Chapter 1 预备知识

复数基本知识

复数的三种表示方法：$z = x + iy = re^{i\theta}$

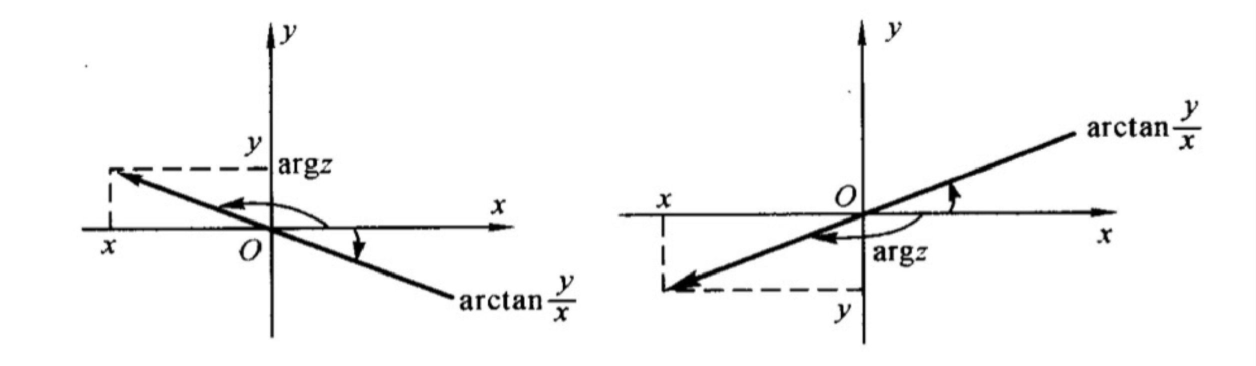
复数相等: 实部和虚部都相等

模 $r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$

幅角 $\theta = Arg\ z = arg\ z + 2k\pi$，是一个集合，每个元素相差 2π，其中在$(-\pi, \pi]$的$\theta_0 = arg\ z$称为辐角主值。

1. $\theta_0 = arg\ z \in (-\pi, \pi]$
2. $arg\ 0, arg\ \infty$ 无意义
3. 辐角主值可以直接看成平面上的点的对应角，而$arctan\ \frac{y}{x} \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$不行。所以二者有一个类似于分段函数的对应关系式。

欧拉公式：$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$



复数的运算

复数的加减法——向量的加减法

乘法：$|z_1 z_2| = r_1 r_2 = |z_1||z_2|$；$Arg\ z_1 z_2 = Arg\ z_1 + Arg\ z_2$

除法：$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$
$Arg\frac{z_1}{z_2} = Arg\ z_1 - Arg\ z_2$

$deMoivre$公式：$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$

乘方：$z^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)\ =\ r^ne^{in\theta}$

开方：$\sqrt[n]{z}=^n\sqrt{|z|}e^{i\frac{argz+2k\pi}{n}},k=0,1,\cdots,n-1$
k只取0到n-1的n个值，这是因为k取其他整数时，得到的值必是上述n个值的重复出现

Chapter 2 解析函数

复变函数

复变函数：$w=f(z)=f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$

极限：$\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=A\ \Leftrightarrow\ \lim\limits_{x\to x_0,y\to y_0}u(x,y)=u_0,\ \lim\limits_{x\to x_0,y\to y_0}v(x,y)=v_0$

连续：$\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=f(z_0)\ \Leftrightarrow\forall\epsilon>0,\exists\ \delta(\varepsilon)>0$，当$0<|z-z_0|<\delta$时，$|f(z)-f(z_0)|<\varepsilon$

⇔对应的实函数u,v分别连续（左极限=右极限=$f(z_0)$）

> 在闭区域$\overline{G}$中连续的函数有两个重要性质：
>
> 1. $|f(z)|$在$\overline{G}$中有界，并达到它的上下界。
> 2. $f(z)$在$\overline{G}$中一致连续，即对于任意 ε>0，存在与z无关的$\delta(\varepsilon)>0$，在$\overline{G}$中的任何两点z_1,z_2,只要满足$|z_1-z_2|<\delta$,就有$|f(z_1)-f(z_2)|<\varepsilon$.

若两函数在z_0连续，则其$+,-\times,\div$(分母$\neq 0$)，复合运算后，在点z_0仍连续。

求导：$f'(z_0)=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$

微积分回忆内容

连续 可导和可微

连续	$f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+o(\Delta x)$
偏导数	$f(x_0+\Delta x,y_0)=f(x_0,y_0)+\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x+o(\Delta x)$ $f(x_0,y_0+\Delta y)=f(x_0,y_0)+\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y+o(\Delta y)$
多元可微	$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)=f(x_0,y_0)+\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y+o(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2})$

1、偏导数存在且偏导数连续，一定可微。

2、可微一定可导，可导不一定可微。

3、一般看不可导：**沿着两条不同方向线趋近某点，不一样推出矛盾**

解析性

定义：

> $f(z)$在z_0的某个邻域内的**每一点可导** $\Leftrightarrow$ $f(z)$在z_0点解析/正则
>
> $f(z)$在区域D内的每一点可导 $\Leftrightarrow$ $f(z)$在区域D内解析/正则
>
> $\Leftrightarrow$ $f(z)$在D内的任意点z_0（存在z_0的一个邻域）处均可展开为收敛的幂级数
>
> 奇点：不解析的点。
>
> 孤立奇点：$D(z_0,\delta)$内的唯一奇点。

判别法：

- 同时满足：

  ①$u(x,y),v(x,y)$在(x,y)点的邻域内（或D内）可微

  ②Cauchy-Riemann条件（**C-R条件**）

$
\left \{
\begin{array}{}
\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\\
\frac{\partial u }{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}
\end{array}
\right.
$

注意：如果满足条件的是孤立的点，那么只能说$f(z)$在该点上可导，而不解析。

- 解析函数的复合函数（加、减、乘、除等解析函数）仍为解析函数；
- 反函数解析法则：设$w=f(z)$在区域D内单叶解析，$(f^{-1}(w))'=\frac{1}{f'(z)}=\frac{1}{f'[f^{-1}(w)]}$

> 单叶函数：在区域D上解析的单值复变函数$f(z)$，若对D中任意不同的两点z_1, z_2，有：$f(z_1) \neq f(z_2)$，则说f(z)为D上的单叶函数。

- $f(z) = \bar{z}$处处不可微，处处不解析

解析函数 $f(z)$ 退化为常数的充分条件：

- 若$f(z)$在D上解析，且满足以下条件之一：

> 1. 导数恒为0 （？）
> 2. 解析函数的实部、虚部、幅角、模中有1恒为常数
> 3. $\overline{f(z)}$ 在D上解析

则$f(z)$在D内恒为常数。

- 另若$f(z)$在整个复平面解析，见柳维尔定理解析性。

小结：函数 f(x) 在区域D解析的等价条件有：

> 1. 函数 f(x) 在区域 D内可导；
> 2. Re(f),Im(f)在区域D内可微且满足Cauchy-Riemann条件；
> 3. 函数 f(x) 在区域 D内连续且积分与路径无关；
> 4. 函数 f(x) 在区域 D内可展开为幂级数。

调和函数
定义：如果**实函数** $U(x,y)$ 在区域 D 内有二阶连续偏导数并满足拉普拉斯方程 $\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0, inD$,则称$U(x,y)$为D内的调和函数
定理：$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$是区域D内的解析函数则$u(x,y)$，$v(x,y)$在D内均为调和函数

常见初等函数

全部初等函数（多项式函数、指数函数、三角函数、对数函数、幂函数......）在相应的定义域上都是解析的。

指数函数：$w = e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$

求导等同实指数函数: $(e^z)' = e^z$ （$dz = d(x+iy)$）

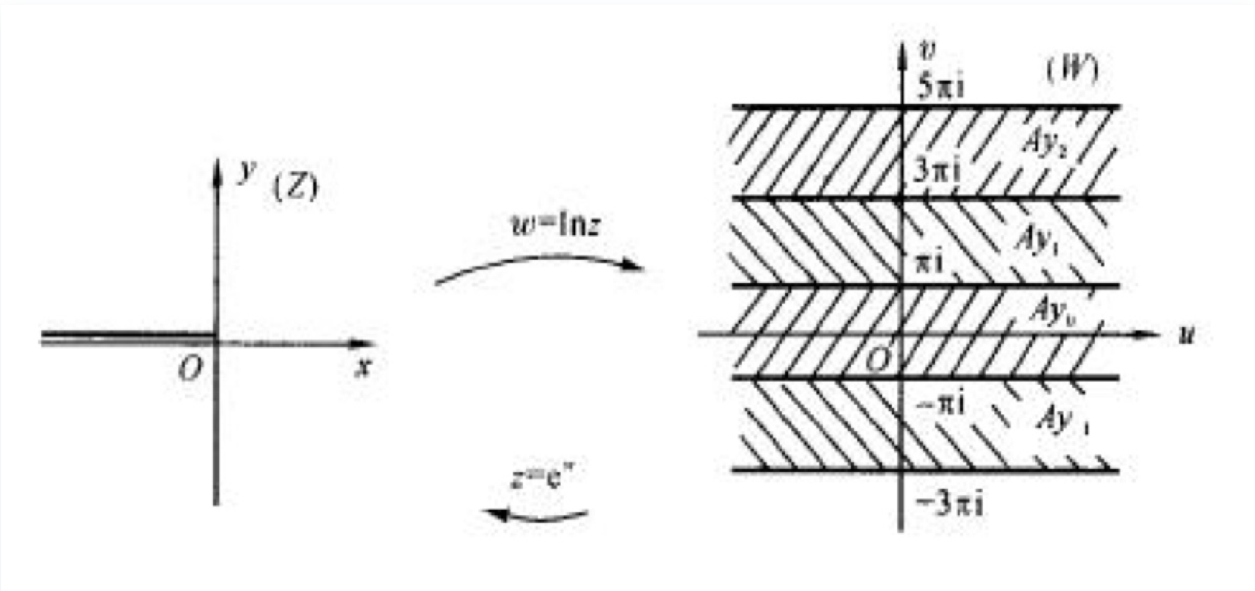
在整个复平面上处处解析。

e^z为指数函数，则
1.$e^{z+w} = e^z \cdot e^w$对所有$z, w \in \mathfrak{C}$成立，所以$(e^z)^n = e^{zn}$
2.$e^z \neq 0$如果z=x为实数，当$x > 0$，$e^z > 1, x < 0$，$e^z < 1$
3.e^z是周期函数，其周期$T = 2n\pi i$(n为整数，$n \neq 0$)
4.$e^{\frac{\pi}{2}i} = i, e^{\pi i} = -1, e^{\frac{3\pi}{2}i} = -i, e^{2\pi i} = 1$
5.$e^z = 1$的充分必要条件是$z = 2n\pi i$(n为整数)

对数函数:
$w = Lnz = lnz + i2k\pi = ln|z| + iArgz = (ln|z| + iargz) + 2ki\pi = ln|z| + i(argz + 2k\pi)$

对数函数Lnz是多值函数，有无穷多个分支，k=0时的分支称为对数函数的主支，记:
$Lnz = ln|z| + iargz$——对数函数主支
显然，$Lnz = lnz + i2k\pi$

基本性质:
$Ln(z_1 z_2) = Lnz_1 + Lnz_2$
$Ln(\frac{z_1}{z_2}) = Lnz_1 - Lnz_2 (z_2 \neq 0)$
在原点和负实轴上不解析。
$Ln(z)' = \frac{1}{z}$



幂函数: $w = z^\mu = e^{\mu Ln\, z} = e^{\mu ln\, z} \cdot e^{2k\pi\mu i}, \mu \in C$

幂函数的求导公式: $(z^\mu)' = \mu z^{\mu-1}$

$w = z^a$ 的多值性:

> 1. a 为整数——单值函数（左因式为主值，右因式为定值1）
> 2. a 为 p/q——有限值函数；特别地，a 为 $1/n$ —— n 值函数
> 3. a 为无理数/虚部不为0的复数——无穷多值

在原点和负实轴上不解析。（可以看作指数函数和对数函数的复合函数。）

三角函数和双曲函数：

$
\sin z =\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\\
\cos z =\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\\
sh z=\frac{e^z-e^{-z}}{2}\\
ch z=\frac{e^z+e^{-z}}{2}
$

在整个复平面上处处解析。（可以看作指数函数的复合函数。）

和角公式：
$ch(a+b)=cha\ chb+sha\ shb$
$sh(a+b)=sha\ chb+cha\ shb$

性质：
1.$\sin z,\cos z$是以2π为周期的周期函数；shz,chz是以$2\pi i$为周期的周期函数

2.$\sin z,shz$为奇函数；$\cos z,chz$为偶函数

3.一些恒等式仍然成立：
具体需要额外注意的是：
$ch^2z-sh^z=1,shz+chz=e^z$
$sh(z_1+z_2)=shz_1chz_2+chz_1shz_2$
$ch(z_1+z_2)=chz_1chz_2+shz_1shz_2$

4.与三角函数的关系：

$
sh\ iz=isinz;\ ch\ iz=cosz\\sin\ iz=ish\ z;\ cos\ iz=chz
$

5.$|\sin z|,|\cos z|$不是有界函数
