HW-05

1. 求下述优化问题的KKT点，并判断是否为最优解.

(1) $\min \ c_1x_1 + c_2x_2$

$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1x_2 = b \\ x_1 \geq 0 \quad ，\text{其中} c_1>0, c_2>0, b>0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

解. 构建拉格朗日函数 $L = c_1x_1 + c_2x_2 + \lambda(x_1x_2 - b) - \mu_1x_1 - \mu_2x_2$

根据KKT条件,有:
$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_1} = c_1 + \lambda x_2 - \mu_1 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} = c_2 + \lambda x_1 - \mu_2 = 0 \\ \mu_1x_1 = 0, \ \mu_2x_2 = 0 \\ x_1x_2 = b, \ b>0 \\ x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0 \\ \mu_1 \geq 0, \ \mu_2 \geq 0 \end{cases}$$

分析: $\because x_1x_2 = b > 0 \quad \therefore$ 显然 $x_1 \neq 0, x_2 \neq 0$

又 $\mu_1x_1 = 0, \ \mu_2x_2 = 0$

则必有: $\mu_1 = \mu_2 = 0$, 即 $\begin{cases} c_1 + \lambda x_2 = 0 \\ c_2 + \lambda x_1 = 0 \\ x_1x_2 = b \end{cases}$ 得: $\begin{cases} x_1 = -\sqrt{\frac{c_2b}{c_1}} \\ x_2 = -\sqrt{\frac{c_1b}{c_2}} \\ \lambda = \sqrt{\frac{c_1c_2}{b}} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x_1 = \sqrt{\frac{c_2b}{c_1}} \\ x_2 = \sqrt{\frac{c_1b}{c_2}} \\ \lambda = -\sqrt{\frac{c_1c_2}{b}} \end{cases}$

又 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$, 则舍去第一组解.

即KKT点为 $\left(\sqrt{\frac{c_2b}{c_1}}, \sqrt{\frac{c_1b}{c_2}}\right)$

又目标函数为凸函数(线性函数是凸函数的特殊情况)

约束集合是凸集, 即本题为凸优化问题

因此, KKT点为其最优解点。

(2) $\min \ (x_1-3)^2 + (x_2-2)^2$

$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 \leq 5 \\ x_1 + 2x_2 = 4 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

构建拉格朗日函数 $L=(x_1-3)^2+(x_2-2)^2-\lambda(5-x_1^2-x_2^2)-\mu_1x_1-\mu_2x_2+\mu_3(x_1+2x_2-4)$

根据KKT条件,有:
$$\begin{cases}\frac{\partial L}{\partial x_1}=2(x_1-3)+2\lambda x_1-\mu_1+\mu_3=0\\ \frac{\partial L}{\partial x_2}=2(x_2-2)+2\lambda x_2-\mu_2+2\mu_3=0\\ \lambda(5-x_1^2-x_2^2)=0\ ,\ \mu_1x_1=0\ ,\ \mu_2x_2=0\\ x_1+2x_2=4\\ x_1\geq0,x_2\geq0,\mu_1\geq0,\lambda\geq0,\mu_2\geq0\ ,x_1^2+x_2^2\leq5\end{cases}$$

$\because x_1+2x_2=4 \quad \therefore x_1=4-2x_2$

$\because x_1^2+x_2^2\leq5 \quad \therefore (4-2x_2)^2+x_2^2\leq5$ 得: $1\leq x_2\leq\frac{11}{5}$ 则: $0\leq x_1\leq2$

$\because \mu_2x_2=0\ ,\ 1\leq x_2\leq\frac{11}{5} \quad \therefore \mu_2=0$

①若 $x_1=0\ ,\ x_2=2$。

$\because \lambda(5-x_1^2-x_2^2)=0$ 则: $\lambda=0$

则解: $\begin{cases}2(x_1-3)+2\lambda x_1-\mu_1+\mu_3=0\\ 2(x_2-2)+2\lambda x_2-\mu_2+2\mu_3=0\end{cases}$ 得: $\begin{cases}\mu_1=-6\\ \mu_3=0\end{cases}$

$\because \mu_1=-6$ 不符合 $\mu_1\geq0$

因此不成立.

②若 $\mu_1=0\ ,x_1\neq0$。

解: $\begin{cases}2(x_1-3)+2\lambda x_1-\mu_1+\mu_3=0\\ 2(x_2-2)+2\lambda x_2-\mu_2+2\mu_3=0\\ \lambda(5-x_1^2-x_2^2)=0\end{cases}$ 得: $\begin{cases}x_1=-\frac{2}{5}\\ x_2=\frac{11}{5}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x_1=2\\ x_2=1\\ \mu_3=\frac{2}{3}\\ \lambda=\frac{1}{3}\end{cases}$

舍去

综上KKT点为(2,1)

又目标函数为凸函数,约束集合为凸集

因此其为最优解点。

(3) $\max\ 14x_1-x_1^2+6x_2-x_2^2$

$$s.t.\begin{cases}x_1+x_2\leq2\\ x_1+2x_2\leq3\end{cases}$$

便于分析，将目标转化为：$\min\ -14x_1+x_1^2-6x_2+x_2^2$

构建拉格朗日函数 $L=-14x_1+x_1^2-6x_2+x_2^2-\lambda_1(2-x_1-x_2)-\lambda_2(3-x_1-2x_2)$

根据KKT条件有：
$$\begin{cases}\frac{\partial L}{\partial x_1}=-14+2x_1+2\lambda_1+\lambda_2=0\\ \frac{\partial L}{\partial x_2}=-6+2x_2+\lambda_1+2\lambda_2=0\\ \lambda_1(2-x_1-x_2)=0,\ \lambda_2(3-x_1-2x_2)=0\\ \lambda_1\geq 0,\ \lambda_2\geq 0\\ x_1+x_2\leq 2,\ x_1+2x_2\leq 3\end{cases}$$

① $\lambda_1=0,\lambda_2=0$。

解：$\begin{cases}-14+2x_1+2\lambda_1+\lambda_2=0\\ -6+2x_2+\lambda_1+2\lambda_2=0\end{cases}$ 得：$\begin{cases}x_1=7\\ x_2=3\end{cases}$

$\because x_1+x_2\leq 2$ 故不符，舍去。

② $\lambda_1=0$，$\cancel{\lambda_2\neq 0}$，$3-x_1-2x_2=0$

解：$\begin{cases}-14+2x_1+2\lambda_1+\lambda_2=0\\ -6+2x_2+\lambda_1+2\lambda_2=0\end{cases}$ 得：$\begin{cases}x_1=5\\ x_2=-1<0\\ \lambda_2=4\end{cases}$ 舍去。

③ $\lambda_2=0$，$2-x_1-x_2=0$

解："同上" 得：$\begin{cases}x_1=\frac{5}{3}\\ x_2=\frac{1}{3}\\ \lambda_1=\frac{16}{3}\end{cases}$ 满足约束条件。即存在KKT点 $(\frac{5}{3},\frac{1}{3})$

④ $3-x_1-2x_2=0$，$2-x_1-x_2=0$

即 $\begin{cases}x_1=1\\ x_2=1\end{cases}$ 再解 $\begin{cases}-14+2x_1+2\lambda_1+\lambda_2=0\\ -6+2x_2+\lambda_1+2\lambda_2=0\end{cases}$ 得：$\begin{cases}\lambda_1=\frac{20}{3}\\ \lambda_2=-\frac{4}{3}\end{cases}$ 舍去

综上，KKT点为 $(\frac{5}{3},\frac{1}{3})$

又目标函数为凸函数，约束集合为凸集

故此KKT点为最优解点。

2. 设 $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$，$b\in\mathbb{R}^n$。试给出下述二次规划问题的Lagrange对偶。

$$\min\ \|x-b\|^2$$
$$\text{s.t.}\ Ax=0$$

解： 对应的Lagrange函数为： $L=\|x-b\|^2+\lambda^TAx$

$$=x^Tx-2b^Tx+b^Tb+\lambda^TAx$$

令 $\nabla_x L = 0$，即： $2x-2b+A^T\lambda=0$

得： $x=b-\frac{A^T\lambda}{2}$

代回，得： $g(\lambda)=(b-\frac{1}{2}A^T\lambda)^T(b-\frac{1}{2}A^T\lambda)-2b^T(b-\frac{1}{2}A^T\lambda)+b^Tb+\lambda^TA(b-\frac{1}{2}A^T\lambda)$

$$=b^Tb-b^TA^T\lambda+\frac{1}{4}\lambda^TAA^T\lambda-2b^T(b-\frac{1}{2}A^T\lambda)+b^Tb+\lambda^TA(b-\frac{1}{2}A^T\lambda)$$

$$=b^Tb-b^TA^T\lambda+\frac{1}{4}\lambda^TAA\lambda-2b^Tb+b^TA^T\lambda+b^Tb+\lambda^TAb-\frac{1}{2}\lambda^TAA^T\lambda$$

$$=-\frac{1}{4}\lambda^TAA^T\lambda$$

$\therefore$ 对偶问题为 $\max_\lambda -\frac{1}{4}\lambda^TAA^T\lambda$

12. 建立下述优化问题的Lagrange对偶规划.

$$\min\ x_1^2+x_2^2$$

$$\text{s.t.}\ x_1+x_2\geq 4$$

$$x_1, x_2\geq 0$$

"原题有误"

验证对偶规划问题的目标函数为 $\theta(u)=-\frac{u^2}{2}+4u$，并且对偶间隙为零。

解： 对应的Lagrange函数： $L=x_1^2+x_2^2-\lambda(x_1+x_2-4)$ $(\lambda\geq 0)$ (省略简单项)

令 $\begin{cases}\frac{\partial L}{\partial x_1}=2x_1-\lambda=0\\ \frac{\partial L}{\partial x_2}=2x_2-\lambda=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x_1=\frac{\lambda}{2}\\ x_2=\frac{\lambda}{2}\end{cases}$ I

代回，得： $L=(\frac{\lambda}{2})^2+(\frac{\lambda}{2})^2+4\lambda-\lambda^2=-\frac{\lambda^2}{2}+4\lambda$

对于原规则问题，再有： $\lambda(x_1+x_2-4)=0$

① $\lambda=0$. 则结合I，得： $x_1=x_2=0$ 不满足： $x_1+x_2\geq 4$

② $x_1+x_2-4=0$. 结合I，得： $x_1=2, x_2=2, \lambda=4$ 且符合约束条件

故原规划问题最优值为： $2^2+2^2=8$

对于对偶规划问题 $L=-\frac{\lambda^2}{2}+4\lambda$ $(\lambda\geq 0)$，$[\max_{\lambda\geq 0} L]$

显然其最优值为： $L_{max}=-\frac{4^2}{2}+4\times 4=8$ ($\lambda=4$时取得)

故 综上，原规划问题和对偶规划问题的最优值相等.

即对偶间隙为零.