Θεωρία

ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

1η Τάξη: 1) Δ.Ε χωριζομ. μεταβλ. • $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$

2) Ομογενείς • $y' = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$

3) Γραμμικές • $y' + P(x)y = Q(x)$

4) Bernoulli • $y' + P(x)y + Q(x)y^a = 0$

5) Ricatti • $y' + P(x)y^2 + Q(x)y + R(x) = 0$

6) Ακριβής • $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ με $P_y = Q_x$

7) Μη Ακριβής • Όχι ακριβής $\to \mu P dx + \mu Q dy = 0$

2η Τάξη: 1) Γραμμικές • $ay'' + by' + cy = R(x)$ $\xrightarrow{=0}$ Ομογενής, $\xrightarrow{\neq 0}$ Μη ομογενής

2) Euler-Cauchy • $ax^2y'' + bxy' + cy = R(x)$

3) Ανώτερης τάξης που ανάγονται σε 1ης τάξης

1η Τάξη

Χωριζομένων: $\to P(x)dx = Q(y)dy \to \int P dx = \int Q dy$

Πχ: $y' - 2yy' = -e^x \Leftrightarrow (1-2y)dy = -e^x dx \Leftrightarrow y - y^2 = e^x + c$

Ομογενής: $\to$ Έλεγχος $\to$ Διαίρεση με κατάλληλη δύναμη $\to$ Θ. $u = \frac{y}{x}$

Πχ: $y' = \frac{y+x}{x} \to f(\lambda x, \lambda y) = f(x,y) \to y' = \frac{y}{x} + 1 = f(\frac{y}{x}) = f(u) = \ldots$

Γραμμικές: $\to$ Θ. $y = \varphi(x) \cdot Y(x)$ όπου $\varphi = e^{-\int P dx}$, $Y = \int \frac{Q}{\varphi} dx$

Πχ: $(1+x^2)y' + 2xy = 1 \to \varphi(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $Y = x + c \to y = \frac{x+c}{1+x^2}$

Bernoulli: Θ. $u = y^{1-a} \to$ Γραμμ.

Π.χ $y' - y - e^x\sqrt{y} = 0 \Leftrightarrow y' - y - e^x y^{1/2} = 0 \Leftrightarrow u - \frac{1}{2}u = \frac{1}{2}e^x \ldots$

Ricatti: Θ. $y = Y + h \to Y' + (2Ph + Q)Y + PY^2 = 0$

Ακριβής: $\to$ Έλεγχος $P_y = Q_x \to \int f_x dx = \int P dx$ && $f_y = Q$

Π.χ: $(\underbrace{x - 2xy - 5}_{P})dx - (\underbrace{x^2 + 3y - 2}_{Q})dy = 0 \Leftrightarrow \ldots$ $P_y = -2x = Q_x$

$\int f_x dx = \int P dx \to \frac{x^2}{2} - x^2y - 5x + c_1(y) = f(x,y)$ && $g(y) = -\frac{3y^2}{2} + 2y + c_2$

Μη ακριβής: Ζητάμε μ τ.ω $(\mu P)dx + (\mu Q)dy = 0$: ακριβής

Αν $\mu=\mu(x)$: $\frac{\mu'}{\mu} = \frac{P_y - Q_x}{Q} \rightsquigarrow e^{\int \frac{P_y - Q_x}{Q} dx}$

2ης* Τάξης

* ↳ $\mu=\mu(y)$: $\frac{\mu'}{\mu} = \frac{Q_x - P_y}{P}$ * ↳ $\mu=\mu(xy)=\mu(w)$: $\frac{\mu'}{\mu} = \frac{Q_x - P_y}{xP - yQ}$

Γραμμικές ομογενής: $\rightsquigarrow ap^2 + bp + c = 0$

↳ Αν $p_1, p_2 \rightsquigarrow y_0 = c_1 e^{p_1 x} + c_2 e^{p_2 x}$

↳ p διπλή $\rightsquigarrow y_0 = c_1 e^{px} + c_2 x e^{px}$

↳ Μιγαδικές $\rightsquigarrow e^{\pm i\varphi} = \cos\varphi \pm i \sin\varphi$, όπου $y_{3/4} = \frac{y_1 \pm y_2}{2}$

με $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ και $c_3, c_4 \in \mathbb{R}$

Μη ομογενής Γραμμ.:

↳ Αν $R(x) = e^{\kappa x}$ κ $\xrightarrow{\neq p_1,p_2}$ Θ. $y_p = \lambda e^{\kappa x}$, $\xrightarrow{=p_1,p_2}$ Θ. $y_p = \lambda x e^{\kappa x}$, $\xrightarrow{\text{διπλή}}$ Θ. $y_p = \lambda x^2 e^{\kappa x}$

↳ $R(x) = a_n x^n + \dots + a_0 \rightarrow$ Αν $c \neq 0$: $y_p = b_n x^n + \dots + b_0$

↳ $c = 0$: $y_p = x(b_n x^n + \dots + b_0)$

↳ $R(x) =$ τριγων/κη $\rightsquigarrow$ Αν $R(x) \neq$ λύση: $y_p = s \cdot \sin(nx) + t \sin(nx)$

$=$ λυση: $y_p = x(s \cdot \sin(nx) + t \sin(nx))$

↳ $R(x) = R_1(x) + R_2(x) + \dots + R_n(x) \rightsquigarrow$ λύνω $y_{p_1}, y_{p_2}, y_{p_n}$ και $y_p = y_{p_1} + \dots + y_{p_n}$

Euler-Cauchy: Θέτω $x = e^t \Leftrightarrow t = \ln x \longleftrightarrow a y''_t + (b-a) y'_t + c y = R(e^t)$

Ανωτ. Τάξης $\rightsquigarrow$ 1ης:

- $y'' = f(x, y')$, απουσιάζει το y από την $f \rightsquigarrow$ Θ. $u = y'$
- Αμεταβλ. όταν αλλάζω $y \rightsquigarrow \lambda y$: Θ. $y = e^Y$
- Δεν εμφανίζεται η ανεξ. μεταβλ. x : Θ. $y' = u(y)$

Ορίζουσα Wronski:

$$\begin{vmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ y_1' & & \\ \vdots & \dots & y_n' \\ y_1^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

Για τις Γραμμικές 2ης Τάξης ισχύει:

↳ $y_2 = y_1 \int \frac{W}{y_1^2} dx$, όπου $W = e^{-\int P dx}$

$y_p = y_2 \int \frac{R y_1}{W} dx - y_1 \int \frac{R y_2}{W} dx$, όπου $W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$

↳ Κανονική μορφή $Y'' + AY = 0$

όπου $A = -\frac{1}{2} P' - \frac{1}{4} P^2 + Q$