旋转矩阵的求解

假如我们已知一个旋转矩阵为 R ，则如何求出当初是通过三个轴怎么样的旋转得来的呢。即此时问题就是如何将旋转矩阵转换成旋转角的问题。

已知围绕**Z轴旋转**的公式为:

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos(\alpha) & -sin(\alpha) & 0 \\ sin(\alpha) & cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$$

围绕**Y轴旋转**的公式为:

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos(\beta) & 0 & sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -sin(\beta) & 0 & cos(\beta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$$

围绕**X轴旋转**的公式为:

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos(\gamma) & -sin(\gamma) \\ 0 & sin(\gamma) & cos(\gamma) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$$

统一的旋转记做:

$$R_{zyx} = R_z(\alpha) \cdot R_y(\beta) \cdot R_x(\gamma)$$

我们可以总结得到:

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = R_{zyx} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$$

这里我们将 ${}^w_rR_{zyx}$ 展开可得:

$$\begin{aligned} {}^w_rR_{zyx} &= \begin{bmatrix} cos(\alpha) & -sin(\alpha) & 0 \\ sin(\alpha) & cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} cos(\beta) & 0 & sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -sin(\beta) & 0 & cos(\beta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos(\gamma) & -sin(\gamma) \\ 0 & sin(\gamma) & cos(\gamma) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} cos(\alpha)cos(\beta) & -sin(\alpha) & cos(\alpha)sin(\beta) \\ sin(\alpha)cos(\beta) & cos(\alpha) & sin(\alpha)sin(\beta) \\ -sin(\beta) & 0 & cos(\beta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos(\gamma) & -sin(\gamma) \\ 0 & sin(\gamma) & cos(\gamma) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} cos(\alpha)cos(\beta) & -sin(\alpha)cos(\gamma) + cos(\alpha)sin(\beta)sin(\gamma) & sin(\alpha)sin(\gamma) + cos(\alpha)sin(\beta)cos(\gamma) \\ sin(\alpha)cos(\beta) & cos(\alpha)cos(\gamma) + sin(\alpha)sin(\beta)sin(\gamma) & -cos(\alpha)sin(\gamma) + sin(\alpha)sin(\beta)cos(\gamma) \\ -sin(\beta) & cos(\beta)sin(\gamma) & cos(\beta)cos(\gamma) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

为了简化式子，我们将sin简写为S, 将cos简写为C, 那么我们可以简写为:

$${}^w_rR_{zyx} = \begin{bmatrix} C_z(\alpha)C_y(\beta) & C_z(\alpha)S_y(\beta)S_x(\gamma) - S_z(\alpha)C_x(\gamma) & S_z(\alpha)S_x(\gamma) + C_z(\alpha)S_y(\beta)C_x(\gamma) \\ S_z(\alpha)C_y(\beta) & C_z(\alpha)C_x(\gamma) + S_z(\alpha)S_y(\beta)S_x(\gamma) & S_z(\alpha)S_y(\beta)C_x(\gamma) - C_z(\alpha)S_x(\gamma) \\ -S_y(\beta) & C_y(\beta)S_x(\gamma) & C_y(\beta)C_x(\gamma) \end{bmatrix}$$

为了方便计算，我们为这个 3x3 矩阵每个元素起一个名字，如下:

$$
{}^{w}_{r}R_{zyx} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix}
$$

三角函数中，有如下等式变换规则：

$$
\frac{sin(\theta)}{cos(\theta)} = tan(\theta)
$$

则如果要求解一个角度值，可以通过如下方式得到旋转的角度（单位为弧度）：

$$
\theta = atan2(sin(\theta), cos(\theta))
$$

α 求解

求 $R_z(\alpha)$ 绕Z轴旋转的角度， 观察R_{11}和R_{21}, 他们分别是 $cos(\alpha) \cdot cos(\beta)$ 和 $sin(\alpha) \cdot cos(\beta)$.

我们发现:

$$
\frac{R_{21}}{R_{11}} = \frac{sin(\alpha) \cdot cos(\beta)}{cos(\alpha) \cdot cos(\beta)} = \frac{sin(\alpha)}{cos(\alpha)}
$$

我们可以得到以下结论:

$$
\alpha = atan2(R_{21}, R_{11})
$$

β 求解

求 $R_y(\beta)$ 绕Y轴旋转的角度， 由我们已知的公式:

$$
\beta = atan2(sin(\beta), cos(\beta))
$$

那么:

$$
\beta = atan2(-R_{31}, cos(\beta))
$$

我们继续观察 R_{11}和 R_{21}, 他们分别是 $cos(\alpha) \cdot cos(\beta)$ 和 $sin(\alpha) \cdot cos(\beta)$.

我们尝试:

$$
\begin{aligned}
\sqrt{R_{11}^2 + R_{21}^2} &= \sqrt{cos(\alpha)^2 \cdot cos(\beta)^2 + sin(\alpha)^2 \cdot cos(\beta)^2} \\
&= \sqrt{(cos(\alpha)^2 + sin(\alpha)^2) \cdot cos(\beta)^2}
\end{aligned}
$$

化简完成后，发现一个结论:

$$
cos(\beta) = \sqrt{R_{11}^2 + R_{21}^2}
$$

总结前面的计算，我们可以得到以下结论:

$$\beta = atan2(-R_{31}, \sqrt{R_{11}^2 + R_{21}^2})$$

γ 求解

求 $R_x(\gamma)$ 绕X轴旋转的角度， 观察R_{32} 和 R_{33}, 他们分别是$cos(\beta) \cdot sin(\gamma)$ 和 $cos(\beta) \cdot cos(\gamma)$.

我们发现:

$$\frac{R_{32}}{R_{33}} = \frac{cos(\beta) \cdot sin(\gamma)}{cos(\beta) \cdot cos(\gamma)} = \frac{sin(\gamma)}{cos(\gamma)}$$

我们可以得到以下结论:

$$\gamma = atan2(R_{32}, R_{33})$$

奇异值情况求解

这里根据以下值是否等于0（小于一个阈值）来判断此时的旋转矩阵是否是奇异矩阵，如果是奇异矩阵，则结果有所差异

$$cos(\beta) = \sqrt{R_{11}^2 + R_{21}^2}$$

如果 $cos(\beta) = 0$ 或接近零，说明其在 Pitch轴为90°，此时产生万向节死锁，求解方式有所差异，具体如下：

$$\gamma_x = -atan2(R_{23}, R_{22})$$
$$\beta_y = atan2(-R_{31}, \sqrt{R_{11}^2 + R_{21}^2})$$
$$\alpha_z = 0$$

参见：[机器人运动学3D | 坐标系旋转综合]