《随堂测试》参考答案

1.(1)由题可知：

$$g(x)=\begin{pmatrix} 2x_1-2x_2 \\ 4x_2-2x_1+6x_2^2+4x_2^3 \end{pmatrix}, G(x)=\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4+12x_2+12x_2^2 \end{pmatrix}。$$

令 $g(x)=0$，可得 $\begin{cases} x_1=x_2 \\ x_2+3x_2^2+2x_2^3=0 \end{cases}$，解得稳定点 $\begin{cases} x_1=0 \\ x_2=0 \end{cases}$，$\begin{cases} x_1=-1 \\ x_2=-1 \end{cases}$，$\begin{cases} x_1=-\frac{1}{2} \\ x_2=-\frac{1}{2} \end{cases}$。

当 $\begin{cases} x_1=0 \\ x_2=0 \end{cases}$ 时，$G(x)\big|_{x=0}=\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}>0$，稳定点为极小点。

当 $\begin{cases} x_1=-1 \\ x_2=-1 \end{cases}$ 时，$G(x)\big|_{x=-1}=\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}>0$，稳定点为极小点。

当 $\begin{cases} x_1=-\frac{1}{2} \\ x_2=-\frac{1}{2} \end{cases}$ 时，$G(x)\Big|_{x=-\frac{1}{2}}=\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$，$(\lambda-1)(\lambda-2)-4=\lambda^2-3\lambda-2$，稳定点为鞍点。

1.(2)由题可知：

$$g(x)=\begin{pmatrix} 3x_1^2-3x_1-3x_2(x_1-x_2-1)-3x_1x_2 \\ -3x_1(x_1-x_2-1)+3x_1x_2 \end{pmatrix}=3\begin{pmatrix} (x_1-x_2)(x_1-x_2-1) \\ x_1(-x_1+2x_2+1) \end{pmatrix}。$$

$$G(x)=3\begin{pmatrix} 2x_1-2x_2-1 & -2x_1+2x_2+1 \\ -2x_1+2x_2+1 & 2x_1 \end{pmatrix}$$

令 $g(x)=0$，可得：

$\begin{cases} x_1=x_2 \\ x_1=0 \end{cases}$，或 $\begin{cases} x_1-x_2-1=0 \\ x_1=0 \end{cases}$，或 $\begin{cases} x_1=x_2 \\ -x_1+2x_2+1=0 \end{cases}$，或 $\begin{cases} x_1-x_2-1=0 \\ -x_1+2x_2+1=0 \end{cases}$。

解得稳定点 $\begin{cases} x_1=0 \\ x_2=0 \end{cases}$，或 $\begin{cases} x_1=0 \\ x_2=-1 \end{cases}$，或 $\begin{cases} x_1=-1 \\ x_2=-1 \end{cases}$，或 $\begin{cases} x_1=1 \\ x_2=0 \end{cases}$。

当 $\begin{cases} x_1=0 \\ x_2=0 \end{cases}$ 时，$G(x)=3\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$，$\lambda(\lambda+1)-1=\lambda^2+\lambda-1$，稳定点为鞍点。

当 $\begin{cases} x_1=0 \\ x_2=-1 \end{cases}$ 时，$G(x)=3\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$，$\lambda(\lambda-1)-1=\lambda^2-\lambda-1$，稳定点为鞍点。

当$\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = -1 \end{cases}$时，$G(x) = 3\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$，$(\lambda+1)(\lambda+2)-1 = \lambda^2 + 3\lambda + 1$，稳定点为极大点。

当$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \end{cases}$时，$G(x) = 3\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$，$(\lambda-1)(\lambda-2)-1 = \lambda^2 - 3\lambda + 1$，稳定点为极小点。

2.(1)共轭梯度法：

$$
\begin{aligned}
f(x_k + \alpha_k d_k) &= \frac{1}{2}(x_k + \alpha_k d_k)^T G(x_k + \alpha_k d_k) + b^T(x_k + \alpha_k d_k) \\
&= \frac{1}{2}\alpha_k^2 d_k^T G d_k + \alpha_k d_k^T (Gx_k + b) + f(x_k) = \frac{1}{2}\alpha_k^2 d_k^T G d_k + \alpha_k d_k^T g_k + f(x_k)
\end{aligned}
$$
。

故最优步长$\alpha_k = -\dfrac{d_k^T g_k}{d_k^T G d_k}$。

$d_0 = -g_0 = -b = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$，$\alpha_0 = -\dfrac{d_0^T g_0}{d_0^T G d_0} = \dfrac{5}{6}$。

$x_1 = x_0 + \alpha_0 d_0 = \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} \\ -\frac{5}{6} \end{pmatrix}$，$g_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{5}{3} \\ -\frac{5}{6} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$，

$\beta_0 = \dfrac{g_1^T g_1}{g_0^T g_0} = \dfrac{1}{9}$，$d_1 = -g_1 + \beta_0 d_0 = -\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} + \dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{9} \\ \frac{5}{9} \end{pmatrix}$，$\alpha_1 = -\dfrac{d_1^T g_1}{d_1^T G d_1} = \dfrac{3}{5}$。

$x_2 = x_1 + \alpha_1 d_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$，$g_2 = 0$，算法终止。

2.(2)Newton 方法：

$g(x) = Gx + b,\ \nabla^2 f = G > 0$。

任意选取初始点x_0，有：$d = -G^{-1}g(x_0) = -G^{-1}(Gx_0 + b) = -x_0 - G^{-1}b$。

则$x_1 = x_0 + d = -G^{-1}b = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -\dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$。

显然，$g(x_1) = G(-G^{-1}b) + b = 0$，故$x_1$即为极小点。

代入可得：$f(x)_{\min} = \dfrac{1}{2}b^T x_1 = -\dfrac{9}{4}$。

3.由题可知：

$g(x)=2(r_1(x)\nabla r_1(x)+r_2(x)\nabla r_2(x))=\begin{pmatrix} 4x_1-2x_2^3+2-2x_2^2 \\ -6x_1x_2^2+6x_2^5-6x_2^2-4x_1x_2+4x_2^3 \end{pmatrix}$，

$G(x)=\begin{pmatrix} 4 & -6x_2^2-4x_2 \\ -6x_2^2-4x_2 & -12x_1x_2+30x_2^4-12x_2-4x_1+12x_2^2 \end{pmatrix}$。

（1） 将 $x^{*_2}=(-0.5,0)^T$ 代入可得 $r_1(x)=-0.5\neq 0,\ r_2(x)=0.5\neq 0$，故 x^{*_2} 不是（1）中方程组的解。同时，有 $g(x)=0$， $G(x)=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}>0$，故 x^{*_2} 为局部极小点。

（2） 将 $x^{*_3}=(-\frac{7}{54},\frac{2}{3})^T$ 代入可得 $g(x)=0$ ， $G(x)=\begin{pmatrix} 4 & -\frac{16}{3} \\ -\frac{16}{3} & \frac{130}{27} \end{pmatrix}$ ，

$(\lambda-4)(\lambda-\frac{130}{27})-(\frac{16}{3})^2=\lambda^2-\frac{238}{27}\lambda-\frac{248}{27}$，故 x^{*_3} 为鞍点。

4.由题可知：

$L(x)=(x_1-1)^2+(x_2-2)^2+2024+\lambda[(x_1-1)^2-3x_2]$。

故有：$\nabla L=\begin{pmatrix} 2(1+\lambda)(x_1-1) \\ 2(x_2-2)-3\lambda \end{pmatrix}$， $\nabla^2 L=\begin{pmatrix} 2(1+\lambda) & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$。

令 $\nabla L=0$ 解得 KKT 点为：$\begin{cases} \lambda=-1 \\ x_1=1\pm\sqrt{\frac{3}{2}} \\ x_2=\frac{1}{2} \end{cases}$ ①，或 $\begin{cases} \lambda=-\frac{4}{3} \\ x_1=1 \\ x_2=0 \end{cases}$ ②。

当①时，$\nabla^2 L=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$， $F_1^*=\left\{d\,\middle|\,d\neq 0,\ a_1^{*T}d=0\right\}=\left\{d\,\middle|\,d\neq 0,\ \pm\sqrt{6}d_1-3d_2=0\right\}=\left\{(\pm\sqrt{\frac{3}{2}}d_2,d_2)^T\,\middle|\,d_2\neq 0\right\}$。

故 $d^T\nabla^2 Ld=2d_2^2>0$， 故①中的 KKT 点为最优解。

当②时， $\nabla^2 L=\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$， $F_1^*=\left\{d\,\middle|\,d\neq 0,\ a_1^{*T}d=0\right\}=\left\{d\,\middle|\,d\neq 0,-3d_2=0\right\}=\left\{\begin{pmatrix} d_1\neq 0 \\ 0 \end{pmatrix}^T\right\}$。

故 $d^T\nabla^2 Ld=-\frac{2}{3}d_1^2<0$， 故②中的 KKT 点不是最优解。

5.该问题的 Lagrange 函数为： $L(x,\lambda,\mu)=\sum_{i=1}^{n}\frac{c_i}{x_i}-\lambda(\sum_{i=1}^{n}a_ix_i-b)-\mu^T x$ 。

得 KKT 条件：$\begin{cases} \nabla_{x_i} L(x,\lambda,\mu) = -\dfrac{c_i}{x_i^2} - \lambda a_i - \mu_i \\ \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = b,\ \mu^T x = 0,\ x \geq 0,\ \mu \geq 0 \end{cases}$。

由目标函数可知 $x_i^* > 0$，所以 $\mu^* = 0$。由此得：$\dfrac{c_i}{x_i^*} = -\lambda^* a_i x_i^*$。

所以，$\sum \dfrac{c_i}{x_i^*} = -\lambda^* \sum a_i x_i^* = -\lambda^* b$。进而有：$\lambda^* = -\dfrac{f(x^*)}{b} = -\dfrac{f^*}{b}$。

另一方面，由 KKT 条件第一式可得：$\dfrac{c_i}{x_i^*} = \sqrt{-\lambda^* a_i c_i} = \sqrt{\dfrac{f^*}{b}}\sqrt{a_i c_i}$。

由此，$f^* = \sum \dfrac{c_i}{x_i^*} = \sqrt{\dfrac{f^*}{b}} \sum \sqrt{a_i c_i}$，解得 $f^* = \dfrac{1}{b}\left(\sum \sqrt{a_i c_i}\right)^2$，结论得证。

6.求最小距离可表达成凸规划问题：

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1^2 + x_2^2 \\ s.t. \quad & x_1 + x_2 - 4 \geq 0 \\ & x_1 + 2x_2 - 5 \geq 0 \end{aligned}$$

KKT 条件如下：

$$\begin{cases} 2x_1 - \lambda_1 - 2\lambda_2 = 0 \\ 2x_2 - \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1(x_1 + x_2 - 4) = 0 \\ \lambda_2(x_1 + 2x_2 - 5) = 0 \\ \lambda_1,\ \lambda_2 \geq 0 \\ x_1 + x_2 - 4 \geq 0 \\ x_1 + 2x_2 - 5 \geq 0 \end{cases}$$

解得 KKT 点 $\bar{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$，最小距离 $d = 2\sqrt{2}$。