数学建模期末资料整理

虚假的数模竞赛（全国大学生数学建模竞赛）：离现实生活很远，没有指导作用；参与人数少

真正的数模竞赛（自主选课）：有实际应用，参与人数多

一、排课就是组合优化，决策每个学期选哪些课程

目标函数：尽可能选一些评分高的老师的课程

硬性约束条件：
(a) 每学期的学分不超过上限
(b) 6 年下来学的课修的课程满足培养方案要求
(c) 期末考试时间无法冲突
(d) 两门都无法免听的课不许冲突选课
(e) 有些课程只在秋冬或者春夏开课

软约束条件
(a) 尽可能少地冲突选课
(b) 部分课程有修读顺序，例如：fds->ads；微甲上->微甲下
(c) 修读课程的时间尽可能地和培养方案上面相同
(d) 前三个学年每个学期修读的学分尽可能相近，不能一个学期修很多，另一个学期修很少

选课是不完全博弈，每门课程的容量有限，你需要根据其它人的选课来调整自己的选课。

三、选课是在线问题，你不知道以后几个学期的排课情况，你每学期的选课也有三轮机会，你可以根据你前几轮的选课情况调整你之后几轮的选课

目录

1 数学规划

1.1 设施选址问题

来源：课程 slides 思考题

有n个居民小区需提供某项服务，有m处地点可用于开设服务点。在地点 i 开设服务点所需开设费用为$f_i, i = 1, \cdots, m$。设置在地点 i 的服务点为小区j提供服务所需的运营费用为$c_{ij}, i = 1, \cdots, m, j = 1, \cdots, n$。选择若干地点开设服务点，并确定每个服务点的服务对象，使每个小区至少有一个服务点为其提供服务，且总费用最小

推广：

- (不相容约束)某些小区对不能同时由某一服务点提供服务
- (双指派约束)每个小区由两个服务点提供服务，且某些小区对需有一公共服务点

1.1.1 *Answer*

决策变量：

$$
\begin{aligned}
y_i &= \begin{cases} 1 \text{ 若在地点 } i \text{ 开设服务点} \\ 0 \text{ 其他} \end{cases} \\
x_{ij} &= \begin{cases} 1 \text{ 若在 } i \text{ 处开设的服务点为小区 } j \\ 0 \text{ 其他} \end{cases}
\end{aligned} \tag{1}
$$

约束条件：

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geq 1, j = 1, \dots, n \\
&x_{ij} \leq y_i, j = 1, \dots, n, i = 1, \dots, m
\end{aligned} \tag{2}
$$

目标函数：

$$
\min \sum_{i=1}^{m} f_i y_i + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \tag{3}
$$

不相容约束：

$$
x_{ij} + x_{ik} \leq 1 \quad \forall (j,k) \in E, \forall i = 1, \dots, m \tag{4}
$$

双指派约束：

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 2, j = 1, \dots, n \\
&x_{ij} + x_{lj} \geq x_{ik} + x_{lk} - 1 \quad \forall (j,k) \in E, \forall i, l = 1, \dots, n
\end{aligned} \tag{5}
$$

comment from ct

设施选址问题 1 确实比较绕，可以这样想，对于小区 k，当 i, l 刚好取到其两个为小区 k 服务的服务点时，该不等式变为了 $x_{ij} + x_{lj} \geq 1$，也就是小区 i 至少和 k 有一个公共服务点。如果 i, l 没有取到 k 的两个服务点，则对左侧的变量没有任何约束。

1.2 时间分配问题

来源：课程 slides 思考题

有T天时间可用于安排复习n门课程，每天只能复习一门课程，每门课程至少复习一天。用t天时间复习第j门课程可使该门课程提高p_{jt}分，如何制定复习计划可使所有课程提高的总分尽可能大。

课程	1 天	2 天	3 天	4 天
E	3	5	6	7
C	5	5	6	9
M	2	4	7	8
P	6	7	9	9

1.2.1 *Answer*

决策变量：感觉这个问题对期末补天有指导作用 –xks

$$
x_{jt} = \begin{cases} 1 \text{ 第 } j \text{ 门课程复习 } t \text{ 天}, \\ 0 \text{ 其他}, \end{cases} \quad j = 1, \cdots, n, t = 1, \cdots, T \tag{6}
$$

约束条件：

$$
\begin{aligned}
&\sum_{t=1}^{T} x_{jt} = 1 \\
&\sum_{j=1}^{n} \sum_{t=1}^{T} t x_{jt} \leq T
\end{aligned} \tag{7}
$$

目标函数：

$$
\max \sum_{j=1}^{n} \sum_{t=1}^{T} p_{jt} x_{jt} \tag{8}
$$

Common Fallacy： ~~决策变量是第j门复习x_j天~~ 效果-时间p_{jt}不是线性函数

1.3 现有 n 个物资储备

现有n个物资储备仓库需分别建于n个地点。已知在地点j建造仓库i 所需费用为c_{ij},从地点j到地点ι的 单 位 运 输 费 用 为 b_{jl},从仓库i 到仓库k 的运输量为$a_{ik}, i, j, k, l = 1, \dots, n$。现欲给出一建设方案，使得总费用最少。试写出该问题的数学规划。

1.3.1 *Answer form ct*

定义决策变量 $x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{仓库 } i \text{ 建于地点 } j \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$，数学规划如下：

$$
\begin{aligned}
&\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} a_{ik} b_{jl} x_{ij} x_{kl} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \\
&s.t. \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, j = 1, \dots, n \\
&\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, i = 1, \dots, n \\
&x_{ij} \in \{0, 1\}
\end{aligned} \tag{9}
$$

为了进一步线性化，引入辅助变量 $z_{i,j,k,l} = x_{ij} x_{kl}$，约束为：

$$
\begin{cases} x_{ij} \geq z_{i,j,k,l} \\ x_{kl} \geq z_{i,j,k,l} \\ z_{i,j,k,l} + 1 \geq x_{ij} + x_{kl} \end{cases} \tag{10}
$$

重写线性规划：

$$
\begin{aligned}
\min \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} a_{ik}b_{jl}z_{i,j,k,l} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} & \\
s.t. \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad & \forall j \in [1,n] \\
\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad & \forall i \in [1,n] \\
x_{ij}, x_{kl} \ge z_{i,j,k,l} \ge x_{ij} + x_{kl} - 1 \qquad & \forall i,j,k,l \in [1,n] \\
x_{ij} \in \{0,1\} \qquad & \forall i,j \in [1,n]
\end{aligned}
\tag{11}
$$

1.4 消防员问题

一、

消防员问题：给定图 $G=(V,E)$，第 0 时段开始时某点 v_0 处发生火灾。此后每一个时段开始时，火灾会蔓延到已起火点的所有相邻点处。每个时段内消防员可以选择图上一点进行防火处理，经过防火处理的点不会被蔓延。现要求一防火方案，使得充分长时间后未过火的点数量最多。

（1）考虑如下性质：每一时段进行防火的点至少与一个当前时段开始时已起火的点相邻。甲同学认为最优方案必定具有该性质。乙同学认为具有该性质的方案的最坏情况比可能很差。试评价两位同学的说法。

（2）设

$$b_{vt} = \begin{cases} 1 & t \text{ 时段开始时 } v \text{ 点已起火} \\ 0 & \text{elsewise} \end{cases}$$

$$d_{vt} = \begin{cases} 1 & t \text{ 时段开始时 } v \text{ 点已防火} \\ 0 & \text{elsewise} \end{cases}$$

写出求解该问题的数学规划。

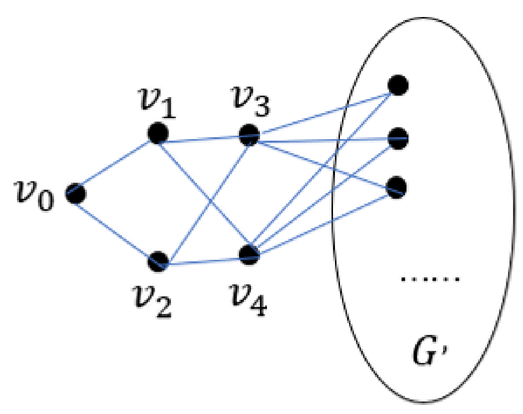
图 1　22 年组合优化期末题目

1.4.1 *Answer from cc98*

（1）

甲同学的说法错误，乙同学的说法正确。

考虑如下实例：



其中 G' 是包含 M 个点的子图，内部无边，且每点与 v_3, v_4 相连。

易见最优解是在第 0 时段和第 1 时段分别防火 v_3 和 v_4，此时共有 $M+2$ 个点不会起火。

若依据相邻点性质，第 0 时段防火 v_1 和 v_2 中任一点，则无法阻止火势蔓延到 G' 中，至多有 3 个点不会起火。

故具有该性质的算法的在该实例下的比至少为 $\frac{M+2}{3}$，无界。

（2）

设 $|V|=n$。

$$
\begin{aligned}
& \max \sum_{i=0}^{n-1} d(v_i, n) \\
\text{s.t.} & \begin{cases} b(v_0,0)=1,\ b(v_1,0)=\cdots=b(v_{n-1},0)=0 \\ d(v_i,0)=0, \forall i \end{cases} \\
& \begin{cases} b(v_i,t)+d(v_i,t) \ge b(v_j,t-1), \text{ 若} v_j \text{与} v_i \text{相邻} \\ b(v_i,t) \le \sum_{v_j\text{与}v_i\text{相邻}} b(v_j,t-1) \end{cases} \\
& \begin{cases} b(v_i,t)+d(v_i,t) \le 1 \\ \sum_{i=0}^{n-1} d(v_i,t) = \min\{t, n-\sum_{i=0}^{n-1} b(v_i,t)\} \end{cases} \\
& b(v_i,t), d(v_i,t) \in \{0,1\} \\
& i,j = 0,1,\ldots,n-1 \\
& t = 0,1,\ldots,n
\end{aligned}
$$

图 2　第一个大括号初始状态，第二个大括号传火，第三个大括号防火

1.5 一单行道上有 n （第二问）

一单行道上有n个车位，按车行方向分别记为 1，2,⋯,n。每个车位有空闲和占用两种状态，车位i空闲的概率为$\alpha_i > 0$,且各车位是否空闲相互独立。车辆行进时至多只能看到车行前方最近的一个车位的状态。若在车位 i 上停车的效用为$U_i > 0$,未在n个车位上停车的效用为 0。一车从该道路起点出发沿道路单向行驶，试寻找一停车策略，使期望效用达到最大。

(2)令$x_i = V_i - V_{i+1}, i = 1, \cdots, n$,试写出求解该问题的以$x_i$为决策变量的数学规划。

1.5.1 *Answer from zsh & xks*

这道题用动态规划解决比较直接，但是该怎么用数学规划解决呢? 幸运的是第二问已经设好了变量 $x_i = V_i - V_{i+1}$，核心在于怎么翻译 $\max\{\alpha_i U_i + (1-\alpha_i)V_{i+1}, V_{i+1}\}$ 这个最大值。

x_i 为第 i 个车位的最大期望效用增幅，有 $\sum_{j=i}^{n} x_i = V_i$. 可以先限制 V_i 的两个下界，再将目标设为最小化 V_i

$$
\begin{aligned}
& \min V_1 \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} x_j \\
& s.t. V_i \ge V_{i+1} \Rightarrow x_i \ge 0 \\
& V_i \ge \alpha_i U_i + (1-\alpha_i)V_{i+1} \Rightarrow x_i \ge \alpha_i \left(U_i - \sum_{j=i+1}^{n} x_j \right)
\end{aligned}
\tag{12}
$$

（注意不是 max，$x_i = V_{i+1} - V_i$ 这个定义中已经体现了最大，我们要做的是把最大值卡紧）

1.6 最小顶点着色问题

设图$G=(V,E)$，图的最小顶点着色问题是将每个顶点染上一种颜色，使得有边关联的顶点不着同一种颜色，且所用的颜色最少，写出该问题的数学规划。

1.6.1 *Answer from lyw*

设有n个顶点$v_1, v_2, \ldots, v_n$,用c_{ij}表示顶点v_i, v_j是否相连，若相连则为 1，否则为 0，规定$c_{ii}=0$。

易知该问题有一个上界 n(即每个顶点的颜色不同)，我们先取n种颜色，决策变量

$$x_{ik} = \begin{cases} 1 & v_i \text{ 用第 } k \text{ 种颜色着色} \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \tag{13}$$

引入赋值变量y_k表示第k种颜色是否被使用过，则我们可以写出数学规划

$$\min \sum_{k=1}^{n} y_k \tag{14}$$

约束条件

$$x_{ik} \le y_k \quad \forall i,k \tag{15}$$

$$\sum_{k=1}^{n} x_{ik} = 1 \quad \forall i \tag{16}$$

$$x_{ik} + x_{jk} + c_{ij} \le 2 \quad \forall i,j,k \tag{17}$$

其中第一个是 y 的自然要求，第二个是保证每个点有且仅有一种颜色，第三个是保证相邻的点颜色不同

1.7 怎么建模二进制变量的布尔运算?

Boolean	Linear
$z = x\ OR\ y$	$x \le z, y \le z, z \le x+y$
$z = x\ AND\ y$	$x \ge z, y \ge z, z+1 \ge x+y$
$z = NOT\ x$	$z = 1-x$
$x \Rightarrow y$	$x \le y$
At most one of $z_1, \ldots, z_n$ holds (SOS1, set-packing)	$\sum_i z_i \le 1$
Exactly one of $z_1, \ldots, z_n$ holds (set-partitioning)	$\sum_i z_i = 1$
At least one of $z_1, \ldots, z_n$ holds (set-covering)	$\sum_i z_i \ge 1$
At most k of $z_1, \ldots, z_n$ holds (cardinality)	$\sum_i z_i \le k$

表 2　Boolean Operators[1]

2 动态规划

2.1 滑雪服问题

某滑雪场提供 m 套滑雪服，尺寸为$l_1, \cdots, l_m$,现有 $n(n \le m)$ 位顾客来租赁滑雪服，他们的身高分别为$h_1, \cdots, h_n$，现求一种合适的分配策略，使顾客分配到的滑雪服和他们身高之差的绝对值之和最小。

(1)证明：存在一个最优解，使得身高最高的顾客分配到的滑雪服是所有被分配的滑雪服中尺寸最大的。

(2)写出求解该问题的动态规划，并估计其时间复杂度。

2.1.1 *Answer from lyw*

(1)是显然的，我们先找到一个最优解，然后如果身高的最高顾客穿的衣服尺寸不是最大的，我们交换身高最高顾客和拿了最大尺寸衣服的顾客的衣服，我们证明交换之后的解不可能劣于原先解即可。

(2)我们先将衣服从小到大排序，顾客身高也进行从小到大排序。利用(1)中的结论，我们可以假定身高最高的顾客拿了最大尺码的衣服，令 $P(i,j)$ 为前i套滑雪服给前j名客户时的最小身高差之和。则有

$$P(i,j) = \min \left\{ \underbrace{P(i-1,j)}_{\text{不使用第}j\text{件衣服}}, \underbrace{|l_i - h_j| + P(i-1,j-1)}_{\text{第}i\text{件衣服给第}j\text{位顾客}} \right\} \tag{18}$$

另外，关于该规划的初始条件可以简单地认为是当衣服数量和人数量相同时，从小到大分配就行了。

2.2 麦子收集

来源：课程 slides 思考题

n行m列的棋盘, 在棋盘的部分格子中各放有一颗麦子-机器人从棋盘左上角的格子出发收集麦子。机器人只能从当前所在格子向下或向右移动一格，到达放有麦子的格子后，即能收集该格子中的麦子。如何使机器人到达棋盘右下角的格子时，收集的麦子数量尽可能多。

2.2.1 *Answer*

最基本的动态规划。记第i行第j列格子为(i,j), $c_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{第 } i \text{ 行第 } j \text{ 列格子中有麦子} \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$

定义$P(i,j)$为机器人到达(i,j)格时可收集到的麦子数量的最大值

$$P(i,j) = \max\{P(i-1,j), P(i,j-1)\} + c_{ij} \quad i = 1, \cdots, n, j = 1, \cdots, m \tag{19}$$

Basecase:

$$
\begin{aligned}
P(0,j) &= 0, \quad j = 0, \cdots, m, \\
P(i,0) &= 0, \quad i = 1, \cdots, n
\end{aligned}
\tag{20}
$$

2.3 现在有两个字母表

现在有两个字母表 Σ 上的字符串 X, Y，通过在字符串中插入空格将它们变为长度相等的字符串 X', Y'，并比较 X' 和 Y' 中位于相同位置的字符。若相同位置两个字符不同，则称为一类误差；若两个字符一个为空格，另一个为非空格，则称为二类误差。若两个字符串所有位置出现的一类误差与二类误差总数分别为 n_1 和 n_2，两个字符串的 Needleman-Wunsch 误差定义为 $\alpha n_1 + \beta n_2$。例如对 AGGGCT 和 AGGCA 两个字符串，若在第二个字符串中插入空格使之成为 AGG-CA，Needleman-Wunsch 误差为 $\alpha + \beta$。序列比对问题（sequence alignment）希望给出一种空格插入方案，使两个字符串的 Needleman-Wunsch 误差最小。试给出求解该问题的动态规划，并估计其时间复杂度。

2.3.1 *Answer from xks*

来自讨论题（二）. Leetcode 72. 编辑距离相当于这道题取$\alpha = \beta = 1$. 等价是因为删除X的字符相当于在Y中加字符。这道题使用动态规划求解，记$X[:i]$与$Y[:j]$的误差为$P[i,j]$，可以写出下面的状态转移方程:

$$P[i,j] = \min \begin{cases} p[i-1,j-1] + \delta_{ij}\alpha \\ p[i,j-1] + \beta \\ p[i-1,j] + \beta \end{cases} \quad \text{where } \delta_{ij} = \begin{cases} 1, X[i-1] \ne Y[j-1] \\ 0, X[i-1] = Y[j-1] \end{cases} \quad \forall i \in [1,N_1), j \in [1,N_2) \tag{21}$$

注意上式中$X[:i]$指的是$[0,i)$区间，$X[i-1]$及$Y[i-1]$是为了 0-based 索引调整，初值 $P[i,0] = i\beta$，$P[0,j] = j\beta$.

```python
def minDistance(word1: str, word2: str) -> int:
    alpha = beta = 1
    n1, n2 = len(word1), len(word2)
    if n1 * n2 == 0: # not necessary, but saves time
        return n1 + n2
    p = [[0 for j in range(n2 + 1)] for i in range(n1 + 1)]

    for i in range(n1 + 1):
        p[i][0] = i
    for j in range(n2 + 1):
        p[0][j] = j

    for k in range(2, n1 + n2 + 1):
        # for i in range(max(1, k - n2), min(n1, k - 1) + 1):
```

[1]https://docs.mosek.com/modeling-cookbook/mio.html#boolean-operators

```
    #    j = k - i
    # alternative code 👆
    for i in range(1, n1 + 1):
        j = k - i
        if not (1 <= j <= n2):
            continue

        p[i][j] = min(
            p[i - 1][j - 1] + alpha * (word1[i - 1] != word2[j - 1]),
            p[i - 1][j] + beta,
            p[i][j - 1] + beta,
        )

return p[n1][n2]
```

2.4 一单行道上有n （第一问）

一单行道上有n 个车位，按车行方向分别记为 1，2,$\cdots$, n。每个车位有空闲和占用两种状态，车位i空闲的概率为$\alpha_i > 0$,且各车位是否空闲相互独立。车辆行进时至多只能看到车行前方最近的一个车位的状态。若在车位 i 上停车的效用为$U_i > 0$,未在n个车位上停车的效用为 0。一车从该道路起点出发沿道路单向行驶，试寻找一停车策略，使期望效用达到最大。

(1)记$V_i, i = 1, \cdots, n+1$为驶过车位$i-1$后(车位 0 为道路起点)开始计划停车所可能获得的最大期望效用，试写出V_i所满足的递推关系；

2.4.1 *Answer from zsh*

容易发现这个寻找最优停车策略的问题是可以用动态规划解决，因为每一步决策V_i都基于最优子问题V_{i+1}.

Base Case: $V_{n+1} = 0$（开过头了） *Goal:* V_1.（原始问题）

在每一步，考虑“尝试停车”和“看也不看直接往前开”**两种情况**，注意停车效用应取期望值，可写出递推公式：

$$V_i = \max\{\alpha_i U_i + (1-\alpha_i)V_{i+1}, V_{i+1}\} \tag{22}$$

2.5 一篇英语文章有 n

一篇英语文章有 n 个 单 词 , 第 $i, i = 1, \cdots, n$ 个单词的字符数为l_i。纸张一行可容纳M 个字符或空格，同一个单词不能跨两行排版, 同一行两个相邻单词之间恰有一个空格, 每行第一个单词从该行开始处排版。为使版面美观, 要求行尾空格和最小, 这里行尾空格和是指除最后一行外, 各行最后一个单词结束至该行末尾处的空格数量之和。记C_k为将第k个至第n个单词按上述要求排版产生的行尾空格和的最小值。试写出求解该问题的动态规划。

2.5.1 *Answer from ct*

首先定义，如果某一行的开头是第 k 个单词，那么结尾最大是第 d_k 个单词，**注意单词之间有空格而行末可以没有空格**：

$$d_k = \underset{j}{\operatorname{argmax}} \left\{ \sum_{i=k}^{j} (l_i + 1) - 1 \le M \right\} \tag{23}$$

假设第 k 个单词所在行结尾是第 i 个单词，那么：

$$C_k = \min_{k \le i \le d_k} \left\{ M - \left(\sum_{j=k}^{i} (l_i + 1) - 1 \right) + C_{i+1} \right\} \tag{24}$$

comment from zsh

base case: $\sum_{i=k}^{n} (l_i + 1) - 1 \le M \Rightarrow C_k = 0$ (Stronger). Or $C_n = 0$ (Weaker).

Goal: C_1

2.6 找矿藏

n 处地点中有一处矿藏，已知矿藏在第 j 点的概率为 π_j，其中$\sum \pi_j = 1$。现有 $m \ge \frac{n}{2}$支考察队，每个考察队每天可探查一处地点，探查地点j 的费用为c_j 。若考察队在第一天就找到矿藏，则第二天无需探查。现求一个探查方案，要求两天内找到矿藏，并使得找到时总成本尽可能小。 (1) 用 $v(i, b, s)$表示示当总成本恰为 b 时，派遣 s 支考察队在前 i 个地点中任意地点探查后，未找到矿藏的概率的最小值。写出$v(i, b, s)$的递推式。

2.6.1 *Answer from lyw*

与背包问题相似

$$v(i, b, s) = \begin{cases} v(i-1, b, s) & c_i > b \\ \min\{v(i-1, b, s), v(i-1, b-c_i, s-1) - \pi_i\} & c_i \le b \end{cases} \tag{25}$$

comment from zsh

未找到矿藏的概率可以理解为：所有尚未考察的地点中，真正有矿藏的概率的总和。所以如果选择派遣考察队去挖i点，那么后面真正有矿藏的概率就要$-\pi_i$.

3 图论模型

3.1 一博物馆的展览区

五、一博物馆的展览区为由若干面直形墙围成的封闭区域。为保护藏品安全，在区域内的若干个固定位置放置监控仪。监控仪不可移动，可观测到任意方向、任意距离的藏品情况，但无法观测到墙壁后区域的情况。现希望用最少的监控仪监控博物馆的全部区域。

（1）试给出上述问题的一种数学描述；

（2）记$G(M)$为博物馆 M 所需监控仪数量的最小值，

$$g(n)=\max\{G(M) | M \text{ 由 } n \text{ 面墙围成}\}。$$

试求 $g(3), g(4), g(5)$ 的值，并证明 $g(6) > g(5)$；

（3）求 $g(n)$。（提示：任意平面多边形可用不相交的对角线划分为若干个三角形，这一过程称为三角剖分（triangulation），三角剖分后得到的平面图的色数必为 3。）

图 3　来源：23 级讨论题（一）

3.1.1 *Answer from zsh*

3.1.1.1 (1)

数学描述： 给定平面多边形 S， 求点集 $P \subseteq S.\ s.t.\ \forall s \in S, \exists p \in P$, 线段 $ps \subseteq S$， 且 $|p|$ 最小

3.1.1.2 (2)

画图易得， $g(3) = 1, g(4) = 1, g(5) = 1$. 已知有一种构造（两个相邻内角均大于 180° 的六边形），能够做到要放两个监控，于是$g(6) \ge 2$,故$g(6) > g(5)$.

3.1.1.3 (3)

显然，$g(n) \ge \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$（考虑和上一问一样的构造方法）. 由于三角剖分后得到平面图色数必为3，故必然有一种颜色着色的点$\le \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$，只要把监控放在此种颜色上即可。故$g(n) = \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$.

3.2 中世纪英国学者 Alucin

来源：数学建模（H）12-13 春夏期末考试

中世纪英国学者 Alcuin 在他的著作中给出了下面的过河问题。现有 n 件物品需用一艘船从河的左岸运至右岸。两件不同的物品之间可能存在排斥性, 即它们不能同时位于河的一侧, 除非此时船也在河的这一侧。用图 $G = (V, E)$ 表示物品之间的排斥性。V 中每个顶点表示一件物品，两个顶点之间有边相连当且仅当这两个顶点表示的物品是排斥的。所有物品和船的一种状态可用三元组 (V_L, V_R, b) 表示，其中 V_L, V_R 分别代表位于河左岸和右岸的物品集，且有 $V_L \cup V_R = V, V_L \cap V_R = \emptyset$，$b \in \{左, 右\}$ 表示船所在的位置。船从左岸到达右岸，或从右岸到达左岸的过程称为一次运输。每次运输时船至多装载 k 件物品，k 称为船的容量。现要求给出一由多次运输组成的可行运输方案，将所有物品从左岸运到右岸。

（1）请用图论语言表示一次允许的运输过程导致的状态变化，进而完整描述上述问题。

（2）记 $\beta(G)$ 为 G 的最小顶点覆盖所包含顶点的数目，k^* 为 G 的 Alcuin 数，即存在可行运输方案时船容量的最小值，证明 $\beta(G) \le k^* \le \beta(G) + 1$。

（3）设 X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2 为 V 的子集，$X = X_1 \cup X_2 \cup X_3$，$Y = V \setminus X$，这些子集满足以下条件：

(i) X_1, X_2, X_3 两两不交，X 为 G 的独立集；

(ii) $|Y| \le k$，Y_1, Y_2 为 Y 的非空子集；

(iii) $X_1 \cup Y_1$ 和 $X_2 \cup Y_2$ 为 G 的独立集；

(iv) $|Y_1| + |Y_2| \ge |X_3|$

试设计一可行运输方案，（以下为附加题）并证明其运输次数不超过 $2|V| + 1$。

3.2.1 *Answer from xks*

这道题应该是对经典的“狼、羊、白菜”过河问题的推广，仍然是船在哪一边，哪一边就相安无事，而对侧则会打架的经典设定。只不过，我们现在携带的物品数量可能更多，且两两都可能有排斥性，因此，我们不妨升级船，让它可以一次性带k件物品。

图论背景概念：

- 顶点覆盖：图G的顶点覆盖是一个顶点子集C，使得图G的每条边至少有一个端点在C中。**最小**顶点覆盖问题就是找到一个顶点覆盖，使得顶点数$\beta(G)$最小。
- 独立集：顶点子集S，其中任意两个顶点都不相邻，称为图G的独立集。最大独立集的大小叫独立数$\alpha(G)$。
- 两者联系：$\alpha(G) + \beta(G) = |V|$.

3.2.1.1 第一问

介绍了上面的背景后，这问应该不难，但是注意数学表达要精确。-xks

3.2.1.2 第二问

证明**船最少要能带$\beta(G)$个物品：**

- 开始时，我们有$|V|$个物品在V_L，即$V_L = V$，$V_R = \emptyset$，$b = 左$。因为在左边，因此物品们相安无事，不会打架。
- 然后我们带走一些物品到右岸。此时V_L必须是独立集才行，否则会有物品打架。因此我们最少要带走$\beta(G) = |V| - \alpha(G)$个物品，才能保证$V_L$是独立集。
- 因此我们证明了船最少要能带$\beta(G)$个物品。

注意到一点：我们到了对岸后，可以把这个**最小顶点覆盖中的独立子集**放下，并把剩下的子集带回来。然而这样的独立子集可能为空集，例如这个顶点覆盖可以是完全图$C_{\beta(G)}$. 这就自然引出了下面的证明。

证明**能带$\beta(G) + 1$个物品的船就够用了**

简洁的答案：假设船的容量 $k = \beta(g) + 1$，可以选择一个最小顶点覆盖 s，大小为 $\beta(G)$，然后每次运输 s 加上一个额外的物品，确保在运输过程中，s 始终在船上或在某一岸，从而覆盖所有排斥关系。

上述答案的思路：

- 为了证明这样的船已经够用，不妨尝试设计这样一个运输计划；
- **Key Observation**：独立集的子集还是独立集；
- 第一步，我们带走整个最小顶点覆盖共$\beta(G)$个物品，再在剩下的独立集中随便带走一个。这样V_L还是独立集。
- 到达对岸后，我们把这个多带的物品放下，然后再带回$\beta(G)$个物品来。这样V_R也是独立集，我们可以安全返回。
- 重复这个过程，直到运输过去整个独立集。然后把船上的最小顶点覆盖放到右岸即可。

3.2.1.3 第三问

prompt from zyq

第三问和第二问的区别在于$|Y| \le k$,不是严格小于，所以载上 Y 可能没有其余空位。

分析独立集关系： $X_1Y_2; X_3Y_2; X_2Y_1; X_3Y_1; Y_1Y_2$都有可能排斥

第一阶段：把 Y 载上船，在右岸放下Y_1, Y_2留在船上，但此时船上有空位（2 次）

第二阶段：X_1Y_1不排斥，把X_1运到右岸，最差情况是逐个运输（$2|X_1|$次）

第三阶段：把X_3运到右岸，根据条件（iv），把X_3划分成$|X_{31}| < |Y_1|, |X_{32}| < |Y_2|$，船的容量能够保证以下运输——先把$X_{31}$运到右岸，从右岸载上$Y_1$防止与$X_{31}$冲突，然后与一直在船上的$Y_2$一起运到左岸，在左岸放下不会与$X_2$冲突的$Y_2$，然后载上$X_{32}$运到右岸卸下（4 次）

第四阶段：把X_2运到右岸，最差情况是逐个运输（$2|X_2|$次）

第五阶段：把 Y 运输到右岸（2 次）

comment from jyh

题目的关键在于寻找独立集，这里最大的问题就是Y与X_3的关系未知，所以它们在一起时需要利用船来保证没有冲突。

另外对于$|Y| < k$的情况，可以考虑一种朴素的方法：将Y一直放在船上，利用多余的空间将X运送到对岸。易知这种情况下运输的次数最多为$2|X| - 1$次

以下是原论文的节选。可能有点意外的是，这个看起来特殊的情况其实是一般情况，是必要条件！

Theorem 3.1 (Structure theorem)

A graph $G = (V, E)$ possesses a feasible schedule for a boat of capacity $b \ge 1$, if and only if there exist five subsets X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2 of V that satisfy the following four conditions:

(i) The three sets X_1, X_2, X_3 are pairwise disjoint. Their union $X := X_1 \cup X_2 \cup X_3$ forms a stable set in G.

(ii) The (not necessarily disjoint) sets Y_1, Y_2 are non-empty subsets of the set $Y := V - X$, which satisfies $|Y| \le b$.

(iii) $X_1 \cup Y_1$ and $X_2 \cup Y_2$ are stable sets in G.

(iv) $|Y_1| + |Y_2| \ge |X_3|$.

If these four conditions are satisfied, then there exists a feasible schedule of length at most $2|V| + 1$. This bound $2|V| + 1$ is the best possible (for $|V| \ge 3$).

As an illustration for Theorem 3.1, we once again consider Alcuin's problem with $b = 1$; see Figure 1. The corresponding sets in conditions (i)-(iv) then are $X_1 = X_2 = \{w, c\}$, and $Y_1 = Y_2 = \{g\}$. The rest of this section is dedicated to the proof of Theorem 3.1.

For the (only if)-part, we consider a feasible schedule (L_k, R_k) with $1 \le k \le s$. Without loss of generality we assume that $B_{k+1} \ne B_k$ for $1 \le k \le s-1$. Observation 2.1 yields that there exists a vertex cover $Y \subseteq V$ with $|Y| = b$ (which is not necessarily a vertex cover of minimum size). Then the set $X = V - Y$ is stable. We branch into three cases.

In the first case, there exists an index k for which $L_k \cap Y \ne \emptyset$ and $R_k \cap Y \ne \emptyset$. We set $Y_1 = L_k \cap Y$, $X_1 = L_k \cap X$, and $Y_2 = R_k \cap Y$, $X_2 = R_k \cap X$, and $X_3 = B_k \cap X$. This construction yields $X = X_1 \cup X_2 \cup X_3$, and obviously satisfies conditions (i), (ii), (iii). Since $|Y| = b \ge |B_k \cap X| + |Y_1| = |X_3| + (|Y_1| - |Y_2|)$, we also derive the inequality $|Y_1| + |Y_2| \ge |X_3|$ for condition (iv).

In the second case, there exists an index $k < s$ such that $B_k = Y$. If index k is odd (and the boat is moving forward), our assumption $B_{k-1} \ne B_k \ne B_{k+1}$ implies that $B_{k-1} \cap Y \ne \emptyset$ and $R_{k+1} \cap Y \ne \emptyset$. We set

$Y_1 = L_{k-1} \cap Y$, $X_1 = L_{k-1} \cap X$, and $Y_2 = R_{k+1} \cap Y$, $X_2 = R_{k+1} \cap X$, and $X_3 = (B_{k-1} \cup B_{k+1}) \cap X$. Then X_1, X_2, X_3 are pairwise disjoint, and conditions (i), (ii), (iii) are satisfied. Furthermore,

$$|Y| = b \geq |B_{k-1} \cap X| + |B_{k+1} \cap X| = |B_{k-1} \cap X| + (|Y_1| - |Y_1|) \tag{26}$$

implies $|B_{k-1} \cap X| \geq |Y_1|$, and a symmetric argument yields $|B_{k+1} \cap X| \leq |Y_2|$. These two inequalities together imply $|Y_1| + |Y_2| \geq |X_3|$ for condition (iv). If the index k is even (and the boat is moving back), we proceed in a similar way with the roles of $k-1$ and $k+1$ exchanged.

The third case covers all remaining situations: All k satisfy $L_k \cap Y = \emptyset$ or $R_k \cap Y = \emptyset$, and all k with $1 < k < s$ satisfy $B_k \neq Y$. We consider two subcases. In subcase (a) we assume $R_s \cap Y \neq \emptyset$. We define $Y_1 = R_s \cap Y$ and $X_1 = R_s \cap X$, and we set $Y_2 = Y_1$, $X_2 = \emptyset$, and $X_3 = B_s \cap X$. Then conditions (i), (ii), (iii) are satisfied. Since

$$|Y| = b \geq |B_s \cap X| + |B_s \cap Y| = |X_3| + (|Y| - |Y_1|), \tag{27}$$

also condition (iv) holds. In subcase (b) we assume $R_s \cap Y = \emptyset$. We apply Observation 2.2 to get a symmetric feasible schedule with $L_1 \cap Y = \emptyset$. We prove by induction that this new schedule satisfies $R_k \cap Y \neq \emptyset$ for all $k \geq 2$. First, $L_1 \cap Y = \emptyset$ implies $Y \subseteq B_1$, and then $B_2 \neq B_1$ implies $R_2 \cap Y \neq \emptyset$. In the induction step for $k \geq 3$ we have $R_{k-1} \cap Y \neq \emptyset$, and hence $L_{k-1} \cap Y = \emptyset$. If k is odd, then $R_k = R_{k-1}$ and we are done. If k is even, then $R_k \cap Y = \emptyset$ would imply $B_k = Y$, a contradiction. This completes the inductive argument. Since the new schedule has $R_s \cap Y \neq \emptyset$, we may proceed as in subcase (a). This completes the proof of the (only if)-part.

For the (if)-part, we construct a schedule that goes through several phases. We use the notation $L \mid B \mid R$ to denote a snapshot situation with item set L on the left bank, set B on the boat, and set R on the right bank.

(1) By condition (ii), the boat can carry set Y. We leave X on the left bank, put Y into the boat, drop off Y_1 on the right bank, and return to the left bank. This yields situation $X \mid Y - Y_1 \mid Y_1$.

(2) The boat now has at least $|Y_1| \geq 1$ empty places. We cut X_1 into packages of size at most $|Y_1|$, which we take to the right bank. Eventually this yields $X_2, X_3 \mid Y - Y_1 \mid X_1, Y_1$.

(3) Condition (iv) allows us to split X_3 into two disjoint subsets X_{31} and X_{32} with $|X_{31}| \leq |Y_1|$ and $|X_{32}| \leq |Y_2|$. Starting from the left bank, we make four trips:

$$\begin{aligned} &X_2, X_{32} \mid Y - Y_1, X_{31} \mid X_1, Y_1 \quad \text{and} \quad X_2, X_{32} \mid Y \mid X_1, X_{31} \quad \text{and} \\ &X_2, Y_2 \mid Y - Y_2, X_{32} \mid X_1, X_{31} \quad \text{and} \quad X_2, Y_2 \mid Y - Y_2 \mid X_1, X_3 \end{aligned} \tag{28}$$

(4) The boat now has at least $|Y_2| \geq 1$ empty places, which we use to transport X_2 to the right bank. Eventually this yields $Y_2 \mid Y - Y_2 \mid X$.

(5) In the last trip, we pick up Y_2 from the left bank and reach $\emptyset \mid Y \mid X$.

Conditions (i)-(iv) guarantee that the resulting schedule indeed is feasible.

What about the length of this schedule? In phase (1), (2), (3), (4), and (5) we respectively make $2, 2\lceil |X_1|/|Y_1| \rceil, 4, 2\lceil |X_2|/|Y_2| \rceil$, and 1 boat trips. Since $|Y_1|, |Y_2| \geq 1$ and since $|V| \geq |X_1| + |X_2| + |X_3| + 1$, this yields a total number of at most $2|V| - 2|X_3| + 5$ trips.

- If $|X_3| \geq 2$, then this bound is less or equal to $2|V| + 1$.
- If $|X_3| = 1$, then we change the last backward trip in phase (2) to $X_2, X_3 \mid Y \mid X_1$, and replace phase (3) by the following:

$$X_2, Y_2 \mid Y - Y_2, X_3 \mid X_1 \quad \text{and} \quad X_2, Y_2 \mid Y - Y_2 \mid X_1, X_3 \tag{29}$$

Since this saves us two trips, the schedule length is at most $2|V| + 1$.

- If $|X_3| = 0$, then we change the last backward trip in phase (2) to $X_2 \mid Y \mid X_1$, remove phase (3) altogether, and in the first forward trip of phase (4) leave Y_2 on the left bank. Since this saves us four trips, the schedule length again is bounded by $2|V| + 1$.

Summarizing, in all cases we have found a schedule of length at most $2|V| + 1$. This bound $2|V| + 1$ is the best possible, since it can be shown that for the following graph (V, E) and for a boat of capacity 1, all feasible schedules have length at least $2|V| + 1$: The vertex set V consists of vertices $v_1, \ldots, v_n$, and the edge set E consists of two edges $[v_1, v_2]$ and $[v_2, v_3]$. (A closer analysis reveals that these are actually the only graphs for which all feasible schedules have length at least $2|V| + 1$.) This completes the proof of the Structure Theorem 3.1.

— The Alcuin Number of a Graph[2]

3.3 中铁网发售某地区

二、中铁网发售某地区的铁路车票，近期推出一款名为“中铁卡”的优惠产品。每张中铁卡售价为C元，有效期为T天，可随时购买，立即生效。购买了中铁卡的乘客在其有效期内购买面值为P元的车票只须支付βp元，其中$0<\beta<1$。已知准备购买的n张车票价格p_j和购票时间$t_j, j=1,\cdots,n$，其中$t_1 \le t_2 \le \cdots \le t_n$，欲使购买中铁卡和车票支付的总金额最小。

为此，构造有向图$G=(V,E)$，其中$V=\{u,w,v_1,\cdots,v_n\}$，v_j对应于需购买的第j张车票。试确定G的边和每条边的权，使该问题等价于寻找图G中自u到w的一条最短有向路。

图 4 来源：23 级讨论题（一）

3.3.1 *Answer from zsh*

先按顺序从头到尾连接边，其中有$w(u, v_1) = 0, w(v_i, v_{i+1}) = p_i, w(v_n, w) = p_n$.

再对于每一个点考虑买中铁卡的情况，如果买了卡，那么为了使价格最小，一定会在卡有效期到前一直用这张卡，直到卡过期。我们需要找到卡过期时的点，故定义：

$$v_{j,i-1} = \max\{j \mid t_j - t_i \leq T\} \tag{30}$$

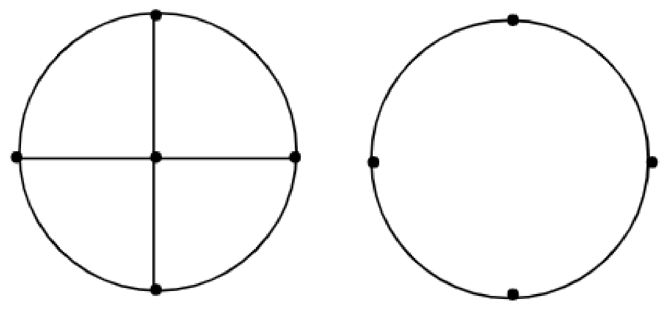
然后对于每一个点v_i，引出一条边指向$v_{j,i-1}$，边权为$C + \beta \sum_{k=1}^{j,i-1}$.

此时图就构建完毕，只要找到从u到w的最短路即可。

comment from ctc
某种情况下“中铁卡”可能用不完，感觉缺了从 v_i 到 w 的边?

3.4 警察与小偷游戏

六、考虑图上的**警察与小偷游戏**（cop and robber game）。给定连通无向图$G=(V,E)$。游戏开始前，每位警察先占据图中一个顶点，小偷再选择图中一个顶点。随后警察和小偷轮流行动，在每一轮中，所有警察先行动，小偷后行动。每次行动可沿图上一条边从一个顶点到达另一个顶点，



W_4 C_4

也可原地不动。警察和小偷都了解图的形状并能在行动前看到其他人的位置。若在某次行动后，某个警察和小偷位于同一顶点，则称警察抓获小偷。对某个图G，不论警察和小偷的初始位置为何以及小偷如何行动，警察总能采取相应的行动方案在有限轮后抓获小偷所需的最少警察数称为图G的警察数（cop-number），记为$c(G)$。

（1）分别求轮W_4和圈C_4的警察数；

（2）证明：若$c(G)=1$，必存在顶点u,w，使得$N(u)\cup\{u\}\subseteq N(w)\cup\{w\}$，这里$N(v)$是图中与$v$有边相连的顶点集；

（3）试通过建立该问题与图论中某问题的联系给出$c(G)$的一个上界；

（4）设在G中没有长度为 3 或 4 的圈，G的最小度$\delta(G)=d$。证明：（ⅰ）若警察数不超过$d-1$，则不论警察选择哪些顶点，小偷总可以选择某个顶点使得警察无法在第一轮抓获小偷；（ⅱ）若警察数不超过$d-1$，小偷至第$t-1$轮警察行动后仍未被抓获，则他总可以采取某种行动，使得在第t轮仍未被抓获；（ⅲ）$c(G)\ge\delta(G)$。

图 5 来源：23 级讨论题（一）

3.4.1 *Answer from ct*

3.4.1.1 问题（1）

分别是 1 和 2。

3.4.1.2 问题（2）

如果 $c(G) = 1$，假设 robber 在第 t 轮被抓捕，令 $t-1$ 轮时 robber 初始在 u，cop 走到了 w。如果 robber 在这一轮走到了 $N(u)$ 中的一个点 u'，则 cop 一定能在 t 轮中走到 u' 抓捕 robber，也就是 $N(u) \subseteq N(w)$；如果 robber 在原地不动，cop 也可以在 t 轮中走到 u 抓捕 robber，所以 $\{u\} \subseteq N(w)$。因此 $N(u) \cup \{u\} \subseteq N(w) \cup \{w\}$。

3.4.1.3 问题（3）

1. 顶点覆盖问题，假设最小顶点覆盖集为 $V^*(G)$，那么 cop 只要选择所有 $V^*(G)$ 中的顶点，就能在第一轮堵住所有边，无论 robber 选择哪个顶点都会被直接抓捕。所以 $c(G) \leq V^*(G)$
2. 支配集问题，假设最小支配集为 $D^*(G)$，同理，$c(G) \leq D^*(G)$

3.4.1.4 问题（4）

3.4.1.4.1 （i）

假设 robber 选择 u_0，只需要保证 $N(u_0)$ 中没有 cop 即可。这样，cop 在第一轮最多来到 $N(u_0)$ 中的顶点而无法抓捕 robber。

Question
谈神疑似在这一问也用了“没有长度为 3 或 4 的圈”的条件?

3.4.1.4.2 （ii）

假设 robber $t-1$ 轮在顶点 u_{t-1}，这一轮行动后 $N(u_{t-1})$ 中有 x 个 cop，则要为 robber 选择一种行动方式到达 u_t，使得第 t 轮中 cop 不会直接抓获 robber。

我们可以沿用支配的概念，在 $N(u_{t-1})$ 中的 x 个 cop，每个只能支配 $N(u_{t-1})$ 中的一个顶点（即自己所在的位置），否则就会构成长度为 3 的圈。不在 $N(u_{t-1})$ 中的 $\leq d-1-x$ 个 cop，每个最多只能支配 $N(u_{t-1})$ 中的一个顶点，否则就会构成长度为 4 的圈（即不可能与 $N(u_{t-1})$ 中的两个顶点同时邻接）。

综上，在 robber 的 $|N(u_{t-1})| \geq d$ 个移动选择中，只有 $\leq d-1$ 个被支配，一定可以选择一个 u_t，不与任何 cop 所在顶点邻接，则 robber 总能在第 t 轮 cop 行动后仍未被抓获。

3.4.1.4.3 （iii）

通过上述证明，$\leq d-1$ 个 cop 无法抓捕 robber，所以 $c(G) \geq d$。

4 博弈论

4.1 城市某处公共设施

来源：数学建模（H）12-13 春夏期末, 23 级第 5 次作业

城市某处公共设施发生损坏，n 位市民同时发现了这一情况。每位市民有两种策略，参与维修和视而不见。由于损坏程度较轻，只要有一人参与维修设施即可复原。设施复原对每位市民带来的收益均为 v，而参与维修的市民均付出代价 c。设 v>c>0。

(1) 试建立该问题的博弈模型，并求出所有纯策略意义下的 Nash 均衡。

(2) 用 (p,q) 表示如下的混合策略：以概率 p 参与维修，以概率 q=1-p 视而不见。试分别求出第 1,2, , n-1 位市民均采用策略 (p,q)，第 n 位市民采用纯策略“参与维修”和纯策略“视而不见”时他的期望收益。

(3) 称一 Nash 均衡为对称的，若在该 Nash 均衡中，所有参与者采用的策略（纯策略或混合策略）均相同。求该博弈所有混合策略意义下的对称 Nash 均衡，并说明其结果反映了什么样的社会现象。

4.1.1 *Answer from xks*

4.1.1.1 模型及纯均衡

博弈模型为

- **参与者**：n 位市民。
- **策略集**：
  - S：参与维修。
  - N：视而不见。
- **收益结构**：
  - 如果至少有一位市民选择 S：
    - 所有市民获得收益 v。
    - 选择 S 的市民需支付代价 c，净收益为 $v-c$。
  - 如果所有市民都选择 N：
    - 设施无法复原，所有市民的收益为 0。

所有 Nash 均衡为：只有一个市民修的局面。

证明这是 Nash 均衡：

- 如果这个修的市民选择不修，那么他的收益为0，而如果他选择修，那么他的收益为$v-c$，所以他不会选择不修。
- 如果其他市民选择修，那么他的收益为$v-c$，而如果其他市民选择不修，那么他的收益为v，所以他不会选择修。

证明这是所有的 Nash 均衡：

[2]Csorba, Péter, et al. "The Alcuin Number of a Graph and Its Connections to the Vertex Cover Number." SIAM Review, vol. 54, no. 1, 2012, pp. 141–54. JSTOR, http://www.jstor.org/stable/41642576. Accessed 28 Dec. 2024.

- 对于无人修理的局面
  - 此时所有人的收益都为0。
  - 如果有人选择修，那么他的收益为$v-c$，所以他会选择修。
  - 因此，无人修理的局面不是 Nash 均衡。
- 对于$i(i\geq 2)$人修理的局面
  - 如果有修的人选择不修，那么他的收益为v而不是$v-c$，所以他会选择不修。
  - 因此，$i(i\geq 2)$人修理的局面不是 Nash 均衡。

4.1.1.2 期望收益

别人混合策略(p,q)，我为纯策略S或N，则我的期望收益为：
- 修：$v-c$
- 不修：$q^{n-1}\cdot 0+(1-q^{n-1})\cdot v=v[1-(1-p)^{n-1}]$

4.1.1.3 对称混合均衡

我修的期望收益为$v-c$，不修的期望收益为$v[1-(1-p)^{n-1}]$。对于我的混合策略$(x,1-x)$，期望收益为：

$$x(v-c)+(1-x)[1-(1-p)^{n-1}]v=[(1-p)^{n-1}v-c]x+\cdots \tag{31}$$

在纳什均衡时，任何人都无法改变策略以提升收益。因此，选择维修和不维修的期望收益相等，也就是上式x的系数为0：

$$v-c=v[1-(1-p)^{n-1}] \tag{32}$$

解得：

$$p=1-\left(\frac{c}{v}\right)^{\frac{1}{n-1}} \tag{33}$$

反映社会现象：当维修成本c较小时，市民更愿意维修；当维修收益v较小时，市民更不愿意维修；**当市民数量n较多时，市民更不愿意维修。**

> note
> 如果一个混合策略包含多个纯策略，这些纯策略的期望收益在均衡时是相同的，因为玩家无论如何随机化，都无法通过偏好某一纯策略来提高自己的期望收益。如果某一策略期望收益较高，理性玩家会将该策略的概率调整到 1。

4.2 一企业计划在n天

来源：23 级第五次作业

一企业计划在 n 天内的某一天排放污水，而环保机构可能在 n 天中的 m 天开展检查。若企业排放当天机构开展检查，则机构收益为 1；若企业排放当天机构未开展检查，则机构收益为 -1；若企业未排放，不论当天机构是否开展检查，机构当天收益为 0 。对以上各种情况，企业收益均为机构收益的相反数。企业和机构均了解 n 和 m 的值，在这 n 天中的每一天，双方均了解企业是否已排放污水及机构剩余检查次数。记 $V(m,n)$ 为上述博弈的混合策略 Nash 均衡下机构的期望收益。

1. 试根据 n 天中第一天双方的决策，给出机构的收益矩阵（必要时，收益可用 $V(m,n)$ 的适当函数值表示）;
2. 试给出 $V(m,n)$ 满足的递推关系和初始条件;
3. 试给出 $V(1,n)$ 的表达式。

4.2.1 *Answer from zsh*

4.2.1.1 试根据n天中第一天双方的决策，给出机构的收益矩阵(必要时，收益可用$V(m,n)$的适当函数值表示)

记机构检查为C，不检查为NC；企业排放为P，不排放为NP。根据第一天的决策，一共有四种情况。若企业排放，机构检查即收益为1，不检查即为-1；若企业不排放，那么退化到$n=n-1$层的游戏，根据第一天检查或不检查，参数分别为$m-1,m$。

收益矩阵可以表示为：

	P	**NP**
C	1	$V(m-1,n-1)$
NC	-1	$V(m,n-1)$

4.2.1.2 试给出$V(m,n)$满足的递推关系和初始条件

考虑该博弈的混合策略Nash均衡，我们需要找到均衡状态下机构检查的概率以及企业排污的概率。设当日机构检查概率为p，企业当日排污概率为q，分别考虑企业和机构的均衡状态。

4.2.1.3 企业均衡状态

若企业当日排污，那么机构收益为$p\cdot 1+(1-p)\cdot(-1)=2p-1$，由于该博弈为零和博弈，故企业收益为：

$$1-2p \tag{34}$$

若企业当日不排污，当日收益为0，考虑未来，下一天的状态退化到随机的博弈，此时即可引入递推的思想。若机构检查，那么会进入状态$(m-1,n-1)$，企业未来的期望收益为$-V(m-1,n-1)$；若机构不检查，那么进入状态$(m,n-1)$，企业未来期望收益为$-V(m,n-1)$。故企业不排污的期望收益为：

$$-[pc\cdot V(m-1,n-1)+(1-p)c\cdot V(m,n-1)] \tag{35}$$

由均衡状态，企业是否排污的期望是相等的，有：

$$1-2p=-[p\cdot V(m-1,n-1)+(1-p)\cdot V(m,n-1)] \tag{36}$$

解得：

$$p=\frac{V(m,n-1)+1}{V(m,n-1)-V(m-1,n-1)+2} \tag{37}$$

4.2.1.4 机构均衡状态

同理，若机构检查，企业排污时收益为1，不排污时收益为$V(m-1,n-1)$，故检查的期望收益为：

$$qc\cdot 1+(1-q)c\cdot V(m-1,n-1)=q+(1-q)c\cdot V(m-1,n-1) \tag{38}$$

若机构不检查，企业排污收益为-1，不排污收益为$V(m,n-1)$，故检查的期望收益为：

$$qc\cdot(-1)+(1-q)c\cdot V(m,n-1)=-q+(1-q)c\cdot V(m,n-1) \tag{39}$$

由均衡状态，两种情况期望应相同，有：

$$q+(1-q)c\cdot V(m-1,n-1)=-q+(1-q)c\cdot V(m,n-1) \tag{40}$$

解得：

$$q=\frac{V(m,n-1)-V(m-1,n-1)}{V(m,n-1)-V(m-1,n-1)+2} \tag{41}$$

> 补充 from lyw
> 这里应该也可以用偏导数来做，因为对企业和机构来说都是最优解了，所以V关于p,q的偏导数都是 0。

4.2.1.5 V(m,n)递推关系

当前状态(m,n)下的收益$V(m,n)$可由p,q表示：

$$V(m,n)=pq-(1-p)q+p(1-q)V(m-1,n-1)+(1-p)(1-q)V(m,n-1) \tag{42}$$

然后解出$V(m,n)$。为了解出$V(m,n)$:
- 我们可以代入p,q;
- 也可只代入p, 并将q取任意值，例如0或1;
- 也可只代入q, 并将p取任意值。

$$V(m,n)=\frac{V(m,n-1)+V(m-1,n-1)}{V(m,n-1)-V(m-1,n-1)+2}\quad\forall n\geq 2 \tag{43}$$

$n\geq 2$ 从下面的初始条件可以看出。

4.2.1.5.1 初始条件

1. $n\geq 1$时，$V(0,n)=-1$. 若没有检查次数，企业随便选一天排放即可。
2. $m=n\geq 1$时，$V(m,n)=1$. 若检查次数等于天数，而企业必须要选一天排，那么机构只需要每天都检查即可，必定能查到企业排放污水。

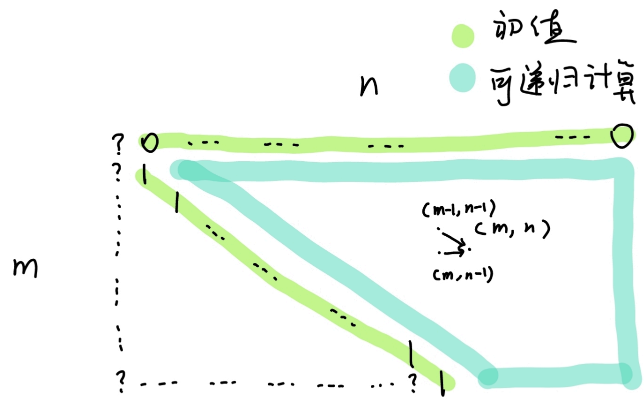


图 6　递归示意图

4.2.1.6 试给出$V(1,n)$的表达式

4.2.1.6.1 从递推式求解

代入上述递推式，有

$$V(1,n)=\frac{V(1,n-1)-1}{V(1,n-1)+3} \tag{44}$$

看作是关于单变量n的函数：

$$f(n)=\frac{f(n-1)-1}{f(n-1)+3} \tag{45}$$

有

$$f(n)=-\frac{1}{f(n-2)+2} \tag{46}$$

两边加1后取倒数：

$$\frac{1}{f(n)+1}=\frac{1}{f(n-1)+1}+1 \tag{47}$$

解得

$$\frac{1}{f(n)+1}=\frac{n}{2} \tag{48}$$

即

$$V(1,n)=f(n)=\frac{2}{n}-1 \tag{49}$$

4.2.1.6.2 从实际意义求解

考虑实际意义，状态$(1,n)$表示机构在n天中只查1天，那么对于机构来说，只有当查的那一天和企业排的那一天重合时有收益1，否则收益为-1（因为没有机会再查），而查的那一天和企业排的那一天重合的概率为$\frac{1}{n}$，因此，机构的期望收益$V(1,n)$为：

$$V(1,n)=\frac{1}{n}\cdot 1+\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot(-1)=\frac{2}{n}-1 \tag{50}$$

4.3 某议会就一草案进行表决

来源：数学建模（H）13-14 春夏期末

某委员会将就一草案进行表决，委员会组成人员中有 k 位支持，m 位反对。每位委员可以选择到现场按本人意愿投票，也可以选择弃权。若投支持票人数多于投反对票人数，则该草案获得通过；若投反对票人数多于投支持票人数，则该草案被否决；若投支持票人数与投反对票人数相等，则该草案延期再议。对支持该草案的委员，草案通过、延期再议、否决的收益分别为 2、1、0；对反对该草案的委员，草案通过、延期再议、否决的收益分别为 0、1、2。到现场投票的委员另需付出的投票成本为 $c\in(0,1)$

（1）试分别求 $k=m$ 和 $k<m$ 时所有的纯策略 Nash 均衡；

（2）设 $k<m$.考虑下面的局势：反对该草案的委员中有 k 位到现场投票，$m-k$ 位弃权；支持该草案的每一位委员均以概率 p 到现场投票。试分别求该局势下反对该草案的委员中到现场投票者和弃权者的期望收益；以及在其它 $k+m-1$ 位委员策略不变时，其中一位反对该草案的委员由到现场投票改为弃权，或由弃权改为到现场投票时他的期望收益；

（3）（附加题）求 p 的值，使（2）中所述局势为一混合策略 Nash 均衡。

4.3.1 *Answer from jyh & qml*

4.3.1.1

设支持者投反对票的收益为 $k-c(k=0,1,2)$，如果改为弃权，则收益为 k 或 $k+1$，故 Nash 均衡中不应该存在支持者投反对票，同理也不应该存在反对者投支持票

设投支持票的人有 $s(s\leq k)$ 个，投反对票的人有 $t(t\leq m)$ 个。下面对各种情况进行分类讨论

1. $0<s<t$：投支持票的支持者收益为$-c$，如果改为弃权，则收益为 0，故此状态不为 Nash 均衡。
2. $0=s<t$：投反对票的反对者收益为$2-c$，如果改为弃权，则收益为 2，故此状态不为 Nash 均衡。
3. $s=t<\max(k,m)$：弃权的支持者/反对者收益为 1，如果改为投支持票/反对票，则收益为$2-c$，故此状态不为 Nash 均衡
4. $s=t=\max(k,m)$，即 $s=t=k=m$：此时所有支持者都投支持票，所有反对者都投反对票，投票的支持者收益为 $1-c$ ，如果改为弃权，则收益为 0，反对者同理，故该状态为 Nash 均衡
5. $0\leq t<s$：该情况与 1，2 对称，均不是 Nash 均衡

综上可得出，当 $k=m$ 时存在 Nash 均衡：所有支持者都投支持票，所有反对者都投反对票。当 $k<m$ 时不存在 Nash 均衡。

> comment from qml
> 首先直观上可以判断出支持者投反对票和反对者投支持票都是不利的，先证明这个可以减少后续的思考量/书写量

4.3.1.2

- 反对者面临草案否决和草案延期两种可能
  - 投票者收益期望为：$E=p^k(1-c)+(1-p^k)(2-c)=2-c-p^k$
  - 弃权者收益期望为：$E=p^k+(1-p^k)\cdot 2=2-p^k$
- 反对者将投票改为弃权，可能会出现草案通过，草案否决和草案延期三种情况
  - 期望为：$E=p^k\cdot 0+kp^{k-1}(1-p)+(1-p^k-kp^{k-1}(1-p))\cdot 2=2+(k-2)p^k-kp^{k-1}$
- 反对者将弃权改为投票，只可能出现草案否决这一种情况
  - 期望为：$E=2-c$

4.3.1.3

在 Nash 均衡解下，需满足在反对者中投票改弃权或弃权改投票的收益会降低，有

$$\begin{cases}2-c-p^k>2+(k-2)p^k-kp^{k-1}\\ 2-p^k>2-c\end{cases} \tag{51}$$

化简有

$$\begin{cases}(k-1)p^k-kp^{k-1}+c<0\\ p^k<c\end{cases} \tag{52}$$

接着，对于某一支持者来说，在其他人都采取同样混合策略的情况下，以概率p进行投票的期望应等于以$1-p$概率弃权的收益。可得

$$0=p\cdot[p^{k-1}(1-c)+(1-p^{k-1})(-c)] \tag{53}$$

解得

$$p=c^{\frac{1}{k-1}} \tag{54}$$

这一解满足上面两不等式

5 随机模型

5.1 连续胜利（包含动态规划）

四、一赛季有 $r+1$ 名选手 $A_1, A_2, \cdots, A_{r+1}$ 参加。赛季中的每场比赛在两名选手间进行。一场比赛的参赛者只有胜、负两种结果，两名选手获胜的概率相等。所有选手按编号顺序排为一队列。首先由队列中的前两位选手进行比赛，胜者与队列中下一位选手进行比赛，负者重新排在队列的末尾。上述过程持续进行下去，直至有一人连续战胜所有其他选手，整个赛季结束。

（1）假设选手共 3 人，即 $r=2$。在第一场比赛 A_2 战胜 A_1 的情况下，试给出整个赛季包含 n 场比赛时，获胜的选手及其获胜的概率；

（2）求 $r=2$ 时，每位选手获胜的概率；

（3）一由 n 个数字 0 或 1 组成的序列，最后 $r-1$ 位均为数字 1，但在前 $n-1$ 位中不包含连续 $r-1$ 位数字 1 的子序列，其中 r 为一给定整数。记所有这样的序列的总数为 a_n。试写出 a_n 满足的递推关系；

（4）记 b_n 为整个赛季包含 n 场比赛的概率。试写出 b_n 满足的递推关系。

图 7 来源：23 级工高思考题 2

5.1.1 *Answer form lyw*

(1) 写几场观察一下，比如$n=2$的时候，只可能是 A_2 连续胜利两场，$n=3$的时候只可能是 A_1 输 A_2 之后 A_3 连续胜利两场，多写几个可以猜到 n 场比赛时，获胜的选手只有可能是

$$\begin{cases} A_1 & n\%3=1 \\ A_2 & n\%3=2 \\ A_3 & n\%3=0 \end{cases} \tag{55}$$

(2)(by zjy)设 $P(A_k)$ 为选手 A_K 胜利的概率，$P(B)$ 代表赢一把之后获得最终胜利的概率，$P(C)$代表输一把之后获得最终胜利的概率，然后我们可以列方程

$$P(C) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8}P(C) \tag{56}$$

（失败后的前两轮比赛处于队首的选手都必须失败，否则队首选手将连赢两轮获胜）

解得

$$P(C) = \frac{1}{7} \tag{57}$$

所以有

$$P(A_1) = P(A_2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}P(C) + \frac{1}{2}P(C) = \frac{5}{14} \tag{58}$$

（分别是前两场胜胜、胜负和第一场负的情况）

$$P(A_3) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}P(C) = \frac{2}{7} \tag{59}$$

（第一场的结果对A_3无关紧要，第二场A_3必须获胜）

(2)(Another solution by jyh)

分类讨论

若第一场A_1赢，有

$$\begin{cases} P(A_1) = \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^7} ... = \frac{4}{7} \\ P(A_3) = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^8} ... = \frac{2}{7} \\ P(A_2) = \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^9} ... = \frac{1}{7} \end{cases} \tag{60}$$

若第一场A_2赢，有

$$\begin{cases} P(A_2) = \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^7} ... = \frac{4}{7} \\ P(A_3) = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^8} ... = \frac{2}{7} \\ P(A_1) = \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^9} ... = \frac{1}{7} \end{cases} \tag{61}$$

故有

$$\begin{cases} P(A_1) = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{7} + \frac{1}{7}\right) = \frac{5}{14} \\ P(A_2) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{7} + \frac{4}{7}\right) = \frac{5}{14} \\ P(A_3) = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{7} + \frac{2}{7}\right) = \frac{2}{7} \end{cases} \tag{62}$$

(3) 对于长度为 $n+1$ 的序列， 我们可以看成长度为 n 的序列在前面加一位，如果加的是 0，那么一定满足，如果加的是 1，需要去除一种情况，即前面 $r-2$ 都为 1 的情况 (此时第 $r-1$ 位一定是0)，这种情况的个数为 a_{n-r+1}，如下图所示

$$\underbrace{0}_{\text{新加的数字}} \quad \underbrace{11......1}_{\text{r-1位为1}} \quad \underbrace{0}_{\text{第}r\text{位}} \quad \underbrace{101......11}_{\text{剩下n-r+1位满足序列要求}} \tag{63}$$

所以递推公式为 $a_{n+1} = a_n + (a_n - a_{n-r+1}) = 2a_n - a_{n-r+1}$，简单想一下可以知道初始条件为 $a_1 = a_2 = ... = a_{r-2} = 0$，$a_{r-1} = a_r = 1$

(4) 不难想到，第四题就是第三题的直接推论，但需要注意第四题应该是存在连续 r 位数字 1 的子序列，初始条件也稍微改一下就可以了

$$\begin{gathered} b_{n+1} = 2b_n - b_{n-r} \\ b_1 = ... = b_{r-1} = 0 \quad b_r = b_{r+1} \\ \sum_{i=1}^{\infty} b_i = 1 \end{gathered} \tag{64}$$

5.2 一种彩票每注一元

五、一种彩票每注面额 1 元，投注者可从 P 种可能方案中选择 1 种。彩票设置大、中、小三类奖项，若某注彩票选择的方案属于某类奖项获奖方案之一，该注彩票获得相应的奖项。只有 1 种方案可获大奖，总奖金额为 J，由所有获奖的彩票平分。有 s 种方案可获中奖，总奖金额为 rN，由所有获奖的彩票平分，其中 N 为当期彩票的总投注额，$0<r<1$。有 t 种方案可获小奖，小奖每注奖金为固定值 a 元。

（1）求当期共有 w 注彩票获得大奖的概率；

（2）求每注彩票的期望收益；

（3）该种彩票会将上期未中的大奖与中奖奖金注入奖池，作为当期大奖的奖金。试证明，若当期大奖总奖金额 $J<(1-r)P-at$，则每注彩票的期望收益仍小于面值。

图 8 来源：23 级秋冬数模思考题 2

5.2.1 *Answer from lyw*

(1)简单概率论 $P_1 = C_N^w \left(\frac{1}{P}\right)^w \left(\frac{1-P}{P}\right)^{N-W}$

(2)分别计算小奖，中奖，大奖的数学期望，然后相加即可

- 小奖 $E(C) = \frac{t}{P}a$
- 中奖，令$p_1 = \frac{s}{p}$表示中奖的获奖概率，则有

$$E(B) = rN\left(p_1(1-p_1)^{N-1} + \frac{1}{2}C_N^1 p_1^2 (1-p_1)^{n-1} + ... + \frac{1}{N}C_{N-1}^{N-1} p_1^n\right) \tag{65}$$

为了计算括号中的内容，我们构造函数$f(x) = (x + (1-p_1))^{N-1}$, 注意到原积分就是

$$\int_0^{p_1} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{N}\left(1 - (1-p_1)^N\right) \tag{66}$$

故中奖的数学期望为 $E(B) = r\left(1 - (1-p_1)^N\right)$

- 大奖的数学期望和中奖类似，为 $E(C) = \frac{J}{N}\left(1 - \left(1 - \frac{1}{P}\right)^N\right)$

故总的期望为 $E = \frac{t}{P}a + r\left(1 - \left(1 - \frac{s}{P}\right)^N\right) + \frac{J}{N}\left(1 - \left(1 - \frac{1}{P}\right)^N\right)$

(3)思路很简单，就是计算$E<1$，为此，我们计算E的最大可能值

- 小奖的数学期望不用放缩
- 中奖主要是有一个 s 需要放缩，为了让E大一点，s自然是越大越好，s只有一个约束条件，即所有中奖方案加起来不会超过总方案，$s+t+1 \le P$，事实上，我们后面计算的时候，直接把s放缩成 P 就可以了
- 大奖放缩的时候，想到二次项展开只保留两项

故我们有

$$E \le \frac{t}{P}a + r + \frac{(1-r)P - at}{N}\frac{N}{P} = 1 \tag{67}$$

remark

这道题的关键是计算 $p_1(1-p_1)^{N-1} + \frac{1}{2}C_N^1 p_1^2 (1-p_1)^{n-1} + ... + \frac{1}{N}C_{N-1}^{N-1} p_1^n$, 这种或者二次项展开前面系数多了一部分关于$n$的，可以尝试用二项式展开配合积分或者求导计算。

5.3 n 支球队通过淘汰

三、n 支球队通过淘汰赛决出冠军。赛程分为 r 轮，第 l 轮共有 m_l 场比赛，$l=1,2,\cdots,r$，r 和 $m_1, m_2, \cdots, m_r$ 的值由赛制规定。每场比赛在两支球队间进行，比赛结果为一支球队获胜，一支球队落败，落败的球队被淘汰。同一轮中的各场比赛同时进行，一支球队不能参加同一轮的两场比赛，不同轮的比赛先后进行。每轮所有比赛的对阵双方在该轮开始前从所有当前未被淘汰的球队中以完全随机的方式选出。只有一支球队未被淘汰时赛程结束，该球队即为冠军。

记队 i 的水平值为 v_i，$i=1,\cdots,n$，设队 i 与队 j 比赛时，队 i 获胜的概率为 $\frac{v_i}{v_i+v_j}$，队 j 获胜的概率为 $\frac{v_j}{v_i+v_j}$。记 $n=2^s+k$，其中 s,k 为正整数，$0 \le k < 2^s$。设 $v_1 > v = v_2 = \cdots = v_n > 0$。

（1）试给出为保证赛制可行 $m_1, m_2, \cdots, m_r$ 应满足的条件；

（2）问 $n=4$ 时共有多少种不同的赛制。采用哪种赛制可使队1获得冠军的概率最大，采用哪种赛制可使队1获得冠军的概率最小；

（3）若 $m_1 = k$，求队 1 在第一轮结束后未被淘汰的概率 f_1，若 $m_1 = j < k, m_2 = k-j$，求队 1 在第二轮结束后未被淘汰的概率 f_2，并证明 $f_1 - f_2 > 0$；

（4）证明：$r=s+1$ 且 $m_1 = k, m_l = 2^{s-l+1}, l=2,3,\cdots,s+1$ 的赛制对队1最为有利。

图 9 来源：23 级思考题（一）

5.3.1 *Answer form ct*

5.3.1.1 问题（1）

- 每场比赛淘汰一支球队，$\sum_{i=1}^{r} m_i = n-1$
- 每轮比赛场次不超过剩余队伍数量的一半，$\forall 2 \le i \le r, m_i \le \frac{1}{2}\left(n - \sum_{j=1}^{i-1} m_j\right)$

5.3.1.2 问题（2）

一共有两种赛制：$\{r=2, m_1=2, m_2=1\}$ 和 $\{r=3, m_1=1, m_2=1, m_3=1\}$。

记队 1 在一场比赛中的胜率为 $p = \frac{v_1}{v_1+v} > \frac{1}{2}$。第一种赛制下获得冠军：

$$p_1 = p^2 \tag{68}$$

第二种赛制下获得冠军，即每一轮幸存概率乘积：

$$p_2 = \left(\frac{2}{4}p + \frac{2}{4}\right)\left(\frac{2}{3}p + \frac{1}{3}\right)p = \frac{p(p+1)(2p+1)}{6} \tag{69}$$

可以通过求导证明 $p > \frac{1}{2}$ 时有 $p_1 > p_2$，所以第一种赛制胜率更高。

5.3.1.3 问题（3）

直接进行计算：

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{2k}{n}p + \frac{n-2k}{n} \\ f_2 &= \left(\frac{2j}{n}p + \frac{n-2j}{n}\right)\left(\frac{2(k-j)}{n-j}p + \frac{n-2(k-j)}{n-j}\right) \\ f_1 - f_2 &= \frac{2j(k-j)(1-p)(2p-1)}{n(n-j)} > 0 \end{aligned} \tag{70}$$

5.3.1.4 问题（4）

使用数学归纳法，我们已经有 base case $n=4, k=0$，做出假设：当 $n \ge 4$ 且 k 的取值如题时，最优的赛制是 $\{r=s+1, m_1=k, m_2=2^{s-1}, ..., m_l=2^{s-l+1}, ..., m_r=1\}$。

假设当 $n=4,5,...,x-1$ 时命题成立，现在考虑 $n=x$。

任意取一种赛制，除了 $m_1 = k$ 以外共有两种情况：

1. $m_1 = j < k$

第一轮后剩余队伍数量

$$n_1' = 2^s + k - j < n \tag{71}$$

根据假设，后续的最优方案为：

$$\begin{gathered} m_2 = k - j \\ m_3 = 2^{s-1} \\ m_4 = 2^{s-2} \\ ... \end{gathered} \tag{72}$$

根据问题 (3)，这时 $f_2 < f_1$，1 队的胜率劣于 $m_1 = k$ 的赛制。

2. $m_1 = j > k$

第一轮后剩余队伍数量为

$$n_1' = 2^s + k - j \in \left(2^{s-1}, 2^s\right) \tag{73}$$

根据假设，后续的最优方案为：

$$\begin{gathered} m_2 = 2^{s-1} + k - j \\ m_3 = 2^{s-2} \\ m_4 = 2^{s-3} \\ ... \end{gathered} \tag{74}$$

定义 f_3 为这种赛制下 1 队前两轮存活的概率：

$$f_3 = \left(\frac{2j}{n}p + \frac{n-2j}{n}\right)\left(\frac{2(2^{s-1}+k-j)}{n-j}p + \frac{n-j-2(2^{s-1}+k-j)}{n-j}\right) \tag{75}$$

然后证明 $f_1 - f_3 > 0$，比较复杂，这里省略~~，建议伪证~~。

于是归纳假设对于 $n = x$ 亦成立，证毕。

6 微积分模型

6.1 扫雪车问题

来源：24-25 秋冬讨论题(三)

某地从零时起开始持续降雪，单位时间内降雪量为一定值。现有一条宽度为常数 W 的直线型道路，扫雪车从道路尽头出发，沿道路行进清除积雪。假设扫雪车能清除所经过路面上的所有积雪，且每小时能清除的积雪量为常数 K。

1. 一台扫雪车自降雪一段时间后出发，它第一个小时经过的距离为第二个小时经过的距离的两倍，求扫雪车出发的时间。
2. 两台扫雪车分别从 t_1 时和 t_2 时出发，求两台车相遇的时间和地点。

6.1.1 *Answer from lyw*

(1)设单位时间单位面积的降雪量为 A，设在极短时间dt内，扫雪车前进dx，根据 扫雪车扫的雪 = 该地有的雪 列出等式

$$K\mathrm{d}t = WtA\mathrm{d}x \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}t}{t} = \frac{WA}{K}dx \quad \Rightarrow \quad \ln\frac{t}{t_0} = \frac{WA}{K}x \quad \Rightarrow \quad x(t) = \frac{K}{WA}\ln\frac{t}{t_0} \tag{76}$$

根据第一小时经过的距离为第二小时的两倍，我们有

$$x(t_0+2) = \frac{3}{2}\cdot x(t_0+1) \quad \Rightarrow \quad \frac{\ln(t_0+2)-\ln t_0}{\ln(t_0+1)-\ln t_0} = \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad t_0 = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \tag{77}$$

(2)我们设第一辆扫雪车随时间经过的距离为 x_1，第二辆为 x_2. x_1 就是(1)中的变量 x.

为了列出 第二辆扫雪车扫的雪 = 该地有的雪 等式，首先要用(1)中的式 76 解出第一辆离开的时间

$$t_{\mathrm{leave}} = t_1\frac{e^{WAx_1}}{K} \tag{78}$$

接下来我们写出x_2的微分方程

$$K\,\mathrm{d}t = AW(t-t_{\mathrm{leave}})\,\mathrm{d}x_2 \tag{79}$$

括号拆开，得到一个一阶线性常微分方程，然后可以用公式解这个方程。可参考 小节 6.9.1

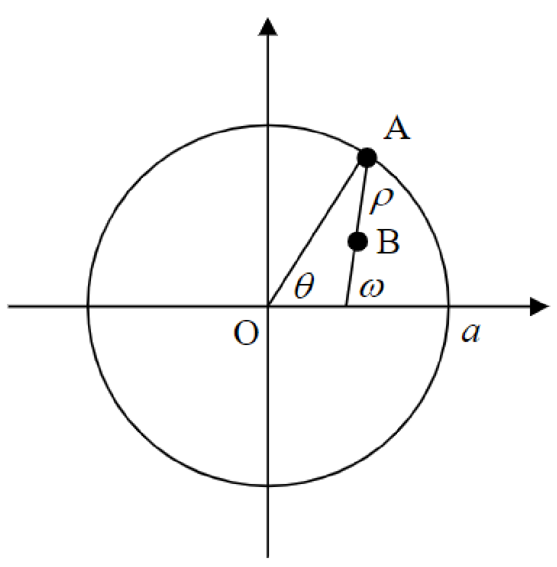
$$\frac{dt}{dx_2} = \frac{AW}{K}t - \frac{AWt_1}{K}e^{\frac{AW}{K}x_2} \quad \text{初值 } t(0)=t_2 \quad \Rightarrow \quad t(x_2) = e^{\frac{AW}{K}x_2}\left(t_2 - \frac{AWt_1}{K}x_2\right) \tag{80}$$

接下来联立式 80 和式 76，令 $x_1 = x_2$，得到最后答案

$$\begin{cases} x_1 = x_2 = \frac{K(t_2-t_1)}{AWt_1} \\ t = t_1 e^{\frac{t_2-t_1}{t_1}} \end{cases} \tag{81}$$

6.2 物体 A 沿圆心为 O

二、物体 A 沿圆心为 O， 半径为 a 的圆周逆时针作匀速运动。零时刻物体 B 位于 O 点，在此后的任意时刻，均沿着连接物体 A 和物体 B 当前所在位置的直线方向向物体 A 运动，速率不变，直至到达圆周。相同时间内物体 B 移动的距离为物体 A 的 n 倍。设 O 点坐标为 $(0,0)$，零时刻物体 A 的位置为 $(a,0)$。记 t 时刻物体 B 所在位置的坐标为 (x,y)，连接物体 A 当前所在位置与 O 的直线与 x 轴正向的夹角为 θ，物体 A 和物体 B 的距离为 ρ，连接物体 A 和物体 B 当前所在位置的直线与 x 轴正向夹角为 ω。（参见右图）



（1）求 $\frac{dx}{d\theta}$ 与 $\frac{dy}{d\theta}$（以 ω 为参数）；

（2）试写出物体 B 的运动轨迹在 (x,y) 处的切线方程和法线方程（必要时可以 ω,θ,ρ 为参数）；

（3）将 ω 和 ρ 视作 θ 的函数，试写出 ω 和 ρ 满足的微分方程（组）（不含其他参数）。

图 10 来源：23 级第 4 次作业

6.2.1 *Answer by sxw*

6.2.1.1 第一问

对于 B 点来说，对于其微小位移

$$dx = v_B\cos(\omega)dt \tag{82}$$

$$dy = v_B\sin(\omega)dt \tag{83}$$

而$v_B = nv_A = na\frac{d\theta}{dt}$

由这三个式子联立即可解得

$$\frac{dx}{d\theta} = na\cos\omega \tag{84}$$

$$\frac{dy}{d\theta} = na\sin\omega \tag{85}$$

6.2.1.2 第二问

A 点坐标为$(a\cos\theta, a\sin\theta)$,B 点坐标为$(a\cos\theta-\rho\cos\omega, a\sin\theta-\rho\sin\omega)$,那么接下来就是求 B 的切线方程和法线方程了，这里其实主要就是找到切线方程是什么即可。物体运动的速度矢量即为物体运动轨迹的切线方向。

于是很明显，速度的方向即为切线的斜率，而根据题意，速度方向又刚好是 AB 直线方向，那么最后直线方程很好列了，切线方程：

$$y = \tan\omega(x - a\cos\theta) + a\sin\theta \tag{86}$$

法线方程：

$$y = -\frac{1}{\tan\omega}(x - a\cos\theta) + a\sin\theta + \frac{\rho}{\sin\omega} \tag{87}$$

6.2.1.3 第三问

对于 B 点来说，其坐标(x,y)为$(a\cos\theta-\rho\cos\omega, a\sin\theta-\rho\sin\omega)$，即：

$$x = a\cos\theta - \rho\cos\omega \tag{88}$$

$$y = a\sin\theta - \rho\sin\omega \tag{89}$$

由第一问得出dx, dy和$d\theta, \omega$之间的关系，那这里要做的显然是对 B 的坐标取微分

$$dx = -a\sin\theta d\theta - (\cos\omega d\rho - \rho\sin\omega d\omega) \tag{90}$$

$$dy = a\cos\theta d\theta - (\sin\omega d\rho + \rho\cos\omega d\omega) \tag{91}$$

再加上第一问所得：

$$\frac{dx}{d\theta} = na\cos\omega \tag{92}$$

$$\frac{dy}{d\theta} = na\sin\omega \tag{93}$$

把dx, dy消掉，两个方程两个"未知数"，方程可解，得到：

$$\frac{d\rho}{d\theta} = a\sin(\omega-\theta) - na \tag{94}$$

$$\frac{d\omega}{d\theta} = \frac{a}{\rho}\cos(\omega-\theta) \tag{95}$$

6.3 一商船试图逃避海盗

一、一商船试图逃避海盗追逐。记 t 时刻商船和海盗的位置分别为 $(x_a(t), y_a(t))$ 与 $(x_b(t), y_b(t))$，商船和海盗的速度分别为 $v_a(t)$ 与 $v_b(t)$，航向与 x 轴正向夹角分别为 $\alpha(t)$ 与 $\beta(t)$。在零时刻商船位于 $(0,0)$ 处，海盗位于 (x_0, y_0) 处，其中 $x_0 \ge 0, y_0 \le 0$。商船始终在第一象限内（含坐标轴正向）行驶，海盗可观测到商船的位置并随时调整航向。记 $r(t)$ 为 t 时刻商船和海盗的距离，$\theta(t)$ 为 t 时刻连接商船和海盗的直线与 x 轴正向的夹角。

（1）试写出 $x_a(t), y_a(t), x_b(t), y_b(t)$ 所满足的微分方程；

（2）为使 $r(t)$ 减小最快，海盗应选择怎样的航向；

（3）若 $v_a(t) \equiv v_a, v_b(t) \equiv \lambda v_a$，其中 λ 为参数，且海盗采用（2）中航向，试写出 $r(t)$ 和 $\theta(t)$ 所满足的微分方程；

（4）若 $\alpha(t) \equiv 0$，且海盗采用（2）中航向，试写出 $r(t)$ 和 $\theta(t)$ 的关系，并在 $\lambda = 1$ 时求出 $r(t)$ 和 $\theta(t)$。

图 11 来源：23 级第 4 次作业

6.4 在零时刻从水平面

一、在零时刻从水平面某处以初速度 v_0 垂直向上抛掷一质量为 m 的小球。在小球运动过程中仅受到重力和空气阻力。重力加速度为 g，空气阻力大小为 $f(v)$，其中 v 为小球的速度。小球在上升一段时间后下落至水平面，上升阶段经过时间与下落阶段经过时间分别记为 t_a 与 t_d。小球回到水平面时的速度记为 v_f。

（1）试给出小球在 t 时刻的速度 $v(t)$ 所满足的微分方程，并分别写出 t_a, t_d, v_f 值的表达式（必要时可包含积分等形式）；

（2）试说明 t_a 与 t_d 的大小关系，以及 v_f 与 v_0 的大小关系。

图 12 来源：23 级第 3 次作业

6.4.1 *Answer from ct*

6.4.1.1 问题（1）

6.4.1.1.1 $v(t)$ 微分方程

上升时，t 时刻由牛顿第二定律得到关于 $v(t)$ 的微分方程：

$$-f(v) - mg = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \tag{96}$$

下降时，同理得到关于 $v(t)$ 的微分方程（取速度方向为正方向）：

$$mg - f(v) = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \tag{97}$$

6.4.1.1.2 t_a, t_d, v_f 表示

由式 96 可以推出：

$$t_a = \int_0^{t_a}\mathrm{d}t = -m\int_{v_0}^{0}\frac{\mathrm{d}v}{mg+f(v)} \tag{98}$$

由式 97 可以推出：

$$t_d = \int_0^{t_d}\mathrm{d}t = m\int_0^{v_f}\frac{\mathrm{d}v}{mg-f(v)} \tag{99}$$

根据常用变换 $a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{v\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$，代入式 96 得到：

$$\begin{aligned} -mg\mathrm{d}x - f(v)\mathrm{d}x &= mv\mathrm{d}v \\ \Rightarrow x_0 = \int_0^{x_0}\mathrm{d}x &= -m\int_{v_0}^{0}\frac{v\mathrm{d}v}{mg+f(v)} \end{aligned} \tag{100}$$

代入式 97 得到：

$$\begin{aligned} mg\mathrm{d}x - f(v)\mathrm{d}x &= mv\mathrm{d}v \\ \Rightarrow x_0 = \int_0^{x_0}\mathrm{d}x &= m\int_0^{v_f}\frac{v\mathrm{d}v}{mg-f(v)} \end{aligned} \tag{101}$$

根据式 100 和式 101 可以得到 v_f 满足的积分式：

$$\int_0^{v_0}\frac{v\mathrm{d}v}{mg+f(v)} = \int_0^{v_f}\frac{v\mathrm{d}v}{mg-f(v)} \tag{102}$$

但是由于没有 $f(v)$ 的具体形式，所以无法进一步化简，综上，t_a, t_d, v_f 等于或满足的方程为：

$$\begin{cases} t_a = m\int_0^{v_0}\frac{\mathrm{d}v}{mg+f(v)} \\ t_d = m\int_0^{v_f}\frac{\mathrm{d}v}{mg-f(v)} \\ \int_0^{v_0}\frac{v\mathrm{d}v}{mg+f(v)} = \int_0^{v_f}\frac{v\mathrm{d}v}{mg-f(v)} \end{cases} \tag{103}$$

6.4.1.2 问题（2）

可以定性分析：

1. 因为上升时加速度大于下降时，所以 $t_a < t_b$；
2. 因为阻力的损耗，$v_f < v_0$.

6.5 在水平面某处抛掷

二、在水平面某处抛掷一小球，速率为v，方向与水平面夹角为θ。忽略空气阻力的影响。记小球返回水平面时小球在空中经过的长度为$L(v,\theta)$。

（1）求$L(v,\theta)$的表达式（可用含微分、积分等形式表示）；

（2）证明：对任意的$v>0$，$L\left(v,\frac{\pi}{4}\right)>L\left(v,\frac{\pi}{2}\right)$；

（3）对任意的$v>0$，求θ的表达式，使得$L(v,\theta)$最大。

图 13 来源：23 级第 3 次作业

6.5.1 *Answer from ct*

6.5.1.1 问题（1）

路程的一半可以看作平抛运动，初速度为 $v_0 = v\cos\theta$，总时间为 $t_0 = \frac{v\sin\theta}{g}$，总路程为 $L_0 = \frac{L}{2}$，那么有参数方程：

$$\begin{cases} x = v_0 t \\ y = \frac{1}{2}gt^2 \end{cases} \implies \begin{cases} \mathrm{d}x = v_0\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}y = gt\mathrm{d}t \end{cases} \tag{104}$$

路程微分为 $\mathrm{d}L = \sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2} = \sqrt{v_0^2+g^2t^2}\mathrm{d}t$，进行积分：

$$\begin{aligned} L_0 &= \int_0^{t_0} \sqrt{v_0^2+g^2t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= t\sqrt{v_0^2+g^2t^2}\,\Big|_0^{t_0} - \int_0^{t_0}\frac{g^2t^2}{\sqrt{v_0^2+g^2t^2}}\,\mathrm{d}t \\ &= t_0\sqrt{v_0^2+g^2t_0^2} - \left(\int_0^{t_0}\sqrt{v_0^2+g^2t^2}\,\mathrm{d}t - \int_0^{t_0}\frac{v_0^2}{\sqrt{v_0^2+g^2t^2}}\,\mathrm{d}t\right) \\ &= t_0\sqrt{v_0^2+g^2t_0^2} - L_0 + \int_0^{t_0}\frac{v_0^2}{\sqrt{v_0^2+g^2t^2}}\,\mathrm{d}t \end{aligned} \tag{105}$$

因此：

$$\begin{aligned} L = 2L_0 &= t_0\sqrt{v_0^2+g^2t_0^2} + \int_0^{t_0}\frac{v_0^2}{\sqrt{v_0^2+g^2t^2}}\,\mathrm{d}t \\ &= t_0\sqrt{v_0^2+g^2t_0^2} + \ln|t+\sqrt{v_0^2+g^2t^2}|\,\Big|_0^{t_0} \\ &= t_0\sqrt{v_0^2+g^2t_0^2} + \ln\frac{t_0+\sqrt{\frac{v_0^2}{g^2}+t_0^2}}{\frac{v_0}{g}} \end{aligned} \tag{106}$$

代入 $v_0 = v\cos\theta$，$t_0 = \frac{v\sin\theta}{g}$，得到：

$$L(v,\theta) = \frac{v^2}{g}\left(\sin\theta + \cos^2\theta\ln\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}\right) \tag{107}$$

6.5.1.2 问题（2）

因为 $L(v,\frac{\pi}{2}) = \frac{v^2}{g}$，$L(v,\frac{\pi}{4}) \approx 1.148\frac{v^2}{g}$，所以 $L(v,\frac{\pi}{4}) > L(v,\frac{\pi}{2})$。

6.5.1.3 问题（3）

根据式 107，对于任意 v，使 $L(v,\theta)$ 最大的 θ 相同。

令 $f(\theta) = \sin\theta + \cos^2\theta\ln\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$，求导得：

$$f'(\theta) = 2\cos\theta\left(1-\sin\theta\ln\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}\right) \tag{108}$$

对 $f(\theta)$ 作图得：

图 14 $f(\theta)$ 图像

所以，极大值点约为 $\theta = 0.985515\ \mathrm{rad} = 56.466°$，满足的方程为：

$$\sin\theta\ln\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta} = 1 \tag{109}$$

6.6 球状水滴问题

四、一球状水滴，初始半径为$a\geq 0$，在$t=0$时刻以初速度$v=0$在重力作用下穿过均匀的云层下落，吸收水蒸气后仍保持球状，但半径逐渐增大。记t时刻水滴的质量、半径和速度分别为$m(t)$, $r(t)$ 和 $v(t)$，ρ 为水的密度，g 为重力加速度，空气阻力不计。

（1）假设单位时间内，水滴质量增加值与其表面积成正比，比例系数为c。试写出$r(t)$的表达式和$v(t)$满足的微分方程；

（2）假设单位时间内，水滴质量增加值与其大圆面积和速度的乘积成正比，比例系数为k。试写出$r(t)$满足的微分方程；

（3）试求出（1）中$v(t)$的表达式，并证明

$$v(t) = \frac{gt}{4}\left(1+\frac{a}{r}+\frac{a^2}{r^2}+\frac{a^3}{r^3}\right)。$$

图 15 来源 24-25 秋冬讨论题(三)

6.6.1 *Answer from lzm*

(1)依题意：

$$\frac{dm}{dt} = c4\pi r^2 \tag{110}$$

同时：

$$\frac{dm}{dt} = 4\pi\rho r^2\frac{dr}{dt} \Rightarrow \frac{dr}{dt} = \frac{c}{\rho} \tag{111}$$

又因为初始半径为 a：

$$r(t) = \frac{c}{\rho}t + a \tag{112}$$

对于$v(t)$：

$$\begin{aligned} \frac{d(mv)}{dt} &= mg \\ \frac{dm}{dt}v + m\frac{dv}{dt} &= mg \\ \Rightarrow \frac{dv}{dt} &= g - \frac{3v}{r}\frac{c}{\rho} \end{aligned} \tag{113}$$

我们想要消去变量 t：

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= \frac{dv}{dr}\frac{dr}{dt} = \frac{c}{\rho}\frac{dv}{dr} \\ \Rightarrow \frac{dv}{dr} &= \frac{\rho}{c}g - \frac{3v}{r} \end{aligned} \tag{114}$$

补充 from lx

如果题目没出错的话，求$\frac{dv}{dt} = g - \frac{1}{m}\frac{dm}{dt}v = g - \frac{c}{\rho}\frac{3}{r}v = g - \frac{3}{t-\frac{a\rho}{c}}v(t)$

(2)依题意：

$$\begin{aligned} \frac{dm}{dt} &= k\pi r^2 v \\ \Rightarrow \frac{dr}{dt} &= \frac{kv}{4\rho} \end{aligned} \tag{115}$$

补充 from lx

感觉还可以继续化简？(因为 v(t)实际上还是关于 t 的函数)

我画出来是这样的:(不知道有没有算错)

动量定理:

$$\frac{dm}{dt}v + m\frac{dv}{dt} = mg \tag{116}$$

$$\therefore 4\pi r^2\rho\frac{dr}{dt}\frac{4\rho}{k}\frac{dr}{dt} + \rho\frac{4}{3}\pi r^3\frac{d^2r}{dt^2} = 0 \tag{117}$$

$$\therefore \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{1}{3}r\frac{d^2r}{dt^2} = 0 \tag{118}$$

(3)求解（1）中的方程，采用凑微分法,两边同乘r^3：

$$\begin{aligned} &d(r^3v) = \frac{\rho}{4c}gdr^4 \\ &\Rightarrow r^3v = \frac{\rho}{4c}g(r^4-a^4) \Rightarrow v = \frac{\rho}{4c}gr\left(1-\frac{a^4}{r^4}\right) \Rightarrow v = \frac{\rho}{4c}gr\left(1-\frac{a}{r}\right)\left(1+\frac{a}{r}+\frac{a^2}{r^2}+\frac{a^3}{r^3}\right) \end{aligned} \tag{119}$$

带入（1）中求得的式子即得：

$$r(t) = \frac{gt}{4}\left(1+\frac{a}{r}+\frac{a^2}{r^2}+\frac{a^3}{r^3}\right) \tag{120}$$

6.7 人口和种群数量是

来源：数学建模（H）12-13 春夏期末

（30 分+10 分）人口和种群数量是数学生物学的重要课题。除著名的 Malthus 模型和 Logistics 模型外，学者从不同角度，运用不同数学工具给出了众多研究成果。试回答以下问题：

（1）记人口分布函数 $F(r,t)$ 为 t 时刻年龄小于 r 的人口数，人口密度函数 $p(r,t) = \frac{\partial F}{\partial r}$。$\mu(r,t)$ 为 t 时刻年龄为 r 的人的死亡率。试写出反映年龄在 $[r, r+\mathrm{d}r]$ 内的人口数目 t 时刻到 $t+\mathrm{d}t$ 时刻变化情况的等式，进而给出 $p(r,t)$ 所满足的微分方程。

（2）某生物生长经过幼年、成年两个阶段。幼年个体（不论雌雄）经过一个时段进入成年，存活的概率为 p_j。成年个体经过一个时段仍存活的概率为 p_a。该种生物实行一雌一雄单配偶制，一个时段一对成年个体组成的配偶可产生幼年个体数量为 b，其中雌雄个体各占一半。记时段 k 某群落中该种生物幼年雄性、幼年雌性、成年雄性、成年雌性的个体数量分别为 $n_{jm}(k), n_{jl}(k), n_{am}(k), n_{af}(k)$。试给出从时段 k 到时段 k+1 该生物各类型个体数量应满足的关系，并将上述关系用矩阵表示。

（3）设某生物单个个体繁衍l个后代的概率为 $p_l, l = 0, 1, \cdots, N$，$\sum_{i=0}^{N} p_i = 1$。定义多项式函数 $f(x) = \sum_{i=0}^{N} p_i x^i$。设某群落中该生物第 0 代仅有 1 个个体, 历经 n 代繁衍, 第 n 代有 k 个个体的概率为 $a_{k,n}$, 记 $f_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k,n}x^k$。试写出 $a_{k,n}$ 满足的递推关系，（以下为附加题）并证明 $f_n(x) = f_{n-1}(f(x))$。

6.7.1 *Answer from lhb (simple.v) & xks*

没有看到答案 就浅浅给一手思路

考察常微分模型下 种群数量变化模型的运用 核心：找递推关系

(1)

此问答案由 4o-latest 提供。我们来逐步分析并建立所需的等式和微分方程。

在时刻 t，年龄在 $[r, r+\mathrm{d}r]$ 内的人口数可以表示为：

$$p(r,t)\,\mathrm{d}r \tag{121}$$

其中 $p(r,t)$ 是年龄为 r 的人口密度函数。

在 $t+\mathrm{d}t$ 时刻，年龄在 $[r, r+\mathrm{d}r]$ 内的人口数会发生变化，主要有以下几个因素：

1. **年龄增长**：在 t 时刻年龄为 $r-\mathrm{d}t$ 的人群，在 $t+\mathrm{d}t$ 时刻年龄变为 r。因此，这部分人群的数量是：

$$p(r-\mathrm{d}t, t)\,\mathrm{d}r \tag{122}$$

2. **死亡率的影响**：在 t 时刻年龄为 r 的人群中，有一部分人在 $[t, t+\mathrm{d}t]$ 时间内死亡。死亡人数为：

$$\mu(r,t)\,p(r,t)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}t \tag{123}$$

Hint

注意此处死亡率需要乘上 dt 才是$p(r,t)\,\mathrm{d}r$的死亡比例。该项也可以是$\mu(r-\mathrm{d}t,t)\,p(r-\mathrm{d}t,t)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}t$，也就是前一个极小时刻d$t$的死亡人数。采用这个解释的话，整体列式为$p(r,t+\mathrm{d}t)\,\mathrm{d}r = [1-\mu(r-\mathrm{d}t,t)](p(r-\mathrm{d}t,t))\,\mathrm{d}r$泰勒展开后二阶小量会被正确消去，结果相同。

–xks

故年龄在 $[r, r+\mathrm{d}r]$ 内的人口数的变化可以表示为：

$$p(r,t+\mathrm{d}t)\,\mathrm{d}r = p(r-\mathrm{d}t,t)\,\mathrm{d}r - \mu(r,t)\,p(r,t)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}t \tag{124}$$

这样就得到了题目要求的等式。接下来把它化成微分方程：

将 $p(r-\mathrm{d}t,t)$ 用泰勒展开式近似表示为：

$$p(r-\mathrm{d}t,t) \approx p(r,t) - \frac{\partial p}{\partial r}\mathrm{d}t \tag{125}$$

将 $p(r,t+\mathrm{d}t)$ 用泰勒展开式近似表示为：

$$p(r,t+\mathrm{d}t) \approx p(r,t) + \frac{\partial p}{\partial t}\mathrm{d}t \tag{126}$$

将这些代入守恒方程：

$$p(r,t) + \frac{\partial p}{\partial t}\mathrm{d}t = \left(p(r,t) - \frac{\partial p}{\partial r}\mathrm{d}t\right) - \mu(r,t)\,p(r,t)\,\mathrm{d}t \tag{127}$$

整理后得到：

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial r} + \mu(r,t)\,p(r,t) = 0 \tag{128}$$

这个方程描述了人口密度随时间 t 和年龄 r 的变化规律。

(2)

$$\boldsymbol{n}(k) = \begin{pmatrix} n_{jm} \\ n_{jf} \\ n_{am} \\ n_{af} \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ? & ? \\ 0 & 0 & ? & ? \\ p_j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_j & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{129}$$

似乎无法刻画 $\min(n_{am}, n_{af})$? 以下采用分类讨论的办法刻画

1. $n_{am} \geq n_{af}$时

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{b}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{b}{2} \\ p_j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_j & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{130}$$

2. $n_{am} < n_{af}$时

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{b}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{b}{2} & 0 \\ p_j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_j & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{131}$$

(3)

再回看这个问题,实际上是家族问题的直接迁移:

需要注意到的点：每个个体均能产生 1 到 N 个后代,从第 0 代开始为 1 个个体到第 n 代最多有N^n个个体

如果我们要求第 n 代有 k 个个体,需要对第 n-1 代的所有个体进行讨论，也就是$\sum_{i=1}^{N^{n-1}} f(x)^i$寻找其中的$x^k$项系数，直接计算是很困难的，所以我们只能寻找递推，也就是从 n-1 代时候向上寻找，就直接给思路了

讨论上一代有 1 到$N^n - 1$个个体，对每一种情况其出现的概率为$a_{i,n-1}$其中 i 为上一代的个体数目，给定个体数目后，对每个个体可能产生的子代个数进行约束，对概率求和即可，比如$a_{9,n-1}$表示上一代有 9 个个体，此时约束求和，产生 k 个子代的概率为$\sum_{\sum_{i=1}^{9} j_i = k} p_{j_1} p_{j_2} \dots p_{j_9}$

对于附加部分,实际上是将我们之前得到的递推代入 $f_n(x)$ 的系数做一次变形即可,主问题是对子代进行约束,附加时反过来对递推进行化简的时候把约束条件拆开就行 也就是看到 $\sum_{\sum_{i=1}^{9} j_i = k} p_{j_1} p_{j_2} \dots p_{j_9}$

其实和九个个体的子代讨论等价(上面的式子等价于$\left(\sum_{i=0}^{k} p_i x^i\right)^9$也即 $f(x)^9$)

6.8 性别人口问题

记 t 时刻某地区男性人口数和女性人口数分别为 $m(t)$ 和 $f(t)$。设男性和女性死亡率分别为常数 a_m 和 a_f，单位时间男性和女性出生数分别为 $b_m B(m,f)$ 和 $b_f B(m,f)$，其中 b_m，b_f 为常数，$B(m,f)$ 为 m 和 f 的某个函数。

1. 试给出反映男性人口数和女性人口数变化规律的微分方程（组）；
2. 试给出 $a_m = a_f$ 且 $b_m = b_f$ 时，男女人口数之差或比值的发展趋势；
3. 试给出函数 $B(m,f)$ 的某个较为合理的具体形式，并说明你的理由。

6.8.1 *Answer from ctc*

(1) 微分方程组

男性和女性人口数的变化可以通过以下微分方程组来描述：

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{dm}}{\mathrm{dt}} &= b_m B(m(t), f(t)) - a_m m(t) \\ \frac{\mathrm{df}}{\mathrm{dt}} &= b_f B(m(t), f(t)) - a_f f(t). \end{aligned} \tag{132}$$

(2) 当 $a_m = a_f$ 且 $b_m = b_f$ 时的发展趋势

当男性和女性的死亡率a_m 和 a_f以及出生率b_m和b_f相等时
$b_m = b_f = b, a_m = a_f = a$
我们可以简化微分方程组为

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{dm}}{\mathrm{dt}} &= bB(m(t), f(t)) - am(t) \\ \frac{\mathrm{df}}{\mathrm{dt}} &= bB(m(t), f(t)) - af(t). \end{aligned} \tag{133}$$

即可转化为递推公式

$$\begin{aligned} m_{t+1} &= m_t - am_t + bB(m,t) \\ f_{t+1} &= f_t - af_t + bB(m,t) \end{aligned} \tag{134}$$

男女人数差的变化趋势

$$\begin{gathered} m_{t+1} - f_{t+1} = (m_t - f_t)(1-a) \\ d_n = m_n - f_n = (m_0 - f_0)(1-a)^n \\ \text{又}(1-a) < 1 \\ \lim_{n\to\infty} d_n = 0 \end{gathered} \tag{135}$$

男女人数比的变化趋势

$$\frac{m_{t+1}}{f_{t+1}} = \frac{m_t - am_t + bB(m,t)}{f_t - af_t + bB(m,t)} = \frac{m_t}{f_t}\left(\frac{(1-a) + \frac{bB(m_t,f_t)}{m_t}}{(1-a) + \frac{bB(m_t,f_t)}{f_t}}\right) \tag{136}$$

$$\frac{(1-a) + \frac{bB(m_t,f_t)}{m_t}}{(1-a) + \frac{bB(m_t,f_t)}{f_t}} < 1 \tag{137}$$

解得$f_t < m_t$ 即说明$f_t < m_t$时，$\frac{m_{t+1}}{f_{t+1}}$将增大
有$\lim_{n\to\infty} \frac{m_n}{f_n} = 1$
（感觉这里的收敛其实不是特别好证明 QAQ，所以不是特别严谨等大佬补充）

结论：男女人数最终将趋于相等

(3) 函数 $B(m,f)$ 的合理形式

$$B(m,f) = \gamma m^\alpha f^\beta \tag{138}$$

其中γ表示受整个社会环境影响的生育情绪，α和β分别表示男女在生育率中的贡献（感觉合理即可）

补充 by zqy：感觉第二问可以两式直接作差：

$$\frac{\text{dm-df}}{\text{dt}} = -a(m(t) - f(t)) \tag{139}$$

分离变量，得

$$\frac{\text{d(m-f)}}{\text{m(t)-f(t)}} = -a\text{dt} \tag{140}$$

积分得
$|m(t) - f(t)| = c * \exp(-at)$
t 趋向无穷时，男女人数趋向于相等

6.9 常微分参考

6.9.1 1. 一阶线性常微分方程

一般形式为：

$$y' + p(x)y = q(x) \tag{141}$$

6.9.1.1 解法：

- **步骤 1**: 计算积分因子 $\mu(x)$，其定义为：

$$\mu(x) = e^{\int p(x)\,dx} \tag{142}$$

- **步骤 2**: 将方程两边乘以积分因子 $\mu(x)$，使方程变为：

$$\mu(x)y' + \mu(x)p(x)y = \mu(x)q(x) \tag{143}$$

左边可以写成导数的形式：

$$\frac{d}{dx}[\mu(x)y] = \mu(x)q(x) \tag{144}$$

- **步骤 3**: 对两边积分，得到：

$$\mu(x)y = \int \mu(x)q(x)\,dx + C \tag{145}$$

其中 C 是积分常数。

- **步骤 4**: 解出 y：

$$y = \frac{1}{\mu(x)}\left(\int \mu(x)q(x)\,dx + C\right) \tag{146}$$

6.9.2 2. 二阶线性常微分方程（齐次）

一般形式为：

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{147}$$

6.9.2.1 解法：

- 如果系数 $p(x)$ 和 $q(x)$ 是常数（即方程是常系数齐次方程），可以假设解的形式为：

$$y = e^{\lambda x} \tag{148}$$

将其代入方程，得到特征方程：

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0 \tag{149}$$

根据特征方程的根的情况，解分为以下三种情况：

1. **两个不同实根 λ_1, λ_2：**

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} \tag{150}$$

2. **两个相同实根 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$：**

$$y = (C_1 + C_2 x)e^{\lambda x} \tag{151}$$

3. **一对共轭复根 $\lambda = \alpha \pm \beta i$：**

$$y = e^{\alpha x}(C_1\cos(\beta x) + C_2\sin(\beta x)) \tag{152}$$

6.9.3 3. 二阶线性常微分方程（非齐次）

一般形式为：

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x) \tag{153}$$

6.9.3.1 解法：

- **步骤 1**: 先求对应的齐次方程（即 $g(x) = 0$）的通解 y_h。
- **步骤 2**: 求非齐次方程的一个特解 y_p。常用的方法包括：
  1. **待定系数法**：适用于 $g(x)$ 是多项式、指数函数、正弦或余弦函数的情况。
  2. **参数变动法**：适用于更一般的 $g(x)$。
- **步骤 3**: 将通解写为：

$$y = y_h + y_p \tag{154}$$

6.9.4 4. 高阶线性常微分方程

一般形式为：

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = g(x) \tag{155}$$

6.9.4.1 解法：

- **齐次方程**：假设解的形式为 $y = e^{\lambda x}$，得到特征方程，求解特征根并写出通解。
- **非齐次方程**：先求齐次方程的通解，再求非齐次方程的特解，最后将两者相加。

6.9.5 5. 矩阵形式的线性常微分方程

如果方程是向量形式：

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y} + \mathbf{b} \tag{156}$$

其中 $\mathbf{y}$ 是向量，A 是矩阵，$\mathbf{b}$ 是向量。

6.9.5.1 解法：

- **齐次方程**（$\mathbf{b} = 0$）：解特征值问题，找到矩阵 A 的特征值和特征向量，写出通解。
- **非齐次方程**：使用矩阵指数 e^{At} 或变分法求解。

7 传染病模型

7.1 传播者未知者抵制者问题

三、现有一总数为 N 的人群，任一人每天随机地和其它 A 人接触交谈。当知晓某一传闻的传播者（Spreader）和从未听过此传闻的未知者（Ignorant）交谈时，他将传闻告诉后者，后者也将知晓此传闻并在以后继续传播。当传播者和一已听过此传闻的人交谈时，双方均意识到传闻有假，从而成为抵制者（Stiflers），之后两人都不再传播这一传闻。记 t 时刻传播者、未知者和抵制者的人数分别为 $S(t)$，$I(t)$ 和 $R(t)$。
（1）试给出 $S(t)$，$I(t)$ 和 $R(t)$ 所满足的微分方程（组）；
（2）设 N 充分大，记 $s(t)$，$i(t)$ 和 $r(t)$ 为 t 时刻传播者、未知者和抵制者在人群中所占比例，且 $i(0) = \alpha > 0, s(0) = \beta > 0$。试给出描述 $s(t)$ 和 $i(t)$ 关系的函数式；
（3）证明：$\lim_{t\to\infty} i(t)$ 和 $\lim_{t\to\infty} s(t)$ 均存在，且 $\lim_{t\to\infty} i(t) < \frac{1}{2}$，$\lim_{t\to\infty} s(t) = 0$。

图 16　来源：23 级讨论题（三）

7.1.1 *Answer from ct*

7.1.1.1 问题（1）

如何理解?
例如，对于一个传播者，ta 平均一天会遇到 $A \cdot \frac{I}{N-1}$ 个未知者，并将他们变成传播者,这一因素对传播者数量增长的贡献就是 $S \cdot A \cdot \frac{I}{N-1}$。

直接给出答案：

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = S \cdot A \cdot \frac{I}{N-1} - S \cdot A \cdot \frac{S-1}{N-1} - R \cdot A \cdot \frac{S}{N-1} \\ \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = -S \cdot A \cdot \frac{I}{N-1} \\ \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} = S \cdot A \cdot \frac{S-1}{N-1} + R \cdot A \cdot \frac{S}{N-1} \end{cases} \tag{157}$$

7.1.1.2 问题（2）

当 N 充分大时，不用考虑常数，将式 157 左右同时除以 N 就能得到：

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = As(i - s - r) & (a) \\ \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = -Asi & (b) \\ \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = As(s + r) & (c) \end{cases} \tag{158}$$

式 158(a) 与 式 158(b) 相除，得到：

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}i} = \frac{i - s - r}{-i} = \frac{1}{i} - 2 \tag{159}$$

分离变量再两边同时积分，得到

$$s = -2i + \ln i + \alpha + 2\beta - \ln\beta \tag{160}$$

7.1.1.3 问题（3）*completed by lyw*

> Note
> 这一问我也不太确定这样写是否正确）

由于 $\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \le 0$，且 $i \ge 0$，所以 $\lim_{t\to\infty} i(t)$ 存在，记作 i_∞。同理，$\lim_{t\to\infty} r(t)$ 亦存在，记作 r_∞。由于 $i + r + s = 1$，$\lim_{t\to\infty} s(t)$ 也存在，记作 $s_\infty = 1 - i_\infty - r_\infty$。

所以，在 $t \to \infty$ 时，达到稳态，有：

$$\frac{\mathrm{d}(i-r)}{\mathrm{d}t} = As \Rightarrow s_\infty = 0 \tag{161}$$

所以 $s_\infty = 0$。

令 $f(t) = 2t - \ln t$，求导可知 f 在 $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ 递减，在 $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ 递增，在 $t = \frac{1}{2}$ 处取到最大值，将 i_∞ 和 s_∞ 代入第二题中的式子，得到

$$2i_\infty - \ln i_\infty = 2\beta - \ln\beta + \alpha \Rightarrow f(i_\infty) > f(\beta), \tag{162}$$

但由于 i 是递减的，故 $i_\infty < \beta$，若 $i_\infty \ge \frac{1}{2}$, 可由 f 的单调性推出矛盾

7.2 英国生物学家 Ronald Ross

来源：数学建模（H）13-14 春夏期末

英国生物学家 Ronald Ross 因发现蚊子是疟疾的传播媒介等贡献 而获得 1902 年的诺贝尔生理与医学奖。他曾尝试建立疟疾在人和蚊子之间传播 的数学模型。假设某区域在一段时间内人的数量 N 与蚊子的数量 n 保持不变。在时刻 t, 感染疟疾的人和蚊子数量分别为$I(t)$和$i(t)$。在dt时间内, 有$aI(t)dt$ 已感染疟疾的人康复, $mi(t)dt$ 已感染疟疾的蚊子死亡。在dt时间内，每只蚊子 会叮咬bdt个人。发生叮咬时，从已感染疟疾的人传染给未感染疟疾的蚊子的概 率为p，从已感染疟疾的蚊子传染给未感染疟疾的人的概率为p'。

（1）试建立$I(t)$和$i(t)$满足的微分方程；

（2）求上述微分方程的平衡点，并说明其对疟疾防控有何指导意义。

7.2.1 *Answer from jyh*

7.2.1.1

对于感染疟疾的一只蚊子，它单位时间会叮咬$b\frac{N-I}{N}$个健康的人，这些人有p'的概率被感染，故单位时间内有$p'b\frac{N-I}{N}i$人被感染，此外还有aI人康复。

同理，对于健康的一只蚊子，单位时间内会叮咬$b\frac{I}{N}$个生病的人，这些蚊子有概率p被感染，故单位时间内有$pb\frac{i}{N}(n-i)$只蚊子被感染，此外还有mi只蚊子死亡。

有微分方程组

$$\begin{cases} \frac{dI}{dt} = -aI + p'b\frac{N-I}{N}i \\ \frac{di}{dt} = -mi + pb\frac{I}{N}(n-i) \end{cases} \tag{163}$$

7.2.1.2

在平衡点上时，有

$$\begin{cases} \frac{dI}{dt} = -aI + p'b\frac{N-I}{N}i = 0 \\ \frac{di}{dt} = -mi + pb\frac{I}{N}(n-i) = 0 \end{cases} \tag{164}$$

将其化为

$$\begin{cases} -\frac{aI}{p'} + bi = b\frac{I}{N}i \\ -\frac{mi}{p} + bI\frac{n}{N} = b\frac{I}{N}i \end{cases} \tag{165}$$

有

$$-\frac{aI}{p'} + \frac{n}{N}bI = -\frac{mi}{p} + b\frac{I}{N}n \tag{166}$$

$$i = \frac{npp'b + apN}{Npp'b - mNp'}I \tag{167}$$

将结果带回式 165 有

$$\begin{cases} I = N - \frac{aN^2(pb-m)}{bp(np'b+aN)} \\ i = n - \frac{m(np'b+aN)}{bp'(pb-m)} \end{cases} \tag{168}$$

8 未分类

8.1 现有三个容积均为

六、现有三个容积均为$n \in \mathbb{N}$的容器，盛水量总和为n。一次合法的倾倒在其中两个容器间进行，即将两个容器中盛水多的容器中的水注入盛水少的容器中，使盛水少的容器中的水量加倍。即若倾倒前它们的盛水量分别为x和y，其中$x \le y$，则倾倒后它们的盛水量分别为$2x$和$y-x$。

（1）设a,b,c为正整数，其中$a \le b \le c$，$p = \left\lfloor \frac{b}{a} \right\rfloor, q = \left\lceil \frac{b}{a} \right\rceil, k = \lfloor \log_2 p \rfloor$。证明：$\min\{b-pa, qa-b\} \le \frac{a}{2}$且$c \ge 2^k a$；

（2）证明：若某一时刻三个容器中的盛水量分别为a,b,c，其中$a \le b \le c$且$b - pa \le \frac{a}{2}$，则必可通过不超过$k+1$次合法倾倒，使得三个容器中至少一个容器的盛水量不超过$\frac{a}{2}$；

（3）证明：只要三个容器中的盛水量均为整数，总可通过不超过$(\log_2 n)^2$次合法倾倒，使其中一个容器中的水量为0（提示：利用（2）和（4）的结论）；

（4）证明：若某一时刻三个容器中的盛水量分别为a,b,c，其中$a \le b \le c$且$qa - b \le \frac{a}{2}$，则必可通过不超过$\lfloor \log_2 q \rfloor + 1$次合法倾倒，使得三个容器中至少一个容器的盛水量不超过$\frac{a}{2}$。

图 17 来源：23 级思考题（三）

8.1.1 *Answer from ct*

8.1.1.1 问题（1）

比较明显，就不证了，但是注意这一问的结论在后面非常有用。

8.1.1.2 问题（2）

我们希望构造出盛水量为 $b - pa$ 的容器，显然应该从 B 中倒出 pa 的水。将 p 用二进制表示为：$\sum_{i=0}^{k} p_i 2^i = p$，然后，从 $i = 0$ 开始遍历 p 的所有位，如果 $p_i = 1$，那么 $B \to A$ 倾倒；否则 $C \to A$ 倾倒，最终 B 中剩下 $b - pa \le \frac{a}{2}$ 的水。

另外，C 中剩余的水有 $c - \sum_{i=0}^{k}(1-p_i)2^i a = c - \left(2^k - 1 - p\right)a \ge c - 2^k a \ge 0$，所以 C 中的水也足够。这里的 $2^k - 1 - p$ 就是 p 按位取反。

8.1.1.3 问题（4）

若 $q = \sum_{i=0}^{l} 2^i$，其中 $l = \lfloor \log_2 q \rfloor$，且 $q_l = 1$。

先进行 l 次倒水，如果 $q_i = 1$，$B \to A$ 倾倒；如果 $q_i = 0$，$C \to A$ 倾倒，结束时的水量为 $A = 2^l a, B = b - \left(q - 2^l\right)a$。容易验证 A, C 的水都足够。

最后一次，$A \to B$ 倾倒，$A = qa - b \le \frac{a}{2}$，得证。

8.1.1.3.1 问题（3）

不是很确定，感觉是每次操作能够逼近到上次最少水量的 $\frac{1}{2}$，进行 $\log_2 n$ 次操作一定能得到 $\le \frac{1}{2}$ 的水量，就完成了。

8.1.2 *Answer from cc98*

8.1.2.0.1 问题（3）

由上述证明，我们可以得到，一次完整流程的倾倒，可以使得原先最小盛水量减半
我们现在假设初始最小盛水量为 a，则盛水量第二的容器的盛水量至多为 $\frac{n-a}{2}$。
若 $a = 2^k$ 则从 a 依次减半到 1 需要 k 次流程，减到0需要 $k + 1 = log_2 a + 1$ 次流程
若 $a = 2^k + s, 0 < s < 2^k$，则从 a 依次减半到 0 需要 $k+1$ 次流程，即 $\lfloor log_2 a \rfloor + 1$ 次流程
即不论 a 是多少，我们都需要 $\lfloor log_2 a \rfloor + 1$ 次流程。
根据抽屉原理，我们知道，初始的 $a \le \frac{n}{3}$
显然，我们有 $\lfloor log_2 a \rfloor + 1 \le \lfloor log_2 \frac{n}{3} \rfloor + 1 \le log_2 n - log_2 3 + 1 < log_2 n$，故我们可以在 $log_2 n$ 次流程内将某个容器的盛水量变为0。
至此，我们仅需证明，每次流程的合理倾倒次数不超过 $log_2 n$ 即可
我们知道，$p = \lfloor \frac{\frac{n}{a}-1}{2} \rfloor, q = \lceil \frac{\frac{n}{a}-1}{2} \rceil$
由此，我们得知，每一次流程下的合理倾倒次数为 $\lfloor log_2 p \rfloor + 1$ 或 $\lfloor log_2 q \rfloor + 1$
则有

$$\lfloor log_2 p \rfloor + 1 \le log_2 p + 1 \le log_2 \frac{n-a}{2a} + 1$$

$$= log_2(n-a) + 1 - log_2(2a) \le log_2(n-a)$$

$$\le log_2 n$$

$$\lfloor log_2 q \rfloor + 1 \le log_2 q + 1 < log_2(\frac{n-a}{2a} + 1) + 1$$

$$= log_2 \frac{n+a}{2a} + 1$$

显然，右侧的函数关于 a 是递减的，在 $a \ge 2$ 的情况下，我们有
$log_2 \frac{n+a}{2a} + 1 \le log_2 \frac{n+2}{4} + 1$
若有 $log_2 \frac{n+2}{4} + 1 \le log_2 n \iff \frac{n+2}{4} \cdot e \le n \iff n \ge \frac{2e}{4-e} > 2$
当然，我们还需验证 $a = 1$ 的情况，在此情况下，我们需要合理倾倒
$\lfloor log_2 1 \rfloor + 1 \le log_2 \frac{n-1}{2} + 1 < log_2(n-1) < log_2 n$ 次。
由上述分析，我们得知，在 $n > 2$ 的情况下，我们可以在不超过 $log_2 n$ 次流程下，每次流程不超过 $log_2 n$ 次合理倾倒下，即在总共不超过 $(log_2 n)^2$ 次合理倾倒下，将一个容器的盛水量清空。
当 $n = 1, 2$ 时，有抽屉原理，必定有一个容器一开始就是空的，只需倾倒0次即可。

8.2 学校选学生问题

一、学校希望从n名学生中录取一名，学生以随机顺序逐个前来面试。通过面试可给出已面试者的综合素质高低顺序，某位学生是否被录取须在该学生面试后立即决定，在作出不录取决定后方能面试下一名学生。考虑到最优秀的学生可能在录取后选择其他学校，学校希望录取到所有考生中综合素质第二名的学生的概率尽可能大。

（1）分别记f_k和g_k为综合素质在前k名面试的学生中居于第一名和第二名的学生在所有学生中居于第二名的概率。求f_k和g_k；

（2）记v_k为不录取前k名学生后，采用最优策略可能录取到综合素质第二名的学生的概率的最大值。试写出v_k满足的递推关系；

（3）求v_k，并给出相应的最优策略。

图 18 来源：23 级讨论题（二）

8.2.1 Answer from zyh & zqy

(1) $\begin{cases} f_k = \frac{k(n-k)}{n(n-1)} \\ g_k = \frac{k(k-1)}{n(n-1)} \end{cases}$ 用排列组合可算得

(2) 有 $v_n = 0$，$v_{n-1} = \frac{1}{n}$ (前 n-1 人不录取，第n人有$\frac{1}{n}$概率为所有考生第2名)

分三种情况考虑：

有 $v_k = \frac{1}{k+1} f_{k+1}$ 第 k+1人为前 k+1人第1名

$+ \frac{1}{k+1} g_{k+1}$ 第 k+1 人为前 k+1 人第2名

$+ \frac{k-1}{k+1} v_{k+1}$ 第 k+1人在前 k+1 人中既非第1又非第2

$\Rightarrow v_k = \frac{1}{n} + \frac{k-1}{k+1} v_{k+1}$

(3) 将(2)中递推公式左右两边同除k(k-1)，即可算得：

$v_k = \frac{k(k-1)}{n} \times (\frac{1}{k-1} - \frac{1}{n-1}) = \frac{k}{n} - \frac{k(k-1)}{n(n-1)}$

最优策略：令 $s = k+1$，若前 s 人中第 s 人排第1或第2则录取，

否则继续面试 ($s = s+1$)

图 19 思路和答案参考