Δημητριάδης
Βασίλειος

20 Σελ

1. Εκθετική κατανομή με $\lambda = \frac{2}{25}$, $f_x(x) = \frac{2}{25} \cdot e^{-\frac{2}{25}x}$, $x>0$

α) $P(x \leq 24) = \int_0^{24} f_x(x)dx = 1 - \frac{1}{e^{\frac{48}{25}}} = 0.85339$

ή $F_x(24) = 1 - e^{-\frac{2}{25} \cdot 24}$

β) $F_x(x_p) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 1 - e^{-\frac{2}{25}x_p} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 3e^{\frac{2}{25}x_p} = 4 \Leftrightarrow x_p = \frac{25}{2} \ln \frac{4}{3}$

3. Κανονική κατανομή με $\mu = E(x) = 1800$ και $\sigma = 40$

α_1) $P(x<1700) = P(\frac{x-\mu}{\sigma} < \frac{-100}{40}) = P(Z < -\frac{10}{4}) = 1 - \Phi(\frac{10}{4}) = 1 - \Phi(2.5) = 0.0062$

α_2) $P(x>1900) = P(\frac{x-\mu}{\sigma} > \frac{10}{4}) = P(Z > \frac{10}{4}) = 1 - \Phi(\frac{10}{4}) =$

β) Θέλω $P(1800 - \kappa < X < 1800 + \kappa) = 0.9$, άρα:

$P(\frac{1800-\kappa-1800}{40} < Z < \frac{1800+\kappa-1800}{40}) = P(-\frac{\kappa}{40} < x < \frac{\kappa}{40}) = 2\Phi(\frac{\kappa}{40}) - 1 = 0.9 \Leftrightarrow$

$\Phi(\frac{\kappa}{40}) = 0.95 \Leftrightarrow \Phi(\frac{\kappa}{40}) = \Phi(1.65) \Leftrightarrow \frac{\kappa}{40} = 1.65 \Leftrightarrow \boxed{\kappa = 66}$

4. Κανονική κατανομή με $\mu = 80$ και $P(x<86) = 0.885$, $\sigma = ?$

Έχω: $P(x<86) = 0.885 = \Phi(1.25)$ άρα:

$P(x<86) = \Phi(1.25) \Leftrightarrow P(\frac{x-\mu}{\sigma} < \frac{6}{\sigma}) = \Phi(1.25) \Leftrightarrow \Phi(\frac{6}{\sigma}) = \Phi(1.25) \Leftrightarrow$

$\frac{6}{\sigma} = 1.25 \Leftrightarrow \boxed{\sigma = 5}$

5. Κανονική κατανομή με $\mu = 565$, $\sigma = 72$

α) $P(475 < x < 640) = P(-1.25 < Z < 1.04) = \Phi(-1.25) + \Phi(1,04) - 1 =$

$0.8944 + 0.8508 - 1 = 0,7452$

β) $\Phi(x) = 0.1 \Leftrightarrow x = \Phi^{-1}(0.1) = \Phi^{-1}(0.9) = 1.29$

Άρα θα πρέπει: $P(\kappa \leq x) = 0.1 \Leftrightarrow P(\kappa \leq x) = \Phi(1.29) \Leftrightarrow P(\frac{\kappa - 565}{72} < Z) = \Phi(1.29)$

$\Phi(\frac{\kappa-565}{72}) = \Phi(1.29) \Leftrightarrow \frac{\kappa-565}{72} = 1.29 \Leftrightarrow \kappa = 657.88$

6. Στην εκθετική κατανομή ο χρόνος ζωής είναι ανεξάρτητος από την ηλικία του αντικειμένου. Άρα το συγκεκριμένο παράδειγμα δεν ακολουθεί εκθετική κατανομή αφού από την στιγμή παραγωγής θα έπρεπε και τα καινούρια, αλλά και τα μεταχειρισμένα ανταλλακτικά να έχουν κοινό ποσοστό χρόνου ζωής.

ζ. Πρέπει να βρω το κ: $\int_0^3 \kappa(1+x)\,dx = \kappa\left[x+\frac{x^2}{2}\right]_0^3 = 1 \Leftrightarrow \boxed{\kappa = \frac{2}{15}}$

Άρα η $f_X(x)$ γίνεται:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{2}{15}(1+x), & 0<x<3 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Έτσι έχω: $Y = X^2+1 \Leftrightarrow X = \sqrt{Y+1}$

και $dx = \frac{1}{2\sqrt{y+1}}\,dy \Leftrightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{1}{2\sqrt{y+1}}$

Ισχύει ότι: $f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \cdot \left|\frac{d}{dy} g^{-1}(y)\right|$, άρα:

$$f_Y(y) = f_X(\sqrt{y+1}) \cdot \left|\frac{1}{2\sqrt{y+1}}\right| = \frac{1}{15}\left(\frac{1}{\sqrt{y+1}}+1\right)$$

8. • $F(\mu+s)\% = P(X \leq \mu+s)\% = P(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq 1) = \Phi(1)\%$

• $F(\mu-s)\% = P(\frac{X-\mu}{s} \leq -1)\% = P(Z \leq -1)\% = (1-\Phi(1))\%$

• $F(\mu)\% = P(\frac{X-\mu}{s} < 0)\% = \Phi(0)\%$

• $F(\mu+2s)\% = P(\frac{X-\mu}{s} \leq 2)\% = \Phi(2)\%$