第9卷 第4期 运 筹 与 管 理 Vol 9, No. 4
2000年12月 OPERATIONS RESEARCH AND MANAGEMENT SCIENCE Dec., 2000

运输网络中求最小费用最大流的一个算法

谢凡荣

(江西经济管理干部学院基础部, 南昌 330200)

摘 要: 给出一个求运输网络中的最小费用最大流的数值算法, 证明了算法的理论依据, 并举例说明算法的应用。

关键词: 有向图; 运输网络; 最小费用最大流

中图分类号: F502∶O224 **文献标识码**: A **文章编号**: 1007-3221(2000)04-0033-06

An Algorithm for Seeking the Minimal Cost Maximal Flow in the Transportation Network

XIE Fan-rong

(*Dept. of Basic Courses, Jiangxi Economic Management Cadre College, Nanchang* 330200 *China*)

Abstract: An numerical algorithm is presented for seeking the minimal cost maximal flow in the transportation network. The theory, which the algorithm depends on, is strictly verified. An example is given to demonstrate the use of the algorithm.

Keys words: the directed graph; the tansportation network; the minimal cost maximal flow

0 引言

运输网络中求最小费用最大流问题在文献[2]中已经提出, 并给出了一个求最小费用最大流的算法。但它是非数值算法, 难于编程在计算机上实现。本文提出了典则型运输网络的概念, 通过改进[4,5]建立了典则型运输网络中求最小费用最大流的数值算法 X_6, 易于编程实现且有很好的收敛性。本文还给出了将任意运输网络化为与之等效的典则型运输网络的方法。本文作者已将算法 X_6 用 Visual Basic 5.0 在计算机上实现, 成为本文作者设计的名为《规划系统》的应用软件的名叫《最小费用最大流问题》的功能模块; 利用它, 只要输入按本文定义的费用矩阵, 容量矩阵及相关信息, 就能方便快捷地求出典则型运输网络的最小费用最大流。文中的有关概念和记号参见文献[1～5]。

收稿日期: 2000-06-08

作者简介: 谢凡荣(1966-), 男, 湖南邵阳人, 江西经济管理干部学院讲师, 硕士。

1 概念和依据

定义 1 把简单赋权连通有向图 $N = (V, A, C, B)$ 称为运输网络, 其中 $V = \{1, 2, \cdots, n\}$ 为 N 中顶点的集合, s 是 N 中唯一的入度为零的顶点(称为源或发点), t 是 N 中唯一的出度为零的顶点(称为沟或收点), $A = \{a_{ij} \mid \text{弧 } a_{ij} = (i, j) \text{ 存在}\}$ 为 N 中弧的集合, $C = (C_{ij})_{n\times n}$ 为 N 的容量矩阵, C_{ij} 表示从顶点 i 到顶点 j 的直接运输通过能力。当 $i = j$ 时, 规定 $C_{ij} = +\infty$。当 $i \neq j$ 时, 如果不存在弧 $a_{ij} = (i, j)$, 规定 $C_{ij} = 0$; 否则规定 $C_{ij} = C(a_{ij}) > 0$, 其中 $C(a_{ij})$ 表示弧 a_{ij} 的容量。$B = (b_{ij})_{n\times n}$ 为 N 的费用矩阵, $b_{ij} = b(i, j)$ 表示从顶点 i 到顶点 j 直接运输单位流量的费用。当 $i = j$ 时, 规定 $b_{ij} = 0$; 当 $i \neq j$ 时, 如果不存在 $a_{ij} = (i, j)$, 则规定 $b_{ij} = +\infty$, 否则 $b_{ij} \geq 0$。

定义 2 给定运输网络 $N = (V, A, C, B)$, 如果 N 中任意两个不同顶点 i 和 j 之间最多存在一条弧 (i, j) 或 (j, i), 则称 N 为典则型运输网络。

定义 3 对于运输网络 $N = (V, A, C, B)$, 每一条弧 $(i, j) \in A$ 都给定一个非负数 f_{ij}(称为弧 (i, j) 的流量), 这一组数满足下面三个条件时, 称为 N 的可行流, 用 f 表示它。

(1) 每一弧有 $f_{ij} \leq C_{ij}$。

(2) 除发点 s 和收点 t 以外所有的中间点 i 必有 $\sum_j f_{ij} = \sum_k f_{ki}$

(3) 对于源 s 和沟 t 有 $\sum_i f_{si} = \sum_j f_{jt} = v(f)$

这个数 $v(f)$ 叫做 f 的流量, 且从发点 s 发出的量等于进入收点 t 的量。

最大流就是使 N 中从发点 s 送往收点 t 的流量 $v(f)$ 达到最大的可行流 f。

定义 4 在典则型运输网络 $N = (V, A, C, B)$ 中, 每一条弧 $a_{ij} = (i, j)$, 除了已给容量 C_{ij} 外, 还给一个单位流量的费用 $b(i, j) \geq 0$(简记为 b_{ij})。所谓最小费用最大流问题就是要求一个最大流 f, 使流的总输送费用 $b(f) = \sum_{(i, j)\in A} b_{ij} f_{ij}$ 取最小值。

定义 5 若给运输网络 $N = (V, A, C, B)$ 一个可行流 $f = \{f_{ij}\}$, 我们把 N 中使 $f_{ij} = C_{ij}$ 的弧称为饱和弧, 使 $f_{ij} < C_{ij}$ 的弧称为非饱和弧。把 $f_{ij} = 0$ 的弧称为零流弧, $f_{ij} > 0$ 的弧称为非零流弧。

若 μ 是 N 中从发点 s 到收点 t 的一条链, 我们定义链的方向是从 s 到 t, 则链上的弧被分成为两类: 一类是弧的方向与链的方向一致, 叫做前向弧。前向弧的全体记为 μ^+。另一类弧的方向与链的方向相反, 叫做后向弧。后向弧的全体记为 μ^-。

定义 6 设 f 是运输网络 $N = (V, A, C, B)$ 的一个可行流, μ 是 N 中从发点 s 到收点 t 的一条链, 若 μ 满足下列条件, 称之为(关于可行流 f 的) 一条增广链:

在弧 $(i, j) \in \mu^+$ 上, $0 \leq f_{ij} < C_{ij}$, 即 μ^+ 中的每一弧是非饱和弧。

在弧 $(i, j) \in \mu^-$ 上, $0 < f_{ij} \leq C_{ij}$, 即 μ^- 中的每一弧是非零流弧。

定义 7 设 f 是运输网络 $N = (V, A, C, B)$ 中的可行流, μ 是 N 中关于 f 的增广链, μ^+ 为 μ 的前向弧的集合, μ^- 为 μ 的后向弧的集合。把 $\sum_{\mu^+} b_{ij} - \sum_{\mu^-} b_{ij}$ 称为增广链 μ 的费用。

定义 8 设 $N = (V, A, C, B)$ 是典则型运输网络, 其中 $V = \{1, 2, \cdots, n\}$。$f = \{f_{ij}\}$ 是 N 的一个可行流。定义 N 的流矩阵 $F = (F_{ij})_{n\times n}$ 如下:

当 $i = j$ 时, 令 $F_{ij} = 0$。当 $i \neq j$ 时, 如果不存在弧 $a_{ij} = (i, j)$, 令 $F_{ij} = 0$; 否则令 $F_{ij} = f_{ij}$。

引理 1[2]　运输网络 $N = (V, A, C, B)$ 中的可行流 f^* 是最大流的充要条件是 N 中不存在关于 f^* 的增广链。

引理 2[2]　设 f 是运输网络 $N = (V, A, C, B)$ 中的可行流, μ 是 N 中关于 f 的增广链, μ^+ 为 μ 的前向弧的集合, μ^- 为 μ 的后向弧的集合。

$$\text{令 } \theta = \min\{\min_{\mu^+}\{C_{ij} - f_{ij}\}, \min_{\mu^-} f_{ij}\}, f^*_{ij} = \begin{cases} f_{ij} + \theta & \text{当}(i, j) \in \mu^+ \\ f_{ij} - \theta & \text{当}(i, j) \in \mu^- \\ f_{ij} & \text{当}(i, j) \text{ 不属于 } \mu \end{cases}$$

则 $\theta > 0$, $\{f^*_{ij}\}$ 是一个可行流, 且 $v(f^*) = v(f^*) + \theta$。

引理 3[2]　给定运输网络 $N = (V, A, C, B)$, 设 f 是流量为 $v(f)$ 的 N 的所有可行流中费用最小者, 而 μ 是 N 中关于 f 的所有增广链中费用最小的增广链, 那么沿 μ 按引理 2 去调整 f, 得到的可行流 f^*, 就是流量为 $v(f^*)$ 的 N 的所有可行流中的最小费用流。当 f^* 是最大流时, f^* 也就是 N 的最小费用最大流。

引理 4[2]　给定典则型运输网络 $N = (V, A, C, B)$, 设 f 是 N 的可行流。构造一个赋权有向图 $W(f)$, 它的顶点是原网络 N 的顶点, 而把 N 的每一条弧 (i, j) 变成两个相反方向的弧 (i, j) 和 (j, i)。定义 $W(f)$ 中弧的权 w_{ij} 为:

$$w_{ij} = \begin{cases} b_{ij} & \text{当 } f_{ij} < C_{ij} \\ +\infty & \text{当 } f_{ij} = C_{ij} \end{cases} \qquad w_{ji} = \begin{cases} -b_{ij} & \text{当 } f_{ij} > 0 \\ +\infty & \text{当 } f_{ij} = 0 \end{cases}$$

(长度为 $+\infty$ 的弧可以从 $W(f)$ 中略去)

则 N 中寻求关于 f 的最小费用增广链就等价于在 $W(f)$ 中寻求从顶点 s 到顶点 t 的最短路。

引理 5[2]　N 的零流 $f = 0$(N 的所有弧的流量都为零的流称为零流) 是流量为零的最小费用流。

引理 6　给定典则型运输网络 $N = (V, A, C, B)$, 设 f 是流量为 $v(f)$ 的 N 的所有可行流中的最小费用流, $W(f)$ 按引理 4 定义, $W = (W_{ij})_{n\times n}$ 是 $W(f)$ 的权关联矩阵。当 $i = j$ 时, 令 $W_{ij} = 0$。当 $i \neq j$ 时, 如果 $W(f)$ 中不存在弧 $a_{ij} = (i, j)$, 令 $W_{ij} = +\infty$; 否则令 $W_{ij} = w_{ij}$。则可用以下算法求出 $W(f)$ 中从顶点 s 到顶点 t 的最短路或判定 $W(f)$ 中从顶点 s 到顶点 t 的最短路不存在:

step 1 (准备) 令 $U_{ij} := W_{ij}, S_{ij} := j\ (i, j = 1, 2, \cdots, n)$, $k := 1$。

step 2 (迭代) 对 $1 \leq i, j \leq n$。如果 $U_{ij} > U_{ik} + U_{kj}$, 则令 $U_{ij} := U_{ik} + U_{kj}$, $S_{ij} := S_{ik}$; 否则 U_{ij}、S_{ij} 保持不变。

step 3 (循环判定) 如果 $k = n$, 转 step 4; 否则, 令 $k := k + 1$, 转 step 2。

step 4 (求出 $W(f)$ 中从顶点 s 到顶点 t 的最短路或判定 $W(f)$ 中从顶点 s 到顶点 t 的最短路不存在) 如果 $U_{st} = +\infty$, 则 $W(f)$ 中从顶点 s 到顶点 t 的最短路不存在, 停止; 否则令 $1 := s$, $r := S_{st}$, $P_{st} := \Phi$。

step 5　令 $P_{st} := P_{st} \cup (1, r)$。

step 6　如果 $r = t$, 则 $W(f)$ 中从顶点 s 到顶点 t 的最短路为 P_{st}, 停止: 否则令 $1 := r$, $r := S_{rt}$, 转 step 5。

证明　因为 $N = (V, A, C, B)$ 是典则型运输网络, 所以 $W(f)$ 不包含两平行弧(顶点相同

方向相同的弧)。

因为 f 是流量为 $v(f)$ 的 N 的所有可行流中的最小费用流, 可以用反证法证明 $W(f)$ 不包含负有向圈。事实上, 反设 $W(f)$ 包含负有向圈 c, 用 $b(c)$ 表示负有向圈 c 的所有弧的权值的和, 用 c^+ 表示 c 中权值非负的弧在 N 中的对应弧的集合, 用 c^- 表示 c 中权值为负的弧在 N 中的对应弧的集合。

$$令\ \theta = \min\{\min_{c^+}\{C_{ij} - f_{ij}\}, \min_{c^-} f_{ij}\}, f^*_{ij} = \begin{cases} f_{ij} + \theta & 当 (i,j) \in c^+ \\ f_{ij} - \theta & 当 (i,j) \in c^- \\ f_{ij} & 当 (i,j) 不属于 c \end{cases} \tag{1}$$

按式(1) 调整 f 得到可行流 f^*, 显然有:

$$\theta > 0, b(f^*) = b(f) + b(c)\theta, v(f^*) = v(f)。$$

$\because b(c) < 0$, $\therefore b(f^*) < b(f)$, 这与“f 是流量为 $v(f)$ 的 N 的所有可行流中的最小费用流”矛盾。

再根据文献[3] 中的 Floyd 算法的理论依据, 可推得结论成立。

引理 7[1] 设 $N = (V, A, C, B)$ 是典则型运输网络, f 是 N 的一可行流, 按引理 4 定义 $W(f)$, P 是 $W(f)$ 中从 s 到 t 的最短路, μ 是 N 中从发点 s 到收点 t 的一条与 P 对应的关于 f 的增广链, μ^+ 为 μ 的前向弧的集合, μ^- 为 μ 的后向弧的集合, 弧 $(i, j) \in P$。则

①$C_{ij} > 0 \Leftrightarrow (i, j) \in \mu^+$。

②$C_{ij} = 0 \Leftrightarrow (j, i) \in \mu^-$。

定理 1 任意运输网络都可化为与之等效的典则型运输网络。

证明: 若运输网络 $N = (V, A, C, B)$ 不是典则型运输网络, 则存在两个不同的顶点 i 和 j, 使得弧 $a_{ij} = (i, j)$ 和 $a_{ij} = (j, i)$ 都存在。在弧 $a_{ij} = (i, j)$ 中增加一个虚顶点 x, 把弧 $a_{ij} = (i, j)$ 变成两条弧 $a_{ix} = (i, x)$ 和弧 $a_{xj} = (x, j)$, 使得 $C(a_{ix}) = C(a_{xj}) = C_{ij}$, $b(a_{ix}) = b(a_{xj}) = 0.5b_{ij}$。重复上述步骤, 直到运输网络中任意两个不同顶点间最多存在一条弧为止, 这时得到的网络就是典则型运输网络, 并且它在运输功能上和 N 等效。

定理 2 设 $N = (V, A, C, B)$ 是典则型运输网络, 则按以下算法求 N 的最小费用最大流:

step 1 给定初始可行流 $f = 0$。

step 2 利用引理 4 和引理 6 判定 N 是否有关于 f 的最小费用增广链。如果 N 中存在关于 f 的最小费用增广链, 利用引理 2、引理 4、引理 6 和引理 7 求出调整量 θ 并对 f 进行调整得到流量增加的新 f, 转 step 2; 否则 f 是 N 的最小费用最大流。

证明: 由引理 5 知, 初始可行流 $f = 0$ 是流量为零的最小费用流。再由引理 1 和引理 3 知, 结论成立。

2 算法

定理 1 的证明给出了任意运输网络化为与之等效的典则型运输网络的方法, 定理 2 是以下典则型运输网络中求最小费用最大流的算法 X_6 的理论依据。因此, 利用定理 1 和算法 X_6 就能求任意运输网络的最小费用最大流。

典则型运输网络 N 中求最小费用最大流的算法 X_6 如下:

step 1 (准备) 写出 N 的容量矩阵 $C = (C_{ij})_{n\times n}$ 和费用矩阵 $B = (b_{ij})_{n\times n}$, 令 $F_{ij} := 0$ $(i,$

$j = 1, 2, \cdots, n$)。

step 2　(构造 $W(f)$ 的权关联矩阵 W) 令 $i := 1$。

step 3　令 $j := 1$。

step 4　如果 $i \neq j$, 转 step 5; 否则令 $W_{ij} := 0$, 转 step 8。

step 5　如果 $C_{ij} > 0$, 则 N 中弧 (i, j) 存在, 转 step 6; 否则令 $W_{ij} := +\infty$, 转 step 8。

step 6　如果 $F_{ij} < C_{ij}$, 令 $W_{ij} := b_{ij}$; 否则令 $W_{ij} := +\infty$。

step 7　如果 $F_{ij} > 0$, 令 $W_{ji} := -b_{ij}$; 否则令 $W_{ji} := +\infty$。

step 8　如果 $j \neq n$, 令 $j := j + 1$, 转 step 4; 否则转 step 9。

step 9　如果 $i \neq n$, 令 $i := i + 1$, 转 step 3; 否则转 step 10。

step 10　(计算 $W(f)$ 的任意两顶点间的最短路的长) 令 $U_{ij} := W_{ij}, S_{ij} := j$, $(i, j = 1, 2, \cdots, n)$, $k := 1$。

step 11　对 $1 \leq i, j \leq n$. 如果 $U_{ij} > U_{ik} + U_{kj}$, 则令 $U_{ij} := U_{ik} + U_{kj}, S_{ij} := S_{ik}$; 否则 U_{ij}、S_{ij} 保持不变。

step 12　如果 $k = n$, 转 step 13; 否则, 令 $k := k + 1$, 转 step 11。

step 13　(判定 N 中是否存在关于 f 的最小费用增广链) 如果 $U_{st} = +\infty$, 则 N 中不存在关于 f 的最小费用增广链, 转 step 22; 否则令 $1 := S$, $r := S_{st}$, 转 step 14。

step 14　(求调整量 θ) 如果 $C_{1r} > 0$, 令 $\theta := C_{1r} - F_{1r}$; 否则令 $\theta := F_{r1}$。

step 15　如果 $r = t$, 转 step 19; 否则令 $1 := r$, $r := S_{rt}$。

step 16　如果 $C_{1r} > 0$ 且 $\theta > C_{1r} - F_{1r}$, 令 $\theta := C_{1r} - F_{1r}$。

step 17　如果 $C_{1r} = 0$ 且 $\theta > F_{r1}$, 令 $\theta := F_{r1}$。

step 18　转 step 15。

step 19　(调整) 令 $1 := s$, $r := S_{st}$。

step 20　如果 $C_{1r} > 0$, 令 $F_{1r} := F_{1r} + \theta$; 否则令 $F_{r1} := F_{r1} - \theta$。

step 21　如果 $r = t$, 转 step 2; 否则令 $1 := r$, $r := S_{rt}$, 转 step 20。

step 22　(输出 N 的最小费用最大流在所有弧的对应流量) 令 $i := 1$。

step 23　令 $j := 1$。

step 24　如果 $i \neq j$ 且 $C_{ij} > 0$, 则 N 中弧 (i, j) 存在, 输出弧 (i, j) 和它的流量 F_{ij}。

step 25　如果 $j < n$, 令 $j := j + 1$, 转 step 24; 否则转 step 26。

step 26　如果 $i < n$, 令 $i := i + 1$, 转 step 23; 否则停止。

3　应用举例

某运输网络如图 1 所示, 顶点 1 为发点, 顶点 5 为收点, 弧旁的数字为 (b_{ij}, C_{ij}), 其中 b_{ij} 表示弧 (i, j) 上单位流量的费用, C_{ij} 表示弧 (i, j) 的容量, 求该运输网络的最小费用最大流。

解: 在运输网络图 1 中, 由于在顶点 2 和顶点 3 间存在两条弧 (2, 3) 和 (3, 2)。在图 1 的弧 (2, 3) 中增加一个虚顶点 6, 把弧 (2, 3) 变成两条弧 (2, 6) 和 (6, 3), 把弧 (2, 6) 的单位流量的费用和容量分别为 1 和 9, 弧 (6, 3) 的单位流量的费用和容量也分别为 1 和 9, 则图 1 化为与之等效的典则型运输网络图 2。

在典则型运输网络图 2 中, 顶点数 $n = 6$, 发点 $s = 1$, 收点 $t = 5$, 费用矩阵 B、容量矩阵 C

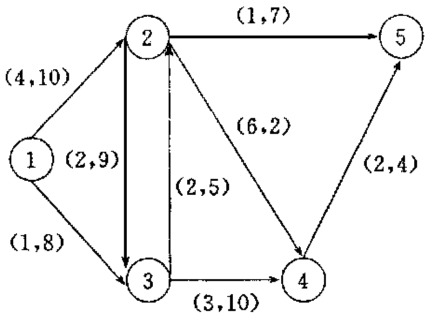

Fig. 1
图1

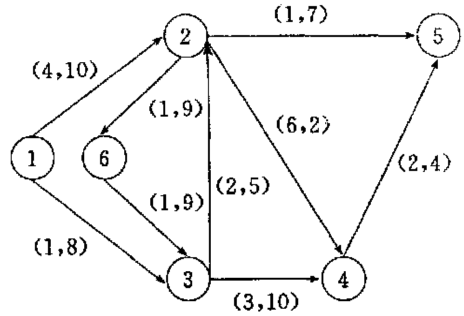

Fig. 2
图2

分别为:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 0 & \infty & 6 & 1 & 1 \\ \infty & 2 & 0 & 3 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 0 & 2 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & \infty \\ \infty & \infty & 1 & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} \infty & 10 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \infty & 0 & 2 & 7 & 9 \\ 0 & 5 & \infty & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \infty & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \infty & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 & 0 & \infty \end{pmatrix}$$

利用本文作者根据算法X_6**用**Visual Basic 5.0**设计的名为《规划系统》的应用软件的名叫《最小费用最大流问题》的功能模块**, **只要输入费用矩阵**B**、容量矩阵**C **及相关信息** n、s **和** t, **就能快捷地求出典则型运输网络图** 2 **的最小费用最大流如下**:

弧(i, j): (1, 2), (1, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 2), (3, 4), (4, 5), (6, 3)

流量: 3　8　0　7　0　4　4　4　0

所以图 1 **的最小费用最大流为**:

弧(i, j): (1, 2), (1, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 3), (3, 2), (3, 4), (4, 5)

流量: 3　8　0　7　0　4　4　4

参考文献

[1] Bondy J A, Murty U S R. Graph Theory with Applictions [M], American Elsever, New York, 1976.
[2] 李德, 钱颂迪 运筹学[M]. 清华大学出版社, 1982.
[3] 刘家壮, 徐源 网络最大化[M]. 北京: 高等教育出版社, 1991.
[4] 李作安, 谢凡荣 运输网络中求任意两顶点间最大容量路的一个算法[A]. 西南民族学院学报, 1999, 25(3).
[5] 李作安, 谢凡荣 运输网络中求最大容量路的一个算法[A]. 四川大学学报, 1999, 36(3): 467-471.