

第 17 章 光的衍射

一 单缝与光栅衍射

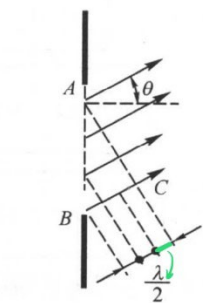
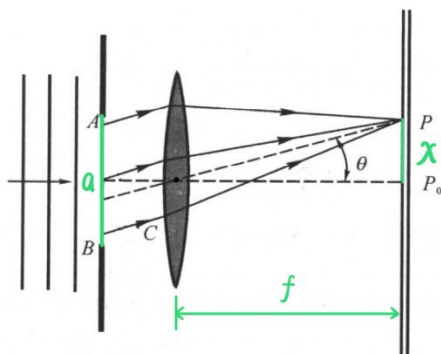
1. 单缝衍射

① 模型参数

平行光垂直入射单缝

- a : 缝宽
- θ : 光线相对缝面法线的偏转角
- f : 透镜焦距
- x : 条纹位置到中心的距离

$$\sin \theta \approx \tan \theta = \frac{x}{f}$$



单个半波带宽度

② 明暗条纹位置

- 中央明纹中心 $\theta = 0$ 光强最强
- 暗纹中心 $a \sin \theta = \pm k \lambda \quad k = 1, 2, 3, \dots$ 满足该方程的 θ 处可以为暗纹
- 明纹中心 $a \sin \theta = \pm (k + 1/2) \lambda \quad k = 1, 2, 3, \dots$
- 若不是垂直入射，而是存在入射角 i ，则将 $\sin \theta$ 替换为 $\sin \theta + \sin i$

2. 光栅衍射

① 光栅参数

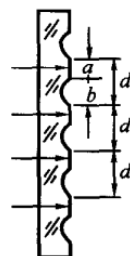
- 光栅：任何能起周期性地分割波阵面作用的衍射屏，可视为多个规律排列的单缝
- a : 透光缝的宽度 b : 不透光刻痕的宽度 d : 光栅常数 N : 单缝数量

$$d = a + b$$

② 主极大明纹的形成

- 光栅方程： $d \sin \theta = \pm k \lambda \quad k = 0, 1, 2, \dots$ 满足该方程的 θ 处可以看到明纹

由于 $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ ，因此 k 存在最大值和最小值，也就是主极大个数是有限的



(a) 平面透射光栅

③ 缺级

某些衍射角 θ 同时满足光栅方程和单缝衍射的暗纹条件，此时原定的主极大就会变成暗纹 → 缺级

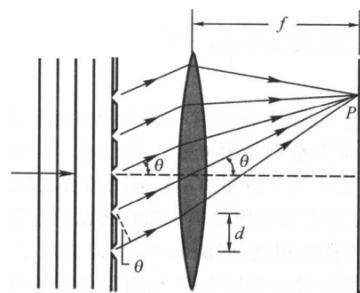
$$\begin{cases} a \sin \theta = k_1 \lambda \\ d \sin \theta = k_2 \lambda \end{cases} \rightarrow k_2 = \frac{d}{a} k_1$$

- k_1 取遍正整数时，若算出 k_2 也是正整数，那么这个 k_2 就会缺级

④ 光栅分辨本领 R

- 在某级恰好能分辨的两条谱线的平均波长 $\bar{\lambda}$ 与其波长差 $\Delta \lambda$ 的比值

$$R = \frac{\bar{\lambda}}{\Delta \lambda} = kN$$



常见题型

1. 单缝衍射

例 1 (例 17.1) 用波长 λ 的平行光垂直入射宽度 a 的单缝, 一焦距 f 的透镜紧靠缝后, 观察屏置于焦平面处。求屏上中央明纹的宽度。

解 中央明纹的宽度为两条第一级暗纹间的距离, 因此由暗纹方程 $a \sin \theta = k\lambda$, 代入 $k = \pm 1$:

$$\sin \theta = \pm \frac{\lambda}{a} \quad \text{又由几何关系有} \quad \sin \theta \approx \frac{x}{f}$$

$$\text{因此有 } \Delta x = x_1 - x_{-1} = f(\sin \theta_1 - \sin \theta_{-1}) = 2 \frac{\lambda f}{a}$$

2. 光栅衍射

① 基本问题

描述: 已知入射角、波长、光栅参数, 求出可见的主极大, (可能还会包含 N 与分辨本领)

思路: 列出光栅方程, 根据角度限制, 得到可能的 k

再根据 d/a , 依次代入 $k_1 = 1, 2, \dots$, 检查结果会涉及哪些 k

最后得出可见的主极大

例 2 (例 17.2) 以每毫米 500 条栅纹的衍射光栅观察钠光谱线 ($\lambda = 590\text{nm}$), 缝宽 a 与刻痕宽度 b 之比为 1:2。(1) 平行光垂直入射于光栅时能看到哪些光谱线? (2) 平行光以 30° 斜入射时又如何?

解 由题意, 光栅常数 $d = 1\text{mm} / 500 = 2\mu\text{m}$ 。

(1) 由光栅方程 $d \sin \theta = k\lambda$, 由 θ 的范围, 得 $-1 < \frac{k\lambda}{d} < 1$

$\rightarrow -\frac{d}{\lambda} < k < \frac{d}{\lambda} = 3.39$ 向下取整得 $k_{\max} = 3$, 因此最高可能会看见第 3 级主极大

由单缝暗纹方程与光栅方程联立: $k_2 = \frac{d}{a} k_1 = \frac{a+b}{a} k_1 = 3k_1$

因此 $k_2 = \pm 3, \pm 6, \pm 9 \dots$ 缺级, 结合对可能看见的 k 的考察:

能够看到的光谱线为 $0, \pm 1, \pm 2$, 共 5 条

(2) 斜入射时, 将光栅方程改写为 $d(\sin \theta + \sin i) = k\lambda$, 同样可以得到 $d \frac{-1 + \sin i}{\lambda} < k < \frac{1 + \sin i}{\lambda} d$

因此 $-1.69 < k < 5.08$ 可能看到的是 $-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$ 级

单缝暗纹方程与光栅方程联立依然为 $k_2 = 3k_1$, 因此第 3 级不可见

\therefore 可见的是 $-1, 0, 1, 2, 4, 5$ 级

② 逆向问题

已知主极大可见情况或缺项情况, 反求光栅参数、波长; 若结果有多种可能或范围, 求出最值

例 3 某种单色光垂直入射到每厘米有 8000 条刻线的光栅上, 若用白光垂直照射, 哪些波长的光能够观

察到第二级谱线?

解 · 由光栅方程 $d \sin \theta = k\lambda$, 代入 $k=2$, $d=1\text{cm}/8000=1.25\mu\text{m}$, $\sin \theta < 1$:

$$\lambda < \frac{d}{k} = \frac{1.25\mu\text{m}}{2} = 625\text{nm}$$

· 根据可见光波长的范围, 能观察到二级谱线的波长范围是 $400\text{nm} \sim 625\text{nm}$

例 4 设有一光栅, 当白光垂直照射时, 波长为 720nm 的红光在衍射角为 30° 的方向上存在第二级主极大, 且该级能分辨 720nm 红光附近的最小波长差 $\Delta\lambda$ 为 0.05nm 。此外在 30° 的方向上不存在可见光谱线的其它主极大。求该光栅的 (1) 光栅常数; (2) 总缝数; (3) 可能及最小缝宽

解 (1) 关键句为“波长为 720nm 的红光在衍射角为 30° 的方向上存在第二级主极大”

由光栅方程 $d \sin \theta = k\lambda$, 此时 $k=2$, $\theta=30^\circ$, $\lambda=720\text{nm}$, 因此得到 $d=2.88\mu\text{m}$

(2) 关键句为“该级能分辨 720nm 红光附近的最小波长差 $\Delta\lambda$ 为 0.05nm ”

由分辨本领的公式 $R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = kN$, 代入 $k=2$, $\lambda=720\text{nm}$, $\Delta\lambda=0.5\text{nm}$, 得 $N=7200$

(3) 关键句为“在 30° 的方向上不存在可见光谱线的其它主极大”

① 首先要搞清楚在该方向上可能出现的主极大:

由光栅方程 $d \sin \theta = k\lambda \rightarrow \lambda = \frac{d \sin \theta}{k} = \frac{1440\text{nm}}{k}$, 依次取 $k=1, 2, 3, \dots$, 算出对应的 λ

\rightarrow 这意味着在 30° 的方向上, 会出现这些波长的主极大

其中只有 $k=2$, $k=3$ 对应的 λ 落在可见光范围, 因此可能出现的其它主极大只有 $k=3$

② 然后搞明白为什么看不见 \rightarrow 缺级了

由“缺级方程” $k_2 = \frac{d}{a} k_1$, 可得到 $a = \frac{k_1}{k_2} d$, 其中 $k_2=3$, $d=2.8\mu\text{m}$

· k_1 为正整数, 且 $k_1 < k_2 \rightarrow$ 可能取值为 $k_1=1$ ($a=960\text{nm}$) $k_1=2$ ($a=1920\text{nm}$)

因此, 当 k_1 取得最小值 1 时, a 取到最小值 960nm

二 其它衍射

3. 圆孔衍射 (最小分辨角)



$$\theta_{\min} = 1.22 \frac{\lambda}{D}$$

· D : 圆孔直径 (包括人的瞳孔)

当 $\theta < \theta_{\min}$ 时, 仪器或人就无法分辨两个点

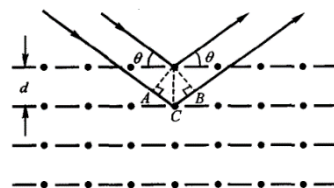
2. X 射线在晶体上的衍射

· θ : 入射光与晶面间的掠射角

d : 相邻晶面间距

· 能够产生强反射的 θ 为:

$$2d \sin \theta = k\lambda \quad k=1, 2, \dots$$



常见题型

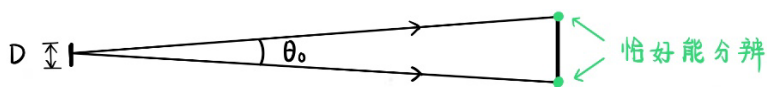
① 圆孔衍射（最小分辨角问题）

例 5 通常情况下，人眼瞳孔直径为 3mm，若视觉感受最灵敏的光波波长为 550nm，则人眼最小分辨角为 _____ rad；在教室的黑板上画有一等号“=”，两横线相距 2mm，则只有坐在距黑板 _____ m 内的同学才能看得清。

解 当你能看出这是一个圆孔衍射问题之后，事情就很简单了

$$\text{由最小分辨角公式 } \theta_{\min} = 1.22 \frac{\lambda}{D} = 1.22 \times \frac{550\text{nm}}{3\text{mm}} = 2.24 \times 10^{-4} \text{rad} \text{ (第一空)}$$

根据最小分辨角的图示，第二空实际上是在问下图中等腰三角形的高 h （已知底边为 2mm）：



由于 θ 角几乎为 0，因此这个三角形可以看成是直角三角形： $\tan \theta = \frac{2\text{mm}}{h} \approx \theta$

$$\therefore h = \frac{2\text{mm}}{2.24 \times 10^{-4}} = 8.9\text{m} \text{ (第二空)}$$

② X 射线在晶体上的衍射

例 6 一束 X 射线含有 0.095nm 到 0.13nm 范围内的各种波长，以掠射角 45° 入射到晶体上；已知晶格常数 $d = 0.275\text{nm}$ ，则晶体对波长 _____ 和 _____ 的 X 射线产生强反射

解 由晶体衍射公式 $2d \sin \theta = k\lambda$ ，固定值为 $d = 0.275\text{nm}$ ， $\theta = 45^\circ$

依次代入 $k = 1, 2, \dots$ ，得到一系列 λ ，看它们是否在 X 射线的范围里

· $k = 3$ 时， $\lambda = 0.130\text{nm}$ ，在范围里； $k = 4$ 时， $\lambda = 0.097\text{nm}$ ，在范围里；其余均在范围外
因此答案填“0.130nm”和“0.097nm”