二次规划

模型与基本性质

对偶理论

等式约束二次规划问题

有效集方法

一、模型与基本性质

优化模型

$$\min \ Q(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$$
$$\text{s.t.} \ \boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = b_i, \ i \in \mathcal{E}$$
$$\boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \geqslant b_i, \ i \in \mathcal{I}$$

模型特点 $\boldsymbol{G} \in \mathbb{R}^n \ \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\left(\frac{\boldsymbol{G}+\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}}{2}\right)\boldsymbol{x},$ 以下设$\boldsymbol{G}$ 对称。

目标函数二次, 二阶连续可微 $\nabla Q(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{G}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{g}$ $\nabla^2 Q(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{G}$

约束线性 $\Omega = \{\boldsymbol{x} \in R^n \mid \boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = b_i, \ i \in \mathcal{E}; \ \boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \geqslant b_i, \ i \in \mathcal{I}\}$

研究进展

- 最简单、最早被研究的一类非线性优化问题;
- 最优解的存在性可通过有限的计算量验证;
- 如果最优解存在，可借助数值方法在有限步内得到.

求解方法：积极集方法、内点算法.

最优解的存在性（Frank-Wolfe定理,1956）

定理

$$
\begin{aligned}
\min\ & Q(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\
\text{s.t.}\ & \boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = b_i, \quad i \in \mathcal{E} \\
& \boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \geqslant b_i, \quad i \in \mathcal{I}
\end{aligned}
$$

若目标函数在可行域上有下界，则有全局最优解.

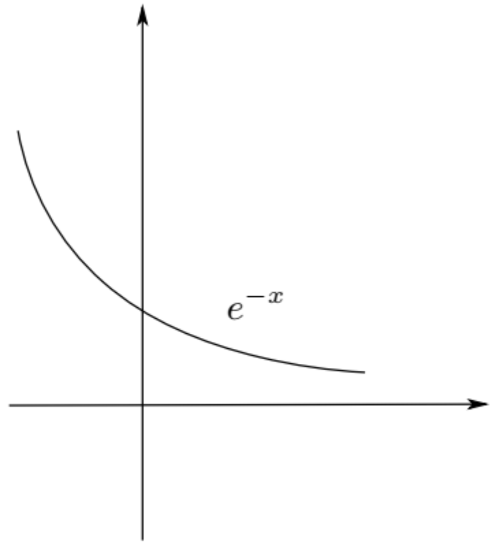
线性互补问题

该结论仅对二次规

$$
\begin{aligned}
& \min F(x)^{\top}x \\
& \text{s.t. } F(x) = Ax + b \\
& x \geqslant 0
\end{aligned}
$$

指数函数 e^{-x} 严格

最优值为零,但不能达到.



$$
\begin{aligned}
\min\ & Q(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\
\text{s.t.}\ & \boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = b_i, \quad i \in \mathcal{E} \\
& \boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \geqslant b_i, \ i \in \mathcal{I}
\end{aligned}
$$

推论 若严格凸二次规划可行域非空，则有唯一全局最优解.

一个更深的结论：

严格凸二次函数在任意非空闭凸集上都有唯一全局最优解.

二、对偶理论

$$\begin{aligned} \min\ & Q(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{s.t.}\ & \boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = b_i, \quad i \in \mathcal{E} \\ & \boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \geqslant b_i, \ i \in \mathcal{I} \end{aligned}$$

矩阵G对称正定

记$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = (\boldsymbol{a}_i)_{\mathcal{I}\cup\mathcal{E}}, \boldsymbol{b} = (b_i)_{\mathcal{I}\cup\mathcal{E}}.$

Lagrange函数 $L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b})$, $\lambda_i \geqslant 0,\ i \in \mathcal{I},$

Lagrange对偶 $\max\limits_{\lambda} \min\limits_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n} L(\boldsymbol{x}, \lambda)$

$$\max_{\lambda} \boxed{\min_{x\in\mathbb{R}^n} L(\boldsymbol{x},\lambda) = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b})}$$

矩阵G对称正定

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{G}^{-1}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{g}).$$

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{2}\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\lambda} - (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{A}\boldsymbol{G}^{-1}\boldsymbol{g})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda} \\ \text{s.t.} \quad & \lambda_i \geqslant 0, \quad i \in \mathcal{I} \end{aligned}$$

强对偶定理

设 $\boldsymbol{x}^*$, $\boldsymbol{\lambda}^*$分别为严格凸二次规划及对偶规划的最优解.

则 $\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{G}^{-1}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}^* - \boldsymbol{g}).$

对严格凸二次规划，利用其对偶解可得原规划最优解。

三、等式约束二次规划

1、无约束二次规划

$$\min_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n} Q(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$$

定理 凸二次函数 $Q(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$ 有最优解

无约束凸优化最优性条件

$$\nabla Q(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{G}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{g} = \mathbf{0}$$

$$\boldsymbol{g} \in \mathcal{R}(\boldsymbol{G}),\ \text{即}\operatorname{rank}(\boldsymbol{G})=\operatorname{rank}(\boldsymbol{G}\quad \boldsymbol{g}).$$

此时，任意满足 $\boldsymbol{G}\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{g}$ 的 $\boldsymbol{x}$ 均为二次规划最优解。

2、等式约束二次规划的消元法

$$\begin{aligned} \min \quad & Q(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} \quad & \boxed{\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min \quad & Q(\boldsymbol{x}_B, \boldsymbol{x}_N) = \frac{1}{2}\Big(\boldsymbol{x}_B^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}_{BB}\boldsymbol{x}_B + \boldsymbol{x}_B^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}_{BN}\boldsymbol{x}_N + \boldsymbol{x}_N^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}_{NB}\boldsymbol{x}_B \\ & \quad + \boldsymbol{x}_N^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}_{NN}\boldsymbol{x}_N\Big) + \boldsymbol{g}_B^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_B + \boldsymbol{g}_N^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_N \\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}_B + \boldsymbol{N}\boldsymbol{x}_N = \boldsymbol{b} \end{aligned}$$

设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 行满秩，分块得

非奇异

$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{N}), \qquad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_B \\ \boldsymbol{x}_N \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{g} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{g}_B \\ \boldsymbol{g}_N \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{G} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{G}_{BB} & \boldsymbol{G}_{BN} \\ \boldsymbol{G}_{NB} & \boldsymbol{G}_{NN} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}_B = \boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{N}\boldsymbol{x}_N)$$

$$\min_{\boldsymbol{x}_N \in \mathbb{R}^{n-m}} \psi(\boldsymbol{x}_N)$$

无约束二次规划

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}_B + \boldsymbol{N}\boldsymbol{x}_N = \boldsymbol{b}$$

$$\begin{aligned} \psi(\boldsymbol{x}_N) = {} & \frac{1}{2}\boldsymbol{x}_N^{\mathrm{T}}\Big(\boldsymbol{G}_{NN} - \boldsymbol{G}_{NB}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N} - \boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{G}_{BN} + \boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{G}_{BB}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N}\Big)\boldsymbol{x}_N \\ & + \boldsymbol{x}_N^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{G}_{NB} - \boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{G}_{BB})\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} + \frac{1}{2}\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{G}_{BB}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} \\ & + \boldsymbol{x}_N^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{g}_N - \boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{g}_B) + \boldsymbol{g}_B^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}. \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{x}_B = \boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{N}\boldsymbol{x}_N)$$

消元法的特点:

（1） 简单、直观

（2） B 接近奇异时会导致数值结果不稳定

例

$$\begin{aligned} \min \quad & Q(\boldsymbol{x}) = x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ & x_2 - x_3 = 1 \end{aligned}$$

$$\min \quad Q(x_3) = 4x_3^2 - (x_3+1)^2 - x_3^2$$

解：对约束条件，

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x_3 = \frac{1}{2}$$

取 $\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{N}} = x_3$

$$\boldsymbol{x}^* = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

则 $x_2 = x_3 + 1,\ \ x_1 = -2x_3$

3、等式约束二次规划的Lagrange方法

原理：通过KKT条件获取最优解

$$\min \ f(\boldsymbol{x})$$
$$\text{s.t.} \quad c_i(\boldsymbol{x}) = 0, \qquad i \in \mathcal{E}$$

$$\begin{cases} \nabla f(\boldsymbol{x}^*) = \sum\limits_{i\in\mathcal{E}} \lambda_i^* \nabla c_i(\boldsymbol{x}^*), \\ \boldsymbol{c}(\boldsymbol{x}^*) = \boldsymbol{0}. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \min \quad & Q(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \end{aligned}$$

K-T条件

$$\begin{cases} \boldsymbol{G}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{g} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda} \\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} \boldsymbol{G} & -\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \\ -\boldsymbol{A} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\boldsymbol{g} \\ -\boldsymbol{b} \end{pmatrix}.$$

二次规划化为线性方程组

什么条件下非奇异？

系数矩阵非奇异的条件

定理 设矩阵$\boldsymbol{A}$行满秩, 并对任意满足$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的非零向量$\boldsymbol{x}$,

均有$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}\boldsymbol{x}>0$. 则矩阵$\begin{pmatrix} \boldsymbol{G} & -\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \\ -\boldsymbol{A} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}$非奇异。

此时，K-T点是二次规划问题的严格全局最优解.

例 用Lagrange法求解如下问题

$$\min \quad Q(\boldsymbol{x}) = 3x_1^2 + 2x_1x_2 + x_1x_3 + 2.5x_2^2 + 2x_2x_3 + 2x_3^2 - 8x_1 - 3x_2 - 3x_3$$

$$\text{s.t.}\ x_1 + x_3 = 3$$

$$x_2 + x_3 = 0$$

解： 由目标函数及约束条件

$$\boldsymbol{G} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{g} = \begin{pmatrix} -8 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

KKT系统

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{G} & -\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \\ -\boldsymbol{A} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\boldsymbol{g} \\ -\boldsymbol{b} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{x}^* = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda^* = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

有效集方法

$$\min_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n} \; Q(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \quad \Longrightarrow \quad \nabla Q(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{G}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{g} = \mathbf{0}$$

$$\begin{aligned} \min \quad & Q(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \end{aligned} \quad \Longrightarrow$$

消元法

Lagrange乘子法

$$\begin{aligned} \min \; & \tfrac{1}{2}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} \; & \boldsymbol{x} \geqslant \mathbf{0} \end{aligned}$$

抛弃非负约束，$-\boldsymbol{G}^{-1}\boldsymbol{g}$ 是目标函数的最小值点。

$\max\{\mathbf{0}, -\boldsymbol{G}^{-1}\boldsymbol{g}\}$ 是二次规划问题的最优解吗？

NO!

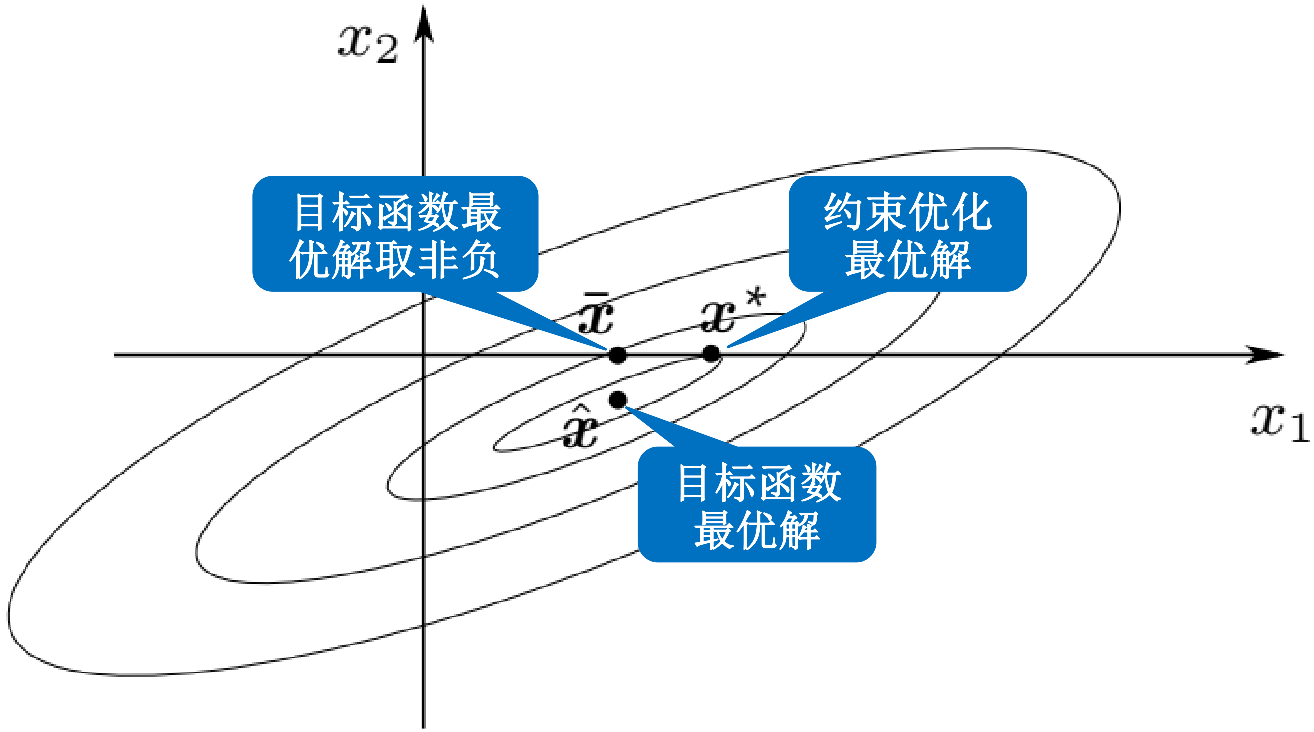
$$\min \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$$
$$\text{s.t. } \boldsymbol{x} \geqslant \mathbf{0}$$

其中，$\boldsymbol{G}=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{g}=(-3;2)$ → $-\boldsymbol{G}^{-1}\boldsymbol{g}=(\frac{7}{5};\frac{-1}{5})$.

$\max\{\mathbf{0},-\boldsymbol{G}^{-1}\boldsymbol{g}\}=(\frac{7}{5};0)$ → 函数值-2.24

取可行解 $(3/2;0)$ → 函数值-2.25

结论：不等式约束二次规划问题不好解！



启示：$\max\{\mathbf{0}, -\boldsymbol{G}^{-1}\boldsymbol{g}\}$ 虽然不是问题的最优解，但可作为初始点

基本原理

$$\begin{aligned} \min \quad & Q(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = b_i, \quad i \in \mathcal{E} \\ & \boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \geqslant b_i, \quad i \in \mathcal{I} \end{aligned}$$

定理 设 $\boldsymbol{x}^*$为可行解。其对应如下等式约束二次规划问题

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = b_i, \quad i \in \mathcal{A}(\boldsymbol{x}^*) \end{aligned}$$

设 $(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)$ 是该二次规划 的K-T对.

若对任意的$i \in \mathcal{I}(\boldsymbol{x}^*)$, 都有 $\lambda_i^* \geqslant 0$, 则 $\boldsymbol{x}^*$是原二次规划K-T点.

$$\begin{aligned} \min \quad & Q(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = b_i, \quad i \in \mathcal{E} \\ & \boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \geqslant b_i, \quad i \in \mathcal{I} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = b_i, \quad i \in \mathcal{A}(\boldsymbol{x}^*) \end{aligned}$$

意义：借助等式约束二次规划，可建立不等式约束二次规划最优解的一个判定方法。

问题：可否借助等式约束二次规划，建立不等式约束二次规划的求解算法?

$$\begin{aligned} \min \quad & Q(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = b_i, \quad i \in \mathcal{E} \\ & \boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \geqslant b_i, \quad i \in \mathcal{I} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = b_i, \quad i \in \mathcal{A}(\boldsymbol{x}^*) \end{aligned}$$

如何确定？

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}\boxed{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = b_i, \quad i \in \mathcal{A}(\boldsymbol{x}_k) \end{aligned}$$

考虑子问题

$$\begin{aligned} \min \quad & \tfrac{1}{2}\boxed{(\boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{d})}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{d}) + \boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{d}) \\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{d}) = b_i, \quad i \in \mathcal{A}(\boldsymbol{x}_k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{2}(\boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{d})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{d}) + \boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{d}) \\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d} = 0, \quad i \in \mathcal{A}(\boldsymbol{x}_k) \end{aligned}$$

最优解 $\boldsymbol{d}_k$ 为原二次规划

可行下降方向！

其最优解不可行，没有意义！

为便于计算，对 $\mathcal{A}(\boldsymbol{x}_k)$ 松弛

$$
\begin{aligned}
\min\ & \frac{1}{2}(\boldsymbol{x}_k+\boldsymbol{d})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}_k+\boldsymbol{d})+\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}_k+\boldsymbol{d}) \\
\text{s.t. } & \boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}_k+\boldsymbol{d})=b_i,\quad i\in\mathcal{A}(\boldsymbol{x}_k)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\min\ & \frac{1}{2}(\boldsymbol{x}_k+\boldsymbol{d})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}_k+\boldsymbol{d})+\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}_k+\boldsymbol{d}) \\
\text{s.t. } & \boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d}=0,\quad i\in\mathcal{S}_k
\end{aligned}
$$

$$\boxed{\mathcal{E}\subset\mathcal{S}_k\subset\mathcal{A}(\boldsymbol{x}_k)}$$

最优解 $\boldsymbol{d}_k$ 仍为原二次问题的可行下降方向！

定理 若子问题

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{2}(\boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{d})^{\mathrm{T}} \boldsymbol{G} (\boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{d}) + \boldsymbol{g}^{\mathrm{T}} (\boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{d}) \\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}} \boldsymbol{d} = 0, \quad i \in \mathcal{S}_k \end{aligned}$$

的最优解 $\boldsymbol{d}_k$ 非零，则对任意的 $\alpha \in (0, 1]$,

$$Q(\boldsymbol{x}_k + \alpha \boldsymbol{d}_k) < Q(\boldsymbol{x}_k).$$

下降区间

进一步，

$$Q(\boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{d}_k) = \min_{\alpha \in [0,1]} Q(\boldsymbol{x}_k + \alpha \boldsymbol{d}_k)$$

下降量最大

搜索方向 $\boldsymbol{d}_k$ 下降性解决！

搜索方向可行性

$$\begin{aligned} \boldsymbol{d}_k = \arg\min \quad & \frac{1}{2}(\boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{d})^{\mathrm{T}} \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{d}) + \boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{d}) \\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}} \boldsymbol{d} = 0, \quad i \in \mathcal{S}_k \end{aligned}$$

$$\mathcal{E} \subset \mathcal{S}_k \subset \mathcal{A}(\boldsymbol{x}_k) \subset \mathcal{E} \cup \mathcal{I}$$

由约束条件 $\boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}} \boldsymbol{d} = 0, \quad i \in \mathcal{S}_k$ ，对 $\forall \alpha \geq 0, \quad i \in \mathcal{S}_k$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}_k + \alpha \boldsymbol{d}_k) = & \ \boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}_k + \alpha \boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}} \boldsymbol{d}_k \\ = & \ \boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}_k = b_i \end{aligned}$$

$\boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}_k + \alpha_k \boldsymbol{d}_k) \geqslant b_i, \quad i \in \mathcal{S}_k$ 自然满足。

对$i \in \mathcal{I}\backslash\mathcal{S}_k$ ，由$\boldsymbol{x}_k$ 可行

$$\boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_k - b_i \geqslant 0 \quad \text{对任意} \quad i \in \mathcal{I}\backslash\mathcal{S}_k$$

为保证 $\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{x}_k + \alpha_k \boldsymbol{d}_k$ 可行，步长 α_k 需满足

$$\boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}_k + \alpha_k \boldsymbol{d}_k) = \boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_k + \alpha_k \boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d}_k$$

$$\geqslant b_i$$

$\boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d}_k \geqslant 0$

$$\boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}_k + \alpha_k \boldsymbol{d}_k) \geqslant b_i,$$

$$\forall \alpha \geq 0$$

$\boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d}_k < 0$

$$\boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_k + \alpha \boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d}_k \geqslant b_i$$

$$\alpha \boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d}_k \geqslant b_i - \boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_k$$

$$\alpha \leqslant \frac{b_i - \boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_k}{\boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d}_k}$$

可行步长区间：$[0, \hat{\alpha}_k]$ $$\hat{\alpha}_k \triangleq \min_{\boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d}_k<0,\ i\in\mathcal{I}\backslash\mathcal{S}_k} \left\{\frac{b_i - \boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_k}{\boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d}_k}\right\}.$$

最优步长计算

下降性 $Q(\boldsymbol{x}_k + \alpha \boldsymbol{d}_k) < Q(\boldsymbol{x}_k).$ 对任意 $\alpha \in (0, 1],$

最大可行步长
$$\hat{\alpha}_k \triangleq \min_{\boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}} \boldsymbol{d}_k < 0,\ i \in \mathcal{I} \setminus \mathcal{S}_k} \left\{ \frac{b_i - \boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}_k}{\boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}} \boldsymbol{d}_k} \right\}.$$

最优步长 $\alpha_k = \min\{1, \hat{\alpha}_k\}$

迭代过程 $\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{x}_k + \alpha_k \boldsymbol{d}_k,$

$\mathcal{S}_k$ 的调整　　$\alpha_k = \hat{\alpha}_k$ 或 $\alpha_k = 1$

$$\hat{\alpha}_k \triangleq \min_{\boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d}_k<0,\ i\in\mathcal{I}\backslash\mathcal{S}_k} \left\{\frac{b_i - \boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_k}{\boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d}_k}\right\}.$$

$$\boxed{\boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}_k + \alpha_k \boldsymbol{d}_k) \geqslant b_i, \qquad i \in \mathcal{I}\backslash\mathcal{S}_k}$$

若 $\alpha_k = \hat{\alpha}_k$ ，说明存在 $i_0 \in \mathcal{I}\backslash\mathcal{S}_k$ 使得

$$\boldsymbol{a}_{i_0}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}_k + \alpha_k \boldsymbol{d}_k) = b_{i_0}$$

令 $\mathcal{S}_{k+1} = \mathcal{S}_k \cup \{i_0\}$ ，**k=k+1,** 进入下一次迭代 。

若 $\alpha_k < \hat{\alpha}_k$, 则 $\alpha_k = 1$, 令 $\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{d}_k$, $\mathcal{S}_{k+1} = \mathcal{S}_k$

k=k+1, 进入下一次迭代 。

$\boldsymbol{d}_k = \mathbf{0}$ 怎么办？

$\boldsymbol{x}_k$ 是下述二次规划问题的K-T点

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = b_i, \quad i \in \mathcal{S}_k \end{aligned}$$

验证 $\boldsymbol{x}_k$ 是否为原二次规划问题的**K-T**点。

若不等式约束对应的Lagrange乘子非负, 即对任意的 $i \in \mathcal{S}_k \cap \mathcal{I}(\boldsymbol{x}_k)$,

都有 $\lambda_i^k \geqslant 0$, $\boldsymbol{x}_k$ 是原问题的K-T点。算法终止。

否则，从 $\mathcal{S}_k$ 中剔除Lagrange乘子最负的不等式约束！

$$i_k = \arg \min_{i \in \mathcal{S}_k \cap \mathcal{I}(\boldsymbol{x}_k)} \{\lambda_i^k \mid \lambda_i^k < 0\}, \qquad \mathcal{S}_{k+1} = \mathcal{S}_k \backslash \{i_k\}, \quad \boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{x}_k.$$

令**k=k+1**，进入下一次迭代。

再次求解二次规划子问题

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{2}(\boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{d})^{\mathrm{T}} \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{d}) + \boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{d}) \\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}} \boldsymbol{d} = 0, \quad i \in \mathcal{S}_k \end{aligned}$$

并重复上述过程。

有效集算法

步1. 取初始可行点 $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n$. 令 $\mathcal{S}_0 = \mathcal{A}(\boldsymbol{x}_0)$, $k = 0$.

步2. 求解子问题

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{2}(\boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{d})^{\mathrm{T}} \boldsymbol{G} (\boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{d}) + \boldsymbol{g}^{\mathrm{T}} (\boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{d}) \\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}} \boldsymbol{d} = 0, \quad i \in \mathcal{S}_k \end{aligned}$$

得K-T点。若 $\boldsymbol{d}_k \neq \boldsymbol{0}$, 转步3; 否则, 验证 $\boldsymbol{x}_k$是否为原问题的K-T点.

若对任意的 $i \in \mathcal{S}_k \cap \mathcal{I}(\boldsymbol{x}_k)$, $\lambda_i^k \geqslant 0$, 算法停止。否则, 取

$$i_k = \arg \min_{i \in \mathcal{S}_k \cap \mathcal{I}(\boldsymbol{x}_k)} \{\lambda_i^k \mid \lambda_i^k < 0\}, \quad \mathcal{S}_{k+1} = \mathcal{S}_k \backslash \{i_k\},$$

令 $\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{x}_k$, $k = k + 1$, 返回步2.

步3. 计算最大可行步长

$$\hat{\alpha}_k \triangleq \min_{\boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d}_k<0,\ i\in\mathcal{I}\backslash\mathcal{S}_k} \left\{\frac{b_i - \boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_k}{\boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d}_k}\right\}$$

定义步长 $\alpha_k = \min\{1, \hat{\alpha}_k\}$

步4. 若 $\alpha_k \neq \hat{\alpha}_k$, 则令 $\mathcal{S}_{k+1} = \mathcal{S}_k, k = k+1,$ 转步**2;**

否则, 从 $\mathcal{I}\backslash\mathcal{S}_k$ 取满足 $\boldsymbol{a}_{i_k}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}_k + \alpha_k\boldsymbol{d}_k) = b_{i_k}$. 的不等式积极约束 i_k

令 $\mathcal{S}_{k+1} = \mathcal{S}_k \cup \{i_k\},\ k = k+1,$

转步**2**。

算法有限步终止性

定理：对严格凸二次规划问题

$$\begin{aligned} \min \quad & Q(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = b_i, \quad i \in \mathcal{E} \\ & \boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \geqslant b_i, \quad i \in \mathcal{I} \end{aligned}$$

设有效集方法产生迭代点列 $\{\boldsymbol{x}_k\}$. 若对任意的 k , 向量组

$[\boldsymbol{a}_i, \ i \in \mathcal{A}(\boldsymbol{x}_k)]$ 线性无关, 则算法有限步终止于问题的**K-T**点.

例　求解二次规划问题
$$\begin{aligned} \min \quad & Q(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 - 4x_2 \\ \text{s.t.}\ & -x_1 - x_2 + 1 \geqslant 0 \\ & x_1, x_2 \geqslant 0 \end{aligned}$$

解：取初始点 $\boldsymbol{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$　$S_0 = \mathcal{A}(\boldsymbol{x}^{(0)}) = \{2, 3\}$

求解等式约束优化子问题

$$\begin{aligned} \min\ & d_1^2 + d_2^2 - 2d_1 - 4d_2 \\ \text{s.t.}\ & d_1 = 0 \\ & d_2 = 0 \end{aligned}$$

得最优解和相应的Lagrange乘子

$$\boldsymbol{d}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \lambda^{(0)} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

新的迭代点为 $\boldsymbol{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

修正指标集 $S_1 = S_0/\{3\} = \mathcal{A}_0/\{3\} = \{2\}$

进入第二次迭代。即求解子问题

$$\begin{aligned} &\min\ d_1^2 + d_2^2 - 2d_1 - 4d_2 \\ &\text{s.t. } d_1 = 0 \end{aligned}$$

得最优解 $\boldsymbol{d}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

计算步长

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \min\left\{1, \frac{b_i - \boldsymbol{a}_i^\top \boldsymbol{x}^{(1)}}{\boldsymbol{a}_i^\top \boldsymbol{d}^{(1)}} \mid i = 1, 3, \boldsymbol{a}_i^\top \boldsymbol{d}^{(1)} < 0\right\} \\ &= \frac{b_i - \boldsymbol{a}_1^\top \boldsymbol{x}^{(1)}}{\boldsymbol{a}_1^\top \boldsymbol{d}^{(1)}} = \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

令 $\boldsymbol{x}^{(2)} = \boldsymbol{x}^{(1)} + \alpha_1 \boldsymbol{d}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$S_2 = S_1 \cup \{1\} = \{1, 2\}$$

进入第三次迭代，即求解子问题

$$\begin{aligned} \min\ & d_1^2 + d_2^2 - 2d_1 - 2d_2 \\ \text{s.t.}\ & d_1 + d_2 = 0 \\ & d_1 = 0 \end{aligned}$$

得 $\boldsymbol{d}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\lambda^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

求解子问题

$$\begin{aligned} \min\ & d_1^2 + d_2^2 - 2d_1 - 2d_2 \\ \text{s.t.}\ & d_1 + d_2 = 0 \\ & d_1 = 0 \end{aligned}$$

得最优解及对应的Lagrange乘子 $\boldsymbol{d}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\lambda^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

最优解为零，Lagrange乘子非负。故原问题最优解

$$\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

最优Lagrange乘子 $\lambda^* = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$