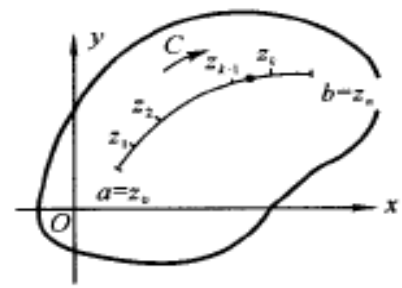
复变函数与拉普拉斯变换

第三章　复变函数的积分

第3.1节　复变函数的积分及其性质

一 复积分的定义及计算

定义： 设 C 是复平面上一有向曲线，$f(z)$ 在 C 上有定义。分割曲线 C，分点为 $a=z_0,z_1,z_2,\cdots,z_{n-1},z_n=b$，任取 $\xi_k\in z_{k-1}z_k$，作和



$$S_n=\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta z_k,\quad (\Delta z_k=z_k-z_{k-1})$$

若令 $\sigma=\max\limits_{1\le k\le n}\{|z_{k-1}z_k|\}\to 0$，$S_n$ 都收敛到同一极限，则称函数 $f(z)$ 沿曲线 C 可积，此极限值称为 $f(z)$ 沿曲线 C 的积分，记为：

$$\boxed{\int_C f(z)dz=\lim_{\sigma\to 0}\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta z_k.}$$

注：当曲线 C是区间 $a \le x \le b$ 而 $f(z) = u(x)$ 时，复积分为实函数的定积分。

例　设 C是连接复数点 a, b的任意曲线，用定义计算积分 $\int_C dz.$

解：
$$\int_C dz = \lim_{\sigma \to 0} \sum_{k=1}^{n} 1 \cdot (z_k - z_{k-1})$$

$$= \lim_{\sigma \to 0} (b - a) = b - a.$$

一般而言，大多积分用定义难以计算。

复积分与曲线积分的关系

定理 设函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在曲线 C上连续，则 $f(z)$ 在C 上可积，且

$$\int_C f(z)dz=\int_C udx-vdy+i\int_C vdx+udy$$

证：$$\int_C f(z)dz=\lim_{\sigma\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta z_k,$$

$$=\lim_{\sigma\to 0}\sum_{k=1}^{n}(u(\xi_k)+iv(\xi_k))(\Delta x_k+i\Delta y_k)$$

$$=\lim_{\sigma\to 0}\sum_{k=1}^{n}[(u(\xi_k)\Delta x_k-v(\xi_k)\Delta y_k)+i(v(\xi_k)\Delta x_k+u(\xi_k)\Delta y_k)]$$

$$=\int_C udx-vdy+i\int_C vdx+udy.$$

复积分的计算方法

设曲线 C 的参数方程： $z = z(t) = x(t) + iy(t)$,

（$\alpha \le t \le \beta$） 满足 $z'(t) = x'(t) + iy'(t) \neq 0$，则

$$\boxed{\int_C f(z)dz = \int_\alpha^\beta f[z(t)]z'(t)dt}$$

$$\left(= \int_\alpha^\beta [u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t))](x'(t) + iy'(t))\, dt. \right)$$

证：由复积分与曲线积分的关系及曲线积分的计算方法可得。

例2. 验证

$$\oint_C \frac{1}{(z-a)^n}dz = \begin{cases} 2\pi i, & n=1 \\ 0, & n\neq 1\,(\text{整数}). \end{cases}$$

其中 C 是以 a 为中心，R 为半径的正向圆周曲线。

解： $C: z = z(t) = \mathrm{Re}^{it} + a, (0 \le t \le 2\pi).$

$$\therefore \oint_C \frac{1}{(z-a)^n}dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{R^n e^{\mathrm{int}}} Rie^{it}dt$$

$$= \frac{i}{R^{n-1}} \int_0^{2\pi} e^{(1-n)it}dt = \begin{cases} 2\pi i, & n=1 \\ 0, & n\neq 1\,(\text{整数}). \end{cases}$$

二 复积分的性质

(1) $\int_C (k_1 f(z) + k_2 g(z))dz = k_1 \int_C f(z)dz + k_2 \int_C g(z)dz.$

(2) 设曲线 $C = C_1 + C_2$，其中 C_1 的终点为 C_2 的起点，则 $\int_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz.$

(3) 记 C^- 是有向曲线 C 的反向曲线，则：

$$\int_{C^-} f(z)dz = -\int_C f(z)dz.$$

(4) 设 l 为曲线 C 的长度，$|f(z)| \le M, \forall z \in C$，

则：$|\int_C f(z)dz| \le \int_C |f(z)|ds \le Ml.$

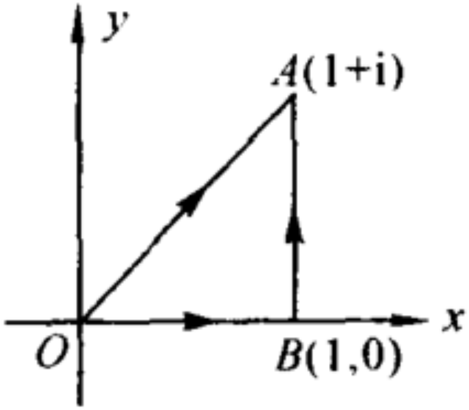
证：用积分定义易证，略。

例4. 计算积分 $\int_C \mathrm{Re}\, z dz$, 其中 C 是连接 O 与 A 的曲线，路径见图3-2：

（1）直线段 OA; （2）折线段 OB 与 BA.

解：（1） $OA: z = t + it,\ t: 0 \to 1$

$$\therefore \int_C \mathrm{Re}\, z dz = \int_0^1 t(1+i)dt = \frac{1+i}{2}.$$



（2） $OB: z = t,\ t: 0 \to 1;$

BA： $z = 1 + it,\ t: 0 \to 1.$

$$\therefore \int_C \mathrm{Re}\, z dz = \int_{OB} \mathrm{Re}\, z dz + \int_{BA} \mathrm{Re}\, z dz$$

$$= \int_0^1 t dt + \int_0^1 i dt = \frac{1}{2} + i.$$

（注：说明复积分一般与路径有关）

第3.2节　柯西积分定理

定理（**柯西积分定理**）设函数 $f(z)$ 在封闭曲线 C 上及其所包围的单连通区域 D 内解析，则

$$\oint_C f(z)dz = 0.$$

证：$\oint_C f(z)dz$　（不妨设 C 正向）

$$= \oint_C udx - vdy + i(vdx + udy) \quad \text{(Th3.1.1)}$$

$$= \iint_D [-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}]dxdy + i\iint_D [\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}]dxdy \ \text{（格林公式）}$$

$= 0.$（$C-R$条件）

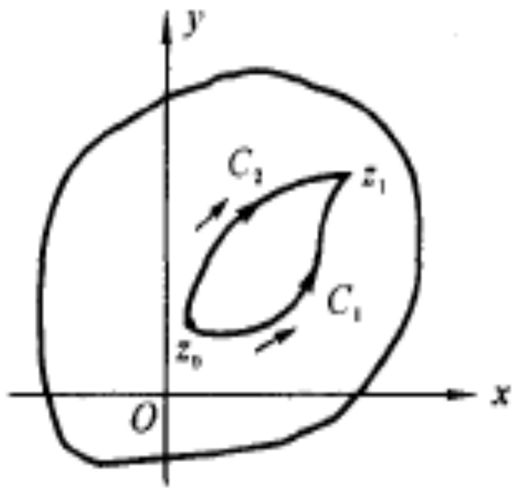
推论1. 如果 $f(z)$ 在单连通区域 D 内解析，则积分

$\int_C f(z)dz$ 与路径无关，只与 C 的起点终点有关。

证： 设 C_1, C_2 是 D 内任意两条起点为 z_0，终点为 z_1 的曲线，由柯西积分定理

$$\oint_{C_1+C_2^-} f(z)dz = 0$$

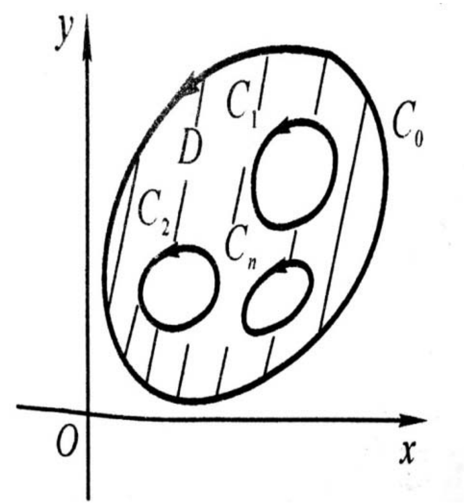
$$\Rightarrow \int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz$$



推论2. （多连通区域 D的柯西积分定理）设函数 $f(z)$ 在多连通区域 D及其正向边界 C上解析，则

$$\oint_C f(z)dz = 0.$$

证：与单连通情况一样可证，略。



如右图，设 D 的正向边界

$$C = C_0 + C_1^- + C_2^- + \cdots + C_n^-,$$

则：

$$\boxed{\oint_{C_0} f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \oint_{C_k} f(z)dz.}$$

特别, $n=1$ 时，$\oint_{C_0} f(z)dz = \oint_{C_1} f(z)dz.$（形变公式）

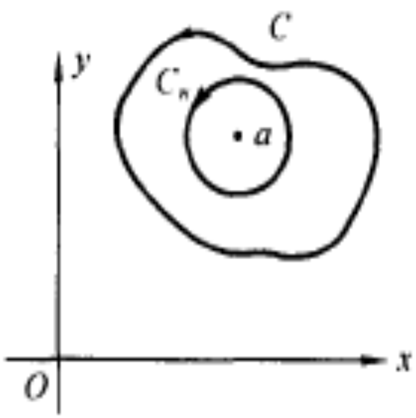
例5 计算 $\oint_C \frac{1}{(z-a)^n}dz$，$C$为光滑闭曲线，$a$ 不在 C上，n为整数。

解： 当 a 在 C 所围区域 D 的外部时，由柯西积分定理：$\oint_C \frac{1}{(z-a)^n}dz = 0;$

当 a 在 C 所围区域 D 的内部时，由形变公式：

$$\oint_C \frac{1}{(z-a)^n}dz = \oint_{|z-a|=R} \frac{1}{(z-a)^n}dz$$

$$=\begin{cases} 2\pi i, & n=1 \\ 0, & n \neq 1\,(\text{整数}). \end{cases}$$



二. 原函数定理

若 $f(z)$ 在单连通区域 D内解析，积分与路径无关。

记

$$F(z)=\int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta \qquad (z\in D)$$ （积分上限函数）

其中 z_0 为积分曲线 γ 的起点，z为终点，$\gamma\subset D.$

定理 若$f(z)$ 在单连通区域 D内解析，则 $F(z)$ 在 D 内也解析，且

$$F'(z)=f(z).$$

证： 因为 $f(z)$ 在 D 内连续，对 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,$

当 $|\zeta - z| < \delta$ 时，有 $|f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon.$

$$\therefore \quad \left| \frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) \right|$$

$$= \left| \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z+\Delta z} f(\zeta) d\zeta - \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z+\Delta z} f(z) d\zeta \right|$$

$$\le \frac{1}{|\Delta z|} \int_z^{z+\Delta z} |f(\zeta) - f(z)| \, |d\zeta|$$

$$\le \frac{1}{|\Delta z|} \cdot \varepsilon \cdot |\Delta z| = \varepsilon. \text{（当} |\Delta z| < \delta \text{时）}$$

推论1. 设 $G(z)$ 也是 $f(z)$ 的原函数（ $G'(z)=f(z)$ ），则：

$$G(z)=F(z)+C=\int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta+C \quad (C\text{常数}).$$

推论2. 若 $f(z)$ 在单连通区域 D 内解析，$G(z)$ 是 $f(z)$ 的一个原函数，则：

$$\int_C f(z)dz=G(z_1)-G(z_0)$$

其中曲线 $C\subset D$, z_0, z_1 是 C 的起点和终点。

证：$G(z)=F(z)+C=\int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta+C$

取 $z=z_0$得： $C=G(z_0)$

$$\therefore \quad \int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta=G(z)-G(z_0)$$

再取 $z=z_1$ 即可得证。

例7. 计算$\int_C \frac{dz}{z}$，其中C 是连接 $1+i$ 与 $2i$ 的直线段。

解：在 $D=\{re^{i\theta}:0<r<+\infty,-\pi<\theta<\pi\}$ 中，有

$(\ln z)'=\frac{1}{z}$ 解析，且 $C\subset D$,

$$\therefore \quad \int_C \frac{dz}{z}=\ln z\,\Big|_{1+i}^{2i}=\ln 2i-\ln(1+i)=\frac{1}{2}\ln 2+\frac{\pi}{4}i.$$

（**注**：也可用参数方程直接计算）

第3.3节　柯西积分公式

定理（柯西积分公式）设函数 $f(z)$ 在有界闭区域 $\overline{D}=D+C$ 上解析，$C=\partial D$ 正向，则

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz,\quad \forall z_0\in D.$$

注:(1) D 为单连通或多连通区域，定理都成立。

(2) 当 $z_0\notin\overline{D}$ 时，$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz=0.$

证：因为 $f(z)$ 在 z_0 连续，对 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,$

当 $|z-z_0|<\delta$ 时，有 $|f(z)-f(z_0)|<\varepsilon.$

记 $C_\rho:|z-z_0|=\rho\in(0,\delta)$ 逆时针。由柯西积分定理

$$\oint_C\frac{f(z)}{z-z_0}dz$$

$$=\oint_{C_\rho}\frac{f(z)}{z-z_0}dz$$

$$=\oint_{C_\rho}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz+f(z_0)\oint_{C_\rho}\frac{1}{z-z_0}dz$$

由例2， $f(z_0)\oint_{C_\rho}\frac{1}{z-z_0}dz=2\pi if(z_0)$

$$\left|\oint_{C_\rho}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz\right|$$

$$\leq\oint_{C_\rho}\frac{|f(z)-f(z_0)|}{|z-z_0|}ds\leq\frac{\varepsilon}{\rho}\cdot 2\pi\rho=2\pi\varepsilon.$$

由 $\varepsilon>0$ 的任意性知：

$$\oint_{C_\rho}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz=0.$$

$$\therefore\quad \oint_{C}\frac{f(z)}{z-z_0}dz=2\pi i f(z_0)\Rightarrow \text{结论}.$$

解析函数的积分平均值定理

定理： 设函数 $f(z)$ 在 $|z-z_0|\le R$ 上解析，则

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0+\mathrm{Re}^{i\theta})d\theta.$$

证： 在柯西积分公式中，取 $C=C_R:|z-z_0|=R$ 逆时针，则

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_R}\frac{f(z)}{z-z_0}dz=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0+\mathrm{Re}^{i\theta})d\theta.$$

例9. 计算 $\oint_C \frac{e^z+z}{z-2}dz$, 其中 C:

（1）单位圆周，逆时针；

（2）中心在原点，半径为 3 的圆周曲线，逆时针。

解: (1) $\frac{e^z+z}{z-2}$ 在 $|z|\le 1$ 上解析，由柯西积分定理

$$\oint_C \frac{e^z+z}{z-2}dz = 0.$$

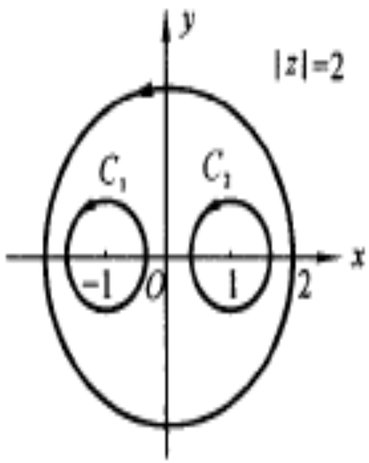
(2) 应用柯西积分公式

$$\oint_{|z|=3} \frac{e^z+z}{z-2}dz = 2\pi i(e^z+z)|_{z=2} = 2\pi i(e^2+2).$$

例 10. 求积分 $I=\oint\limits_{|z|=2}\frac{\sin z}{z^2-1}dz.$

解一：$I=\frac{1}{2}[\oint\limits_{|z|=2}\frac{\sin z}{z-1}dz-\oint\limits_{|z|=2}\frac{\sin z}{z+1}dz]$

$$=\frac{1}{2}\cdot 2\pi i[(\sin z)|_{z=1}-(\sin z)|_{z=-1}]=2\pi i\sin 1.$$



解二：$I=\oint\limits_{|z+1|=1/2}\frac{\sin z}{z^2-1}dz+\oint\limits_{|z-1|=1/2}\frac{\sin z}{z^2-1}dz.$

$$=\oint\limits_{|z+1|=1/2}\frac{\sin z/(z-1)}{z+1}dz+\oint\limits_{|z-1|=1/2}\frac{\sin z/(z+1)}{z-1}dz.$$

$$=2\pi i[\frac{\sin z}{z-1}|_{z=-1}+\frac{\sin z}{z+1}|_{z=1}]=2\pi i\sin 1.$$

第3.4　解析函数的无穷可微性

定理（高阶导数的柯西积分公式） 设 $f(z)$ 在有界闭区域 $\overline{D}=D+C$ 上解析，$C=\partial D$ 正向，则 $f(z)$ 在 D内的任意阶导数存在，且

$$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz,\quad \forall z_0\in D.\quad (n=0,1,2,\cdots)$$

证:略，P74。形式上，在柯西积分公式两边对变量 z_0 求 n 阶导数可得。

注：实函数不具有此性质。

例11. 计算 $\oint_C \frac{\cos z}{(z-i)^3}dz$, 其中 C 是绕 i 一周的闭曲线。

解： $\oint_C \frac{\cos z}{(z-i)^3}dz = \frac{2\pi i}{2!}(\cos z)''|_{z=i} = \pi i\cos(z+2\cdot\frac{\pi}{2})|_{z=i} = -\pi i ch1.$

例13. 计算 $I = \oint_C \frac{e^z}{(z^2-1)^2}dz$, $C: |z| = r > 1$ 逆时针。

解：
$$I = \oint_{|z-1|<\delta} \frac{e^z/(z+1)^2}{(z-1)^2}dz + \oint_{|z+1|<\delta} \frac{e^z/(z-1)^2}{(z+1)^2}dz$$

$$= 2\pi i[(\frac{e^z}{(z+1)^2})'|_{z=1} + (\frac{e^z}{(z-1)^2})'|_{z=-1}] = \frac{\pi}{e}i.$$

其中：$\delta < \min\{1, r-1\}$.

定理(柯西不等式) 设$f(z)$ 在 $|z-z_0|\le R$ 上解析，则

$$|f^{(n)}(z_0)|\le \frac{n!}{R^n}M,$$

其中：$M=\max\limits_{|z-z_0|=R}|f(z)|.$

证: $|f^{(n)}(z_0)|=\left|\dfrac{n!}{2\pi i}\oint\limits_{|z-z_0|=R}\dfrac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz\right|$

$$\le \frac{n!}{2\pi}\cdot\frac{M}{R^{n+1}}\cdot 2\pi R=\frac{n!}{R^n}M.$$

定理（柳维尔定理）有界整函数必为常数。

证：设 $f(z)$ 在复平面 C 上解析，且 $|f(z)|\le M, z\in C.$

由柯西不等式，$\forall z_0\in C,$ 有

$$|f'(z_0)|\le \frac{M}{R}\to 0,\quad (R\to +\infty).$$

$\therefore\quad f'(z)\equiv 0$，$z\in C\Rightarrow f(z)\equiv$ 常数。

注：实函数不具有此性质，如 $\sin x$ 在 R 上有界且任意阶可导，但不是常数。

定理 （代数学基本定理）设 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 是复常数，$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$，$n \geq 1, a_n \neq 0$，则至少 $\exists\, z_0 \in C$ 使得 $p(z_0) = 0$.

证:(反证) 设 $p(z) \neq 0, \ \forall z \in C$，则 $f(z) = \dfrac{1}{p(z)}$ 是整函数，且 $f(z) \to 0, \ (z \to \infty)$. 因此存在 $R > 0$ 使 $f(z)$ 在 $C \setminus B_R$ 上有界；而 $f(z)$ 在 $\overline{B_R}$ 上连续，有界， 所以 $f(z)$ 在复平面上有界。由 柳维尔定理，$f(z), p(z)$ 是常数，矛盾。

补充题

(6分) 设 $f=u+iv$ 是整函数，且当 $x^2+y^2\to\infty$ 时 $u\to 0$，证明：$u\equiv 0$。

证明：由 $x^2+y^2\to\infty$ 时 $u\to 0$ 可得 u 有界 即 $\exists M>0$ 使得 $|u|<M$

令 $g=e^f$ 则 g 是整函数，且 $|g|=e^u<e^M$ $\Rightarrow g$ 为常数

即 $g'=f'e^f=0\Rightarrow f'=0$ $\Rightarrow f=c$ $\Rightarrow u$ 为常数

因为 $u\to 0$ 所以 $u\equiv 0$

二、计算积分（每题 8 分，共 16 分）

1）$\oint_c [(z+1)|z| - z\sin(e^z + z^2)]\,dz$，其中积分曲线 C 是：连接 -1 到 1 的直线段，再从 1 由下半单位圆到 -1；

解：$z\sin(e^z + z^2)$ 是整函数　所以 $\oint\limits_c z\sin(e^z + z^2)\,dz = 0$

原积分 $= \oint_c (z+1)|z|\,dz = \int_{-1}^{1}(x+1)|x|\,dx + \int_{c_1}(z+1)|z|\,dz = \int_0^1 2x\,dx + \int_1^{-1}(z+1)\,dz =$

$= 1 + (z+1)^2/2\Big|_1^{-1} = -1$　　其中 c_1 是从 1 由到 -1 的下半单位圆。