复变函数与拉普拉斯变换

第四章　级数

第4.1节　复数项级数与幂级数

一. 复数列与复数项级数

复数列极限的定义

设 $\{z_n\}$ 是一复数列，z_0 是一复数，如果 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in N^*$, 当 $n \geq N$ 时，有

$$|z_n - z_0| < \varepsilon$$

成立，则称 $\{z_n\}$ 收敛于 z_0，记作 $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$.

定理 复数列 $\{z_n\}=\{a_n+ib_n\}$ 收敛于 $z_0=a+ib$ 的充分必要条件是 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b.$

证： 由数列极限的定义及下列不等式易证，略。

$$\max\{|a_n-a|,|b_n-b|\}\le|z_n-z_0|\le|a_n-a|+|b_n-b|.$$

复数项级数 通项

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n + \cdots$$

若部分和数列

$$S_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n \to S \quad (n \to \infty)$$

则称级数收敛于 S，记作 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S$.

若 S_n 不收敛，则称级数发散。

若 $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ 收敛，则称 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 绝对收敛；

若 $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ 发散，$\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 收敛，则称 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 条件收敛。

收敛级数的性质

定理 若 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 收敛，则 $\lim_{n\to\infty} z_n = 0.$ （级数收敛的必要条件）

定理 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 收敛的充分必要条件 $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Re}(z_n)$，$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Im}(z_n)$ 都收敛。

定理 绝对收敛的级数一定收敛，反之不成立。

例1. 考察 $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n}+\frac{i}{2^n})$ 的收敛性。

解：因为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i}{2^n}$ 绝对收敛，

所以原级数发散。

二 复函数序列 与复函数项级数

$$\{f_n(z)\},\ z \in C$$

和函数

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) = S(z),\ z \in D$$

收敛域

$$\Leftrightarrow S_n(z) = \sum_{n=1}^{n} f_n(z) \to S(z)\ \ (n \to \infty), \quad \forall z \in D$$

部分和序列

三 幂级数的敛散性

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-a)^n = C_0 + C_1(z-a) + \cdots + C_n(z-a)^n + \cdots$$

（C_n, a 复数）

特：$a=0$，$\sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n$

定理（阿贝尔定理） （i）若 $\sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n$ 在 $z=z_0 \neq 0$ 处收敛，那么当 $|z|<|z_0|$ 时，幂级数绝对收敛。

（ii）若幂级数在 $z=z_1$ 处发散，那么当 $|z|>|z_1|$ 时，幂级数发散。

证:(i) $|C_n z^n| = |C_n z_0^n| \left|\frac{z}{z_0}\right|^n \leq M q^n$，$q = \left|\frac{z}{z_0}\right| < 1$.

由比较判别法，$\sum_{n=1}^{\infty} C_n z^n$ 绝对收敛。(ii)用(i)反证。

收敛半径： $R=\sup\{|z|:\sum_{n=0}^{\infty}C_n z^n \text{ 收敛}\}$

当 $|z|<R$ 时，幂级数绝对收敛；当 $|z|>R$ 时，幂级数发散；当 $|z|=R$ 时，不确定。

收敛圆： $B_R=\{z\in C\,|\,|z|<R\}$

当 $R=0$ 时，级数仅在 $z=0$ 处收敛；

当 $R=+\infty$ 时，级数在整个复平面收敛。

定理（收敛半径的计算）

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_n}{C_{n+1}}\right| \text{ 或 } \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|C_n|}}.$$

例3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^n}$

$$\because \frac{|z^n|}{n^n} < \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad (n \text{ 充分大时})$$

所以级数对任意 z 均收敛。

例4. 讨论级数 $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ 的敛散性。

解： $S_n = 1 + z + \cdots + z^{n-1} = \frac{1-z^n}{1-z} \quad (z \neq 1)$

当 $|z| < 1$ 时， $S_n \to \frac{1}{1-z} \quad (n \to \infty)$.

当 $|z| \geq 1$ 时， z^n 不收敛于零，级数发散。

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \quad (|z| < 1)$$

幂级数和函数的解析性

定理 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n$ 的收敛半径为 R，

且 $\sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n = f(z), \quad (|z|< R)$

则：(i) $f(z)$ 在 $|z|< R$ 内解析；

(ii) 上式两边可任意阶逐项求导；

(iii) 上式两边可逐项积分，即

$$\int_C f(z)dz = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \int_C z^n dz$$

其中 $C \subset B_R$. 特别，C起点原点，终点 $z \in B_R$，

则 $\int_C z^n dz = \dfrac{z^{n+1}}{n+1}$.

第4.2节　台劳（Taylor）级数

一　台劳定理

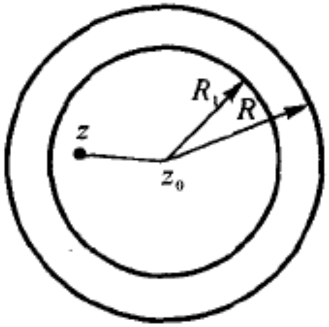
定理（台劳定理） 设 $f(z)$ 在圆 $D:|z-z_0|<R$ 内解析，则 $f(z)$ 在圆内可展开成幂级数（台劳级数）

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n,\quad (|z-z_0|<R)$$

且展开式唯一。

特别：当 $z_0=0$ 时，

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n,(|z|<R)$$ （马克劳林级数）



证： 由柯西积分公式

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_{R_1}}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta,\quad C_{R_1}:|\zeta-z_0|=R_1.\quad (|z-z_0|<R_1)$$

$$\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{(\zeta-z_0)-(z-z_0)}=\frac{1}{\zeta-z_0}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z-z_0}{\zeta-z_0}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}}$$

$$\therefore\quad f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z-z_0)^n$$

其中：$C_n=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{C_{R_1}}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}.$

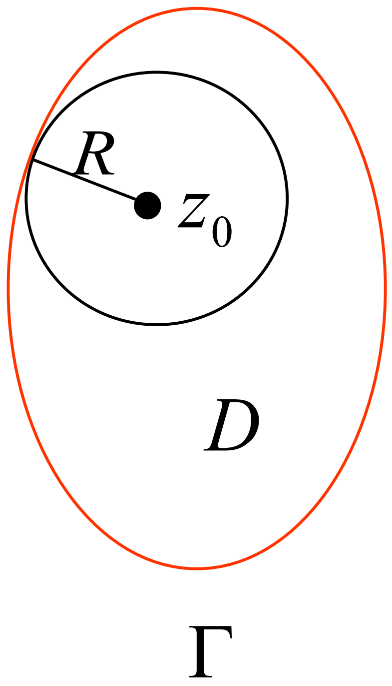
唯一性：若 $f(z)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}C_n'(z-z_0)^n\Rightarrow C_n'=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}.$

推论：$f(z)$ 在区域 D 内解析 $\Leftrightarrow f(z)$ 在 D 内任一点 z_0 处可展开成幂级数。

z_0处台劳级数的收敛半径

$$R=\min_{\zeta\in\Gamma}|\zeta-z_0|.$$

其中 Γ 为 D 的边界。



二 一些初等函数的台劳展开式

例6. $f(z)=e^z$ 在复平面上解析， $(e^z)^{(n)}|_{z=0}=1,$

$$e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}=1+z+\frac{z^2}{2!}+\cdots+\frac{z^n}{n!}+\cdots(|z|<+\infty)$$

例7. $$\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(iz)^n+(-iz)^n}{n!}$$

$$\cos z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+\cdots+(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}+\cdots$$

$$(|z|<+\infty)$$

类似

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots \quad (|z| < +\infty)$$

$$shz = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots + \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots \quad (|z| < +\infty)$$

$$chz = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots + \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \cdots \quad (|z| < +\infty)$$

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n + \cdots \quad (|z| < 1)$$

例8. 求函数 $f(z)=\ln(1+z)$ 的麦克劳林级数。

解：
$$\frac{1}{1+z}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n \quad (|z|<1)$$

$$\Rightarrow \int_0^z \frac{1}{1+z}dz=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^z z^n dz \quad (|z|<1)$$

$$\Rightarrow \ln(1+z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{n+1}}{n+1} \quad (|z|<1)$$

间接展开法：已有公式，代数运算，变量替换，逐项求导，逐项积分等。

例：由例8， $z\to -z^2$，

$$\ln(1-z^2)=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+2}}{n+1} \quad (|z|<1)$$

例9. 将 $f(z)=\dfrac{z}{z+1}$ 在 $z_0=1$ 处展开成台劳级数。

解: $$f(z)=\frac{z}{z+1}=1-\frac{1}{z+1}=1-\frac{1}{(z-1)+2}$$

$$=1-\frac{1}{2}\frac{1}{1+(z-1)/2}$$

$$=1-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-1)^n}{2^n},\quad (|z-1|<2).$$

思考题9. 用待定系数法将 $\tan z$ 展开成麦克林级数。

解：设 $\tan z=\dfrac{\sin z}{\cos z}=a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n+\cdots,\ (|z|<\dfrac{\pi}{2})$

则

$$z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\cdots$$

$$=(1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+\cdots)\cdot(a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n+\cdots)$$

比较系数：$a_0=a_2=a_4=0,\ a_1=1,\ a_3=\dfrac{1}{3},\ a_5=\dfrac{2}{15},\cdots$

$$\therefore\ \tan z=z+\frac{z^3}{3}+\frac{2}{15}z^5+\cdots\quad(|z|<\frac{\pi}{2}).$$

第4.3节 解析函数零点的孤立性及唯一性定理

定义1. 若 $f(z_0)=0$，称 z_0 为 $f(z)$ 的**零点**。

定义2. 若 $f(z_0)=0$，且 $f(z)\neq 0, \forall z\in D(z_0,\delta)\setminus\{z_0\}$，称 z_0 为 $f(z)$ 的**孤立零点**。

定义3. 若解析函数 $f(z)$ 可表示为

$$f(z)=(z-z_0)^m\psi(z), \quad z\in D(z_0,\delta)$$

其中 $\psi(z)$ 在 z_0 点解析，且 $\psi(z_0)\neq 0, m\geq 1$，称 z_0 为 $f(z)$ 的 m **级零点**。（当 $m=1$ 时，称 z_0 为**单零点**）

定理4.3.1 设 $f(z)$ 在区域 D内解析，$\{z_n\}$ 两两不同，$f(z_n)=0,\quad z_n\to z_0\in D\,(n\to\infty)$，则 $f(z)\equiv 0\ in\ D.$

证： 存在 $r>0$ 使 $D(z_0,r)\subset D$ 。由台劳定理

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z-z_0)^n,\qquad z\in D(z_0,r)$$

先证 $C_n=0\ (n=0,1,2,\cdots)$. （反证）若不然，存在某 $k\geq 0$ 使 $C_0=C_1=\cdots=C_{k-1}=0, C_k\neq 0$， 即有

$$f(z)=\sum_{n=k}^{\infty}C_n(z-z_0)^n$$

$$=(z-z_0)^k[C_k+C_{k+1}(z-z_0)+\cdots]=(z-z_0)^k\psi(z),$$

其中 $\psi(z_0)=C_k\neq 0$，由连续性，在某 $D(z_0,\delta)$中，$\psi(z)\neq 0$，$f(z)$ 仅有 z_0一个零点，与假设矛盾。

$\therefore \quad f(z) \equiv 0, \quad z \in D(z_0, r).$

对任意 $z' \in D$，存在 D 内连接 z', z_0 的折线 Γ，$\delta > 0$

及 Γ 上的点 $z_0 = s_0, s_1, \cdots, s_m = z'$ 使

$$D(s_j, \delta) \subset D, \text{且 } s_{j+1} \in D(s_j, \delta).(0 \le j \le m)$$

因为 $f(z) \equiv 0, \quad z \in D(z_0, \delta) \cap D(s_1, \delta)$，由上讨论知：

$f(z) \equiv 0, \quad z \in D(s_1, \delta).$ 依次类推，得

$$f(z) \equiv 0, \quad z \in D(s_j, \delta)\,(0 \le j \le m)$$

因此，$f(z') = 0.$ 即证得 $f(z) \equiv 0 \; in \; D.$

推论1. 不恒为零的解析函数的零点必是孤立的。

注： 实函数不具有此性质。例如下列函数处处可导

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0. \end{cases}$$

$x_n=\dfrac{1}{n\pi}\to 0\,(n\to\infty)$ 都是其零点。$x=0$ 非孤立零点。

推论2. 设 $f(z), g(z)$ 在区域 D 内解析，$\{z_n\}$ 两两不同，$f(z_n)=g(z_n),\quad z_n\to z_0\in D\,(n\to\infty)$，则

$$f(z)\equiv g(z)\quad in\ D.$$

（解析函数的唯一性定理）

注：由推论2知，两解析函数在区域 D 内一部分上（如实数区间）相等，则他们恒等。

如：$\sin^2 z+\cos^2 z=1$ 两边都是解析函数，且等式在实轴上成立，由推论2，它在整个复平面成立。

定理4.3.2 z_0 **为解析函数** $f(z)$ **的** m **级零点的充要条件是：** $f(z_0)=f'(z_0)=\cdots=f^{(m-1)}(z_0)=0,\ f^{(m)}(z_0)\neq 0.$

证： 必要性， 由台劳公式，

$$f(z)=(z-z_0)^m\psi(z)$$

$$=(z-z_0)^m\left(\psi(z_0)+\psi'(z_0)(z-z_0)+\cdots+\frac{\psi^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n+\cdots\right)$$

$$\Rightarrow f(z_0)=f'(z_0)=\cdots=f^{(m-1)}(z_0)=0,$$

$$f^{(m)}(z_0)=m!\psi(z_0)\neq 0.$$

充分性　　由台劳公式

$$f(z)=\frac{f^{(m)}(z_0)}{m!}(z-z_0)^m+\frac{f^{(m+1)}(z_0)}{(m+1)!}(z-z_0)^{m+1}+\cdots$$

$$=(z-z_0)^m[\frac{f^{(m)}(z_0)}{m!}+\frac{f^{(m+1)}(z_0)}{(m+1)!}(z-z_0)+\cdots]$$

$$\overset{\text{记}}{=}(z-z_0)^m\psi(z)$$

其中 $\psi(z_0)\neq 0, \psi(z)$ 解析。结论成立。

例10 讨论 $f(z)=1-\cos z$ 在原点 $z=0$ 的性质。

解： 因为

$$f(0)=0,\ f'(0)=\sin z\,|_{z=0}=0,\ f''(0)=\cos z\,|_{z=0}=1\neq 0$$

或 $f(z)=1-\cos z$

$$=1-(1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+\cdots+(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}+\cdots)$$

$$=z^2(\frac{1}{2!}-\frac{z^2}{4!}+\cdots+(-1)^n\frac{z^{2n-2}}{(2n)!}+\cdots)$$

所以 $z=0$ 为 $f(z)$ 的二级零点。

第4.4节 罗朗级数

问题： 若 $f(z)$ 在 $0<|z-z_0|<\delta$ 内解析，z_0 是孤立奇点，那么 $f(z)$ 在此去心邻域内是否可展开成幂级数？

1. 双边级数的收敛性

双边级数：$\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n(z-z_0)^n$

$$=\cdots+C_{-n}(z-z_0)^{-n}+\cdots+C_{-1}(z-z_0)^{-1}\text{（负幂部分）}$$

$$+C_0+C_1(z-z_0)+\cdots+C_n(z-z_0)^n+\cdots\text{（正幂部分）}$$

令 $\zeta=(z-z_0)^{-1}$，则负幂部分

$$\cdots+C_{-n}(z-z_0)^{-n}+\cdots+C_{-1}(z-z_0)^{-1}$$
$$=\cdots+C_{-n}\zeta^{n}+\cdots+C_{-1}\zeta$$

设其收敛圆为 $|\zeta|<R$，即 $|z-z_0|>\dfrac{1}{R}=R_1.$

再设正幂级数的收敛圆为 $|z-z_0|<R_{2.}$

综上， 双边级数收敛的充要条件是 $R_1<R_2$

且收敛域为圆环 $(0\le)\ R_1<|z-z_0|<R_2\ (\le+\infty).$

和函数在圆环内解析，可逐项求导，逐项积分。

2. 罗朗定理

反之，在圆环内解析的函数是否可以展开成双边级数？是！即有

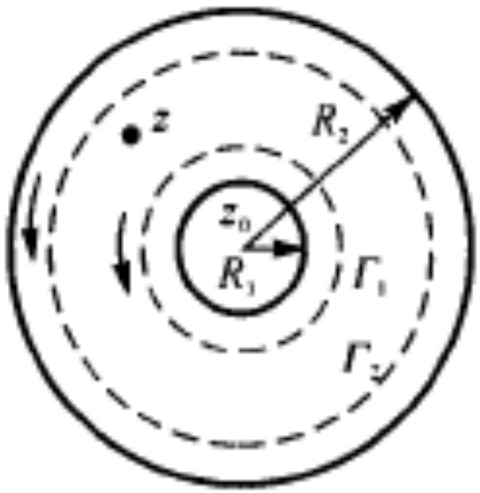
定理（罗朗定理） 设 $f(z)$ 在圆环 $R_1 < |z-z_0| < R_2$ 内解析，则 $f(z)$ 在此环内可展开成罗朗级数

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n (z-z_0)^n,\quad (R_1 < |z-z_0| < R_2)$$

其中：$C_n = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{C_R} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz,\quad (n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$

$C_R : |z-z_0| = R \in (R_1, R_2)$ 逆时针，且展开式唯一。

证：如右图作 $\Gamma_1\ \Gamma_2$，由柯西积分公式



$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2+\Gamma_1^-}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta\quad+\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{f(\zeta)}{z-\zeta}d\zeta\qquad(1)$$

由台劳定理证明可知：$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\sum_{n=0}^{+\infty}C_n(z-z_0)^n$，(2)

$$C_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta,\quad(n=0,1,2,\cdots)$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_R}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta,$$ （形变原理）.

对任一$\zeta \in \Gamma_1$ 有

$$\frac{1}{z-\zeta}=\frac{1}{(z-z_0)-(\zeta-z_0)}=\frac{1}{z-z_0}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{\zeta-z_0}{z-z_0}}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(\zeta-z_0)^{n-1}}{(z-z_0)^n}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{f(\zeta)}{z-\zeta}d\zeta$$

$$=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(z-z_0)^n}\cdot\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_1}f(\zeta)(\zeta-z_0)^{n-1}d\zeta$$

$$=\sum_{n=-1}^{-\infty}\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_1}f(\zeta)(\zeta-z_0)^{-n-1}d\zeta\cdot(z-z_0)^n$$

$$=\sum_{n=-1}^{-\infty}C_n(z-z_0)^n, \qquad (3)$$

将(2) (3)代入（1），定理证毕。

注1. 如果 $f(z)$ 在圆 $|z-z_0|<R_2$ 解析，则

$$C_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_R}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz=\begin{cases}0, \text{当 } n\le -1 \text{ 时};\\ \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, \text{当 } n\ge 0 \text{ 时}.\end{cases}$$

罗朗定理 $\Rightarrow$ 台劳定理

注2. C_n 用积分公式难以求出，常用麦克劳林公式间接展开（代数运算，变量替换，逐项求导，逐项积分等）。

注3. 不同环域，展开式一般不一样。去心邻域为特殊环。

例11. 将函数 $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ 在下列环域中罗朗展开。

(1) $\{1<|z|<2\}$.

解：$z_0=0$, 罗朗级数形式为 $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}C_n z^n$,

$$\therefore\quad f(z)=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}$$

$$=-\frac{1}{2}\frac{1}{1-\dfrac{z}{2}}-\frac{1}{z}\frac{1}{1-\dfrac{1}{z}}$$

（注意：$|\dfrac{z}{2}|<1,\ |\dfrac{1}{z}|<1$）

$$=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n}-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n}$$

$$=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}\qquad\{1<|z|<2\}.$$

(2) $\{2<|z|<+\infty\}$.　　　($z_0=0$,　$|\frac{2}{z}|<1, |\frac{1}{z}|<1$)

$$\therefore \quad f(z)=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{2}{z}}-\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}}$$

$$=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^n}-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n-1}{z^{n+1}}$$

(3) $\{0<|z-1|<1\}$.　　$(z_0=1)$

$$\therefore \quad f(z)=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}$$

$$=\frac{1}{(z-1)-1}-\frac{1}{z-1}=-\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n-\frac{1}{z-1}, \quad \{0<|z-1|<1\}.$$

思考： $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)^2}$ 在 $\{0<|z-1|<1\}$ 中如何展开？

例13. 在 $z=1$ 的去心邻域将 $f(z)=e^{\frac{1}{z-1}}$ 展开成罗朗级数。

解：令 $\zeta=\dfrac{1}{z-1}$ （变量替换）

$$\because \quad e^{\zeta}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\zeta^{n}}{n!}, \quad (|\zeta|<\infty)$$

$$\therefore \quad e^{\frac{1}{z-1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!(z-1)^{n}}, \quad (0<|z-1|<+\infty).$$

类似 $\quad f(z)=e^{\frac{z}{z-1}}=e^{1+\frac{1}{z-1}}$

$$=e\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!(z-1)^{n}}, \quad (0<|z-1|<+\infty).$$

三、(14分)(1)求函数$\frac{1}{z^2-3z+2}$在圆环$\sqrt{2}<|z+i|<\sqrt{5}$展开的罗朗级数。

解：$$\frac{1}{z^2-3z+2}=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z+i-2-i}-\frac{1}{z+i-1-i}=-\frac{1}{2+i}\frac{1}{1-\frac{z+i}{2+i}}-\frac{1}{z+i}\frac{1}{1-\frac{1+i}{z+i}}$$

$$=-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(z+i)^n}{(2+i)^{n+1}}-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(1+i)^n}{(z+i)^{n+1}}$$

(2)求$e^z\cos z$在$z_0=0$处展开的台劳级数。

解：$$e^z\cos z=e^z(e^{iz}+e^{-iz})/2=(e^{(1+i)z}+e^{(1-i)z})/2$$

$$=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{z^k}{k!}[(1+i)^k+(1-i)^k]=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{z^k2^{k/2}}{k!}[e^{ik\pi/4}+e^{-ik\pi/4}]=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{z^k2^{k/2+1}}{k!}\cos\frac{k\pi}{4}$$

三、（**14分**）（1）求函数$\dfrac{z^2-2z-3}{z(z^2+1)(z+2)}$在圆环$1<|z|<2$展开的罗朗级数

解：$$\frac{z^2-2z-3}{z(z^2+1)(z+2)}=\frac{1}{z}\Big[\frac{1}{z+2}-\frac{2}{z^2+1}\Big]=\frac{1}{z}\Big[\frac{1}{2}\frac{1}{1+z/2}-\frac{1}{z^2}\frac{2}{1+1/z^2}\Big]$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{z^{n-1}}{2^{n+1}}-2\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n z^{-2n-3}$$

（2）求$\dfrac{2z}{z^2-1}$在$z_0=i$处展开的台劳级数。

解：$$\frac{2z}{z^2-1}=\frac{1}{z-1}+\frac{1}{z+1}=\frac{1}{z-i-(1-i)}+\frac{1}{z-i+1+i}=\frac{1}{i-1}\frac{1}{1-(z-i)/(1-i)}$$

$$+\frac{1}{1+i}\frac{1}{1+(z-i)/(1+i)}\quad=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{-(z-i)^n}{(1-i)^{n+1}}-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(z-i)^n}{(i-1)^{n+1}}\quad=\sum_{n=0}^{+\infty}\Big[\frac{-1}{(1-i)^{n+1}}+\frac{(-1)^n}{(1+i)^{n+1}}\Big](z-i)^n$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}[-(-1+i)^{n+1}-(1+i)^{n+1}]\frac{(z-i)^n}{2^{n+1}}=\sum_{n=0}^{+\infty}[(1+i)^{n+1}+(1-i)^{n+1}]\frac{(z-i)^n}{2^{n+1}}i^{n+3}$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}[e^{i\pi(n+1)/4}+e^{-i\pi(n+1)/4}]\frac{(z-i)^n}{2^{(n+1)/2}}i^{n+3}=\sum_{n=0}^{+\infty}\cos\frac{\pi(n+1)}{4}\frac{(z-i)^n}{2^{(n-1)/2}}i^{n+3}$$