# ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

23/04/18

## Μιγαδικοί αριθμοί

$i^2=-1,\ i=\sqrt{-1}$

$z=a+ib,\ \operatorname{Re}\{z\}=a,\ \operatorname{Im}\{z\}=b$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ:

$(a+bi)(\gamma+\delta i)=a\gamma+i(a\delta+b\gamma)-b\delta$

$\bar{z}=a-ib$

$|z|=\sqrt{a^2+b^2},\ z\cdot\bar{z}=|z|^2$

## Πολικές συντεταγμένες

$z=a+ib=(a,b)\rightsquigarrow(r,\theta)$

όπου:

- $r=|z|$
- $\cos\theta=\frac{a}{r}$, $\sin\theta=\frac{b}{r}$ } $\theta$ κοινό.

$\hookrightarrow z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$

## Ισότητες!

$z_1\cdot z_2=p_1p_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)]$

$z^\nu=p[\cos(\nu\theta)+i\sin(\nu\theta)]$

$z_k=\sqrt[n]{p}\cdot\left[\cos\left(\frac{2k\pi+\theta}{n}\right)+i\sin\left(\frac{2k\pi+\theta}{n}\right)\right]$

Euler: $e^{bi}=\cos b+i\sin b$

---

- Αναλογικά - Συνεχή Σήματα.
- Διακριτά Σήματα.

## Μετασχηματισμοί Σημάτων

Ανεξ. Μεταβλητή: $x(t)\rightsquigarrow x(at+b)$

↳ Πλάτους: $x(t)\rightsquigarrow rx(t)+q$

↳ Χρονική μετάθ.: $x(t)\rightsquigarrow x(t-t_0)$

↳ Ανάκλαση: $x(t)\rightsquigarrow x(-t)$

↳ Χλιμάκωση: $x(t)\rightsquigarrow x(at)$

↳ $|a|>1\rightsquigarrow$ compress

$|a|<1\rightsquigarrow$ decompress

## ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΣΗΜΑΤΩΝ

↳ Περασμένα ή Απειρη διάρκεια

↳ $t_1,t_2\in\mathbb{R}$: $x(t)=0,\ \forall t<t_1$ ή $\forall t>t_2$

↳ Δεξιόπλευρο ή Αριστερόπλευρο

↳ Άρτια και περιττά,

↳ $x(t)=x(-t)$ ↳ $x(t)=-x(-t)$

↳ $x(t)=\underbrace{\frac{1}{2}(x(t)+x(-t))}_{\text{even}}+\underbrace{\frac{1}{2}(x(t)-x(-t))}_{\text{odd}}$

↳ Ενέργεια και Ισχύς.

- $E_\infty=\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|^2dt$
- $E=\int_{t_1}^{t_2}|x(t)|^2dt$ ή $E=\sum_{n=n_1}^{n_2}|x[n]|^2$
- $P=\frac{1}{t_2-t_1}E$ ή $P=\frac{1}{n_2-n_1+1}\cdot E$

↳ Περιοδικά:

$x(t)=x(t+T)=x(t+mT)$

↳ Βασική περίοδος ↳ Σταθερό σήμα είναι περιοδικό χωρίς βασική περίοδο.

---

## Ημιτονοειδές σήμα:

$x(t)=A\cos(\Omega t+\theta)$

↳ πλάτος, ↳ περίοδος, ↳ χλιμάκωση

## Άθροισμα σημάτων

↳ Περίοδος το ΕΚΠ των σημάτων.

Σοβ: $x[n]=(-1)^n=\cos(\pi\cdot n)$

---

## Μοναδιαίος παλμός

$\delta[n]=\begin{cases}1, & n=0\\ 0, & n\neq0\end{cases}$

## Μοναδιαίο Βήμα

$u[n]=\begin{cases}1, & n\geq0\\ 0, & n<0\end{cases}$

Ισχύει ότι:

- $\delta[n]=u[n]-u[n-1]$ και $\delta(t)=\frac{du(t)}{dt}$
- $u[n]=\sum_{k=0}^{+\infty}\delta[n-k]$ και $u(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-\tau_0)d\tau$

---

Ισχύει ότι: $x[n]\cdot\delta[n]=x[0]\cdot\delta[n]$ και $x(t)\cdot\delta(t)=x(0)\cdot\delta(t)$

$x[n]\cdot\delta[n-n_0]=x[n_0]\cdot\delta[n-n_0]$ $\quad x(t)\cdot\delta(t-t_0)=x(t_0)\cdot\delta(t-t_0)$

ΙΔΙΟΤΗΤΑ: $x[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]\cdot\delta[n-k]$

$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\,\delta(t-\tau)d\tau$

## Συνάρτηση Δέλτα

$\delta_\Delta(t)=\begin{cases}\frac{1}{\Delta}, & 0\leq t\leq\Delta\\ 0, & \text{αλλού}\end{cases}$

$\delta_\Delta[n]=\begin{cases}\frac{1}{\Delta}=1, & n=0\\ 0, & n\neq0\end{cases}\}=\delta[n]$

---

## Μοναδιαίο σταθερό

$u^{\pm}[n]=1\ \forall n$

## Μοναδιαία κλίση

$u_r[n]=\begin{cases}n, & n\geq0\\ 0, & n<0\end{cases}$

## Μοναδιαίο εναλλασσόμενο

$u_e[n]=\begin{cases}(-1)^n, & n\geq0\\ 0, & n<0\end{cases}$

## Μέγιστος συχνότητας

$u_e[n]=(-1)^n\ \forall n$

---

## Συνάρτηση προσήμου

$\operatorname{sgn}(t)=\begin{cases}1, & t>0\\ 0, & t=0\\ -1, & t<0\end{cases}$

## Τετραγωνικός παλμός

$\operatorname{rect}(t)=\begin{cases}1, & |t|<1/2\\ 0, & \text{αλλού}\end{cases}$

## Τριγωνικός παλμός

$\operatorname{trig}(t)=\begin{cases}1-|t|, & |t|\leq1\\ 0, & \text{αλλού}\end{cases}$

## Συνάρτηση Sinc

$x(t)=\frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$

---

## Μιγαδικά εκθετικά:

$x(t)=ce^{at}$

↳ Αν $a\in\mathbb{R}$, απλό εκθ.

↳ Αν $c=1,\ a\in\mathbb{C}$: $x(t)=e^{j\Omega_0 t}\rightsquigarrow$ Περιοδικό σήμα $(T_0=\frac{2\pi}{\Omega_0})$

## Ημιτονοειδή:

↳ $x(t)=A\cos(\Omega_0t+\theta)$

Euler: $e^{j\Omega_0t}=\cos(\Omega_0t)+j\sin(\Omega_0t)$

} $x(t)=A\cdot\operatorname{Re}\{e^{j\Omega_0t+\theta}\}$

↳Αν $c, a \in \mathbb{C}$:
$c \to |c|e^{j\theta}$, $a \to r + j\Omega_0$ $\Big\} x(t) = |c|e^{j\theta}e^{(r+j\Omega_0)t} = \dots = |c|e^{rt}\cos(\Omega_0 t+\theta) + j|c|e^{rt}\sin(\Omega_0 t+\theta)$

Στον διακριτό χρόνο:
$c \to |c|e^{j\theta}$, $a \to |a|e^{j\omega_0}$ $\Big\} x[n] = |c||a|^n e^{j(\omega_0 n+\theta)} = |c||a|^n\cos(\omega_0 n+\theta) + j|c||a|^n\sin(\omega_0 n+\theta)$

Ισχύει ότι: Συνεχής Χρόνος:
1. $\Omega_0 \uparrow \to$ αυξ. ταλαντώσεις
2. $T_0 = \frac{2\pi}{|\Omega_0|} \to$ πάντα περιοδικό

Διακριτός Χρόνος:
↳High Frequency στο $\pm\pi$
↳Low Frequency στο $0, 2\pi$

---

Αρμονικές: $\varphi_k(t) = e^{jk\Omega_0 t}$, $k \in \mathbb{Z}$, $T = \frac{T_0}{|k|}$ και $\varphi_k[n] = e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$, $k \in \mathbb{Z}$, $N \to$ διαφορετικές αρμονικές

---

Ιδιότητες Συστημάτων (I):
↳Μνήμη ή όχι: Εξαρτάται η έξοδος από μελλοντικές/παρελθοντικές τιμές;
↳Αιτιατό: Εξάρτηση της εξόδου μόνο από παρελθοντικές ή παρούσες τιμές.
↳Αντιστρεψιμότητα: Διαφορετικές είσοδοι $\rightsquigarrow$ Διαφορετικές έξοδοι

---

Συνέλιξη: $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\cdot h[n-k] = x[n] * h[n]$, με ουδέτερο στοιχείο το $\delta[n]$
↳Κρουστική Απόκριση
$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\,h(t-\tau)\,d\tau = x(t) * h(t)$, με ουδέτερο στοιχείο το $\delta(t)$

Ιδιότητες:
↳Αντιμεταθετικότητα: $x[n] * h[n] = h[n] * x[n]$
↳Επιμεριστικότητα: $x[n] * (h_1[n] + h_2[n]) = x[n] * h_1[n] + x[n] * h_2[n]$
↳Προσεταιριστικότητα: $x[n] * (h_1[n] * h_2[n]) = (x_1[n] * h_1[n]) * h_2[n]$
↳Γραμμικότητα: $x_1[n] * (c_1 h_1[n] + c_2 h_2[n]) = c_1 x[n] h_1[n] + c_2 x[n] h_2[n]$
↳Ουδέτερο στοιχείο $x[n] * \delta[n] = x[n]$
↳Μετατόπιση: $x[n] * \delta[n-n_0] = x[n-n_0]$

---

Ιδιότητες Συστημάτων (II):
↳Ευστάθεια: Όταν για φραγμένη είσοδο έχω φραγμένη έξοδο (BIBO)
↳Αν $|x(t)| \le B_x, \forall t \xrightarrow{\text{συν}} |y(t)| \le B_y$
↳Χρονικά αναλλοίωτα: Αν $x(t) \to y(t)$ τότε $x(t-t_0) \to y(t-t_0)$
↳Γραμμικότητα: Αν $x[n] = a x_1[n] + b x_2[n]$ τότε $y[n] = a y_1[n] + b y_2[n]$
↳Γενικά: $\left(\sum_k a_k x_k[n]\right) \to \left(\sum_k a_k y_k[n]\right)$

---

Fourier: Εξίσωση Ανάλυσης: $a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk\Omega_0 t}dt$ ‖ Εξίσωση σύνθεσης: $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\Omega_0 t}$

---

Συνθήκες Dirichlet: Έλεγχος ύπαρξης σειράς Fourier.
- $\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|dt < \infty$
- Bounded variation
- Finite number of discontinuities

---

Ιδιότητες Σ. Fourier: $\rightsquigarrow x(t) \xrightarrow{\text{F.S}} a_k$, $y(t) \xrightarrow{\text{F.S}} b_k$, με περίοδο $T$,
↳Γραμμικότητα: $Ax(t) + By(t) \xrightarrow{\text{F.S}} c_k = Aa_k + Bb_k$
↳Χρονική ολίσθηση: $x(t-t_0) \xrightarrow{\text{F.S}} e^{-j\frac{2\pi}{T}t_0 k}\cdot a_k$
↳Χρονική ανάπλαση: $x(t) \xrightarrow{\text{F.S}} a_k$ τότε $x(-t) \xrightarrow{\text{F.S}} a_{-k}$
↳Χρονική κλιμάκωση: $x(at) = \sum a_k e^{jka\Omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk(a\frac{2\pi}{T})t}$
↳Πολλαπλασιασμός: $x(t)\cdot y(t) \xrightarrow{k=-\infty} a_k * b_k$
↳Συνέλιξη: $x(t) * y(t) \longrightarrow a_k \cdot b_k \cdot T$
↳Συζυγία/Συμμετρία: $x^*(t) \xrightarrow{\text{F.S}} a_{-k}^*$. Αν $x(t) \in \mathbb{R}\ \forall t$ τότε $a_{-k} = a_k^*$, $|a_k| = |a_{-k}|$
↳Parsenal (ΑΔΤ): $\frac{1}{T}\int_T |x(t)^2|dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty}|a_k|^2$
↳Παραγώγιση: $\frac{dx(t)}{dt} \xrightarrow{\text{F.S}} jk\Omega_0 a_k = jk\frac{2\pi}{T}a_k$

---

Μ/Σ Fourier: $X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\Omega t}dt$, Αντίστροφος Μ/Σ: $x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\Omega)e^{j\Omega t}d\Omega$

ΣΗΜΑΤΑ Κ' ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ 27/04/18

**Ιδιότητες Μ.Φ:** Αν $x(t) \xleftrightarrow{\text{Μ.Φ}} X(j\omega)$, και $y(t) \xleftrightarrow{\text{Μ.Φ}} Y(j\omega)$

- Γραμμικότητα: $a x(t) + b y(t) \xleftrightarrow{\text{Μ.Φ}} a X(j\omega) + b Y(j\omega)$
- Χρονική Μετατόπιση: $x(t-t_0) \xleftrightarrow{\text{Μ.Φ}} e^{-j\omega t_0} X(j\omega)$
- Συζυγία / Συμμετρία: $x^*(t) \xleftrightarrow{\text{Μ.Φ}} X^*(-j\omega)$, Αν $x(t)$ πραγματικό, τότε $X(-j\omega) = X^*(j\omega)$
- Διαφορά / Ολοκλήρωση: $\frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{\text{Μ.Φ}} j\omega X(j\omega)$ και $\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \xleftrightarrow{\text{Μ.Φ}} \frac{1}{j\omega} X(j\omega) + \pi X(0)\delta(\omega)$ → d.c value
- Χρονική Κλιμάκωση: $x(at) \xleftrightarrow{\text{Μ.Φ}} \frac{1}{|a|} X\left(j\frac{\omega}{a}\right)$
- Δυϊσμός / Duality: $x(t) \xleftrightarrow{\text{Μ.Φ}} 2\pi x(-j\omega)$
- Parseval (ΑΔΕ): $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega$
- Συνέλιξη: $y(t) = h(t) * x(t) \xleftrightarrow{\text{Μ.Φ}} Y(j\omega) = H(j\omega) \cdot X(j\omega)$
- Πολλαπλασιασμός: $x_1(t) \cdot x_2(t) \xleftrightarrow{\text{Μ.Φ}} X_1(j\omega) * X_2(j\omega)$

---

**Τρόποι περιγραφής συστήματος**

α) $x(t) \rightarrow [\,h(t)\,] \rightarrow y(t)$

β) Σχέση εισόδου-εξόδου: $\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$

Άρα $Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega) \Leftrightarrow H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k (j\omega)^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k (j\omega)^k}$

---

**Μ/Σ Fourier Διακριτού χρόνου:**

Σ.Δ.Σ: $\tilde{x}[n] = \sum_{k=<N>}^{\infty} a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$

- $x[n]$, μπορώ να το εκφράσω σαν σειρά Fourier,

όπου $a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=N_1}^{N_2} \tilde{x}[n] e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} = \frac{1}{N} X(e^{jk\omega})$

Τελικά: $X(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}$ **DTFT** ⇝ Μετασχηματισμός Fourier

$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$ **IDTFT** ⇝ Αντίστροφος Μ/Σ Fourier

---

**ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ DTFT**

- Περιοδικότητα: $X(e^{j(\omega+2\pi)}) = X(e^{j\omega})$
- Γραμμικότητα: $a x_1[n] + b x_2[n] \xleftrightarrow{\text{DTFT}} a X_1(e^{j\omega}) + b X_2(e^{j\omega})$
- Χρονική μετατόπιση: $x[n-n_0] \longleftrightarrow e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega})$ και $e^{j\omega_0 n} x[n] \longleftrightarrow X(e^{j(\omega-\omega_0)})$
- Διαφορά / Άθροιση: $x[n] - x[n-1] \longleftrightarrow e^{-j\omega} X(e^{j\omega})$

$\sum_{m=-\infty}^{n} x[m] \longleftrightarrow \frac{1}{1-e^{-j\omega}} X(e^{j\omega}) + \pi X(e^{j0}) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k)$

- Χρονική διαστολή: $x_{(k)}[n] = \begin{cases} x[n/k], & \text{αν } n \text{ πολ/πλο του } k \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} \longleftrightarrow X(e^{jk\omega})$
- Ανάκλαση: $x[-n] \xleftrightarrow{\text{DTFT}} X(e^{-j\omega})$
- Παραγώγιση: $n x[n] \xleftrightarrow{\text{DTFT}} j\frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$
- Συνέλιξη: $x[n] * y[n] \xleftrightarrow{\text{DTFT}} X(e^{j\omega}) \cdot Y(e^{j\omega})$
- Πολλαπλασιασμός: $x[n]\,y[n] \xleftrightarrow{\text{DTFT}} \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\theta}) Y(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta$
- Parseval: $\sum |x[n]^2| = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega$
- Συζυγία: $x^*[n] \xleftrightarrow{\text{DTFT}} X^*(e^{-j\omega})$
- Συζυγής Συμμετρία: $x[n]$ πραγματικό

$X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega}) \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{Re}\{X(e^{j\omega})\} = \mathrm{Re}\{X(e^{-j\omega})\} \\ \mathrm{Im}\{X(e^{j\omega})\} = -\mathrm{Im}\{X(e^{-j\omega})\} \\ |X(e^{j\omega})| = |X(e^{-j\omega})| \\ \angle X(e^{j\omega}) = -\angle X(e^{-j\omega}) \end{cases}$