第18卷 第1期
2000年2月
中国民航学院学报
JOURNAL OF CIVIL AVIATION UNIVERSITY OF CHINA
Vol.18 No.1
February, 2000

文章编号: 1001-5000(2000)01-0049-05

求解最小费用最大流问题的一种方法

韩明亮
(中国民航学院 管理分院, 天津 300300)

摘要: 介绍了最大流问题的多解,提出了通过调整圈来求解最小费用最大流的方法。

关 键 词: 流量; 最大流; 最小费用最大流
中国分类号: O 223　　**文献标识码**: A

最小费用最大流问题在实际工作中经常会遇到,但传统的求解方法过于繁锁。本文提出的关于最小费用最大流问题的求解方法,则可较为简便地求解这类问题。

1 最大流问题的多解

网络的最大流问题一般是多解的。

例 1.求解下列网络的最大流。图 1 中弧旁数字为 (c_{ij},f_{ij}),即(容量,流量)。

解: 用最大流算法,可求得网络的最大流,如图 2所示。

一般地,在网络的某个圈中,如果与圈的方向相同的所有弧 (v_i,v_j) 的流量皆满足 $f_{ij}<c_{ij}$,而与圈的方向相反的所有弧 (v_i,v_j) 的流量皆满足 $f_{ij}>0$,则称该圈可调,否则称该圈不可调。

例如在图 2 中,圈 (S, Ⅱ, Ⅲ, S) 可调,圈 (S, Ⅲ, Ⅱ, S) 不可调,分别如图 3(*a*)、(*b*) 所示。

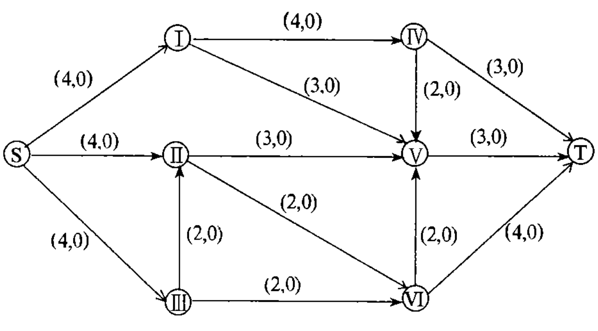

图 1

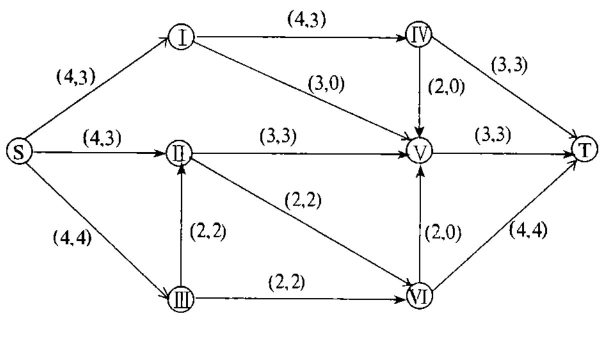

图 2

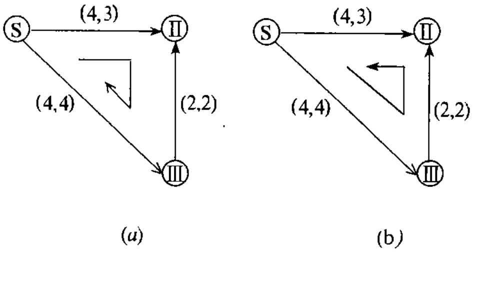

图 3

收稿日期: 1999-09-13

作者简介: 韩明亮(1963-),男,工学硕士,副教授.研究方向为航空运输系统工程.

在图3(*a*)中，弧(S, Ⅱ)的流量可增加1个单位，弧(Ⅲ，Ⅱ)的流量可减少2个单位，弧(S, Ⅲ)的流量可减少4个单位，因此在该圈中进行1个单位流量的调整，可得图4。

而在图3(*b*)中，因为弧(S, Ⅲ)和弧(Ⅲ，Ⅱ)的流量已经达到最大容量，不能再增加流量，因此，该圈不可调。

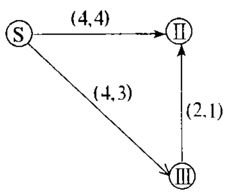

图4

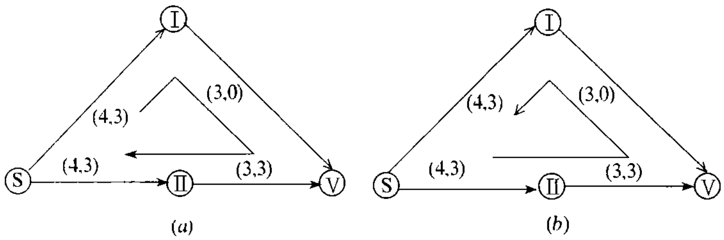

图5

再如在图2中，圈(S、Ⅰ，Ⅴ，Ⅱ，S)可调，而圈(S，Ⅱ，Ⅴ，Ⅰ，S)不可调，分别如图5(*a*)、(*b*)所示。

在图5(*a*)中，弧(S, Ⅰ)和弧(Ⅰ，Ⅴ)分别增加1个单位流量，弧(Ⅱ，Ⅴ)和弧(S, Ⅱ)分别减少1个单位流量，可得图6。

而在图5(*b*)中，因为弧(Ⅱ，Ⅴ)的流量已经达到最大容量，不能再增加流量，而且弧(Ⅰ，Ⅴ)的流量为0，不能减少流量，因此该圈不可调。

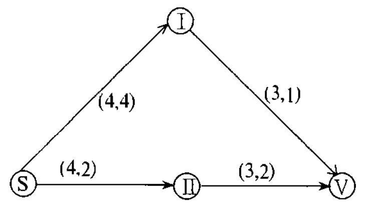

图6

将图4和图6的调整结果分别代替图2中的相应圈，可分别得到另外两个最大流量的网络，如图7和图8所示。

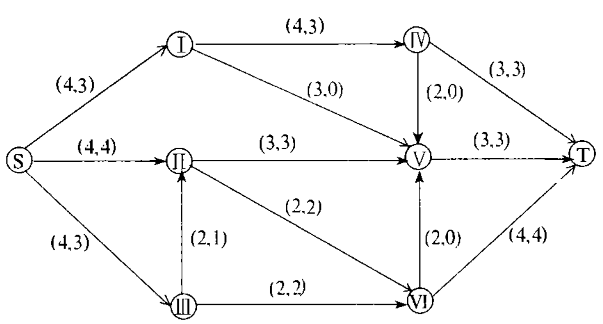

图7

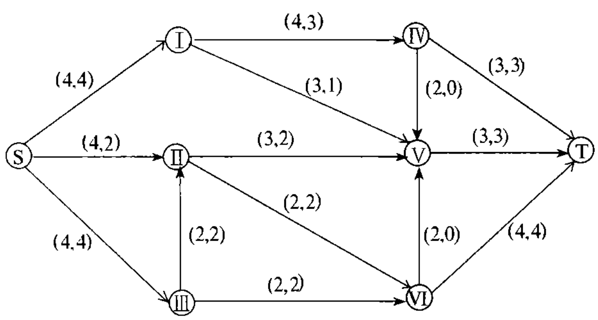

图8

可注意到，在图3(*a*)和图5(*a*)中，可调整流量Δf都在[0,1]范围内，如果流量可取小数值，则通过调整可以得到无穷多个最大流量网络。

2 最小费用最大流的寻求

在网络的每条弧上存在单位流量费用时，不同的最大流网络，其总的流量费用一般是不相同的，其中总费用最小的最大流即为最小费用最大流，因此，本文提出的计算方法的思想即：在已求得的最大流网络中，不断查找通过调整可使总费用降低的可调圈，对该圈进行调整，就可得到比原最大流网络费用

低的新的最大流网络。对新的最大流网络继续查找并调整，直至查找不到可使总费用降低的可调圈为止，此时得到的最大流网络即为最小费用最大流。

以例 1 为例，图 2 中各条弧的单位流量费用 b_{ij} 如图 9 中箭线右侧数字所示。

根据本方法的基本思想，可按照以下步骤寻求最小费用最大流：

(1) 求出网络的一个最大流；

(2) 在求得的最大流网络中，找出通过流量调整可使总费用降低的可调圈；

(3) 对找到的圈进行流量调整；

(4) 重新回到步骤 2，直至找不到符合条件的圈为止，此时得到的最大流网络即为最小费用最大流。

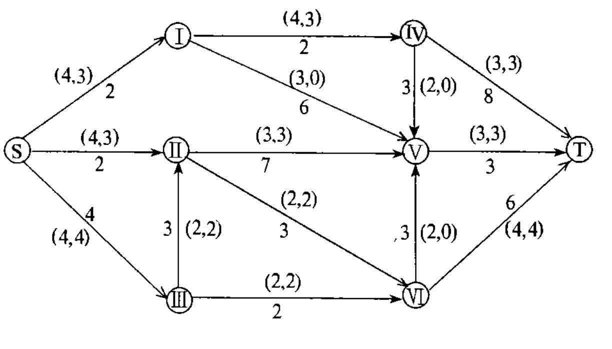

图9

步骤 2 可通过下述过程实现：

(1) 构造一个赋权图 $W(f)$，它的顶点为原网络 D 的顶点，而将 D 中的每条弧 (v_i,v_j) 变成两个相反方向的弧 (v_i,v_j) 和 (v_j,v_i)，并且弧的权 ω_{ij} 如下定义：

$$\omega_{ij}=\begin{cases} b_{ij} & \text{当 } f_{ij}<c_{ij} \text{ 时} \\ +\infty & \text{当 } f_{ij}=c_{ij} \text{ 时} \end{cases}$$

$$\omega_{ji}=\begin{cases} -b_{ij} & \text{当 } f_{ij}>0 \text{ 时} \\ +\infty & \text{当 } f_{ij}=0 \text{ 时} \end{cases}$$

其中，权值为 $+\infty$ 的弧不画。

例如，由图 9 可构造赋权图 $W(f)$ 如图 10 所示。

(2) 在图 10 中找出从 S 点出发构成的所有回路。在这些回路中，如果存在某个回路中所有弧的权值和为负值，则对该回路所对应的原网络（图 9）中的相应圈进行流量调整，即可得到费用更低的最大流网络。如果不存在从 S 点出发的所有弧权值和为负值的回路，则按顺序从其它点出发找出权值和为负值的回路。

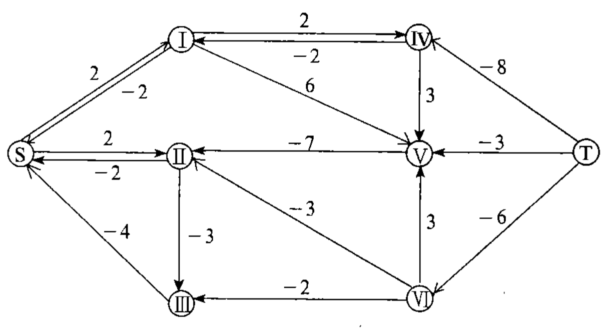

图 10

(3) 每次进行流量调整后，返回到 (1)、(2)，直到在赋权图 $W(f)$ 中所有点出发都找不到权值和为负的回路时，则原网络的结果即为最小费用最大流。

例 2. 求图 9 所示网络的最小费用最大流。

解：

图 9 已为最大流网络，在其对应的赋权图 $W(f)$（图 10）中：

从 S 点出发构成的回路及权值和如图11 及表 1 所示。

可使费用降低最多的回路为 (S, Ⅰ, Ⅳ, Ⅴ, Ⅱ,

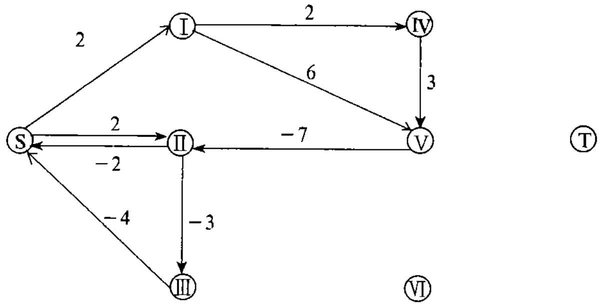

图 11

Ⅲ,S)，因此在图 9 中沿相应的圈进行流量调整，得到图 12。

(1)图 12 对应的赋权图 $W(f)$ 如图 13 所示。

(2)从 S 点出发构成的回路及其权值和如图 14 及表 2 所示。

表 1

回　　路	权值和
(S, Ⅰ, Ⅳ, Ⅴ, Ⅱ, S)	−2
(S, Ⅰ, Ⅳ, Ⅴ, Ⅱ, Ⅲ, S)	−7*
(S, Ⅰ, Ⅴ, Ⅱ, S)	−1
(S, Ⅰ, Ⅴ, Ⅱ, Ⅲ, S)	−6
(S, Ⅱ, Ⅲ, S)	−5

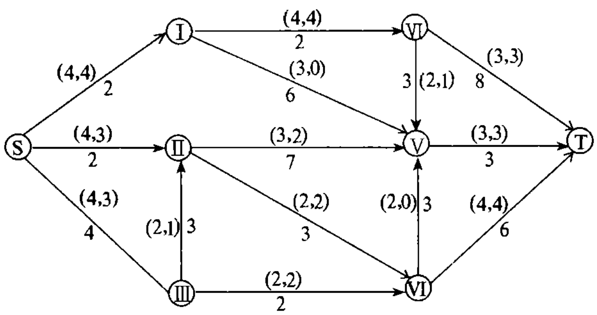

图12

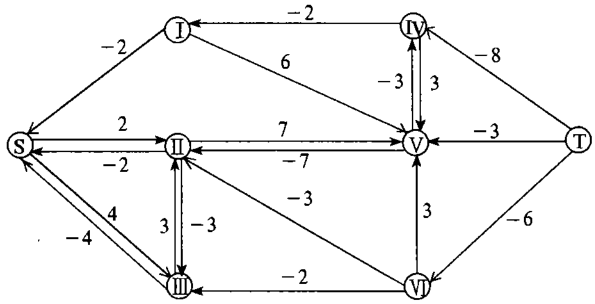

图13

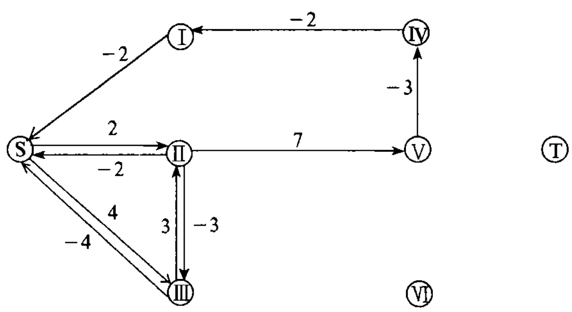

图 14

表 2

回　　路	权值和
(S, Ⅱ, Ⅲ, S)	−5*
(S, Ⅱ, Ⅴ, Ⅳ, Ⅰ, S)	2
(S, Ⅲ, Ⅱ, S)	5
(S, Ⅲ, Ⅱ, Ⅴ, Ⅳ, Ⅰ, S)	7

可使总费用降低的回路为(S, Ⅱ, Ⅲ, S)，因此在图 12 中对相应的圈进行流量调整，得图 15。

(1)图 15 对应的赋权图 $W(f)$ 如图 16 所示。

(2)从 S 点出发构成的回路及权值和如图 17 及表 3 所示。

没有权值和为负值的回路。

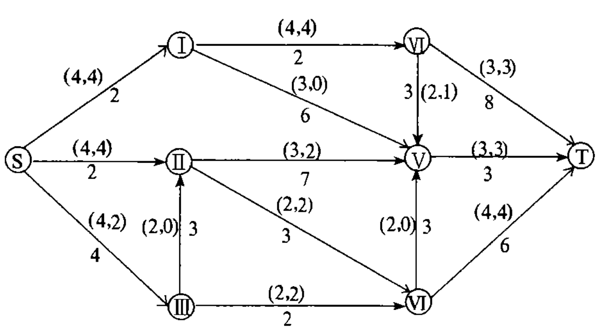

图15

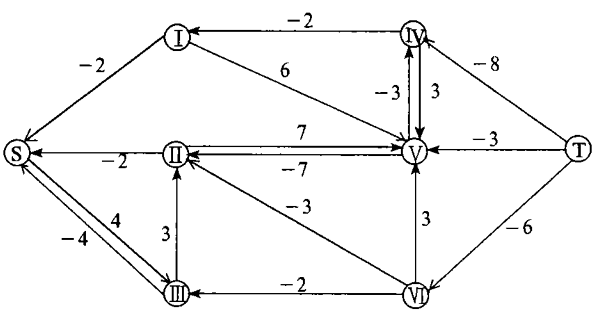

图16

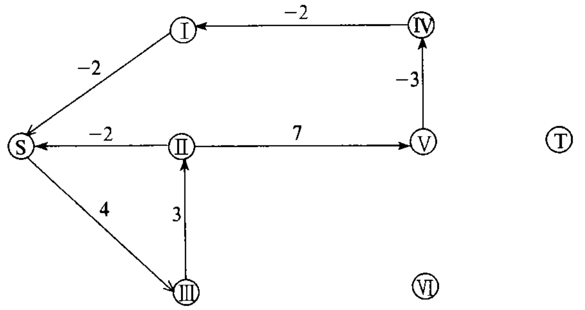

图 17

再检查由Ⅰ点出发构成的回路。此时可将 S 点及从 S 点引出的弧及指向 S 点的弧从图 16 中去掉，得图 18。

从Ⅰ 出发构成的回路如图 19 所示，其权值和为正。

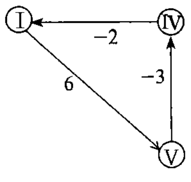

图 19

表 3

回　　路	权值和
(S, Ⅲ, Ⅱ, S)	5
(S, Ⅲ, Ⅱ, Ⅴ, Ⅳ, Ⅰ, S)	7

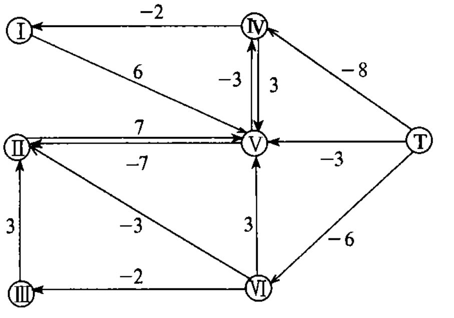

图 18

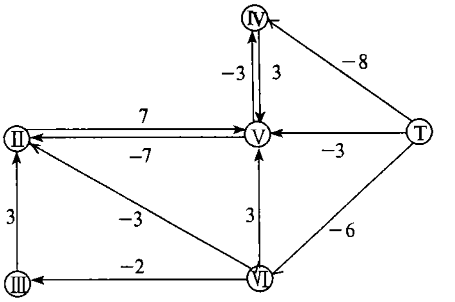

图 20

再检查由Ⅱ 点出发的回路。此时从图 18 中，将Ⅰ 点及从Ⅰ 点引出的弧及指向Ⅰ 点的弧去掉，得到图 20。

从Ⅱ 点出发的回路不存在。

同理可知，从剩余各点出发的回路都不存在。因此，图 15 的网络最大流即为最小费用最大流，因为总的流量费用不可能再降低。

[参 考 文 献]

[1] 甘应爱，等. 运筹学[M]. 北京：清华大学出版社，1990.

[2] SIVAZLIA B D, STANFEL L E. Optimization Techniques in Operations Research[M]. Prentice－Hall, INC, Englewood Cliffs, New Jersey, 1975.

（责任编辑：赵拥军）

（英文摘要等下转第 61 页）

A Further Study: the Mean Value Theorem in Twofold Integrals

YANG Cai-ping

(Department of Basic Sciences, CAUC, Tianjin 300300)

Abstract: It is well-known that the mean value theorem in twofold integrals is stated as: "Let D be a bounded closed region of R^2, $f(x,y)$ a continuous function and $g(x,y)$ an integrable function with invariant sign on D, then exits at least a point$(\xi,\eta)\in D$ such that $\iint_D f(x,y)g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = f(\xi,\eta)\iint_D g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$。"This paper goes further to prove that the point(ξ,η) can be an interior point within D. And such a conclusion and the method employed to prove it are completely applicable to mean value theorem in general multiple integrals.

Key words: interior point; set of zero measures; bounded closed region; multiple integrals

(上接第 53 页)

A Simple Solution to Maximal Flows at Lowest Cost

HAN Ming-liang

(Management College, CAUC, Tianjin 300300)

Abstract: This paper introduces multiple solutions to maximal flows and, by adjusting circle, presents a simple approach to work out maximal flows at lowest cost.

Key words: flows; maximal flows; maximal flows at lowest cost