• 第二类曲线积分

第二型曲线积分的被积函数 $\boldsymbol{F}(x,y)=P(x,y)\boldsymbol{i}+Q(x,y)\boldsymbol{j}$（或 $\boldsymbol{F}(x,y,z)=P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\boldsymbol{k}$）定义在平面有向曲线 L（或空间有向曲线 Γ）上，其物理背景是变力 $\boldsymbol{F}(x,y)$（或 $\boldsymbol{F}(x,y,z)$）在平面曲线 L（或空间曲线 Γ）上从起点移动到终点所做的总功：

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y\left(\text{或}\int_\Gamma P(x,y,z)\mathrm{d}x+Q(x,y,z)\mathrm{d}y+R(x,y,z)\mathrm{d}z\right).$$

由此可以看出，前面所学的定积分、二重积分、三重积分、第一型曲线积分和第一型曲面积分有着完全一致的背景，都是一个**数量函数在定义区域**上计算几何量（面积、体积等），但是第二型曲线积分与之不同，它是一个**向量函数沿有向曲线**的积分（无几何量可言），所以有些性质和计算方法是不一样的，一定要加以对比，理解它们的区别和联系，不要用错或者用混.

$$\begin{cases}\text{平面}:\displaystyle\int_L (P,Q)\cdot(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y)=\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y,\\ \text{空间}:\displaystyle\int_\Gamma (P,Q,R)\cdot(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z)=\int_\Gamma P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z.\end{cases}$$

2. 计算

(1) 基本方法——一投二代三计算（化为定积分）.

如果平面有向曲线 L 由参数方程 $\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t)\end{cases}(t:\alpha\to\beta)$ 给出，其中 $t=\alpha$ 对应着起点 A，$t=\beta$ 对应着终点 B，则可以将平面第二型曲线积分化为定积分：

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_\alpha^\beta\{P[x(t),y(t)]x'(t)+Q[x(t),y(t)]y'(t)\}\,\mathrm{d}t,$$

这里的 α,β 谁大谁小无关紧要，关键是分别和起点与终点对应.

(2) 格林公式.

设平面有界闭区域 D 由分段光滑曲线 L 围成，$P(x,y)$，$Q(x,y)$ 在 D 上具有一阶连续偏导数，L 取正向，则

$$\oint_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}\sigma.$$

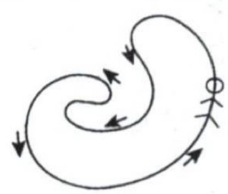


图 18-15

（如图 18-15 所示，所谓 L 取正向，是指当一个人沿着 L 的这个方向前进时，**左手始终在 L 所围成的 D 内.**）

① **曲线封闭且无奇点在其内部，直接用格林公式.**

若给的是封闭曲线的曲线积分 $\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$，可以验算 P 和 Q 是否满足"在该封闭曲线所包围的区域 D 内，P 和 Q 具有一阶连续偏导数". 若满足，则可用格林公式

$$\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}\sigma$$

计算之. 这里要求 L 为 D 的边界，且正向.

② **曲线封闭但有奇点在其内部，且除奇点外$\dfrac{\partial Q}{\partial x}\equiv\dfrac{\partial P}{\partial y}$，则换路径**.（一般令分母等于常数作为路径，路径的起点和终点无需与原路径重合.）

若给的是封闭曲线的曲线积分$\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$，满足条件：在 D 内除了奇点外，P 和 Q 具有一阶连续偏导数，并且除奇点外，均有$\dfrac{\partial Q}{\partial x}\equiv\dfrac{\partial P}{\partial y}$. 则可以换一条封闭曲线 L_1 代替 L，它全在 D 内，并能将奇点包含在 L_1 的内部. 则有公式

$$\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y \xlongequal{(*)} \oint_{L_1} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y.$$

这里要求 L_1 与 L 的方向相同. 如果后者容易计算，就可达到目的.

【注】（*）处是这样来的：如图 18-17 所示，若 L 所围区域 D 内有奇点 q，则用 L_1"挖去"它，并记挖去奇点后的阴影区域为 D'，于是

$$\begin{aligned}\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y&=\oint_{L+L_1^-} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y-\oint_{L_1^-} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y\\&=\iint_{D'}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}\sigma+\oint_{L_1} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y\\&=\oint_{L_1} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

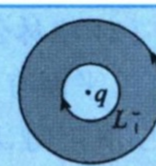


图 18-17

③ **非封闭曲线且$\dfrac{\partial Q}{\partial x}\equiv\dfrac{\partial P}{\partial y}$，则换路径**.（换简单路径，路径的起点和终点需与原路径重合.）

如果不是封闭曲线的曲线积分$\int_{L_1} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$（其中 L_1：一条从 A 到 B 的路径），可以验算 P,Q 是否满足"在某单连通区域内具有一阶连续偏导数并且$\dfrac{\partial P}{\partial y}\equiv\dfrac{\partial Q}{\partial x}$". 若是，则可在该连通区域内另取一条从 A 到 B 的路径（例如边与坐标轴平行的折线），使得该积分容易计算以代替原路径而计算之，即$\int_{L_1}\xlongequal{(*)}\int_{L_2}$.

【注】（*）处是这样的：由于$\dfrac{\partial P}{\partial y}\equiv\dfrac{\partial Q}{\partial x}$，则在 D 内（见图 18-18）沿任意分段光滑闭曲线 L 都有$\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=0$，故$\oint_{L_1+L_0}=0$，$\oint_{L_2+L_0}=0$，于是$\int_{L_1}=\int_{L_2}$.

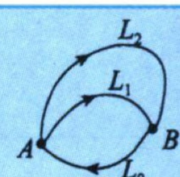


图 18-18

④ 非封闭曲线且$\dfrac{\partial Q}{\partial x}\neq\dfrac{\partial P}{\partial y}$，可补线使其封闭(加线减线).

如果不是封闭曲线的曲线积分，可以考虑补一条线 C_{BA}，使 $L_{AB}+C_{BA}$ 构成一封闭曲线，并且使其包围的区域为一单连通区域 D，在 D 上 $P(x,y)$ 和$Q(x,y)$ 具有一阶连续偏导数，则有

$$\begin{aligned}\int_{L_{AB}}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y&=\int_{L_{AB}}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+\int_{C_{BA}}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y-\int_{C_{BA}}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y\\&=\oint_{L}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y-\int_{C_{BA}}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y\\&=\pm\iint_{D}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}\sigma+\int_{C_{AB}}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

其中 $L=L_{AB}+C_{BA}$，公式中的“±”号由 L 的方向而定. 若 L 为正向则取正号，若 L 为负向则取负号. C_{AB} 为 C_{BA} 的反向弧. 如果上式右边的二重积分和$\int_{C_{AB}}$ 容易计算的话，那么就可利用上述转换方法计算原积分$\int_{L_{AB}}$.

⑤ 积分与路径无关问题.

设在单连通区域 D 内 P,Q 具有一阶连续偏导数，则下述 6 个命题等价.

a. $\int_{L_{AB}}P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$ 与路径无关.

b. 沿 D 内任意分段光滑闭曲线 L 都有 $\oint_{L}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=0$.

c. $P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 为某二元函数 $u(x,y)$ 的全微分.

d. $P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=0$ 为全微分方程.

e. $P\boldsymbol{i}+Q\boldsymbol{j}$ 为某二元函数 $u(x,y)$ 的梯度.

f. $\dfrac{\partial P}{\partial y}\equiv\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ 在 D 内处处成立.

【注】“c,d,e” 中所涉及的 $u(x,y)$ 称为 $P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 的原函数，若存在一个原函数 $u(x,y)$，则 $u(x,y)+C$ 也是原函数.

一般说来，“f” 是解题的关键点. $\dfrac{\partial P}{\partial y}\equiv\dfrac{\partial Q}{\partial x}$

若 P,Q 已知，则考正问题：“验证$\dfrac{\partial P}{\partial y}\equiv\dfrac{\partial Q}{\partial x}$，即‘f’ 成立，则‘a,b,c,d,e’ 成立”. “a 至 e” 成立，再求$\int_{L}$ 或 u.

若 P,Q 中含有未知函数(或未知参数)，则考反问题：“已知‘a,b,c,d,e’ 其中任一命题成立，则有‘f’ 成立，即$\dfrac{\partial P}{\partial y}\equiv\dfrac{\partial Q}{\partial x}$”，用此式子求出未知量，再进一步求$\int_{L}$ 或 u.

接下来，如何求 u?

法一 用可变终点(x,y)的曲线积分求出$u(x,y)$：

$$u(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y,$$

其中(x_0,y_0)为D内任意取定的一点，(x,y)为动点，则此式即为要求的一个$u(x,y)$。不过在使用此方法前，必须先验证在所述单连通区域内是否满足与路径无关的充要条件$\dfrac{\partial Q}{\partial x}\equiv\dfrac{\partial P}{\partial y}$。不满足时这种$u(x,y)$是不存在的，更谈不上用曲线积分求$u(x,y)$。

至于这个可变终点(x,y)的曲线积分如何计算？一种方法是找一条认为是方便的从点(x_0,y_0)到变点(x,y)的全在D内的路径计算。另一种方法是按折线$(x_0,y_0)\to(x,y_0)\to(x,y)$（见图 18-22）或按折线$(x_0,y_0)\to(x_0,y)\to(x,y)$（见图 18-23）计算。计算公式分别如下：

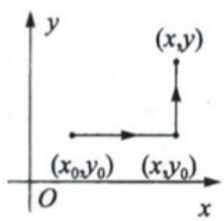


图 18-22

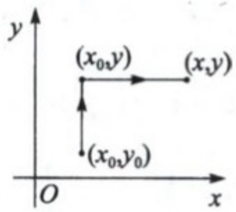


图 18-23

dy=0　　dx=0

$$u(x,y)=\int_{x_0}^{x} P(x,y_0)\mathrm{d}x+\int_{y_0}^{y} Q(x,y)\mathrm{d}y$$

或

dy=0　　dx=0

$$u(x,y)=\int_{x_0}^{x} P(x,y)\mathrm{d}x+\int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)\mathrm{d}y.$$

这里要求折线的路径应在D内。

以上公式得出的$u(x,y)$再加任意常数C就得到了所有原函数。

法二 用凑微分法写出$\mathrm{d}[u(x,y)]$（当然这需要一些技巧），在积分与路径无关条件下，有

$$\int_{L_{AB}} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\int_{L_{AB}}\mathrm{d}[u(x,y)]=u(x,y)\Big|_A^B=u(B)-u(A).$$

(3) 两类曲线积分的关系.

第二类　　第一类

$$\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\int_L (P\cos\alpha+Q\cos\beta)\mathrm{d}s,$$

其中$(\cos\alpha,\cos\beta)$为L上点(x,y)处与L同向的单位切向量.

(4) 空间问题.

① 直接计算 $\begin{cases}\text{一投二代三计算}\\ \text{用斯托克斯(Stokes) 公式}\end{cases}$

a. 一投二代三计算.

设 $\Gamma:\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t),t:\alpha\to\beta,\\ z=z(t),\end{cases}$ 则有

$$\begin{aligned}&\int_{\Gamma}P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z\\ =&\int_{\alpha}^{\beta}\{P[x(t),y(t),z(t)]x'(t)+Q[x(t),y(t),z(t)]y'(t)+R[x(t),y(t),z(t)]z'(t)\}\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

b. 用斯托克斯公式.

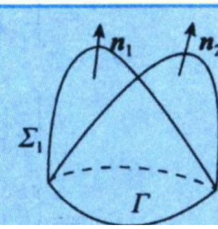
设 Ω 为某空间区域,Σ 为 Ω 内的分片光滑有向曲面片,Γ 为逐段光滑的 Σ 的边界,它的方向与 Σ 的法向量成右手系,函数 $P(x,y,z)$,$Q(x,y,z)$ 与 $R(x,y,z)$ 在 Ω 内具有连续的一阶偏导数,则有斯托克斯公式:

$$\oint_{\Gamma}P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\,\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}\text{(此为第二型曲面积分形式)}$$

$$=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}\mathrm{d}S\text{(此为第一型曲面积分形式)},$$

其中 $\boldsymbol{n}^{\circ}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ 为 Σ 的单位外法线向量.

【注】可以证明(这里不证),公式的成立与绷在 Γ 上的曲面大小、形状无关,如图 18-26 所示,有 $\oint_{\Gamma}=\iint_{\Sigma_1}=\iint_{\Sigma_2}$.



② 换路径再计算.(若 $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{F}=\boldsymbol{0}$(无旋场),可换路径)

设 $\boldsymbol{F}=P\boldsymbol{i}+Q\boldsymbol{j}+R\boldsymbol{k}$,其中 P,Q,R 具有一阶连续偏导数.若 $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{F}=\boldsymbol{0}$,则可换路径积分.

【注】"四 2(2) 的 ②,③"与"四 2(4) 的 ②"为什么可以换路径?平面上的 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$ 与空间上的 $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{F}=\boldsymbol{0}$,均是指所给场无旋,无旋场中积分与路径无关,于是可"换路径".为什么无旋场积分与路径无关呢?可以这样理解并记忆:在重力场中,你手上拿着一个风车,若只有重力作用,风车是不会旋转的,这就是"无旋",重力场是无旋场,重力场中做功与路径无关,这样通俗理解就容易记住了.

• 第二类曲面积分

第二型曲面积分的被积函数 $\boldsymbol{F}(x,y,z)=P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\boldsymbol{k}$ 定义在光滑的空间有向曲面 Σ 上，其物理背景是向量函数 $\boldsymbol{F}(x,y,z)$ 通过曲面 Σ 的通量：

$$\iint_{\Sigma} P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

由此可以看出，第二型曲面积分是一个**向量函数**通过某**有向曲面**的通量（无几何量可言），要加强和前面所学积分的横向对比，理解它们的区别和联系，不要用错或者用混了.

$$\iint_{\Sigma}(P,Q,R)\cdot(\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\mathrm{d}z\mathrm{d}x,\mathrm{d}x\mathrm{d}y)=\iint_{\Sigma}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

2. 计算

(1) 基本方法——一投二代三计算（化为二重积分）.

① 拆成三个积分（如果有的话），一个一个做：

$$\begin{aligned}&\iint_{\Sigma}P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\=&\iint_{\Sigma}P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iint_{\Sigma}Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\iint_{\Sigma}R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

② 分别投影到相应的坐标面上.

例如对于 $\iint_{\Sigma}R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，将曲面 Σ 投影到 xOy 平面上去.

a. 若 Σ 在 xOy 平面上的投影为一条线，即 Σ 垂直于 xOy 平面，则此积分为零.

b. 若不是“a”的情形，且 Σ 上存在两点，它们在 xOy 平面上的投影点重合，则应将 Σ 剖分成若干个曲面片，使对于每一曲面片上的点投影到 xOy 平面上的投影点不重合.

c. 假设已如此剖分好了，不妨将剖分之后的曲面片仍记为 Σ. 此时将 Σ 的方程写成 $z=z(x,y)$ 的形式（只有投影到 xOy 平面上投影点不重合时，Σ 的方程才能写成 $z=z(x,y)$）.

③ 一投二代三计算.

a. 一投：确定出 Σ 在 xOy 平面上的投影域 D_{xy}.

b. 二代：将 $z=z(x,y)$ 代入 $R(x,y,z)$.

c. 三计算：将 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 写成 $\pm\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. 其中“$\pm$”号是这样选取的：

当 $\cos\gamma>0$，即 Σ 的法向量与 z 轴交角为锐角，亦即当 Σ 的指定侧为上侧时，取“+”；
当 $\cos\gamma<0$，即 Σ 的法向量与 z 轴交角为钝角，亦即当 Σ 的指定侧为下侧时，取“−”.

于是便得

$$\iint_{\Sigma}R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pm\iint_{D_{xy}}R[x,y,z(x,y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$