短期批量问题的数学模型新进展*

谢金星　姜启源

(清华大学应用数学系　北京100084)

〖摘　要〗　近年来，批量问题的数学模型不断扩展，以适应不同的生产环境。本文在综合大量国内外有关文献的基础上，重点讨论短期批量问题（离散批量问题、连续批量问题和工件排序问题）的数学模型新进展，并指出一些值得深入研究的新方向.

〖关键词〗　数学模型，生产计划，批量，库存，排序

§1、批量问题的模型分类

批量问题（Lotsizing Problems）考虑的是成批生产中中期或短期生产计划的优化问题。所谓某一产品的生产批量（Lotsize），就是每通过一次生产准备生产该产品时的生产数量，它同时决定了库存水平，因此库存理论可以认为是批量理论的一部分。又由于批量的确定还要决定每次生产开始和结束的时间，因此其研究又与排序论有着密切的联系。

现代的批量问题考虑的因素一般涉及生产计划过程中的如下一些方面［1］：

１。计划期（Planning Horizon）：可能是无限的，也可能是有限的。

２。时间段（Time Scale）：可能是连续的，也可能是离散的。

３。费用函数（Cost Functions）：可能是线性的，也可能是非线性的；费用函数中的费用参数可能是常数，也可能随时间段动态变化。

４。生产率（Production Rates）：可能被认为是无限的（即生产能力无限，生产可瞬时完成），也可能是常数，还可能随时间段动态变化。

５。生产准备（Setups）：生产准备费用一般总是要考虑的，但可能不考虑生产准备时间，也可考虑生产准备时间是常数或随时间段动态变化。

６。需求（Demand）：可能是常数，也可能动态变化或服从于一定的规律随机变化。

７。缺货（Shortages）：可能允许缺货，也可能不允许缺货。

考虑到上述因素，表1列出了目前为止的五类主要批量模型及其基本假设之间的主要差异[2]. 能力受限的批量问题和经济批量问题的数学模型及算法非常多，另有专文讨论[3，4]. 本文重点讨论短期批量问题（离散批量问题、连续批量问题和工件排序问题）的数学模型新进展。由于目前的研究大多不考虑随机性, 所以本文只讨论确定性批量问题.

表1、五类批量模型及其基本假设之间的主要差异

模型简称	计划期	时间段	生产准备费	每时段生产项目的种数	需求模式	每时段的可生产量
CLSP	有限	离散	每　时　段	无 限 制	动态	不超过可供能力
ELSP	无限	连续	每　　批	无 限 制	定常	不超过可供能力
DLSP	有限	离散	每　　批	最多一种	动态	零或等于可供能力
CSLP	有限	离散	每　　批	最多一种	动态	不超过可供能力
JSP	无限	连续	因模型而异	无 限 制	动态	不超过可供能力

* 国家高技术计划（863）CIMS主题资助项目。本文已发表于《1995中国控制与决策学术会议论文集》758-761页。

注： CLSP --- Capacitated Lotsizing & Scheduling Problem（能力受限的批量问题）
ELSP --- Econoimic Lotsizing & Scheduling Problem（经济批量问题）
DLSP --- Discrete Lotsizing & Scheduling Problem（离散批量问题）
CSLP --- Continuous Setup Lotsizing Problem（连续批量问题）
JSP --- Job Scheduling Problem（工件排序问题）

§2、离散批量问题（DLSP）的一般模型

普通的DLSP模型与能力受限的批量问题（CLSP）的差别在于DLSP考虑的是单机生产问题，生产准备按生产批而不是仅按时段计算，且每时段要么生产，要么满负荷生产。普通的DLSP可用混合整数规划描述如下[2]：

$$Min\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}\left(S_{i,t}\max\left(0,y_{i,t}-y_{i.t-1}\right)+h_{i,t}I_{i,t}+p_{i,t}y_{i,t}\right) \qquad (2.1)$$

$$s.t.\qquad \sum_{i=1}^{N}y_{i,t}\le 1, \qquad t=1,\cdots T, \qquad (2.2)$$

$$I_{i,t-1}+r_{i,t}y_{i.t}-d_{i,t}=I_{i,t}, \qquad i=1,\cdots N,t=1,\cdots,T, \qquad (2.3)$$

$$I_{i,t}\ge 0, \qquad i=1,\cdots N,t=1,\cdots,T, \qquad (2.4)$$

$$y_{i,t}\in\{0,1\}, \qquad i=1,\cdots N,t=1,\cdots,T, \qquad (2.5)$$

其中
N ------ 生产项目（产品）总数；　　T ------ 计划期长度；
$d_{i,t}$ ----- 项目i在t时段的外部需求；　　$I_{i,t}$ ----- 项目i在t时段的库存量；
$y_{i,t}$ ----- 项目i在t时段是否生产的标志 (0 不生产, 1 生产)；
S_i ----- 项目i生产时的生产准备费用；　　$p_{i,t}$ ----- 项目i在t时段生产时的生产费用；
$h_{i,t}$ ----- 项目i在t时段的单件库存费用；　　$r_{i,t}$ ----- 项目i在t时段生产时的生产量.

一般的DLSP可以包含并行机的情形，可用六参数L/M/N/SC/PC/ST表示[2]（表2）.

表2、DLSP的六参数分类方案

内容	参数	可能的取值（注）
生产线的布置 （对于单机问题，这一指标可以省略）	L (Layout of the production line))	同型号并行机（PI） 同种类并行机（PU） 一般的并行机（P）
机器数	M (number of Machines)	正整数或*
生产项目的种类数	N (Number of items)	正整数或*
生产准备费用的结构	SC (Setup Cost)	无生产准备费用（A） 生产准备费用与项目排序无关（SI） 生产准备费用与项目排序相关（SD）
生产费用的结构	PC (Production Cost)	生产费用为常数（C） 一般的生产费用（G）
生产准备时间的结构	ST (Setup Time)	无生产准备时间（A） 生产准备时间与项目排序无关（SI） 生产准备时间与项目排序相关（SD）

注：PI----Parallel Identical　　A----Absent　　C----Constant

PU----Parallel Uniform SI----Sequence Independent G----General

P----Parallel SD----Sequence Dependent

*----表示该参数独立于该问题的描述（即该参数不是该问题描述的一部分）

§3、连续批量问题（CSLP）的一般模型

连续批量问题（CSLP）与离散批量问题（DLSP）非常相似，只是在CSLP模型中，当某一产品在某一时段在某一机器上生产时，生产量可以是任意的，只要不超出能力限制；而在DLSP模型中，要求某一产品在某一时段在某一机器上要么不生产，要么就满负荷生产。普通的CSLP考虑的是单机生产问题，可用混合整数规划描述如下[5]：

$$Min\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}\left(S_{i,t}\max\left(0,y_{i,t}-y_{i.t-1}\right)+h_{i,t}I_{i,t}+p_{i,t}X_{i,t}\right) \tag{3.1}$$

$$s.t. \quad \sum_{i=1}^{N}y_{i,t}\le 1, \qquad t=1,\cdots T, \tag{3.2}$$

$$I_{i,t-1}+X_{i,t}-d_{i,t}=I_{i,t}, \qquad i=1,\cdots N,t=1,\cdots,T, \tag{3.3}$$

$$X_{i,t}\le C_{i,t}y_{i,t}, \qquad i=1,\cdots N,t=1,\cdots,T, \tag{3.4}$$

$$X_{i,t}\ge 0, \qquad i=1,\cdots N,t=1,\cdots,T, \tag{3.5}$$

$$I_{i,t}\ge 0, \qquad i=1,\cdots N,t=1,\cdots,T, \tag{3.6}$$

$$y_{i,t}\in\{0,1\}, \qquad i=1,\cdots N,t=1,\cdots,T, \tag{3.7}$$

其中 N, T, $d_{i,t}$, $I_{i,t}$, $y_{i,t}$, S_i, $h_{i,t}$ 意义同上节, $X_{i,t}$ 是项目i在t时段的生产批量; $p_{i,t}$ 是项目i在t时段生产时的单件生产费用; $C_{i,t}$ 是项目i在t时段生产时的最大可能生产量（能力限制）。

一般的CSLP也可用六参数L/M/N/SC/PC/ST表示（仍参见上一节的表2）.

§4、工件排序问题（JSP）的一般模型

1992年，Potts和Wassenhove提出了批量问题和排序问题的集成模型［6］，N个工件可分成F族，族间换产需经过主生产准备(Major Setup)，族内换产需经过次生产准备(Minor Setup). 每个工件又可包含多个同样的生产项目。他们将组批（Batching）、分批（Lotsizing）和排序（Scheduling）同时考虑，仍然采用一般排序问题的三参数表示法α｜β｜γ表示：

第一个参数α=$\alpha_1\alpha_2$表示机器设备的配置情况。其中α_1∈ {○,P,F,O}：○表示单机，P表示同型号并联机，F表示流水车间，O表示开放车间。α_2∈ {○,M}：○表示机器数任意，M表示机器数固定为M。

第二个参数$\beta\subseteq\{\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$表示工件（作业）的特征。其中$\beta_1$∈ {○, s_f, s_{fg}}：○表示不考虑主生产准备时间，s_f表示每一工件族考虑与排序无关的主生产准备时间，s_{fg}表示每一工件族考虑与排序有关的主生产准备时间。β_2∈ {○, $q_j(\lambda,\mu)$}，○表示每一工件只含单一生产项目，$q_j(\lambda,\mu)$表示每一工件可含多个生产项目：λ∈{c,d,*}，c表示工件可分成连续子批，d表示工件可分成离散子批，*表示工件既可分成连续子批，也可分成离散子批；μ∈ {j,i,s,*}，j表示工件的完工时间，i表示项目的完工时间，s表示子批的完工

时间，*表示以上三类完工时间。$\beta_3 \in \{\circ, t_j\}$，○表示不考虑次生产准备时间，$t_j$表示对每一工件，其子批在每一机器上加工时都考虑次生产准备时间。

第二个参数 $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$表示目标函数。其中$\gamma_1$的意义于普通排序论中的意义相同，$\gamma_1 \in \{C_{\max}, L_{\max}, \sum C_i, \sum \omega_i C_i, \sum T_i, \sum \omega_i T_i, \sum U_i, \sum \omega_i U_i\}$。$\gamma_2$和$\gamma_3$表示主次生产准备费用：$\gamma_2 \in \{\circ, \sum c_f, \sum c_{fg}\}$，○表示不考虑主生产准备费用，$\sum c_f$ 表示每一工件族考虑与排序无关的主生产准备费用，，$\sum c_{fg}$ 表示每一工件族考虑与排序相关的主生产准备费用；$\gamma_3 \in \{\circ, \sum b_j\}$，○表示不考虑次生产准备费用，$\sum b_j$ 表示对每一工件，其子批在每一机器上加工时都考虑次生产准备费用。

§5、小　　结

由于批量问题的研究和应用方兴未艾, 所以大量新模型和研究成果、应用软件如雨后春笋, 不断涌现。一般来说，数学模型和数学规划方法是处理批量问题的必不可少的工具，尤其是非线性整数规划. 从研究内容上看, 至少有如下几点值得引起特别的重视:

●继续探讨批量问题的新模型，并深入地进行最优算法和近似算法、启发式算法的研究: 各种批量算法的测试比较, 复杂度分析, 新算法的研究及应用等.

●模型中应更多地考虑实际生产环境, 如能力的可替代性、能力的调整, 合同(即需求)的变更, 允许有欠量, 可变的提前期等, 因为只有这样的研究才更具实际意义.

●迫切需要建立和研究随机批量模型, 因为实际生产环境总是存在不确定性.

〖致　谢〗　衷心感谢中国科学院韩继业先生对本研究课题的大力支持和清华大学应用数学系谭泽光教授及邢文训同志对本文初稿提出的宝贵意见和建议.

参　考　文　献

[1] Gavish B., R. E. Johnson, A Fully Polynomial Approximation Scheme for Single-Product Scheduling in a Finite Capacity Facility, Opns. Res. 38/1(1990),70-83.

[2] Salomen M., L. G. Kroon, R. Kuik, L. N. Van Wassenhove, Some Extensions of the Discrete Lotsizing and Scheduling Problem, Mgmt. Sci., 37/7(1991), 801-812.

[3] 谢金星, 姜启源, 邢文训, 谭泽光, 能力受限的批量问题的数学模型和算法新进展.(《运筹学杂志》将于1995年发表)

[4] 谢金星, 经济批量问题的数学模型和算法新进展.(《运筹与管理》将于1995年发表)

[5] Karmarkar U. S., L. Schrage, The Deterministic Dynamic Product Cycling Problem, Opns. Res. 33/2(1985), 326-345.

[6] Potts C. N., Van Wassenhove L. N., Integrating Scheduling with Batching and Lotsizing : a Review of Algorithms and Complexity, J. Opnl. Res. Soc., 43/5(1992), 395-406.