HW-06

1. 用拉格朗日方法求解下列二次规划问题.

(1) $\min\ x_1^2+x_2^2+x_3^2$

s.t. $x_1+2x_2-x_3-4=0$

$x_1-x_2+x_3+2=0$

解: 由目标函数及等式约束条件,有:

$$G=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix};\quad g=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix};\quad A=\begin{pmatrix}1&2&-1\\1&-1&1\end{pmatrix};\quad b=\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$$

则对应的KKT系统为: $\begin{pmatrix}G&-A^T\\-A&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\\lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-g\\-b\end{pmatrix}$

代入,得:

$$\begin{pmatrix}2&0&0&-1&-1\\0&2&0&-2&1\\0&0&2&1&-1\\-1&-2&1&0&0\\-1&1&-1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\\lambda_1\\\lambda_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\-4\\2\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}2x_1-\lambda_1-\lambda_2=0\\2x_2-2\lambda_1+\lambda_2=0\\2x_3+\lambda_1-\lambda_2=0\\-x_1-2x_2+x_3=4\\-x_1+x_2-x_3=2\end{cases}$$

解得:

$$x^*=\begin{pmatrix}-\frac{7}{6}\\-\frac{2}{3}\\-\frac{1}{3}\end{pmatrix}\quad\lambda^*=\begin{pmatrix}-2\\-\frac{8}{3}\end{pmatrix}$$

(2) $\min\ x_1^2-x_1x_2+x_2^2-x_2x_3+x_3^2+2x_1-x_2$

s.t. $3x_1-x_2-x_3=0$

$2x_1-x_2-x_3=0$

由目标函数及等式约束条件,有:

$$G=\begin{pmatrix}2&-1&0\\-1&2&-1\\0&-1&2\end{pmatrix};\quad g=\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix};\quad A=\begin{pmatrix}3&-1&-1\\2&-1&-1\end{pmatrix};\quad b=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

则对应的KKT系统为: $\begin{pmatrix}G&-A^T\\-A&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\\lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-g\\-b\end{pmatrix}$

代入,得:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -3 & -2 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3\lambda_1 - 2\lambda_2 = -2 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 + \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \\ -x_2 + 2x_3 + \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ -3x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

解得.

$$x^* = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} \end{pmatrix} \qquad \lambda^* = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

2、用有效集方法求解下列二次规划问题:

(1) $\min \frac{1}{2}[(x-3)^2+(y-1)^2]-5$

s.t. $3-y\geq 0$ 　初始点选为 $(0,3)^T$

$4-x-y\geq 0$

$2-x\geq 0$

$x\geq 0, y\geq 0$

解: 初始点为 $x^{(0)}=(0,3)^T$ 　则: $S_0 = A(x^{(0)}) = \{1, 4\}$

则求解等式约束优化子问题: $\min \frac{1}{2}[(d_1-3)^2+(d_2-1)^2]-5$

s.t. $d_1 = 0$

$3-d_2=0$

~~得最优解~~: $d^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \neq 0$

~~新的迭代点为 $x^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$~~

~~修正指标集 $S_1 = S_0 / \{4\} = \{1\}$~~

计算步长, $\alpha_0 = \min\left\{1, \frac{b_i - a_i^T x^{(0)}}{a_i^T d^{(0)}}, i=2,3,5, a_i^T d^{(0)} < 0\right\}$

$= \frac{b_2 - a_2^T x^{(0)}}{a_2^T d^{(0)}} = \frac{1}{3}$

令 $x^{(1)} = x^{(0)} + \alpha_0 d^{(0)} = (0,4)^T$ 　, $S_1 = S_0 \cup \{2\} = \{1,2,4\}$

进行第二次迭代, 即求解子问题: $\min \frac{1}{2}[(d_1-3)^2+(d_2-1)^2]-5$

s.t. $d_1=0$

$3-d_2=0$

$4-d_1-d_2=0$

2. 用有效集方法求解下列二次规划问题.

(1) $\min \ \frac{1}{2}[(x-3)^2+(y-1)^2]-5$

s.t. $3-y\geq 0$ 　　初始点选为 $x^{(0)}=(0,3)^T$

$4-x-y\geq 0$

$2-x\geq 0$

$x\geq 0$

$y\geq 0$

解: 取 $x^{(0)}=(0,3)^T$, 则 $S_0=A(x^{(0)})=\{1,4\}$

求解等式约束优化子问题 $\min \ \frac{1}{2}[d_1^2+d_2^2-6d_1-2d_2]$

s.t. $d_1=0$

$-d_2=0$

得最优解和相应的Lagrange乘子:

$d^{(0)}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, $\lambda^{(0)}=\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$ 　新的迭代点为 $x^{(1)}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

修正指标集 $S_1=S_0/\{4\}=\{1\}$

进入第二次迭代, 求解子问题: $\min \ \frac{1}{2}(d_1^2+d_2^2-6d_1-2d_2)$

s.t. $-d_2=0$

得最优解 $d^{(1)}=\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$

计算步长 $\alpha_1=\min\left\{1, \frac{b_i-a_i^Tx^{(1)}}{a_i^Td^{(1)}} \middle| i=2,3,4,5, \ a_i^Td^{(1)}<0\right\}$

$=\frac{b_3-a_3^Tx^{(1)}}{a_3^Td^{(1)}}=\frac{-2+0}{-3}=\frac{2}{3}$

令 $x^{(2)}=x^{(1)}+\alpha_1 d^{(1)}=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$, $S_2=S_1\cup\{3\}=\{1,3\}$

进入第三次迭代, 求解子问题: $\min \ \frac{1}{2}(d_1^2+d_2^2-6d_1-2d_2)$

s.t. $-d_1=0$

$-d_2=0$

得: $d^{(2)}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ $\lambda^{(2)}=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ 　~~新的迭代点为 $x^{(3)}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$~~

~~修正指标集 $S_3=S_2/\{1\}=\{2\}$~~

~~进入第四次迭代, 求解子问题: $\min \ \frac{1}{2}(d_1^2+d_2^2-6d_1-2d_2)$~~

~~s.t. $d_1+d_2=0$~~

~~得最优解 $d^{(3)}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$~~

~~计算步长 $\alpha_3=\min\left\{1, \frac{b_i-a_i^Tx^{(3)}}{a_i^Td^{(3)}} \middle| i=1,3,4,5, \ a_i^Td^{(3)}<0\right\}$~~

∵ 最优解 $d^{(2)}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ 为零

Lagrange乘子 $\lambda^{(2)}=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ 非负

故原题最优解 $x^*=x^{(2)}=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$

~~最优Lagrange乘子 λ^* =~~

(2) $\min\ f(x) = x_1^2 - x_1x_2 + 2x_2^2 - x_1 - 10x_2$

s.t. $\begin{cases} -3x_1 - 2x_2 \geq -6 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$ ，初始点为 $(0,0)^T = x^{(0)}$

解： $S_0 = A(x^{(0)}) = \{2, 3\}$

求解等式约束优化子问题： $\min\ d_1^2 - d_1d_2 + 2d_2^2 - d_1 - 10d_2$

s.t. $d_1 = 0$

$d_2 = 0$

得最优解： $d^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ，相应的Lagrange乘子 $\lambda^{(0)} = \begin{pmatrix} -1 \\ -10 \end{pmatrix}$

新的迭代点 $x^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ，修正指标集 $S_1 = S_0 / \{3\} = \{2\}$

进入第二次迭代。即求解子问题：

$\min\ d_1^2 - d_1d_2 + 2d_2^2 - d_1 - 10d_2$

s.t. $d_1 = 0$ 　得最优解： $d^{(1)} = (0\ \ \frac{5}{2})^T$

计算步长 $\alpha_1 = \min\left\{1, \frac{b_i - a_i^T x^{(1)}}{a_i^T d^{(1)}} \middle| i = 1, 3,\ a_i^T d^{(1)} < 0\right\}$

$= 1$

令 $x^{(2)} = x^{(1)} + \alpha_1 d^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}$ ， $S_2 = S_1 = \{2\}$

进入第三次迭代，即求解子问题 $\min\ d_1^2 - d_1d_2 + 2d_2^2 - d_1 - 10d_2$

s.t. $d_1 = 0$

得： $d^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix} \neq 0$

计算步长 $\alpha_2 = \min\left\{1, \frac{b_i - a_i^T x^{(2)}}{a_i^T d^{(2)}} \middle| i = 1, 3,\ a_i^T d^{(2)} < 0\right\}$

$= \frac{b_1 - a_1^T x^{(2)}}{a_1^T d^{(2)}} = \frac{-6+5}{-5} = \frac{1}{5}$

令 $x^{(3)} = x^{(2)} + \alpha_2 d^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ ， $S_3 = S_2 \cup \{1\} = \{1, 2\}$

进入第四次迭代，求解子问题 $\min\ d_1^2 - d_1d_2 + 2d_2^2 - d_1 - 10d_2$

s.t. $-3d_1 - 2d_2 = 0$

$d_1 = 0$

得最优解： $d^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ，相应的Lagrange乘子 $\lambda^{(3)} = \begin{pmatrix} 5 \\ 14 \end{pmatrix}$

即最优解为0，Lagrang乘子非负

故原题最优解 $x^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$