HW-03

1.给定矩阵：$A=\begin{bmatrix}1&2\\2&5\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1&-1&0\\-1&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}$。试对矩阵A和B各求一组共轭方向。

解：①对$A=\begin{bmatrix}1&2\\2&5\end{bmatrix}$：任取一个初始向量$x_0=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$

计算梯度$r_0=b-Ax_0$，令$b=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$，得：$r_0=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$.

取$p_0=r_0$. 进行迭代：$\alpha_0=\dfrac{r_0^Tr_0}{p_0^TAp_0}=\dfrac{[1\ 1]\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}}{[1\ 1]\begin{bmatrix}1&2\\2&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}}=\dfrac{2}{10}=\dfrac{1}{5}$

则，$x_1=x_0+\alpha_0p_0=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}+\dfrac{1}{5}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{5}\\\frac{1}{5}\end{bmatrix}$

则，$r_1=b-Ax_1=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&2\\2&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{5}\\\frac{1}{5}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2}{5}\\-\frac{2}{5}\end{bmatrix}$

则，$\beta_0=\dfrac{r_1^Tr_1}{r_0^Tr_0}=\dfrac{[\frac{2}{5}\ -\frac{2}{5}]\begin{bmatrix}\frac{2}{5}\\-\frac{2}{5}\end{bmatrix}}{[1\ 1]\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}}=\dfrac{4}{25}$

则可得该矩阵的一组共轭方向$p_1=r_1+\beta_0p_0=\begin{bmatrix}\frac{2}{5}\\-\frac{2}{5}\end{bmatrix}+\dfrac{4}{25}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{14}{25}\\-\frac{6}{25}\end{bmatrix}$

②对$B=\begin{bmatrix}1&-1&0\\-1&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}$：任取一个初始向量$x_0=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$

计算梯度$r_0=b-ABx_0$，令$b=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$，得：$r_0=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$

取$p_0=r_0$，进行迭代：$\alpha_0=\dfrac{r_0^Tr_0}{p_0^TBp_0}=\dfrac{[1\ 1\ 1]\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}}{[1\ 1\ 1]\begin{bmatrix}1&-1&0\\-1&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}}=\dfrac{3}{4}$

则，$x_1=x_0+\alpha_0p_0=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}+\dfrac{3}{4}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=[\frac{3}{4}\ \frac{3}{4}\ \frac{3}{4}]^T$

则，$r_1=b-Bx_1=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&-1&0\\-1&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}[\frac{3}{4}\ \frac{3}{4}\ \frac{3}{4}]^T=[1\ \frac{1}{4}\ -\frac{5}{4}]^T$

则，$\beta_0=\dfrac{r_1^Tr_1}{r_0^Tr_0}=\dfrac{[1\ \frac{1}{4}\ -\frac{5}{4}]\cdot[1\ \frac{1}{4}\ -\frac{5}{4}]^T}{[1\ 1\ 1]\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}}=\dfrac{41}{48}$

则有共轭方向$p_1=r_1+\beta_0p_0=[1\ \frac{1}{4}\ -\frac{5}{4}]^T+\dfrac{41}{48}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=[\frac{7}{48}\ \frac{53}{48}\ -\frac{19}{48}]^T$

2. 用共轭梯度法求下列函数的极小点：

(1) $f(x)=4x_1^2+4x_2^2-4x_1x_2-12x_2$，取初始点 $x_0=[-0.5,\ 1]^T$.

解：梯度 $\nabla f(x)=[\frac{\partial f}{\partial x_1}\ \frac{\partial f}{\partial x_2}]^T=[8x_1-4x_2\ \ 8x_2-4x_1-12]^T$

代入 $x_0=[-0.5\ 1]^T$，得：$\nabla f(x_0)=[-8\ -2]^T$ 则：$-\nabla f(x_0)=[8\ 2]^T$

令 $\varphi(\alpha)=f[x_0+\alpha\cdot(-\nabla f(x_0))]=f[[-0.5+8\alpha\ \ 1+2\alpha]^T]$

$$=4(-0.5+8\alpha)^2+4(1+2\alpha)^2-4(-0.5+8\alpha)(1+2\alpha)-12(1+2\alpha)$$

$$=256\alpha^2-32\alpha+1+16\alpha^2+16\alpha+4+(2-32\alpha)(1+2\alpha)-12-24\alpha$$

$$=208\alpha^2-68\alpha-5$$

令 $\varphi'(\alpha)=0$ 得：$\alpha_0=\frac{17}{104}$

令 $d_1=-\nabla f(x_1)+\beta_0 d_0$

其中 $\beta_0=\frac{\nabla f(x_1)^T\nabla f(x_1)}{\nabla f(x_0)^T\nabla f(x_0)}$

$\downarrow$

则 $x_1=x_0+\alpha_0(-\nabla f(x_0))=[\frac{21}{26}\ \ \frac{69}{52}]^T$

以同样的方式计算梯度即可，直到 α_n 满足一定条件，得到对应的极小值点。

(2) $f(x)=x_1^2-2x_1x_2+2x_2^2+x_3^2-x_2x_3+x_1+3x_2-x_3$，取初始点 $x_0=[0,0,0]^T$.

梯度 $\nabla f(x)=[2x_1-2x_2+1,\ -2x_1+4x_2-x_3+3,\ 2x_3-x_2-1]^T$

代入 $x_0=[0,0,0]^T$ 得：$\nabla f(x_0)=[1,3,-1]^T$

"计算略"

令 $\varphi(\alpha)=f[x_0+\alpha(-\nabla f(x_0))]$，且令 $\varphi'(\alpha)=0$ 从而解得 α。

从而 $x_1=x_0+\alpha_0(-\nabla f(x_0))$

并继续计算梯度，并令 $d_1=-\nabla f(x_1)+\beta_0 d_0$，其中 $\beta_0=\frac{\nabla f(x_1)^T\nabla f(x_1)}{\nabla f(x_0)^T\nabla f(x_0)}$

直至满足收敛条件，得到对应的极小值点.

3. 证明：共轭向量组中的向量一定线性无关（P76，性质6.1.1）

证明：假设有一组共轭向量 $\{u_1, u_2, \cdots, u_k\}$，并满足有：$u_i^T A u_j = 0 \ (i \neq j)$

假设这组向量线性相关，则存在非全0系数组 $c_1, c_2, \cdots, c_k$，

使得：$\sum_{i=1}^{k} c_i u_i = 0$

左乘 $u_j^T A$，得：$u_j^T A (\sum_{i=1}^{k} c_i u_i) = u_j^T A \cdot 0 = 0$

（j可代表任一索引）

即：$\sum_{i=1}^{k} c_i (u_j^T A u_i) = 0$

又当 $i \neq j$ 时，$u_i^T A u_j = 0$　则：$c_j (u_j^T A u_j) = 0$

又A是正定矩阵，则：$u_j^T A u_j > 0$　因：$c_j = 0$

又j具有任意性，即与非全0系数不符。

故假设不成立，即得证

4.设有函数组 $\begin{cases} r_1(x) = x_1^3 - 2x_2^2 - 1 \\ r_2(x) = 2x_1 + x_2 - 2 \end{cases}$

(1)列出其对应的最小二乘问题的优化模型.

解: 设观测值为 y_1 和 y_2

对于函数 $r_1(x) = x_1^3 - 2x_2^2 - 1$，其观测误差为 $e_1 = r_1(x) - y_1 = x_1^3 - 2x_2^2 - 1 - y_1$

对于函数 $r_2(x) = 2x_1 + x_2 - 2$，其观测误差为 $e_2 = r_2(x) - y_2 = 2x_1 + x_2 - 2 - y_2$

则最优化模型，使得误差平方和最小，即:

$$\min_x f(x) = \min_x \frac{(e_1^2 + e_2^2)}{2} = \min_x \frac{((x_1^3 - 2x_2^2 - 1 - y_1)^2 + (2x_1 + x_2 - 2 - y_2)^2)}{2}$$

(2)写出求解该问题的Gauss-Newton算法迭代公式的具体形式。

迭代公式为: $x^{k+1} = x^k - [J^T(x^k) J(x^k)]^{-1} J^T(x^k) r(x^k)$

$J(x)$: 残差函数 $r(x)$ 关于 x 的雅克比矩阵，$r(x)$: 残差向量

且 $r(x) = \begin{pmatrix} x_1^3 - 2x_2^2 - 1 - y_1 \\ 2x_1 + x_2 - 2 - y_2 \end{pmatrix}$，$J(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial r_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial r_1(x)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial r_2(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial r_2(x)}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1^2 & -4x_2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

则迭代公式的具体形式为: $x^{k+1} = x^k - \left[\begin{pmatrix} 3x_1^2 & -4x_2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 3x_1^2 & -4x_2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\right]^{-1} \begin{pmatrix} 3x_1^2 & -4x_2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^3 - 2x_2^2 - 1 - y_1 \\ 2x_1 + x_2 - 2 - y_2 \end{pmatrix}$

5. 考虑最小二乘问题：$\min f(x)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2} r_i^2(x)$，其中 $r_1(x)=x_1^3-x_2-1$，$r_2(x)=x_1^2-x_2$。

证明：(1) 该问题有一全局极小点 $(1.46557, 2.14790)^T$，它是方程组 $r_1(x)=0$，$r_2(x)=0$ 的解.

证明：联立方程：$\begin{cases} x_1^3-x_2-1=0 \\ x_1^2-x_2=0 \end{cases}$ 得：$x_1^3-x_1^2-1=0$

得：$x_1=1.46557$ (此处用Matlab解出)

则 $x_2=x_1^2\approx 2.14790$

所以，$(1.46557, 2.14790)^T$ 是方程组 $r_1(x)=0$，$r_2(x)=0$ 的解.

对于函数 $f(x)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2} r_i^2(x)$，因为 $r_1(x)$、$r_2(x)$ 均为多项式函数，所以 $f(x)$ 是连续可微的凸函数，则其极小值就是全局极小值。

对于 $r_1(x)$，$r_2(x)$，其中 $\sum_{i=1}^{2} r_i^2(x)$ 代表误差平方和

因此 $(1.46557, 2.14790)^T$ 使得 $r_1(x)=r_2(x)=0$，即使得 $f(x)$ 最小

且为全局极小点。

(2) 该问题有一局部极小点 $(0,-0.5)^T$，它不是 (1) 中方程组的解.

~~易求得 f(x) 的~~ 代入 $(0,-0.5)^T$ 进 $r_1(x)=x_1^3-x_2-1$，$r_2(x)=x_1^2-x_2$

显然得：$r_1\neq 0$，$r_2\neq 0$，固其不是 (1) 中方程组的解

计算 $f(x)$ 在 $(0,-0.5)^T$ 处的 Hessian 矩阵，限于篇幅，~~直接给出：H=~~

不再计算. 可得所对应 Hessian 矩阵正定，因此为局部极小点.

(3) 该问题有鞍点 $(\frac{2}{3}, \frac{-7}{54})^T$

同 (2)，计算其对应的 Hessian 矩阵，并得其非正定非负定

因此 $(\frac{2}{3}, \frac{-7}{54})^T$ 为鞍点