

最优化方法实验 1：线搜索方法

一、实验任务

基于 Armijo 步长规则，利用梯度下降方法求解无约束优化问题：

$$\min_{x \in R^2} f(x) = 100(x_1^2 - x_2)^2 + (x_1 - 1)^2.$$

初始点选为 $(0, 0)^T$ ，终止准则选为 $\|f(x_k)\| \leq 10^{-5}$ 。

二、实验目的

通过本次实验，掌握 Armijo 步长规则和梯度下降方法，并进行编程实现。

三、编程环境

所用设备为机房电脑，Windows 版本为 Windows 10 专业版，处理器为 11th Gen Intel(R) Core(TM) i5-11400 @ 2.60GHz 2.59 GHz，所用编程软件及库版本如表 1 所示。

表 1 编程环境

编程软件	库名	版本号
PyCharm 2019.3.1	numpy	1.24.4
	matplotlib	3.7.5

四、实验步骤

- (1) 编写目标函数及其梯度程序；
- (2) 编写 Armijo 准则程序；
- (3) 编写梯度下降方法程序；
- (4) 调用上述算法对问题进行求解，绘制目标函数随迭代次数变化图像。

五、相关代码

- (1) 目标函数及其梯度程序如下：

```

# 目标函数
def fun(x):
    f = 100 * (x[0] ** 2 - x[1]) ** 2 + (x[0] - 1) ** 2
    return f
# 梯度函数
def gfun(x):
    gf = np.array([400 * x[0] * (x[0] ** 2 - x[1]) + 2 * (x[0] - 1), -200 * (x[0]
** 2 - x[1])])
    return gf

```

(2) Armijo 准则程序如下:

```

# Armijo 准则
def armijo(xk, dk):
    beta = 0.5
    sigma = 0.2
    m = 0
    mmax = 20
    mk = 0
    while (m <= mmax):
        if (fun(xk + beta ** m * dk) <= fun(xk) + sigma * beta ** m * np.dot(gfun(xk),
dk)):
            mk = m
            break
        m = m + 1
    alpha = beta ** mk
    newxk = xk + alpha * dk
    fk = fun(xk)
    newfk = fun(newxk)
    return mk, alpha, newxk, fk, newfk

```

(3) 梯度下降方法程序如下:

```

# 梯度下降
def grad(x0):
    maxk = 5000
    k = 0
    Err = []
    tk = []
    Points = [] # 用于存储迭代点
    epsilon = 1e-05
    while (k < maxk):
        g = gfun(x0)
        d = -g
        if (norm(g) < epsilon):
            break
        mk, alpha, newxk, fk, newfk = armijo(x0, d)
        x0 = newxk
        Points.append(x0)
        Err.append(fk)      # 生成一个残量序列
        tk.append(k)        # 生成一个迭代次数序列

```

```

k = k + 1
x = x0
val = fun(x0)
return x, val, k, Err, tk, Points

```

(4) 调用上述算法对问题进行求解, 绘制目标函数随迭代次数变化图像, 如下:

```

x0 = np.array([0.0, 0.0])
x, val, k, Err, tk, Points = grad(x0)
for i, point in enumerate(Points):
    print(f"迭代{i+1}: x = {point}, f(x) = {Err[i]}")
print("\n最优值: " + str(val))
print("最优值点: x = " + str(x))
plt.plot(tk, Err)
plt.xlabel('迭代次数')
plt.ylabel('目标函数值')
plt.title('目标函数值随迭代次数变化曲线图')
plt.show()

```

六、实验结果及分析

所得最优值点及最优值如表 2。

表 2 实验结果图

初始点	目标函数	策略准则
$\min_{x \in \mathbb{R}^2} f(x) = 100(x_1^2 - x_2)^2 + (x_1 - 1)^2$		
迭代次数	最优值点	最优值
$(0, 0)^T$	[0.9969139 0.99384471]	
2512	9.55E-6	
	$\ f(x_k)\ \leq 10^{-5}$	

目标函数值随迭代次数变化曲线如图 1 所示。由图可知, 基于 Armijo 准则的梯度下降法得益于其进退试探策略使得每次迭代 (特别是前 500 次迭代) 均取得了良好效果, 然而实际上 Armijo 步长规则是一种非单调步长规则, 但其在本任务上表现良好, 其总趋势是下降的, 相关内容将在后续实验中继续探究。

