概率, GA 就退化成一般的随机搜索算法. 其次, GA 中搜索方向在交叉策略中很少被强调, 搜索方向指示 GA 在一定领域中潜在的前进方向. 由于在交叉策略中常常忽略给出指导性的搜索方向, 不能使子代群体向高质量区域快速移动. 交叉策略中随机数的

使用又会引起候选解在搜索空间中处于随机的位置, 这降低了群体搜索的速度. 如果最优解所在区域距当前测试区域很远又不能预先识别的话, 就降低了发现最优解的速度. 本文对实数 GA 的交叉策略进行了改进, 利用逼近方法定位子代群体的交叉策略, 此策略既克服了子体不能越出父体区间的限制, 又强调了 GA 潜在的搜索方向使得子代群体能在此方向前进, 快速搜索到其他高质量的区域. 通过几个测试函数的实验结果说明这种改进的有效性.

2 遗传算法的收敛性定理及实数遗传算法

2.1 遗传算法的收敛性定理

定义 A 是一个方阵^[4],

(1) 若对所有的 i, j , $a_{ij} > 0$, 记为 $A > 0$, 则 A 是严格正定的(positive);

(2) 若 $A \geq 0$ 若存在 $k \in N$, 使得 $A^k > 0$, 则 A 是正定的(primitive);

(3) 若 $A \geq 0$, 若对所有的 i , $\sum_{j=1}^n a_{ij} = 1$, 则 A 是随机的(stochastic).

简单遗传算法(Simple Genetic Algorithms, SGA)可用齐次有限 Markov 链来描述, 状态空间为群体空间, 群体空间的概率变化由复制、交叉、变异三种基因操作引起, 它们的作用分别

用转移概率矩阵 R , C , M 来描述, 自然地, SGA 的 Markov 链的转移概率矩阵 $P = RCM$.

对于遗传算法, 存在以下几个定理^[4]:

定理 1 SGA 的转移概率矩阵 $P = RCM$ 是严格正定的.

定理 2 SGA 不是全局收敛的.

定理 3 最优保存 SGA 是全局收敛的.

定理的证明是基于这样的假设, GA 的 Markov 链的转移步数趋于无穷, 即 GA 的遗传代数无穷. GA 收敛性定理证明中的关键之处在于要求 $P > 0$ 而 $P > 0$ 的条件是由 $M > 0$ 引起的. GA 搜索最优的速度和效率(即在有限的遗传代数之内发现最优解)一直是许多研究人员研究的课题.

2.2 实数遗传算法

实数 GA 与二进制编码 GA 一样, 重复执行复制, 交叉, 变异三种操作, 直至发现最优解或到达设定的代数. 设群体规模为 N (偶数), 交叉概率为 p_c , 变异概率为 p_m .

复制 根据适应度按比例从父体中选择 N 个个体, N 为偶数.

交叉 在 $[0, 1]$ 上均匀分布产生样本 c_i ($i = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1$), 以概率 p_c 对复制的 N 个个体作如下交叉

$$\begin{cases} x_{2i}^{t+1} = c_i \cdot x_{2i}^t + (1 - c_i) \cdot x_{2i+1}^t \\ x_{2i+1}^{t+1} = (1 - c_i) \cdot x_{2i}^t + c_i \cdot x_{2i+1}^t \end{cases} \quad i = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1 \quad (1)$$

式中 x_{2i}^t, x_{2i+1}^t 是一对交叉前的个体, $x_{2i}^{t+1}, x_{2i+1}^{t+1}$ 是交叉后的子代个体.

变异 以概率 p_m 对交叉后的 N 个子代个体进行变异

$$x_k^{t+1} = x_k^{t+1} + c_k \quad k = 0, 1, \dots, N - 1 \quad (2)$$

式中 c_k 是区间 $[x_k^L - x_k^{t+1}, x_k^U - x_k^{t+1}]$ 上均匀分布的随机数, x_k^U 和 x_k^L 是搜索区间的上限和下限, 这样可保证变异后的个体仍处在搜索区间内.

观察式(1)的交叉操作, 可以发现这种交叉策略不允许后代个体处于区间 $[x_{2i}^t, x_{2i+1}^t]$ (假设 $x_{2i}^t < x_{2i+1}^t$) 之外. 后代个体位置的这种限制没有最大化改善后代个体的基因模式的程度, 限制了整个群体的搜索速度, 并有未成熟收敛于局部最优的可能, 后代若要跳出 $[x_{2i}^t, x_{2i+1}^t]$ 之界, 只能借助于算法中的变异操作式(2). 如此, 采用式(1)(2)的交叉变异的实数 GA 的性能将主要取决于变异操作. 式(1)交叉操作的作用有可能无效. 一般来说, 变异概率是很小的, 由 GA 的收敛性定理知, 只要变异概率 $p_m > 0$, 采用最优个体保持在时间趋于无穷的情况下总能收敛于全局最优, 但这在实际应用中是不能接受的. 变异概率越小, 收敛于全局最优的速度将越慢. 有些研究人员提出变异概率自适应变化的方法, 即当算法未成熟收敛于局部最优时, 加大变异概率. 但这种加大变异概率的方法似乎存在盲目性, 不能给出算法指导性的搜索方向使子代群体向高质量区域快速移动. 若一味地加大变异概率, GA 将退化成一般的随机搜索算法, 将失去 GA 的优势. 由以上分析, 式(1)的交叉操作是有疑问的, 本文对实数 GA 的交叉策略提出改进.

3 实数遗传算法交叉策略改进

3.1 交叉策略中的逼近方法

考虑具有连续参数的无约束的最大化问题

$$\begin{cases} \text{maximize } f(x) \\ \text{subject to } x_i^L \leq x_i \leq x_i^U \quad i = 0, 1, \dots, N - 1 \end{cases} \quad (3)$$

此处 x 是参数向量, x_i^U 和 x_i^L 分别是 x_i 的上界和下界. 在交叉操作中使用逼近方法有两个主要原因: (1) 估计潜在的搜索方向; (2) 充分利用交叉对提供的遗传信息. 在没有先验知识的情况下, 这样的潜在搜索方向通常是不清楚的. 但是, 利用适应度 $f(x)$ 的值估计这种方向是可能的. 一般地, 每个交叉对两个父体之间的适应度 $f(x)$ 是不相同的, 两个父体之间适应度差异不仅在繁殖过程中有贡献, 而且可能为生成更好质量的子代指示潜在的搜索方向. 因此, 利用适应度差异生成子代的过程增加了遗传信息的利用, 这种信息在普通的交叉策略中一般是被忽略的.

如果搜索方向可线性逼近, 利用父体之间的适应度差, 规范化搜索方向 d 可以表示为

$$d = \frac{f_{high} - f_{low}}{f_{high}} \quad (4)$$

此处 f_{high} 和 f_{low} 表示交叉对中两父体的适应度, $f_{high} > f_{low}$. 由于 GA 的工作原理是基于适应度的随机搜索, 式(4)是一合理的估计. 如果一个个体沿着方向 d 从区域 (f_{low}) 向另一个区域 (f_{high}) 前进, 式(4)指出该个体可以改善其适应度. 这个估计搜索方向的几何表示如图 1 所示.

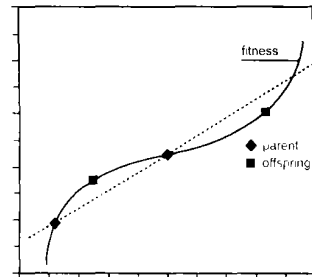


图 1 搜索方向的线性逼近

一些研究人员^[5-7]曾研究过用这种线性逼近在 GA 中建立指导的搜索方向, 后代个体位于

$$x^{t+1} = x_{low}^t + \alpha (x_{high}^t - x_{low}^t) d \quad (5)$$

此处 $x_{low}^t = \min\{x_{2i}^t, x_{2i+1}^t\}$, $x_{high}^t = \max\{x_{2i}^t, x_{2i+1}^t\}$ (参照式(1)), $\alpha \in [0, 1]$ 是决定后代位置的一随机距离系数. 通过在两个父体之间连一条线, 沿这条线随机地选择两个点生成后代个体 (如图 1 所示) 完成交叉操作.

然而, 式(5)的交叉策略与式(1)一样也不允许后代个体处于区间 $[x_{low}^t, x_{high}^t]$ 之外.

3.2 交叉策略改进

根据前述实数 GA 的交叉策略存在的疑问, 我们提出的实数 GA 交叉操作如下:

$$\begin{cases} x_1^{t+1} = x_{low}^t + \alpha_1 (x_{high}^t - x_{low}^t) d \\ x_2^{t+1} = x_{low}^t + \alpha_2 (x_{high}^t - x_{low}^t) d \end{cases} \quad (6)$$

式中 α_1 是 $[0, 1]$ 上均匀分布的随机数, α_2 是 $[1, 2]$ 上均匀分布的随机数, 这样 x_1^{t+1} 将处于 $[x_{low}^t, x_{high}^t]$ 界内, x_2^{t+1} 就有可能处于 $[x_{low}^t, x_{high}^t]$ 界外, 当然 x_2^{t+1} 也有可能处于整个搜索区间之外. 若如此则按式(6)重新生成 x_2^{t+1} . 式(6)有以下几个重要特

点: (1) 克服了后代个体位置的限制; (2) 引进了后代个体基因模式的线性改善, 即一个弱的个体(适应度为 f_{low} 的个体)能向着一强的个体(适应度为 f_{high} 的个体)改善其基因类型, 两父体之间的大的距离 $x_{high}^i - x_{low}^i$ 和大的适应度差 $f_{high} - f_{low}$ 对改善有大的贡献, 这样在交叉期间弱个体比强个体有更多的改善; (3) 通过修改个体的参数向量 x 就具备了搜索新个体的能力, 只要所有的个体没有相同的适应度, 新的模式(它不出现在它们的父体中)就能产生, 新模式的引进保持了群体中基因的多样性, 这样避免了未成熟收敛于局部最优的可能; (4) 本身具备变异的效果, 可以省略变异算子。

4 测试函数及实验结果

本节将改进的实数 GA 应用于一类测试函数, 并与一般实数 GA 进行了比较。选取 3 个具有相当复杂度的测试函数^[8], 这些测试函数都包含多个已知的极大值。所选函数如下,

$$f_1(x,y)=0.5-\frac{\sin^2\sqrt{x^2+y^2}-0.5}{(1+0.001(x^2+y^2))^2}, \quad -10 \leq x,y \leq 10 \quad (7)$$

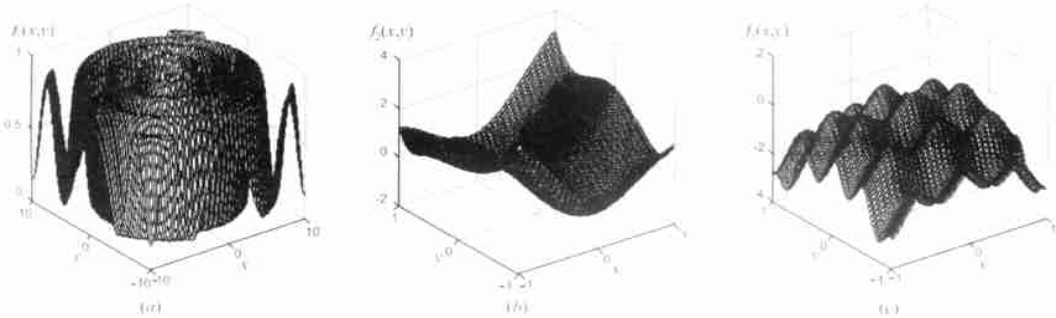


图2 测试函数图形

两种实验方法中群体规模均为 100, 总进化代数均设为 100, 允许最优解性能无改善的代数为 20, 即连续运行算法 20 代, 最优解没有改善则结束算法, $M2$ 方法中的参数 α_1 和 α_2 分别在 $[0, 1]$ 和 $[1, 2]$ 上随机生成。在 PIII300 微机(内存 64M)上分别用两种方法实验 20 次, 为了有比较性, $M1$ 与 $M2$ 方法的初始群体取为一致。所得结果如表 1 所示, 表中 $x, y, f(x, y)$ 为算法结束时的典型值, t 表示算法平均运行时间(单位为秒), g 表示平均运行代数, p 为收敛到全局最优的概率。

表 1 测试函数两种算法结果之比较

f	M	x	y	$f(x,y)$	$t(s)$	g	$p(\%)$
f_1	$M1$	0.0360951	0.0150883	0.998469	14.61	48	20
	$M2$	-0.0022775	-0.0021200	0.999990	7.23	28	90
f_2	$M1$	-0.1049010	0.6912210	-1.026773	13.29	42	10
	$M2$	0.0998189	-0.7107720	-1.031193	7.69	27	95
f_3	$M1$	-0.0125966	0.0022719	0.996771	13.62	45	60
	$M2$	0.0024325	-0.0041858	0.999024	7.36	31	100

由于函数 f_1 存在无穷多个局部最小值, 采用 $M1$ 方法运行多次, 收敛于未成熟解的概率非常大。而 $M2$ 方法从 $x, y, f(x, y)$ 的最终值, 运行时间和收敛概率来看, 是成功的, 虽然没有完全达到最大值 1, 这是因为 x, y 是用实数表示的缘故。

$$f_2(x,y)=\left(4-2.1x^2+\frac{x^4}{3}\right)x^2+xy+(-4+4y^2)y^2, \quad -10 \leq x,y \leq 10 \quad (8)$$

$$f_3(x,y)=-(x^2+2y^2-0.4\cos(3\pi x)-0.6\cos(4\pi y)), \quad -10 \leq x,y \leq 10 \quad (9)$$

函数 f_1 有无数个局部极大点, 但只有一个(0, 0)为全局最大点, 最大值为 1。此函数的最大峰周围有两圈脊, 它们的取值分别为 0.990284 和 0.962776, 因此优化过程中很容易停滞在这些局部极大点。函数 f_2 有 6 个局部极小点, 有两个点(-0.0898, 0.7126)和(0.0898, -0.7126)为全局最小点, 最小值为-1.031628。函数 f_3 是一个多峰函数, 但只有一个全局最大点(0, 0), 最大值为 1。图 2 是三个测试函数的三维图形。所选实验方法为:

$M1$ ——一般实数 GA, 交叉概率 $p_c=0.9$, 变异概率 $p_m=0.01$, 按比例选择并保留最优个体;

$M2$ ——采用本文改进的实数 GA, 交叉概率 $p_c=1$, 无变异算子, 按比例选择并保留最优个体。

函数 f_2 的测试结果与 f_1 类似。函数 f_3 由于局部极大点较少, 采用 $M1$ 方法, 收敛概率尚可, 但运行时间长于 $M2$ 方法。由表中得出的结论是实数 GA 采用本文改进的交叉策略的效果从运行时间和收敛概率两方面都要优于一般的实数 GA。

图 3 给出三个测试函数在两种不同实验方法 $M1, M2$ 下的性能比较, 横坐标为算法进化代数(gen), 非运行时间, 纵坐标为最优个体对应的函数值 $f_{opt}(x, y)$ 。图 3(a)为求 $f_1(x, y)$ 的最大值, 图 3(b)为求 $f_2(x, y)$ 的最小值, 图 3(c)为求 $f_3(x, y)$ 的最大值。图中只画出了算法前 60 代的进化曲线, 这是由于在算法程序中采用了连续 20 代最优个体无变化则结束算法的准则, 也就是说算法结束前 20 代已收敛于全局最优或局部最优, 之后进化曲线为一水平线。图中也清楚地表明采用本文改进的实数 GA 的性能明显优于一般实数 GA 的性能, $M2$ 方法收敛于全局最优的速度要明显快于 $M1$ 方法, 这是由于提出的改进方法具有指导搜索方向的能力, 后代向着适应度改善区域连续前进的事实。换句话说, 通过将适应度差异引入交叉操作过程, 后代将沿着成功的搜索方向进化, 此方向可以从父代中识别出来。通过比较, 一般实数 GA 不能集中到潜在的搜索方向使得最好个体及整个群体适应度改善的速度受到限制。

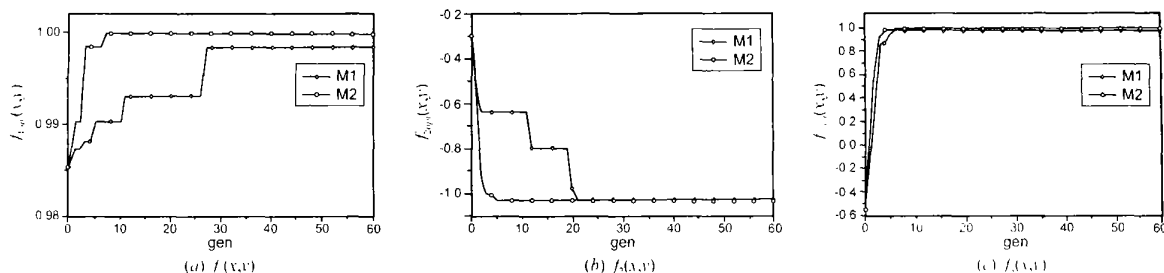


图3 两种实验方法性能之比较

5 结束语

本文探讨了实数 GA 的一种改进的交叉策略, 它使用一个粗糙的但似乎是合理的逼近方法. 几个不同的测试函数运行结果说明该交叉策略可以定位后代个体在合理的搜索方向上而不失去基因的多样性, 可以使算法快速搜索到高质量解, 而一般实数 GA 不能提供合理的搜索方向使得最好个体及整个群体适应度改善的速度受到限制.

参考文献:

- [1] Holland J H. Adaptation in Natural and Artificial Systems [M]. USA: Univ. of Michigan, 1975.
- [2] Goldberg D E. Genetic Algorithms; In Search Optimization & Machine Learning [M]. Addison-Wesley Publishing Company, Reading, MA, 1989.
- [3] Schaffer J, Eshelman L. On crossover as an evolutionary viable strategy [A]. Fourth International Conference on Genetic Algorithm [C]. Morgan Kaufmann, San Diego; FICGA, 1991; 61—68.
- [4] Rudolph G. Convergence properties of canonical genetic algorithms [J]. IEEE Trans. on Neural Networks, 1994, 5(1): 96—101.

- [5] Wright A. Genetic algorithm for real parameter optimization [A]. The First Workshop on the Foundations of Genetic Algorithms and Classifier Systems [C]. Morgan Kaufmann, San Diego; WFGACS, 1990. 205—218.
- [6] Pham D T, Jin G. Genetic algorithm using gradient-like reproduction operator [J]. Electronics Letters, 1995 31(18): 1558—1559.
- [7] Anderson K S, YuHung Hsu. Genetic crossover strategy using an approximation concept [A]. Proc. of 1999 Congress on Evolutionary Computation [C]. Washington D. C; CEC, 1999. 527—533.
- [8] 候格贤, 吴成柯. 遗传算法的性能分析 [J]. 控制与决策, 1999, 14(3): 257—260.

作者简介:

陈小平 男, 1965 年出生于江苏金坛, 副教授, 2000 年于南京航空航天大学获博士学位, 研究领域为进化计算, 信号处理, 人工免疫系统, 已发表论文十余篇. email: chenxp26@public1.sz.js.cn

于盛林 男, 1941 年出生于江苏扬中, 1964 年毕业于南京航空学院, 现为南京航空航天大学测试工程系教授, 博士生导师, 研究领域为信号处理, 混沌分形理论及应用.