2D坐标变换

引言：

当我们处在一个场景中时，我们首先要做的事情是确定我们自己的位置坐标。

事实上，这个就是无人车定位和导航的基本问题。为了定位无人车，我们必须先使用一个确定的坐标系作为参考。接下来我会带着大家介绍关于坐标系相关的知识。

学习目标：

了解位置和姿态（位姿）与坐标系相关概念

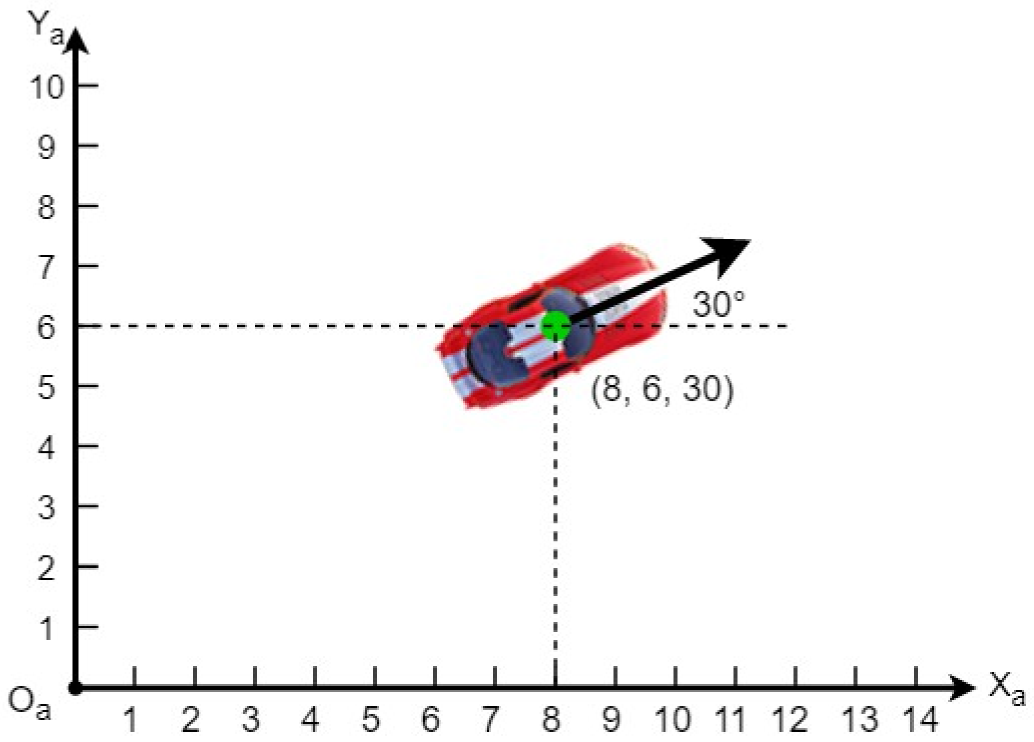
能够描述目标在二维坐标系下的位置和姿态

能够编写程序描述二维坐标系的变换矩阵

能够编写程序计算目标在不同二维坐标系下的表达

目标的位置和姿态

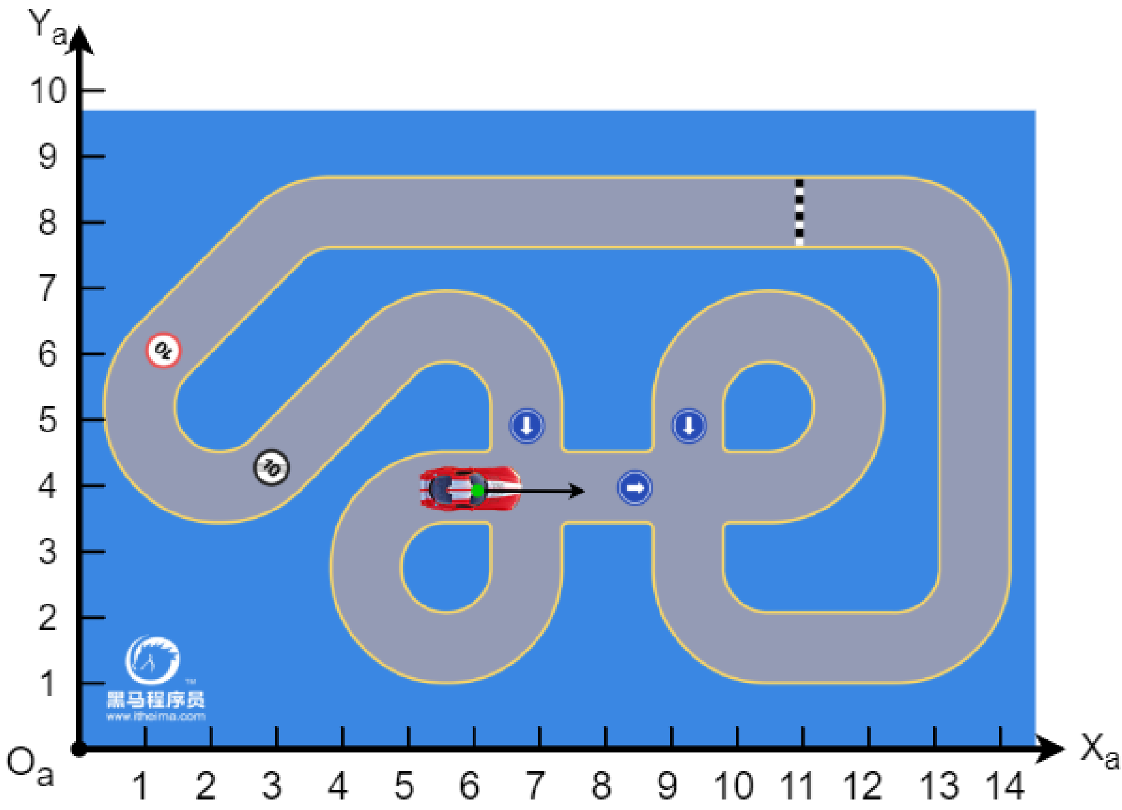
假如我们在场景里有这样一辆小汽车，他有固定的位置和方向，我们将其位置（Position）和方向（Orientation）合并在一起称之为位姿（Pose）。那么这里请问：这辆小车的位姿是多少呢？如果没有任何参照物或坐标系的情况下，我们就很难描述小车的位置和方向。



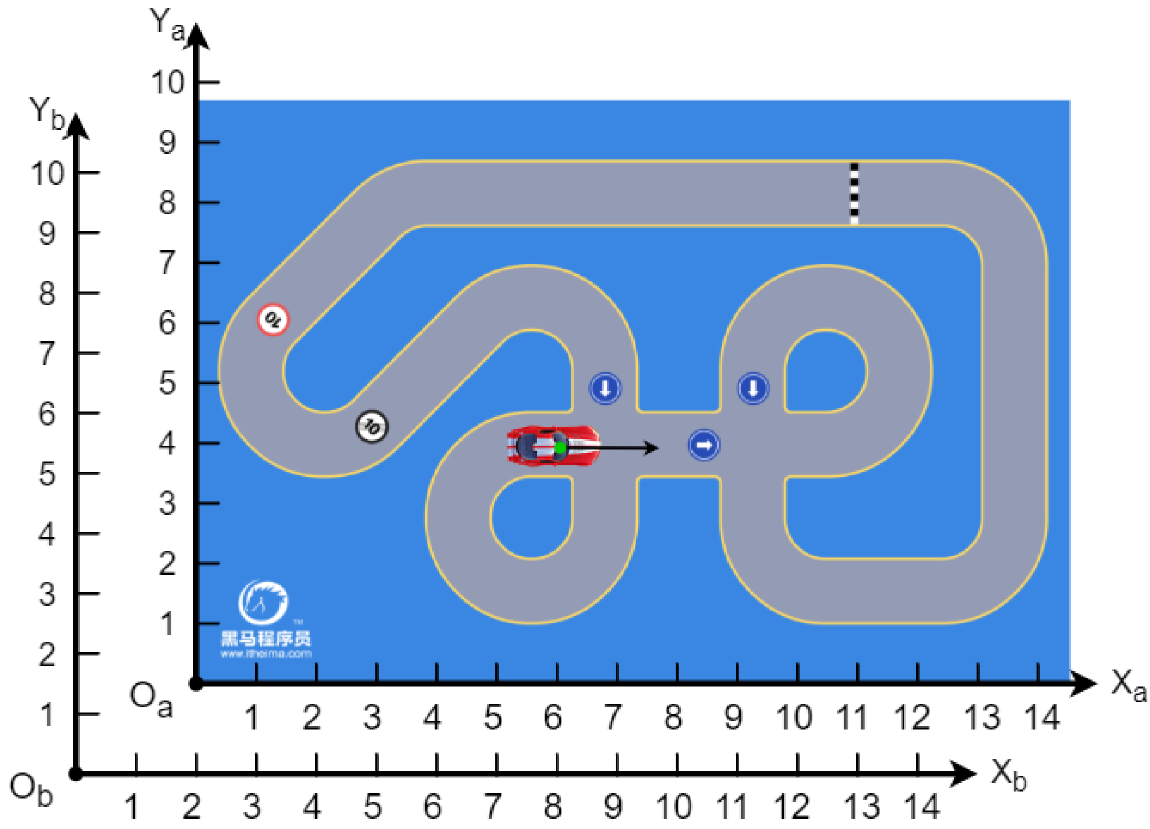
所以，我们为之添加坐标系 O_a ，则可以看出来，其位置为 $(8, 6)$，旋转角度为 30° （逆时针）。

2D坐标系变换场景

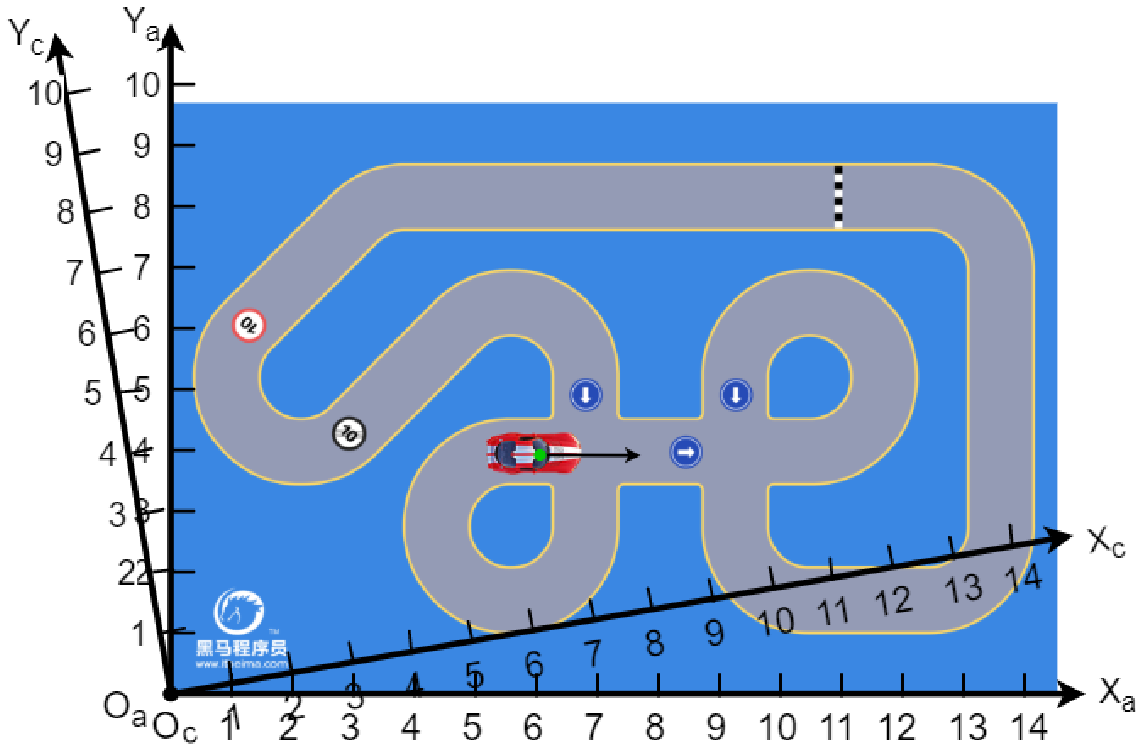
如果小车在如下地图中，并且方向向右，则其位姿为 $(6, 4, 0)$



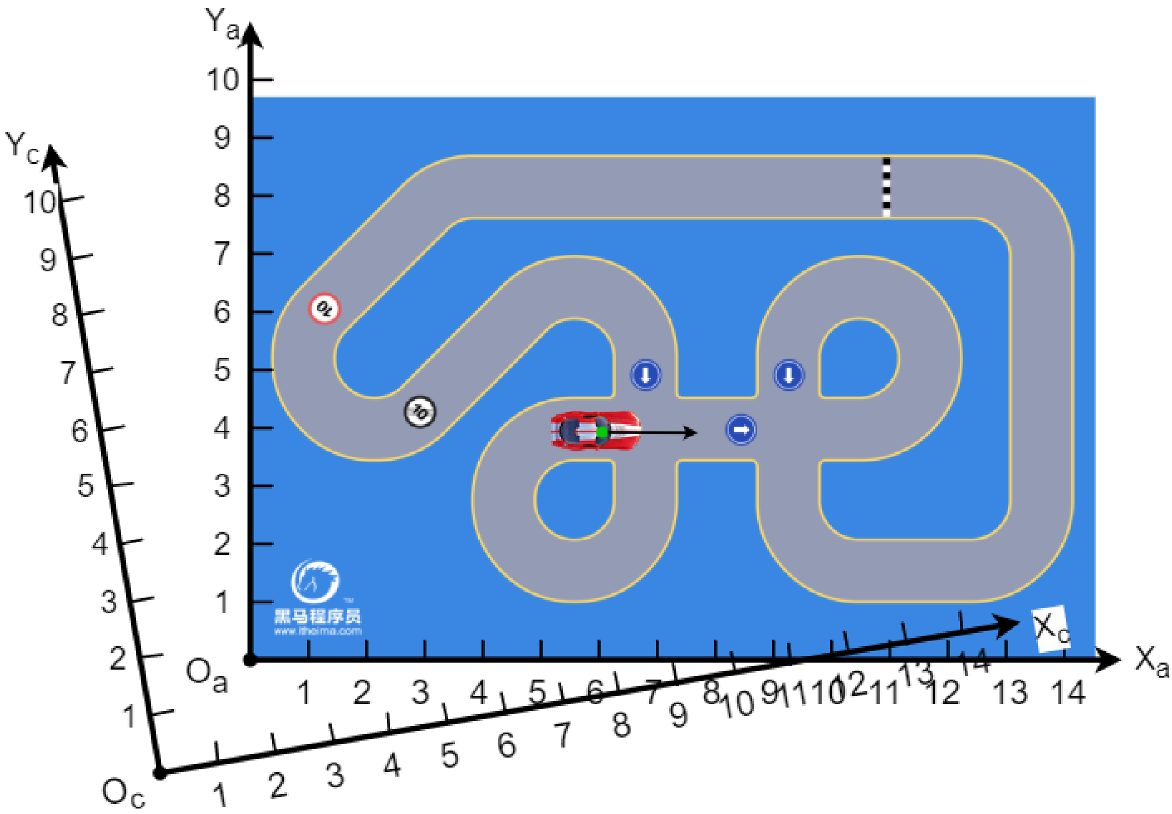
此时，想象我们有一个原始**坐标系B**，此时可以认为**坐标系A**是**坐标系B**经过平移得到的。那么我们的小车在**坐标系B**下的位姿会是怎么样的呢?



如果有一个原始**坐标系C**，可以认为**坐标系A**是**坐标系C**经过旋转得到的，如下，那么小车相对于**坐标系C**的位姿是怎么样的?



如果**坐标系A**是其他通过平移加上旋转得到的呢，在下边这种情况下，小车相对于原始的**坐标系C**的位姿又该是怎么样的呢?



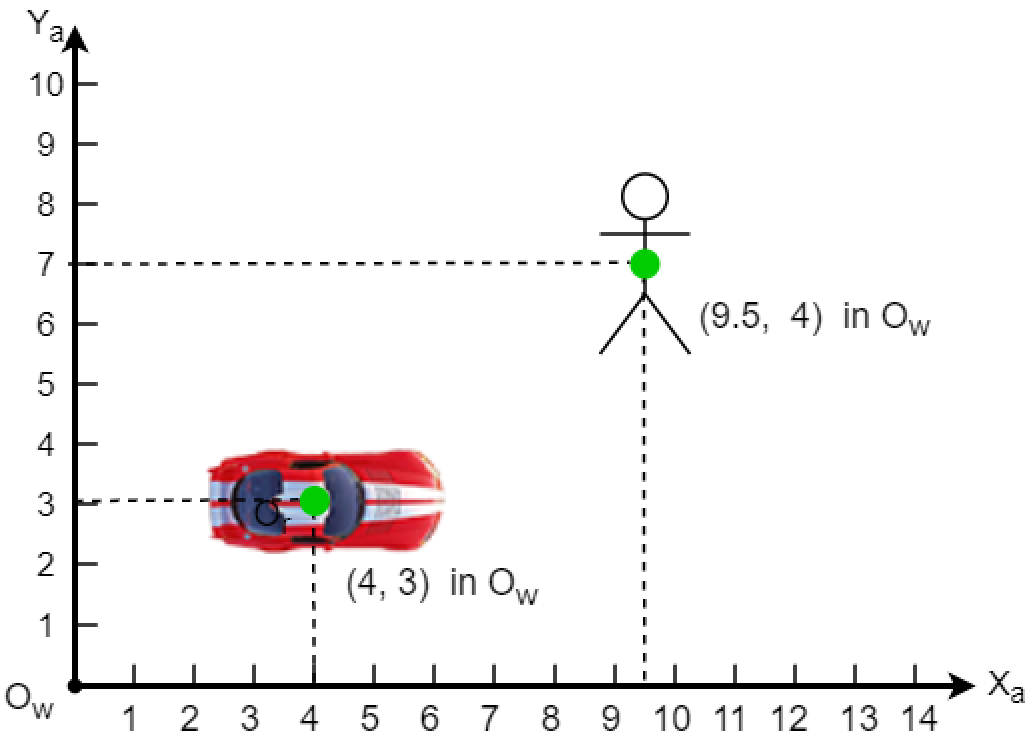
为了总结通用的解决方案，问题就来了，当我们知道小车在**坐标系A**下的位姿，如何确定小车在**坐标系B**和**坐标系C**下的位姿的。这就是我们接下来要介绍的**坐标系变换**。

实际上，知道了从**坐标系B和C**到**坐标系A**的变换关系，就可以帮我们确定目标小车在原始的**坐标系B和C**下的位姿。

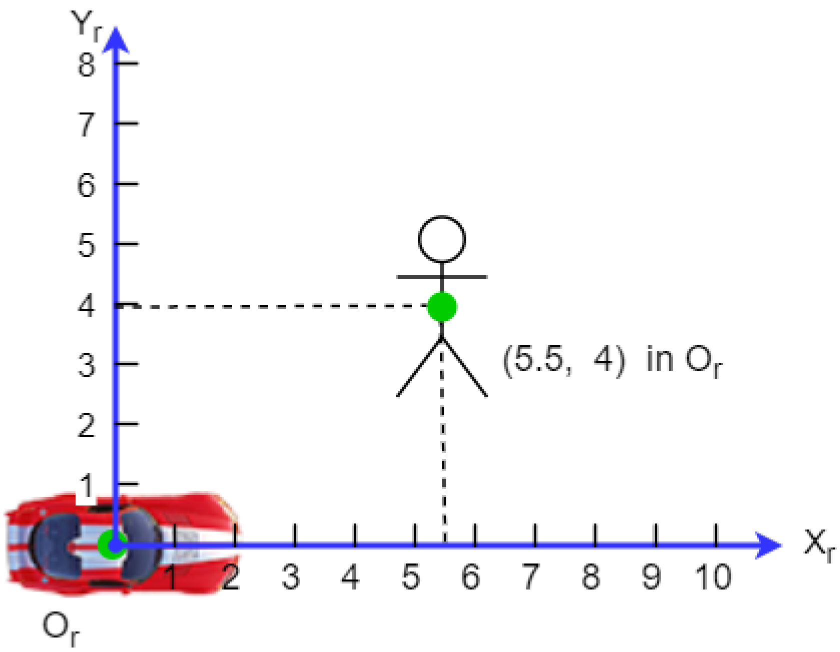
2D世界与小车坐标系示例

为什么我们要获取目标在不同的坐标系下的位姿呢？我们通过以下的简单案例进行讲解并计算。

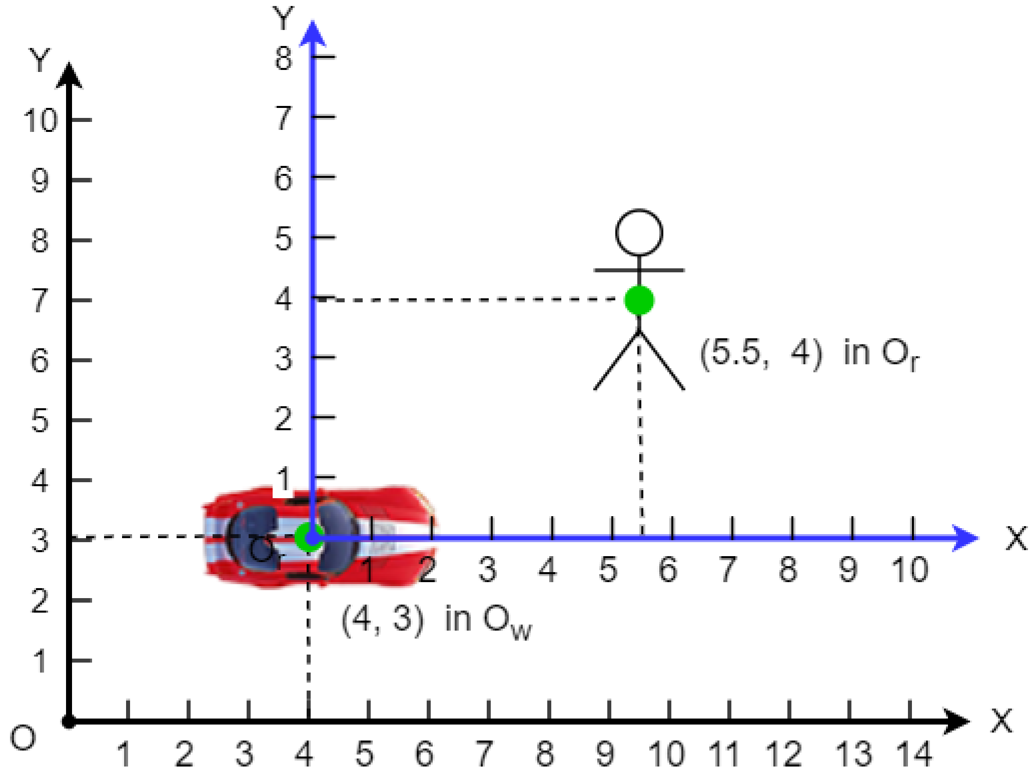
假如在一个世界坐标系 O_w 下有一个小车和一个人，则很容易看出来他们两个在世界坐标系下的位置。



但事实上，我们通常能通过小车的摄像头或雷达等传感器，获取到人在小车坐标系 O_r (下图的蓝色坐标系)下的位置 $(5.5, 4)$ ，那么如果我们只知道**人在小车坐标系下的位置**以及**小车在世界坐标系下的位置**，是否能够算出人在世界坐标系 O_w 下的位置呢?



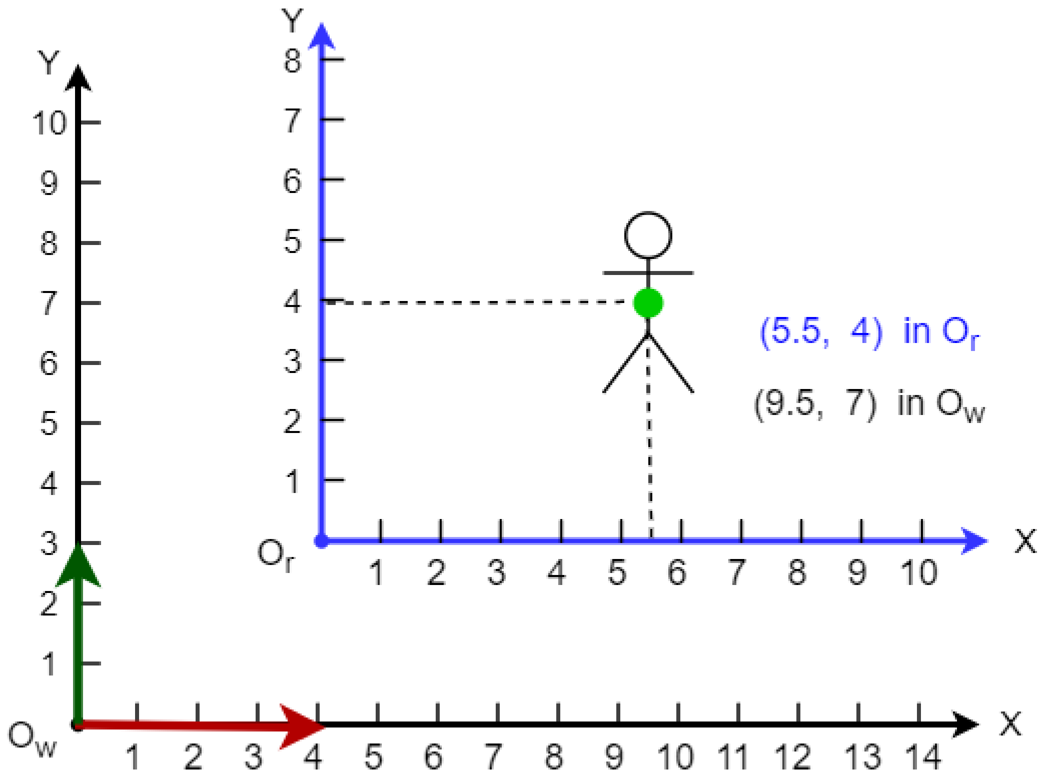
那么，我们将两个坐标系进行合并，如果已知小车在世界坐标系下的位姿，并且小车可以通过传感器获取目标在小车坐标系下的 O_r 的位姿，我们就可以算出来人在世界坐标系 O_w 的位姿。



当然，就如同刚刚讲过的坐标系变换场景问题，坐标变换除了纯粹的平移关系，还会有纯粹的旋转关系，以及最常见两者的结合（平移+旋转）。接下来我们的目标就是求出再不同的坐标系变换关系下，**目标的位姿**以及其**变换关系**。

平移变换

我们首先考虑平移的变换关系，如下图所示，目标在**小车坐标系** O_r （蓝色）的坐标为 $(5.5, 4)$，在**世界坐标系** O_w （黑色）的坐标为 $(9.5, 7)$ 。



则可知目标在**世界坐标系** O_w 下的位置与**小车坐标系** O_r 下的位置关系如下：

$$\begin{cases} x_w = x_r + 4 \\ y_w = y_r + 3 \end{cases}$$

以上等式可以写成以下的向量求和的方式：

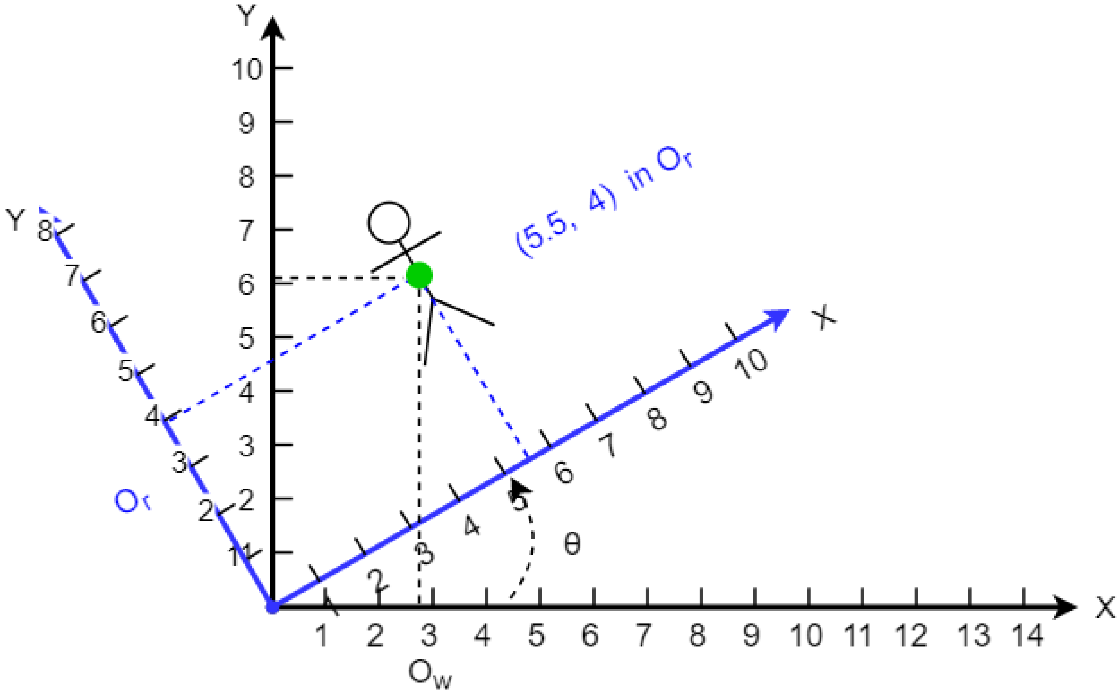
$$\begin{bmatrix} x_w \\ y_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_r \\ y_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \end{bmatrix}$$

其中的向量 $\begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ 描述了从**世界坐标系**O_w到**小车坐标系**O_r的平移关系。

旋转变换

接下来我们考虑两个坐标系之间的旋转变换关系。如下图所示，**小车坐标系** O_r （蓝色） 是由**世界坐标系** O_w （黑色）经过逆时针旋转 θ 度而来。

如果已知目标在**小车坐标系** O_r 的位置 (x_r, y_r) 那么如何得到其在**世界坐标系** O_w 下的位置呢？



这里的**小车坐标系**可以认为是由**世界坐标系**通过**逆时针**旋转了θ角度而来，此时θ为正值。当然，也可以认为世界坐标系是由小车坐标系顺时针旋转θ角而来。根据几何或向量相关知识（详细可推导参见此链接：[机器人运动学 | 2D坐标系旋转原理]），可知：

$$\begin{cases} x_w = \cos\theta \cdot x_r - \sin\theta \cdot y_r \\ y_w = \sin\theta \cdot x_r + \cos\theta \cdot y_r \end{cases}$$

以上等式可以写成以下的矩阵相乘的方式：

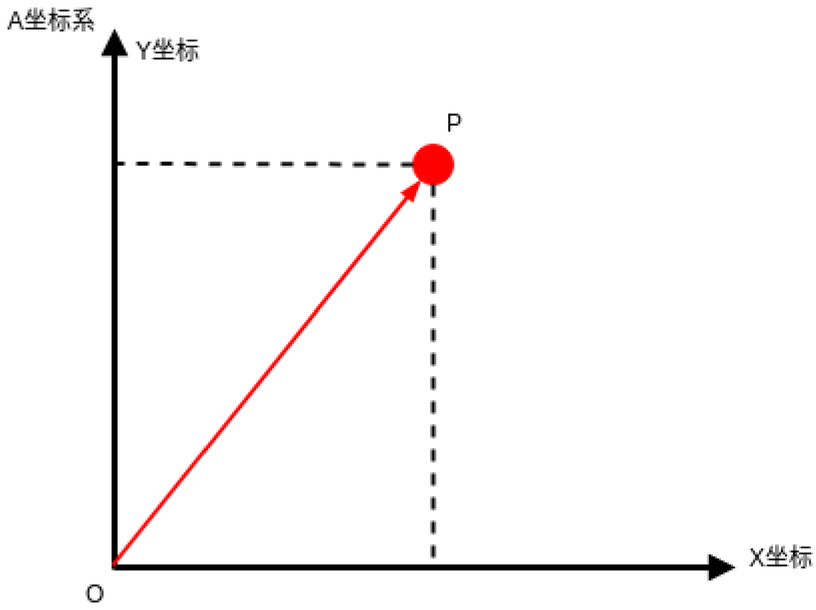
$$\begin{bmatrix} x_w \\ y_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_r \\ y_r \end{bmatrix}$$

其中的 2x2 矩阵我们称之为**旋转矩阵**，并且只有旋转的角度θ有关，此矩阵有两个意义：

1. 该旋转矩阵描述了从一个坐标系到另一个坐标系的变换（逆时针旋转θ为正，顺时针旋转θ为负）
2. 旋转后的坐标系中的某一点通过左乘此旋转矩阵，可以得到其在旋转之前坐标系下的坐标

推导过程：

- 旋转前坐标系：



在黑色坐标系中(A坐标系)，$\overrightarrow{OP}$ 可以分解为 水平坐标方向的两个向量：

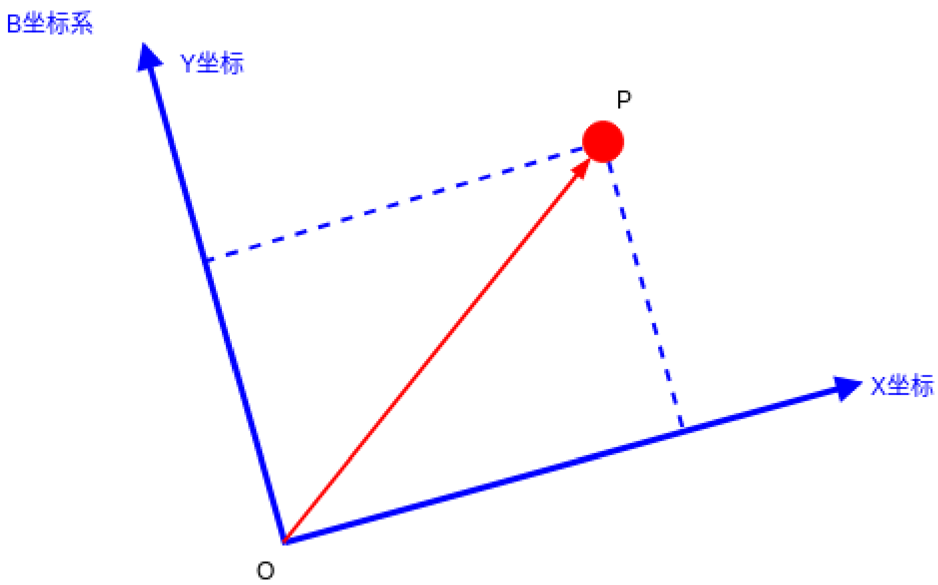
$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{X_a} + \overrightarrow{Y_a}$$

每个方向上的向量又可以分解为标量和单位向量的乘积，$\overrightarrow{X_a} = x_a \cdot \overrightarrow{i_a}$ 和 $\overrightarrow{Y_a} = y_a \cdot \overrightarrow{j_a}$ 即有：

$$\overrightarrow{OP} = x_a \cdot \overrightarrow{i_a} + y_a \cdot \overrightarrow{j_a}$$

此时，x_a是x方向的标量，即p点在A坐标系中的x坐标位置，$\overrightarrow{i_a}$ 为x轴方向的单位向量； y_a是y方向的标量，即p点在A坐标系中的y坐标位置，$\overrightarrow{j_a}$ 为y轴方向的单位向量；

- 旋转后坐标系



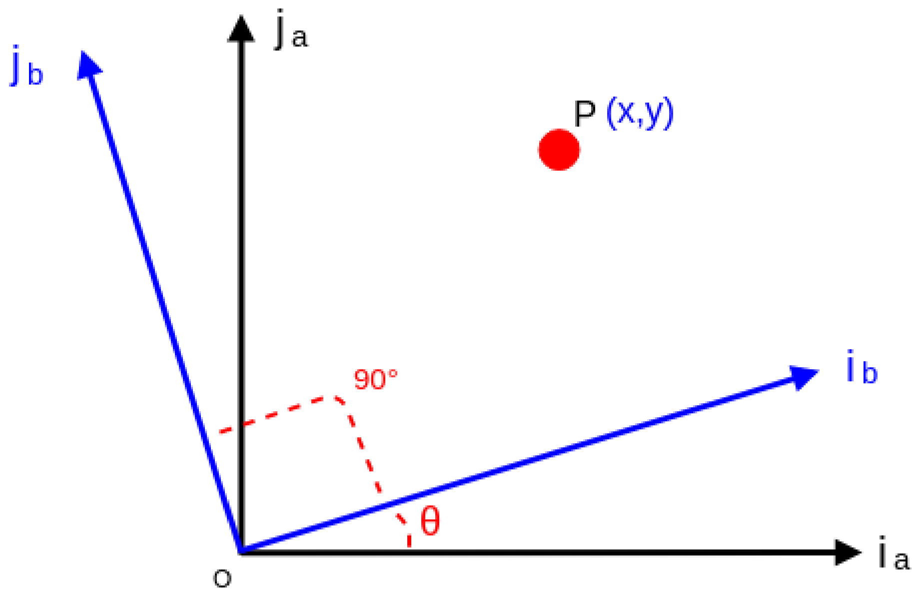
同样有:

$$\overrightarrow{OP} = x_b \cdot \overrightarrow{i_b} + y_b \cdot \overrightarrow{j_b}$$

- 建立等式

对于向量$\overrightarrow{OP}$而言，无论在A坐标系还是B坐标系，他的方向和模长是没有变的，只是观察坐标系不同。那么:

$$x_a \cdot \overrightarrow{i_a} + y_a \cdot \overrightarrow{j_a} = x_b \cdot \overrightarrow{i_b} + y_b \cdot \overrightarrow{j_b}$$



由上图关系可推导:

两边同时右乘 $\vec{i}_a$:

$$x_a \cdot \overrightarrow{i_a} \cdot \overrightarrow{i_a} + y_a \cdot \overrightarrow{j_a} \cdot \overrightarrow{i_a} = x_b \cdot \overrightarrow{i_b} \cdot \overrightarrow{i_a} + y_b \cdot \overrightarrow{j_b} \cdot \overrightarrow{i_a}$$
$$x_a = x_b \cdot \overrightarrow{i_b} \cdot \overrightarrow{i_a} + y_b \cdot \overrightarrow{j_b} \cdot \overrightarrow{i_a}$$
$$x_a = cos(\theta) \cdot x_b - sin(\theta) \cdot y_b$$

两边同时右乘 $\vec{j}_a$：

$$x_a \cdot \vec{i_a} \cdot \vec{j_a} + y_a \cdot \vec{j_a} \cdot \vec{j_a} = x_b \cdot \vec{i_b} \cdot \vec{j_a} + y_b \cdot \vec{j_b} \cdot \vec{j_a}$$
$$y_a = x_b \cdot \vec{i_b} \cdot \vec{j_a} + y_b \cdot \vec{j_b} \cdot \vec{j_a}$$
$$y_a = sin(\theta) \cdot x_b + cos(\theta) \cdot y_b$$

!!! note "注"
$\vec{i_a} \cdot \vec{i_a} = |\vec{i_a}| \cdot |\vec{i_a}| \cdot cos(0) = 1$

$\vec{i_a} \cdot \vec{j_a} = |\vec{i_a}| \cdot |\vec{j_a}| \cdot cos(\pi/2) = 0$

$\vec{j_b} \cdot \vec{i_a} = |\vec{i_b}| \cdot |\vec{i_a}| \cdot cos(\pi/2 + \theta) = -sin(\theta)$

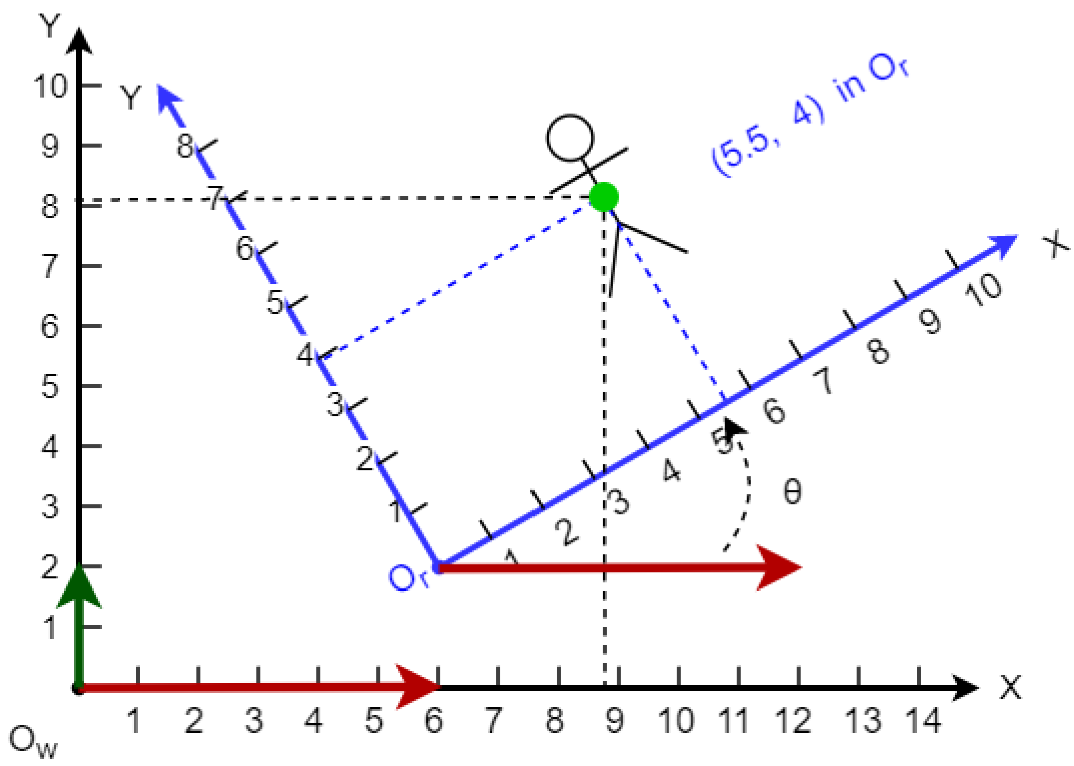
$\vec{i_b} \cdot \vec{j_a} = |\vec{i_b}| \cdot |\vec{j_a}| \cdot cos(\pi/2 - \theta) = sin(\theta)$

将两式合并为矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} x_a \\ y_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_b \\ y_b \end{bmatrix}$$

旋转+平移变换

我们已经知道了单纯平移和单纯旋转的变换关系是怎么样的了，但是现实世界中，往往是平移和旋转是共同发生的。接下来我们学习如何将这两种变换合并成同一个变换。



理论阐述：

如上图所示，**小车坐标系** O_r （蓝色） 是由 **世界坐标系** O_w （黑色）先经过逆时针旋转 θ 度（若 θ 为负则顺时针旋转），再按照世界坐标系进行平移 $(\delta x, \delta y)$ 而来。

若已知目标在小车坐标系下的坐标为 (x_r, y_r)，则目标在 **世界坐标系** O_w 下的坐标 (x_w, y_w) 为：

$$\begin{bmatrix} x_w \\ y_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_r \\ y_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \end{bmatrix}$$

我们可以将之合并为一个 3x3 矩阵的形式（详细推导可参见此链接：机器人运动学2D坐标系旋转平移总结）：

$$\begin{bmatrix} x_w \\ y_w \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & \delta x \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & \delta y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_r \\ y_r \\ 1 \end{bmatrix}$$

其中的数字1组成的 3x1 向量我们称之为齐次坐标，数字1组成的 3x3 矩阵，称之为齐次矩阵。目的是为了将旋转和平移进行合并计算。

以上的 3x3 矩阵我们可以将之写作 ${}^w_r T$，即由世界坐标系经过这个旋转平移可以得到小车坐标系，可以认为是小车坐标系的点，经过左乘此矩阵，得到其在世界坐标系的位置。

案例计算：

这里我们以上图为例，将数据 $\theta = 30^\circ, (\delta x, \delta y) = (6, 2), (x_r, y_r) = (5.5, 4)$ 套入公式：可得

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_w \\ y_w \\ 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & \delta x \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & \delta y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_r \\ y_r \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\theta) \cdot x_r - \sin(\theta) \cdot y_r + \delta x \cdot 1 \\ \sin(\theta) \cdot x_r + \cos(\theta) \cdot y_r + \delta y \cdot 1 \\ 0 \cdot x_r + 0 \cdot y_r + 1 \cdot 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \times 5.5 - \frac{1}{2} \times 4 + 6 \\ \frac{1}{2} \times 5.5 + \frac{\sqrt{3}}{2} \times 4 + 2 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 8.76313972 \\ 8.21410162 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

2D一般情况扩展

我们将之扩展为一般情况： 在二维空间中，如果我们希望求解一个点在不同坐标下的位置，我们可以采用如下变换矩阵：

$${}^A_B T = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & \delta x \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & \delta y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

该矩阵描述了以下信息：

1. T 表示变换Transformation，包含了旋转Rotation和平移Translation
2. ${}_B^AT$ 表示坐标系A经过此旋转平移得到了坐标系B
3. 坐标系B中的点 P_b ，可以通过左乘此矩阵${}_B^AT$ ，得到其在坐标系A中的位置 P_a ，即 $P_a = {}_B^AT \cdot P_b$
4. 如果希望将坐标系A下的点 P_a 得到其在坐标系B中的坐标 P_b ，则使用其逆矩阵即可，即 $P_b = {}_A^BT \cdot P_a$ 。这里 ${}_A^BT = {}_B^AT^{-1}$