第七章　参数估计

关键词：

矩法估计

极大似然估计

置信区间

置信水平（置信度）

枢轴量

参数：反映总体某方面特征的量

例：设浙江大学大一学生某学年的《微积分I》成绩X服从正态分布，当$X \geq 90$时为优秀，则优秀率

$$p = P\left(X \geq 90\right) = 1 - \Phi\left(\frac{90-\mu}{\sigma}\right)$$

也是一个参数，它是μ和σ^2的函数。

当总体的参数未知时，需利用样本资料对其给出估计——参数估计。

两类参数估计方法：点估计和区间估计

7.1 参数的点估计

设总体X有未知参数θ，$X_1,\cdots,X_n$是X的简单随机样本。

点估计问题：构造合适的统计量$\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1,\cdots,X_n)$

用来估计未知参数θ，称$\hat{\theta}$为参数θ的点估计量，

当给定样本观察值$x_1,\cdots,x_n$时，

称$\hat{\theta}(x_1,\cdots,x_n)$为参数$\theta$的点估计值。

常用的点估计方法：

矩法、极大似然法

（一）矩估计法

统计思想：以样本矩估计总体矩，以样本矩的函数估计总体矩的函数。

理论根据：辛钦大数定律和依概率收敛的性质

设总体的分布函数为$F(x;\theta_1,\cdots,\theta_k)$，

其中$\theta_1,\cdots,\theta_k$是待估的未知参数，

假定总体的前k阶原点矩$\mu_1,\cdots,\mu_k$存在。

基本步骤

（1）求总体前k阶矩关于k个参数的函数

$$\mu_i = E(X^i) = h_i(\theta_1,\cdots,\theta_k), \qquad i=1,\cdots,k$$

(2) 求各参数关于k阶矩的反函数

$$\theta_i = g_i(\mu_1,\cdots,\mu_k), \qquad i=1,\cdots,k$$

(3) 以样本各阶矩$A_1,\cdots,A_k$代替总体各阶矩$\mu_1,\cdots,\mu_k$,
得各参数的矩估计

$$\hat{\theta}_i = g_i(A_1,\cdots,A_k), \qquad i=1,\cdots,k$$

注：在实际应用时，为求解方便，也可以用中心矩ν_i代替原点矩μ_i，相应地以样本中心矩B_i估计ν_i.

采用的矩不同，得出的参数估计也不同。

例1：设总体X的密度为：

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{\theta}x^{\sqrt{\theta}-1} & 0\le x\le 1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}\quad \theta>0\text{为未知参数，}$$

$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$为取自X的样本，求θ的矩估计量。

若已获得$n=10$的样本值如下，

0.43　0.01　0.30　0.04　0.54

0.14　0.99　0.18　0.98　0.02

求θ的矩估计值。

解： ① $\mu_1 = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$

$$= \int_0^1 \sqrt{\theta} x^{\sqrt{\theta}} dx \quad = \frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta}+1}$$

② $\theta = \left(\dfrac{\mu_1}{1-\mu_1}\right)^2$

③ $\hat{\theta} = \left(\dfrac{\bar{X}}{1-\bar{X}}\right)^2$

（4）$\bar{x} = 0.363$, $\hat{\theta} = \left(\dfrac{0.363}{1-0.363}\right)^2 = 0.325$

例2：设总体$X \sim N(\mu, \sigma^2)$，$X_1, \ldots, X_n$是X的样本，求下列情况下未知参数的矩估计。

（1）μ未知,$\sigma^2 = 1$,（2）$\mu = 1, \sigma^2$未知,

（3）μ, σ^2均未知.

解（1）$\mu = E(X), \quad \Rightarrow \hat{\mu} = \bar{X}$

（2） $E(X) = 1, E(X^2) = \sigma^2 + 1$

$$\sigma^2 = E(X^2) - 1$$

$$\hat{\sigma}^2 = A_2 - 1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - 1$$

思考题：σ^2的矩估计还有别的吗？

有，因为$\sigma^2 = D(X)$，所以$\hat{\sigma}^2 = B_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$

说明矩估计不唯一。

(3) $$E(X)=\mu, E(X^2)=\sigma^2+\mu^2$$

$$\sigma^2=E(X^2)-\mu^2$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\hat{\mu}=\bar{X}\\ \hat{\sigma}^2=A_2-\bar{X}^2=B_2\end{cases}$$

可以看出，矩估计不涉及分布。

例3：设总体X服从均匀分布$U(a,b)$，a和b是未知参数，样本$X_1,\cdots,X_n$，求a和b的矩估计。

解（1）求矩关于参数的函数

$$\mu_1 = E(X) = \frac{a+b}{2}, \qquad \nu_2 = \frac{(a-b)^2}{12}$$

(2) 求参数关于矩的反函数

$$a = \mu_1 - \sqrt{3\nu_2}, \quad b = \mu_1 + \sqrt{3\nu_2}$$

(3) 以样本阶矩$A_1 = \bar{X}$代替总体矩μ_1, $B_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$

代替ν_2，得参数a和b的矩估计

$$\hat{a} = \bar{X} - \sqrt{3B_2}, \qquad \hat{b} = \bar{X} + \sqrt{3B_2}$$

(二) 极大似然估计法：

- **极（最）大似然估计的原理介绍**

考察以下例子：

假设在一个罐中放着许多白球和黑球，并假定已经知道两种球的数目之比是1:3，但不知道哪种颜色的球多。如果用放回抽样方法从罐中取5个球，观察结果为：黑、白、黑、黑、黑，估计取到黑球的概率p.

解：设抽到黑球的概率为p，则本例中，$p=\dfrac{1}{4}$或$\dfrac{3}{4}$.

当$p=\dfrac{1}{4}$时，出现本次观察结果的概率为$\left(\dfrac{1}{4}\right)^4\left(\dfrac{3}{4}\right)=\dfrac{3}{1024}$.

当$p=\dfrac{3}{4}$时，出现本次观察结果的概率为$\left(\dfrac{3}{4}\right)^4\left(\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{81}{1024}$.

由于 $\dfrac{3}{1024}<\dfrac{81}{1024}$，因此认为$p=\dfrac{3}{4}$比$p=\dfrac{1}{4}$更有可能，

于是 $\hat{p}$ 取为$\dfrac{3}{4}$更合理.

一般地，设离散型总体$X \sim p(x;\theta)$，$\theta \in \Theta$，θ未知。

从总体X中取得样本$X_1,\ldots,X_n$，其观察值为$x_1,\ldots,x_n$，

则事件$\{X_1 = x_1,\ldots,X_n = x_n\}$发生的概率为

似然函数

$$L(\theta) = P\{X_1 = x_1,\ldots,X_n = x_n\} = p(x_1;\theta)\ldots p(x_n;\theta) = \prod_{i=1}^{n} p(x_i;\theta).$$

极大似然原理：$L(\hat{\theta}(x_1,\ldots,x_n)) = \max\limits_{\theta\in\Theta} L(\theta).$

称$\hat{\theta}(x_1,\ldots,x_n)$为$\theta$的极大似然估计值，

相应统计量$\hat{\theta}(X_1,\ldots,X_n)$为$\theta$的极大似然估计量（MLE)。

若总体X为连续型的，

概率密度为$f\left(x,\theta\right)$，$\theta\in\Theta$，θ为未知参数。

则对于样本$\left(X_1,X_2,\cdots,X_n\right)$的观察值$\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)$，

似然函数 $L\left(\theta\right)=\prod_{i=1}^{n}f\left(x_i,\theta\right)$。

极大似然原理：$L(\hat{\theta}(x_1,\ldots,x_n))=\max_{\theta\in\Theta}L(\theta).$

【说明】1.未知参数可能不是一个，一般设为$\theta=(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k)$;

2.在求$L(\theta)$的最大值时，通常转换为求：$lnL(\theta)$的最大值，

$lnL(\theta)$称为对数似然函数.

利用$\frac{\partial lnL(\theta)}{\partial \theta_i}=0, i=1,2,...,k.$解得$\hat{\theta}_i$，$i=1,2,...,k.$

3.若$L(\theta)$关于某个θ_i是单调增(减)函数，

此时θ_i的极大似然估计在其边界取得;

4.若$\hat{\theta}$是θ的极大似然估计，则$g(\theta)$的极大似然估计为$g\left(\hat{\theta}\right)$。

例4： 设总体X的概率密度为：

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{\theta}x^{\sqrt{\theta}-1} & 0\le x\le 1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

$X_1,\ldots,X_n$是总体X的样本，求θ的极大似然估计量。

若已获得$n=10$的样本值如下，

0.43 0.01 0.30 0.04 0.54

0.14 0.99 0.18 0.98 0.02

求θ的极大似然估计值。

解：似然函数$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i,\theta)$

$$=\prod_{i=1}^{n}\sqrt{\theta}x_i^{\sqrt{\theta}-1}=\theta^{\frac{n}{2}}\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)^{\sqrt{\theta}-1}$$

$$lnL(\theta)=\frac{n}{2}ln\theta+\left(\sqrt{\theta}-1\right)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$$

令$\dfrac{dlnL(\theta)}{d\theta}=\dfrac{n}{2}\cdot\dfrac{1}{\theta}+\dfrac{1}{2\sqrt{\theta}}\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0$

即：$\dfrac{n}{\sqrt{\theta}}=-\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$

θ的极大似然估计量为：$\hat{\theta}=\dfrac{n^2}{\left(\sum_{i=1}^{n}lnX_i\right)^2}$

θ的极大似然估计值为：$\hat{\theta}=0.305$

例5：设总体$X \sim N(\mu, \sigma^2)$，$X_1, \ldots, X_n$是X的样本，求下列情况下未知参数的极大似然估计。

（1）μ未知,$\sigma^2=1$,（2）$\mu=1,\sigma^2$未知,

（3）μ,σ^2均未知.

解（1）似然函数$L(\mu)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x_1-\mu)^2}{2}}\cdots\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x_n-\mu)^2}{2}}$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu)^2}{2}}$$

$$\ln L(\mu)=n\ln\frac{1}{\sqrt{2\pi}}-\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu)^2}{2}$$

$$\frac{d}{d\mu}\ln L(\mu)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)=0$$

$$\hat{\mu}=\bar{X}$$

（2）似然函数$L(\sigma^2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x_1-1)^2}{2\sigma^2}}\cdots\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x_n-1)^2}{2\sigma^2}}$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^n e^{-\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-1)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\ln L(\sigma^2)=n\ln\frac{1}{\sqrt{2\pi}}-\frac{n}{2}\ln\sigma^2-\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-1)^2}{2\sigma^2}$$

$$\frac{d}{d\sigma^2}\ln L(\sigma^2)=-\frac{n}{2\sigma^2}+\frac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}(x_i-1)^2=0$$

$$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-1)^2$$

（3）似然函数$L(\mu,\sigma^2)=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^n e^{-\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

$$\ln L(\mu,\sigma^2)=n\ln\frac{1}{\sqrt{2\pi}}-\frac{n}{2}\ln\sigma^2-\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\ln L(\mu,\sigma^2)=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)=0$$

$$\frac{\partial}{\partial\sigma^2}\ln L(\mu,\sigma^2)=-\frac{n}{2\sigma^2}+\frac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2=0$$

$$\hat{\mu}=\bar{X},\quad \hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$$

例6：设总体X服从均匀分布$U(a,b)$，a和b是未知参数，样本$X_1,\cdots,X_n$，

(1) 求a和b的极大似然估计，

(2) 求$E(X)$的极大似然估计。

解：(1) 似然函数

$$L(a,b)=\begin{cases}\dfrac{1}{(b-a)^n}, & a\le x_i\le b, i=1,\ldots,n.\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$$

注意到，似然函数$L(a,b)$关于a单调增,关于b单调减,

因此,$\dfrac{\partial}{\partial a}\ln L(a,b)>0,\dfrac{\partial}{\partial b}\ln L(a,b)<0.$

另一方面，在得到样本值$x_1,\ldots,x_n$后,

a的取值$\le\min\{x_1,\ldots,x_n\}$,$b$的取值$\ge\max\{x_1,\ldots,x_n\}$

只要使得a达到最大值$\min\{x_1,\ldots,x_n\}$，

b达到最小值$\max\{x_1,\ldots,x_n\}$，

就能使$L(a,b)$达到最大。

所以，a,b的极大似然估计量分别为

$$\hat{a}=\min\{X_1,\ldots,X_n\}=X_{(1)},\hat{b}=\max\{X_1,\ldots,X_n\}=X_{(n)}$$

(2)$E(X)=\dfrac{a+b}{2}$的极大似然估计量为

$$\hat{E(X)}=\frac{\hat{a}+\hat{b}}{2}=\frac{X_{(1)}+X_{(n)}}{2}$$

例7：设总体X的概率密度为：

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}e^{-(x-\mu)/\theta} & x\geq\mu \\ 0 & \text{其它}\end{cases},$$

其中$\theta>0$, θ,μ是未知参数, $(X_1,\cdots,X_n)$为X的样本，求θ,μ的矩估计与极大似然估计。

解：(1) 矩估计

$$\mu_1 = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx = \int_{\mu}^{+\infty} x \frac{1}{\theta} e^{-(x-\mu)/\theta} dx = \mu + \theta$$

$$v_2 = D(X) = E(X-\mu-\theta)^2 = \int_{\mu}^{+\infty} (x-\mu-\theta)^2 \frac{1}{\theta} e^{-(x-\mu)/\theta} dx$$

$$\overset{t=x-\mu}{=} \int_0^{+\infty} (t-\theta)^2 \frac{1}{\theta} e^{-t/\theta} dt = \theta^2$$

得 $\begin{cases} \theta = \sqrt{v_2} \\ \mu = \mu_1 - \sqrt{v_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \hat{\theta} = \sqrt{\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2} \\ \hat{\mu} = \bar{X} - \sqrt{\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2} \end{cases}$

(2) 极大似然估计

$$L(\theta,\mu)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\theta}e^{-(x_i-\mu)/\theta}$$

$$=\frac{1}{\theta^n}e^{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)} \qquad x_i \geq \mu, i=1,2,\ldots,n.$$

此处不能通过求偏导数获得μ的极大似然估计量,

$\because x_i \geq \mu$,故μ的取值范围最大不超过

$$x_{(1)}=min(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

(2) 极大似然估计

注意到，$L(\theta,\mu)=\frac{1}{\theta^n}e^{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}x_i+\frac{n\mu}{\theta}}$是$\mu$的增函数，

μ取到最大值时，L达到最大。

故$\hat{\mu}=X_{(1)}=min(X_1,X_2,\cdots,X_n)$，

又$lnL(\theta)=-nln\theta-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\hat{\mu})$

令$\frac{dlnL(\theta)}{d\theta}=-\frac{n}{\theta}+\frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-X_{(1)})=0$

$$\Rightarrow\hat{\theta}=\bar{X}-X_{(1)}$$

例8：设总体X的概率分布律为：$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \theta & \theta/2 & 1-3\theta/2 \end{pmatrix}$,

其中$0<\theta<\dfrac{2}{3}$, 未知,

现得到样本观测值2，3，2，1，3，

求θ的矩估计值与极大似然估计值。

解：(1) 矩估计

$$\mu_1 = E(X) = \sum x_k p_k$$

$$= \theta + 2\times\theta/2 + 3\times(1-3\theta/2)$$

$$= 3 - 5\theta/2 \qquad \Rightarrow \theta = \frac{2}{5}(3-\mu_1)$$

$$\Rightarrow \hat{\theta} = \frac{2}{5}(3-\overline{X})$$

$$\overline{X} = 2.2 \qquad \Rightarrow \hat{\theta} = 0.32$$

(2) 极大似然估计

$$L(\theta)=(\theta/2)(1-3\theta/2)(\theta/2)\theta(1-3\theta/2)$$

$$=\tfrac{1}{16}\theta^3(2-3\theta)^2$$

$$\ln L(\theta)=-\ln 16+3\ln\theta+2\ln(2-3\theta)$$

$$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\frac{3}{\theta}-\frac{6}{2-3\theta}=0$$

$$\Rightarrow\hat{\theta}=0.4$$

例9：设总体X服从$\left[0,\theta\right]$上的均匀分布，$\theta>0$未知，试由样本$x_1,x_2,\cdots,x_n$求出θ的极大似然估计和矩估计。

解：(1) 极大似然估计

因X的概率密度为：$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta} & 0\le x\le\theta\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

故参数θ的似然函数为：$L(\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta^n} & 0\le x_1,x_2,\cdots,x_n\le\theta\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

由于$\dfrac{dln(\theta)}{d\theta}=-\dfrac{n}{\theta}\neq 0$,不能用微分法求$\hat{\theta}_L$

以下从定义出发求$\hat{\theta}_L$：

又$L(\theta)=\dfrac{1}{\theta^n}$对$\theta > x_{(n)}$的$\theta$是减函数，

θ越小，L越大，故$\hat{\theta}_L = x_{(n)}$时，L最大；

因为$0 \le x_i \le \theta$,故θ的取值范围最小为$x_{(n)} = max\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$

所以θ的极大似然估计量为

$$\hat{\theta}_L = X_{(n)} = max\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$$

(2) 矩估计

$$\text{由}E(X)=\int_0^\theta \frac{1}{\theta}x\,dx=\frac{\theta}{2}=\bar{X}$$

$$\Rightarrow \hat{\theta}=2\bar{X}$$

7.2 估计量的评选准则

从前一节看到，对总体的未知参数可用不同方法求得不同的估计量，如何评价好坏？

四条评价准则：

(1) 无偏性准则

(2) 有效性准则

(3) 均方误差准则

(4) 相合性准则

1.无偏性准则

定义：若参数θ的估计量$\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$,满足

$$E\left(\hat{\theta}\right)=\theta,$$

则称$\hat{\theta}$是θ的一个无偏估计量。

若$E\left(\hat{\theta}\right)\neq\theta$,那么$\left|E\left(\hat{\theta}\right)-\theta\right|$称为估计量$\hat{\theta}$的偏差

若$\lim\limits_{n\to\infty}E\left(\hat{\theta}\right)=\theta$,则称$\hat{\theta}$是$\theta$的渐近无偏估计量

例1：设总体X的一阶和二阶矩存在，分布是任意的，记$E(X)=\mu, D(X)=\sigma^2$,

(1) 证明：样本均值$\overline{X}$和样本方差S^2分别是μ和σ^2的无偏估计；

（2）判断：B_2是否为σ^2的无偏估计？是否为σ^2的渐近无偏估计？

（1）证：因$X_1, X_2, \cdots, X_n$与X同分布，故有：

$$E\left(\bar{X}\right) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E\left(X_i\right)$$

$$= \frac{1}{n} \cdot n\mu = \mu$$

故$\bar{X}$是μ的无偏估计.

$$E\left(S^2\right)=E\left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2\right)$$

$$=\frac{1}{n-1}E\left\{\sum_{i=1}^{n}\left[(X_i-\mu)-\left(\bar{X}-\mu\right)\right]^2\right\}$$

$$=\frac{1}{n-1}E\left\{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2-n\left(\bar{X}-\mu\right)^2\right\}$$

$$=\frac{1}{n-1}\left\{\sum_{i=1}^{n}D\left(X_i\right)-nD\left(\bar{X}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{n-1}\left(n\sigma^2-\sigma^2\right)=\sigma^2$$

故S^2是σ^2的无偏估计.

（2）$B_2=\frac{n-1}{n}S^2$

$$E(B_2)=\frac{n-1}{n}E\left(S^2\right)=\frac{n-1}{n}\sigma^2\neq\sigma^2$$

故B_2不是σ^2的无偏估计.

$$\lim_{n\to\infty}E(B_2)=\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n}\sigma^2=\sigma^2$$

故B_2是σ^2的渐近无偏估计.

例2：检验7.1节例9（即总体X服从$\left[0,\theta\right]$上的均匀分布）

的矩估计量$\hat{\theta}=2\bar{X}$与

极大似然估计量$\hat{\theta}_L=X_{(n)}$的无偏性。

解：$\because X \sim U[0,\theta]$, $E(X)=\dfrac{\theta}{2}$,

由于$X_1,\cdots,X_n$与X同分布

$$\therefore E(\hat{\theta})=E(2\bar{X})$$

$$=\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=\frac{2}{n}\cdot n\cdot\frac{\theta}{2}=\theta$$

因此$\hat{\theta}=2\bar{X}$是θ的无偏估计

为考察$\hat{\theta}_L = X_{(n)}$的无偏性，先求$X_{(n)}$的分布，

由第三章第5节知： $F_{X_{(n)}}(x) = \left[F(x)\right]^n$，

于是 $f_{X_{(n)}}(x) = \begin{cases} \dfrac{nx^{n-1}}{\theta^n} & 0 \le x \le \theta \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$

因此有：$E\left(\hat{\theta}_L\right) = E\left(X_{(n)}\right)$

$$= \int_0^\theta \frac{x \cdot nx^{n-1}}{\theta^n} dx \quad = \frac{n}{n+1}\theta \ne \theta$$

所以$\hat{\theta}_L = X_{(n)}$是有偏的。

纠偏方法

如果 $E\left(\hat{\theta}\right)=a\theta+b,\theta\in\Theta$,其中$a,b$是常数，且$a\neq0$

则$\frac{1}{a}\left(\hat{\theta}-b\right)$是$\theta$的无偏估计。

在例2中，取$X_{(n)}^{*}=\frac{n+1}{n}X_{(n)}$,则$X_{(n)}^{*}$是$\theta$的无偏估计

无偏性的统计意义是指在大量重复试验下，

由$\hat{\theta}(X_1,\cdots,X_n)$所作的估计值的平均恰是$\theta$,

从而无偏性保证了$\hat{\theta}$没有系统误差。

2. 有效性准则

定义：设$\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2$是$\theta$的两个**无偏**估计，

如果$D\left(\hat{\theta}_1\right)\le D\left(\hat{\theta}_2\right)$,对一切$\theta\in\Theta$成立，

且不等号至少对某一$\theta\in\Theta$成立，则称

$\hat{\theta}_1$比$\hat{\theta}_2$有效。

例3：设总体$X \sim U[0,\theta]$，$X_1,\cdots,X_n$是取自X的样本，

已知θ的两个无偏估计为$\hat{\theta}_1 = 2\bar{X}, \hat{\theta}_2 = \frac{n+1}{n} X_{(n)}$ ，

判别$\hat{\theta}_1$与$\hat{\theta}_2$哪个有效$(n \geq 2时)$？

解：$D\left(\hat{\theta}_1\right)=D\left(2\bar{X}\right)=\frac{4}{n}\cdot\frac{\theta^2}{12}=\frac{\theta^2}{3n}$

由 $f_{X_{(n)}}\left(x\right)=\begin{cases}\frac{nx^{n-1}}{\theta^n} & 0<x<\theta \\ 0 & \text{其它}\end{cases} \Rightarrow E\left(X_{(n)}^2\right)=\int_0^\theta \frac{nx^{n+1}}{\theta^n}dx=\frac{n}{n+2}\theta^2$

于是$D\left(\hat{\theta}_2\right)=\frac{\left(n+1\right)^2}{n^2}\left\{E\left(X_{(n)}^2\right)-\left[E\left(X_{(n)}\right)\right]^2\right\}=\frac{\theta^2}{n\left(n+2\right)}$

因为$D\left(\hat{\theta}_1\right)=\frac{\theta^2}{3n}>\frac{\theta^2}{n\left(n+2\right)}=D\left(\hat{\theta}_2\right) \Rightarrow \hat{\theta}_2$比$\hat{\theta}_1$更有效

3.均方误差准则

定义：设$\hat{\theta}$是参数θ的点估计，方差存在，则称$E(\hat{\theta}-\theta)^2$是估计量的均方误差，记为$Mse(\hat{\theta})$.

若$\hat{\theta}$是θ的无偏估计，则有$Mse(\hat{\theta})=D(\hat{\theta})$

在实际应用中，均方误差准则比无偏性准则更重要.

例4：试利用均方误差准则，

对用样本方差S^2和样本二阶中心矩B_2

分别估计正态总体方差σ^2时

进行评价.

解：根据第六章抽样分布定理，在正态总体下，

$$(n-1)S^2/\sigma^2 \sim \chi^2(n-1).$$

又因S^2是σ^2的无偏估计，因此

$$Mse(S^2) = D(S^2) = \frac{2\sigma^4}{n-1}.$$

而 $Mse(B_2)=E[(B_2-\sigma^2)^2]$

$$=D(B_2)+[E(B_2)-\sigma^2]^2$$

$$=D(\frac{n-1}{n}S^2)+[E(\frac{n-1}{n}S^2)-\sigma^2]^2$$

$$=\frac{2n-1}{n^2}\sigma^4$$

当$n>1$时，有$\dfrac{2n-1}{n^2}<\dfrac{2}{n-1}$,

因此在均方误差准则下，B_2优于S^2.

4. 相合性准则

定义：设$\hat{\theta}(X_1,\cdots,X_n)$为参数$\theta$的估计量，

若对于任意$\theta\in\Theta$，当$n\to+\infty$时，$\hat{\theta}_n$依概率收敛于θ，

即$\forall\varepsilon>0$，有：$\lim\limits_{n\to+\infty}P\left\{\left|\hat{\theta}_n-\theta\right|\geq\varepsilon\right\}=0$成立，

则称$\hat{\theta}_n$为θ的相合估计量或一致估计量

例5：设总体X的k阶矩$E(X^k)=\mu_k(k\geq 2)$存在，$X_1,\cdots,X_n$是取自X的样本，证明：

(1)$\bar{X}$是$\mu_1=E(X)$的相合估计；

（2）$A_l=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^l, l=2,\ldots,k$是$\mu_l, l=2,\ldots,k$的相合估计；

（3）$B_2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2, S^2$是$D(X)=\sigma^2$的相合估计；

（4）S是σ的相合估计。

证明：由辛钦大数定律知，$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^l$依概率收敛到

$\mu_l = E(X^l), l = 1, 2, \ldots, k.$ 因此(1)，（2）成立。

根据依概率收敛的性质，由$A_1, \ldots, A_k$是$\mu_1, \ldots, \mu_k$的相合估计，若$g(\mu_1, \ldots, \mu_k)$是连续函数，则$g(A_1, \ldots, A_k)$是$g(\mu_1, \ldots, \mu_k)$的相合估计。

因为$D(X)=\sigma^2=\mu_2-\mu_1^2$，所以

$B_2=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2=A_2-\bar{X}^2$是$\sigma^2$的相合估计，

注意到$S^2=\dfrac{n}{n-1}B_2$，因此S^2也是σ^2的相合估计；

$S=\sqrt{S^2}$是σ的相合估计。

因此，(3) 和(4)成立。

例6：设总体$X\sim U[0,\theta]$，$X_1,\cdots,X_n$是取自X的样本，

证明：$\hat{\theta}_1=2\bar{X}$和$\hat{\theta}_2=\frac{n+1}{n}X_{(n)}$是$\theta$的相合估计。

证：$E\left(\hat{\theta}_1\right)=E\left(\hat{\theta}_2\right)=\theta$，$D\left(\hat{\theta}_1\right)=\dfrac{\theta^2}{3n}$，$D\left(\hat{\theta}_2\right)=\dfrac{\theta^2}{n\left(n+2\right)}$

由切比雪夫不等式，$\forall\varepsilon>0$, 当$n\to+\infty$时，

有：$$P\left\{\left|\hat{\theta}_1-\theta\right|\ge\varepsilon\right\}\le\frac{D\left(\hat{\theta}_1\right)}{\varepsilon^2}=\frac{\theta^2}{3n\varepsilon^2}\to 0$$

同理：$$P\left\{\left|\hat{\theta}_2-\theta\right|\ge\varepsilon\right\}\le\frac{D\left(\hat{\theta}_2\right)}{\varepsilon^2}=\frac{\theta^2}{n\left(n+2\right)\varepsilon^2}\to 0$$

所以$\hat{\theta}_1$和$\hat{\theta}_2$都是θ的相合估计。

注：证明$\hat{\theta}_1=2\bar{X}$的相合性可以用辛钦大数定律，

事实上，$\bar{X}\xrightarrow{P}\dfrac{\theta}{2}$，所以，$\hat{\theta}_1=2\bar{X}\xrightarrow{P}\theta$.

7.3 区间估计

假设$(X_1,\cdots,X_n)$是总体X的一个样本，

区间估计的方法是给出两个统计量

$$\hat{\theta}_1=\hat{\theta}_1(X_1,\cdots,X_n),\hat{\theta}_2=\hat{\theta}_2(X_1,\cdots,X_n)$$

使区间$\left[\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2\right]$以一定的可靠程度盖住$\theta$。

（一）置信区间的定义

定义7.3.1：设总体X的分布函数$F(x;\theta)$含有一个未知参数θ，$(X_1,\cdots,X_n)$是总体X的一个样本，对给定的值$\alpha(0<\alpha<1)$，如果有两个统计量$\hat{\theta}_{\mathrm{L}}=\hat{\theta}_{\mathrm{L}}(X_1,\cdots,X_n)$，$\hat{\theta}_{\mathrm{U}}=\hat{\theta}_{\mathrm{U}}(X_1,\cdots,X_n)$，使得：

$$P\left\{\hat{\theta}_{\mathrm{L}}(X_1,\cdots,X_n)<\theta<\hat{\theta}_{\mathrm{U}}(X_1,\cdots,X_n)\right\}\geq 1-\alpha \quad \forall\,\theta\in\Theta \qquad (7-1)$$

则称随机区间$\left(\hat{\theta}_{\mathrm{L}},\hat{\theta}_{\mathrm{U}}\right)$是$\theta$的双侧置信区间；称$1-\alpha$为置信度；

$\hat{\theta}_{\mathrm{L}}$和$\hat{\theta}_{\mathrm{U}}$分别称为双侧置信下限和双侧置信上限。

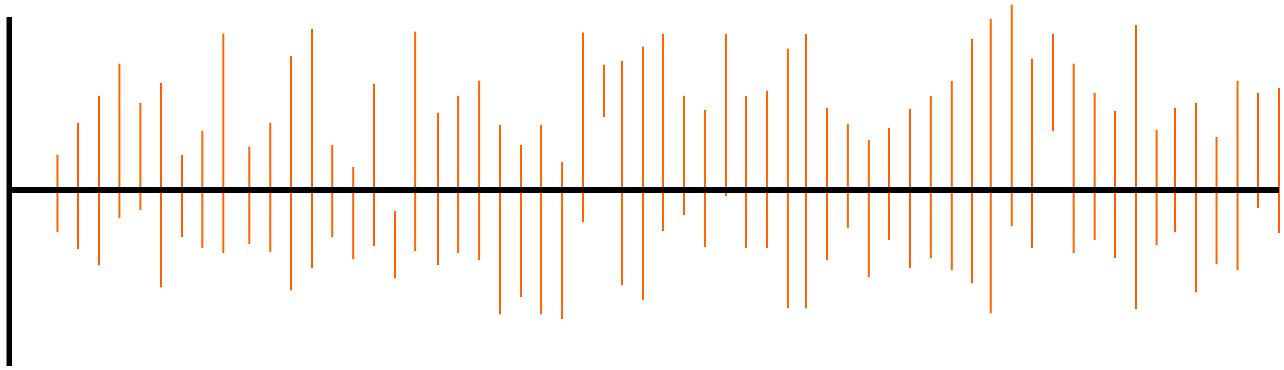
如果θ的置信区间$\left(\hat{\theta}_{\mathrm{L}},\ \hat{\theta}_{\mathrm{U}}\right)$，满足：

$$P\left\{\hat{\theta}_{\mathrm{L}}(X_1,\ldots,X_n)<\theta<\hat{\theta}_{\mathrm{U}}(X_1,\ldots,X_n)\right\}=1-\alpha \qquad \forall\theta\in\Theta$$

则置信区间$\left(\hat{\theta}_{\mathrm{L}},\ \hat{\theta}_{\mathrm{U}}\right)$的含义为

若反复抽样多次(各次得到的样本容量相等，都为n)，每个样本值确定一个区间$\left(\hat{\theta}_{\mathrm{L}},\ \hat{\theta}_{\mathrm{U}}\right)$,每个这样的区间或者包含$\theta$的真值,或者不包含$\theta$的真值。

按伯努里大数定律，在这些区间中，包含θ真值的约占$100(1-\alpha)\%$.



如反复抽样10000次，当$\alpha = 0.05$,即置信水平为95%时, 10000个区间中不包含θ的真值的约为500个；当$\alpha = 0.01$,即置信水平为99%时, 10000个区间中不包含θ的真值的约为100个。

单侧置信限

定义7.3.2 在以上定义中，若将$(7-1)$式改为：

$$P\left\{\hat{\theta}_{\mathrm{L}}(X_1,\cdots,X_n)<\theta\right\}\geq 1-\alpha,\quad \forall\theta\in\Theta \qquad (7-2)$$

则称$\underline{\hat{\theta}_{\mathrm{L}}(X_1,\cdots,X_n)\text{为}\theta\text{的单侧置信下限}}$。

又若将$(7-2)$式改为：

$$P\left\{\theta<\hat{\theta}_{\mathrm{U}}(X_1,\cdots,X_n)\right\}\geq 1-\alpha,\quad \forall\theta\in\Theta \qquad (7-3)$$

则称$\underline{\hat{\theta}_{\mathrm{U}}(X_1,\cdots,X_n)\text{为}\theta\text{的单侧置信上限}}$。

- 单侧置信限和双侧置信区间的关系：

设$\hat{\theta}_{\mathrm{L}}=\hat{\theta}_{\mathrm{L}}\left(X_1,\cdots,X_n\right)$是参数$\theta$的置信度为$1-\alpha_1$的单侧置信下限，$\hat{\theta}_{\mathrm{U}}=\hat{\theta}_{\mathrm{U}}\left(X_1,\cdots,X_n\right)$是参数$\theta$的置信度为$1-\alpha_2$的单侧置信上限，则（$\hat{\theta}_{\mathrm{L}}$，　$\hat{\theta}_{\mathrm{U}}$）是参数$\theta$的置信度为$1-\alpha_1-\alpha_2$的双侧置信区间。

定义：称置信区间$[\hat{\theta}_{\mathrm{L}},\hat{\theta}_{\mathrm{U}}]$的平均长度$E(\hat{\theta}_{\mathrm{U}}-\hat{\theta}_{\mathrm{L}})$为区间的精确度，并称二分之一区间的平均长度为置信区间的误差限。

说明：在给定的样本容量下，置信水平和精确度是相互制约的。

Neyman原则：

在置信度达到一定的前提下，选取精确度尽可能高的区间。

同等置信区间：

如果有两个统计量$\hat{\theta}_{\mathrm{L}}=\hat{\theta}_{\mathrm{L}}\left(X_1,\cdots,X_n\right)$，$\hat{\theta}_{\mathrm{U}}=\hat{\theta}_{\mathrm{U}}\left(X_1,\cdots,X_n\right)$，使得：

$$P\left\{\hat{\theta}_{\mathrm{L}}\left(X_1,\cdots,X_n\right)<\theta<\hat{\theta}_{\mathrm{U}}\left(X_1,\cdots,X_n\right)\right\}=1-\alpha \quad \forall\theta\in\Theta \quad (7-1)$$

（二）枢轴量法

定义7. 3. 3：设总体X有概率密度（或概率分布律）$f(x;\theta)$，其中θ是待估的未知参数，并

设$X_1,\cdots,X_n$是来自该总体的样本，
称样本和未知参数θ的函数$G(X_1,\cdots,X_n;\theta)$为枢轴量，
如果它的分布不依赖于未知参数θ，且完全已知.

- 枢轴量和统计量的区别：
- （1）枢轴量是样本和待估参数的函数，其分布不依赖于任何未知参数；
- （2）统计量只是样本的函数，其分布常常依赖于未知参数。

- **思考题：**

总体$X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $X_1, \ldots, X_n$是X的样本，μ, σ^2是未知参数，则$\bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$

(1) $\bar{X}$, $\dfrac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{\sigma}$, $\dfrac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{S}$

哪个是统计量？

（2）考虑μ的置信区间

$\bar{X}$, $\dfrac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{\sigma}$, $\dfrac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{S}$

哪个是枢轴量？

答： (1)$\bar{X}$是统计量；

$\dfrac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{\sigma}$与$\dfrac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{S}$

含有未知参数，都不是统计量。

(2)$\dfrac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{S}$是枢轴量；

$\bar{X}$的分布含有未知参数，

$\dfrac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{\sigma}$含有除了$\mu$以外的其他未知参数$\sigma$，

所以$\bar{X}$, $\dfrac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{\sigma}$都不是枢轴量。

构造置信区间具体步骤：

(1) 构造一个分布已知的枢轴量$G(X_1,\cdots,X_n;\theta)$;

(2) 对连续型总体和给定的置信度$1-\alpha$，设常数$a<b$满足

$$P\{a<G(X_1,\cdots,X_n;\theta)<b\}=1-\alpha;$$

（3）若能从 $a<G(X_1,\cdots,X_n;\theta)<b$ 得到等价的不等式

$$\hat{\theta}_L(X_1,\cdots,X_n)<\theta<\hat{\theta}_U(X_1,\cdots,X_n)$$

那么$(\hat{\theta}_L,\hat{\theta}_U)$就是$\theta$的置信度为$1-\alpha$的置信区间。

注：枢轴量 $G(X_1,\ldots,X_n;\theta)$ 的构造，通常从参数 θ 的点估计 $\hat{\theta}$

（如极大似然估计，无偏估计，矩估计等）

出发，根据 $\hat{\theta}$ 的分布进行改造而得.

问：若步骤（3）中a和b的解不唯一，该如何处理？

1.根据Neyman原则：求a和b使得区间长度最短；

2.如果最优解不存在或比较复杂，为应用的方便，常取a和b满足：

$$P(G(X_1,\ldots,X_n;\theta)\le a)=P(G(X_1,\ldots,X_n;\theta)\ge b)=\alpha/2$$

■ 正态总体下常见枢轴量：

(1) 单个正态总体$N(\mu,\sigma^2)$情形

μ的枢轴量：$\begin{cases} \dfrac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{\sigma} \sim N(0,1), & （\sigma^2\text{已知}） \\ \dfrac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{S} \sim t(n-1), & （\sigma^2\text{未知}） \end{cases}$

σ^2的枢轴量：$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$, （$\mu$未知）

(2)二个正态总体$N(\mu_1,\sigma_1{}^2),N(\mu_2,\sigma_2{}^2)$情形

$\mu_1-\mu_2$的枢轴量：

$$\begin{cases} \dfrac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1{}^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2{}^2}{n_2}}} \sim N(0,1), & （\sigma_1^2,\sigma_2^2\text{已知}） \\ \dfrac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}} \sim t(n_1+n_2-2) & (\sigma_1{}^2=\sigma_2{}^2\text{未知}) \end{cases}$$

$$\text{其中}S_w^2=\frac{\left(n_1-1\right)S_1^2+\left(n_2-1\right)S_2^2}{n_1+n_2-2},S_w=\sqrt{S_w^2}$$

(2)二个正态总体$N(\mu_1,\sigma_1{}^2),N(\mu_2,\sigma_2{}^2)$情形

$\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$的枢轴量：$\dfrac{S_1^2}{S_2^2}\Big/\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\sim F(n_1-1,n_2-1)$

（μ_1，μ_2未知)

例1：设某产品的寿命X服从均值为$\dfrac{1}{\lambda}$的指数分布，

$X_1,\cdots,X_7$是来自该总体的样本，若已经证明，

$$2\lambda\sum_{i=1}^{7}X_i\sim\chi^2(14).$$

并已知$\overline{x}=125$小时，试利用枢轴量法推断该产品平均寿命的范围（置信水平为0.9）.

解：由于$2\lambda\sum_{i=1}^{7}X_i \sim \chi^2$（14），分布已知且与参数$\lambda$无关，

因此可取枢轴量为 $2\lambda\sum_{i=1}^{7}X_i$，且有

$$P\left\{\chi^2_{0.95}(14) < 2\lambda\sum_{i=1}^{7}X_i < \chi^2_{0.05}(14)\right\}=0.9$$

即 $$P\left\{\frac{2\sum_{i=1}^{7}X_i}{\chi^2_{0.05}(14)} < \frac{1}{\lambda} < \frac{2\sum_{i=1}^{7}X_i}{\chi^2_{0.95}(14)}\right\}=0.9$$

因此该产品平均寿命的置信水平为0.9的置信区间为

$$\left(\frac{2\sum_{i=1}^{7} X_i}{\chi^2_{0.05}(14)}, \quad \frac{2\sum_{i=1}^{7} X_i}{\chi^2_{0.95}(14)} \right)$$

由Excel或查表得 $\chi^2_{0.05}(14) = 23.685$，$\chi^2_{0.95}(14) = 6.571$

并将样本资料$\bar{x} = 125$代入上式得

（73.89， 266.32)

即有90%的把握认为该产品平均寿命

在73.89小时到266.32小时之间.

7.4 正态总体参数的区间估计

(一) 单个正态总体情形

设总体$X \sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$，$X_1, X_2, \cdots, X_n$为来自$X$的样本，

$\overline{X}$和S^2分别为样本均值和方差,置信度为$1-\alpha$

1. 均值μ的置信区间

(1) σ^2已知时

$\bar{X}$是μ的无偏估计,且有$\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$,分布完全已知,

因此可取枢轴量为$G(X_1,\cdots,X_n)=\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$.

设常数$a<b$且满足: $P\left\{a<\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}<b\right\}=1-\alpha$

即等价于 $P\left\{\bar{X}-\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}b<\mu<\bar{X}-\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}a\right\}=1-\alpha$

此时区间的长度为 $L=(b-a)\sigma/\sqrt{n}$

根据正态分布的对称性知，取

$$a=-b=-z_{\alpha/2}$$

时，区间的长度达到最短.

从而μ的同等置信区间为：

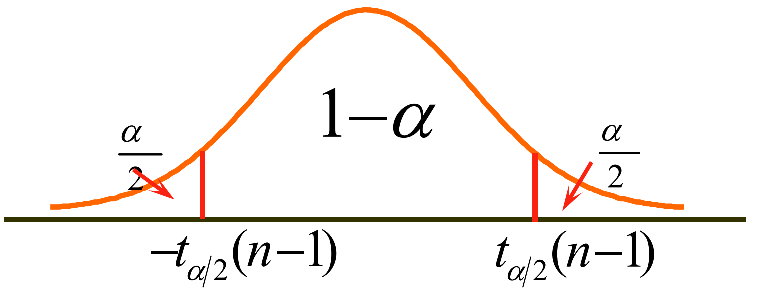
$$\left(\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}, \overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}\right)$$

思考题：

均值μ的置信度$1-\alpha$的置信下限是什么呢？

答案: $\bar{X}-\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha}$

(2) σ^2未知时



取枢轴量为$\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$,

有$P\left\{-t_{\alpha/2}(n-1) < \dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} < t_{\alpha/2}(n-1)\right\} = 1-\alpha$

即$P\left\{\bar{X} - \dfrac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1) < \mu < \bar{X} + \dfrac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1)\right\} = 1-\alpha$

置信区间为：

$$\left(\bar{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1),\bar{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)\right)$$

例1：设某种植物的高度$X\left(cm\right)$服从正态分布$N\left(\mu,\sigma^2\right)$，随机选取36棵，其平均高度为$15cm$. 就以下两种情形，求$\mu$的95%双侧置信区间：

$\left(1\right)\sigma^2=16;$ $\left(2\right)\sigma^2$未知，$S^2=16;$

解：(1) $n=36, \bar{X}=15, \sigma=4$

由 $P\left\{\bar{X}-1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}<\mu<\bar{X}+1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right\}=0.95$

得：$\bar{X}-1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=15-\frac{1.96\times 4}{\sqrt{36}}=13.693$

$$\bar{X}+1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=15+\frac{1.96\times 4}{\sqrt{36}}=16.307$$

μ的置信区间为$(13.693, 16.307)$

$(2)\ n=36, \bar{X}=15, S^2=16$

由$P\left\{\bar{X}-t_{0.025}(35)\times\frac{S}{\sqrt{n}}\le\mu\le\bar{X}+t_{0.025}(35)\times\frac{S}{\sqrt{n}}\right\}=1-0.05$

查表得：$t_{0.025}(35)=2.0301$

又：$15-\frac{2.0301\times 4}{6}=13.647,\qquad 15+\frac{2.0301\times 4}{6}=16.353$

μ的置信区间为$(13.647,16.353)$

? 求置信度为99%时(1)(2)两种情况下μ的置信区间

答案：(1) $(13.333, 16.667)$

(2) $(13.184, 16.815)$

比较(1)(2)两种情形下μ的置信区间:

σ^2已知, $\sigma^2=16$, 置信区间: $(13.693, 16.307)$

区间短

σ^2未知, $S^2=16$, 置信区间: $(13.647, 16.353)$

区间长

但第二种情形更实用, 因为多数时候, σ^2未知

用t分布求μ的置信区间只依赖于样本数据及统计量$\overline{X}, S, n$

- 例 某制药商对某样品进行分析, 以确定该样品中活性成分的含量. 通常情况下，化学分析并不是完全精确的, 对同一个样本进行重复的测量会得到不同结果, 重复测量的结果通常近似服从正态分布. 根据经验, 活性成分含量的标准差为0.0068(克/升),假设化学分析过程没有系统偏差, 设活性成分的含量的真值为 μ.

  对样品进行三次重复测量结果如下:

  0.8403 0.8333 0.8477.

求真值 μ 的置信水平为95% 的置信区间.

解 该样本三次测量的平均值为$\bar{x}=0.8404.$

由置信水平0.95，利Excel或查正态分布表得

$z_{0.025}$=1. 96, 所以μ的置信水平为0. 95的置信区间为

$$\left(\bar{x}-z_{0.025}\sigma/\sqrt{n},\quad \bar{x}+z_{0.025}\sigma/\sqrt{n}\right)$$

=（0. 8327， 0. 8481）

- 在Excel中的实现

利用AVERAGE函数求均值， CONFIDENCE函数求方差已知时的误差限.

本例的计算步骤如下：

（1） 将样本观察值输入Excel 表中，设数据区域为A1到A3；

（2）下拉菜单“插入”选项卡=>单击“函数”=>选择“统计” =>选”AVERAGE”;

（3） 在“Number1”文本框中输入“A1:A3” =>点击Enter键，即显示均值为“0.840433”；

（4）重新下拉菜单“插入”选项卡=>单击“函数”=>选择“统计” =>选”CONFIDENCE”;

（5）在“Alpha”文本框中输入“0.05”，“Standard-dev”文本框中输入“0.0068”,“Size”文本框中输入“3”,=>点击Enter键，即显示误差限为“0.007695”;

（6）μ 的置信水平为0.95的置信区间为

（0.840433-0.007695， 0.840433+0.007695）

=（0.8327， 0.8481）

（3）成对数据情形

例：为考察某种降压药的降压效果，测试了n个高血压病人在服药前后的血压（收缩压）分别为

$$(X_1, Y_1), \cdots, (X_n, Y_n).$$

由于个人体质的差异，$X_1, \cdots, X_n$不能看成来自同一个正态总体的样本，即$X_1, \cdots, X_n$是相互独立但不同分布的样本，$Y_1, \cdots, Y_n$也是. 另外对同一个个体，X_i和Y_i也是不独立的.

作差值 $D_i = X_i - Y_i$，$i=1,\cdots,n$，则取消了个体的差异，仅与降压药的作用有关，因此可以将$D_1,\cdots,D_n$看成来自同一正态总体$N(\mu_d,\sigma_d^2)$的样本，且相互独立。

μ_d的置信水平为$1-\alpha$的置信区间为

$$(\bar{D} \pm S_D t_{\alpha/2}(n-1)/\sqrt{n}),$$

其中 $\bar{D} = \bar{X} - \bar{Y}$，$S_D = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(D_i - \bar{D})^2.$

例2：A、B两种小麦品种分别播种在面积相等的8块试验田中，每块田地A、B品种各播种一半，收获后8块试验田的产量如下:

品种A: 140, 137, 136, 140, 145,148, 140, 135

品种B: 135, 118, 115, 140, 128, 131, 130, 115

假设两品种产量的差服从正态分布，求两品种平均产量差的置信区间（$\alpha = 0.05$）.

解： 这是成对数据问题，由已知计算得

$$d_i = x_i - y_i : 5 \quad 19 \quad 21 \quad 0 \quad 17 \quad 17 \quad 10 \quad 20$$

$\bar{d} = 13.625$，$s_d = 7.745$，查表得$t_{0.025}(7) = 2.365$，

代入公式$(\bar{D} \pm S_D t_{\alpha/2}(n-1)/\sqrt{n})$中，

得所求置信区间为

（7.149， 20.101）。

在Excel中的实现

本例的计算步骤如下：

（1） 将上述 d_i 数据值输入**Excel** 表中，设数据区域为 **A1**到**A8**；

（2）在**Excel** 表中选择任一空白单元格

=>输入**"=AVERAGE（A1:A8)";**

=>点击**Enter**键，即显示均值 $\bar{d}$为“**13.625**”；

（3）在Excel 表中选择任一空白单元格 =>输入“=STDEV（A1:A8)” =>点击Enter键，即显示样本标准差 s_d 为“7.744814”；

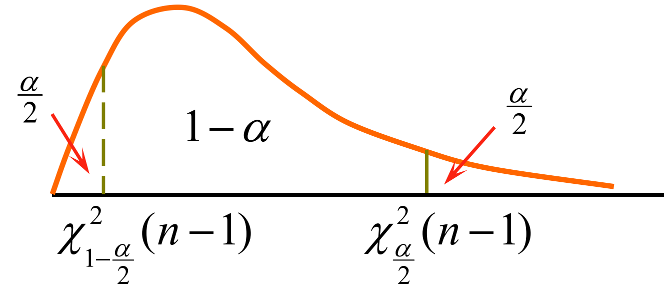
（4）在Excel 表中选择任一空白单元格 =>输入“=TINV（0.05,7）”; =>点击Enter键，即显 示分位数 $t_{0.025}(7)$ 为“2.364624”;

（5）代入公式 $\bar{D} \pm S_D t_{\alpha/2}(n-1)/\sqrt{n}$

得所求区间估计为（7.149,20.101）

2. 方差σ^2的置信区间（设μ未知）

取枢轴量为$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$



有$P\left\{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) < \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi^2_{\alpha/2}(n-1)\right\} = 1-\alpha$

即$P\left\{\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)} < \sigma^2 < \dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right\} = 1-\alpha$

置信区间为：$\left(\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}, \dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right)$

注：上述所求的区间估计不是最优解.

思考题：

方差σ^2的置信度$1-\alpha$的置信上限是什么？

答案：$$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)}.$$

例3：一个园艺科学家正在培养一个新品种的苹果,这种苹果除了口感好和颜色鲜艳以外,另一个重要特征是单个重量差异不大。为了评估新苹果,她随机挑选了25个测试重量$\left(单位：克\right)$,其样本方差为$S^2 = 4.25$.试求σ^2的置信度为95%和的99%的置信区间。

解：置信度为95%时

$$P\left\{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{0.025}}\le\sigma^2\le\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-0.025}}\right\}=1-0.05$$

查表得：$\chi^2_{0.025}(24)=39.4, \chi^2_{0.975}(24)=12.4;$

又：$\dfrac{(25-1)\times 4.25}{39.4}=2.59, \dfrac{(25-1)\times 4.25}{12.4}=8.23$

σ^2的置信区间为$(2.59, 8.23)$

置信度为99%时，$\chi^2_{0.005}(24)=45.6, \chi^2_{0.995}(24)=9.89$,

$$\frac{(25-1)\times 4.25}{45.6}=2.24, \qquad \frac{(25-1)\times 4.25}{9.89}=10.31$$

σ^2的置信区间为$(2.24, 10.31)$

(二) 两正态总体情形

$X_1, X_2, \cdots, X_{n_1}$来自$N\left(\mu_1, \sigma_1^2\right)$, $Y_1, Y_2, \cdots, Y_{n_2}$来自$N\left(\mu_2, \sigma_2^2\right)$,

$\bar{X} = \frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1} X_i, \bar{Y} = \frac{1}{n_2}\sum_{j=1}^{n_2} Y_j$, S_1^2和S_2^2分别为第一,二个

总体的样本方差,置信度为$1-\alpha$.

1. $\mu_1-\mu_2$的置信区间

(1) σ_1^2,σ_2^2已知时

由 $\bar{X}-\bar{Y}\sim N\left(\mu_1-\mu_2,\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$知，

可取枢轴量为 $$\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}\sim N(0,1)$$

置信区间为： $$\left((\bar{X}-\bar{Y})\pm z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right)$$

(2) $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2,\sigma^2$未知

此时由定理6.3.4知，$\dfrac{\left(\bar{X}-\bar{Y}\right)-\left(\mu_1-\mu_2\right)}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}\sim t\left(n_1+n_2-2\right)$

置信区间为： $\left(\left(\bar{X}-\bar{Y}\right)\pm t_{\frac{\alpha}{2}}\left(n_1+n_2-2\right)S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}\right)$

其中 $S_w^2=\dfrac{\left(n_1-1\right)S_1^2+\left(n_2-1\right)S_2^2}{n_1+n_2-2},S_w=\sqrt{S_w^2}$

(3) $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$且未知

当样本量n_1和n_2都充分大时(一般要>50),根据中心极限定理得,

$$\frac{\left(\bar{X}-\bar{Y}\right)-\left(\mu_1-\mu_2\right)}{\sqrt{\dfrac{S_1^2}{n_1}+\dfrac{S_2^2}{n_2}}} \overset{\text{近似}}{\sim} N(0,1).$$

则$\mu_1-\mu_2$的近似置信区间为: $\left(\left(\bar{X}-\bar{Y}\right) \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\dfrac{S_1^2}{n_1}+\dfrac{S_2^2}{n_2}}\right)$

对于有限小样本，可以证明

$$\frac{\left(\bar{X}-\bar{Y}\right)-\left(\mu_1-\mu_2\right)}{\sqrt{\dfrac{S_1^2}{n_1}+\dfrac{S_2^2}{n_2}}} \overset{\text{近似}}{\sim} t(k),$$

其中$k \approx \min(n_1-1,\ n_2-1)$

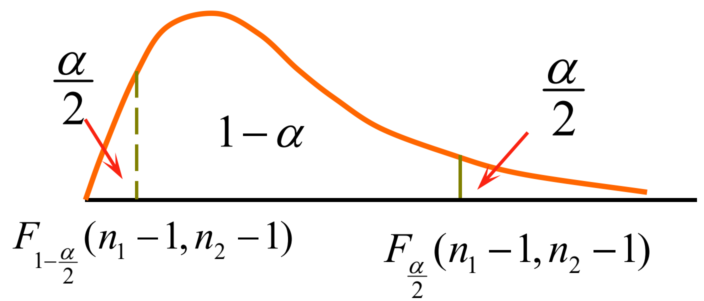
更精确些的 $k=\dfrac{\left(\dfrac{s_1^2}{n_1}+\dfrac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\dfrac{(s_1^2)^2}{n_1^2(n_1-1)}+\dfrac{s_2^2}{n_2^2(n_2-1)}}$

s_1^2, s_2^2是S_1^2, S_2^2的样本观察值.

则$\mu_1-\mu_2$的近似置信区间为：

$$\left((\bar{X}-\bar{Y})\pm t_{\frac{\alpha}{2}}(k)\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}\right)$$

2. $\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$的置信区间 （设$\mu_1,\mu_2$未知）



由 $\dfrac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2}\sim F(n_1-1,n_2-1)$

有 $P\left\{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)<\dfrac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2}<F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)\right\}=1-\alpha$

即 $P\left\{\dfrac{S_1^2}{S_2^2}\dfrac{1}{F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)}<\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}<\dfrac{S_1^2}{S_2^2}\dfrac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)}\right\}=1-\alpha$

置信区间为：

$$\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{\frac{\alpha}{2}}\left(n_1-1,n_2-1\right)},\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}\left(n_1-1,n_2-1\right)}\right)$$

- 例4：两台机床生产同一个型号的滚珠，从甲机床生产的滚珠中抽取8个，从乙机床生产的滚珠中抽取9个，测得这些滚珠得直径(毫米)如下:

甲机床 15.0 14.8 15.2 15.4 14.9 15.1 15.2 14.8

乙机床 15.2 15.0 14.8 15.1 14.6 14.8 15.1 14.5 15.0

设两机床生产的滚珠直径分别为X,Y,且

$$X \sim N\left(\mu_1,\sigma_1^2\right),Y \sim N\left(\mu_2,\sigma_2^2\right)$$

(1) $\sigma_1 = 0.18, \sigma_2 = 0.24$, 求$\mu_1 - \mu_2$的置信度为0.90的置信区间；

(2) 若$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$未知，求$\mu_1 - \mu_2$的置信度为0.90的置信区间；

(3) 若$\sigma_1 \neq \sigma_2$且未知， 求$\mu_1 - \mu_2$的置信度为0.90的置信区间；

(4) 若μ_1, μ_2未知，求$\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$的置信度为0.90的置信区间.

解：$n_1=8,\ \bar{x}=15.05,\ S_1^2=0.0457;$

$n_2=9,\ \bar{y}=14.9,\ S_2^2=0.0575$

(1) 当$\sigma_1=0.18, \sigma_2=0.24$时, 求$\mu_1-\mu_2$的置信度为0.90的置信区间为：

$$\left(\bar{X}-\bar{Y}\pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right)$$

查表得：$z_{0.05}=1.645$,从而所求区间为$(-0.018, 0.318)$

(2) 当$\sigma_1=\sigma_2=\sigma$未知时，

$\mu_1-\mu_2$的置信度为0.90的置信区间为：

$$\left(\bar{X}-\bar{Y}\pm t_{\alpha/2}\left(n_1+n_2-2\right)S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\right)$$

$$t_{0.05}\left(15\right)=1.7531, S_w=0.228, \sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}=0.486$$

从而所求区间为$\left(-0.044, 0.344\right)$

(3) 当$\sigma_1 \neq \sigma_2$且未知时，

$\mu_1-\mu_2$的置信度为0.90的置信区间为：

$$\left(\left(\bar{X}-\bar{Y}\right) \pm t_{\frac{\alpha}{2}}(k)\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}\right)$$

其中自由度k取$\min(n_1-1, n_2-1)=7$，

查表得$t_{0.05}(7)=1.895$

从而所求区间为$(-0.058, 0.358)$

注：由(1)、（2）和（3）求得的三个区间都包含了0点，说明两机床生产的滚珠的平均直径没有显著差异。

(4) 当μ_1,μ_2未知时，$\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$的置信度为0.90的置信区间为：

$$\left\{\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{\alpha/2}\left(n_1-1,n_2-1\right)},\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{1-\alpha/2}\left(n_1-1,n_2-1\right)}\right\}$$

由$F_{0.05}\left(7,8\right)=3.50, F_{0.95}\left(7,8\right)=\dfrac{1}{F_{0.05}\left(8,7\right)}=\dfrac{1}{3.73}=0.268$

得$\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$的置信度为0.90的置信区间为$\left(0.227,2.965\right)$

注：因所求置信区间包含1，可以认为两个总体的方差之间没有显著差异。

正态总体均值、方差的置信区间与单侧置信限 (置信度 $1-\alpha$)

	待估参数	其他参数	W 的 分 布	置信区间	单侧置信限
一个正态总体	μ	σ^2已知	$Z=\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$	$\left(\bar{X}\pm\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}\right)$	$\mu_U=\bar{X}+\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}z_\alpha$ $\mu_L=\bar{X}-\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}z_\alpha$
	μ	σ^2未知	$t=\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$	$\left(\bar{X}\pm\dfrac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)\right)$	$\mu_U=\bar{X}+\dfrac{S}{\sqrt{n}}t_\alpha(n-1)$ $\mu_L=\bar{X}-\dfrac{S}{\sqrt{n}}t_\alpha(n-1)$
	σ^2	μ未知	$\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$	$\left(\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)},\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right)$	$\sigma_U^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)}$ $\sigma_L^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_\alpha(n-1)}$
两个正态总体	$\mu_1-\mu_2$	σ_1^2,σ_2^2 已知	$Z=\dfrac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}\sim N(0,1)$	$\left(\bar{X}-\bar{Y}\pm z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}\right)$	$(\mu_1-\mu_2)_U=\bar{X}-\bar{Y}+z_\alpha\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}$ $(\mu_1-\mu_2)_L=\bar{X}-\bar{Y}-z_\alpha\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}$
	$\mu_1-\mu_2$	$\sigma_1^2=\sigma_2^2$ $=\sigma^2$未知	$t=\dfrac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)$	$\left(\bar{X}-\bar{Y}\pm t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}\right)$	$(\mu_1-\mu_2)_U=\bar{X}-\bar{Y}+t_\alpha(n_1+n_2-2)S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}$ $(\mu_1-\mu_2)_L=\bar{X}-\bar{Y}-t_\alpha(n_1+n_2-2)S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}$
	$\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$	μ_1,μ_2 未知	$F=\dfrac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2}\sim F(n_1-1,n_2-1)$	$\left(\dfrac{S_1^2}{S_2^2}\dfrac{1}{F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)},\dfrac{S_1^2}{S_2^2}\dfrac{1}{F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)}\right)$	$\left(\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\right)_U=\dfrac{S_1^2}{S_2^2}\dfrac{1}{F_{1-\alpha}(n_1-1,n_2-1)}$ $\left(\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\right)_L=\dfrac{S_1^2}{S_2^2}\dfrac{1}{F_\alpha(n_1-1,n_2-1)}$

7.5非正态总体参数的区间估计

（一）0-1分布参数的区间估计

设总体$X \sim B(1;p)$, 参数p未知，$X_1,\cdots,X_n$是来自该总体的样本。当样本容量$n > 50$时，

由利用中心极限定理得$\dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i - np}{\sqrt{np(1-p)}}$近似服从$N(0,1)$分布。

则有：$P\left\{-z_{\alpha/2} < \dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i - np}{\sqrt{np(1-p)}} < z_{\alpha/2}\right\} \approx 1-\alpha$

即$P\left\{(n+z_{\alpha/2}^2)p^2-(2n\overline{X}+z_{\alpha/2}^2)p+n\overline{X}^2<0\right\}\approx 1-\alpha$

令$a=n+z_{\alpha/2}^2$， $b=-(2n\overline{X}+z_{\alpha/2}^2)$， $c=n\overline{X}^2$

得参数p的置信水平为$1-\alpha$的近似置信区间为

$$\left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\quad \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)=:(p_1,\quad p_2)$$

（二）其他总体均值的区间估计

设总体$X \sim F(x)$,均值为μ,方差为σ^2，样本$X_1,\cdots,\ X_n$

当n充分大（一般n>50）时，由中心极限定理知,

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sigma / \sqrt{n}} \overset{\text{近似}}{\sim} N(0,1)。$$

均值μ的置信水平为$1-\alpha$的近似置信区间为

$$\left(\bar{X} - z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n},\quad \bar{X} + z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n} \right)$$

当σ^2未知时，以样本方差S^2代入，

得μ的置信水平为$1-\alpha$的近似置信区间为

$$\left(\bar{X}-z_{\alpha/2}\mathrm{S}/\sqrt{n},\quad \bar{X}+z_{\alpha/2}\mathrm{S}/\sqrt{n}\right)$$