

**УДК 532.5:004.852**

**ВОССТАНОВЛЕНИЕ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА  
МЕТОДОМ ФИЗИЧЕСКИ ИНФОРМИРОВАННОГО ОБУЧЕНИЯ С  
ИЗБЫТОЧНЫМИ ФИЗИЧЕСКИМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ**

**Хомяков Даниил Вячеславович\***

ассистент кафедры программного обеспечения и администрирования  
информационных систем

Курский государственный университет, Россия, г. Курск

E-mail: [khomyakov\\_dv@kursksu.ru](mailto:khomyakov_dv@kursksu.ru)

**Кудинов Виталий Алексеевич**

доктор педагогических наук, профессор, профессор кафедры программного  
обеспечения и администрирования информационных систем

Курский государственный университет, Россия, г. Курск

E-mail: [kudinovva@yandex.ru](mailto:kudinovva@yandex.ru)

*Восстановление полей скорости и давления по неполным наблюдениям является одной из ключевых задач гидродинамики и вычислительной механики, определяя качество диагностики и прогнозирования течений в инженерных и природных системах. Стандартные постановки физически-информированного обучения опираются на точечные невязки уравнений Навье-Стокса и неразрывности, оставляя значительную физическую избыточность теории неиспользуемой. Цель исследования – формализовать и численно проверить подход «избыточной» физики, в котором взаимодополняющие ограничения объединяются в единую вариационно-оптимизационную схему с инвариантной к сдвигу оценкой давления. Вычислительный эксперимент на основе модели вихря Тейлора-Грина показывает: 1) восстановление компонент скорости с относительной ошибкой порядка 0,6–3% на дискретных пространственных сетках  $32^2$ – $128^2$  при фиксированном времени; 2) генерацию ненаблюданного скалярного поля давления с точностью до аддитивной константы; 3) стабильность невязок уравнений импульса и вихря; 4) практическую устойчивость смешанной дискретизации. Полученные результаты вносят вклад в методологию физически-информированного обучения: предложена воспроизведенная схема, использующая избыточность модели и инвариантные метрики, что повышает устойчивость оптимизации и идентифицируемость полей. Подход открывает возможности для дальнейшего обобщения на более сложные модели течений, согласования порядка аппроксимации и адаптивного выбора точек коллокаций.*

**Ключевые слова:** физически-информированные нейронные сети, уравнения Навье-Стокса, вихрь Тейлора-Грина, избыточная физика, функция тока, восстановление решений

**Введение.** Гидродинамика, как раздел механики сплошных сред, охватывает широкий спектр задач, посвященных течению жидкостей и газов, и имеет фундаментальное значение для энергетики, климатологии, биомедицины и промышленности [1,2]. В различных инженерных приложениях экспериментальные наблюдения полей скорости и давления, как правило, разрежены, дискретны и зашумлены, что делает задачу восстановления решений уравнений Навье-Стокса по неполному набору данных значимой как в практическом, так и теоретическом отношении. Для стабилизации и восстановления решений в подобных постановках используются методы регуляризации некорректных задач, вариационная ассилияция данных и различные оптимизационные подходы при дифференциальных ограничениях [3-6]. Однако, подобная реконструкция сталкивается с фундаментальными трудностями: некорректная постановка (чувствительность к шуму, численная неустойчивость и потенциальная не единственность решения) [3,4] или ограниченность наблюдений, а также математическая сложность уравнений Навье-Стокса, для которых вопрос глобального существования и гладкости решений в трехмерном случае остается открытой проблемой [8,9].

В данном контексте особую актуальность приобретают физически-информированные нейронные сети, где априорная модель уравнений Навье-Стокса может быть включена в функционал потерь через невязки по уравнениям, граничным и начальным условиям. Данная постановка служит естественной регуляризацией для некорректных обратных задач, позволяя объединить разреженные наблюдения с физическими законами в единой вариационной схеме минимизации ошибки [10-12]. В настоящее время для гидродинамики уже рассмотрен широкий круг типовых задач: восстановление скрытых полей скорости и давления, идентификация неизвестных параметров модели, реконструкция граничных и начальных условий, а также повышения разрешения и слияния разнотипных измерений [10,12-14]. Последующие исследования в области доменно-разделенных и многоуровневых вариантов физически-информированных нейронных сетей позволили расширить применимость подхода к многомасштабным и геометрически сложным течениям [15].

Несмотря на существенный прогресс в задачах восстановления решений уравнений Навье-Стокса из неполных наблюдений, существующие постановки зачастую опираются на минимально достаточный набор ограничений: точечные дифференциальные невязки, уравнение неразрывности и локальные граничные условия – это оставляют существенный резерв устойчивости и идентифицируемости неиспользованным. Теория, описывающая течения, обладает внутренней избыточностью: эквивалентные формулировки и их согласованность [1,16-18], дифференциальные и интегральные балансы массы, импульса и энергии [1,2], инвариантности. В классических обратных схемах эти источники информации учитываются лишь частично, либо через эвристические веса в функционале потерь, что приводит к повышенной чувствительности

относительно шума, неустойчивости оптимизации или неоднозначности восстановления. Наличие единой, согласованной и воспроизведимой теории, описывающей систематическое использование избыточности при обучении физически-информированных моделей, в результате анализа литературы авторами подтверждено не было.

Целью настоящей работы является формализация и экспериментальная проверка подхода к решению уравнений Навье-Стокса по неполным данным на основе принципа избыточной физики: целенаправленного включения взаимодополняющих физических ограничений в единую вариационно-оптимизационную схему.

**Модель и масштабирование.** Рассматривается модель двумерного нестационарного течения однородной newtonовской несжимаемой жидкости в пространственной области  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  в декартовой системе координат  $\mathbf{r} = (x, y)$  на конечном промежутке времени  $0 \leq t \leq T$ . Плотность  $\rho > 0$  и кинематическая вязкость  $\nu > 0$  считаются постоянными по пространству и времени. Тогда движение описывается уравнениями Навье-Стокса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right), \quad (2)$$

при условии неразрывности несжимаемой жидкости

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (3)$$

где  $u = u(\mathbf{r}, t)$  и  $v = v(\mathbf{r}, t)$  – горизонтальная и вертикальная компонента скорости  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = (u(\mathbf{r}, t), v(\mathbf{r}, t))$ ;  $p = p(\mathbf{r}, t)$  – гидродинамическое давление.

Для описания вихревого характера течения введем вихрь скорости

$$\omega(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (4)$$

Для плоского несжимаемого течения введем скалярную функцию тока  $\psi(\mathbf{r}, t)$ , определяемую с точностью до аддитивной константы соотношениями

$$u(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial \psi(\mathbf{r}, t)}{\partial y}, \quad v(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \psi(\mathbf{r}, t)}{\partial x}, \quad (5)$$

тогда (3) выполняется тождественно, а вихрь скорости (4) выражается через функцию тока  $\psi(\mathbf{r}, t)$

$$\omega(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{\partial \psi(\mathbf{r}, t)}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \psi(\mathbf{r}, t)}{\partial y} \right) = -\Delta \psi(\mathbf{r}, t). \quad (6)$$

В качестве опорного решения для вычислительного эксперимента взято классическое периодическое решение уравнений Навье-Стокса в замкнутой аналитической форме – вихрь Тейлора-Грина [19]. Его выбор мотивирован

наличием аналитических выражений для вектора скорости  $\mathbf{v}(\mathbf{r},t)$ , вихря  $\omega(\mathbf{r},t)$  и давления  $p(\mathbf{r},t)$ , что позволяет однозначно задать постановку вычислительного эксперимента.

В двумерном случае вихрь Тейлора-Грина задает точное периодическое решение уравнений Навье-Стокса для несжимаемой ньютоновской жидкости при постоянных плотности  $\rho$  и кинематической вязкости  $\nu$  [1]. Выберем двукратно периодическую область  $\Omega = \left(0, \frac{2\pi}{k}\right) \times \left(0, \frac{2\pi}{k}\right) \subset \mathbb{D}^2$  с периодическими граничными условиями по обеим координатам [20]. Обозначим амплитуду скорости через  $U_0 > 0$  и, устранив неопределенность функции тока, зафиксируем  $\langle \psi(\mathbf{r},t) \rangle_{\Omega} = 0$ , где  $\langle \cdot \rangle_{\Omega}$  – усреднение по области  $\Omega$ . Тогда, согласно работам [19,20], поле скорости и давление могут быть записаны в виде

$$u(\mathbf{r},t) = U_0 \cos(kx) \sin(ky) e^{-2\nu k^2 t}, \quad (7)$$

$$v(\mathbf{r},t) = -U_0 \sin(kx) \cos(ky) e^{-2\nu k^2 t}, \quad (8)$$

$$p(\mathbf{r},t) = p_0 - \frac{\rho U_0^2}{4} (\cos(2kx) + \cos(2ky)) e^{-4\nu k^2 t}, \quad (9)$$

где  $k > 0$  – волновое число;  $p_0$  – произвольная константа, фиксирующая среднее значение давления  $\langle p - p_0 \rangle_{\Omega} = 0$ . Соответствующая функция тока для вихря Тейлора-Грина имеет вид

$$\psi(\mathbf{r},t) = -\frac{U_0}{k} \cos(kx) \cos(ky) e^{-2\nu k^2 t}, \quad (10)$$

откуда выражаются покомпонентные значения поля скорости (7)-(8), а из (6) – выражение для вихря

$$\omega(\mathbf{r},t) = -2U_0 k \cos(kx) \cos(ky) e^{-2\nu k^2 t}.$$

Поле скорости  $\mathbf{v}(\mathbf{r},t)$  удовлетворяет уравнению (3)

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = -kU_0 \sin(kx) \sin(ky) e^{-2\nu k^2 t} + kU_0 \sin(kx) \sin(ky) e^{-2\nu k^2 t} = 0.$$

Выполним подстановку в уравнение (1) выражений (7)-(9) и покажем, что обе его части совпадают. Для левой части имеем

$$\begin{aligned} & -2\nu k^2 u(\mathbf{r},t) - kU_0 (\sin(kx) \sin(ky) u(\mathbf{r},t) - \cos(kx) \cos(ky) v(\mathbf{r},t)) e^{-2\nu k^2 t} = \\ & = -2\nu k^2 u(\mathbf{r},t) - kU_0 \left( U_0 \sin(kx) \cos(ky) [\sin^2(ky) + \cos^2(ky)] e^{-2\nu k^2 t} \right) e^{-2\nu k^2 t} = (11) \\ & = -2\nu k^2 u(\mathbf{r},t) - kU_0^2 \sin(kx) \cos(ky) e^{-4\nu k^2 t}. \end{aligned}$$

Для правой части находим

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{\rho} \left( 2k \frac{\rho U_0^2}{4} \sin(2kx) e^{-4\nu k^2 t} \right) - \nu k^2 \left( \underbrace{U_0 \cos(kx) \sin(ky) e^{-2\nu k^2 t}}_{u(\mathbf{r},t)} + \right. \\
& \left. + \underbrace{U_0 \cos(kx) \sin(ky) e^{-2\nu k^2 t}}_{v(\mathbf{r},t)} \right) = -kU_0^2 \sin(kx) \cos(ky) e^{-4\nu k^2 t} - 2\nu k^2 u(\mathbf{r},t).
\end{aligned} \tag{12}$$

Следовательно, уравнения (11) и (12) совпадают, а функции (7)-(9) являются решением уравнения (1). Аналогично рассмотрим левую и правую часть уравнения (2)

$$\begin{aligned}
& -2\nu k^2 v(\mathbf{r},t) - kU_0 (\cos(kx) \cos(ky) u(\mathbf{r},t) + \sin(kx) \sin(ky) v(\mathbf{r},t)) e^{-2\nu k^2 t} = \\
& = -2\nu k^2 v(\mathbf{r},t) - kU_0 (U_0 \cos(ky) \sin(ky) [\cos^2(kx) + \sin^2(kx)] e^{-2\nu k^2 t}) e^{-2\nu k^2 t} = \\
& = -2\nu k^2 v(\mathbf{r},t) - kU_0^2 \cos(ky) \sin(ky) e^{-4\nu k^2 t},
\end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{\rho} \left( 2k \frac{\rho U_0^2}{4} \sin(2ky) e^{-4\nu k^2 t} \right) - \nu k^2 \left( \underbrace{U_0 \sin(kx) \cos(ky) e^{-2\nu k^2 t}}_{v(\mathbf{r},t)} + \right. \\
& \left. + \underbrace{U_0 \sin(kx) \cos(ky) e^{-2\nu k^2 t}}_{v(\mathbf{r},t)} \right) = -kU_0^2 \sin(ky) \cos(ky) e^{-4\nu k^2 t} - 2\nu k^2 v(\mathbf{r},t).
\end{aligned} \tag{14}$$

Получим равенство уравнений (13) и (14). Таким образом, подстановка выражений  $u(\mathbf{r},t)$ ,  $v(\mathbf{r},t)$  и  $p(\mathbf{r},t)$  обращает обе части каждого из уравнений (1)-(2) при условии (3) в тождество для всех  $(\mathbf{r},t) \in \Omega \times [0, T]$ . Тем самым, векторное поле скорости  $\mathbf{v}(\mathbf{r},t)$  и скалярное поле давления  $p(\mathbf{r},t)$  задают точное периодическое решение уравнений Навье-Стокса (1)-(3).

Для дальнейшего изложения перейдем к безразмерным переменным, определяемым на  $\Omega^\star = (0, 2\pi) \times (0, 2\pi)$ . В качестве масштабов примем длину  $L = \frac{1}{k}$ , амплитуду поля скорости  $U_0$ , характерное давление  $P = \rho U_0^2$  и время

переноса  $T = \frac{L}{U_0}$ . Введем следующие безразмерные переменные

$$\begin{aligned}
x^\star &= kx, \quad y^\star = ky, \quad \tau = \frac{t}{T} = kU_0 t, \\
u^\star &= \frac{u}{U_0}, \quad v^\star = \frac{v}{U_0}, \quad p^\star = \frac{p - p_0}{\rho U_0^2},
\end{aligned}$$

где  $p_0$  – произвольная константа уравнения (9). В данных обозначениях уравнения (1)-(3) принимают вид

$$\frac{\partial u^\star}{\partial \tau} + u^\star \frac{\partial u^\star}{\partial x^\star} + v^\star \frac{\partial u^\star}{\partial y^\star} = -\frac{\partial p^\star}{\partial x^\star} + \frac{1}{R_e} \left( \frac{\partial^2 u^\star}{\partial (x^\star)^2} + \frac{\partial^2 u^\star}{\partial (y^\star)^2} \right), \quad (15)$$

$$\frac{\partial v^\star}{\partial \tau} + u^\star \frac{\partial v^\star}{\partial x^\star} + v^\star \frac{\partial v^\star}{\partial y^\star} = -\frac{\partial p^\star}{\partial y^\star} + \frac{1}{R_e} \left( \frac{\partial^2 v^\star}{\partial (x^\star)^2} + \frac{\partial^2 v^\star}{\partial (y^\star)^2} \right), \quad (16)$$

$$\frac{\partial u^\star}{\partial x^\star} + \frac{\partial v^\star}{\partial y^\star} = 0, \quad (17)$$

где

$$R_e = \frac{U_0 L}{\nu} = \frac{U_0}{\nu k},$$

есть безразмерный параметр, называемый числом Рейнольдса [1]. Таким образом, в безразмерных переменных система (15)-(17) описывает то же течение, что и исходная система (1)-(3), но на стандартной периодической области  $\Omega^\star$  при заданном числе Рейнольдса  $R_e$ . Для решений (7)-(9) вихря Тейлора-Грина получим следующие безразмерные представления

$$u^\star(\mathbf{r}^\star, \tau) = \cos(x^\star) \sin(y^\star) e^{-\frac{2\tau}{R_e}}, \quad (18)$$

$$v^\star(\mathbf{r}^\star, \tau) = -\sin(x^\star) \cos(y^\star) e^{-\frac{2\tau}{R_e}}, \quad (19)$$

$$p^\star(\mathbf{r}^\star, \tau) = -\frac{1}{4} (\cos(2x^\star) + \cos(2y^\star)) e^{-\frac{4\tau}{R_e}}, \quad (20)$$

а для функции тока (10) введем безразмерный аналог

$$\psi^\star(\mathbf{r}^\star, \tau) = \frac{k}{U_0} \psi(\mathbf{r}, \tau) = -\cos(x^\star) \cos(y^\star) e^{-\frac{2\tau}{R_e}}, \quad (21)$$

где  $\mathbf{r}^\star = (x^\star, y^\star)$ . Это эквивалентно приводимым ранее выражениям и подчеркивает экспоненциальное затухание амплитуды с темпом затухания, обратно пропорциональным  $R_e$ .

**Эталонная выборка.** Вычислительный эксперимент проводится для безразмерной постановки уравнений (15)-(17), где в качестве эталонного решения используется аналитически заданный вихрь Тейлора-Грина (18)-(21). На двойной периодической области  $\Omega^\star = (0, 2\pi) \times (0, 2\pi)$  задается равномерная прямоугольная сетка

$$\Omega_\Delta^\star = \{(x_i, y_j) : x_i = \Delta_x i, y_j = \Delta_y j, i = 0, \dots, N_x - 1, j = 0, \dots, N_y - 1\},$$

где  $\Delta_x = \frac{2\pi}{N_x}$  – шаг сетки по  $x^\star$ ;  $\Delta_y = \frac{2\pi}{N_y}$  – шаг сетки по  $y^\star$ ;  $N_x$  и  $N_y$  – число узлов сетки по координатам  $x^\star$  и  $y^\star$  соответственно. Время дискретизируется равномерной сеткой

$$T_{\Delta} = \{\tau_k = \tau_0 + \Delta_{\tau} k, k = 0, \dots, K\}, \tau_0 = 0,$$

где  $\Delta_{\tau}$  – шаг сетки по безразмерному времени;  $K$  – число временных слоев. Тогда наблюдаемыми значениями полей (18)-(21), определенными на множестве значений в узлах  $\Omega_{\Delta}^{\star} \times T_{\Delta}$ , будем считать значения полей в выбранных узлах сетки

$$\begin{aligned} u_{i,j}^k &= u^{\star}(x_i, y_j, \tau_k) = \cos(x_i) \sin(y_j) e^{-\frac{2\tau_k}{R_e}}, \\ v_{i,j}^k &= v^{\star}(x_i, y_j, \tau_k) = -\sin(x_i) \cos(y_j) e^{-\frac{2\tau_k}{R_e}}, \\ p_{i,j}^k &= p^{\star}(x_i, y_j, \tau_k) = -\frac{1}{4}(\cos(2x_i) + \cos(2y_j)) e^{-\frac{4\tau_k}{R_e}}, \\ \psi_{i,j}^k &= \psi^{\star}(x_i, y_j, \tau_k) = -\cos(x_i) \cos(y_j) e^{-\frac{2\tau_k}{R_e}}, \end{aligned}$$

Таким образом, исходная выборка, состоящая из эталонных (чистых) наблюдений полей вихря Тейлора-Грина, принимает следующий вид  $\mathcal{E} = (x_i, y_j, \tau_k, u_{i,j}^k, v_{i,j}^k, p_{i,j}^k)$ .

**Архитектура и функционал потерь.** В качестве реализации нейросетевого аппроксиматора используется классическая для физически-информированных сетей полносвязная архитектура прямого распространения с двумя выходами. Формально, осуществляется отображение

$$\mathcal{F}_{\theta}: (x_i, y_j, \tau_k) \mapsto (\hat{\psi}_{i,j}^k, \hat{p}_{i,j}^k),$$

где  $\hat{\psi}_{i,j}^k$  – предсказанное моделью значение скалярной функции тока;  $\hat{p}_{i,j}^k$  – предсказанная (безразмерная) величина давления. Следуя подходам ранних работах [21,22] и более позднему исследованию [23],  $\mathcal{F}_{\theta}$  реализуется как многослойный персепtron с числом скрытых слоев  $l=8$  и одинаковым количеством нейронов  $n=64$  в каждом слое. Использование «широкой» и «неглубокой» сети основано на устоявшемся эмпирическом наблюдении из исследований [23-26] по физически-информированному обучению. Во всех скрытых слоях используется периодическая функция активации

$$\phi(\xi) = \sin(\omega_0 \xi), \quad \omega_0 > 0,$$

что согласуется с тригонометрическим представлением полей и позволяет эффективно описывать высокочастотные компоненты [27,28]. Для обеспечения стабильного процесса оптимизации используется следующая схема инициализации весов. Обозначим непрерывное равномерное распределение на отрезке  $[a,b]$  как  $\mathcal{U}(a,b)$ . Тогда параметры инициализации весов модели имеют вид

$$\underbrace{\mathbf{W}_{i,j}^{(\ell)} \sim \mathcal{U}\left(-\frac{1}{n_{\text{in}}}, \frac{1}{n_{\text{in}}}\right) = \mathcal{U}\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right), \quad \mathbf{b}_i^{(\ell)} = 0, \quad \ell = 1,}_{\text{входной слой модели}}$$

$$\begin{aligned}
& \mathbf{W}_{i,j}^{(\ell)} \sim \mathcal{U}\left(-\frac{\sqrt{6}}{\omega_0 \sqrt{n_{\text{in}}}}, \frac{\sqrt{6}}{\omega_0 \sqrt{n_{\text{in}}}}\right) = \mathcal{U}\left(-\frac{\sqrt{6}}{8}, \frac{\sqrt{6}}{8}\right), \quad \mathbf{b}_i^{(\ell)} = 0, \quad \ell = 1, \dots, l; \\
& \underbrace{\qquad \qquad \qquad \text{скрытые слои модели с } \sin(\cdot)}_{\text{выходной слой модели}}
\end{aligned}$$

$$\mathbf{W}_{i,j}^{(l+1)} \sim \mathcal{U}\left(-\sqrt{\frac{3}{n_{\text{in}}}}, \sqrt{\frac{3}{n_{\text{in}}}}\right) = \mathcal{U}\left(-\frac{\sqrt{3}}{8}, \frac{\sqrt{3}}{8}\right), \quad \mathbf{b}_i^{(l+1)} = 0, \quad \ell = l + 1;$$

где  $\omega_0 = 1$  – фиксированный частотный коэффициент;  $n_{\text{in}}$  – число входов нейрона соответствующего слоя. Для согласования масштабов аргумента синуса и улучшения обусловленности процесса обучения в целом, входные переменные нормируются

$$x_i \mapsto \frac{x_i}{2\pi}, \quad y_j \mapsto \frac{y_j}{2\pi}, \quad \tau_k = \frac{\tau_k - \tau_0}{\tau_1 - \tau_0}.$$

Процесс обучения модели сводится к минимизации составного функционала

$$\mathcal{L}(\theta) = a_1 \mathcal{L}_1 + a_2 \mathcal{L}_2,$$

где  $a_1, a_2 > 0$  – весовые коэффициенты компонент. Ошибка по данным скорости  $\mathcal{L}_1$  задается как невязка по данным и определяется среднеквадратическим отклонением восстановленных из предсказанной функции тока  $\hat{\psi}_{i,j}^k$  данных  $\hat{u}_{i,j}^k$  и  $\hat{v}_{i,j}^k$  от наблюдаемых  $u_{i,j}^k$  и  $v_{i,j}^k$

$$\mathcal{L}_1 = \frac{1}{|\mathcal{S}|} \sum_{(x_i, y_j, \tau_k) \in \mathcal{S}} \left( (\hat{u}_{i,j}^k - u_{i,j}^k)^2 + (\hat{v}_{i,j}^k - v_{i,j}^k)^2 \right),$$

где  $\mathcal{S} \subset \mathcal{E}$  – подмножество одного из ранее построенных множеств наблюдений, используемое при обучении модели;  $\hat{u}_{i,j}^k$  и  $\hat{v}_{i,j}^k$  вычисляются по кинематическим соотношениям двумерного несжимаемого течения с учетом симметричных конечных разностей четвертого порядка точности первых производных по пространству

$$\hat{u}_{i,j}^k = \frac{\partial \hat{\psi}_{i,j}^k}{\partial y_j} \approx \frac{-\hat{\psi}_{i,j+2}^k + 8\hat{\psi}_{i,j+1}^k - 8\hat{\psi}_{i,j-1}^k + \hat{\psi}_{i,j-2}^k}{12\Delta_y}, \quad (22)$$

$$\hat{v}_{i,j}^k = -\frac{\partial \hat{\psi}_{i,j}^k}{\partial x_j} \approx -\frac{-\hat{\psi}_{i+2,j}^k + 8 + \hat{\psi}_{i+1,j}^k - 8\hat{\psi}_{i-1,j}^k + \hat{\psi}_{i-2,j}^k}{12\Delta_x}, \quad (23)$$

где индексы  $i \pm 1, j \pm 1$  понимаются с учетом периодических граничных условий. В отличие от стандартных центральных разностей второго порядка, имеющих ведущий член локальной ошибки аппроксимации  $O(\Delta_y^2)$  для  $\frac{\partial \psi}{\partial y}$  и

$O(\Delta_x^2)$  для  $\frac{\partial \psi}{\partial x}$ , используемая схема дает ошибки  $O(\Delta_y^4)$  и  $O(\Delta_x^4)$  соответственно. Это позволяет уменьшить численную чувствительность к

малым колебаниям аппроксимирующей сети. Таким образом, средняя составляющая невязки по выборке  $\mathbb{E}[\mathcal{L}_1]$  уменьшается с  $O(\Delta_x^4) + O(\Delta_y^4)$  до  $O(\Delta_x^8) + O(\Delta_y^8)$ , поскольку в  $\mathcal{L}_1$  входит квадрат ошибки. Это снижает систематическое смещение при согласовании с данным и подавляет искусственное возбуждение высокочастотных мод восстановленной функции тока  $\hat{\psi}$  [29,30]. Невязка физической модели  $\mathcal{L}_2$  рассматривается в том же наборе наблюдений, что и невязка по данным  $\mathcal{L}_1$ , хотя, строго говоря, коллокационные точки целесообразно выбирать по явной заполняющей схеме (например, латинский гиперкуб и т.п.), чтобы обеспечить лучшее покрытие области  $\Omega_\Delta^\star \times T_\Delta$  и избежать концентрации измерений лишь в местах наблюдений. Вопрос об оптимальном выборе стратегии остается открытым и требует отдельного анализа. Для уравнений (1) и (2) получим следующие невязки

$$R_x = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - v \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (24)$$

$$R_y = \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - v \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right). \quad (25)$$

Тогда, безразмерные дискретные представления уравнений (24)-(25) в узле  $(x_i, y_j, \tau_k) \in \Omega_\Delta^\star \times T_\Delta$  с применением центральных разностей второй порядка имеют вид

$$f_{\Delta_x} = \frac{\hat{u}_{i,j}^{k+1} - \hat{u}_{i,j}^{k-1}}{2\Delta_\tau} + \hat{u}_{i,j}^k \frac{\hat{u}_{i+1,j}^k - \hat{u}_{i-1,j}^k}{2\Delta_x} + \hat{v}_{i,j}^k \frac{\hat{u}_{i,j+1}^k - \hat{u}_{i,j-1}^k}{2\Delta_y} + \frac{\hat{p}_{i+1,j}^k - \hat{p}_{i-1,j}^k}{2\Delta_x} - \frac{1}{R_e} \left( \frac{\hat{u}_{i+1,j}^k - 2\hat{u}_{i,j}^k + \hat{u}_{i-1,j}^k}{\Delta_x^2} + \frac{\hat{u}_{i,j+1}^k - 2\hat{u}_{i,j}^k + \hat{u}_{i,j-1}^k}{\Delta_y^2} \right), \quad (26)$$

$$f_{\Delta_y} = \frac{\hat{v}_{i,j}^{k+1} - \hat{v}_{i,j}^{k-1}}{2\Delta_\tau} + \hat{u}_{i,j}^k \frac{\hat{v}_{i+1,j}^k - \hat{v}_{i-1,j}^k}{2\Delta_x} + \hat{v}_{i,j}^k \frac{\hat{v}_{i,j+1}^k - \hat{v}_{i,j-1}^k}{2\Delta_y} + \frac{\hat{p}_{i,j+1}^k - \hat{p}_{i,j-1}^k}{2\Delta_y} - \frac{1}{R_e} \left( \frac{\hat{v}_{i+1,j}^k - 2\hat{v}_{i,j}^k + \hat{v}_{i-1,j}^k}{\Delta_x^2} + \frac{\hat{v}_{i,j+1}^k - 2\hat{v}_{i,j}^k + \hat{v}_{i,j-1}^k}{\Delta_y^2} \right). \quad (27)$$

Второй порядок центральных разностей выбран из-за лучшей устойчивости и более ровной оптимизации. Для граничных по времени срезов используются односторонние разности первого порядка. Вторая компонента формируется как сумма квадратов отклонений (26) и (27) по предсказанным значениям

$$\mathcal{L}_2 = \frac{1}{|\mathcal{S}|} \sum_{(x_i, y_j, \tau_k) \in \mathcal{S}} \left[ (f_{\Delta_x})^2 + (f_{\Delta_y})^2 \right].$$

Классические работы по вихревой формулировке двумерной гидродинамики [1,2] показывают, что для несжимаемого течения система

уравнений Навье-Стокса в переменных  $(u, v, p)$  приводится к эквивалентному уравнению для вихря скорости (6), где давление отсутствует. Данное представление можно полагать менее «чувствительным» к погрешностям в поле давления и его производных. С целью повышения устойчивости и введения избыточной физической регуляризации, восходящей к методам наименьших квадратов для уравнений гидродинамики [9], добавим дополнительную компоненту  $\mathcal{L}_3$ . Для этого продифференцируем уравнение для горизонтальной компоненты скорости (1) по  $y$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( u \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( v \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} - \nu \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = 0, \quad (28)$$

и уравнение для вертикальной компоненты (2) по  $x$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( u \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( v \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial y \partial x} - \nu \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) = 0. \quad (29)$$

Вычтя уравнение (28) из (29), получим

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)}_{\partial \omega / \partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( u \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( u \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( v \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( v \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \underbrace{\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial y \partial x} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y}}_0 - \nu \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \nu \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)}_0 = 0. \quad (30)$$

Дальше, для уравнение (30), используя уравнение неразрывности (3) и стандартные алгебраические преобразования, получим уравнение вихря вязкой несжимаемой жидкости

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = \nu \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right). \quad (31)$$

Так как рассматривается дискретная сетка на множестве узлов и моментов времени  $(x_i, y_j, \tau_k)$  и имеется предсказанное значение функции тока  $\hat{\psi}_{i,j}^k$ , введем дискретное приближение вихря для уравнения (4), вычисляемое из  $\hat{\psi}_{i,j}^k$

$$\hat{\omega}_{i,j}^k = -\frac{\hat{\psi}_{i+1,j}^k - 2\hat{\psi}_{i,j}^k + \hat{\psi}_{i-1,j}^k}{\Delta_x^2} - \frac{\hat{\psi}_{i,j+1}^k - 2\hat{\psi}_{i,j}^k + \hat{\psi}_{i,j-1}^k}{\Delta_y^2}. \quad (32)$$

Подставив (32) в (31) и применив аналогичную схему, что для (26) и (27), получим физическую невязку уравнения вихря в переменных функции тока

$$g_\Delta \equiv \frac{\hat{\omega}_{i,j}^{k+1} - \hat{\omega}_{i,j}^{k-1}}{2\Delta_\tau} + \hat{u}_{i,j}^k \frac{\hat{\omega}_{i+1,j}^k - \hat{\omega}_{i-1,j}^k}{2\Delta_x} + \hat{v}_{i,j}^k \frac{\hat{\omega}_{i,j+1}^k - \hat{\omega}_{i,j-1}^k}{2\Delta_y} - \frac{1}{R_e} \left( \frac{\hat{\omega}_{i+1,j}^k - 2\hat{\omega}_{i,j}^k + \hat{\omega}_{i-1,j}^k}{\Delta_x^2} + \frac{\hat{\omega}_{i,j+1}^k - 2\hat{\omega}_{i,j}^k + \hat{\omega}_{i,j-1}^k}{\Delta_y^2} \right). \quad (33)$$

и введем третью компоненту функции потерь

$$\mathcal{L}_3 = \frac{1}{|\mathcal{S}|} \sum_{(x_i, y_j, \tau_k) \in \mathcal{S}} (g_\Delta)^2.$$

Тогда, итоговая функция потерь с учетом компоненты вихря примет вид

$$\mathcal{L}(\theta) = a_1 \mathcal{L}_1 + a_2 \mathcal{L}_2 + a_3 \mathcal{L}_3,$$

где  $a_1, a_2, a_3 > 0$  – весовые коэффициенты компонент, подбираемые эмпирически.

**Вычислительный эксперимент.** При вычислительном эксперименте рассматриваются три дискретные пространственные сетки с различным числом узлов  $N_x^{(1)} = N_y^{(1)} = 128$ ,  $N_x^{(2)} = N_y^{(2)} = 64$ ,  $N_x^{(3)} = N_y^{(3)} = 32$  на единой временной сетке  $T_\Delta$  при  $N_T = 101$  и шагом  $\Delta_\tau = 0,01$ . Чтобы давление убывало вдвое за  $\tau \in [0,1]$ , используется удобное округление  $R_e = 6$

$$e^{-\frac{4\tau}{R_e}} \Big|_{\tau=1} = \frac{1}{2} \Rightarrow R_e \approx \frac{4}{\ln 2} \approx 5,77.$$

Обучение всех приводимых моделей осуществлялось в течение 200 эпох.

Для численной оценки качества восстановления полей используются следующие метрики, вычисляемые на тестовом множестве узлов  $\mathcal{T} \subset \mathcal{E}$ , таком, что  $\mathcal{S} \cap \mathcal{T} = \emptyset$ . Компоненты скорости  $\hat{u}_{i,j}^k$  и  $\hat{v}_{i,j}^k$  восстанавливаются из предсказанной функции тока  $\hat{\psi}_{i,j}^k$  согласно уравнениям (22) и (23) соответственно. Тогда среднеквадратические и относительные ошибки по данным задаются как

$$\text{MSE}_u = \frac{1}{|\mathcal{T}|} \sum_{(x_i, y_j, \tau_k) \in \mathcal{T}} (\hat{u}_{i,j}^k - u_{i,j}^k)^2, \quad \text{MSE}_v = \frac{1}{|\mathcal{T}|} \sum_{(x_i, y_j, \tau_k) \in \mathcal{T}} (\hat{v}_{i,j}^k - v_{i,j}^k)^2;$$

$$\delta_u = \frac{\|\hat{u}_{i,j}^k - u_{i,j}^k\|_2}{\|u_{i,j}^k\|_2} = \sqrt{\frac{\text{MSE}_u}{\frac{1}{|\mathcal{T}|} \sum_{(x_i, y_j, \tau_k) \in \mathcal{T}} (u_{i,j}^k)^2}}, \quad \delta_v = \frac{\|\hat{v}_{i,j}^k - v_{i,j}^k\|_2}{\|v_{i,j}^k\|_2} = \sqrt{\frac{\text{MSE}_v}{\frac{1}{|\mathcal{T}|} \sum_{(x_i, y_j, \tau_k) \in \mathcal{T}} (v_{i,j}^k)^2}}.$$

Так как давление в уравнениях Навье-Стокса определено с точностью до аддитивной константы, «сырая» оценка вида

$$\text{MSE}_p = \frac{1}{|\mathcal{T}|} = \sum_{(x_i, y_j, \tau_k) \in \mathcal{T}} (\hat{p}_{i,j}^k - p_{i,j}^k)^2,$$

не является инвариантной относительно константы  $p_0$ , поэтому рассматривается инвариантная к сдвигу форма с минимизацией по константе  $c$

$$\text{MSE}'_p = \min_{c \in \mathbb{C}} \left[ \frac{1}{|\mathcal{T}|} \sum_{(x_i, y_j, \tau_k) \in \mathcal{T}} (\hat{p}_{i,j}^k - (p_{i,j}^k - c))^2 \right]. \quad (34)$$

Раскроем квадрат и продифференцируем по  $c$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \text{MSE}'_p}{\partial c} &= \frac{\partial}{\partial c} \left( \frac{1}{|T|} \left[ \sum_{(x_i, y_j, \tau_k) \in T} (\hat{p}_{i,j}^k - p_{i,j}^k)^2 + 2c \sum_{(x_i, y_j, \tau_k) \in T} (\hat{p}_{i,j}^k - p_{i,j}^k) + |T|c^2 \right] \right) = \\ &= 2c + \frac{2}{|T|} \sum_{(x_i, y_j, \tau_k) \in T} (\hat{p}_{i,j}^k - p_{i,j}^k),\end{aligned}$$

приравняв к нулю, получим

$$2c + \frac{2}{|T|} \sum_{(x_i, y_j, \tau_k) \in T} (\hat{p}_{i,j}^k - p_{i,j}^k) = 0,$$

откуда минимум достигается при оптимальном сдвиге

$$c^* = -\frac{1}{|T|} \sum_{(x_i, y_j, \tau_k) \in T} (\hat{p}_{i,j}^k - p_{i,j}^k). \quad (35)$$

Подставив (35) обратно в (34), получим

$$\begin{aligned}\text{MSE}'_p &= \frac{1}{|T|} \left[ \sum_{(x_i, y_j, \tau_k) \in T} (\hat{p}_{i,j}^k - p_{i,j}^k)^2 - \frac{2}{|T|} \left( \sum_{(x_i, y_j, \tau_k) \in T} (\hat{p}_{i,j}^k - p_{i,j}^k) \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{|T|} \left( \sum_{(x_i, y_j, \tau_k) \in T} (\hat{p}_{i,j}^k - p_{i,j}^k) \right)^2 \right] = \frac{1}{|T|} \sum_{(x_i, y_j, \tau_k) \in T} (\hat{p}_{i,j}^k - p_{i,j}^k)^2 - \left( \frac{1}{|T|} \sum_{(x_i, y_j, \tau_k) \in T} (\hat{p}_{i,j}^k - p_{i,j}^k) \right)^2.\end{aligned}$$

то есть дисперсию ошибки давления относительно оптимального смещения  $c^*$ . Согласованность с физической моделью оценивается среднеквадратическими значениями невязки уравнений Навье-Стокса для компонент  $f_{\Delta_x}$ ,  $f_{\Delta_y}$  и невязки уравнения вихря для  $g_\Delta$ , которые находятся из дискретных формул (26)-(27) и (33)

$$\text{RMS}_x = \sqrt{\frac{1}{|T|} \sum_{(x_i, y_j, \tau_k) \in T} f_{\Delta_x}^2}, \quad \text{RMS}_y = \sqrt{\frac{1}{|T|} \sum_{(x_i, y_j, \tau_k) \in T} f_{\Delta_y}^2}, \quad \text{RMS}_g = \sqrt{\frac{1}{|T|} \sum_{(x_i, y_j, \tau_k) \in T} g_\Delta^2}.$$

Дополнительно приводятся максимальные значения невязок по тестовому множеству  $\max |f_{\Delta_x}|$ ,  $\max |f_{\Delta_y}|$ ,  $\max |g_\Delta|$ , а также оптимальный сдвиг давления  $c^*$ . Ниже приводятся результаты вычислительного эксперимента с учетом включение различных компонент в функцию потерь (таблицах 1-2), а также восстановление восстановления полей скорости и давления на фиксированной дискретной сетке  $N_x^{(2)} = N_y^{(2)} = 64$  для граничных временных срезов  $\tau_k$  (рисунки 1-3). Слева показаны наблюдаемые (эталонные) поля: псевдоцветовая карта скалярного поля давления  $p_{i,j}^k$  и линии уровня функции тока  $\psi_{i,j}^k$ . Справа представлен соответствующий срез, полностью восстанавливаемый моделью: визуализируются значения  $\hat{p}_{i,j}^k$  (с учетом аддитивной константы  $c^*$ ) и  $\hat{\psi}_{i,j}^k$ . Цвет соответствует значениям давления по

единой глобальной шкале, толщина линий тока пропорциональна модулю вектора скорости.

Таблица 1 – Результаты тестирования моделей

	$N_x^{(1)} = N_y^{(1)} = 128$			$N_x^{(2)} = N_y^{(2)} = 64$		
$a_2$	0	$10^{-3}$	$10^{-3}$	0	$10^{-3}$	$10^{-3}$
$a_3$	0	0	$10^{-6}$	0	0	$10^{-6}$
$MSE_u$	$9,32 \cdot 10^{-6}$	$1,54 \cdot 10^{-5}$	$2,05 \cdot 10^{-3}$	$1,04 \cdot 10^{-4}$	$9,65 \cdot 10^{-5}$	$6,21 \cdot 10^{-6}$
$MSE_v$	$4,03 \cdot 10^{-6}$	$2,00 \cdot 10^{-5}$	$2,52 \cdot 10^{-3}$	$6,51 \cdot 10^{-5}$	$1,17 \cdot 10^{-4}$	$6,87 \cdot 10^{-6}$
$\delta_u$	$7,15 \cdot 10^{-3}$	$9,19 \cdot 10^{-3}$	$1,06 \cdot 10^{-1}$	$2,39 \cdot 10^{-2}$	$2,28 \cdot 10^{-2}$	$5,83 \cdot 10^{-3}$
$\delta_u$	$4,70 \cdot 10^{-3}$	$1,05 \cdot 10^{-2}$	$1,17 \cdot 10^{-1}$	$1,89 \cdot 10^{-2}$	$2,54 \cdot 10^{-2}$	$6,12 \cdot 10^{-3}$
$MSE'_p$	$1,24 \cdot 10^{-1}$	$2,24 \cdot 10^{-4}$	$7,39 \cdot 10^{-3}$	$4,44 \cdot 10^{-1}$	$2,08 \cdot 10^{-1}$	$5,01 \cdot 10^{-4}$
$RMS_x$	$5,57 \cdot 10^{-1}$	$9,68 \cdot 10^{-2}$	$3,02 \cdot 10^{-1}$	$1,04 \cdot 10^0$	$5,02 \cdot 10^{-1}$	$3,66 \cdot 10^{-2}$
$RMS_y$	$4,65 \cdot 10^{-1}$	$1,77 \cdot 10^{-1}$	$6,63 \cdot 10^{-1}$	$7,75 \cdot 10^{-1}$	$6,48 \cdot 10^{-1}$	$4,18 \cdot 10^{-2}$
$RMS_g$	$2,18 \cdot 10^1$	$1,72 \cdot 10^1$	$5,95 \cdot 10^1$	$1,18 \cdot 10^1$	$1,39 \cdot 10^0$	$1,83 \cdot 10^0$
$\max  f_{\Delta_x} $	$3,73 \cdot 10^0$	$1,34 \cdot 10^0$	$3,37 \cdot 10^0$	$8,86 \cdot 10^0$	$3,54 \cdot 10^0$	$3,90 \cdot 10^{-1}$
$\max  f_{\Delta_y} $	$3,03 \cdot 10^0$	$2,58 \cdot 10^0$	$9,95 \cdot 10^0$	$5,29 \cdot 10^0$	$4,22 \cdot 10^0$	$4,80 \cdot 10^{-1}$
$\max  g_\Delta $	$3,34 \cdot 10^2$	$2,57 \cdot 10^2$	$8,59 \cdot 10^2$	$2,81 \cdot 10^2$	$1,63 \cdot 10^1$	$2,35 \cdot 10^1$
$c^*$	$7,62 \cdot 10^{-1}$	$-4,49 \cdot 10^{-1}$	$6,75 \cdot 10^{-1}$	$3,29 \cdot 10^{-1}$	$-8,83 \cdot 10^{-1}$	$-3,14 \cdot 10^{-1}$

Таблица 2 – Результаты тестирования моделей

	$N_x^{(3)} = N_y^{(3)} = 32$		
$a_2$	0	$10^{-3}$	$10^{-3}$
$a_3$	0	0	$10^{-6}$
$MSE_u$	$4,35 \cdot 10^{-4}$	$3,56 \cdot 10^{-4}$	$1,65 \cdot 10^{-4}$
$MSE_v$	$5,39 \cdot 10^{-4}$	$2,86 \cdot 10^{-4}$	$1,14 \cdot 10^{-4}$
$\delta_u$	$4,84 \cdot 10^{-2}$	$4,38 \cdot 10^{-2}$	$2,98 \cdot 10^{-2}$
$\delta_u$	$5,45 \cdot 10^{-2}$	$3,97 \cdot 10^{-2}$	$2,50 \cdot 10^{-2}$
$MSE'_p$	$3,30 \cdot 10^{-1}$	$8,18 \cdot 10^{-4}$	$1,33 \cdot 10^{-3}$
$RMS_x$	$9,61 \cdot 10^{-1}$	$9,95 \cdot 10^{-2}$	$8,42 \cdot 10^{-2}$
$RMS_y$	$6,71 \cdot 10^{-1}$	$8,96 \cdot 10^{-2}$	$8,94 \cdot 10^{-2}$
$RMS_g$	$8,84 \cdot 10^{-1}$	$2,49 \cdot 10^0$	$1,86 \cdot 10^0$
$\max  f_{\Delta_x} $	$5,47 \cdot 10^0$	$7,91 \cdot 10^{-1}$	$5,75 \cdot 10^{-1}$
$\max  f_{\Delta_y} $	$4,28 \cdot 10^0$	$7,63 \cdot 10^{-1}$	$6,24 \cdot 10^{-1}$
$\max  g_\Delta $	$1,20 \cdot 10^0$	$2,22 \cdot 10^1$	$1,52 \cdot 10^1$
$c^*$	$3,03 \cdot 10^{-1}$	$3,72 \cdot 10^{-3}$	$-3,95 \cdot 10^{-1}$

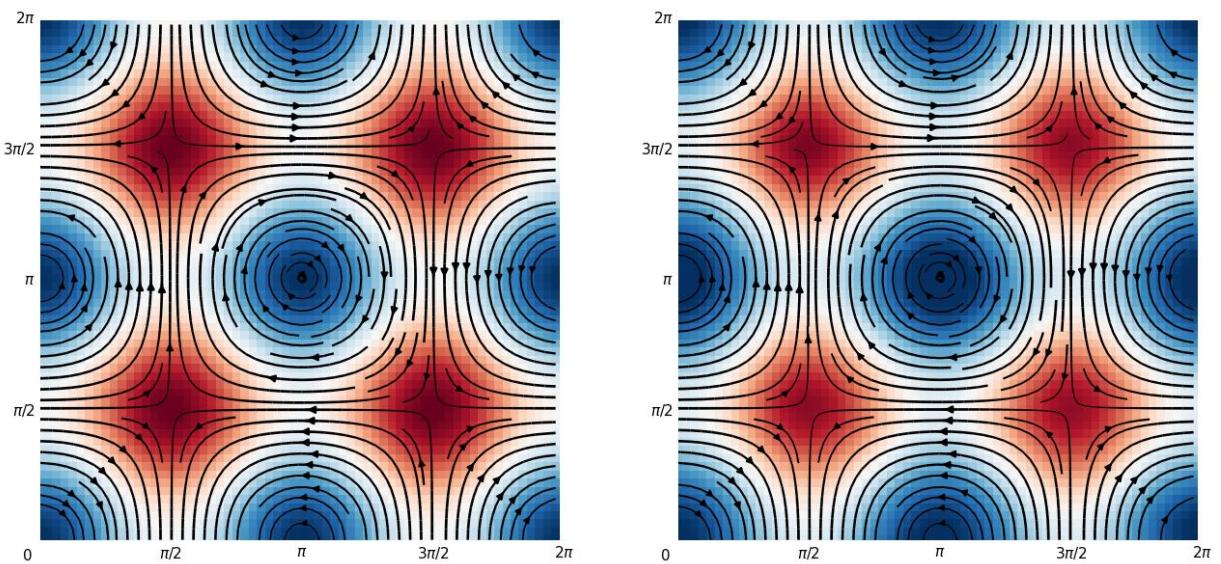


Рисунок 1 – Наблюдаемые и восстанавливаемые поля на срезе  $\tau_0 = 0$

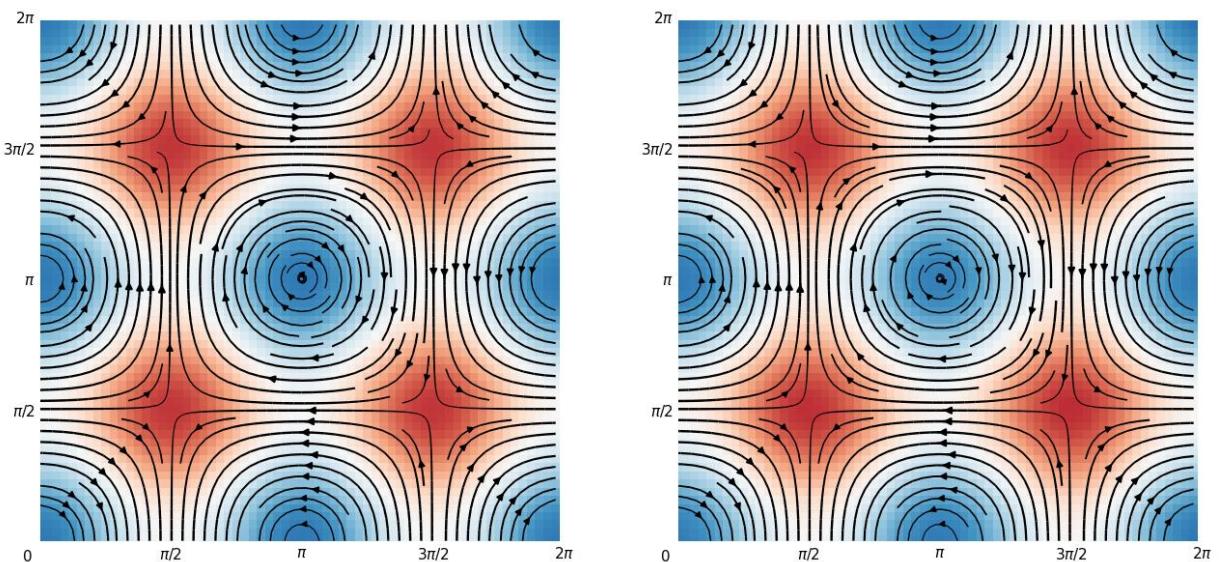


Рисунок 2 – Наблюдаемые и восстанавливаемые поля на срезе  $\tau_{50} = 0,5$

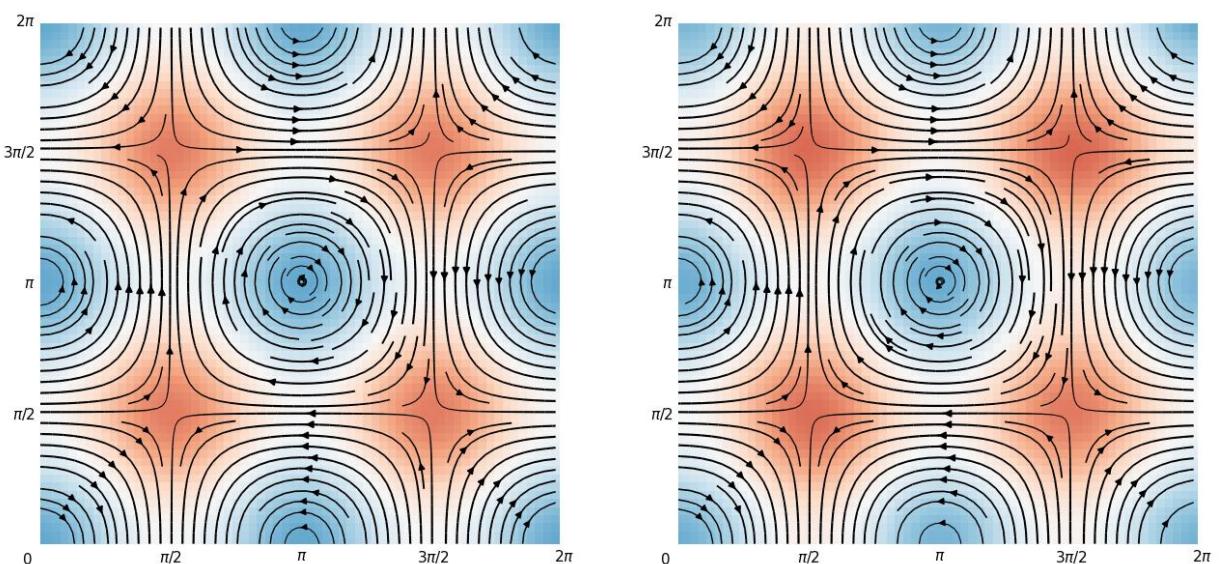


Рисунок 3 – Наблюдаемые и восстанавливаемые поля на срезе  $\tau_{100} = 1$

**Заключение.** В работе сформулирован и проверен на вычислительном эксперименте подход к восстановлению полей скорости и давления для двумерного нестационарного несжимаемого течения на основе принципа избыточной физики: в функцию потерь был включен взаимодополняющие физические ограничения. Численные эксперименты на периодическом решении течения Тейлора-Грина для нескольких дискретных пространственных сетках при фиксированной дискретизации времени подтверждают эффективность предложенного подхода. Схема со смешанным порядком аппроксимации целесообразна: четвертый порядок при восстановлении вектора скорости из функции тока в  $\mathcal{L}_1$  уменьшает систематическое смещение, второй порядок в  $\mathcal{L}_2$  и  $\mathcal{L}_3$  обеспечивает устойчивость оптимизации при фиксированном шаге времени и отсутствии дополнительных фильтров. Эмпирически подобранные значения весовых коэффициентов  $a_2 = 10^{-3}$  и  $a_3 = 10^{-6}$  обеспечивают адекватный учет физических компонент и ошибки по наблюдениям. Дальнейшее увеличение значений приводит к ухудшению качества без достоверного улучшения согласованности с физической моделью и в текущей постановке не является целесообразным.

Сравнительный анализ различных сеточных дискретизаций показал, что улучшения разрешения при фиксированном порядке аппроксимации не приводит к стабильному улучшению качества восстановления решений: для наиболее «плотной» постановки  $N_x^{(1)} = N_y^{(1)} = 128$  характерно ухудшение результата. Это согласуется с возрастанием сложности дескриптивированной задачи и повышением чувствительности центральных разностей второго порядка к численному шуму.

Таким образом, рассматриваемая модель демонстрирует восстановление компонент скорости с относительной погрешностью от 0,58% до 2,98% (по конфигурациям) и корректно воспроизведение ненаблюданного скалярного поля давления с точностью до аддитивной константы. Среднеквадратические физические невязки остаются ограниченными на всем множестве расчетных сеток, что подтверждает устойчивость решения. Приводимые результаты подтверждают применимость подхода к периодическим двумерным течениям, а к актуальным направлениям дальнейших исследований можно отнести согласование порядка аппроксимации и адаптивный подбор точек коллокации.

## Список используемой литературы

- 1 Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика: в 10 т. Т. 6: Гидродинамика. 5-е изд., стер. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. 736 с. ISBN 5-9221-0121-8 (т. 6)
- 2 Batchelor G. K. An Introduction to Fluid Dynamics. Cambridge: Cambridge University Press, 1967

3 Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. 2-е изд. М.: Наука, 1979

4 Tarantola A. Inverse Problem Theory and Methods for Model Parameter Estimation. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2005

5 Kalnay E. Atmospheric Modeling, Data Assimilation and Predictability. Cambridge: Cambridge University Press, 2003

6 Hinze M., Pinna R., Ulbrich M., Ulbrich S. Optimization with PDE Constraints. Dordrecht: Springer, 2009. DOI: 10.1007/978-1-4020-8839-1

7 Raffel M., Willert C. E., Scarano F., Kähler C. J., Wereley S. T., Kompenhans J. Particle Image Velocimetry: A Practical Guide. 3rd ed. Cham: Springer, 2018. DOI: 10.1007/978-3-319-68852-7

8 Clay Mathematics Institute. Navier–Stokes Equation [Электронный ресурс]. URL: <https://www.claymath.org/millennium/navier-stokes-equation> (дата обращения: 02.11.2025)

9 Fefferman C. L. Existence and Smoothness of the Navier–Stokes Equation // The Millennium Prize Problems. Providence (RI): American Mathematical Society; Cambridge (MA): Clay Mathematics Institute, 2006. P. 57–70

10 Raissi M., Perdikaris P., Karniadakis G. E. Physics-informed neural networks: A deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations // Journal of Computational Physics. 2019. Vol. 378. P. 686–707. DOI: 10.1016/j.jcp.2018.10.045

11 Raissi M., Perdikaris P., Karniadakis G. E. Physics-informed deep learning (Part I & II) [Электронный ресурс]. arXiv:1711.10561; arXiv:1711.10566, 2017. URL: [<https://arxiv.org/abs/1711.10561>; <https://arxiv.org/abs/1711.10566>] (дата обращения: 30.10.2025)

12 Karniadakis G. E., Kevrekidis I. G., Lu L., Perdikaris P., Wang S., Yang L. Physics-informed machine learning // Nature Reviews Physics. 2021. Vol. 3. P. 422–440

13 Cuomo S., Di Cola V. S., Giampaolo F., Rozza G., Raissi M., Piccialli F. Scientific machine learning through physics-informed neural networks: Where we are and what's next // Scientific Reports. 2022. Vol. 12. P. 1–36

14 Raissi M., Yazdani A., Karniadakis G. E. Hidden fluid mechanics: Learning velocity and pressure fields from flow visualizations // Science. 2020. Vol. 367, no. 6481. P. 1026–1030

15 Jagtap A. D., Kawaguchi K., Karniadakis G. E. Extended physics-informed neural networks (XPINNs): A generalized space-time domain decomposition based deep learning framework for nonlinear PDEs // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2020. Vol. 372. Art. 113402

16 Sirignano J., Spiliopoulos K. DGM: A deep learning algorithm for solving partial differential equations // SIAM Journal on Scientific Computing. 2018. Vol. 40, no. 4. P. B1163–B1186

17 E W., Yu B. The deep Ritz method: A deep learning-based numerical algorithm for solving variational problems // Communications in Mathematics and Statistics. 2018. Vol. 6. P. 1–12

18 Kharazmi E., Zhang Z., Karniadakis G. E. hp-VPINNs: Variational physics-informed neural networks with domain decomposition // Journal of Computational Physics. 2021. Vol. 438. Art. 110361

19 Taylor G. I., Green A. E. Mechanism of the production of small eddies from large ones // Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences. 1937. Vol. 158, no. 895. P. 499–521

20 Drazin P. G., Riley N. The Navier–Stokes Equations: A Classification of Flows and Exact Solutions. Cambridge: Cambridge University Press, 2006

21 Lagaris I. E., Likas A., Fotiadis D. I. Artificial neural networks for solving ordinary and partial differential equations // IEEE Transactions on Neural Networks. 1998. Vol. 9, no. 5. P. 987–1000

- 22 Psichogios A. G., Ungar L. H. A hybrid neural network–first principles approach to process modeling // AIChE Journal. 1992. Vol. 38, no. 10. P. 1499–1511
- 23 Raissi M., Perdikaris P., Karniadakis G. E. Physics-informed neural networks: A deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations // Journal of Computational Physics. 2019. Vol. 378. P. 686–707. DOI: 10.1016/j.jcp.2018.10.045
- 24 Karniadakis G. E., Kevrekidis I. G., Lu L., Perdikaris P., Wang S., Yang L. Physics-informed machine learning // Nature Reviews Physics. 2021. Vol. 3. P. 422–440
- 25 Wang S., Yu X., Perdikaris P. When and why PINNs fail to train: A neural tangent kernel perspective // Journal of Computational Physics. 2022. Vol. 449. Art. 110768
- 26 Daw A., Bu J., Wang S., Karniadakis G. E. Mitigating gradient pathologies in physics-informed neural networks // SIAM Journal on Scientific Computing. 2022. Vol. 44, no. 3. P. A1555–A1582
- 27 Sitzmann V., Martel J. N. P., Bergman A. W., Lindell D. B., Wetzstein D. Implicit neural representations with periodic activation functions [Электронный ресурс]. arXiv:2006.09661 2020. URL: <https://arxiv.org/abs/2006.09661> (дата обращения: 30.11.2025).
- 28 Rahaman N., Baratin A., Arpit D., Draxler F., Lin M., Hamprecht F. A., Bengio Y., Courville A. On the spectral bias of neural networks [Электронный ресурс]. arXiv:1806.08734, 2018. URL: <https://arxiv.org/abs/1806.08734> (дата обращения: 31.11.2025)
- 29 Годунов С. К., Рябенъкий В. С. Разностные схемы. Учебное пособие, Главная редакция «Наука», М., 1977
- 30 Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы: Учеб. пособие для вузов.— М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит., 1989.— 432 с. — ISBN 5-02-013996-3

## **RECONSTRUCTION OF NAVIER-STOKES SOLUTIONS BY PHYSICS-INFORMED LEARNING WITH REDUNDANT PHYSICAL CONSTRAINTS**

**Khomyakov Daniil Vyacheslavovich\***

Assistant at the Department of Software and Administration  
of Information Systems  
Kursk State University, Russia, Kursk

**Kudinov Vitaly Alekseevich**

Doctor of Pedagogy, Professor, Professor at the Department of Software and  
Administration of Information Systems  
Kursk State University, Russia, Kursk

*Reconstructing velocity and pressure fields from incomplete observations is a central problem in fluid dynamics and computational mechanics, as it determines the quality of flow diagnosis and prediction in engineering and natural systems. Standard physics-informed learning formulations rely on pointwise residuals of the Navier–Stokes and continuity equations, leaving substantial theoretical redundancy unexploited. The objective of this study is to formalize and numerically assess a “redundant-physics” approach in which complementary constraints are unified within a single variational–optimization framework with pressure estimation invariant to additive shifts. A computational experiment based on the Taylor–Green vortex model demonstrates: 1) recovery of velocity components with a relative error on the order of 0.6–3% on spatial grids from  $32 \times 32$  to  $128 \times 128$  at a fixed time; 2) reconstruction of the unobserved scalar pressure field up to an*

*additive constant; 3) stability of the residuals of the momentum and vorticity equations; 4) practical robustness of a mixed discretization. The results contribute to the methodology of physics-informed learning by proposing a reproducible scheme that exploits model redundancy and invariant metrics, thereby improving optimization stability and the identifiability of fields. The approach enables further generalization to more complex flow models, alignment of approximation orders, and adaptive selection of collocation points.*

**Keywords:** physics-informed neural networks, Navier–Stokes equations, Taylor–Green vortex, redundant physics, streamfunction, solution reconstruction