

最小费用流的生成树算法

王如森

(航天工程系)

[摘要] 本文先用生成树算法,迅速找到一个网络最小费用流的可行初始解,然后再用网络的单纯形解法,得出最小费用流的最优解。由于初始可行解具有优化的成分,又接近最优解,所以对提高运算效率很有益处。

关键词: 最小费用流; 生成树; 最优解

中国图书资料分类号: O22; O157.5; O233

0 引言

网络最小费用流的树算法及其它算法,都涉及确定初始可行解的问题。在这些算法中,初始解的选择具有一定的盲目性,因此对于复杂的网络,初始可行解的确定变得棘手而失去其应用价值。

本文对网络树算法进行了改进,先从需求点向供应源点建立一条反向链,生成一颗树,按此固定方法得到网络最小费用流的初始可行解,然后再用网络的单纯形解法,得出最小费用流的最优解。由于本文的初始可行解不是盲目的,它具有优化的成分,又接近最优解,所以提高了运算的效率。

1 初始可行生成树解的生成

设网络为 $G(N, B)$,其中 N 为网络端点的集合, B 为网络边的集合。网络边 (P, q) 的流、上界和单位成本分别记作 x_{pq} 、 u_{pq} 和 C_{pq} , p 和 q 分别为边 (p, q) 的起点和终点。

定义网络端点 q 的供应量为 r_q ,如 q 为供应源点,则 $r_q > 0$;如 q 为转运点,则 $r_q = 0$;如 q 为需求点,则 $r_q < 0$,还定义 $Q_q = -r_q$ 为 q 点的需求量。把所有需求点组成一个集合,记作 L , L 中元素按需求量大小排列, Q_q 最大者放在 L 的首位。

对网络 $G(N, B)$ 增设一个根点 a ,将原网络 $G(N, B)$ 扩展为一新网络 $G'(N', B')$,其中 $N' = N \cup a$, $B' \supset B \cup (s, a)$, s 为供应源点,它可以是多个。规定 $Q_s = r_s = 0$,边 (s, a) 的参数为 $x_{sa} = r_s$, $u_{sa} = C_{sa} = \infty$,在具体运行中 x_{sa} 随 r_s 的减小而减小。

在本算法中,常常需要增设根点 a 至 N 中端点的边,同样规定这些边的成本与上界均为 ∞ 。这些附加边以及 (s, a) 都可以是网络 G' 生成树的组成部分。

根据上述规定,显然,网络 G' 与网络 G 的最优解是一致的。而为了获得 G' 的最优解,

本文于1987年1月12日收到。*本文只考虑网络边流下界为0的情况。对于下界大于0的网络,经过变换可把此网络变换为各边下界为0的网络。

0115543

需要将附加边上的流变为0，在本文内容2中将涉及此点。

初始可行生成树的生成原理是从集合 L 中的需求点向供应源点建立一个反向链。每一个链从需求点开始，通过与此点相邻且成本较小的边扩展到邻近的端点。把这新扩展到的端点作为链的最低点，链只能从这最低点以同样的方式向源点扩展。同时还规定，如果被扩展边上的流与此边的上界相等时，则此边不算链的一部分。

在链的扩展过程中， L 中的元素成分要发生变化，各元素的需要量也要减小。当所有需求点都得到满足时， L 将成为空集，如果此时扩展所得的链，仍不能返回源点，则在 G' 中增设根点 a 至 N 中链的最低点的边。这样每条返回链或者被与 G 中从供应点 S 出发的边连结起来，或者被与从根点 a 出发的附加边连结起来，而 S 与 a 是连结的，所以这些反向链成了 G' 中一个生成树的主体部分。

其次检查网络 G' 中是否有端点不在此生成树的主体上，如这类端点存在，则这类端点可分为孤立点和非孤立点两类。对于非孤立点，用 B 中边来与它连结，对于孤立点 q 用 B' 中边 (a, q) 来连结，这些边上的流只能为0。

至此得到网络 G' 的生成树，同时也得到了一个初始可行解，它包括树边上流的基底解和余树边上流的非基底解。具体运行框图如图1(a)与1(b)所示。

框图1(a)表示由需求点反向至供应源点的链的生成过程。此链成为 G' 的生成树的主体，框图中各集合的定义是：

L 表示需求点集合， $L \leftarrow L - \{q\}$ 表示把集合 L 中端点 q 从 L 中移出。

$$\begin{aligned} D_1^1 &= \{(p, q) : (p, q) \in B, r_p > 0, u_{pq} \leq \min [Q_p, x_{pa}]\}, \\ D_2^2 &= \{(p, q) : (p, q) \in B, r_p > 0, Q_p < u_{pq}, Q_p \leq x_{pa}\}, \\ D_3^3 &= \{(p, q) : (p, q) \in B, r_p = 0, \text{且 } p \text{ 不是链的一部分}\}. \end{aligned}$$

框图1(b)表示把漏掉的端点连到图1(a)所产生的链上，从而完成网络 G' 的生成树。框图中：

$|N|$ 表示网络 G 的端点数。

$$D_4^4 = \{(p, q) : (p, q) \in B, \text{且 } p \text{ 和 } q \text{ 中仅有一点与生成树相连}\}$$

研究图2所示的网络。

图中供应源点为1，需求点为6。

方括号中表示端点的供应量 r_i ，圆括号中依次表示边的成本和流的上界。

图3表示该网络生成树的生成过程，其中三角括号表示边的流。而记号 $-| \rightarrow$ 表示该边流与该边流的上界相等，且该边不是链的组成部分，从而也不为生成树边。

2 用网络单纯形算法得最优解

网络单纯形算法是选择余树边来替换生成树边，使网络成本减小。具体步骤是：

2.1 定出网络 G' 中各端点位能 π

规定根点 a 的位能 $\pi_a = 0$ 。而生成树边 (p, q) 的两端点 p 和 q 的位能满足 $\pi_p - \pi_q = C_{pq}$ ，由这个关系式，通过生成树各边，可把网络各点的位能定下来。为了避免与无穷大 ∞ 的运算，本算法规定用一个足够大的数 M 来代替 ∞ 。

2.2 选择可能减小网络成本的余树边

使网络成本减小可供选择的余树边 (p, q) 有二类，一类是

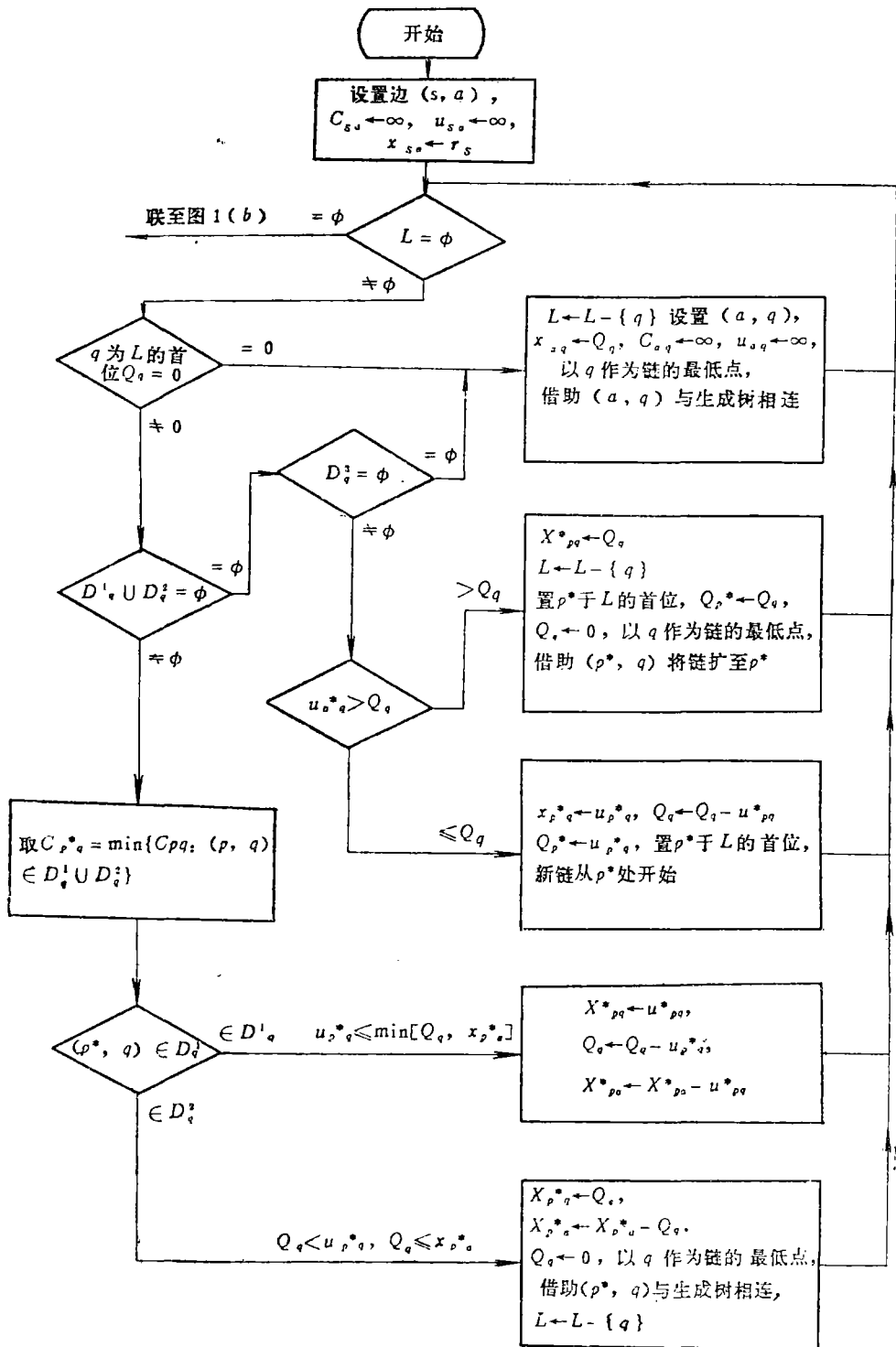


图 1(a)

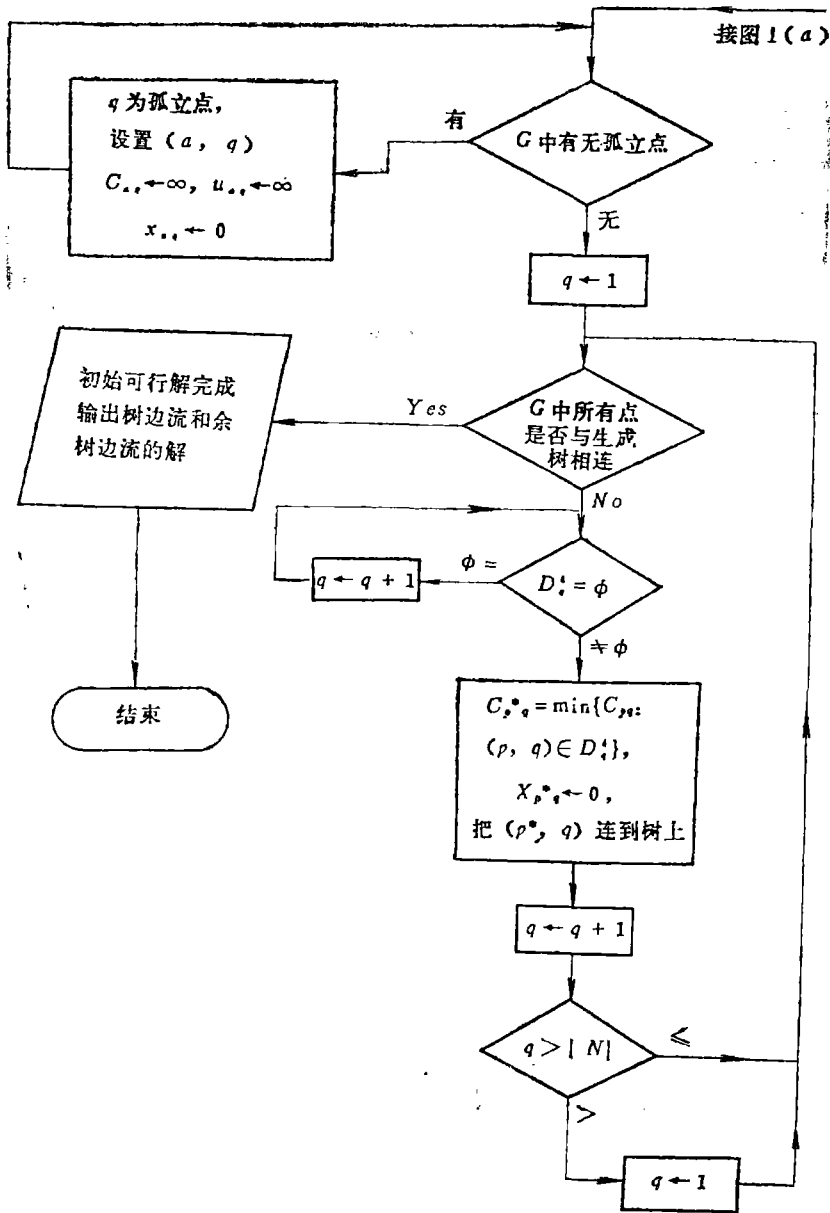


图 1(b)

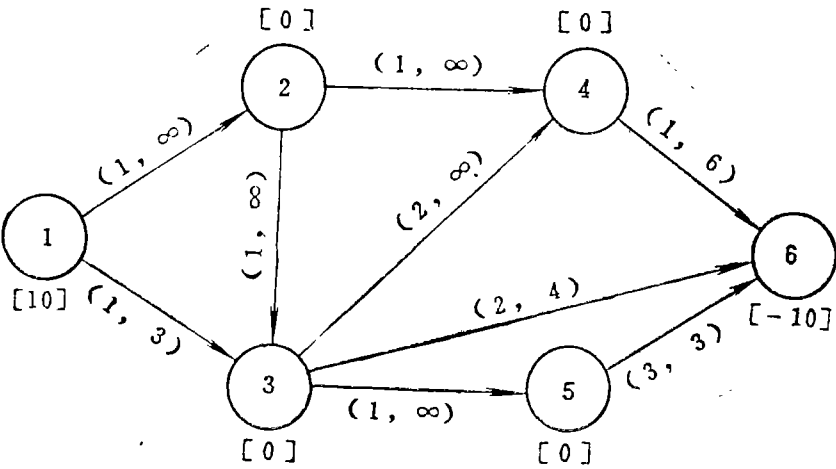


图 2

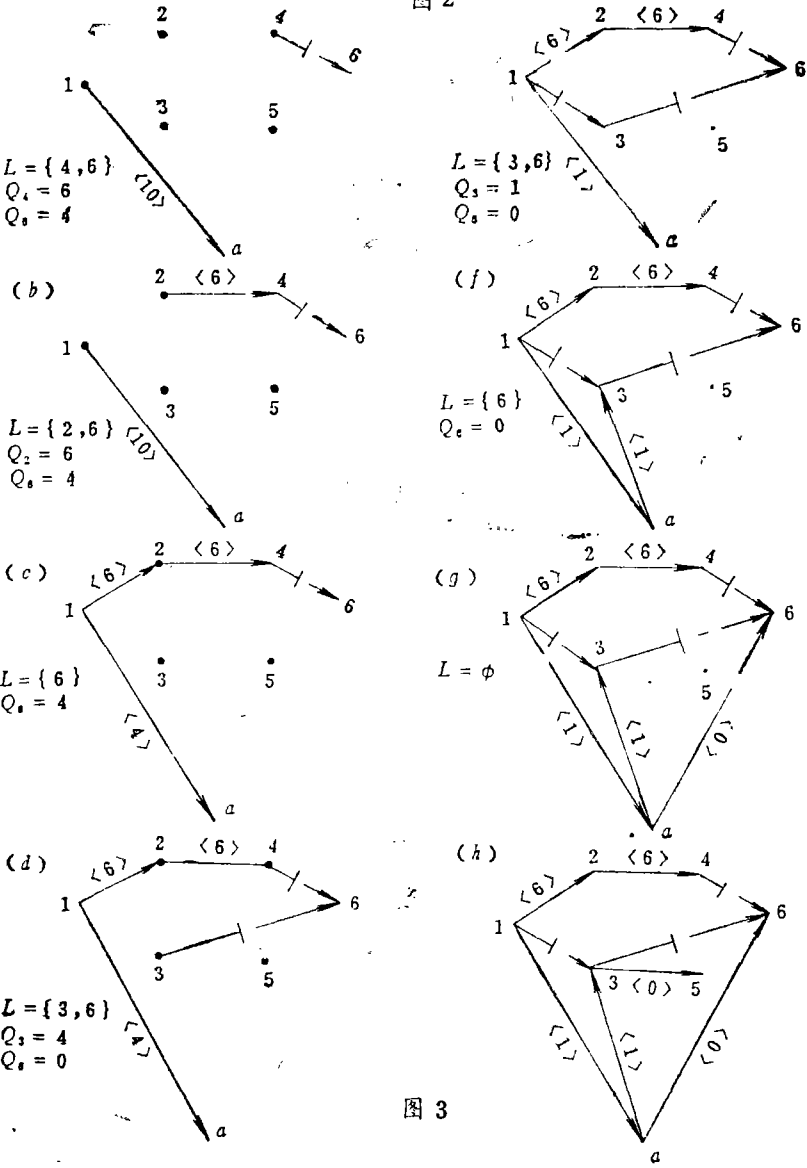


图 3

$$\psi_1 = \{(p, q) : x_{pq} = 0, \text{ 且 } \pi_p - \pi_q - C_{pq} > 0\}$$

另一类是

$$\psi_2 = \{(p, q) : x_{pq} = u_{pq}, \text{ 且 } \pi_p - \pi_q - C_{pq} < 0\}$$

如果 $\psi_1 \cup \psi_2 = \phi$, 则最优解得到, 运算结束。

否则选择 $\psi_1 \cup \psi_2$ 中余树边 (p, q) ,

如 $(p, q) \in \psi_1$, 取 $\delta = 1$,

如 $(p, q) \in \psi_2$, 取 $\delta = -1$.

2.3 改变 (p, q) 及相应回路中各生成树边的流

设 $P = \{p, e_{i_1}, n_{i_1}, e_{i_2}, \dots, n_{i_{k-1}}, e_{i_k}, q\}$ 为生成树上从 p 至 q 的一条链, 链上树边 e_{i_i} 如与 P 同向, 定义 $O_i(P) = 1$, 如 e_{i_i} 与 P 反向, 则 $O_i(P) = -1$ 。

选择最小改变量

$$\Delta_1 \leftarrow \min_{O_i(P) = \delta} \{x_{i_i}\}$$

$$\Delta_2 \leftarrow \min_{O_i(P) = -\delta} \{u_{i_i} - x_{i_i}\}$$

$$\Delta \leftarrow \min \{\Delta_1, \Delta_2, u_{pq}\}$$

$$x_{pq} \leftarrow x_{pq} + \Delta\delta, \text{ 对于 } e_{i_i} \in P,$$

$$x_{i_i} \leftarrow x_{i_i} - \Delta\delta O_i(P).$$

如果 $\Delta = u_{pq}$, 返回2.2, 生成树不变。否则有

2.4 组成一个新的生成树

用 (p, q) 取代集合 $\psi_3 = \{e_{i_i} : x_{i_i} = 0 \text{ 且 } O_i(P) = \delta\}$ 或集合 $\psi_4 = \{e_{i_i} : x_{i_i} = u_{i_i} \text{ 且 }$

$O_i(P) = -\delta\}$ 中的边, 返回2.1

完成本文的例 (见图2), 由图3(h)得到了一个初始可行解。

$$\begin{array}{cccccccc} (1-1) & \pi_a & \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 & \pi_4 & \pi_5 & \pi_6 \\ & 0 & M & M-1 & -M & M-2 & -M-1 & -M \end{array}$$

$$(1-2) \text{ 取 } (2, 3) \in \psi_1, \delta = 1.$$

2 至 3 的树链为 $P = \{2, (1, 2), 1, (1, a), a, (a, 3), 3\}$

$$\Delta_1 = \min \{x_{1a}, x_{a3}\} = 1,$$

$$\Delta_2 = \min \{u_{12} - x_{12}\} = M - 6,$$

$$\Delta = \min \{\Delta_1, \Delta_2, u_{23}\} = 1.$$

$$(1-3) \quad x_{23} = 0 + \Delta\delta = 1$$

$$x_{1a} = 1 - \Delta\delta O_{(1,a)}(P) = 0,$$

$$x_{a3} = 1 - \Delta\delta O_{(a,3)}(P) = 0,$$

$$x_{12} = 6 - \Delta\delta O_{(1,2)}(P) = 7.$$

$\Delta \neq u_{23}$, 所以

(1-4) $(1, a) \in \psi_3$, 用 $(2, 3)$ 代替 $(1, a)$ 得一新的生成树, 如图4(a)所示。

返回2.1

$$\begin{array}{cccccccc} (2-1) & \pi_a & \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 & \pi_4 & \pi_5 & \pi_6 \\ & 0 & -M+2 & -M+1 & -M & -M & -M-1 & -M \end{array}$$

(2—2) 取 $(3, 6) \in \psi_2, \delta = -1$

$$\Delta_1 = \min\{x_{a3}\} = 0$$

$$\Delta_2 = \min\{u_{a6} - v_{a6}\} = M,$$

$$\Delta = \min\{\Delta_1, \Delta_2, u_{36}\} = 0.$$

(2—3) $x_{36} = 4 + \Delta\delta = 4,$

$$x_{a3} = x_{a6} = 0$$

$u_{36} \neq \Delta$, 所以

(2—4) $(a, 3) \in \psi_3,$

用 $(3, 6)$ 替换 $(a, 3)$, 得到新的生成树, 如图

4(b)所示。返回2.1

(3—1)

π_a	π_1	π_2	π_3	π_4	π_5	π_6
0	$-M+4$	$-M+3$	$-M+2$	$-M+2$	$-M+1$	$-M$

由于 $\psi_1 \cup \psi_2 = \phi$, 运算结束, 得到了网络 G' 的最优解, 其中生成树部分为

$x_{12} = 7, x_{23} = 1, x_{24} = 6, x_{35} = 0, x_{36} = 4$; 余树部分为

$$x_{13} = 3, x_{34} = 0, x_{46} = 6, x_{56} = 0.$$

附加边的流均为0, 故图2的网络的最优解即为上二式所示。网络流总成本为31。

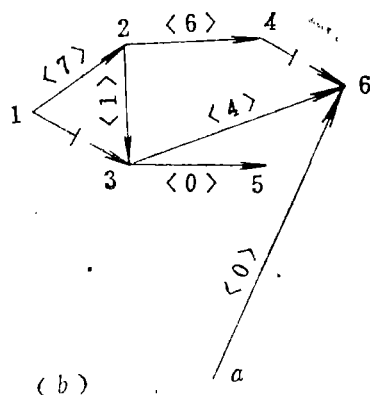
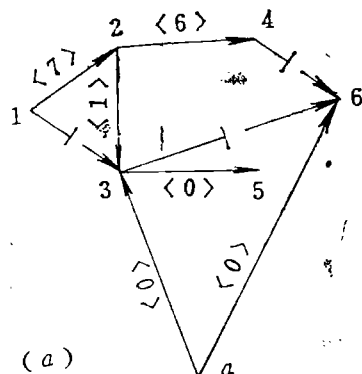


图4

3 结 语

寻找一个较优的可行初始解是本算法的核心。从这个可行初始解得到最优解的方法是多种多样的, 例如还可利用Out-of-Kilter法类似地得到同样的结论。

本算法除了适用于多个供应源点和需求点的网络外, 还适用于供应量和需求量不平衡的网络问题, 这可以利用增加供应源点和需求点的办法, 使之变成平衡的问题来解决。

参 考 文 献

- [1] Jeff L. Kennington and Richard V. Helgason, *ALGORITHMS FOR NETWORK PROGRAMMING*, A Wiley-Interscience publication, JOHN WILEY & SONS, New York, 1980, (27-68, 244-256)
- [2] [美]哈姆迪·阿·塔哈著, 吴立煦, 朱幼文译: 《运筹学》, 上海人民出版社, 1985, (89-111, 147-152)

The Spanning Tree Algorithm for Minimal Cost Flow

Wang Rusen

(Dept. of Aerospace Eng.)

Abstract

At first the spanning tree algorithm is used to find quickly an initial feasible solution for the network minimal cost flow. Then the network simplex method is applied to get the optimal solution of the minimal cost flow. Since the initial feasible solution has some properties of optimization and it is quite near the optimal solution, it is of much benefit for increasing the efficiency of calculation.

Key Words: minimal cost flow; spanning tree; optimal solution



(一) 第三届全国振动理论及应用学术会议简况

由中国力学学会, 中国航空学会, 中国机械工程学会, 中国宇航学会联合举办的第三届全国振动理论及应用学术会议于1987年8月9日至12日在哈尔滨市飞龙宾馆举行。

这次会议是我国振动界的空前盛会。无论从论文的质量与数量, 或者代表的人数上看, 都超过了以往的同类会议的规模。东道主黑龙江省暨哈尔滨市的领导李根深, 靖伯文, 朱典明等出席了大会并讲了话。学部委员胡海昌教授以及刘恢先、黄文虎, 方向教授等在大会上作了报告和讲话。我院的何水清教授也在大会主席台上就座。

本次会议从约400篇论文中精选了200余篇论文在会议上作了交流。入选的论文印刷了论文集。我院的吴立人, 张敬东, 王志国等人的三篇论文入选。所选用的论文包括了线性和非线性振动理论及其应用, 随机振动理论及其应用, 转子动力学, 流固耦合振动, 系统识别和故障诊断, 微机应用, 专家系统, 振动控制, 振动测量及其设备研制和应用等等。文章涉及的工程背景几乎遍及各个领域: 机械设备, 航天飞行器, 飞机, 土木工程建筑, 车辆, 船舶, 海洋结构物, 水利工程等等。

会议的论文交流分七个分会场进行。代表们就感兴趣的内容展开了讨论。从讨论的情况来看, 一些新兴的边缘学科和直接用于解决工程实际问题的方法和手段引起了与会者的兴趣和重视。如流固耦合动力学, 故障诊断, 专家系统等。

会议期间, 《振动工程学报》副主编陆鑫森教授应邀参观了我院一系列的振动研究室和世界银行援建的振动平台。并就感兴趣的内容进行了座谈。

会议最后宣布, 明年的振动会将在郑州市举行。

(王志国)