HW05-1

该问题的 Lagrange 函数为：

$$L(x,\lambda)=c_1x_1+c_2x_2-\lambda_1(x_1x_2-b)-\lambda_2x_1-\lambda_3x_2$$

其 KKT 条件为：

$$\frac{\partial L}{\partial x_1}=c_1-\lambda_1x_2-\lambda_2=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2}=c_2-\lambda_1x_1-\lambda_3=0$$

$$x_1x_2=b$$

$$x_i\ge 0,\ \ i=1,2$$

解之，得 KKT 点 $x^*=\left(\sqrt{\frac{c_2b}{c_1}},\sqrt{\frac{c_1b}{c_2}}\right)^T$，$\lambda^*=\left(\sqrt{\frac{c_1c_2}{b}},0,0\right)^T$

$$\lambda_2x_1=0$$

$$\lambda_3x_2=0$$

$$\lambda_i\ge 0,\ \ i=2,3$$

接下来判断这个点是否为最优解。在 x^* 处，有：

$$F_1^*=\left\{d\,\middle|\,d\ne 0,a_1^{*T}d=0\right\}=\left\{\left(-\frac{c_2}{c_1}d_{2,}d_2\right)^T\,\middle|\,d_2\ne 0\right\}$$

及 $W^*=\begin{bmatrix}0 & -\lambda_1^*\\ -\lambda_1^* & 0\end{bmatrix}$

所以 $d^TW^*d=2c_2\sqrt{\frac{c_2}{bc_1}}d_2^2>0,d\in F_1^*$，故 x^* 为最优解。

HW06-2(2)

首先确定矩阵 H 和向量 c：

$$H=\begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & 4\end{bmatrix},\ \ c=\begin{bmatrix}-1\\ -10\end{bmatrix}$$

<u>第 1 次迭代：</u>

在初始点 x_0 处，有效集 $S_0=\{2,3\}$，求解相应的子问题：

$$\begin{cases}\min d_1^2-d_1d_2+2d_2^2-d_1-10d_2\\ \qquad s.t.\quad d_1=0,\ \ d_2=0\end{cases}$$

解得 $d_0=(0,0)^T$ 和 Lagrange 乘子 $\lambda_0=(-1,-10)^T$，可知 x_0 不是所求最优解。

将原问题第 3 个约束从有效集去掉，置 $S_0=\{2\}$，再解相应的子问题：

$$\begin{cases}\min d_1^2-d_1d_2+2d_2^2-d_1-10d_2\\ \qquad\qquad s.t.\quad d_1=0\end{cases}$$

解得 $d_0=(0,\frac{5}{2})^T$，由于 $d_0\neq 0$，需要计算步长 α_0。注意到：

$$\bar{\alpha}=\min\left\{\frac{b_i-a_i^Tx_0}{a_i^Td_0}\middle| i\notin S_0, a_i^Td_0<0\right\}=1.2$$

故 $\alpha_0=\min(1,\bar{\alpha})=1$。

<u>第 2 次迭代：</u>

令 $x_1=x_0+\alpha_0 d_0=(0,\frac{5}{2})^T$，此时 $S_1=\{2\}$，求解相应的子问题：

$$\begin{cases}\min d_1^2-d_1d_2+2d_2^2-\dfrac{7}{2}d_1\\ \qquad\quad s.t.\quad d_1=0\end{cases}$$

解得 $d_{(1)}=(0,0)^T$ 和 Lagrange 乘子 $\lambda_{(1)}=-\frac{7}{2}$，可知 x_0 不是所求最优解。

将原问题第 2 个约束从有效集去掉，置 $S_1=\varnothing$，再解相应的子问题：

$$\min d_1^2-d_1d_2+2d_2^2-\frac{7}{2}d_1$$

解得 $d_{(1)}=(2,\frac{1}{2})^T$，由于 $d_{(1)}\neq 0$，需要计算步长 α_1。注意到：

$$\bar{\alpha}=\min\left\{\frac{b_i-a_i^Tx_1}{a_i^Td_{(1)}}\middle| i\notin S_1, a_i^Td_{(1)}<0\right\}=\frac{1}{7}$$

故 $\alpha_1=\min(1,\bar{\alpha})=\dfrac{1}{7}$。

<u>第 3 次迭代：</u>

令 $x_2=x_1+\alpha_1 d_{(1)}=(\frac{2}{7},\frac{18}{7})^T$，此时 $S_2=\{1\}$，求解相应的子问题：

$$\begin{cases}\min d_1^2-d_1d_2+2d_2^2-3d_1\\ \quad s.t.\quad -3d_1-2d_2=0\end{cases}$$

解得 $d_{(2)}=(\frac{3}{14},-\frac{9}{28})^T$，由于 $d_{(2)}\neq 0$，需要计算步长 α_2。注意到：

$$\bar{\alpha}=\min\left\{\frac{b_i-a_i^Tx_2}{a_i^Td_{(2)}}\middle| i\notin S_2, a_i^Td_{(2)}<0\right\}=8$$

故 $\alpha_2=\min(1,\bar{\alpha})=1$。

<u>第 4 次迭代：</u>

令 $x_3=x_2+\alpha_2 d_{(2)}=(\frac{1}{2},\frac{9}{4})^T$，此时 $S_3=\{1\}$，求解相应的子问题：

$$\begin{cases} \min d_1^2 - d_1 d_2 + 2d_2^2 - \frac{9}{4}d_1 - \frac{3}{2}d_2 \\ \qquad s.t. \quad -3d_1 - 2d_2 = 0 \end{cases}$$

解得 $d_{(3)} = (0,0)^T$ 和 Lagrange 乘子 $\lambda_{(3)} = \frac{3}{4} > 0$，可知 x_3 即为所求最优解。

HW08-1

令 $\sigma = 2\pi$，问题对应的外点罚函数可写为：

$$P_E = x_2^2 - 3x_1 + \frac{\sigma}{2}[(x_1 + x_2 - 1)^2 + (x_1 - x_2)^2]$$

则有：$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x_1} = -3 + \sigma[(x_1 + x_2 - 1) + (x_1 - x_2)] = -3 + \sigma(2x_1 - 1) \\ \dfrac{\partial P}{\partial x_2} = 2x_2 + \sigma[(x_1 + x_2 - 1) + (x_2 - x_1)] = 2x_2 + \sigma(2x_2 - 1) \end{cases}$

令 $\dfrac{\partial P}{\partial x_1} = 0, \dfrac{\partial P}{\partial x_2} = 0$，可得 $\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{2}(1 + \dfrac{3}{\sigma}) \\ x_2 = \dfrac{1}{2}(1 - \dfrac{1}{\sigma + 1}) \end{cases}$

令 $\sigma \to \infty$，可得 $x_1^* = \dfrac{1}{2}$， $x_2^* = \dfrac{1}{2}$

对应的 Lagrange 乘子为：

$$\lambda_1^* = \lim_{\sigma\to\infty} -\sigma c_1(x) = \lim_{\sigma\to\infty} -\sigma[\frac{1}{2}(1 + \frac{3}{\sigma}) + \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{\sigma + 1}) - 1] = \lim_{\sigma\to\infty} -\frac{1}{2}\sigma(\frac{3}{\sigma} - \frac{1}{\sigma + 1}) = -1$$

$$\lambda_2^* = \lim_{\sigma\to\infty} -\sigma c_2(x) = \lim_{\sigma\to\infty} -\sigma[\frac{1}{2}(1 + \frac{3}{\sigma}) - \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{\sigma + 1})] = \lim_{\sigma\to\infty} -\frac{1}{2}\sigma(\frac{3}{\sigma} + \frac{1}{\sigma + 1}) = -2$$

HW08-2

令 $\mu = 1/\pi$，对数障碍函数可写为： $B_L(x,\mu) = 2x_1 + 3x_2 - \mu \ln(1 - 2x_1^2 - x_2^2)$

则有：$\begin{cases} \dfrac{\partial B}{\partial x_1} = 2 + \dfrac{4\mu x_1}{1 - 2x_1^2 - x_2^2} \\ \dfrac{\partial B}{\partial x_2} = 3 + \dfrac{2\mu x_2}{1 - 2x_1^2 - x_2^2} \end{cases}$，

令 $\dfrac{\partial B}{\partial x_1} = 0, \dfrac{\partial B}{\partial x_2} = 0$，可得 $\begin{cases} 2\mu x_1 = -(1 - 2x_1^2 - x_2^2) \\ 2\mu x_2 = -3(1 - 2x_1^2 - x_2^2) \end{cases}$

故有 $x_2 = 3x_1$，代入得 $11x_1^2 - 2\mu x_1 - 1 = 0$，

解得 $x_1 = \dfrac{\mu \pm \sqrt{\mu^2 + 11}}{11}$，舍弃正根，取 $x_1 = \dfrac{\mu - \sqrt{\mu^2 + 11}}{11}$，则 $x_2 = \dfrac{3(\mu - \sqrt{\mu^2 + 11})}{11}$

令 $\mu \to 0$，可得 $x_1^* = -\dfrac{\sqrt{11}}{11}$， $x_2^* = -\dfrac{3\sqrt{11}}{11}$

对应的 Lagrange 乘子为：$\lambda^* = \lim\limits_{\mu\to0} \dfrac{\mu}{c(x)} = \lim\limits_{\mu\to0} \dfrac{\mu}{1 - 2x_1^2 - x_2^2} = \lim\limits_{\mu\to0} \dfrac{\mu}{-2\mu x_1} = -\dfrac{1}{2} \lim\limits_{\mu\to0} \dfrac{1}{x_1} = \dfrac{\sqrt{11}}{2}$