Δημητριάδης Βασίλειος
2116104//00721

ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Άσκηση 1η

$y[n] = x^2[n-2]$

a. Έστω μία είσοδος $x_3[n] = ax_1[n] + bx_2[n]$, τότε:

$$y_3[n] = x_3^2[n-2] = (ax_1[n-2] + bx_2[n-2])^2$$
$$= a^2x_1^2[n-2] + abx_1[n-2]x_2[n-2] + b^2x_2^2[n-2]$$
$$\neq ax_1^2[n-2] + bx_2^2[n-2]$$

Άρα το σύστημα δεν είναι γραμμικό.

b. Αρκεί για είσοδο $x_2[n]=x_1[n-n_0]$ να έχω έξοδο $y_2[n]=y_1[n-n_0]$.

Έχω:

$$y_2[n] = x_2^2[n-2] = x_1^2[n-2-n_0] = x_1^2[(n-n_0)-2] = y_1[n-n_0]$$

Άρα το σύστημα είναι χρονικά ανεξάρτητο.

Άσκηση 2

Το σύστημα δεν αντιστρέφεται, αφού δύο σήματα τα οποία διαφέρουν κατά μία σταθερά θα έχουν την ίδια παράγωγο. Δηλαδή:

Έστω $x_1(t) = t + c_1$ και $x_2(t) = t + c_2$, τότε:

$$\left.\begin{aligned} &\bullet\ y_1(t) = \frac{dx_1(t)}{dt} = (t+c_1)' = 1 \\ &\bullet\ y_2(t) = \frac{dx_2(t)}{dt} = (t+c_2)' = 1 \end{aligned}\right\} y_1(t) = y_2(t) \quad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Άσκηση 3

Έχω $x(t) = u(t-3) - u(t-5)$ και $h(t) = e^{-3t}u(t)$

a. Ισχύει ότι:

$$u(t-3) = \begin{cases} 1, & t \geq 3 \\ 0, & t<3 \end{cases}, \quad u(t-5) = \begin{cases} 1, & t \geq 5 \\ 0, & t<5 \end{cases}, \quad \text{Άρα } x(t) = \begin{cases} 1, & 3 \leq t \leq 5 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Συνεπώς:

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_3^5 h(t-\tau)d\tau = \int_3^5 e^{-3(t-\tau)}u(t-\tau)d\tau =$$

$$= e^{-3t}\int_3^5 e^{3\tau}u(t-\tau)d\tau = e^{-3t}\left[\frac{e^{15}u(t-5) - e^{9}u(t-3)}{3}\right]$$

b. Ισχύει ότι: $\frac{dx(t)}{dt} = \delta(t-3) - \delta(t-5)$

Άρα:

$$y(x) = (\delta(t-3) - \delta(t-5)) * e^{-3t}u(t) = (\delta(t-3) * e^{-3t}u(t)) - (\delta(t-5) * e^{-3t}u(t)) =$$
$$= e^{-3(t-3)}u(t-3) - e^{-3(t-5)}u(t-5) = e^{-3t}[e^{15}u(t-5) - e^{9}u(t-3)]$$

c. Δηλαδή $y'(x) = -3y(x)$ ή $y(x) = -\frac{1}{3}y'(x)$

Άσκηση 4

Έχω $h[n] = 3^n u[20-n]$ ⤳ Φραγμένη είσοδος.

Αρκεί $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < c \quad \forall n$:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 3^n u[20-n] = \sum_{n=-\infty}^{20} 3^n \stackrel{n=-n}{=} \sum_{n=-20}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{-20}}{1-1/3} = c \neq \pm\infty$$

Άρα είναι ευσταθές.

Άσκηση 5

Ισχύει ότι:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega t}$$
$$x(t-1) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega(t-1)} \quad (I)$$
$$x(1-t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega(1-t)} \stackrel{k=-k}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega(t-1)} \quad (II)$$

Άρα έχω:

$$y(t) = (I) + (II) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (a_k + a_{-k}) e^{jk\omega(t-1)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (a_k + a_{-k}) e^{-jk\omega} \cdot e^{jk\omega t}$$

Τελικά έχω $\sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k e^{jk\varphi t}$, όπου $b_k = (a_k + a_{-k}) e^{-jk\omega}$ και $\omega = \varphi$

Άσκηση 6

Ισχύει ότι αν $\left.\begin{array}{l} x_1[n] \to a_k \\ y[n] \to b_k \end{array}\right\}$ τότε: $x[n] \cdot y[n] = \sum_{\ell=0}^{N-1} a_\ell b_{k-\ell} = c_k$

Άρα:

$$\left.\begin{array}{l}
\bullet\ c_0 = \sum_{\ell=0}^{3} a_\ell b_{0-\ell} = a_0 b_0 + a_1 b_{-1} + a_2 b_{-2} + a_3 b_{-3} = 1+2+2+1 = 6 \\
\bullet\ c_1 = \sum_{\ell=0}^{3} a_\ell b_{1-\ell} = a_0 b_1 + a_1 b_0 + a_2 b_{-1} + a_3 b_{-2} = 6 \\
\bullet\ c_2 = \sum_{\ell=0}^{3} a_\ell b_{2-\ell} = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 + a_3 b_{-1} = 6 \\
\bullet\ c_3 = \sum_{\ell=0}^{3} a_\ell b_{3-\ell} = a_0 b_3 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_0 = 6
\end{array}\right\} \text{Αφού} \quad
\begin{array}{ll}
a_0 = 1 & b_0 = 1 = b_{-4} \\
a_1 = 2 & b_1 = 1 = b_{-3} \\
a_2 = 2 & b_2 = 1 = b_{-2} \\
a_3 = 1 & b_3 = 1 = b_{-1}
\end{array}$$

Λυση 7

Εχω $H(j\Omega) = \frac{j\Omega+4}{6-\Omega^2+5j\Omega} = \frac{(j\Omega)+4}{6+(j\Omega)^2+5(j\Omega)}$ (I)

a. $\frac{d^2y(t)}{dt} + 5\frac{dy(t)}{dt} + 6y(t) = \frac{dx(t)}{t} + 4x(t)$

b. Θέτω $(j\Omega) = \omega$ και η (I) γίνεται $H(\omega) = \frac{\omega+4}{6+\omega^2+5\omega} = \frac{\omega+4}{(\omega+2)(\omega+3)}$

Έχω:

$$\frac{\omega+4}{(\omega+2)(\omega+3)} = \frac{A}{\omega+2} + \frac{B}{\omega+3} = \frac{A\omega+3A+B\omega+2B}{(\omega+2)(\omega+3)} = \frac{(A+B)\omega+(3A+2B)}{(\omega+2)(\omega+3)}$$

Πρέπει: $\left.\begin{array}{l} A+B=1 \\ 3A+2B=4 \end{array}\right\} \begin{array}{l} A=2 \\ B=-1 \end{array}$ Άρα $H(j\omega) = \frac{2}{j\omega+2} - \frac{1}{j\omega+3}$

Τελικά $h(t) = 2e^{-2t}u(t) - e^{-3t}$

c. Έχω $x(t) = e^{-4t}u(t) - te^{-4t}u(t)$

Άρα:

$$x(t) * h(t) = X(j\omega)Y(j\omega) = \left(\frac{1}{4+j\omega} - \frac{1}{(4+j\omega)^2}\right)\cdot\left(\frac{j\omega+4}{6-\omega^2+5j\omega}\right) =$$

$$= \left(\frac{3+j\omega}{4+j\omega}\right)\left(\frac{4+j\omega}{6+(j\omega)^2+(j\omega)}\right) = \frac{(j\omega+3)(j\omega+4)}{(j\omega+2)(j\omega+3)(j\omega+4)} = \frac{1}{j\omega+2} = e^{-2t}u(t)$$