Σεπτέμβριος 2015 ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Θέμα 1ο

$\underbrace{(2x\cos y+3x^2y)}_{P}dx+\underbrace{(x^3-x^2\sin y-y)}_{Q}dy=0$, αν $y(0)=2$

$P_y=2x(\cos y)'+3x^2(y)'=-2x\sin y+3x^2$ } $P_y=Q_x$ Άρα είναι

$Q_x=3x^2-2x\sin y$ } ακριβής

Τότε:

- $f_x=P \Leftrightarrow \int f_x dx=\int P dx \Leftrightarrow f(x,y)=\int 2x\cos y+3x^2y\,dx \Leftrightarrow$

  $f(x,y)=x^2\cos y+x^3y+c_1(y)$

- $f_y=Q \Leftrightarrow (x^2\cos y+x^3y+c_1(y))'_y=x^3-x^2\sin y-y \Leftrightarrow$

  $-x^2\sin y+x^3+c_1'(y)=x^3-x^2\sin y-y \Leftrightarrow c_1'(y)=-y$

Άρα $c_1(y)=\int -y\,dy=-\frac{y^2}{2}+c_2$

Τελικά $f(x,y)=x^2\cos y+x^3y-\frac{y^2}{2}+c_2$.

Όμως έχω και $y(0)=2$, Άρα:

$f(x,y)=2 \Leftrightarrow x^2\cos 0+x^3\cdot 0-\frac{0^2}{2}+c_2=2 \Leftrightarrow \boxed{c_2=2-x^2}$

Τελικά: $f(x,y)=x^2\cos y+x^3y-\frac{y^2}{2}+2-x^2$

Θέμα 2ο

$(x^2-2y^2)y'=xy$, αν $y(1)=0$ ⇝ Μη Ακριβής Δ.Ε

↳ $(x^2-2y^2)\frac{dy}{dx}=xy \Leftrightarrow (x^2-2y^2)dy=xy\,dx \Leftrightarrow \underbrace{xy}_{P}dx+\underbrace{(-x^2+2y^2)}_{Q}dy=0$

$P_y=x\neq Q_x=-2x$

Πρέπει να βρω μ τω: $(\mu P dx+(\mu Q)dy=0$.

Παρατηρώ ότι $\mu=\mu(y)$: $\frac{Q_x-P_y}{Q}=\frac{-2x-x}{xy}=-\frac{3}{y}$

Άρα $\frac{\mu'}{\mu}=-\frac{3}{y} \Leftrightarrow \ln\mu=-3\cdot\ln y \Leftrightarrow \ln\mu=\ln y^{-3} \Leftrightarrow \boxed{\mu=y^{-3}}$

Τελικά έχω: $\boxed{(xy^{-2})dx+(-x^2y^{-3}+2y^{-1})dy=0}$

↳ Ακριβής Δ.Ε αφού $P_y=-2xy^{-3}=Q_x$

Τότε:

- $f_x=P \Leftrightarrow f(x,y)=\int xy^{-2}dx=\frac{x^2y^{-2}}{2}+c_1(y)$
- $f_y=Q \Leftrightarrow \left(\frac{x^2y^{-2}}{2}+c_1(y)\right)'_y=-x^2y^{-3}+2y^{-1} \Leftrightarrow -x^2y^{-3}+c_1'(y)=-x^2y^{-3}+2y^{-1}$

  $\Leftrightarrow c_1'(y)=2y^{-1} \Leftrightarrow c_1(y)=\int 2y^{-1}dy \Leftrightarrow c_1(y)=\int 2\cdot\frac{1}{y}dy=2\ln y+c_2$

Άρα $f(x,y)=\frac{x^2y^{-2}}{2}+2\ln y+c_2$, όμως $y(1)=0$ άρα:

$0=\frac{x^2}{2}+2\ln 1+c_2 \Leftrightarrow c_2=-\frac{x^2}{2}$

Τελικά: $f(x,y)=\frac{x^2y^{-2}}{2}+2\ln y-\frac{x^2}{2}$

Θέμα 3ο

- $y'' + 9y = 2e^{x}$ → Γραμμική 2ης Τάξης

↳ $p^2 + 9 = 0 \iff p = \pm 3i$

Άρα $y_1 = e^{3i}$, $y_2 = e^{-3i}$, όμως; με τύπο Euler:

$y_1 = \cos(3x) + i\sin(3x)$, $y_2 = \cos(3x) - i\sin(3x)$

$y_3 = \frac{y_1 + y_2}{2} = \cos(3x)$, $y_4 = \frac{y_1 - y_2}{2i} = \sin(3x)$

Τελικά $\boxed{y_0 = c_3\cos(3x) + c_4\sin(3x)}$

Για y_p:

Έχω $2e^{x}$, δηλαδή $\kappa = 1$, άρα $y_p = \lambda e^{x} = y_p' = y_p''$.

Έτσι: $y_p'' + 9y_p = 2e^{x} \iff \lambda e^{x} + 9\lambda e^{x} = 2e^{x} \iff 10\lambda e^{x} = 2e^{x} \iff \lambda = \frac{1}{5}$

Τελικά $y = y_p + y_0 = \frac{1}{5}e^{x} + c_3\cos(3x) + c_4\sin(3x)$

- $x^2y'' + 3xy' + 2y = x^2 + x$, $x > 0$ ⇝ Euler - Cauchy

Θέτω $x = e^{t} \iff t = \ln x$ ↭ $ay_t'' + (b-a)y_t' + cy_0 = R(e^{t})$

Άρα: $\boxed{y_t'' + 2y_t' + 2y = e^{2t} + e^{t}}$

Για y_0: $p^2 + 2p + 2 = 0$

↳ $\Delta = 4 - 8 = -4$

Άρα $p_{1,2} = \frac{-2 \pm i\sqrt{4}}{2} = -1 \pm i$

Άρα $y_1 = e^{(-1+i)t}c_1$, $y_2 = e^{(-1-i)t}\cdot c_2$

$y_1 = e^{-t}e^{it}c_1$, $y_2 = e^{-t}e^{-it}\cdot c_2$

Απο τύπο Euler καταλήγω στα ακόλουθα:

$y_0 = c_3e^{-t}\cdot\cos(t) + c_4e^{-t}\cdot\sin(t)$

Για y_p, $\kappa = 2$ ή $1 \neq -1 \pm i$, Άρα Θέτω $y_{p_1} = \lambda e^{t} = y_{p_1}' = y_{p_1}''$

$y_{p_2} = \lambda e^{2t} = y_{p_2}' = y_{p_2}''$

~~Τελικά~~ Έτσι: $\lambda e^{t} + 2\lambda e^{t} + 2\lambda e^{t} = e^{t} \iff \lambda = \frac{1}{5}$

Άρα $y_{p_1} = \frac{1}{5}e^{t}$, $y_{p_2} = \frac{1}{5}e^{2t}$

Τελικά $y = \frac{1}{5}e^{t} + \frac{1}{5}e^{2t} + c_3e^{-t}\cos t + c_4e^{-t}\sin t$

$y = \frac{1}{5}x + \frac{1}{5}x^2 + c_3x^{-1}\cos(\ln x) + c_4x^{-1}\sin(\ln x)$

$y = \frac{1}{5}(x + x^2) + c_3\frac{\cos(\ln x)}{x} + c_4\frac{\sin\ln(x)}{x}$

Θέμα 4ο

i) $L^{-1}\left(\frac{10}{s(s^2+5s+4)}\right)$

Έχω: $\frac{10}{s(s^2+5s+4)} = \frac{10}{s(s+1)(s+4)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{\Gamma}{s+4} =$

$\frac{A(s+1)(s+4)}{s(s+1)(s+4)} + \frac{Bs(s+4)}{s(s+1)(s+4)} + \frac{\Gamma s(s+1)}{s(s+1)(s+4)} =$

$\frac{As^2+5As+4A+Bs^2+4Bs+\Gamma s^2+\Gamma s}{s(s+1)(s+4)} = \frac{s^2(A+B+\Gamma)+s(5A+4B+\Gamma)+(4A)}{s(s+1)(s+4)}$

Άρα: $\left.\begin{array}{l} A+B+\Gamma=0 \\ 5A+4B+\Gamma=0 \\ 4A=10 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} B=-\frac{10}{4}-\Gamma \\ 4B+\frac{50}{4}+\Gamma=0 \\ A=\frac{10}{4} \end{array}\right\} -\frac{40}{4}-4\Gamma+\frac{50}{4}+\Gamma=0 \Big\} 3\Gamma=\frac{10}{4} \Big\} \begin{array}{l} B=-\frac{40}{12}=\frac{10}{3} \\ \Gamma=\frac{10}{12}=\frac{5}{6} \\ A=\frac{10}{4}=\frac{5}{2} \end{array}$

Τελικά $L^{-1}\left(\frac{10}{s(s^2+5s+4)}\right) = L^{-1}\left(\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{s}\right) + L^{-1}\left(\frac{10}{3}\cdot\frac{1}{s+1}\right) + L^{-1}\left(\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{s+4}\right) =$

$= \frac{5}{2}L^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) + \frac{10}{3}L^{-1}\left(\frac{1}{s+1}\right) + \frac{5}{6}L^{-1}\left(\frac{1}{s+4}\right) =$

$= \frac{5}{2} + \frac{10}{3}e^{-x} + \frac{5}{6}e^{-4x}$

ii) $y''+5y'+4y=10$, όπου $y(0)=y'(0)=0$

$\to L(y'')+5L(y')+4L(y)=L(10) \Leftrightarrow$

$s^2Y - sy(0) - y'(0) + 5(sY-y(0)) + 4Y = \frac{10}{s} \Leftrightarrow$

$s^2Y+5sY+4Y=\frac{10}{s} \Leftrightarrow Y(s^2+5s+4)=\frac{10}{s} \Leftrightarrow Y=\frac{10}{s(s^2+5s+4)}$

Όμως $L^{-1}(Y)=L^{-1}\left(\frac{10}{s(s^2+5s+4)}\right) \overset{\Theta.4\,i)}{\Leftrightarrow} y=\frac{5}{2}+\frac{10}{3}e^{-x}+\frac{5}{6}e^{-4x}$