3D坐标变换

引言：

在现实世界中，我们更多处理的是三维的坐标以及姿态数据，当我们处在一个场景中时，我们会有自己的三维坐标和姿态，与二维一样，相同的目标在不同的坐标系下，就会有不同的表达。那么，如何将这些表达在不同的坐标系之间进行变换，就是我们将要研究掌握的知识。

接下来我会带着大家介绍关于3D坐标系相关的知识。

学习目标：

了解三维坐标系下姿态的表达方式

能够描述目标的三维位置和姿态

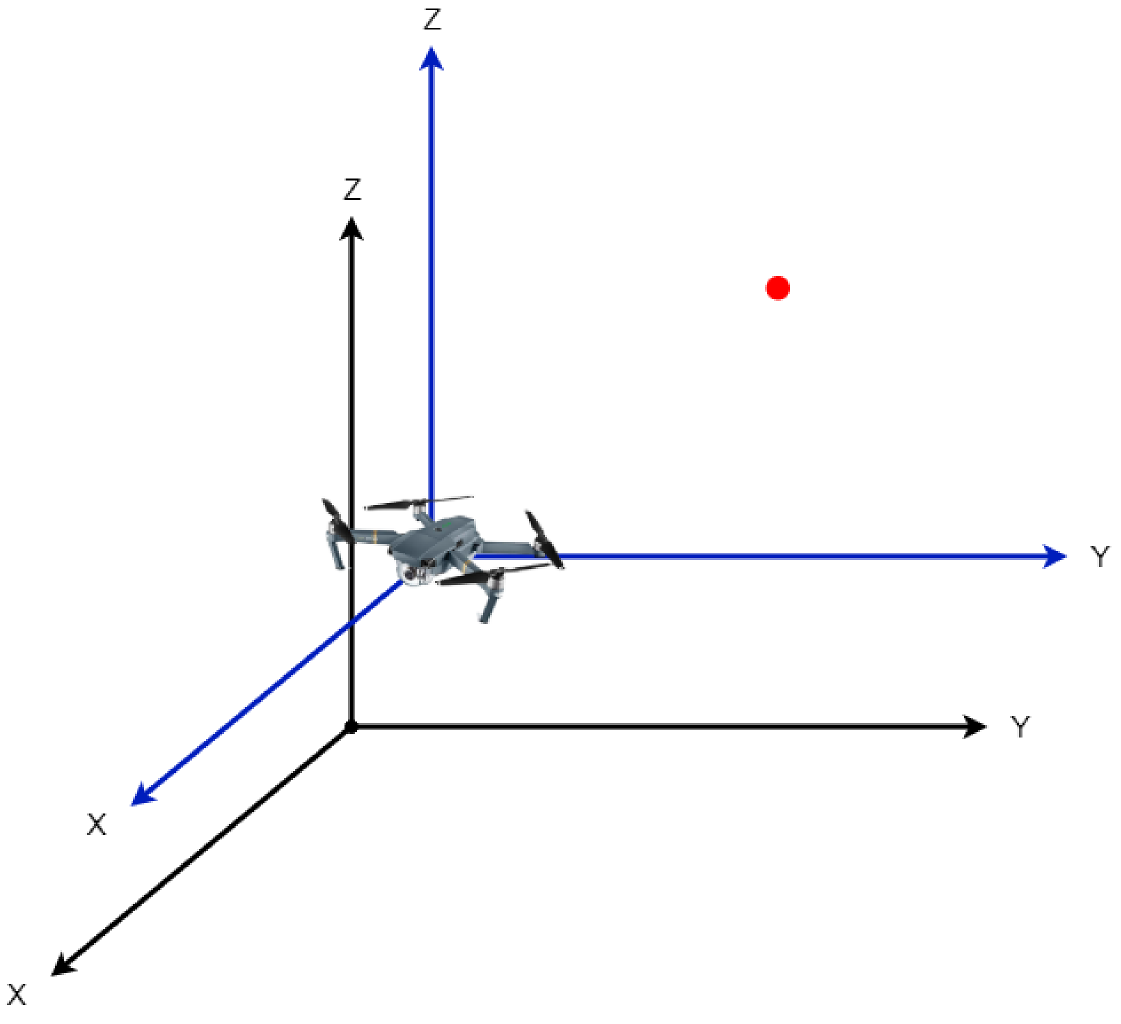
能够编写程序描述三维坐标系的变换矩阵

能够编写程序计算目标在不同的三维坐标系下的表达

3D坐标系变换场景

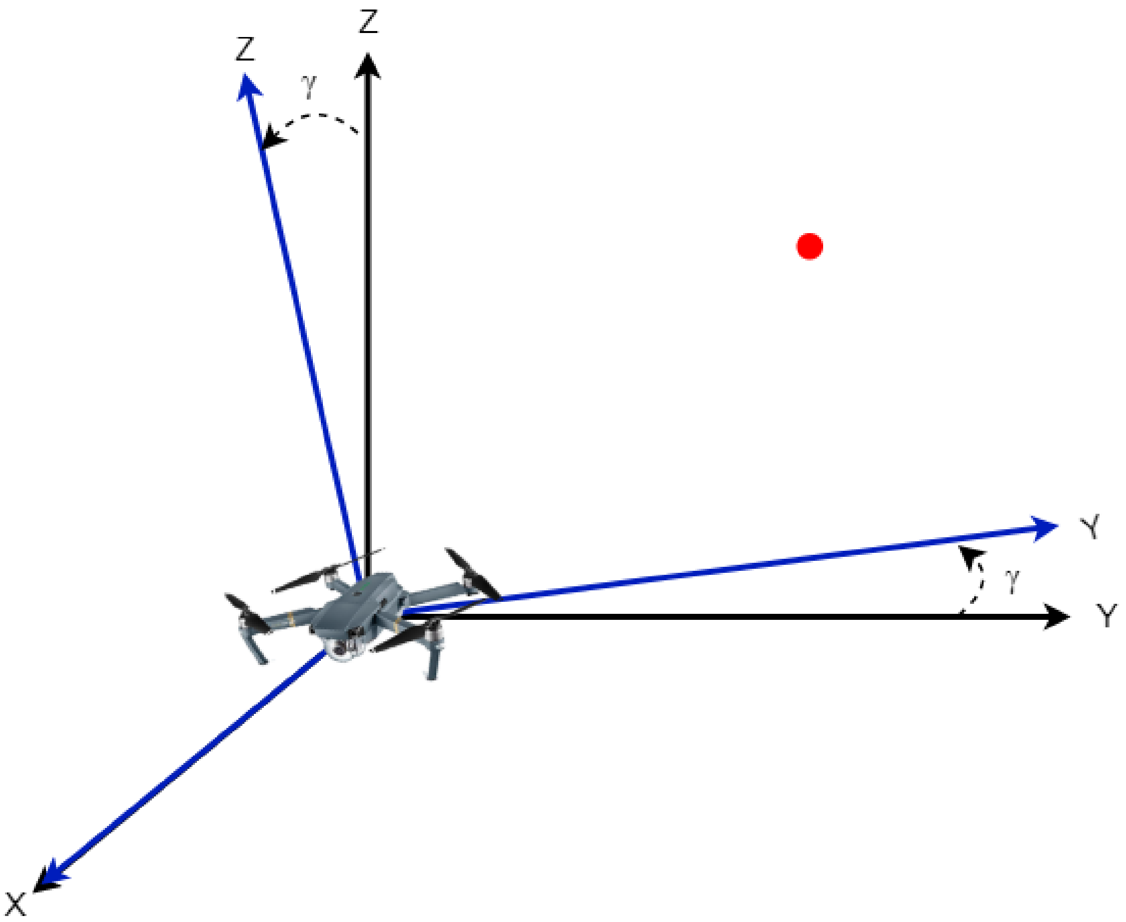
假如我们使用了一个无人机在三维场景下进行目标侦测，无人机相对于世界坐标系的位置已知。

已知无人机在世界坐标系下的位置为 $(\delta x, \delta y, \delta z)$，并且发现目标相对于无人机坐标系的位置为 (x_r, y_r, z_r)。如何计算目标点（下图红点）在世界坐标系的位置？

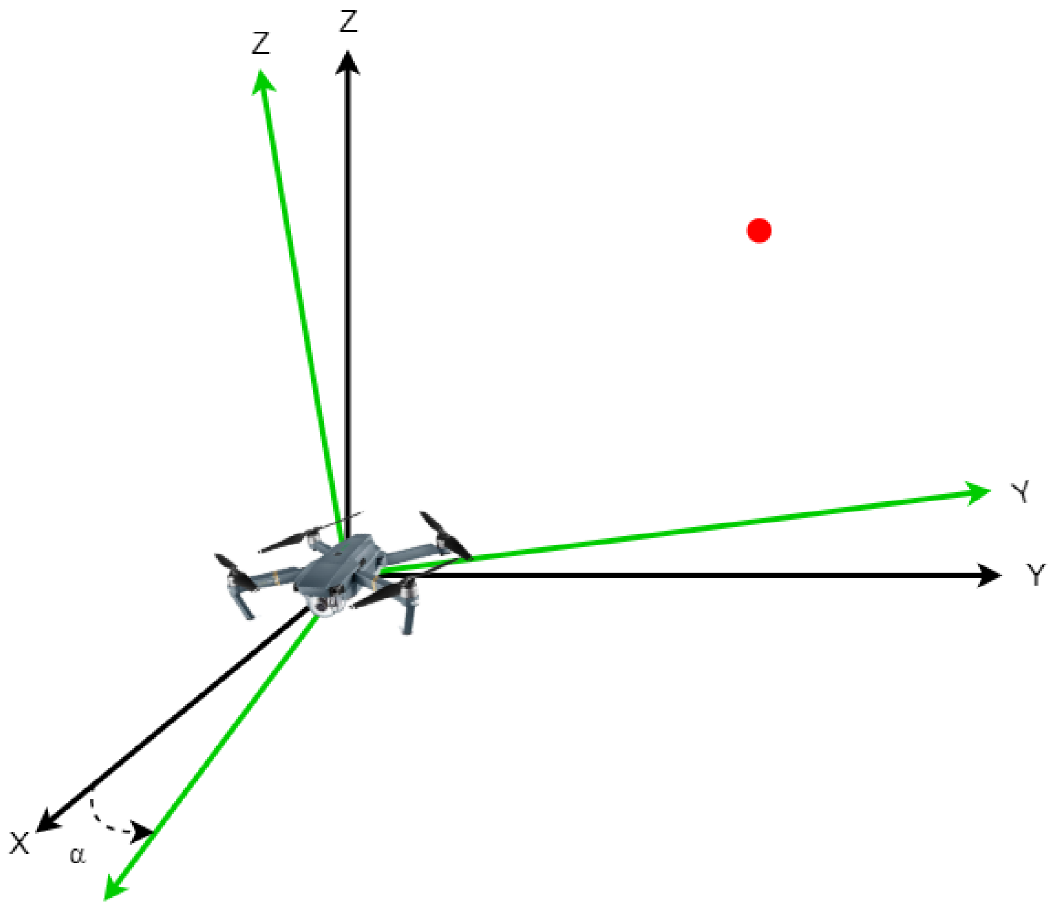


当无人机的坐标系在原点时，以自己为中心绕着的世界坐标系X轴进行了 γ 度的旋转，得到了目标相对于无人机的位置 。然后接着又以自己为中心绕着世界坐标系的Z轴进行了 α 度的旋转，得到了目标相对于无人机的位置，那么如何根据这些位置得到目标在世界坐标系下的位置?

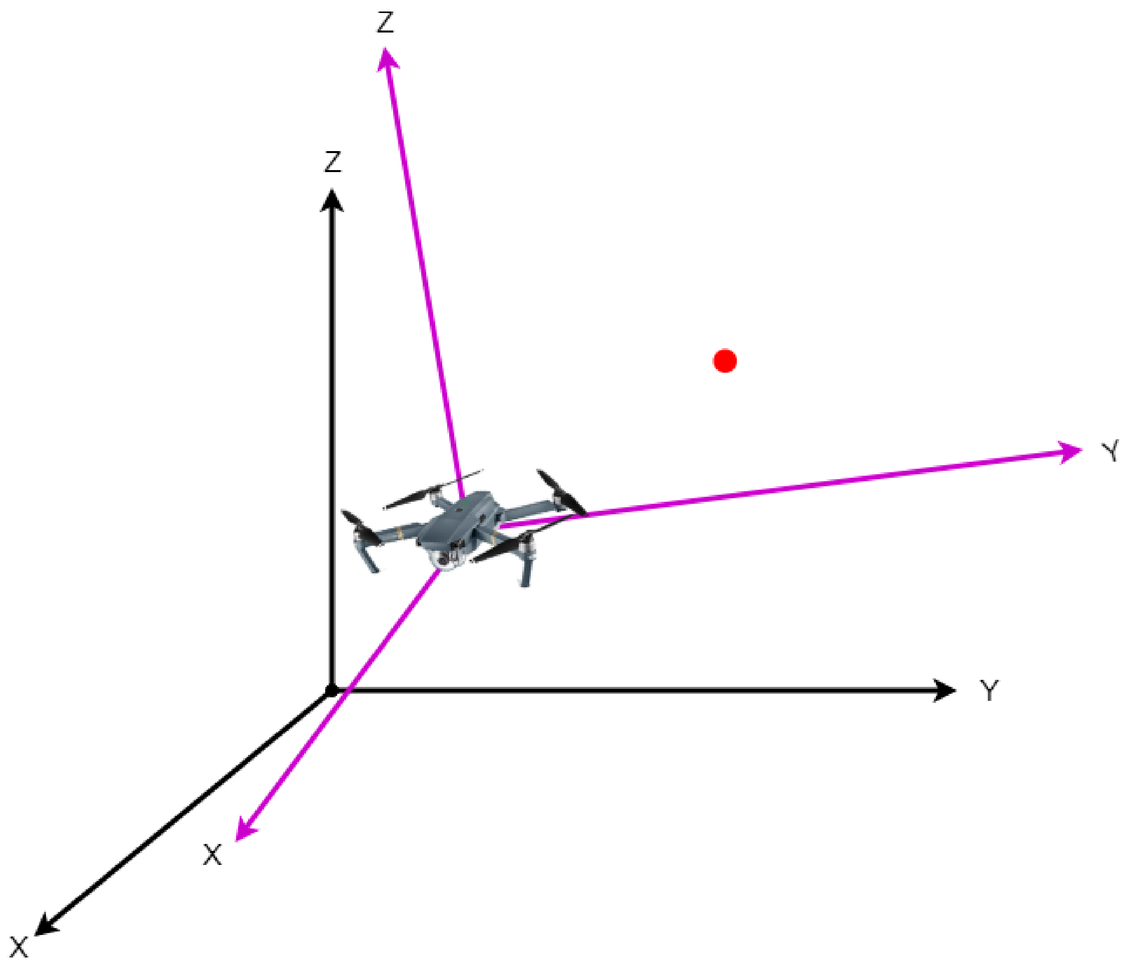
- **绕X轴旋转 γ 度**



- **先绕X轴旋转 γ 度、接着绕Z轴旋转 α 度**



那么再进一步，如果无人机的变换既包含了旋转也包含了平移，那么其观察到的目标点位置 (x_r, y_r, z_r)，根据当前无人机的旋转平移信息，如何转换得到目标点在世界坐标系下的坐标(x_w, y_w, z_w)？



3D坐标系变换公式及示例

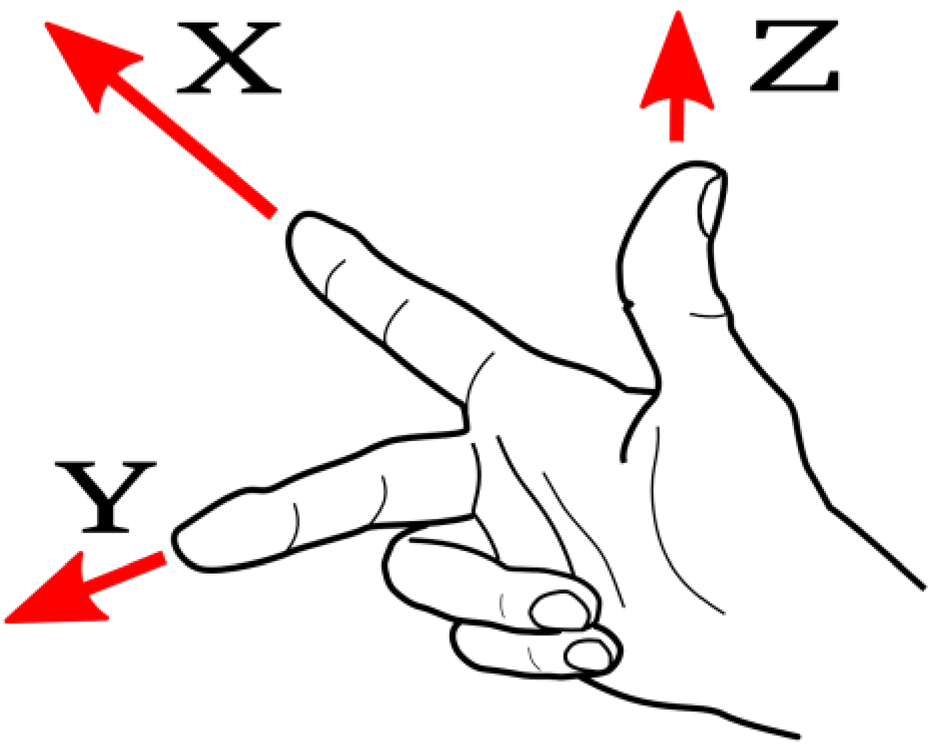
右手定则及旋转规则

右手定则

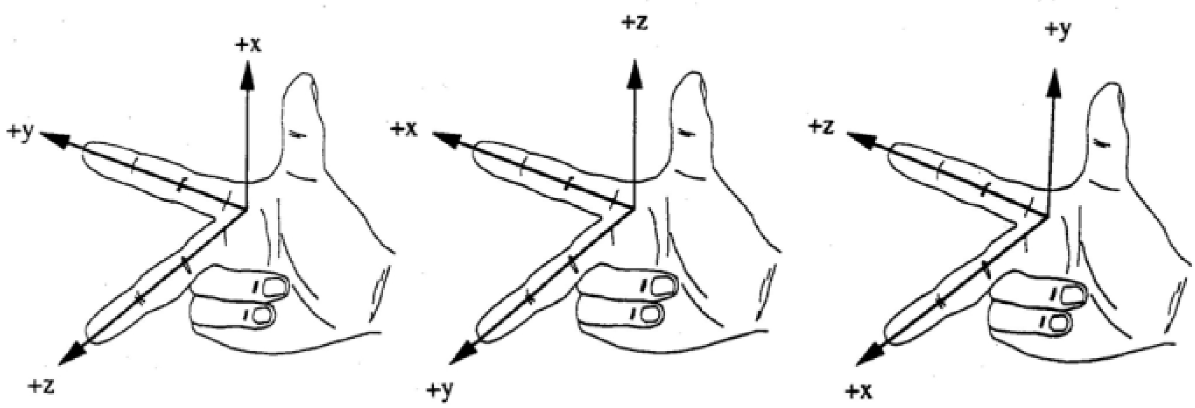
经典的右手定则如下：

- 食指指向X轴
- 中指对应Y轴
- 拇指对应Z轴

三个轴相互垂直，且从X->Y->Z 为逆时针方向旋转。



我们也可能见到其他的右手坐标对应方式，如下，他们都满足坐标系逆时针旋转规则。

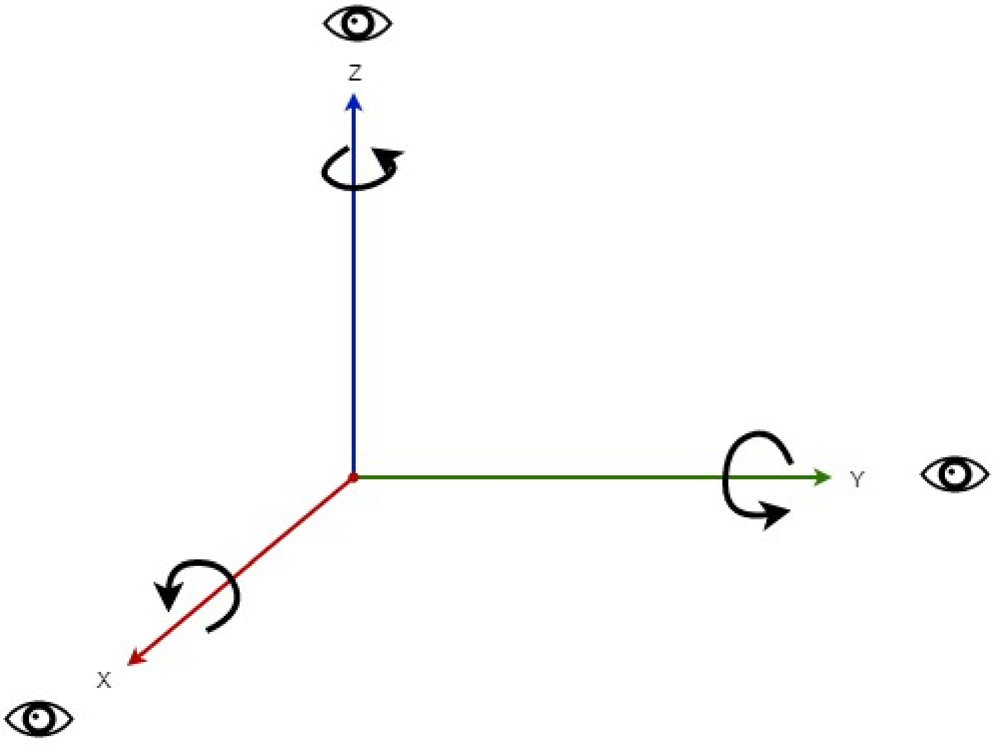


Configuration 1　　Configuration 2　　Configuration 3

坐标系的旋转

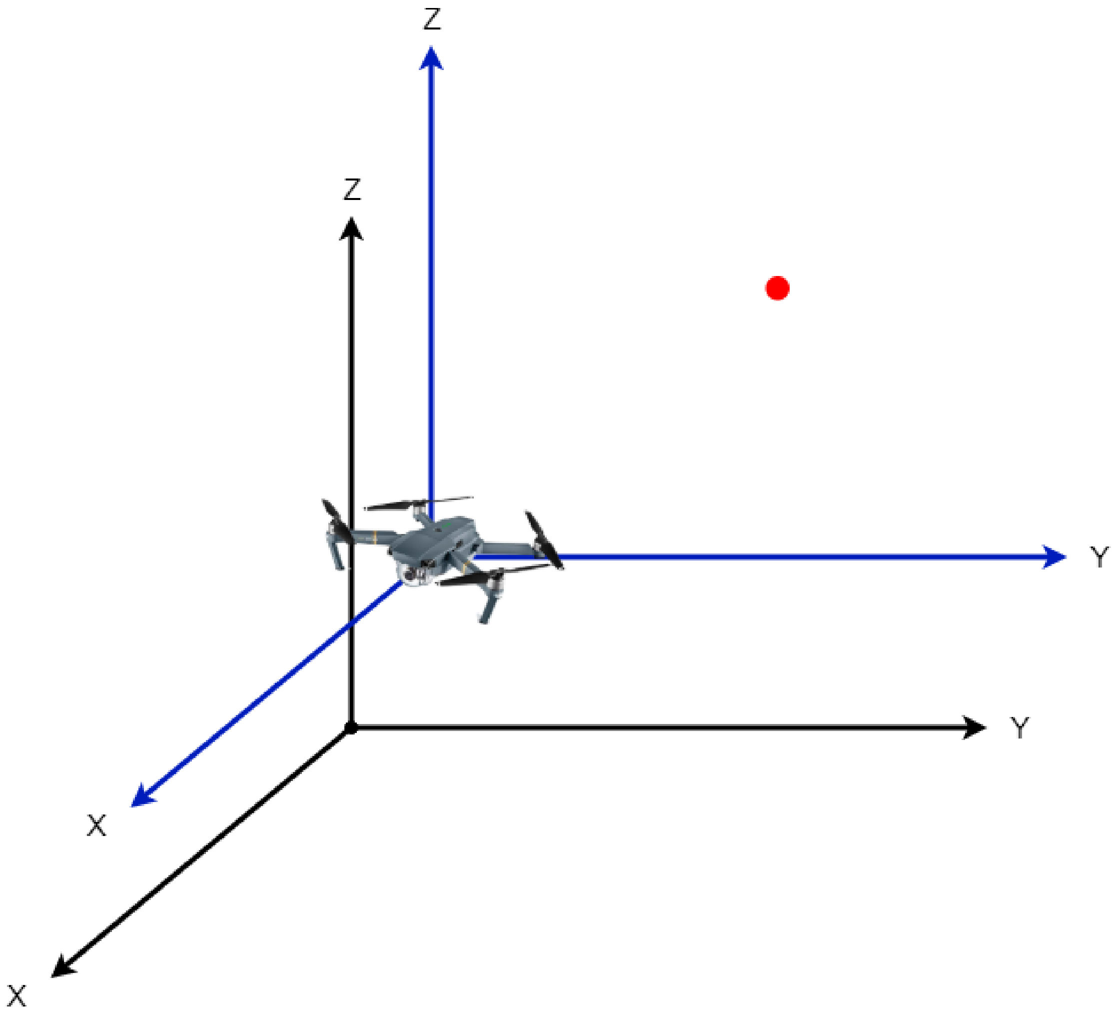
- 坐标系的旋转角度为 **正值** 时，我们从外侧看向坐标轴，其旋转方向应为 **逆时针** 。
- 坐标系的旋转角度为 **负值** 时，我们从外侧看向坐标轴，其旋转方向应为 **顺时针** 。

如下图：



平移变换

我们依然先考虑最简单的平移关系，如下图所示，假如 **红点目标** 在 **无人机坐标系** O_r 中的坐标为 $(0,3,2)$ ， **无人机** 在 **世界坐标系** O_w 中的坐标为 $(1,2,2.5)$ 。



则根据简单的空间几何关系，就可以知道目标在 **世界坐标系** O_w 中的坐标如下：

$$\begin{cases} x_w &= 1.0 + 0.0 = 1.0 \\ y_w &= 2.0 + 3.0 = 5.0 \\ z_w &= 2.5 + 2.0 = 4.5 \end{cases}$$

转换成符号表达如下：

$$\begin{cases} x_w &= \delta x + x_r \\ y_w &= \delta y + y_r \\ z_w &= \delta z + z_r \end{cases}$$

写成向量求和的表达如下：

$$\begin{bmatrix} x_w \\ y_w \\ z_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_r \\ y_r \\ z_w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{bmatrix}$$

写成齐次矩阵相乘的表达如下（详细推导可参见此链接：机器人运动学3D坐标系平移）：

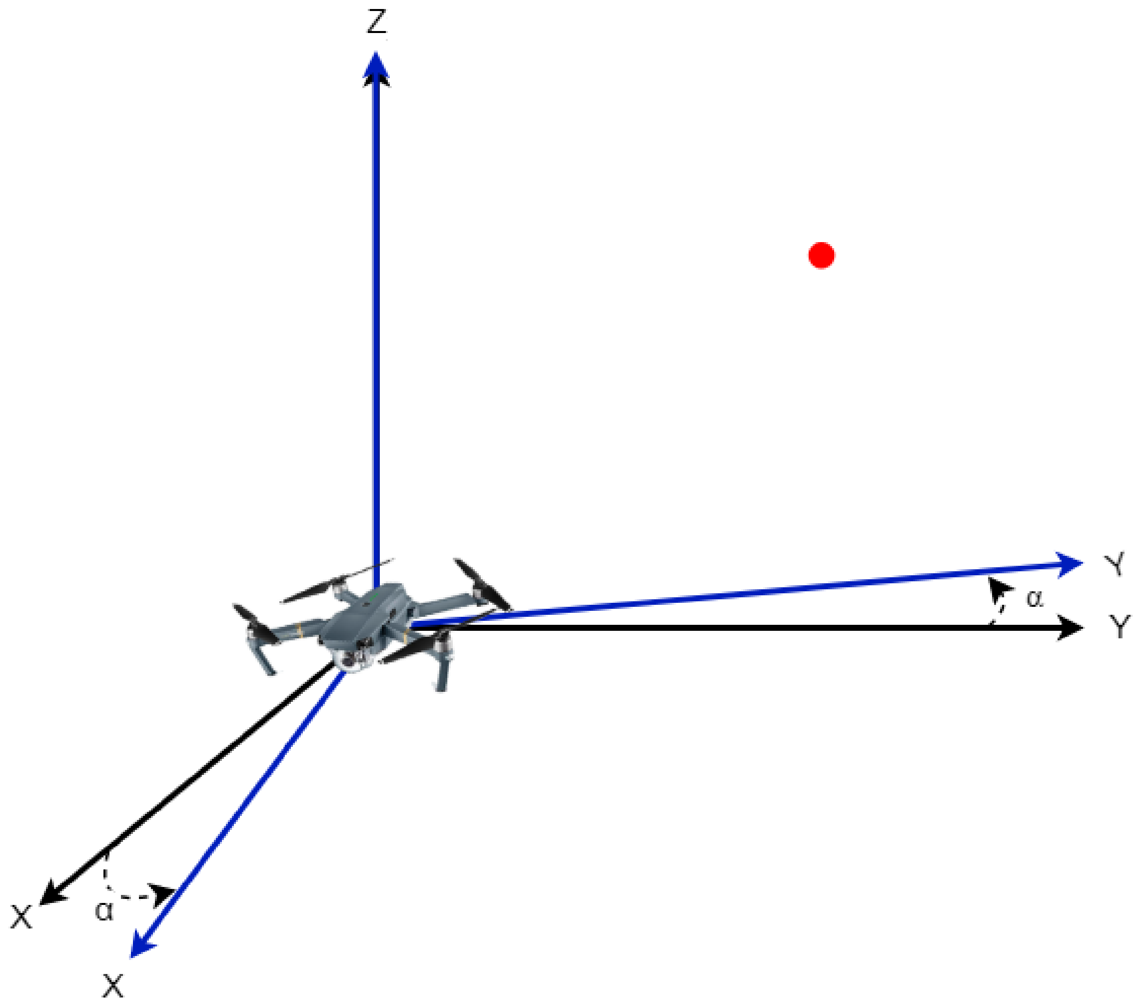
$$\begin{bmatrix} x_w \\ y_w \\ z_w \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \delta x \\ 0 & 1 & 0 & \delta y \\ 0 & 0 & 1 & \delta z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_r \\ y_r \\ z_r \\ 1 \end{bmatrix}$$

旋转变换

- **单独绕Z轴旋转 α 度**

我们先考虑一个轴的旋转。如下图所示，**无人机坐标系** O_r 是由 **世界坐标系** O_w 经过绕Z轴逆时针旋转 α 度而来。

如果已知目标在 **无人机坐标系** O_r 的位置 (x_r, y_r, z_r) 那么如何得到其在 **世界坐标系** O_w 下的位置呢?



这里可以认为其Z轴的坐标与旋转无关，则根据二维可以将多元方程写成如下形式：

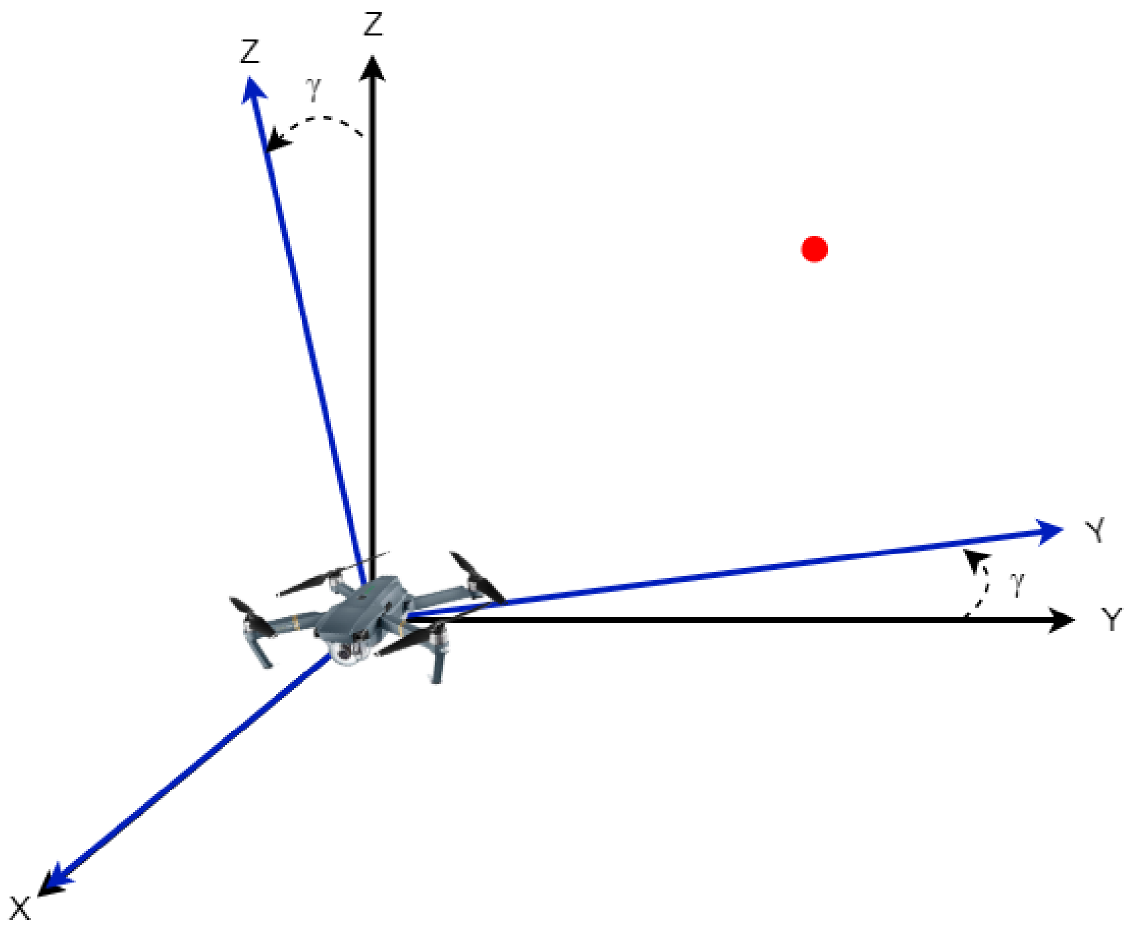
$$\begin{cases} x_w = \cos\theta \cdot x_r - \sin\theta \cdot y_r + 0 \cdot z_r \\ y_w = \sin\theta \cdot x_r + \cos\theta \cdot y_r + 0 \cdot z_r \\ z_w = 0 \cdot x_r + 0 \cdot y_r + 1 \cdot z_r \end{cases}$$

以矩阵点乘的形式，变换公式如下：

$$\begin{bmatrix} x_w \\ y_w \\ z_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos(\alpha) & -sin(\alpha) & 0 \\ sin(\alpha) & cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_r \\ y_r \\ z_r \end{bmatrix}$$

我们将其中的 3x3 的旋转矩阵称命名为 $R_z(\alpha)$

- **单独绕X轴旋转 γ 度**



我们把之前绕Z轴旋转的所有x，y，z依次换成y，z，x则可得到如下多元方程式：

$$\begin{cases} y_w = \cos\theta\cdot y_r - \sin\theta\cdot z_r + 0\cdot x_r \\ z_w = \sin\theta\cdot y_r + \cos\theta\cdot z_r + 0\cdot x_r \\ x_w = 0\cdot y_r + 0\cdot z_r + 1\cdot x_r \end{cases}$$

整理后可得：

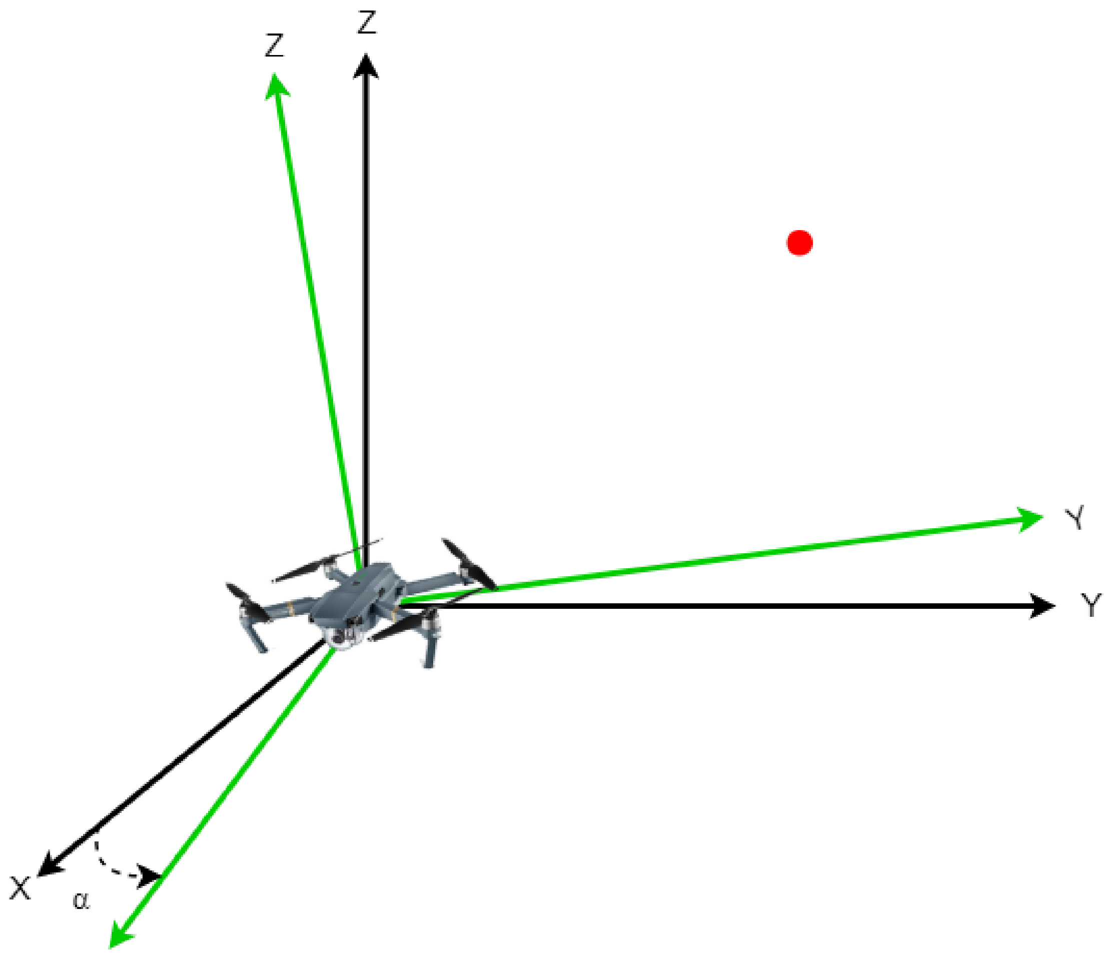
$$\begin{cases} x_w = 1\cdot x_r + 0\cdot y_r + 0\cdot z_r \\ y_w = 0\cdot x_r + \cos\theta\cdot y_r - \sin\theta\cdot z_r \\ z_w = 0\cdot y_r + \sin\theta\cdot y_r + \cos\theta\cdot z_r \end{cases}$$

以矩阵点乘的形式，变换公式如下：

$$\begin{bmatrix} x_w \\ y_w \\ z_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos(\gamma) & -sin(\gamma) \\ 0 & sin(\gamma) & cos(\gamma) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_r \\ y_r \\ z_r \end{bmatrix}$$

我们将其中的 3x3 的旋转矩阵称命名为 $R_x(\gamma)$

- **先绕X轴旋转 γ 度、接着绕Z轴旋转 α 度**



这里并没有绕Y轴旋转，我们可以等同于认为绕Y轴的旋转为3x3的单位矩阵，即 $\beta = 0$ 。且此时：

$$R_y(\beta) = \begin{bmatrix} cos(\beta) & 0 & sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -sin(\beta) & 0 & cos(\beta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

我们可以认为这个过程是 **先绕X轴旋转 γ 度、接着绕Y轴旋转 $\beta = 0$ 度、最后绕Z轴旋转 α 度** 。我们将之总结为如下变换：

$$\begin{bmatrix} x_w \\ y_w \\ z_w \end{bmatrix} = R_z(\alpha) \cdot R_y(\beta) \cdot R_x(\gamma) \cdot \begin{bmatrix} x_r \\ y_r \\ z_r \end{bmatrix}$$

这里

- $R_{zyx} = R_z(\alpha) \cdot R_y(\beta) \cdot R_x(\gamma)$ 以左乘的形式描述了三个轴的变换
- $P_r = \begin{bmatrix} x_r \\ y_r \\ z_r \end{bmatrix}$ 为目标点在 **无人机坐标系** 下的坐标
- $P_w = \begin{bmatrix} x_w \\ y_w \\ z_w \end{bmatrix}$ 为目标点在 **世界坐标系** 下的坐标

由于无人机坐标系是由世界坐标系变换而来，则其变换矩阵又可以可记做 ${}^w_r R_{zyx}$ ，即以上变换可以简化为：

$$P_w = {}^w_r R_{zyx} \cdot P_r$$

其中，根据基本的矩阵相乘知识，可知 ${}^w_r R_{zyx}$ 仍然是个 3x3 的矩阵，即可以写成如下形式：

$${}^w_r R_{zyx} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix}$$

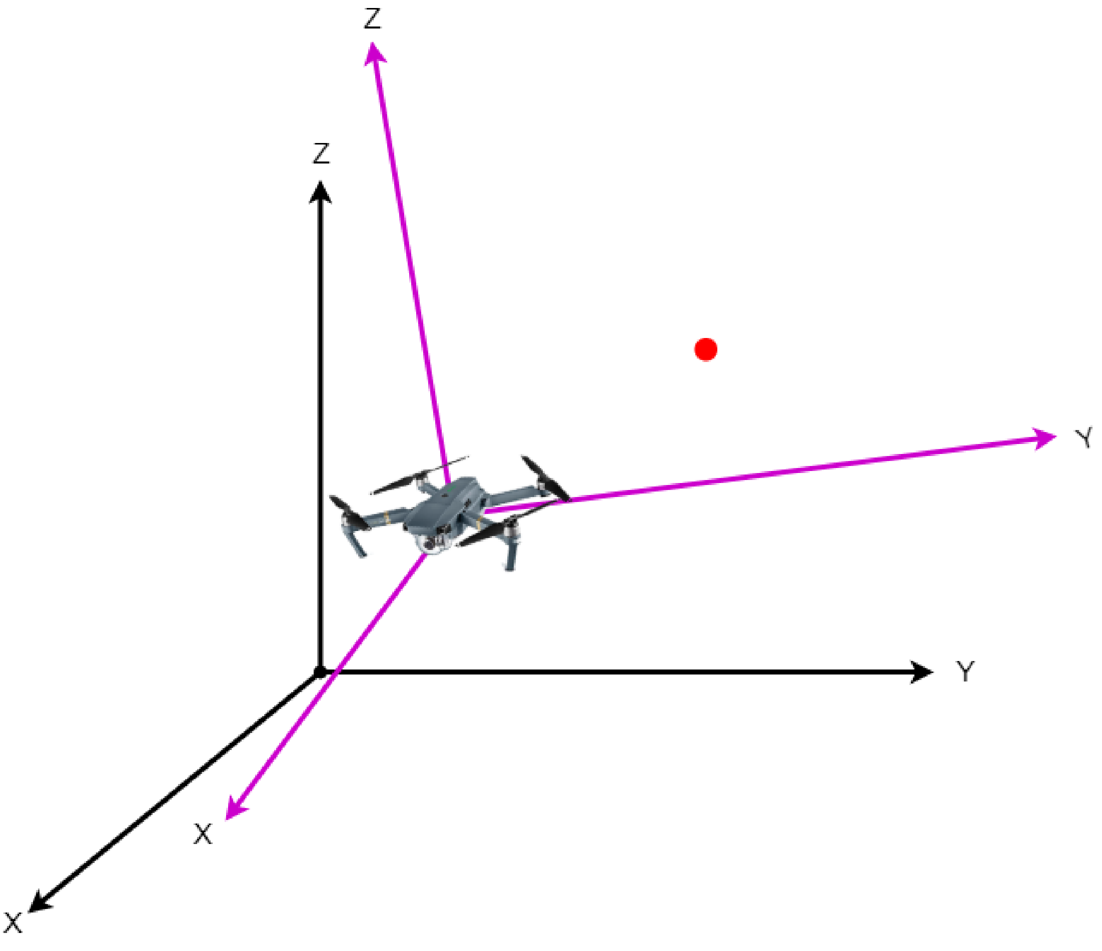
完整的推导及计算可参见：

[机器人运动学 | 3D坐标系旋转Z轴]

[机器人运动学 | 3D坐标系旋转综合]

旋转+平移变换

实际应用中，绝大部分情况都是旋转和平移同时出现的，如下：



我们可以认为新的无人机坐标系是由世界坐标系，先经过旋转，后经过平移得到的。那么结合上边的旋转和平移矩阵：

- 旋转矩阵

$$\begin{bmatrix} x_w \\ y_w \\ z_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_r \\ y_r \\ z_r \end{bmatrix}$$

- 平移矩阵

$$\begin{bmatrix} x_w \\ y_w \\ z_w \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \delta x \\ 0 & 1 & 0 & \delta y \\ 0 & 0 & 1 & \delta z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_r \\ y_r \\ z_r \\ 1 \end{bmatrix}$$

可以得到如下变换：

$$ {}_r^w T = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & \delta x \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & \delta y \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & \delta z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

完整的推导及计算可参见：

机器人运动学 | 3D坐标系旋转平移叠加