Chapter 1 概率论的基本概念

样本空间与随机事件

随机试验(random experiment) 的特点：

1. 可以在相同条件下重复进行；
2. 事先知道所有可能的结果；
3. 进行实验时并不知道哪个结果会发生

而随机试验的所有可能结果构成的集合为**样本空间(sample space)**，记为S，其中的每一个元素e为**样本点(sample point)**。
而样本空间的任一子集A成为**随机事件(random event)**，简称事件。

- 特别的，只含有一个样本的子集称为**基本事件**。
- 每次事件S总是发生，称为必然事件

事件的相互关系

- 两互逆事件又称**对立事件**。
- 若$AB=\varnothing$，则称两事件**不相容**（或**互斥**）
- 若$A\subset B\ and\ B\subset A$，则称两事件**相等**

其中，和、交、逆事件有如下运算规律：

- **交换律**：$A\cup B=B\cup A$, $A\cap B=B\cap A$;
- **结合律**：$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$, $A(BC)=(AB)C$;
- **分配律**：$A(B\cup C)=(AB)\cup(AC)$, $(AB)\cup C=(A\cup C)(B\cup C)$;
- **对偶律/德摩根定律(De Morgan's law)**：$\overline{\bigcup_{j=1}^{n} A_j}=\bigcap_{j=1}^{n}\overline{A_j}=\overline{A_1}\cup\overline{A_2}\cup\ldots\overline{A_n}$, $\overline{\bigcap_{j=1}^{n} A_j}=\bigcup_{j=1}^{n}\overline{A_j}=\overline{A_1A_2\ldots A_n}$;

串联系统与并联系统：

- 串联系统：$A=\bigcap_{i=1}^{n} A_i$
- 并联系统：$A=\bigcup_{i=1}^{n} A_i$

频率与概率

频率 = 频数 / 试验总次数

定义：记$f_n(A) = \frac{n_A}{n}$

- n_A：A发生的次数（频数）
- n：总试验次数
- $f_n(A)$为事件A的频率

若样本空间S中的任一事件A，**定义概率**$P(A)$满足以下三条公理：

1. 非负性$P(A) \geq 0$；
2. 规范性 / 正则性$P(S) = 1$；
3. 可列可加性：对于S中不相容的事件A_i，有$P(\bigcup\limits_{j=1}^{+\infty} A_j) = \sum\limits_{j=1}^{+\infty} P(A_j)$；

由此得到如下几条**概率的性质**：

1. 对于有限个**两两不相容**的事件的和事件，有 $P(\bigcup\limits_{j=1}^{n} A_j) = \sum\limits_{j=1}^{n} P(A_j)$；
2. $P(A) = 1 - P(\overline{A})$；特别的，可以得到$P(\varnothing) = 0$；
3. 当$A \supset B$时，$P(A - B) = P(A) - P(B)$且$P(A) \geq P(B)$；
4. 概率的**加法公式**：$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$；推广即容斥原理；
5. 加法公式的推论：$P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$；

等可能概型

如果随机事件满足：

1. S中样本点数有限；
2. $\forall i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$，$P(e_i) = P(e_j)$，即等可能；

则该试验问题为**等可能概型**（**古典概型**）
有如下性质：若总事件个数为N，A为n个基本事件的和事件，则$P(A) = \frac{n}{N}$。

条件概率

如果$P(B) > 0$，那么**定义**在B发生的条件下A发生的**条件概率(contidional probability)**为：
$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$

条件概率是在新的样本空间下的概率度量，它满足概率的定义和性质。

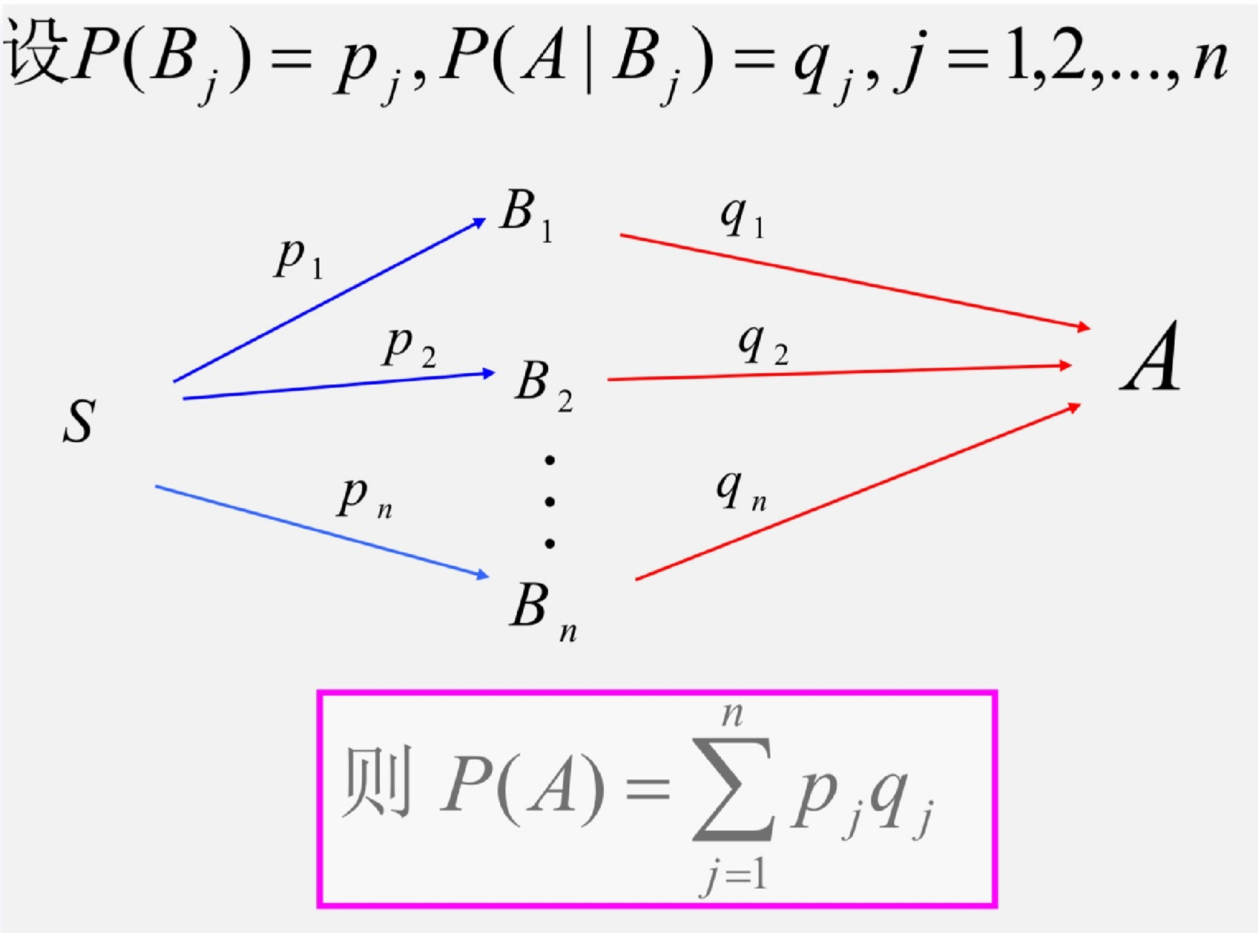
定义完备事件组为S的一个划分$B_1, B_2, \ldots, B_n$，它满足如下性质：

1. 不重：$B_iB_j = \varnothing, i, j, \ldots, n, i \neq j$;
2. 不漏：$\bigcup\limits_{i=1}^{n} B_i = S$;

设S为一样本空间，A为该试验的事件，$\{B_i\}$为S的一个划分，则有：

- 若$A_1, \ldots, A_n, \ldots$互不相容，则$P(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n|B) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n|B)$;
- 乘法公式：当$P(A) \neq 0 \quad P(B) \neq 0$时，有$P(AB) = P(A) * P(B|A) = P(B) * P(A|B)$;
- 全概率公式：$P(A) = \sum\limits_{j=1}^{n} P(B_j)P(A|B_j)$;

路径图：画出路径图求解问题



- 贝叶斯公式：$P(B_k|A) = \frac{P(B_kA)}{P(A)} = \frac{P(B_k)P(A|B_k)}{\sum\limits_{j=1}^{n} P(B_j)P(A|B_j)} = \frac{p_i q_i}{\sum\limits_{j=1}^{n} p_j q_j}$;
  - 其中，我们称$P(B_j)$这种事先知道的概率为先验概率；
  - 而$P(B_j|A)$这种，当事件A发生后需要修正 B_j 的概率成为后验概率（知道了额外的信息：A发生）。

- 我们称$P(A|B_j)$为**似然概率**。

事件独立性与独立试验

独立的定义:
设A,B为两个随机事件，若有$P(AB)=P(A)*P(B)$，则A,B相互**独立(independent)**

其实际意义是，事件A的发生与事件B的发生互不影响。
那么就有结论:
$P(AB)=P(A)*P(B) \iff P(A|B)=P(A)$;

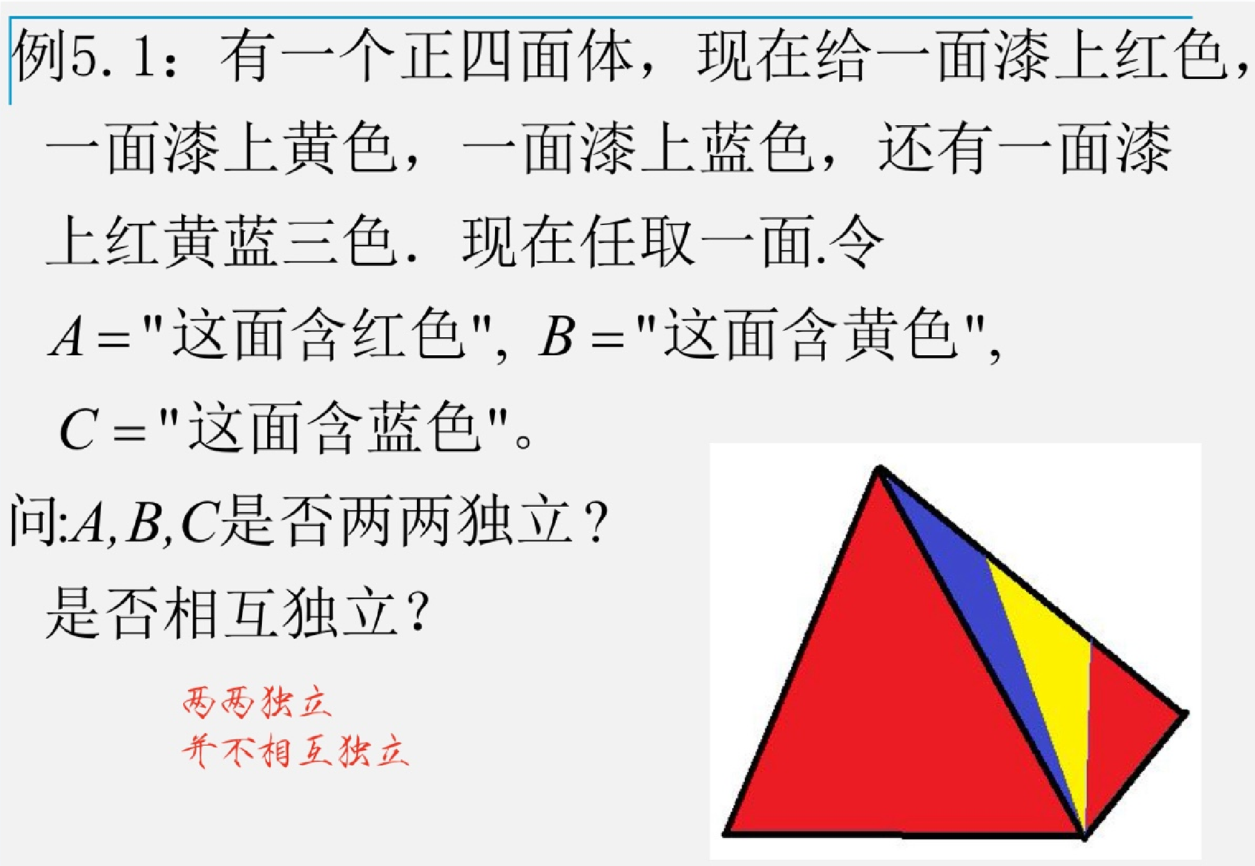
A,B相互独立$\iff A,\overline{B}$相互独立$\iff \overline{A},B$相互独立$\iff \overline{A},\overline{B}$相互独立

当出现两个以上的随机事件时，如三个随机事件A,B,C，当:
$P(AB)=P(A)*P(B)$，$P(AC)=P(A)*P(C)$，$P(BC)=P(B)*P(C)$
都成立，则称事件A,B,C**两两独立**;

如果**同时还**满足:
$P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$
则称事件A,B,C**相互独立**。

- 显然有：相互独立$\Rightarrow$两两独立(相互独立比两两独立来的更强)
- 两两独立**不能**$\Rightarrow$相互独立

例:



更普遍的:

定义$\{A_i\}$**相互独立**当且仅当$\forall i_j$, $P(\prod_{j=1}^{k} A_{i_j}) = \prod_{j=1}^{k} P(A_{i_j})$

独立试验与重复试验:

- **独立试验**各个试验结果互不影响;
- **重复试验**的每一次子试验都在相同情况下进行;