Final project report

12110213　吴成钢

1，Strong form problem:

Given f $:\overline{\Omega}\rightarrow$ R and constants q and h, find u $:\overline{\Omega}\rightarrow$ R, such that

$$u_{,xx} + f = 0 \qquad \text{on } \Omega$$

$$u(1)=q \qquad \text{at } x=1$$

$$-u_{,x}(0)=h \qquad \text{at } x=0$$

Weak form problem:

Given f, g, and h, as before. Find u ∈ & such that for all w ∈U

$$\int_0^1 w_{,x}u_{,x}dx = \int_0^1 wf\,dx + w(0)h$$

$$\&=\{u/u \in H^1, u(1) = q\}$$

$$U=\{w/w \in H^1, w(1)= 0\}$$

Galerkin formulation:

Given f, g, and h, as before. find $u^h = v^h + q^h$, where $u^h \in U^h$, such that for all $w^h \in U^h$

$$a(w^h,v^h)=(w^h,f)+w^h(0)h - a(w^h, q^h)$$

$$u^h(1)=q$$

$$w^h(1)=0$$

$$q^h(1)=q$$

2,选择的书上的元素刚度实现方式的第一种，这种元素刚度矩阵的实现方式采用了数值求积法和矩阵乘法来计算刚度矩阵。通过计算$\widetilde{D}$*B 和B^T*（$\widetilde{D}$B）来生成最终的刚度矩阵。这种方法的优点有简化了积分过程，避免了繁琐的公式推导，同时这种方法适用于不同的元素类型和不同的物理问题。缺点是在数值求积法中，随着集成点数目的增加，可能会出现数值误差的积累，导致精度下降，尤其是在形状函数或网格划分不够细致的情况下。

3,假设制造的解析解为 u(x,y)=0.5*(x^2+y^2)，该解析解梯度为 ∇u(x,y)=(∂u/∂x ，∂u/∂y)=(x,y)，网格尺寸分别为 0.1, 0.05, 0.025 计算得出 L2 Norm Errors:1.0258， 1.0784， 1.0061。H1 Norm Errors:1.4897，1.4847，1.4419。Convergence Rates for L2 Norm:-0.0722，0.1002。Convergence Rates for H1 Norm: 0.0048， 0.0422。

4，在题目问题中的几何区域具有水平对称性和垂直对称性，在圆孔远场的矩形边界上，施加了均匀拉伸应力T_x。远场拉伸应力的分布与几何对称性一致，不会破坏几何的水平对称性和垂直对称性。

在代码里的实现为：在 x=0 的对称边界，法向位移 u_x=0

```
structuralBC(model, 'Edge', edge_x0, 'XDisplacement', 0);
```

在 y=0 的对称边界，法向位移 u_y=0

```
structuralBC(model, 'Edge', edge_y0, 'YDisplacement', 0);
```

在右边界上施加均匀拉伸应力 T_x ：

```
structuralBoundaryLoad(model, 'Edge', edge_right, 'SurfaceTraction', [Tx; 0]);
```

圆孔边界的无应力条件

```
structuralBC(model, 'Edge', edge_circle, 'Constraint', 'free');
```

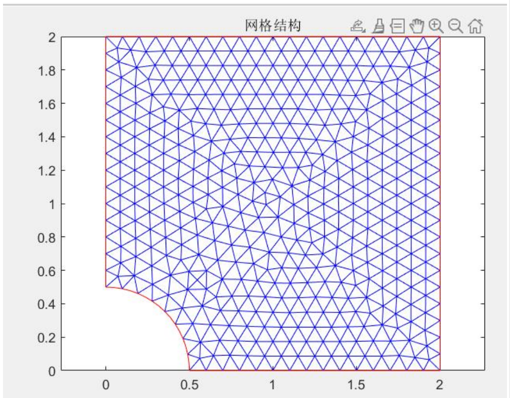
假设圆的半径为 1，矩形边长为 4，应力T_x为 1,000,000，弹性模量为 1×10^9，泊松比为 0.3

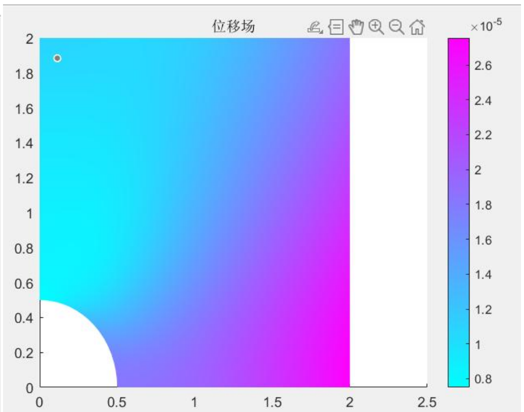
分别比较网格尺寸为 0.5，0.25，0.1

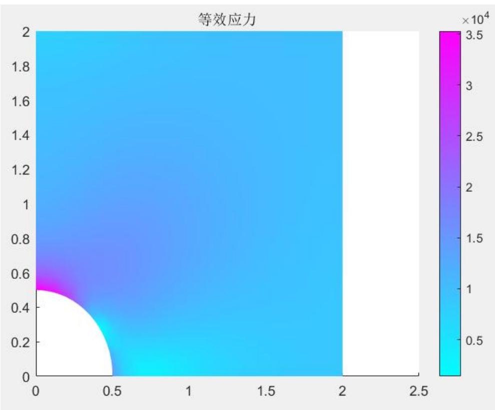
计算出应力误差为 9.4404×10^{12}， 0.8290×10^{12}， 0.6678×10^{12}

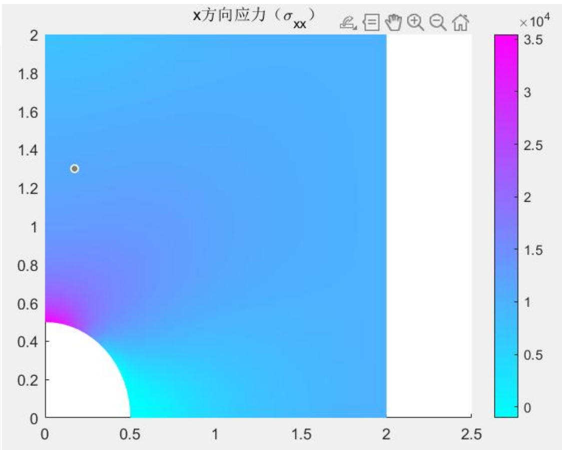
计算得出最后的收敛速度分别为 3.5093 ，0.2361

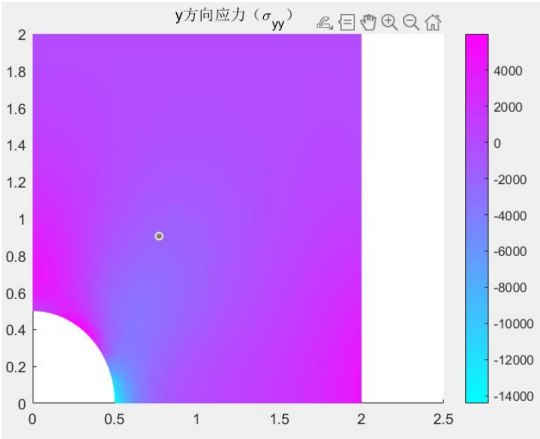
5. 代码分析得出以下图片

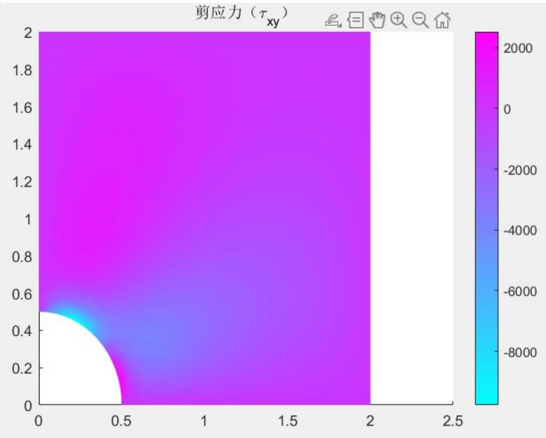












结果讨论，对结果分析可以得到到：

1. 圆孔边缘应力集中（σ_{xx} 和σ_{yy}在边缘达到最大值）。

2. 剪应力（τ_{xy}）在圆孔附近变化剧烈。

3. 模型左下角位移变化最大。应变也于左下角最大。