

# 令牌预算感知的 LLM 推理

Tingxu Han<sup>\*1</sup>, Zhenting Wang<sup>\*†2</sup>, Chunrong Fang<sup>‡1</sup>,  
Shiyu Zhao<sup>2</sup>, Shiqing Ma<sup>3</sup>, Zhenyu Chen<sup>1</sup>

<sup>1</sup> 南京大学 <sup>2</sup> 罗格斯大学 <sup>3</sup> 马萨诸塞大学阿默斯特分校

## Abstract

推理对于大规模语言模型 (LLMs) 在广泛任务中取得优异表现至关重要。尽管诸如 Chain-of-Thought (CoT) 推理等方法通过将问题分解为中间步骤来提升 LLM 的性能，但它们也导致令牌使用量显著增加，从而带来更高的成本。我们发现当前 LLM 的推理过程存在不必要的冗长，通过在提示中包含合理的令牌预算可以对其进行压缩，但令牌预算的选择对实际压缩效果起关键作用。为此，我们提出了一种令牌预算感知的 LLM 推理框架，能够根据每个问题的推理复杂度动态调整推理令牌数。实验表明，本方法在 CoT 推理中能有效降低令牌成本，仅以极小的性能下降为代价，为在 LLM 推理中权衡效率与准确性提供了切实可行的解决方案。代码：<https://github.com/GeniusHTX/TALE><sup>1</sup>

“拥有聪明的头脑并不够；关键在于善加利用它。”

— 勒内·笛卡尔

## 1 引言

推理在使大规模语言模型 (LLM) 在广泛任务上有效执行方面起着关键作用 (Zhou et al., 2022; Hao et al., 2023, 2024a; Jin et al., 2024a; Wang et al., 2024b, 2025)。已经提出了多种方法以提升大规模语言模型的推理能力 (Suzgun et al., 2022; Wang et al., 2023; Feng et al., 2023; Xie et al., 2024)。其中，链式思维 (Chain-of-Thought, CoT) (Wei et al., 2022) 是最具代表性且被广泛采用的方法。它通过提示“Let’s think step by step”引导大规模语言模型，将问题分解为中间步骤并在得出最终答案前逐一解决，从而提高模型答案的可靠性。图 1a 和图 1b 展示了一个直观的示例。可以观察到，

在没有 CoT 的情况下，LLM 对该问题给出了错误的答案。在采用 CoT 强化的提示后，LLM 会系统地将问题划分为多个步骤并按序对每一步进行推理。通过逐步解决各个子步骤，LLM 最终得出正确答案。近期的一些推理模型，如 OpenAI O1 (OpenAI, 2024c) 和 DeepSeek R1 (Guo et al., 2025)，已在设计中整合了 CoT。值得注意的是，这些模型即使在没有显式提示的情况下也能执行 CoT 推理。

尽管诸如 CoT 的推理增强方法在提升 LLM 性能方面效果显著，但它们会产生大量额外开销，具体表现为输出标记数量的增加 (Wei et al., 2022; Feng et al., 2023; Yao et al., 2024a; Jin et al., 2024b)。如图 1b 所示，带有 CoT 的提示其答案由于包含详细的中间推理步骤而显著增加了标记成本。如此高的标记成本可能导致显著的开销，包括在 LLM 推理期间计算资源使用量增加、运行时间延长，最终带来可观的额外金钱和能耗成本。这引出了一个重要问题：“当前大型语言模型 (LLMs) 的推理过程是否存在不必要的冗长，如何对其进行压缩？”Nayab et al. (2024) 证明了 LLM 有可能遵守提示中的长度约束。在此基础上，我们发现，在提示中包含一个令牌预算 (见 Table 1) 是一种有希望压缩链式思维 (CoT) 推理令牌的方法。然而，令牌预算的选择对实际的压缩效果起着关键作用。例如，图 1d 所示，在指令中包含一个合理的令牌预算 (例如本例中的 50 个令牌) 可以将链式思维 (CoT) 过程中输出令牌的代价从 258 个减少到 86 个，同时仍能使 LLM 得出正确答案。然而，当令牌预算设为更小的值 (例如 10 个令牌) 时，输出令牌的减少效果不佳，结果为 157 个输出令牌——几乎是 50 个令牌预算情况下的两倍。换言之，当令牌预算相对较小时，LLM 往往无法遵守所给的预算。在这种情况下，实际的令牌使用量显著超过给定预算——甚至比更大预算时的令牌开销还要大得多。我们将这种在具有令牌预算的 CoT 过程中出现的现象称为“Token Elasticity (令牌弹性)”。为了解决这一问题，可以通过在提示中逐步缩减指定的预

<sup>\*</sup>贡献相同。

<sup>†</sup>发起该项目并提出想法。

<sup>‡</sup>通讯作者。

<sup>1</sup>也可在 <https://www.gitlink.org.cn/txhan/TALE> 获取。

Q: Peyton scheduled after-work activities of a one-hour yoga class on Monday, a cooking class that lasts 9 times as long as Monday's yoga on Tuesday, a half-hour cheese-tasting event on Wednesday, a museum tour that takes half as long as the cooking class on Thursday, and two hours of errands on Friday. How many hours will all Peyton's after-work activities take?

Peyton's after-work activities will take 12.5 hours. ✗

(a) 直接回答 (15 个输出标记)。

Q: Peyton ... How many hours will all Peyton's after-work activities take?  
Let's think step by step:

Let's break down activities step by step:

1. Monday: Yoga class lasts 1 hour.  
- Total for Monday: 1 hour
2. Tuesday: Cooking class lasts 9 times as long as Monday's yoga class.  
- Cooking class duration =  $9 * 1 \text{ hour} = 9 \text{ hours}$   
- Total for Tuesday: 9 hours
3. Wednesday: Cheese-tasting event lasts half an hour.  
- Total for Wednesday: 0.5 hours
4. Thursday: Museum tour is half the cooking class.  
- Museum tour duration =  $0.5 * 9 \text{ hours} = 4.5 \text{ hours}$   
- Total for Thursday: 4.5 hours
5. Friday: Errands take 2 hours.  
- Total for Friday: 2 hours

Now, let's add up all the hours from each day:

- Monday: 1 hour
- Tuesday: 9 hours
- Wednesday: 0.5 hours
- Thursday: 4.5 hours
- Friday: 2 hours

Now, we sum these amounts:

$$1 + 9 + 0.5 + 4.5 + 2 = 17 \text{ hours.}$$

Therefore, the total time is 17 hours. ✓

(b) 原始 CoT (258 个输出标记)。

Q: Peyton ... How many hours will all Peyton's after-work activities take?  
Let's think step by step and use less than 10 tokens:

Let's break down each activity:

- Monday: Yoga class = 1 hour.
- Tuesday: Cooking class = 9 times Monday's yoga, so  $9 * 1 = 9 \text{ hours}$ .
- Wednesday: Cheese-tasting event = 0.5 hours.
- Thursday: Museum tour = Half of Tuesday's cooking class, so  $9 \div 2 = 4.5 \text{ hours}$ .
- Friday: Errands = 2 hours.

Now, let's add them up:

$$1 + 9 + 0.5 + 4.5 + 2 = 17$$

Peyton's after-work activities will take 17 hours. ✓

(c) 在不合理预算下的 CoT (157 个输出标记)。

Q: Peyton ... How many hours will all Peyton's after-work activities take?  
Let's think step by step and use less than 50 tokens:

- Monday: 1 hour (yoga) - Tuesday: 9 hours (cooking class)
- Wednesday: 0.5 hours (cheese-tasting) - Thursday: 4.5 hours (museum tour) - Friday: 2 hours (errands)
- Total:  $1 + 9 + 0.5 + 4.5 + 2 = 17 \text{ hours.}$  ✓

(d) 在合理预算下的 CoT (86 个输出标记)。

Figure 1: 不同问题解决范式的示例。推理过程已标注。我们在 GPT-4o-mini 上进行了该实验。

算, 搜索针对特定 LLM 与特定问题的最优令牌预算, 从而找到既能得到正确答案又能实现最低实际令牌开销的最小预算。

基于以上观察与分析, 我们提出了一种令牌预算感知的 LLM 推理框架, 能够根据每

个问题的推理复杂度动态调整推理令牌的数量。我们将方法命名为 TALE (Token-Budget-Aware LLM Reasoning), 包含两种实现: 令牌预算估计与提示 (TALE-EP) 以及通过后训练实现令牌预算感知的内化 (TALE-PT)。TALE-EP 使用零样本提示为每个问题估计一个合理的令牌预算并将其纳入推理过程; 而 TALE-PT 则通过后训练将令牌预算感知内化, 使 LLM 在无需在提示中显式给出令牌约束的情况下生成更节省令牌的回答。两种实现均在节 5 中讨论。实验结果表明, TALE 在显著降低 LLM 链式思维 (CoT) 推理的令牌开销的同时, 在很大程度上保持了答案的正确性。平均而言, TALE-EP 在令牌使用上减少了 67%, 且准确率下降不足 3%; TALE-PT 相较于原始 CoT 将令牌使用量削减约 50%, 并取得了具有竞争力的表现。

## 2 相关工作

大模型推理。通过生成中间步骤的技术, 大型语言模型 (LLM) 的推理能力取得了显著进展, 从而在各个领域实现了更准确、更有效的表现 (Wu et al., 2022; Yang et al., 2022; Zhou et al., 2022; Sun et al., 2024; OpenAI, 2024c)。已经提出了多种 LLM 推理技术以提升模型性能。Chen et al. (2024) 将推理表述为从潜在分布中采样, 并通过变分方法进行优化。Ho et al. (2022) 将大型语言模型作为推理教师, 通过知识蒸馏提升更小模型的推理能力。其中, Chain-of-Thought (CoT) 提示已成为提升 LLM 推理的关键技术, 通过将问题分解为中间步骤, 使其在多种任务上获得更好表现 (Wei et al., 2022; Lyu et al., 2023; Li et al., 2023; Feng et al., 2024)。CoT 的扩展包括 self-consistency (自洽性), 它汇聚多条推理路径以提高鲁棒性 (Wang et al., 2022), 以及 Tree-of-Thoughts, 通过树状结构探索推理步骤以应对更复杂的任务 (Yao et al., 2024b)。Reflexion 引入了迭代精炼机制, 模型对其中间步骤进行批判并更新 (Shinn et al., 2024)。LLM 的令牌开销。尽管上述方法提高了推理准确性, 但常常增加令牌使用量, 从而对效率构成挑战 (Wang et al., 2024a; Chiang and Lee, 2024; Bhargava et al., 2023)。因此, 在维持模型性能的同时减少令牌消耗非常重要。为了解决这一问题, Li et al. (2021) 提出了一种多跳处理技术, 旨在过滤无关的推理。虽然有效, 但该方法局限于传统神经网络 (如 PALM) (Bi et al., 2020), 并且缺乏对大型语言模型 (LLM) 的适应性。Speculative decoding (Leviathan et al., 2023) 旨在通过使用较小模型生成草稿并由较大模型验证来加速解码, 但它过于依赖替代

Table 1: 原始 CoT 提示与考虑令牌预算的提示示例。

Prompt method	Content
Vanilla CoT	Let's think step by step:
CoT with Token Budget	Let's think step by step and use less than <b>budget</b> tokens:
Example	Let's think step by step and use less than <b>50</b> tokens:

的小型近似模型。LLM routing (Ding et al., 2024) 根据质量-成本权衡将查询路由到不同的 LLM，但它无法减少为特定查询在某一 LLM 上的令牌使用量。Zheng et al. (2024) 旨在通过预测响应长度并应用调度算法来提升 LLM 推理速度，从而提高效率。然而，它仅限于调度层面，并未减少实际的令牌开销。Hao et al. (2024b) 通过用连续潜在向量替代解码出的文本令牌来减少令牌使用量。然而，其应用目前仅限于小规模、早期的语言模型，如 GPT-2 (Radford et al., 2019)。此外，该方法显著影响推理准确性，在诸如 GSM8K 的基准上导致相对准确率下降超过 20% (Cobbe et al., 2021)。

### 3 LLM 推理中的令牌冗余

令牌预算。先前研究 (Nayab et al., 2024) 表明，LLM 有能力遵循提示中的长度约束。如 Table 1 所示，原始 CoT 与带令牌预算的 CoT 之间存在差异。例如，通过在提示中包含一个令牌预算（50 个令牌），如图 1d 所示，LLM 会调整其输出长度（86 个输出令牌），试图与指定的预算对齐。这表明 LLM 在遵循带有明确令牌预算的提示方面具有一定能力。

令牌冗余现象。我们发现，提供合理的令牌预算可以显著降低推理过程中的令牌消耗。如图 1d 所示，在指令中包含令牌预算将链式思维 (CoT) 过程中的令牌消耗降低了数倍，但 LLM 仍然能够得到正确答案。我们在 Figure 2 和 Table 3 中的结果也证实了在最先进 LLM 的推理过程中存在大量冗余令牌。

LLM 推理中令牌冗余的成因。一个可能的解释是，在后训练阶段（例如 RLHF 过程）(Ouyang et al., 2022) 中，标注者可能更偏好模型给出更详尽的回答，并将其标记为优选。结果，模型学会将更长、更详细的回答与符合人类偏好联系起来，并倾向于在推理时生成此类输出。然而，在许多场景下，我们主要需要 LLM 给出正确答案并做出准确判断，而不是进行大量详尽的阐述。这促使在许多情况下有必要消除 LLM 推理过程中的冗余令牌。

### Algorithm 1 预算搜索

输入： feasibility checking function  $\text{isFeasible}$ , a large language model  $\mathcal{M}$ , a given question  $\mathbf{x}$  and the ground truth label  $y$

输出： searched budget  $\beta$

```

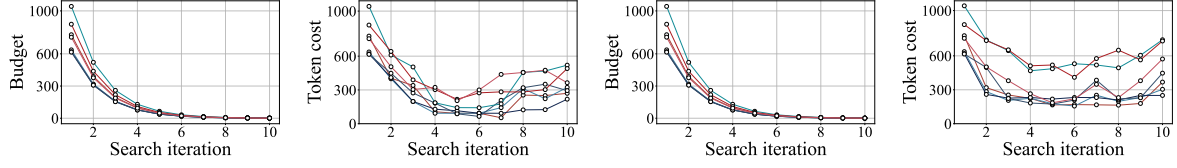
1: function SEARCH( $\text{isFeasible}, \mathcal{M}, \mathbf{x}, y$ )
2:    $right \leftarrow$  the actual token costs of  $\mathcal{M}$ 
     with vanilla CoT prompt on  $\mathbf{x}$ 
3:    $\beta \leftarrow \lfloor (0 + right)/2 \rfloor$ 
4:    $\beta_0 \leftarrow right$ 
5:   while True do
6:     if  $\text{isFeasible}(\mathcal{M}, \mathbf{x}, y, \beta_0, \beta)$  then
7:        $\beta \leftarrow \lfloor (0 + right)/2 \rfloor$ 
        $\triangleright$  Update the searched budget
        $\triangleright$  Record previous searched budget
8:        $\beta_0 \leftarrow right$ 
        $\triangleright$  Update the search range
9:        $right \leftarrow \beta$ 
10:    else
11:      break
12:  return  $\beta$ 
```

### 4 搜索最优令牌预算

如图 1 所示，不同的令牌预算会产生不同的效果。因此，自然要探讨以下问题：“如何为特定问题和特定 LLM 搜索最优的令牌预算？”

用于最优预算搜索的基础方法。一种直观的方法是将所需的最少标记数作为预算，确保在该约束下大型语言模型仍能产生正确且精确的回答。搜索算法的目标不是直接判定任务难度，而是识别模型仍能给出正确答案的最小标记预算。具体而言，算法对不同的标记预算进行二分搜索，并选择能够维持正确性的最短预算。这近似于模型解决给定问题所需的最小推理长度。为寻找最小标记预算，我们首先提出一个“隐含单调性假设”，即当模型在某一预算值下输出错误预测时，在低于该预算值时亦总是预测错误；当模型在某一预算值下输出正确预测时，在高于该预算值时亦总是预测正确。为经验性评估该假设的有效性，我们进行了额外分析。具体地，我们将一个样本定义为单调的，当且仅当在最优预算以上的所有预测均为正确，而在其以下的预测均为错误。我们从 GSM8K 数据集中随机抽取测试样本，发现有 90.91% 的样本满足该单调性条件。这表明尽管该假设并非在每个实例中严格成立，但在实践中它是一个合理且有效的近似，可用于指导预算搜索。一个直观的单调样例如 Table 2 所示。基于“隐含单调性假设”，我们进一步设





(a) GPT-4o-mini 预算搜索。(b) GPT-4o-mini 令牌消耗。(c) Yi-lightning 预算搜索。(d) Yi-lightning 令牌消耗。

Figure 2: 令牌弹性现象。横轴表示预算搜索迭代次数。纵轴表示被搜索到的预算（图 2a 和 图 2c）或每个被搜索预算下的实际令牌消耗（图 2b 和 图 2d）。不同颜色表示从 MathBench-College (Liu et al., 2024) 随机选取的不同样本。在合理的令牌预算范围内，令牌消耗显著更低。当令牌预算小于该合理范围时，令牌消耗会逐渐上升。

Table 2: 一个直观的单调示例。 $\beta^*$  是搜索得到的最优预算。预算行显示了从  $2^{-2}$  到  $2^2 \cdot \beta^*$  的缩放预算。

Budget( $\beta^*$ )	$2^{-2}$	$2^{-1}$	1	$2^1$	$2^2$
Prediction	False	False	True	True	True

计了基于二分搜索的最小预算搜索算法，详见 算法 1。在启动搜索过程之前，我们首先对每个问题应用原始的 CoT 以生成答案，如图 1b 所示。随后计算该答案的令牌数量，并将其指定为搜索的右边界，记作  $right$ 。函数  $isFeasible$  用于判断预算是否可行。若使用该预算的 CoT 提示仍能保持答案的正确性，则该预算被视为可行。详细步骤见 算法 1。在以可行性函数、语言模型  $\mathcal{M}$ 、问题  $x$  和标签  $y$  作为输入的情况下，算法 1 首先计算搜索的右边界（第 2 行）。以 0 作为左边界，当前可能的预算  $\beta$  被计算为 0 和  $right$  的中点（第 3 行）。我们使用  $\beta_0$  记录先前搜索过的预算（第 4 行）。当当前的  $\beta$  被判定为可行时，算法通过重新计算中点来更新  $\beta$ （第 7 行），并相应地调整搜索边界以缩小范围（第 9 行）。当循环结束时，最终预算  $\beta$  将作为搜索结果返回（第 12 行）。算法 1 的设计目的是高效地找到最小可行预算。然而，我们观察到获得正确答案所需的最小预算不必然是最优预算。当预算过小不合理时，实际的令牌消耗往往会超过使用较大预算时的消耗。我们还在 节 A.6 中进一步形式化了最优预算搜索过程。

令牌弹性现象的观察。在最小预算搜索过程中，随着接近最小预算，我们观察到一种“token elasticity”（令牌弹性）现象。具体来说，随着 算法 1 的进行，我们旨在识别仍能保证答案正确性的最小预算。然而，我们发现当预算被缩减到某一范围以下时，令牌消耗反而增加，这表明进一步减少预算会导致令牌使用量上升。相关证据见 Figure 2。x 轴表示预算二分搜索的迭代次数，预算值逐步减小。在 图 2b 和 图 2d 中，y 轴显示了每次预算搜索迭代对应的令牌消耗。当搜索到的预算降到合理范围以

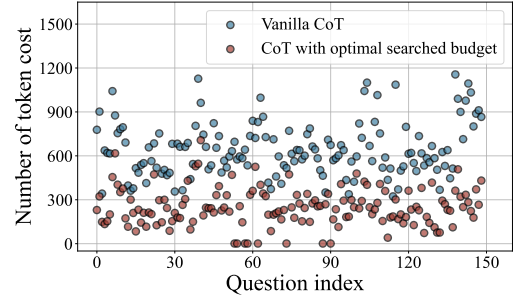


Figure 3: 最优搜索预算的效果。使用我们搜索到的最优预算的 CoT 在不影响准确度的情况下显著降低了令牌开销。我们在 MathBench-College (Liu et al., 2024) 上进行了实验。

#### Algorithm 2 贪心可行性函数

输入： a large language model  $\mathcal{M}$ , a question  $x$  and the ground truth label  $y$ , previous and current budget:  $\beta_0, \beta$

输出： True if the budget satisfies the requirements, False otherwise

```

1: function isFeasible( $\mathcal{M}, x, y, \beta_0, \beta$ )
2:    $t, t_0 \leftarrow$  gets the actual token costs under budgets of  $\beta$  and  $\beta_0$ 
3:   if  $\mathcal{M}(x, \beta) == y$  and  $t < t_0$  then
4:     return True
5:   return False

```

下时，令牌消耗会上升。其原因是模型在无法满足过紧约束时，会忽视该约束并回退到更长的推理过程。换言之，模型实际上“放弃”遵守指令，导致输出变长并产生冗余的令牌开销。这解释了图 2 中观察到的非单调性：随着预算收紧，令牌使用量最初下降，但当预算变得过小时又会回升。我们将在修订版中把这一直觉阐述得更清楚。图 1c 也给出了一个示例。正如所见，当使用较小的令牌预算（例如 10 令牌）时，实际令牌消耗显著高于分配合理令牌预算的情形（即 图 1d）。

基于 token 弹性的最优预算搜索。令牌弹性 (token elasticity) 的观察表明，尽管最小预算可能保持答案的正确性，但它并不一定能最小

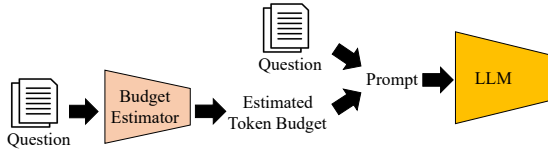


Figure 4: TALE-EP 的工作流程。给定一个问题，TALE-EP 首先使用预算估计器估计令牌预算。然后将问题与估计的预算结合起来构造一个令牌预算感知的提示。最后将该提示输入到 LLM 以生成最终答案。默认情况下，我们使用推理 LLM 本身配合零样本估计提示作为预算估计器。

化 token 成本。图 1c 和 图 1d 给出了一个直观示例。为了解决这一问题，我们通过在 算法 1 中引入一种贪心搜索策略来改进，旨在寻找能够同时最小化 token 成本并保持答案正确性的最优预算。具体而言，我们在 isFeasible 条件中增加了额外约束。除了确保正确性之外，更新后的预算还必须在 token 成本上低于先前搜索到的预算。算法 2 概述了搜索过程中所使用的可行性函数。首先，计算当前预算和先前评估预算的实际 token 成本（第 2 行）。随后，根据两个标准评估可行性：答案正确性与贪心式的 token 减少（第 3 行）。若任一条件不满足，则终止搜索过程。

预算搜索的开销。关于开销，需要说明的是，预算搜索主要用于揭示 token 压缩的潜力，以此作为 TALE 设计的动因。对于 TALE-PT，预算搜索在离线阶段只执行一次，用于生成后训练的训练目标。由于这是一次性的预处理步骤，因此在模型实际部署时不会产生额外成本。对于 TALE-EP，我们澄清的是并不需要进行预算搜索。TALE-EP 依赖于一个轻量级的零样本预算估计器，该估计器可直接预测合理的 token 预算，无需任何迭代搜索，使其在推理时无需训练且极为高效。为量化用于 TALE-PT 数据生成的预算搜索开销，我们测量了运行搜索算法并生成最优预算数据集所需的总时间。在 GSM8K（7473 个样本）上，该过程在一块 A100 GPU 上大约需要 354 分钟；鉴于这是一次性的离线训练成本，我们认为这是可以接受的。

## 5 方法

### 5.1 概述

基于上述分析，我们设计了用于在大语言模型（LLMs）中进行令牌预算感知推理的方法 TALE。提出了两种方案，即估计 & 提示（TALE-EP，见 Figure 4）和后训练（TALE-PT，见 Figure 6）。



Task: Analyze the given question and estimate the minimum number of tokens required to generate a complete and accurate response. Please Give the response by strictly following this format: [[budget]], for example, Budget: [[12]].

Figure 5: 用于零样本预算估计的提示。

### 5.2 估计与提示（TALE-EP）

我们关于令牌弹性的观察（见 节 4）表明，只有在合理范围内精心选择的预算才能在保持 LLM 性能的同时有效地最小化令牌成本。通过 算法 1 和 算法 2 找到的最优预算位于该范围内，并在效率与性能之间实现令人满意的折衷。基于这一洞见，我们提出了一种基于零样本预算估计并对推理 LLM 进行提示的令牌预算感知推理方法。TALE-EP 利用 LLM 的推理能力作为估计器。Figure 4 展示了 TALE-EP 工作流程的概览。TALE-EP 的目标是构建一种令牌预算感知的提示，在降低令牌成本的同时保持与原始链式思考（vanilla CoT）相当的性能。为实现这一平衡，TALE-EP 采用两阶段方法：预算估计和提示构建。给定一个问题，TALE-EP 首先估计一个与搜索到的最优预算高度一致的合理令牌预算。默认情况下，我们使用推理 LLM 本身配合零样本估计提示作为预算估计器。Figure 5 展示了预算估计提示，这将引导模型对整个问题进行评估。基于该估计，随后构造一个令牌预算感知的提示并将其输入 LLM 以生成最终答案。图 7c 通过一个具体示例说明了该过程。TALE-EP 背后的关键直觉源自类人思维。当解决数学问题时，人可能需要时间来计算精确答案，但能迅速估计解决该问题所需的努力程度。例如，在比较小学生的算术题与大学层次的微积分问题时，人们可能无法立即给出解答，但可以轻易推断前者只需数秒，而后者则需要显著更多时间。节 A.2 评估了我们预算估计方法的有效性，结果表明高级 LLM（例如 GPT-4o-mini）估计的预算通常接近搜索到的最优预算，并能提供具有竞争力的性能。

### 5.3 TALE 后训练（TALE-PT）

另一种使 LLM 具备词元预算感知的方法是对其进行后训练，以将该感知内化到推理过程中，从而使模型生成更节省词元的推理回答。具体来说，我们对 LLM  $M_\theta$  进行后训练，使其产生遵守词元预算的答案。该过程分为两个关键阶段：目标输出生成和 LLM 后训练。

目标输出生成。在目标输出生成阶段，我们通过用包含搜索到的最优词元预算的链式思考（Chain-of-Thought, CoT）提示来提示  $M_\theta$ ，从而构建目标输出  $y_i$ 。提示格式如下：

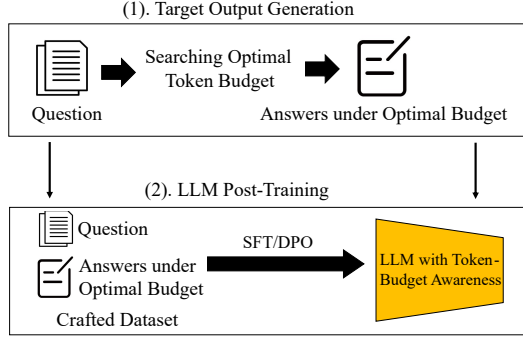


Figure 6: TALE-PT 的工作流程。给定一组问题，TALE-PT 首先在阶段 (1) 生成目标输出，在最优预算下搜索答案。在阶段 (2)，TALE-PT 使用搜索得到的目标输出构建专门的数据集，然后对 LLM 进行后训练（通过 SFT/DPO），以内化词元预算感知。

“让我们逐步思考并使用少于  $\beta_i^*$  个词元。”

其中  $\beta_i^*$  是给定问题  $x_i$  的搜索到的最优预算（搜索过程见 算法 1 和 算法 2）。图 1d 给出了一个示例。受提示中指定的词元预算约束的 LLM 输出被作为精心设计的目标输出  $y_i$ 。该目标输出不仅能够得到正确答案，而且在我们基于词元弹性的搜索过程中具有最小的实际输出词元开销，如 节 4 所述。在 LLM 后训练阶段，我们使用第一阶段生成的目标输出来训练 LLM  $\mathcal{M}_\theta$ 。我们提出了两种在后训练期间使模型内化词元预算感知的方法，即基于 SFT 的方法和基于 DPO 的方法。超参数的具体细节见 节 A.3。

**基于 SFT 的内化。**为了向  $\mathcal{M}_\theta$  注入词元预算感知，我们使用这些目标输出进行监督微调。我们通过最小化模型预测与目标输出之间的交叉熵损失来对  $\mathcal{M}_\theta$  进行后训练，使其生成节省词元的输出。给定第一阶段的输入  $x$  和反映词元预算感知的目标输出  $y$ ，交叉熵损失定义为：

$$\mathcal{L}_{\text{CE}}(\theta) = -\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^{T_i} \log \mathbb{P}(y_{i,t} | y_{i,<t}, x_i),$$

其中  $T_i$  表示第  $i$  个训练样本的目标序列  $y_i$  的长度， $y_{i,t}$  表示目标序列  $y_i$  中位置  $t$  处的目标词元， $y_{i,<t}$  表示位于当前词元  $y_{i,t}$  之前的词元序列，代表第  $i$  个样本在时间步  $t$  之前的上下文。 $\mathbb{P}(y_{i,t} | y_{i,<t}, x_i)$  表示模型  $\mathcal{M}_\theta$  在给定输入  $x_i$  以及前序词元  $y_{i,<t}$  的条件下对词元  $y_{i,t}$  预测的概率。该损失基于下一个词元的预测。目标是调整模型参数  $\theta$ ，使其生成符合词元预算约束的简洁且准确的回答。这通过梯度下降实现，迫使模型从节省词元的目标输出中内化紧凑的推理模式。

基于 DPO 的内化。另一种激励  $\mathcal{M}_\theta$  学习令牌预算偏好的方法是对模型应用 DPO 算法 (Rafailov et al., 2023) 进行后训练。DPO 通过分类目标直接优化策略，使模型行为与期望的偏好对齐。此处 DPO 的目标是优化  $\mathcal{M}_\theta$ ，使其在遵守内化的令牌预算的同时，能够准确地解决给定问题  $x$ 。我们将从搜索到的最优预算得到的目标输出  $y_i$  作为正样本，而使用原始 CoT 提示生成的输出  $y'_i$  作为负样本。这些正负样本对随后用于构建 DPO 训练的成对偏好数据。对于构建的数据集  $\mathcal{D} = \{(x_i, y_i, y'_i)\}_{i=1}^N$ ，目标是最大化模型将正样本排序高于负样本的概率。形式上，我们旨在优化如下目标：

$$\mathcal{L}_{\text{DPO}}(\theta) = -\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \log P_\theta(y_i \succ y'_i), \quad \text{where}$$

$$P_\theta(y_i \succ y'_i) = \frac{\exp(s(y_i, x_i))}{\exp(s(y_i, x_i)) + \exp(s(y'_i, x_i))}.$$

$P_\theta(y_i \succ y'_i)$  是偏好函数。这里， $s(y_i, x_i)$  定义为  $\sum_{t=1}^{T_i} \log \mathbb{P}(y_{i,t} | y_{i,<t}, x_i)$ ，表示模型在输入  $x_i$  下生成  $y_i$  的对数概率，作为分配给  $y_i$  的偏好分数。该分数衡量模型对该输出的偏好强度。该目标确保模型在保持高质量推理与正确性的同时，优先生成简洁且令牌高效的输出。在训练过程中，LLM 被引导将令牌预算约束内化，并在第一阶段生成的目标输出的引导下采用更紧凑的推理过程。这一两阶段过程有效地训练 LLM 生成简洁而准确的响应，在推理时实现推理质量与令牌效率之间的平衡。更多细节见 节 A.3。

## 6 评估

在本节中，我们给出实验结果以评估两种版本的 TALE (TALE-EP 和 TALE-PT) 的有效性。两种实现的比较在 节 A.6 中有详细说明。

### 6.1 实验设置

**数据集。**为评估 LLM 的性能，我们考虑了三个最具挑战性的数学数据集：GSM8K (Cobbe et al., 2021)、GSM8K-Zero (Chiang and Lee, 2024) 和 MathBench (Liu et al., 2024)。GSM8K-Zero 源自 GSM8K 数据集，专门用于分析 LLM 生成输出中的过度推理与冗余。简而言之，GSM8K-Zero 的设计使得答案已嵌入在问题本身中，LLM 可以在无需复杂额外推理或冗余计算的情况下轻易生成正确响应。模型。我们在五个最先进的 LLM 上进行实验（即 GPT-4o (OpenAI, 2024b)、GPT-4o-mini (OpenAI, 2024a)、Yi-lightning (Wake



Table 3: 比较 TALE-EP（估计与提示）与其他提示工程方法。“直接回答”表示在不进行任何推理过程的情况下对大型语言模型进行提示。“原始 CoT”表示不带预算的标准 CoT 提示。我们评估中使用的模型为 GPT-4o-mini (OpenAI, 2024a)。可见 TALE-EP 达到平均准确率 (ACC) 80.22%，平均输出令牌成本为 138.53，平均费用为 118.46。TALE-EP 将输出令牌成本降低了 67%，将费用降低了 59%，并在与原始 CoT 方法相比仍保持具有竞争力的性能。ACC ↑，输出令牌 ↓，费用 ( $10^{-5}$ \$ / 样本) ↓。

Dataset	Directly Answering			Vanilla CoT			TALE-EP		
	ACC ↑	Output Tokens ↓	Expense ↓	ACC ↑	Output Tokens ↓	Expense ↓	ACC ↑	Output Tokens ↓	Expense ↓
GSM8K	28.29%	12.46	39.43	81.35%	318.10	541.09	84.46%	77.26	279.84
GSM8K-Zero	97.21%	18.85	91.69	99.50%	252.96	886.79	98.72%	22.67	276.12
MathBench-Arithmetic	59.67%	41.10	9.78	75.00%	313.51	78.58	73.67%	39.60	18.62
MathBench-Middle	33.33%	5.00	3.58	84.67%	553.93	68.22	79.33%	238.14	42.95
MathBench-High	51.33%	5.00	4.07	84.00%	653.24	82.44	80.00%	254.82	47.61
MathBench-College	44.00%	5.00	3.68	78.00%	675.78	81.56	70.00%	259.85	45.60
Average	52.31%	14.57	25.37	83.75%	461.25	289.78	81.03%	148.72	118.46

Table 4: TALE-EP（估计与提示）在不同大型语言模型 (LLMs) 上的泛化。考虑了 Yi-lightning (Wake et al., 2024)、GPT-4o-mini (OpenAI, 2024a)、GPT-4o (OpenAI, 2024b) 和 o3-mini (OpenAI, 2025)。我们在 MathBench-College 数据集上进行了以下评估。ACC ↑，输出令牌数 ↓，开销 ( $10^{-5}$ \$/样本) ↓。

LLM	Directly Answering			Vanilla CoT			TALE-EP		
	ACC ↑	Output Tokens ↓	Expense ↓	ACC ↑	Output Tokens ↓	Expense ↓	ACC ↑	Output Tokens ↓	Expense ↓
Yi-lightning	66.67%	80.01	3.09	79.33%	998.10	21.55	76.67%	373.52	17.25
GPT-4o-mini	44.00%	5.00	3.68	78.00%	675.78	81.56	70.00%	259.85	45.60
GPT-4o	57.33%	5.00	61.34	84.00%	602.29	1359.42	80.00%	181.61	759.95
o3-mini	96.00%	601.51	336.69	97.33%	1163.55	638.46	96.66%	677.65	385.12

et al., 2024)、o3-mini (OpenAI, 2025))，以及 Lllama-3.1-8B-Instruct (Dubey et al., 2024)。评价指标。TALE 的目标是在保持相当准确率 (Accuracy, Acc) 的同时，平衡 LLM 的正确性表现与额外冗余令牌开销。具体而言，TALE 寻求在维持可比的准确率 (Acc) 的同时，最小化输出令牌数。

准确率 (Acc)。该指标按如下方式计算： $Accuracy = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbb{I}\{\mathcal{M}(\mathbf{x}_i) = y_i\}$ ，其中  $(\mathbf{x}_i, y_i) \in \mathcal{X}$ 。 $\mathbf{x}_i$  是来自数据集  $\mathcal{X}$  的数学问题，且  $y_i$  为该题的真实答案。 $\mathcal{M}(\cdot)$  返回给定问题的答案。 $\mathbb{I}\{\cdot\}$  表示指示函数。该函数用于判断括号内给定条件是否成立：若条件为真则返回 1，若条件为假则返回 0。为获得更好的评估，我们通过在 Figure 8 中详述的精心设计说明来规范 LLM 的输出格式。

输出令牌数。我们通过计算每个具体任务的平均输出令牌消耗来评估令牌开销。输出令牌开销的计算如下： $Number\ of\ Output\ Tokens = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbb{T}(\mathcal{M}(\mathbf{x}_i))$ ，其中  $\mathbf{x}_i$  表示给定的问题，且  $\mathbb{T}$  是用于衡量令牌数量的函数。直观上，输出令牌越多，导致的  $\mathcal{M}$  开销越高。为更精确地评估开销，我们计算每个样本的平均费用。总体令牌费用包括查询过程中使用的输入和输出令牌。

## 6.2 TALE-EP 的有效性

Table 3 比较了 TALE-EP 与其他提示工程方法在七个数据集上的表现，评估指标包括准确率、输出令牌数和费用。有效的提示应在最大化准确率的同时最小化令牌使用和成本。

Direct Answering 的成本效率最高 (14.57 个令牌，费用 25.37)，但准确率较低 (52.31%)。Vanilla CoT 达到最高准确率 (83.75%)，但成本很高 (461.25 个令牌，费用 289.78)。TALE-EP 在性能与效率之间取得平衡，达到 81.03% 的准确率，同时将令牌使用降至 Vanilla CoT 的 32%，费用降至 41%。在 GSM8K 上，其准确率甚至超过了 Vanilla CoT，达到 84.46%。注意费用并非与输出令牌数成严格正比，因为费用还考虑了输入和缓存的令牌。TALE-EP 平均降低了 68.64% 的令牌成本，为受预算限制的推理任务提供了可扩展且具有成本效益的解决方案。对于资源充足的场景，我们在更大的令牌预算下对 TALE-EP 进行了评估，详见节 A.8。为进一步评估 TALE-EP 在不同大型语言模型 (LLM) 上的泛化能力，我们在 MathBench-College 上对 Yi-lightning、GPT-4o-mini、GPT-4o 和 o3-mini 进行了实验。Table 4 展示了结果，表明 TALE-EP 能在显著减少输出 token 与费用的同时保持具有竞争力的准确率。与 Vanilla CoT 相比，TALE-EP 在输出 token 方面实现了可观的节省，平均减少 64.63%。费用的减少同样显著，平均降低 45.30%。尽管节约了成本，TALE-EP 仍维持较强的准确性：在 Yi-lightning 上达到 76.67%，在 GPT-4o-mini 上为 70.00%，在 GPT-4o 上为 80.00%，与 Vanilla CoT 相当。这些结果凸显了 TALE-EP 在不同 LLM 架构间平衡成本效率与推理性能的有效性。观察到的准确率下降在 GPT-4o-mini 上最为明显，这可能归因于其参数量较少，使其在有限的响应推理长度内

Table 5: 比较 TALE-PT（通过后训练使模型具备令牌预算感知能力）与其他提示工程方法。考虑了两种不同的后训练方法：SFT 和 DPO。

LLM	Dataset	Directly Answering		Vanilla CoT		TALE-PT-SFT		TALE-PT-DPO	
		ACC ↑	Output Tokens ↓	ACC ↑	Output Tokens ↓	ACC ↑	Output Tokens ↓	ACC ↑	Output Tokens ↓
Llama-3.1-8B-Instruct	GSM8K	21.00%	38.54	77.56%	241.51	78.57%	139.63	74.11%	149.93
	GSM8K-Zero	70.32%	13.49	65.04%	251.08	78.43%	77.85	78.41%	113.41

更难给出正确答案。我们还评估了 TALE 在更多任务上的适用性，结果见 节 A.5。TALE-EP 的效率分析见 节 A.7。

### 6.3 TALE-PT 的有效性

Table 5 比较了在 Llama-3.1-8B-Instruct 上，TALE-PT 各方法与 Vanilla CoT 及 Direct Answering 在 GSM8K 和 GSM8K-Zero 上的表现。对于 GSM8K，Direct Answering 展现了最低的 token 使用量 (38.54)，但代价是准确率显著下降 (21.00%)。相反，Vanilla CoT 的准确率高得多 (77.56%)，但 token 成本显著增加 (241.51)。需注意的是，在 GSM8K-Zero 上，Vanilla CoT 的准确率低于 Direct Answering。该下降可归因于过度思考：GSM8K-Zero 较为简单，答案常常直接隐含于题目中，此类情况下冗长的推理过程可能引入不必要的复杂性，导致准确率下降。在各 TALE-PT 方法中，TALE-PT-SFT 以较少的 token 实现了最佳准确率 (78.57%、78.43%)，而 TALE-PT-DPO 在准确率 (74.11%、78.41%) 与 token 效率之间取得平衡，在 GSM8K-Zero 上相比 Vanilla CoT 将 token 消耗削减了超过 50%。

## 7 结论

在本文中，我们提出了 TALE，该框架通过引入令牌预算感知来减少链式思维（Chain-of-Thought, CoT）推理中的令牌冗余。TALE 根据每个问题的推理复杂度动态调整推理令牌的数量，在令牌效率与答案正确性之间取得平衡。实验表明，TALE 在可接受的准确率损失下显著降低了输出令牌的使用量和开销，在成本效益方面优于 Vanilla CoT，并能够在多种大规模语言模型（LLMs）上良好泛化。

## 8 局限性

我们提出的基于令牌预算感知的推理框架的实验目前集中于仅处理文本输入和输出的大型语言模型（LLMs）。尽管结果表明在效率和成本降低方面有显著提升，但并未考虑具有多模态输出内容的模型，例如生成交错图像与文本作为输出的模型。未来工作中，我们将通过引入针对各模态的预算约束，并设计自适应策略来优化不同模态类型（例如图像和视频）的令牌

效率，从而把令牌预算感知扩展到此类具有多模态输出的 LLMs。

## References

- Jacob Austin, Augustus Odena, Maxwell Nye, Maarten Bosma, Henryk Michalewski, David Dohan, Ellen Jiang, Carrie Cai, Michael Terry, Quoc Le, et al. 2021. Program synthesis with large language models. *arXiv preprint arXiv:2108.07732*.
- Aman Bhargava, Cameron Witkowski, Shi-Zhuo Looi, and Matt Thomson. 2023. What’s the magic word? a control theory of llm prompting. *arXiv preprint arXiv:2310.04444*.
- Bin Bi, Chenliang Li, Chen Wu, Ming Yan, Wei Wang, Songfang Huang, Fei Huang, and Luo Si. 2020. Palm: Pre-training an autoencoding&autoregressive language model for context-conditioned generation. *arXiv preprint arXiv:2004.07159*.
- Haolin Chen, Yihao Feng, Zuxin Liu, Weiran Yao, Akshara Prabhakar, Shelby Heinecke, Ricky Ho, Phil Mui, Silvio Savarese, Caiming Xiong, et al. 2024. Language models are hidden reasoners: Unlocking latent reasoning capabilities via self-rewarding. *arXiv preprint arXiv:2411.04282*.
- Cheng-Han Chiang and Hung-yi Lee. 2024. Over-reasoning and redundant calculation of large language models. *arXiv preprint arXiv:2401.11467*.
- Karl Cobbe, Vineet Kosaraju, Mohammad Bavarian, Mark Chen, Heewoo Jun, Lukasz Kaiser, Matthias Plappert, Jerry Tworek, Jacob Hilton, Reiichiro Nakano, et al. 2021. Training verifiers to solve math word problems. *arXiv preprint arXiv:2110.14168*.
- Dujian Ding, Ankur Mallick, Chi Wang, Robert Sim, Subhabrata Mukherjee, Victor Rühle, Laks VS Lakshmanan, and Ahmed Hassan Awadallah. 2024. Hybrid llm: Cost-efficient and quality-aware query routing. In *The Twelfth International Conference on Learning Representations*.
- Abhimanyu Dubey, Abhinav Jauhri, Abhinav Pandey, Abhishek Kadian, Ahmad Al-Dahle, Aiesha Letman, Akhil Mathur, Alan Schelten, Amy Yang, Angela Fan, et al. 2024. The llama 3 herd of models. *arXiv preprint arXiv:2407.21783*.



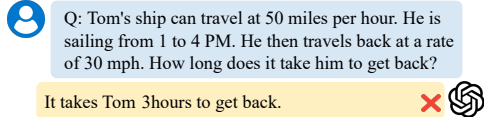
- Guhao Feng, Bohang Zhang, Yuntian Gu, Haotian Ye, Di He, and Liwei Wang. 2024. Towards revealing the mystery behind chain of thought: a theoretical perspective. *Advances in Neural Information Processing Systems*, 36.
- Xidong Feng, Ziyu Wan, Muning Wen, Ying Wen, Weinan Zhang, and Jun Wang. 2023. Alphazero-like tree-search can guide large language model decoding and training. In *NeurIPS 2023 Foundation Models for Decision Making Workshop*.
- Daya Guo, Dejian Yang, Haowei Zhang, Junxiao Song, Ruoyu Zhang, Runxin Xu, Qihao Zhu, Shirong Ma, Peiyi Wang, Xiao Bi, et al. 2025. Deepseek-r1: Incentivizing reasoning capability in llms via reinforcement learning. *arXiv preprint arXiv:2501.12948*.
- Shibo Hao, Yi Gu, Haotian Luo, Tianyang Liu, Xiyao Shao, Xinyuan Wang, Shuhua Xie, Haodi Ma, Adithya Samavedhi, Qiyue Gao, et al. 2024a. Llm reasoners: New evaluation, library, and analysis of step-by-step reasoning with large language models. *arXiv preprint arXiv:2404.05221*.
- Shibo Hao, Yi Gu, Haodi Ma, Joshua Jiahua Hong, Zhen Wang, Daisy Zhe Wang, and Zhiting Hu. 2023. Reasoning with language model is planning with world model. *arXiv preprint arXiv:2305.14992*.
- Shibo Hao, Sainbayar Sukhbaatar, DiJia Su, Xian Li, Zhiting Hu, Jason Weston, and Yuandong Tian. 2024b. Training large language models to reason in a continuous latent space. *arXiv preprint arXiv:2412.06769*.
- Namgyu Ho, Laura Schmid, and Se-Young Yun. 2022. Large language models are reasoning teachers. *arXiv preprint arXiv:2212.10071*.
- Edward J Hu, Yelong Shen, Phillip Wallis, Zeyuan Allen-Zhu, Yuanzhi Li, Shean Wang, Lu Wang, and Weizhu Chen. 2021. Lora: Low-rank adaptation of large language models. *arXiv preprint arXiv:2106.09685*.
- Hamel Husain, Ho-Hsiang Wu, Tiferet Gazit, Miltiadis Allamanis, and Marc Brockschmidt. 2019. Codesearchnet challenge: Evaluating the state of semantic code search. *arXiv preprint arXiv:1909.09436*.
- Mingyu Jin, Qinkai Yu, Jingyuan Huang, Qingcheng Zeng, Zhenting Wang, Wenyue Hua, Haiyan Zhao, Kai Mei, Yanda Meng, Kaize Ding, et al. 2024a. Exploring concept depth: How large language models acquire knowledge and concept at different layers? *arXiv preprint arXiv:2404.07066*.
- Mingyu Jin, Qinkai Yu, Dong Shu, Haiyan Zhao, Wenyue Hua, Yanda Meng, Yongfeng Zhang, and Mengnan Du. 2024b. The impact of reasoning step length on large language models. *arXiv preprint arXiv:2401.04925*.
- Yaniv Leviathan, Matan Kalman, and Yossi Matias. 2023. Fast inference from transformers via speculative decoding. In *International Conference on Machine Learning*, pages 19274–19286. PMLR.
- Chenliang Li, Bin Bi, Ming Yan, Wei Wang, and Songfang Huang. 2021. Addressing semantic drift in generative question answering with auxiliary extraction. In *Proceedings of the 59th Annual Meeting of the Association for Computational Linguistics and the 11th International Joint Conference on Natural Language Processing (Volume 2: Short Papers)*, pages 942–947.
- Yifei Li, Zeqi Lin, Shizhuo Zhang, Qiang Fu, Bei Chen, Jian-Guang Lou, and Weizhu Chen. 2023. Making language models better reasoners with step-aware verifier. In *Proceedings of the 61st Annual Meeting of the Association for Computational Linguistics (Volume 1: Long Papers)*, pages 5315–5333.
- Hongwei Liu, Zilong Zheng, Yuxuan Qiao, Haodong Duan, Zhiwei Fei, Fengzhe Zhou, Wenwei Zhang, Songyang Zhang, Dahua Lin, and Kai Chen. 2024. Mathbench: Evaluating the theory and application proficiency of llms with a hierarchical mathematics benchmark. *arXiv preprint arXiv:2405.12209*.
- Qing Lyu, Shreya Havaldar, Adam Stein, Li Zhang, Delip Rao, Eric Wong, Marianna Apidianaki, and Chris Callison-Burch. 2023. Faithful chain-of-thought reasoning. *arXiv preprint arXiv:2301.13379*.
- Sania Nayab, Giulio Rossolini, Giorgio Buttazzo, Nicolamaria Manes, and Fabrizio Giacomelli. 2024. Concise thoughts: Impact of output length on llm reasoning and cost. *arXiv preprint arXiv:2407.19825*.
- OpenAI. 2024a. [Gpt-4o mini: advancing cost-efficient intelligence](#). Technical report, OpenAI. Accessed: July 18, 2024.
- OpenAI. 2024b. [Hello gpt-4o](#). Technical report, OpenAI. Accessed: May 13, 2024.
- OpenAI. 2024c. [Learning to reason with llms](#). Technical report, OpenAI.
- OpenAI. 2025. [Openai o3-mini: Pushing the frontier of cost-effective reasoning](#). Technical report, OpenAI. Accessed: January 31, 2025.
- Long Ouyang, Jeffrey Wu, Xu Jiang, Diogo Almeida, Carroll Wainwright, Pamela Mishkin, Chong Zhang, Sandhini Agarwal, Katarina Slama, Alex Ray, et al. 2022. Training language

- models to follow instructions with human feedback. *Advances in neural information processing systems*, 35:27730–27744.
- Kishore Papineni, Salim Roukos, Todd Ward, and Wei-Jing Zhu. 2002. Bleu: a method for automatic evaluation of machine translation. In *Proceedings of the 40th annual meeting of the Association for Computational Linguistics*, pages 311–318.
- Alec Radford, Jeffrey Wu, Rewon Child, David Luan, Dario Amodei, Ilya Sutskever, et al. 2019. Language models are unsupervised multitask learners. *OpenAI blog*, 1(8):9.
- Rafael Rafailov, Archit Sharma, Eric Mitchell, Christopher D Manning, Stefano Ermon, and Chelsea Finn. 2023. Direct preference optimization: Your language model is secretly a reward model. *Advances in Neural Information Processing Systems*, 36:53728–53741.
- Hannah Rashkin, Eric Michael Smith, Margaret Li, and Y-Lan Boureau. 2019. Towards empathetic open-domain conversation models: A new benchmark and dataset. In *Proceedings of the 57th Annual Meeting of the Association for Computational Linguistics*, pages 5370–5381.
- Noah Shinn, Federico Cassano, Ashwin Gopinath, Karthik Narasimhan, and Shunyu Yao. 2024. Reflexion: Language agents with verbal reinforcement learning. *Advances in Neural Information Processing Systems*, 36.
- Guangyan Sun, Mingyu Jin, Zhenting Wang, Cheng-Long Wang, Siqi Ma, Qifan Wang, Ying Nian Wu, Yongfeng Zhang, and Dongfang Liu. 2024. Visual agents as fast and slow thinkers. *arXiv preprint arXiv:2408.08862*.
- Mirac Suzgun, Nathan Scales, Nathanael Schärli, Sebastian Gehrmann, Yi Tay, Hyung Won Chung, Aakanksha Chowdhery, Quoc V Le, Ed H Chi, Denny Zhou, et al. 2022. Challenging big-bench tasks and whether chain-of-thought can solve them. *arXiv preprint arXiv:2210.09261*.
- Alan Wake, Albert Wang, Bei Chen, CX Lv, Chao Li, Chengen Huang, Chenglin Cai, Chujie Zheng, Daniel Cooper, Ethan Dai, et al. 2024. Yi-lightning technical report. *arXiv preprint arXiv:2412.01253*.
- Junlin Wang, Siddhartha Jain, Dejiao Zhang, Baishakhi Ray, Varun Kumar, and Ben Athiwaratkun. 2024a. Reasoning in token economies: Budget-aware evaluation of llm reasoning strategies. *arXiv preprint arXiv:2406.06461*.
- Lei Wang, Wanyu Xu, Yihuai Lan, Zhiqiang Hu, Yunshi Lan, Roy Ka-Wei Lee, and Ee-Peng Lim. 2023. Plan-and-solve prompting: Improving zero-shot chain-of-thought reasoning by large language models. In *Proceedings of the 61st Annual Meeting of the Association for Computational Linguistics (Volume 1: Long Papers)*, pages 2609–2634.
- Xuezhi Wang, Jason Wei, Dale Schuurmans, Quoc Le, Ed Chi, Sharan Narang, Aakanksha Chowdhery, and Denny Zhou. 2022. Self-consistency improves chain of thought reasoning in language models. *arXiv preprint arXiv:2203.11171*.
- Zhenting Wang, Guofeng Cui, Kun Wan, and Wentian Zhao. 2025. Dump: Automated distribution-level curriculum learning for rl-based llm post-training. *arXiv preprint arXiv:2504.09710*.
- Zhenting Wang, Shuming Hu, Shiyu Zhao, Xiaowen Lin, Felix Juefei-Xu, Zhuowei Li, Ligong Han, Harihar Subramanyam, Li Chen, Jianfa Chen, et al. 2024b. Mllm-as-a-judge for image safety without human labeling. *arXiv preprint arXiv:2501.00192*.
- Jason Wei, Xuezhi Wang, Dale Schuurmans, Maarten Bosma, Fei Xia, Ed Chi, Quoc V Le, Denny Zhou, et al. 2022. Chain-of-thought prompting elicits reasoning in large language models. *Advances in neural information processing systems*, 35:24824–24837.
- Tongshuang Wu, Michael Terry, and Carrie Jun Cai. 2022. Ai chains: Transparent and controllable human-ai interaction by chaining large language model prompts. In *Proceedings of the 2022 CHI conference on human factors in computing systems*, pages 1–22.
- Yuxi Xie, Anirudh Goyal, Wenyue Zheng, Min-Yen Kan, Timothy P Lillicrap, Kenji Kawaguchi, and Michael Shieh. 2024. Monte carlo tree search boosts reasoning via iterative preference learning. *arXiv preprint arXiv:2405.00451*.
- Jingfeng Yang, Haoming Jiang, Qingyu Yin, Danqing Zhang, Bing Yin, and Diyi Yang. 2022. Seqzero: Few-shot compositional semantic parsing with sequential prompts and zero-shot models. *arXiv preprint arXiv:2205.07381*.
- Shunyu Yao, Dian Yu, Jeffrey Zhao, Izhak Shafran, Tom Griffiths, Yuan Cao, and Karthik Narasimhan. 2024a. Tree of thoughts: Deliberate problem solving with large language models. *Advances in Neural Information Processing Systems*, 36.
- Shunyu Yao, Dian Yu, Jeffrey Zhao, Izhak Shafran, Tom Griffiths, Yuan Cao, and Karthik Narasimhan. 2024b. Tree of thoughts: Deliberate problem solving with large language models. *Advances in Neural Information Processing Systems*, 36.
- Zangwei Zheng, Xiaozhe Ren, Fuzhao Xue, Yang Luo, Xin Jiang, and Yang You. 2024. Response

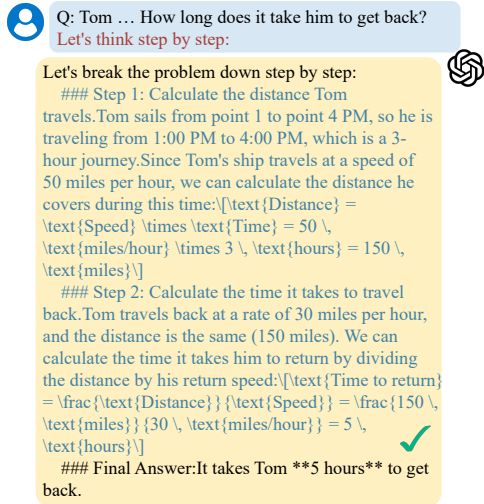
length perception and sequence scheduling: An llm-empowered llm inference pipeline. *Advances in Neural Information Processing Systems*, 36.

Denny Zhou, Nathanael Schärli, Le Hou, Jason Wei, Nathan Scales, Xuezhi Wang, Dale Schurmann, Claire Cui, Olivier Bousquet, Quoc Le, et al. 2022. Least-to-most prompting enables complex reasoning in large language models. *arXiv preprint arXiv:2205.10625*.

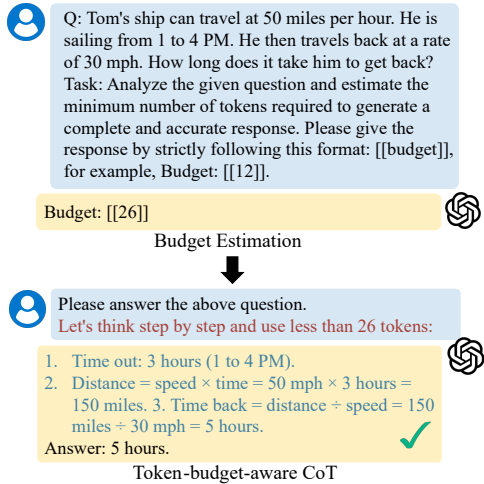
## A 附录



(a) 直接回答 (10 个输出 token)。



(b) 原始 CoT (271 个输出 token)。



(c) TALE (68 个输出 token)。

Figure 7: 一个直观示例, 说明 TALE-EP 在 GPT-4o-mini (OpenAI, 2024a) 上的工作流程。

### A.1 理想预算范围的定义

理想预算范围。基于对令牌弹性 (token elasticity) 现象的观察, 在搜索最优预算的过程中存

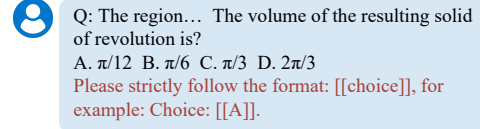


Figure 8: 用于将 LLM 输出格式化为多项选择题答案的指令提示。

在一个令牌消耗的下底区间。在该区间内, 令牌消耗接近其下界; 在该区间之前或之后, 令牌消耗会增加。我们将这样的下底区间定义为“理想预算范围”。值得注意的是, 在搜索过程中预算会持续降低, 只有令牌消耗出现回弹。因此我们将该观察称为令牌弹性。综上, 理想预算范围是使实际令牌消耗最小化的一个区间。令  $\beta = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N\}$  表示能够保持答案正确性的所有可能预算。在  $\beta$  上迭代地应用一个滚动窗口  $W \in \beta$ 。令  $k$  表示区间大小, 该大小在我们的评估中自适应地确定为  $\frac{N}{3}$ , 其中  $N$  为可能预算的总数。一个预算区间定义为:

$$W_k(i) = \{\beta_j \mid i \leq j \leq i + k - 1\}, \\ 1 \leq i \leq |\beta| - k + 1$$

理想预算范围  $W^*$  定义为:

$$W_k^* = \arg \min_i \left( \sum_{\beta_j \in W_k(i)} \mathbb{T}(\beta_j) \right), \quad (1)$$

其中  $\mathbb{T}$  表示给定预算  $\beta \in \beta$  的实际令牌消耗。我们的目标是在不进行任何搜索的情况下估计出位于理想预算范围内的预算。在这种情况下, TALE 可以以可接受的代价获得理想预算。

### A.2 预算估计的有效性

在此研究问题 (RQ) 中, 我们评估预算估计的有效性。理想的估计预算应位于通过搜索得到的最优预算附近, 且落在图 Figure 2 的下底区域内。我们在节 A.1 中将该区域形式化为理想预算范围并给出定义。好的预算应位于理想预算范围内。我们考虑两个指标: 范围内准确率和范围外距离。范围内准确率用于判断预测预算  $\hat{\beta}$  是否落在理想预算范围  $W_k^*$  内。数学上可表示为:

$$\mathbb{I}\{\hat{\beta} \in W_k^*\} = \begin{cases} 1, & \text{if } \hat{\beta} \in W_k^*, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

范围外距离则在预测预算  $\beta^*$  落在理想预算范围  $W_k^*$  之外时, 量化  $\hat{\beta}$  与  $W_k^*$  之间的距离。令  $\text{dist}(\hat{\beta}, W_k^*)$  表示该距离, 定义为:

$$\text{dist}(\hat{\beta}, W_k^*) = \begin{cases} 0, & \text{if } \hat{\beta} \in W_k^*, \\ \min_{\beta \in W_k^*} |\hat{\beta} - \beta|, & \text{if } \hat{\beta} \notin W_k^*. \end{cases}$$



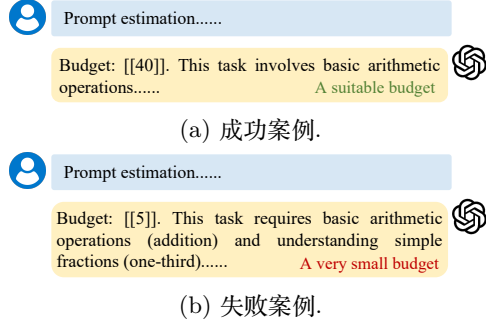


Figure 9: TALE-EP 中提示预算估计成功与失败案例的直观示例。

直观上，更高的范围内准确率和更低的范围外距离表示更好的预算估计。在我们的评估中，范围内准确率为 60.61%，范围外距离为 109.64。这表明超过三分之二的估计预算位于理想范围内。对于那些超出范围的样本，平均偏移约为 109.64 个令牌。Figure 9 直观地展示了估计成功与失败的案例。我们用于预算估计的提示如下：“任务：分析给定问题并估算推理所需的最小令牌数。”

该提示鼓励模型对问题进行整体评估，包括推理深度、结构、完整性以及表面难度。

### A.3 TALE 的实现细节

在本节中，我们介绍用于 TALE-EP 和 TALE-PT 的超参数。

**TALE-EP.** TALE-EP 使用零样本机制来估算令牌预算，然后提示大型语言模型。在此过程中使用的指令提示如 Figure 7 所示。为确保输出一致性，我们将温度设为 0.1，并将模型限制为单一推理路径。此外，随机种子固定为 1024。

**TALE-PT.** TALE-PT 包含两种实现：SFT 和 DPO。为提高参数效率，两者在后训练阶段均采用 LoRA (Hu et al., 2021)，rank 设为 8，lora alpha 设为 32。对于 TALE-PT-SFT，我们训练 3 个 epoch，批量大小为 16，学习率为  $1e-4$ ，权重衰减为 0.01。对于 TALE-PT-DPO，我们训练 2 个 epoch，批量大小为 16，学习率为  $3e-5$ ，权重衰减为 0.001。

### A.4 TALE-EP 与 TALE-PT 的比较.

在本节中，我们比较 TALE-EP 与 TALE-PT (包括 SFT 与 DPO) 的性能。具体来说，我们使用 Llama-3.1-8B-Instruct 既作为 TALE-EP 的预算估计器，也作为 TALE-PT 的基础模型，在 GSM8K 上进行评估。Table 6 展示了相关证据。由于基于零样本的估计器倾向于预测较小的预算，TALE-EP 在令牌使用量上更低，但代价是准确率略有下降。相比之下，TALE-PT 的两种变体在使用更多令牌时实现了更高的准

Table 6: TALE-EP 与 TALE-PT 的比较。

Metrics	TALE-EP	TALE-PT	
		SFT	DPO
ACC	71.82	78.57	74.11
Output Tokens	112.21	139.63	149.93

Table 7: 在更多任务上对 TALE 的泛化能力。考虑了三种常见的 LLM 生成任务：代码摘要 (Husain et al., 2019) (CS)、同理心应答生成 (Rashkin et al., 2019) (ERG)、代码生成 (Austin et al., 2021) (CG)。采用 BLEU 作为评估指标。BLEU $\uparrow$ 。输出令牌数 $\uparrow$ 。

Tasks	TALE-EP		Vanilla CoT	
	BLEU	Output Tokens	BLEU	Output Tokens
CS	0.07	44.39	0.2	134.05
ERG	0.005	60.34	0.006	175.37
CG	0.24	171.08	0.267	461.77

准确率，这是因为它们的训练数据是通过最优预算搜索构建的，该过程将答案正确性作为严格约束，即使代价是更高的令牌消耗。这突显了在严格保持正确性 (TALE-PT) 与令牌效率 (TALE-EP) 之间的权衡。

### A.5 TALE 在更多任务上的适用性。

为进一步评估适用性，我们在另外三项开放式生成任务上部署 TALE-EP。由于这些任务涉及开放式文本生成，我们采用 BLEU 指标 (Papineni et al., 2002) 来量化生成输出与参考文本之间的相似性。Table 4 的结果表明，TALE-EP 在仅使用约 40% 输出令牌的情况下，能获得与 Vanilla CoT 相当甚至更优的 BLEU 得分，从而验证了其在更广泛生成任务中的有效性和适用性。

### A.6 预算搜索的形式化。

对于给定输入  $x$ ，我们定义搜索空间为：

$$\mathcal{B} = \{\beta \in \mathbb{Z}^+ \mid 0 < \beta \leq T_{\text{vanilla}}(x)\}$$

其中  $T_{\text{vanilla}}(x)$  是 Vanilla CoT 生成的令牌数。判定候选预算  $\beta \in \mathcal{B}$  为可行的条件为：

$$LLM(x, \beta) = y \text{ and } T(x, \beta) < T(x, \beta_0)$$

其中  $y$  是真实答案， $T(x, \beta)$  是在预算  $\beta$  下回答  $x$  时的实际输出令牌数， $\beta_0$  是先前搜索到的（较大）可行预算。我们的目标是寻找：

$$\beta^* = \arg \min_{\beta \in \mathcal{B}} T(x, \beta), \text{ subject to } LLM(x, \beta) = y$$

为了高效地找到  $\beta^*$ ，我们采用由上述可行性函数指导的二分搜索过程，详见 算法 1 和 算法 2。

Table 8: “隐式单调性假设”的经验证据。 $\bar{\beta}$  是预算上界，即 vanilla CoT 的令牌开销。预算行显示了从  $2^{-2}$  到  $2^2 \cdot \beta^*$  的缩放预算。

Budget( $\beta^*$ )	$2^{-5}$	$2^{-4}$	$2^{-2}$	$2^0$
ACC	69.23	75.82	75.82	76.92
Output Tokens	222.69	222.42	244.61	653.53

### A.7 TALE-EP 的效率。

由于 TALE-EP 需要额外一次查询，我们在本节中进一步评估其端到端延迟。具体地，我们在 GSM8K-Zero 数据集上对 Llama-3.1-8B-Instruct 模型发起查询，测量准确率和平均时间开销。TALE-EP 的预算估计查询亦被计入。尽管与 Vanilla CoT 相比 TALE-EP 需要额外一次查询，但其效率显著更高，每个样本仅需 2.3 秒，而 Vanilla CoT 则需 10.2 秒。这是因为影响推理时间的主要因素是输出令牌数，而 TALE-EP 有效地减少了该数目。

### A.8 更大令牌预算的有效性。

在计算资源充足的场景中，为了获得更好的性能，令牌预算可以更大。我们通过将估计预算按因子  $\alpha$  ( $\alpha * \text{budget}$ ) 缩放来模拟此类场景。如下表所示，将  $\alpha$  从 1 提高到 2 会带来更高的准确率（从 67.33% 提升到 72.66%），但代价是更多的令牌数（从 210.97 增至 279.78），这表明 TALE-EP 能在不同资源场景下灵活适配。

### A.9 对“隐式单调性假设”的经验证据。

在本节中，我们给出经验证据以支持我们搜索算法的“隐式单调性假设”。具体而言，对于一组问题，我们在一系列预算值下进行变化（例如  $2^{-5}, 2^{-4}, 2^{-2}, 2^0$  倍的预算上界，即 vanilla CoT 的令牌开销），并记录每个点对应的准确率和平均输出令牌数。Table 8 展示了这些经验证据。可以观察到其大致符合单调性特征。结果表明一个一致的趋势：随着预算增加，准确率通常提升或趋于平稳，从而在大多数情况下证实了软单调性。