复变函数与拉普拉斯变换

第二章 解析函数

第2.1节　复变函数

一　复变函数的概念

称复数域中的集合 D 到复数域中的映射 f 为定义在 D 上的**复变函数**，记为 $w = f(z), z \in D.$

D ...定义域，　$f(D)$ ...值域。

若 w 唯一，称 f 为**单值函数**，

例　$w = |z|, z \in C.$

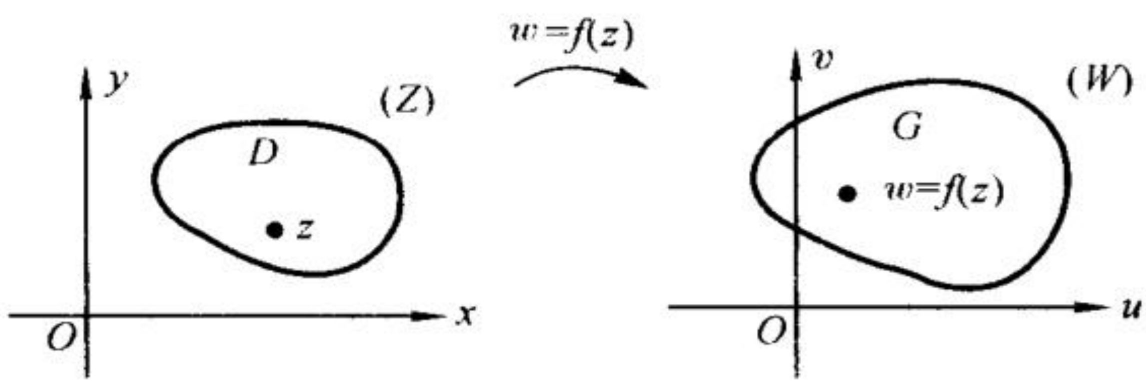
若 w不唯一，称 f 为**多值函数**，

例　$w = Arg\, z, \quad z \in C \setminus \{0\}.$

记 $z = x + iy$ ， $w = u + iv$ ，则

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y).$$

复变函数无法在三维空间中用图表示，常视其为两复平面之间的**变换**或**映射**。



映射关系

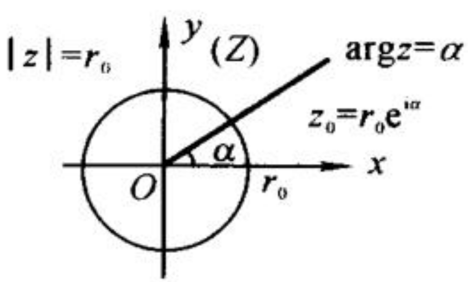
例2. 设函数 $w = z^2$， 问它把下列 Z 平面上的点集分别映射成 W 平面上的什么点集?

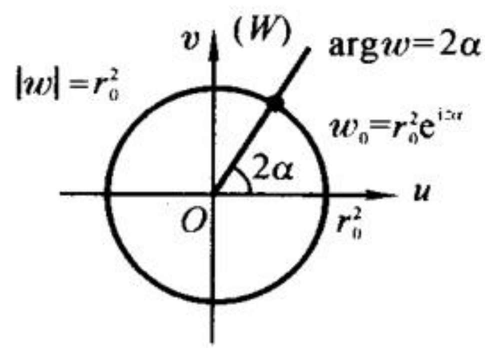
（1）圆 $|z| < r_0$.

解: $|w| = |z|^2 < r_0^2$ …… 圆

（2）射线 $\arg z = \alpha \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

解: $\arg w = 2\arg z = 2\alpha \in (-\pi, \pi]$ ……射线





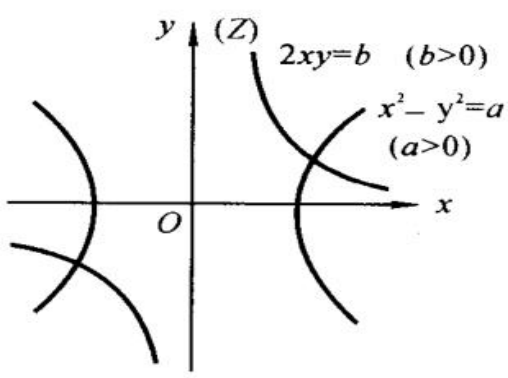
（3）双曲线 $x^2 - y^2 = a, 2xy = b,\ a,b$ 实数

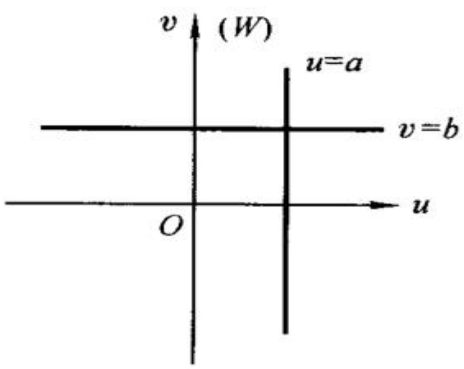
解：记 $z = x + iy$

$$w = u + iv = z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$$

$\therefore\ x^2 - y^2 = a \rightarrow u = a$ ……直线

$2xy = b \rightarrow v = b$ ……直线

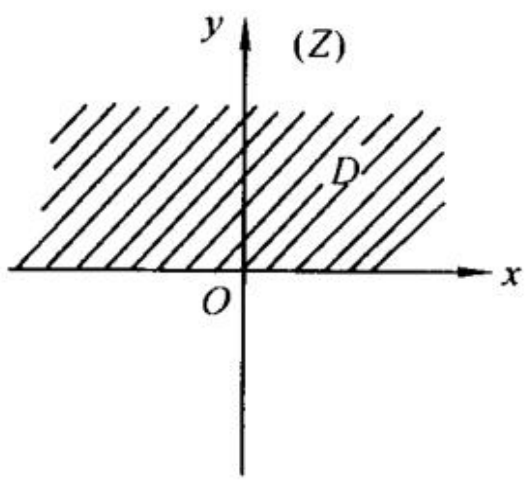


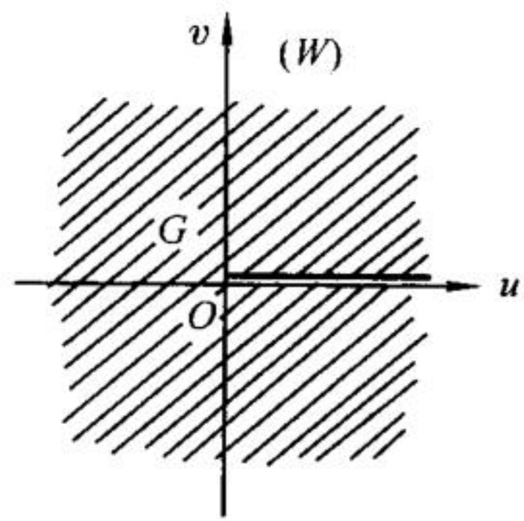


（4）上半平面 $D=\{z=x+iy \mid y>0\}$

$(D=\{z=re^{i\theta} \mid 0<\theta<\pi\})$

解： $D \to G=\{w=\rho e^{i\varphi} \mid 0<\varphi=2\theta<2\pi\}$





二 极限与连续

极限的定义：设函数 $w=f(z)$ 在 z_0 点的某去心邻域内有定义，若有一数 A，对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得当 $0<|z-z_0|<\delta$ 时，

$$|f(z)-A|<\varepsilon$$

成立，则称 A 为函数 $w=f(z)$ 当 z 趋向于 z_0 时的极限，记为：

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=A.$$

极限的性质

定理 如果极限存在，则必唯一。

定理 $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = A \Leftrightarrow f(z) = A + \alpha(z)$,

其中 $\lim\limits_{z \to z_0} \alpha(z) = 0$.

定理 $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = A \Leftrightarrow$

$$\lim_{x \to x_0, y \to y_0} u(x, y) = u_0, \quad \lim_{x \to x_0, y \to y_0} v(x, y) = v_0,$$

其中：$z_0 = x_0 + iy_0$, $\quad A = u_0 + iv_0$,

$f(z) = u + iv$.

定理 设 $\lim_{z \to z_0} f(z) = A$, $\lim_{z \to z_0} g(z) = B$, 则:

(1) $\lim_{z \to z_0} [f(z) \pm g(z)] = \lim_{z \to z_0} f(z) \pm \lim_{z \to z_0} g(z) = A \pm B;$

(2) $\lim_{z \to z_0} [f(z) g(z)] = \lim_{z \to z_0} f(z) \cdot \lim_{z \to z_0} g(z) = AB;$

(3) $\lim_{z \to z_0} [f(z) / g(z)] = \lim_{z \to z_0} f(z) / \lim_{z \to z_0} g(z) = \dfrac{A}{B} \quad (B \neq 0);$

(4) 若 $\lim_{w \to A} g(w) = c$, 则 $\lim_{z \to z_0} g(f(z)) = c$.

连续的定义：

若 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$，则称函数 $f(z)$ 在 z_0点连续。

即：$\forall\, \varepsilon>0,$ 存在 $\delta>0$，使得当 $|z-z_0|<\delta$ 时，

$|f(z)-f(z_0)|<\varepsilon$ 成立，则称 $f(z)$ 在 z_0 点连续。

若函数 $f(z)$ 在 D上每一点连续，则称 $f(z)$ 在 D 上是连续函数。

连续函数的性质

定理　函数$f(z)=u+iv$ 在 $z_0=x_0+iy_0$ 点连续的**充分必要条件**是二元函数 $u(x,y),v(x,y)$ 在 (x_0,y_0)点连续。

定理　两连续函数的和差积商（分母非零）也连续。

定理 当 $f(z)$ 在有界闭区域 $\overline{D}$ 上连续，它的模 $|f(z)|$ 在 $\overline{D}$ 上也连续，有界，取到最大最小值。

（开区域不成立，例：$f(z)=\dfrac{1}{z-1}$ 在 $|z|<1$ 上连续，但无界。）

例 （1）设 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A$ 存在，则 $f(z)$ 在 z_0 的某邻域内有界；（2）若 $f(z)$ 在 z_0 点连续且不为零， 则 $f(z)$ 在 z_0 的某邻域内不等于零。

证：(1) $\forall \varepsilon>0, \exists\, \delta>0$, 当 $0<|z-z_0|<\delta$ 时，有

$$|f(z)|<A+|f(z)-A|<|A|+\varepsilon.$$

(2) $|f(z)|$ 在 z_0 点也连续，由二元连续函数的保号性, $|f(z)|>0$ 在 z_0 的某邻域成立，结论成立。

第2.2节　解析函数

一. 复变函数的导数

定义：设 D 是函数 $w=f(z)$ 的定义域， $z_0\in D$ ，

若极限 $$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

存在，则称 $f(z)$ 在 z_0 点可导，此极限值称为 $f(z)$ 在 z_0 点的导数，记为

$$f'(z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

或：$$f'(z_0)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}$$

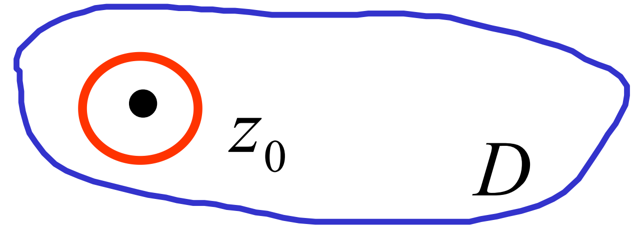
改写为：$f(z_0+\Delta z)-f(z_0)=f'(z_0)\Delta z+\alpha(\Delta z)\Delta z$

其中：　$\alpha(\Delta z)\to 0$，当 $\Delta z\to 0$ 时。

可导一定连续，反之不成立。

例：$f(z)=|z|$ 在 $z=0$ 处连续，但不可导。

二. 解析函数



定义：如果函数 $f(z)$ 在 z_0 的某邻域内每点都可导，则称 $f(z)$ 在 z_0 点解析。若 $f(z)$ 在区域 D 内每点都解析，则称 $f(z)$ 为 D 内的解析函数。

显然，由于 D 是开集， $f(z)$在 D内每点解析等价于 $f(z)$在 D内每点可导。整个复平面上解析的函数称为整函数。

若函数在某点解析，则函数在该点可导，反之不成立（见例5）。不解析的点称为奇点。

求导四则运算法则

定理 设函数 $f(z), g(z)$ 在区域 D 内解析，则其加减乘除在区域 D 内解析，且

（1） $[af(z)+bg(z)]' = af'(z)+bg'(z)$

(2) $[f(z)g(z)]' = f'(z)g(z)+f(z)g'(z)$

(3) $\left[\dfrac{f(z)}{g(z)}\right]' = \dfrac{f'(z)g(z)-f(z)g'(z)}{g^2(z)} \quad (g(z)\neq 0).$

求导链式法则

定理 设函数 $\zeta=g(z)$ 在 D 内解析，$w=f(\zeta)$ 在 G 内解析，且 $g(D)\subseteq G$，则复合函数 $w=f[g(z)]$ 在 D 内解析，且

$$\frac{d}{dz}f[g(z)]=f'[g(z)]g'(z).$$

例1. 证明 $f(z)=z^n\ (n\ge 1)$ 在复平面 C 上处处可导，且 $f'(z)=nz^{n-1}\ (n\ge 1)$.

证：

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{(z+\Delta z)^n-z^n}{\Delta z}$$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}(nz^{n-1}+C_n^2 z^{n-2}\Delta z+\cdots+C_n^n\Delta z^{n-1})$$

$$=nz^{n-1}.$$

例3. 函数 $f(z)=\dfrac{1}{(z-2)(z-3)}$ 在 $C\setminus\{2,3\}$ 上解析。

例2. 讨论 $f(z)=\bar{z}$ 的解析性。

解. $\forall z\in C$, $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{\Delta w}{\Delta z}=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{\overline{z+\Delta z}-\bar{z}}{\Delta z}=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}$

沿 $\Delta y=k\Delta x$，令 $\Delta z\to 0$,则

$$\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}=\frac{\Delta x-i\Delta y}{\Delta x+i\Delta y}=\frac{1-ik}{1+ik}$$

k 不同，极限值不同，所以 $f(z)$ 在 C 上处处不可导，处处不解析。

第2.3节 解析函数的充分必要条件

函数可导的充分必要条件

定理 设 D 是函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 的 定义域，$z=x+iy$ 是 D 内一点，则 $f(z)$ 在 z 处可导的充分必要条件是：$u(x,y)$，$v(x,y)$ 在 (x,y) 处可微且满足柯西-黎曼方程（简称 C-R 条件）

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{\partial u}{\partial y} \end{cases}$$

此时 $f'(z)=\dfrac{\partial u}{\partial x}+i\dfrac{\partial v}{\partial x}.$

证明：必要性. 设 $f'(z)=a+ib$

$$\Delta f(z)=f(z+\Delta z)-f(z)$$
$$=f'(z)\Delta z+\alpha(\Delta z)\Delta z$$
$$=(a+ib)(\Delta x+i\Delta y)+(\alpha_1+i\alpha_2)(\Delta x+i\Delta y)$$
$$=a\Delta x-b\Delta y+\alpha_1\Delta x-\alpha_2\Delta y$$
$$+i(b\Delta x+a\Delta y+\alpha_2\Delta x+\alpha_1\Delta y)$$

其中：$\alpha(\Delta z)=\alpha_1+\alpha_2 i\to 0\quad(\Delta z\to 0)$， 因此

$$\begin{cases}\Delta u=a\Delta x-b\Delta y+\alpha_1\Delta x-\alpha_2\Delta y\\[2ex] \Delta v=b\Delta x+a\Delta y+\alpha_2\Delta x+\alpha_1\Delta y\end{cases}\qquad (o(\rho),(\rho\to 0))$$

由可微的定义得：$u(x,y)$，$v(x,y)$ 在 (x,y) 可微，且

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = a \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -b \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial x} = b \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} = a \end{cases}$$

$$\therefore \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

且 $f'(z) = a + ib = \dfrac{\partial u}{\partial x} + i\dfrac{\partial v}{\partial x}$.

充分性. 反推，类似，略.

解析函数的充分必要条件

定理. 函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在区域 D 内解析的充分必要条件：$u(x,y),v(x,y)$ 在 D 内可微且满足 **C-R**条件 .

推论： 若 $f'(z)\equiv 0 \ in\ D$，则 $f(z)\equiv$常数 $in\ D.$

例2. 讨论 $f(z)=\bar{z}$ 的解析性。

解： $f(z)=\bar{z}=x-iy$，

$$\therefore\ u=x, v=-y.$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=1\neq\frac{\partial v}{\partial y}=-1,$$

C-R 条件不满足，所以 $f(z)$ 在复平面上处处不可导，处处不解析。

例5. 讨论函数 $w=|z|^2$ 的解析性.

解： $w=|z|^2=x^2+y^2,$

$$\therefore \quad u=x^2+y^2, v\equiv 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x,\ \frac{\partial u}{\partial y}=2y,\quad \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=0.$$

易见，C-R条件仅在 $(0,0)$ 处满足。所以 $w=|z|^2$ 在 $z=0$ 处可导，当 $z\neq 0$ 时不可导；在 复平面上处处不解析。

第2.4节 解析函数与调和函数的关系

定义：如果实函数 $U(x,y)$ 在区域 D 内有二阶连续偏导数且满足拉普拉斯方程

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0, in\, D$$

则称 $U(x,y)$为 D 内的调和函数。

注：拉普拉斯方程也称为调和方程。

定理 若 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 是区域 D 内的解析函数，则 $u(x,y),v(x,y)$ 在 D 内均为调和函数。

证：因为 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在区域 D 内解析，则 $u(x,y),v(x,y)$ 在 D 内可微（任意阶可微，见下章）且满足柯西-黎曼方程：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x}=-\dfrac{\partial u}{\partial y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 v}{\partial y\partial x} \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\dfrac{\partial^2 v}{\partial x\partial y} \end{cases}$$

两式相加得 $\Delta u=0.$ 类似可证 $\Delta v=0.$

注：由上述定理知，解析函数的实部和虚部均为调和函数，且满足柯西－黎曼方程，称它们为一对共轭调和函数。当区域是单连通区域时，调和函数的共轭调和函数一定存在，对一般区域结论不成立。

例7. 已知调和函数 $u=y^3-3x^2y$, 求其共轭调和函数 v，并求以 u 为实部且满足 $f(0)=i$ 的解析函数。

解：由**C-R** 条件: $\dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{\partial u}{\partial x}=-6xy\cdots\cdots(1)$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}=3x^2-3y^2\cdots\cdots(2)$$

将(1) 对 y 积分得:

$$v(x,y)=\int(-6xy)\,dy=-3xy^2+\varphi(x).$$

代入(2)得：$\varphi'(x) = 3x^2 \Rightarrow \varphi(x) = x^3 + C$

$$\therefore v(x, y) = -3xy^2 + x^3 + C.$$

$$f(z) = y^3 - 3x^2 y + i(-3xy^2 + x^3 + C).$$

由条件 $f(0) = i$ 得：$iC = i \Rightarrow C = 1$

$$\therefore \quad f(z) = y^3 - 3x^2 y + i(-3xy^2 + x^3 + 1).$$

$$= iz^3 + i.$$

第2.5节　初等解析函数

一　指数函数

定义：设 $z=x+iy$，称函数 $e^z=e^x(\cos y+i\sin y)$ 为指数函数。

易证 $u=e^x\cos y$，$v=e^x\sin y$ 在全复平面上可微且满足 C-R条件，所以 e^z 在复平面上解析(整函数)且 $(e^z)'=e^z$.

指数函数的性质：

(1) $e^{z+w}=e^{z}\cdot e^{w}$，特别 $(e^{z})^{n}=e^{nz}$.

(2) $e^{z}\neq 0$，$\forall z\in C$. 当 $z=x$ 为实数时，

$$e^{x}>1\ (x>0);\ \ e^{x}<1\ (x<0).$$

(3) e^{z} 以 $T=2n\pi i$ ($n\neq 0$ 整数)为周期，即 $e^{z+T}=e^{z}$.

(4) $e^{\frac{\pi}{2}i}=i$, $e^{\pi i}=-1$, $e^{\frac{3\pi}{2}i}=-i$, $e^{2\pi i}=1$.

(5) $e^{z}=1\Leftrightarrow z=2n\pi i$.

例. 求 $\exp(e^z)$ 的实部与虚部.

解: $$\exp(e^z)=\exp(e^x\cos y+ie^x\sin y)$$

$$=e^{e^x\cos y}(\cos(e^x\sin y)+i\sin(e^x\sin y)).$$

$$\therefore\quad \mathrm{Re}(\exp(e^z))=e^{e^x\cos y}\cdot\cos(e^x\sin y)$$

$$\mathrm{Im}(\exp(e^z))=e^{e^x\cos y}\cdot\sin(e^x\sin y).$$

二　对数函数

定义：对数函数是指数函数的反函数，即 满足方程 $e^w = z \quad (z \neq 0)$ 的反函数 $w = f(z)$ 称为**对数函数**，记为 $w = Ln\, z,\ z \in C \setminus \{0\}$.

设 $w = u + iv,\ z = |z|\, e^{iArg\ z}$ 则：

$$e^{u+iv} = |z|\, e^{iArg\ z} \Rightarrow e^u = |z|, v = Arg\ z$$

$$\therefore\ w = \ln|z| + i\,(\arg\ z + 2k\pi)$$

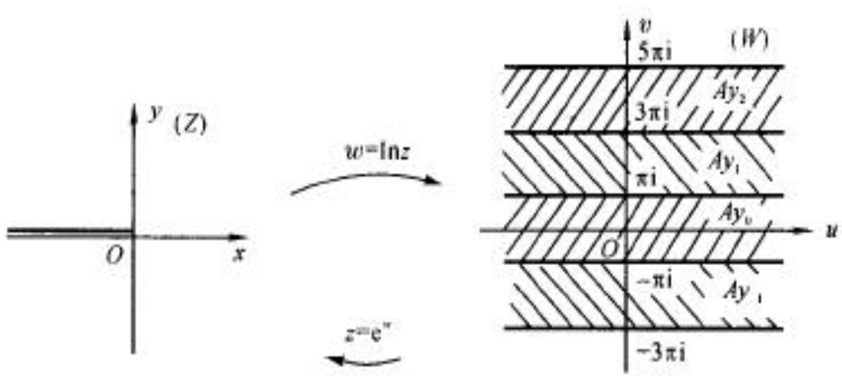
即 $$Ln\ z = \ln|z| + i\,(\arg\ z + 2k\pi) \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots).$$

对数函数 $Ln\,z$ 是多值函数，有无穷个分支， $k=0$ 时的分支称为对数函数的主支，记

$$\ln z = \ln|z| + i\arg z$$ ......对数函数主值

$$C\setminus\{0\} \xleftrightarrow{\text{一对一}} \{u+iv \mid u\in R, -\pi < v \le \pi\}.$$

显然，$Ln\ z = \ln z + i2k\pi \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots).$



例. $Ln(1+i)$

$$= \ln|1+i| + i\,Arg(1+i)$$

$$= \ln\sqrt{2} + i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots).$$

$Ln(-1)$

$$= \ln|(-1)| + i\,Arg(-1)$$

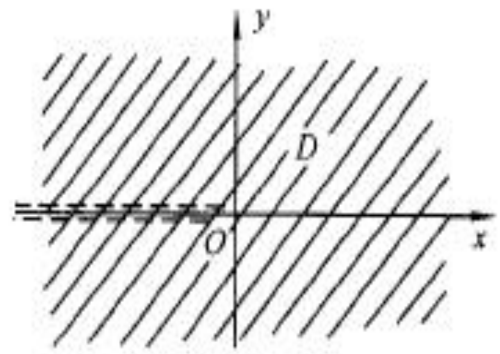
$$= i(\pi + 2k\pi) \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots).$$

$$\ln[(-1-i)(1-i)] = \ln(-2) = \ln 2 + i\pi$$

对数函数基本性质

$$Ln\ (z_1 z_2) = Ln\ z_1 + Ln\ z_2$$

$$Ln(z_1/z_2) = Ln z_1 - Ln z_2 \quad (z_2 \neq 0)$$



ln z 的解析区域

对数函数的解析性

易见 $\ln|z|$ 在 $C\setminus\{0\}$ 上处处连续， $\arg z$ 在负实轴上不连续 ($\lim\limits_{y\to0^+}\arg z = \pi$, $\lim\limits_{y\to0^-}\arg z = -\pi$), 因此 $\ln z = \ln|z| + i\arg z$ 在 $C\setminus\{x+iy \mid y=0, x\le 0\}$ 上连续。

定理：对数主支 $\ln z = \ln|z| + i\arg z$

在区域 $D = C\setminus\{x+iy \mid y=0, x\le 0\}$ 上解析，且

$$\boxed{(\ln\ z)' = 1/z.}$$

对数函数求导公式推导

$$(e^{\ln z})' = (z)'$$

$$\Rightarrow e^{\ln z} \cdot (\ln z)' = 1$$

$$\Rightarrow z(\ln z)' = 1$$

$$\Rightarrow (\ln z)' = 1/z.$$

三 幂函数

定义： 设 $z(z \neq 0), \mu$ 为复数，称函数 $z^{\mu} = e^{\mu Lnz}$ 为**幂函数**。

例： $i^{i} = e^{iLni} = e^{i(\ln|i| + i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi))} = e^{-(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)}$

$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots).$

$1^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2}Ln1} = e^{\sqrt{2}(\ln|1| + i(0 + 2k\pi))} = e^{2k\pi\sqrt{2}i}$

$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots).$

注：设 $n\ (n \geq 1)$ 为正整数，当 $\mu = n$ 时，幂函数为单值函数，即 n **次方幂**，$z^n = z \cdot z \cdots z$；

当 $\mu = \dfrac{1}{n}$ 时，幂函数为 n **次方根**：

$$z^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n} Lnz}$$

$$= e^{\frac{1}{n} \ln |z|} \cdot e^{\frac{\arg z + 2k\pi}{n} i}$$

$$= |z|^{\frac{1}{n}} \cdot e^{\frac{\arg z + 2k\pi}{n} i} \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots n-1).$$

$$= \sqrt[n]{z}.$$

幂函数求导公式：$(z^{\mu})' = \mu z^{\mu-1}$

证：$(z^{\mu})' = (e^{\mu Lnz})'$

$$= e^{\mu Lnz} \cdot \frac{\mu}{z}$$

$$= \mu z^{\mu-1},$$

$$\forall z \in C \setminus \{x+iy \mid y=0, x \le 0\}.$$

四　三角函数和双曲函数

定义： 对任意复数 z，定义三角函数和双曲函数：

正弦函数

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

余弦函数

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

双曲正弦

$$sh\ z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}$$

双曲余弦

$$ch\ z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}$$

基本性质

	周期性	奇偶性	导数公式（整函数）
$\sin z$	2π	奇	$(\sin z)' = \cos z$
$\cos z$	2π	偶	$(\cos z)' = -\sin z$
$sh\ z$	$2\pi i$	奇	$(shz)' = chz$
$ch\ z$	$2\pi i$	偶	$(chz)' = shz$

在实数域内成立的恒等式 在复数域也成立，如：

$$\sin 2z = 2\sin z\cos z \qquad \sin^2 z + \cos^2 z = 1$$

$$\sin(iz) = ishz \qquad \cos(iz) = chz$$

$$ch(iz) = \cos z \qquad sh(iz) = i\sin z.$$

$\sin z, \cos z$ 在复平面上不是有界函数（与实函数不同）

证：$|\sin iy| = \dfrac{|e^{-y} - e^{y}|}{2} \to +\infty \quad (y \to \infty)$，

类似，可证 $\cos z$ 也无界。

例. 解方程 $\sin(iz) = i.$

解: $$\frac{e^{i\cdot iz} - e^{-i\cdot iz}}{2i} = i$$

$$\Rightarrow e^{2z} - 2e^{z} - 1 = 0$$

$$\Rightarrow e^{z} = 1 \pm \sqrt{2}.$$

$$\therefore \quad z^{(1)} = Ln(1 + \sqrt{2}) = \ln(1 + \sqrt{2}) + 2k\pi i$$

$$z^{(2)} = Ln(1 - \sqrt{2}) = \ln(\sqrt{2} - 1) + (2k + 1)\pi i$$

$$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots).$$

补充题

求解方程 $\tan z = 2i$，写出解的实部与虚部。

解：方程即是 $$\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{e^{iz}+e^{-iz}}=-2 \Rightarrow \frac{e^{2iz}-1}{e^{2iz}+1}=-2 \Rightarrow e^{2iz}-1=-2(e^{2iz}+1)$$

$$\Rightarrow 3e^{2iz}=-1 \qquad 2iz=-\ln 3+i\pi(1+2k)$$

所以 $\operatorname{Re} z=\pi(k+0.5)$ $\qquad \operatorname{Im} z=\ln\sqrt{3}$ $\qquad k=0,\pm1,\pm2,\cdots$

(4) 已知 $f(z)=u+iv$ 是整函数，且 $u=e^x(x\sin y+\sin y+y\cos y)$，求 $f(z)$ 的表达式（用 z 表示，其中 $z=x+iy$）。

解：$u_x=e^x(x\sin y+2\sin y+y\cos y)=v_y \Rightarrow v=e^x(-x\cos y-\cos y+y\sin y)+\phi(x)$

$$v_x=e^x(-x\cos y-2\cos y+y\sin y)+\phi'(x)=-u_y=-e^x(x\cos y+2\cos y-y\sin y)$$

$$\Rightarrow \phi'=0 \Rightarrow \phi=c$$

所以 $f(z)=e^x(x\sin y+\sin y+y\cos y)+ie^x(-x\cos y-\cos y+y\sin y)+ic=-ie^z(z+1-c)$

指出 $f(z)=1-y^2+i(2xy-y^2)$ 在何处可导，何处解析，在可导处求出其导数。

解：$u=1-y^2, v=2xy-y^2$ 处处可微　　$u_x=0=v_y=2x-2y \Rightarrow x=y$

$$-u_y=2y=v_x=2y$$

所以 $f(z)$ 在 $x=y$ 处可导，处处不解析，

在 $x=y$ 处　$f'(z)=u_x+iv_x=i2y=i2x$

(1) 给出过原点且与直线 $z=(1+i)t+2 \quad (t\in R)$ 垂直的直线的表达式。

解：所求直线的方向为 $(1+i)e^{i\pi/2}=i(1+i)=-1+i$

直线的表达式为 $z=(-1+i)t \quad t\in R$

(2) 求解方程 $e^{2z}-e^{z}+1-i=0$，写出解的实部与虚部。

解：即 $(e^{z}-1-i)(e^{z}+i)=0 \qquad e^{z}=1+i, \quad e^{z}=-i$

根为 $z_k=\mathrm{Ln}(1+i) \quad \mathrm{Re}\, z_k=\mathrm{Ln}\sqrt{2}$,$\mathrm{Im}\, z_k=\pi/4+2k\pi \quad k=0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots$

及 $z_k=\mathrm{Ln}(-i) \qquad \mathrm{Re}\, z_k=0$,$\mathrm{Im}\, z_k=-\pi/2+2k\pi \quad k=0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots$

六、（6分）设函数 f 在区域 D 内解析，且 $\arg f(z)$ 为常数，证明：f 在 D 内为常数。

证明：记 $\arg f(z)=\alpha$，考虑 $g(z)=e^{-i\alpha}f(z)$，则 $\arg g(z)=0 \Rightarrow g(z)\in R$ 且 $g(z)>0$

所以 $\operatorname{Im} g(z)=0$ 由 $C-R$ 方程得 $\operatorname{Re} g(z)=c$

所以 $g(z)$ 为常数 即 $f(z)$ 为常数。