Chapter 1 预备知识

欧拉公式：$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$

复数的三种表示方法：$z=x+iy=re^{i\theta}$

复数相等 = 实部和虚部都相等

模 $r=\sqrt{x^2+y^2}=|z|$

幅角 $\theta=Arg\,z=arg\,z+2k\pi$，是一个集合，每个元素相差 2π，其中在$(-\pi,\pi]$的称为辐角主值。

1. $arg\in(-\pi,\pi]$
2. $arg\;0, arg\;\infty$ 无意义
3. 辐角主值可以直接看成平面上的点的对应角，而$arctan\;\frac{y}{x}\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$不行。所以二者有一个类似于分段函数的对应关系式。【这不用记；需要用到的时候在脑子里画图即可。】

复数的加减法——向量的加减法

乘法：$|z_1z_2|=r_1r_2=|z_1||z_2|$；$Arg\;z_1z_2=Arg\;z_1+Arg\;z_2$

除法：模等于模的商，幅角等于幅角之差。

乘方：$z^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$

开方：$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{|z|}e^{i\frac{argz+2k\pi}{n}},k=0,1,\cdots,n-1$（$deMoivre$公式）

Chapter 2 解析函数

复变函数：$w=f(z)=f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$

极限：$\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=A\;\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0,y\to y_0}u(x,y)=u_0,\lim\limits_{x\to x_0,y\to y_0}v(x,y)=v_0$

连续：$\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=f(z_0)\;\;\Leftrightarrow\forall\epsilon>0,\exists\,\delta(\varepsilon)>0$，当$0<|z-z_0|<\delta$时，$|f(z)-f(z_0)|<\varepsilon$

⇔对应的实函数u,v分别连续（左极限=右极限=$f(z_0)$）

> 在闭区域$\overline{G}$中连续的函数有两个重要性质：
>
> 1. $|f(z)|$**在$\overline{G}$中有界，并达到它的上下界。**
> 2. $f(z)$在$\overline{G}$中一致连续，即对于任意 ε>0，存在与z无关的$\delta(\varepsilon)>0$，在$\overline{G}$中的任何两点z_1,z_2，只要满足$|z_1-z_2|<\delta$,就有$|f(z_1)-f(z_2)|<\varepsilon$.

若两函数在z_0连续，则其$+,-\times,\div$(分母$\neq0$)，复合运算后，在点z_0仍连续。

求导：$f'(z_0)=\lim\limits_{\Delta z\to0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$

微积分回忆内容

连续 可导和可微

连续	$f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+o(\Delta x)$
偏导数	$f(x_0+\Delta x,y_0)=f(x_0,y_0)+\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x+o(\Delta x)$ $f(x_0,y_0+\Delta y)=f(x_0,y_0)+\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y+o(\Delta y)$
多元可微	$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)=f(x_0,y_0)+\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y+o(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2})$

1、偏导数存在且偏导数连续，一定可微。

2、可微一定可导，可导不一定可微。

3、一般看不可导：沿着两条不同方向线趋近某点，不一样推出矛盾

解析性

定义：

> $f(z)$在z_0的某个邻域内的**每一点可导** $\Leftrightarrow$ $f(z)$在z_0点解析/正则
>
> $f(z)$在区域D内的每一点可导 $\Leftrightarrow$ $f(z)$在区域D内解析/正则
>
> $\Leftrightarrow$ $f(z)$在D内的任意点z_0（存在z_0的一个邻域）处均可展开为收敛的幂级数
>
> 奇点：不解析的点。
>
> 孤立奇点：$D(z_0,\delta)$内的唯一奇点。

判别法：

- 同时满足：

  ①$u(x,y),v(x,y)$在(x,y)点的邻域内（或D内）可微

  ②Cauchy-Riemann条件（**C-R条件**）

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}\end{cases}$$

注意：如果满足条件的是孤立的点，那么只能说$f(z)$在该点上可导，而不解析。

- 解析函数的复合函数（加、减、乘、除等解析函数）仍为解析函数；
- 反函数解析法则：设$w=f(z)$在区域D内单叶解析，$(f^{-1}(w))'=\frac{1}{f'(z)}=\frac{1}{f'[f^{-1}(w)]}$

  > 单叶函数：在区域D上解析的单值复变函数$f(z)$，若对D中任意不同的两点z_1,z_2，有：$f(z_1)\neq f(z_2)$，则说f(z)为D上的单叶函数。

- $f(z)=\bar{z}$处处不可微，处处不解析

解析函数 $f(z)$ 退化为常数的充分条件：

- 若$f(z)$在D上解析，且满足以下条件之一：

> 1. 导数恒为0 （？）

> 2. 解析函数的实部、虚部、幅角、模中有1恒为常数
> 3. $\overline{f(z)}$ 在D上解析

则$f(z)$在D内恒为常数。

- 另若$f(z)$在整个复平面解析，见柳维尔定理解析性。

小结：函数 f(x) 在区域D解析的等价条件有：

> 1. 函数 f(x) 在区域 D内可导；
> 2. Re(f),Im(f)在区域D内可微且满足Cauchy-Riemann条件；
> 3. 函数 f(x) 在区域 D内连续且积分与路径无关；
> 4. 函数 f(x) 在区域 D内可展开为幂级数。

调和函数$\Delta u \equiv u_{xx} + u_{yy} = 0$

解析函数的实部和虚部都是调和函数

常见初等函数

全部初等函数（多项式函数、指数函数、三角函数、对数函数、幂函数……）在相应的定义域上都是解析的。

指数函数：$w = e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$

求导等同实指数函数。可自行证明。（$dz = d(x+iy)$）

在整个复平面上处处解析。

对数函数：$w = Lnz = lnz + i2k\pi = (ln|z| + iargz) + 2ki\pi = ln|z| + i(argz + 2k\pi)$

在原点和负实轴上不解析。

幂函数：$w = z^a = e^{aLn\,z} = e^{aln\,z} \cdot e^{2k\pi ai}, a \in C$

$w = z^a$ 的多值性：

> 1. a 为整数——单值函数（左因式为主值，右因式为定值1）
> 2. a 为 p/q——有限值函数；特别地，a 为 $1/n$ —— n 值函数
> 3. a 为无理数/虚部不为0的复数——无穷多值

在原点和负实轴上不解析。（可以看作指数函数和对数函数的复合函数。）

三角函数和双曲函数：

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$
$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$
$$shz = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$
$$chz = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

在整个复平面上处处解析。（可以看作指数函数的复合函数。）

与三角函数的关系：

$$sh\ iz = isinz;\ ch\ iz = cosz$$
$$sin\ iz = ish\ z;\ cos\ iz = chz$$

和角公式：

$$ch(a+b) = cha\ chb + sha\ shb$$
$$sh(a+b) = sha\ chb + cha\ shb$$

Chapter 3 复变函数的积分

微积分回忆内容

与路径无关的第二类曲线积分

平面第二型曲线积分 $\int_A^B Pdx + Qdy$ 与路径无关的充分必要条件

在区域D内任意取定两点A, B。曲线积分 $\int_{\overset{\frown}{AB}} Pdx + Qdy$ 在区域D内与路径无关的充分必要条件是：

对于D内任意一条简单逐段光滑闭曲线C，沿C的曲线积分为零。 $\Leftrightarrow \oint_{C^+} Pdx + Qdy = 0.$

推论（等价条件）

设D是单连通区域，函数P(x,y)与Q(x,y)在D内有一阶连续偏导数，则对D内任意取定的两点A与B，曲线积分$\int_{\overset{\frown}{AB}} Pdx + Qdy$与路径无关的充分必要条件是：

1 等式 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ 在D内处处成立。或

2 $Pdx + Qdy$ 恰是D内某个函数$u(x,y)$的全微分。 $\Leftrightarrow du(x,y) = Pdx + Qdy$

其中：

1 的证明可根据格林公式将对闭合曲线的积分换成对其内部的二重积分。

格林公式——当P, Q在有界闭区域$D \in R^2$上连续且具有一阶连续导数时：

$\oint_{L^+} Pdx + Qdy = \iint\limits_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy$

2 通过二元函数混合偏导数相等，可以证明。

（注意，物理化学Ⅱ中，麦克斯韦方程的证明也是用的该条件；此显然，状态函数的变化量与路径无关。）

复变函数中，证明C-R条件也是用的相同的方法。实际上，在复数中，$P = u + iv$，$Q = iu - v$。

第三章基本公式

若函数$f(Z)$在C上连续，则其可积（积分极限存在），有：

$\int_c f(z)dz = \int_c udx - vdy + i\int_c vdx + udy$

对于参数方程$z(t) = x(t) + iy(t)$,$\int_c f(z)dz = \int_\alpha^\beta f(z(t))z'(t)dt$

柯西积分定理

f(z)在D内处处解析，则在D上任一封闭曲线积分为0。

$\oint_c f(z)dz = 0$

特别的：$\oint_c \frac{dz}{z-z_0} = 2\pi i$

推论：if 在单连通域D内解析，$\int_c f(z)dz$与路径无关，只与起点和终点有关

闭路变形原理/形变定理

设双连域D的边界$C = \overline{C_1} + \overline{C_2}$。函数$f(Z)$在D内解析，在C上连续。有：

$$\oint_{C_1} f(z)dz = \oint_{C_2} f(z)dz$$

应用：

可以变形成绕不解析点的环路积分。（$D(z_0, R), R < \delta$）

原函数定理

若$f(z)$解析，则其原函数 $F(z) = \int_{z_o}^{z} f(t)dt$ 解析，且 $F(z)' = f(z)$。

Morera定理

若$f(z)$在单连通区域D内连续，且对于D内任意闭曲线C，有$\oint_c f(z)dz = 0$，则$f(z)$在D内解析。

（证明：定义原函数，证明构造良好，应用无穷可微性。）

柯西积分公式及其推论

柯西积分公式

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_c \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

积分平均值定理：

一个解析函数在圆心的值- 等于它在圆周上的平均值。

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \oint_0^{2\pi} f(z)d\theta$$
$$z = z_0 + Re^{i\theta}$$

高阶导数的柯西积分公式

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_c \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

Cauchy 不等式

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!}{R^n} M，(M = max_{n \in |z-z_0|=R} |f(z)|)$$

Liouville's Raw

有界整函数（全平面的有界解析函数）必为常数。

证明：利用n=1，R=∞的Cauchy不等式。

只要在区域$\{z \Big| |z|>R\}$（$|z|\to\infty$）上有界，即可证明全平面上有界。

由柳维尔定理或柯西不等式，当函数$f(z)$为整函数且满足以下条件之一时：

> 1 $|f(z)|\geq c\Rightarrow$ ①构造$g(z)=\frac{1}{f(z)}$（$|g(z)|\leq\frac{1}{c}$）
>
> 2 $Ref(z)\leq c\Rightarrow$ ①构造$g(z)=e^{f(z)}$（$|g(z)|\leq e^c$）；
>
> $Imf(z)\leq c\Rightarrow$ ①构造$g(z)=e^{-if(z)}$（$|g(z)|\leq e^c$）；
>
> 3 $Ref(z)\geq c\Rightarrow$ ①构造$g(z)=e^{-f(z)}$（$|g(z)|\leq e^{-c}$）；
>
> $Imf(z)\geq c\Rightarrow$ ①构造$g(z)=e^{if(z)}$（$|g(z)|\leq e^{-c}$）；
>
> 4 $argf(z)\equiv c\Rightarrow$ ①构造$g(z)=e^{-ic}f(z)$（$arg\,g(z)\equiv 0$）；②$g(z)\in R,\ g(z)>0\Rightarrow Img(z)\equiv 0$；③结合C-R条件；
>
> 5 $f(z)=\sum\limits_{0}^{n}a_iz^i$，且$a_n\neq 0\Rightarrow g(z)=\frac{1}{f(z)}$（$|g(z)|\leq M$）（代数学基本定理）

而后，证明 $g(z)$ 为常数，$g'(z)\equiv 0$；即可证明$f(z)\equiv C$。

最大值定理

若$f(z)$在$\overline{D}$内解析，且$\exists z_0$使得$|f(z_0)|=max_{z\in\overline{D}}|f(z)|$，则$f(z)\equiv 0$。

证明可参考积分平均值定理+不等式，或零点孤立性定理（见Chapter 4）。

推论：设函数$f(z)$在有界区域D内解析，在闭域$\bar{D}=D+C$上连续；$|f(z)|\leq M\quad(z\in\bar{D})$，则除$f(z)$为常数外，$|f(z)|<M\quad(z\in D)$。（即除非$f(z)\equiv C$，否则最大值不可能在$\overline{D}$上取到。）

Chapter 4 级数

主要看幂级数

判断敛散性：Abel定理：$\sum\limits_{n=0}^{\infty}C_nz^n$在$z=z_0$收敛，则在$z<z_0$绝对收敛；在$z=z_0$发散，则在$z>z_0$绝对收敛

幂级数收敛半径R：$\lim\limits_{n\to\infty}|\frac{C_n}{C_{n+1}}|=R$，$\lim\limits_{n\to\infty}|\frac{1}{\sqrt[n]{|C_n|}}|=R$

在收敛半径内，和函数S解析，可以逐项求导/逐项积分

台劳定理

台劳级数：

$f(z)$在区域$D=\{z;|z-z_0|<R\}$解析，则：

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$

其中$C_n=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}=\frac{1}{2\pi i}\oint_c\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$

重要的麦克劳林展开:

$$e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$$

$$cosz=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+\cdots$$

$$sinz=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}=\frac{z^1}{1!}-\frac{z^3}{3!}+\cdots$$

$$\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}z^n\ (|z|<1)$$

$$\frac{1}{1+z}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n\ (|z|<1)$$

罗朗定理

若函数在以z_0为中心的圆环上解析，则复函数$f(Z)$在圆环内可以展开为罗朗级数:

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n(z-z_0)^n=I_n+I_p$$

其中: $C_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_R}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta$，$R_1<R<R_2$。因为$z_0$不在解析域（圆环）内，故$C_n$不能用高阶柯西积分公式化简。

注意: 这是最完整的形式；不排除部分项不存在的情况。

应用领域:

计算积分$C_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)dz$

解析函数零点孤立性及唯一性定理

定义:

> 零点、孤立零点
>
> m阶零点: 不恒为零的**解析函数** $f(z)$ 以z_0为m阶零点的充要条件是: $f(z)=(z-z_0)^m\varphi(z)$。
>
> 其中，$\varphi(z)$ 在点a的邻域 $\{z\big||z-z_0|<R\}$ 内解析，且 $\varphi(z_0)\neq 0$。

m阶零点的判断定理

$f(z)$在z_0解析，若z_0为m阶零点$\Leftrightarrow f^k(z_0)=0\quad(k=0,1\ldots m-1)$ 且 $f^m(z_0)\neq 0$。

m级极点

定理

$f(z)$在D解析，且存在一列两两不同的零点$\{z_n\}(z_n\neq z_0)$收敛于z_0，则$f(z)$在区域内恒为0。

孤立零点定理

不恒为零的解析函数的零点必定是孤立零点。

证明：课本 P99。

零点唯一性定理

设函数$f_1(z)$和$f_2(z)$在区域D内解析。D内有一个收敛于$z_0 \in D$的点列$\{z_n\}(z_n \neq a)$，在其上$f_1(z_n)$和$f_2(z_n)$等值。则：

$f_1(z)$和$f_2(z)$在区域D内恒等。

推论：$f_1(z)$和$f_2(z)$在区域D内某一子区域内相等，则他们必在区域D内恒等.

Chapter 5 留数

奇点：不解析的点。

孤立奇点：除了这个点，周围都解析。

孤立奇点

可去奇点	（m级）极点	本性奇点
洛朗级数中不含$z-z_0$的负幂次	洛朗级数中含有限多$z-z_0$的负幂次	洛朗级数中含无限多$z-z_0$的负幂次
$\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$存在且有限	$\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\infty$	$\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$不存在
$C_{-1}=0$	$C_{-m}\neq 0$ 且 $C_{-m-k}\equiv 0$	$C_{-k}\not\equiv 0$（求C_{-1}只能罗朗展开）

m级极点的判定

1、$f(z)$有m级极点$\Leftrightarrow f(z)$ 可以表示为 $f(z)=(z-z_0)^{-m}\psi(z)$

$\Leftrightarrow$ 该**m级极点**亦为函数$\frac{1}{f(z)}$的**m级零点。**

$\Leftarrow$ 判断m阶零点：见[m阶零点的判断定理]。

2、利用**结论**：

对于均在点 z_0 解析的 $f(z)$ 与 $g(z)$，若 z_0 是 $f(z)$ 的 p 阶零点，$g(z)$ 的 q 阶零点，$h(z)=\frac{f(z)}{g(z)}$，那么有：

(1) 若 $p\geq q$，z_0 是 $h(z)$ 的可去奇点。

(2) 若 $p<q$，z_0 是 $h(z)$ 的 $q-p$ 阶极点。

证明：上下分别作台劳展开。

3、罗朗展开。

4、求 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$。

留数定理

留数

$Res[f(z);z_0]=2\pi i\oint_C f(z)dz=C_{-1}$

> **定义1.** 设 f 是 $D(z_0,r)\backslash\{z_0\}$ 上的解析函数（即在a的去心邻域中解析），其罗朗展开式为 $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} C_n(z-z_0)^n$，则称
>
> $$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-z_0|=\rho} f(z)\mathrm{d}z=C_{-1}\quad(0<\rho<r)$$
>
> 为 f 在 z_0 处的留数，记作 $\mathrm{Res}[f(z);z_0]$或$Res(f;z_0)$。
>
> 在这里，z_0 是一个有限的复数。

*无穷远点的留数：

> 定义2. 设 f 是 $B(\infty,r)$ 上的解析函数，其罗朗展开式为 $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} C_n z^n$，则称
>
> $$-\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=\rho} f(z)\mathrm{d}z=-C_{-1}\quad(r<\rho<\infty)$$
>
> 为 f 在无穷远处的留数。
>
> 注意，无穷远点的邻域是整个复平面除去一个以原点为中心的开圆盘，其正向是顺时针的，故前面有个负号。

留数定理

设$D\subset\mathbb{C}$是由有限条可求长简单闭曲线所围成的区域，∂D 是 D 的边界，若函数 f 在 D 上**除去孤立奇点** $z_1,z_2,\cdots,z_n$ **外都是解析的**，（且连续到 ∂D，）则：

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} f(z)\mathrm{d}z=\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}(f(z),z_k)$$

该定理可用于复平面上积分计算的简化。

> ***另一形式的留数定理*** 若函数 f 在 $\mathbb{C}$ 上在孤立奇点 $z_1,z_2,\cdots,z_n$ 外均解析，则：
>
> $$\mathrm{Res}(f(z),\infty)+\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}(f(z),z_k)=0$$

留数计算规则

对于可去奇点，$Res[f(z),z_0]=0$；对于本性奇点，做洛朗展开；

对于极点，有一些规则：

规则1

$$Res[f(z),z_0]=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[(z-z_0)^m f(z)]$$

特殊情况

对于单极点

$$Res[f(z),z_0]=\lim_{z\to z_0}f(z)$$

规则2

$$设f(z)=\frac{P(z)}{Q(z)},且P(z_0)\neq 0,Q(z_0)=0,Q'(z_0)\neq 0，则z_0是一级极点，且$$

$$Res[f(z),z_0]=\frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$$

证明：利用定义。

规则3

$$若\ z_0是g(z)的k级零点，是h(z)的k+1级零点，则z_0是一级极点，且$$

$$Res[f(z),z_0]=(k+1)\frac{g^{(k)}(z_0)}{h^{(k+1)}(z_0)}$$

证明：台劳展开。

规则4

$$g和h在z_0解析且g(z_0)\neq 0,h(z_0)=h'(z_0)=0,h''(z_0)=0，则z_0是g/h二级极点$$

$$Res[f(z),z_0]=2\frac{g'(z_0)}{h''(z_0)}-\frac{2g(z_0)h'''(z_0)}{3h''(z_0)^2}$$

证明：台劳展开 + 待定系数法

定理 5.2.4 设 $g(z),h(z)$ 在 z_0 解析，$g(z_0)\neq 0$, $h(z_0)=h'(z_0)=0$, $h''(z_0)\neq 0$，z_0 是 $\dfrac{g(z)}{h(z)}$ 的二级极点，则

$$\text{Res}\left[\frac{g(z)}{h(z)};z_0\right]=2\frac{g'(z_0)}{h''(z_0)}-\frac{2g(z_0)h'''(z_0)}{3h''(z_0)^2}.$$

证：
$$\frac{g(z)}{h(z)}=\frac{g(z_0)+g'(z_0)(z-z_0)+\dfrac{g''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2+\cdots}{\dfrac{h''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2+\dfrac{h'''(z_0)}{3!}(z-z_0)^3+\cdots}$$

$$=C_{-2}(z-z_0)^{-2}+C_{-1}(z-z_0)^{-1}+C_0+\cdots$$

$$\Rightarrow g(z_0)=C_{-2}\cdot\frac{h''(z_0)}{2!},\ g'(z_0)=C_{-2}\cdot\frac{h'''(z_0)}{3!}+C_{-1}\cdot\frac{h''(z_0)}{2!}$$

$$\Rightarrow C_{-1}=2\frac{g'(z_0)}{h''(z_0)}-\frac{2g(z_0)h'''(z_0)}{3h''(z_0)^2}.$$

【记不住根本记不住】

*无穷远点处的留数

$Res[f(z),\infty]=\frac{1}{2\pi i}\oint_{c^-}f(z)dz=-c_{-1}$

$Res[f(z),\infty]=-Res[\frac{1}{z^2}f(\frac{1}{z}),0]$

留数在积分上的应用

1 $\int_0^{2\pi}R(\cos\theta,\sin\theta)d\theta$

变参：令 $dz=e^{i\theta}$，则 $d\theta=\frac{dz}{iz}$，$sin\theta=\frac{z^2-1}{2iz}$，$cos\theta=\frac{z^2+1}{2z}$。

$\int_0^{2\pi}R(\cos\theta,\sin\theta)d\theta=\oint_{|z|=1}f(z)dz=2\pi i\sum[f(z)\text{在}\underline{\text{单位圆}}\text{内所有}\underline{\text{极点}}\text{的留数}]$

三角函数的周期性：

换元：$\varphi=2\pi-\theta$ 或 $\varphi=\theta+\pi$。

2 $\int_{-\infty}^{\infty}R(x)dx$

如果存在某个常数M、正数R与α，满足当 $|z|\geq R$ 时，$|f(Z)|\leq\frac{M}{z^\alpha},\alpha>1$ 恒成立，则有：

$\int_{-\infty}^{\infty}R(x)dx=2\pi i\sum[\text{上/下半平面所有的奇点的留数}]$

证明：留数定理+积分不等式。

3$\int_{-\infty}^{\infty}R(x)e^{iax}dx$

如果存在某个常数M、正数R与α，满足当 $|z|>R$ 时，$|f(Z)|<\frac{M}{z^\alpha},\alpha>0$ 恒成立，则有：

$\int_{-\infty}^{\infty}R(x)dx=2\pi i\sum[R(x)e^{iax}\text{在上/下半平面所有的奇点的留数}]$

证明：留数定理+积分不等式。

可用于计算含有三角函数项的广义积分。

Chapter 6 保角映射

基础知识

两个条件

1、$f(z)$在区域D中解析。

2、$f'(z)\neq0$。（使辐角有意义）

三个定理（无需证明）

1 逆映射的存在性

如果$f\left(z\right)$能够把区域 D 保角地、一一对应地映射成区域 G，则其反函数能够把 G 保角地、一一对应地映射成区域 D。并且，$f\left(z\right)$及其反函数可由此推得是**单值且解析**的函数。

2 黎曼定理（映射的存在与唯一性）

如果有两个单连通区域 D 和 G，z_0和w_0是其中两点，θ_0是任一$[0,2\pi]$之间的实数，则总存在一个函数

$w=f\left(z\right)$，能够把D一一对应地保角地映射成G，使得$f\left(z_0\right)=w_0,\arg f'\left(z_0\right)=\theta_0$，并且这样的映射是唯一的。

3 边界对应原理

设单连通区域 D 和 G 的边界分别为简单闭曲线 C 和 Γ，如果能找到一个在 D 内解析，在 C 上连续的函数$w=f(z)$，它将 C 一一对应地映射成 Γ，且当原象点和象点在边界上绕行方向一致（如均为逆时针）时，D 和 G 在边界的同一侧（如均为右手侧），则 $w=f\left(z\right)$将 D 一一对应地保角映射成 G。

三个性质

1 保角性

$\varphi_k=\theta_k+Arg\ f'(z_0)$

保角性，指在导数不为0的点，映射使 Z 扩充复平面上过某点的任意两条连续曲线间的夹角大小和方向不变。

2 保圆性

保圆性，指映射将 Z 扩充复平面上的圆映射成 W 扩充复平面上的圆。

3 保对称性

保对称性，指映射将 Z 扩充复平面上关于广义圆 C 的两个对称点映射成 W 扩充复平面上关于广义圆 C' 的两个对称点。

*4 保形性

保角且伸缩率不变。

实例

初等映射

1 整线性映射

平移+伸缩+旋转。保圆性。（应该也有）保对称性。

在整个复平面W上处处保角，一一对应。

2 倒数映射

$w=\frac{1}{z}$

反演。保圆性。保对称性。

在整个复平面W上，处处保角，一一对应。

> 它将单位圆内（或者外）的点映射到单位圆外（或者内），且辐角反号：
>
> 分为两步进行：
>
> 1、将 z 映射为 w_1，满足 $|w_1|=\frac{1}{|z|},argw_1=argz$。（即关于单位圆的对称）
>
> 2、将 w_1 映射为 w，满足 $|w|=|w_1|,argw=-argw_1$。（即沿实轴对称）

z=0和无穷......我真的搞不清楚啦！

3 幂函数映射

旋转+伸缩。

$w=z^n$：以原点为顶点的角形域映成零点为顶点的角形域，张角扩大n倍

4 指数与对数映射

旋转。

在全平面是局部保角映射。

$w=e^z$：把水平带形域$0<Im(Z)<a$映射成角形域$0<arg(w)<a$

5 两个特殊的对称映射

关于单位圆周的对称映射：$w=\frac{1}{\bar{z}}$，即：$|w|=\frac{1}{|z|},argw=argz$。

关于实轴的对称映射：$w=\bar{z}$，即：$|w|=|z|,argz=-argw$。

分式线性映射

保角性、保圆性、保对称性。

保交比性：

$$\frac{w-w_1}{w-w_2}\Big/\frac{w_3-w_1}{w_3-w_2}=\frac{z-z_1}{z-z_2}\Big/\frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}$$

简化$f(z_i)=w_i,\frac{w-w_1}{w-w_2}=k\frac{z-z_1}{z-z_2}$

进一步，若$f(z_1)=0$，$f(z_2)=\infty$，则$w=k\frac{z-z_1}{z-z_2}$

常用线性映射

将单位圆映射成单位圆

$w=e^{i\theta}\frac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z}$

将上半平面映成单位圆

$w=e^{i\theta}\frac{z-z_0}{z-\overline{z_0}}$

这段有点难，多做两题感受一下

Chapter 7 拉普拉斯变换

$$L[f(t)]=F(s)=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

拉普拉斯变换存在定理：

> 1. 在区间上分段连续
> 2. 增长速度不超过一个指数函数

该定理充分但并不必要。

反例：

$$L(t^\alpha)=\int_0^\infty t^\alpha e^{-st}dt=\frac{1}{\sigma^{\alpha+1}}\int_0^\infty u^\alpha e^{-u}dt=\frac{1}{\sigma^{\alpha+1}}\Gamma(\alpha+1)$$
$$\Gamma(\alpha+1)=\int_0^\infty t^\alpha e^{-t}dt$$
$$u=st,\ Re(s)=\sigma>0,\ \alpha>-1$$

在 $x\to 0$ 处增长极快。但其 $F(s)$在$Re(s)>0$ 上存在且解析。

拉普拉斯变换的性质

常见的几个拉普拉斯变换

$L[u(t)]=\frac{1}{s}$

$L[e^t]=\frac{1}{s-t}$

$L[t^n]=\frac{n!}{s^{n+1}}$（上证明取 $\alpha\in N$，则 $\Gamma(n+1)=n!$）

$L[\sin\omega t]=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$

$L[\cos\omega t]=\frac{s}{s^2+\omega^2}$

线性性

$$L\left[\alpha_1 f_1(t)+\alpha_2 f_2(t)\right]=\alpha_1 F_1(s)+\alpha_2 F_2(s)$$
$$L^{-1}\left[\alpha_1 F_1(s)+\alpha_2 F_2(s)\right]=\alpha_1 f_1(t)+\alpha_2 f_2(t)$$

平移性

$e^{st_0}L\left[f\left(t-t_0\right)\right]=F(s)$

$\mathcal{L}^{-1}\left[F(s-s_0)\right]=e^{s_0t}f(t)$

微分性质

$L\left[f^{(n)}(t)\right]=s^{n} F(s)-s^{n-1} f\left(0^{+}\right)-s^{n-2} f^{\prime}\left(0^{+}\right)-\cdots-f^{(n-1)}\left(0^{+}\right)$

$L^{-1}\left[F^{(n)}(s)\right]=(-t)^{n} f(t)$

特别的$\mathcal{L}\left[t^{m}\right]=\frac{1}{s^{m+1}} m!$

积分性质

$L\left[\int_{0}^{t} f(\tau) d \tau\right]=\frac{1}{s} F(s)$

$\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right]=\int_{s}^{\infty} F(s) \mathrm{d} s$

极限性质

$f\left(0^{+}\right)=\lim _{s \rightarrow \infty} s F(s)$

$f(+\infty)=\lim _{s \rightarrow 0} s F(s)$

卷积性质

卷积

> 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是定义在无穷区间上的两个连续时间信号，则将积分：
>
> $\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) g(t-\tau) d \tau$
>
> 定义为$f(x)$和$g(x)$的卷积，记为$f(x) * g(x)$。

重要性质:

$L[f(t) * g(t)]=F(s) \cdot G(s)$

拉普拉斯逆变换

1 分解因式

2 反变换公式

$f(t)=\frac{1}{2 \pi i} \int_{\beta-i \infty}^{\beta+i \infty} F(s) \mathrm{e}^{s t} d s$

3 利用留数定理

$f(t)=\frac{1}{2 \pi \mathrm{i}} \int_{\beta-i \infty}^{\beta+i \infty} F(s) e^{s t} d s=\sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}\left[F(s) e^{s t}, s_{k}\right]$

例题:

例17 用几种不同方法求 $F(s)=\dfrac{1}{s^2(s+1)}$ 的拉氏逆变换。

解法一（分解法）：

$$F(s)=-\frac{1}{s}+\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s+1},\qquad \therefore\ L^{-1}[F(s)]=-1+t+e^{-t}.$$

解法二（留数法）：

$$L^{-1}[F(s)]=\mathrm{Res}[\frac{e^{st}}{s^2(s+1)};0]+\mathrm{Res}[\frac{e^{st}}{s^2(s+1)};-1]$$

$$=\lim_{s\to 0}(\frac{e^{st}}{s^2(s+1)}\cdot s^2)'+\lim_{s\to -1}\frac{e^{st}}{s^2}\ =-1+t+e^{-t}.$$

解法三（卷积法）：

$$L^{-1}[F(s)]=L^{-1}[\frac{1}{s^2}]*L^{-1}[\frac{1}{s+1}]=t*e^{-t}$$

$$=\int_0^t \tau e^{-(t-\tau)}d\tau=e^{-t}\int_0^t \tau e^{\tau}d\tau$$

24

4 其它

1、先求导，再求逆，再利用微分性质求得原函数。

例题:

9(6). $F(s)=\ln\dfrac{s^2+1}{s^2}$，求 $L^{-1}[F(s)]$.

解: $F'(s)=\dfrac{2s}{s^2+1}-\dfrac{2}{s}$

$L^{-1}[F'(s)]=2\cos t-2$

而 $L[(-t)f(t)]=F'(s)$

得: $L^{-1}[F(s)]=f(t)=-\dfrac{1}{t}L^{-1}[F'(s)]$

$=\dfrac{2}{t}-\dfrac{2}{t}\cos t$.

2、利用ILT解积分方程

例题:

12 (P235). 求下列积分方程的解:

(1) $$y(t)+\int_0^t y(t-u)e^u du = 2t-3$$

解: 记 $Y(s)=L[y(t)]$, 则

$$Y(s)+Y(s)\cdot\frac{1}{s-1}=2\cdot\frac{1}{s^2}-\frac{3}{s}$$

$$\Rightarrow Y(s)=\frac{-3s^2+5s-2}{s^3}$$

$\therefore$ $y(t)=L^{-1}[Y(s)]=-3+5t-t^2$.

（卷积的象函数等于象函数的积）

例题

1、利用复变函数作几何操作

(1) 给出过原点且与直线 $z=(1+i)t+2\ \ (t\in R)$ 垂直的直线的表达式。

解: 所求直线的方向为 $(1+i)e^{i\pi/2}=i(1+i)=-1+i$

直线的表达式为 $z=(-1+i)t\quad t\in R$

(2) 求解方程 $e^{2z}-e^z+1-i=0$，写出解的实部与虚部。

解: 即 $(e^z-1-i)(e^z+i)=0\qquad e^z=1+i,\quad e^z=-i$

根为 $z_k=\mathrm{Ln}(1+i)\quad \mathrm{Re}\,z_k=\mathrm{Ln}\sqrt{2}$ ，$\mathrm{Im}\,z_k=\pi/4+2k\pi\quad k=0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots$

及 $z_k=\mathrm{Ln}(-i)\quad \mathrm{Re}\,z_k=0$ ，$\mathrm{Im}\,z_k=-\pi/2+2k\pi\quad k=0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots$