复变函数与

积分变换

课程简介

“复变函数与积分变换”是高等院校理工科学生必须具备的数学知识，它是微积分的重要后续课程。内容包括解析函数、复变函数的积分、级数、留数、保角映射以及拉普拉斯变换等。

预修要求：微积分

教材：《复变函数与拉普拉斯变换》

金忆丹 尹永成，浙大出版社 2003年

课程教学网站：“浙大钉”“学在浙大”等

总评成绩占比：

线下作业与平时表现：30%

阶段测试：20%

期末考试：50%

期末考试：统一命题，由学校安排考场，统一标准阅卷。

阶段测试：用四-五等级评分，采用相对评分办法。

作业：每周一次

复变函数与拉普拉斯变换

第一章预备知识

第1.1节　复数及其表达

定义：形如 $z = x + iy$ 的数称为复数，其中

实数 $x = \operatorname{Re} z$ 称为 z 的实部，

实数 $y = \operatorname{Im} z$ 称为 z 的虚部，

$i \ (i^2 = -1)$ 称为 虚数单位。

特别，称 $z = iy \ (y \neq 0)$ 为纯虚数； $z = x$ 为实数；

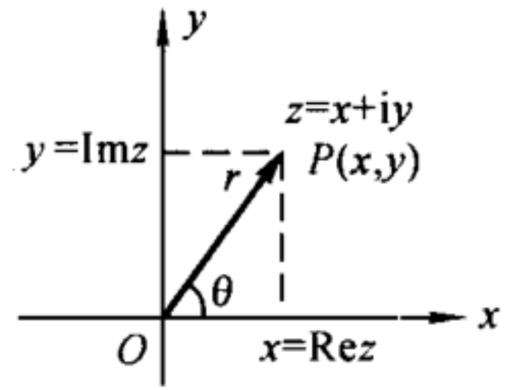
$\bar{z} = x - iy$ 称为 z 的共轭复数。

$$x_1 + iy_1 = x_2 + iy_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2, y_1 = y_2$$

复数不能比较大小！

复平面

$z = x + iy \xleftrightarrow{\text{一对一}}$ 点 $P(x, y)$ （或 向量 $\overrightarrow{OZ}$ ）



复数 $z = x + iy$

称 x 轴为实轴，y轴为 虚轴；

$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ 称为 z 的模；

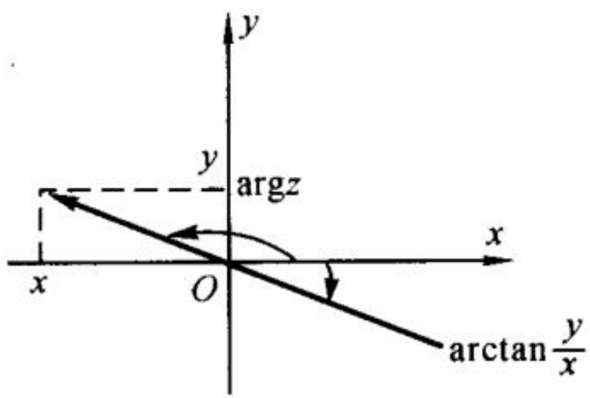
$\theta = Arg\ z \quad (\tan\theta = \frac{y}{x})$ 称为 z 的辐角（无穷多个），

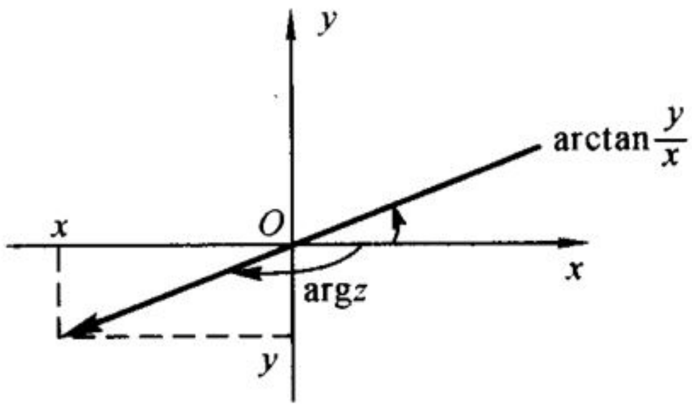
其中 $\theta_0 = \arg z \in (-\pi, \pi]$ 称为 辐角主值，即

$$Arg\ z = \arg z + 2k\pi \ (k = 0, \pm 1, \pm 2, \quad \cdots)$$

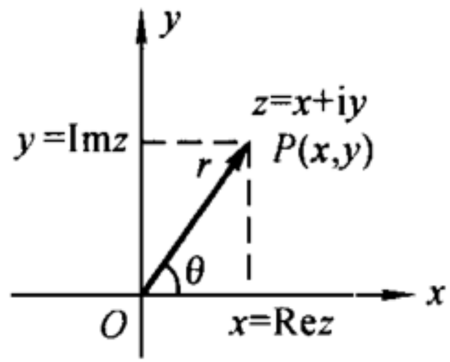
辐角主值的计算

$$\arg z=\begin{cases}\arctan\dfrac{y}{x}, & (I,IV\ \text{象限})\\[2ex] \arctan\dfrac{y}{x}+\pi, & (II\ \text{象限})\\[2ex] \arctan\dfrac{y}{x}-\pi, & (III\ \text{象限})\end{cases}$$





复数其它表示法：



$$z = x + iy$$

$$= r\cos\theta + ir\sin\theta$$ （三角形式）

$$= re^{i\theta}$$ （指数形式）

$$(r = |z|, \theta = Arg\, z)$$

欧拉公式： $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

例 将 $z=-1+i\sqrt{3}$ 化为三角形式和指数形式。

解:

$$|z|=\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}=2,$$

$$\arg z=\arctan\frac{\sqrt{3}}{(-1)}+\pi=-\frac{\pi}{3}+\pi=\frac{2\pi}{3}$$

$$\therefore\quad z=2(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3})=2e^{\frac{2\pi}{3}i}.$$

第1.2节　　复数的运算

复数的四则运算

定义复数 $z_1 = x_1 + iy_1$，$z_2 = x_2 + iy_2$ 的加法，减法及乘除法：

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)}$$

$$= \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \qquad (z_2 \neq 0).$$

加法乘法：交换律 结合律 分配律

复数域 C ：全体复数（+ − ·÷ 运算）

常见性质：

代数恒等式仍成立，如：$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2.$

$|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|$， $|z_1-z_2|\ge||z_1|-|z_2||$

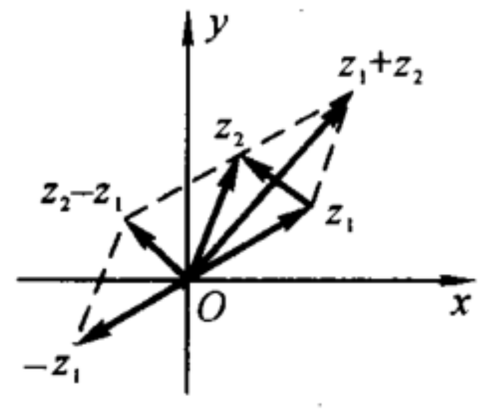
$|z|=|\bar{z}|$， $|z|^2=z\cdot\bar{z}$， $\overline{(z_1\pm z_2)}=\overline{z_1}\pm\overline{z_2}$

$\overline{z_1z_2}=\overline{z_1}\,\overline{z_2}$ $\overline{z_1/z_2}=\overline{z_1}/\overline{z_2}$

$\arg z=-\arg\bar{z}$，当 z 不在负实轴上时。

复数加减法的几何意义：

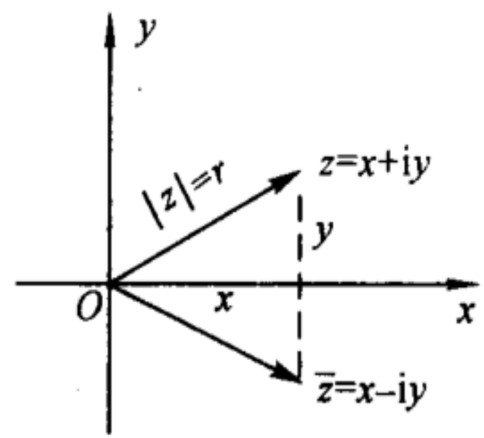
平行四边形法则



复数的向量加减

共轭复数的几何意义：

z，$\bar{z}$ 关于实轴对称



共轭复数

复数乘积与商的几何意义：

设复数 $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$， $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$

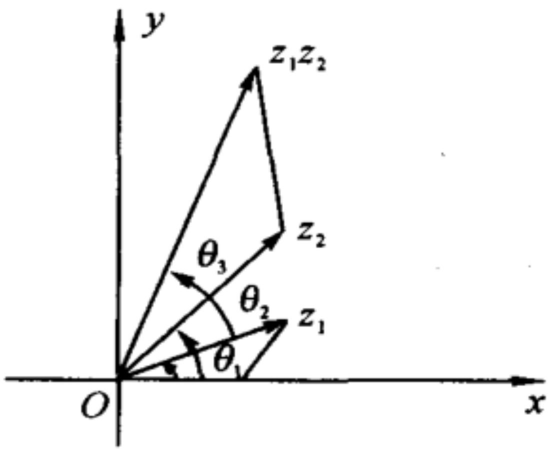
$$\because \quad z_1 z_2 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

$$= r_1 r_2(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2))$$

$$= r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

$$\therefore \quad |z_1 z_2| = |z_1||z_2|,$$

$$Arg\,(z_1 z_2) = Arg\, z_1 + Arg\, z_2$$



两个复数相乘

类似： $z_1/z_2 = (r_1/r_2)e^{i(\theta_1-\theta_2)}$

$$\therefore \quad |z_1/z_2| = |z_1|/|z_2|,$$

$$Arg\,(z_1/z_2) = Arg\, z_1 - Arg\, z_2$$

复数的乘幂与方根

设 $z = re^{i\theta}$ ，由归纳法可得其 n 次幂

$$\begin{aligned} z^n &= r^n(\cos\theta + i\sin\theta)^n \\ &= r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) \\ &= r^n e^{in\theta}. \end{aligned}$$

特别，取 $r = 1$ 即得 **de Moivre 公式**：

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta.$$

$$\therefore |z^n| = |z|^n, \quad Arg\, z^n = n\, Arg\, z.$$

例 求 $(1+i)^{2022}$.

解： $(1+i)^{2022}$

$$=\left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right)^{2022}$$

$$=2^{1011}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\times 2022\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\times 2022\right)\right)$$

$$=2^{1011}\left(\cos\left(505\pi+\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(505\pi+\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$=-2^{1011}i$$

复数方根的定义：设 z 是已知复数，n 为正整数，称满足方程 $w^n = z$ 的所有复数 w 为z 的 n **次方根，**记为 $w = \sqrt[n]{z}$.

如何求 $\sqrt[n]{z}$. 设$z = re^{i\theta}, w = \rho e^{i\varphi}$ 则：

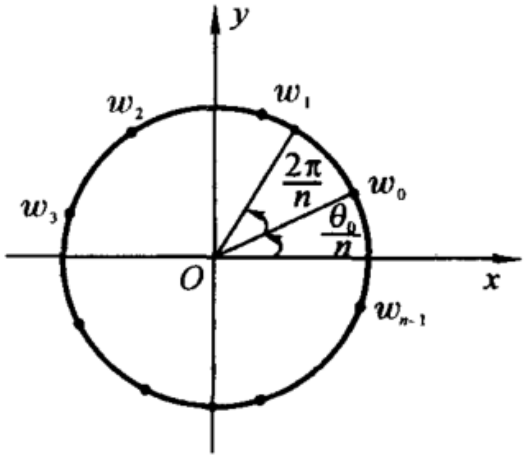
$$re^{i\theta} = \rho^n e^{i\varphi n}$$

$$\Rightarrow \rho = \sqrt[n]{r}, n\varphi = \arg z + 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

$$\therefore w_k = \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\arg z + 2k\pi}{n}} \quad (k = 0, 1, 2, \cdots n-1)$$

$$\boxed{\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} e^{i\frac{\arg z + 2k\pi}{n}} \quad (k = 0, 1, 2, \cdots n-1)}$$

$$w_k=\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{|z|}e^{i\frac{\arg z+2k\pi}{n}}\quad (k=0,1,2,\cdots n-1)$$



n 个根均匀分布在以原点为中心，$\sqrt[n]{|z|}$ 为半径的圆周上。

例： 求 $z=1+i$ 的 4 次方根。

解： $z=1+i=\sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{4}+2k\pi)}\quad (k=0,\pm1,\pm2\cdots)$

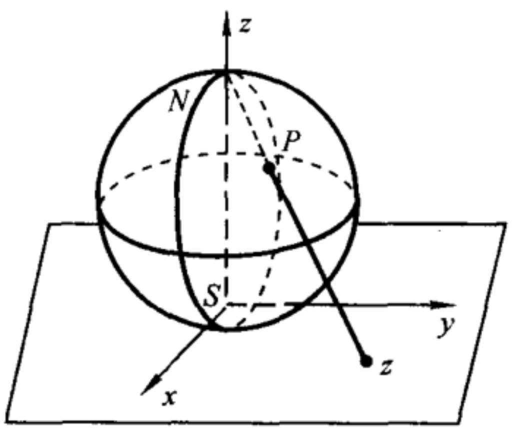
$$\therefore\quad w_k=(\sqrt[4]{z})_k$$

$$=(\sqrt{2})^{1/4}e^{i(\frac{\pi}{4}+2k\pi)/4}$$

$$=\sqrt[8]{2}e^{i(\frac{\pi}{16}+\frac{k\pi}{2})}\quad (k=0,1,2\,3).$$

第1.3节 复球面与无穷远点

如右图，利用球极平面射影法，建立球面 $S\setminus\{\mathrm{N}\}$ 到复平面 C 的一一对应： $\mathbf{P}\leftrightarrow z.$



复球面

易见， $\mathbf{P}\longrightarrow\mathbf{N}\Longleftrightarrow|z|\longrightarrow\infty.$

称球面北极 N 所对应的“点”为复平面 的无穷远点，记为 ∞ 。

$\overline{C}=C\cup\{\infty\}$ 称为扩充复平面，

S 称为复球面。

注意：与一元函数微积分中数轴上附加的 $-\infty$ 与 $+\infty$ 所不同的是，扩充复平面 $\overline{\mathbb{C}}$ 上的 ∞ 点只有一点.

关于 ∞ 点的运算，需作如下的几个规定：

(1) $z \neq \infty$，则 $z \pm \infty = \infty \pm z = \infty$；

(2) $z \neq 0$，则 $z \cdot \infty = \infty \cdot z = \infty$；

(3) $z \neq \infty$，则 $\dfrac{\infty}{z} = \infty, \dfrac{z}{\infty} = 0$；

(4) $z \neq 0$，则 $\dfrac{z}{0} = \infty$；

(5) $|\infty| = +\infty$，∞ 的实部、虚部、辐角均无意义.

第1.4节 复平面上的点集

几个概念

$$D(z_0,\delta)=\{z\in C \mid |z-z_0|<\delta\}$$

…… z_0 的 δ 邻域

$$D(z_0,\delta)\setminus\{z_0\}=\{z\in C \mid 0<|z-z_0|<\delta\}$$

…… z_0 的 δ 去心 邻域

有界域 $D:\exists M>0,\ |z|\le M,\forall z\in D.$

否则，称为无界域。

设有点集 E 及一点 P：

- 若存在点 P 的某邻域 $U(P) \subset E$，

  则称 P 为 E 的内点；

- 若存在点 P 的某邻域 $U(P) \cap E = \varnothing$，

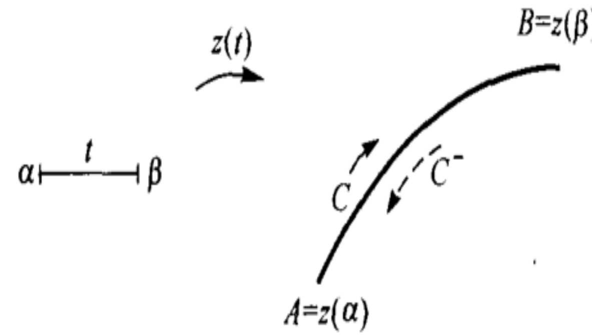
  则称 P 为 E 的外点；

- 若对点 P 的任一邻域 $U(P)$ 既含 E中的内点也含 E 的外点，则称 P 为 E 的边界点．

- 若点集 E 的点都是内点，则称 E 为开集;
- E 的边界点的全体称为 E 的边界, 记作∂E ;
- 若点集 $E \supset \partial E$, 则称 E 为闭集;
- 若集 D 中任意两点都可用一完全属于 D 的折线相连 ,
  则称 D 是连通的 ;
- 连通的开集称为开区域 ,简称区域 ;
- 开区域连同它的边界一起称为闭区域.

曲线 C 参数方程：

$$x = x(t),\ \ y = y(t),\quad \alpha \le t \le \beta$$

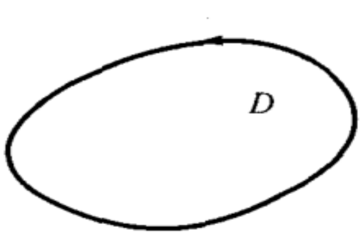


$$\Rightarrow z = z(t) = x(t) + iy(t),\ \alpha \le t \le \beta$$

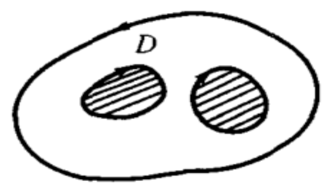
…… 复平面上的一条有向曲线。

特殊：当 $z(\alpha) = z(\beta)$ 时，闭曲线。

单连通区域（无洞）　　复连通区域（有洞）

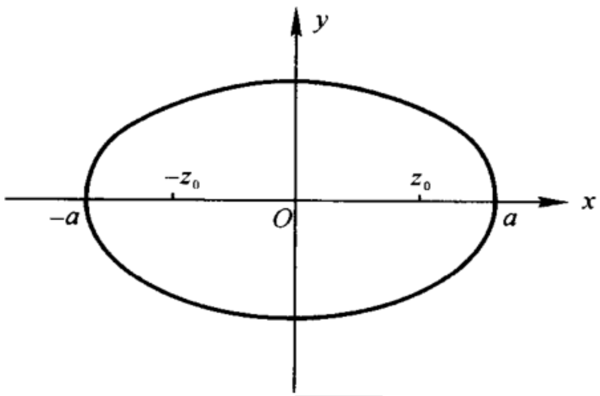


单连通区域



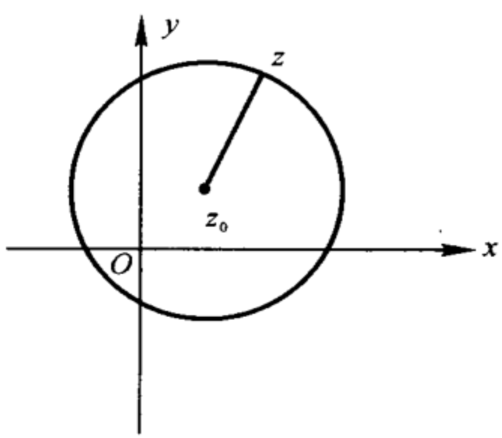
多连通区域

平面图形的复数表示（例）



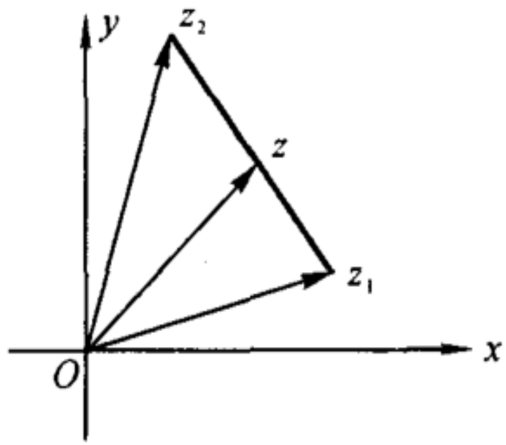
椭圆

$$|z - z_0| + |z + z_0| = R$$



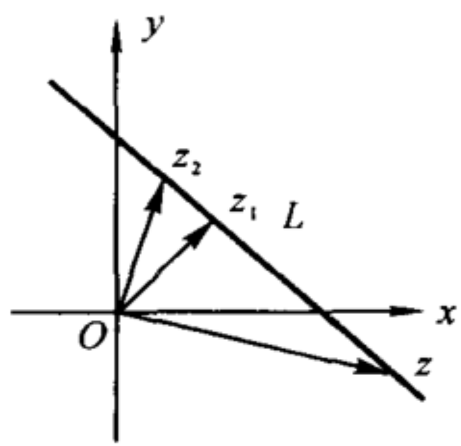
圆

$$|z - z_0| = R$$



直线段 $\overline{z_1 z_2}$

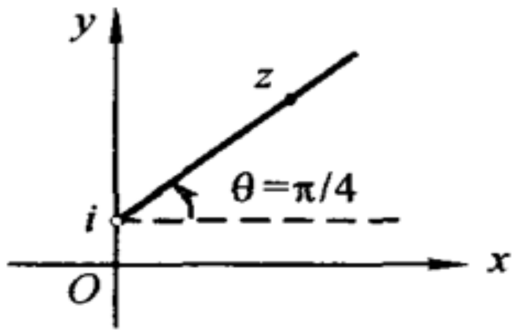
$$z = z_1 + t(z_2 - z_1) \quad (0 \le t \le 1)$$



过 z_1 与 z_2 两点的直线 L

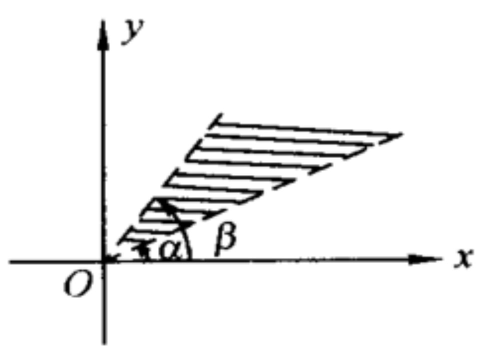
直线

$$z = z_1 + t(z_2 - z_1) \quad (-\infty \le t \le +\infty)$$



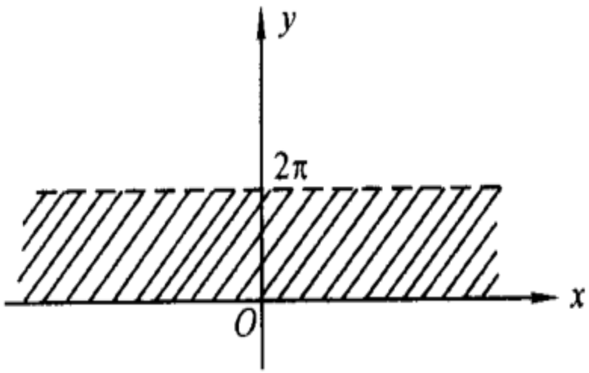
射线

$$\arg(z-i)=\frac{\pi}{4}$$



角域

$$\alpha<\arg z<\beta$$



带域

$$0 < \mathrm{Im}\, z < 2\pi$$

实轴： $\mathrm{Im}\, z = 0$, **虚轴：** $\mathrm{Re}\, z = 0$

……