HW-04

1. 依次求出最小化 $f(x)=x_1^2+4x_2^2+16x_3^2$ 在约束 $c(x)=0$ 下的所有KKT点，
其中 $c(x)$ 分别为：(1) $c(x)=x_1-1$；

(2) $c(x)=x_1x_2-1$；

(3) $c(x)=x_1x_2x_3-1$.

解：对 $f(x)=x_1^2+4x_2^2+16x_3^2$，有 $\nabla f(x)=[2x_1\ \ 8x_2\ \ 32x_3]^T$

再，对于约束优化问题 $\min f(x)$，s.t. $c(x)=0$，其KKT条件如下：

$$\begin{cases}\nabla f(x)+\lambda\nabla c(x)=0\\ c(x)=0\end{cases} \quad ①$$

(1) 若 $c(x)=x_1-1$，易得 $\nabla c(x)=[1\ \ 0\ \ 0]^T$

若使其满足①，则：
$$\begin{cases}2x_1+\lambda=0\\ 8x_2=0\\ 32x_3=0\\ x_1=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x_1=1\\ x_2=0\\ x_3=0\\ \lambda=-2\end{cases}$$
即KKT点为 $(1,0,0)$

(2) 若 $c(x)=x_1x_2-1$，易得 $\nabla c(x)=[x_2\ \ x_1\ \ 0]^T$

使其满足①，则：
$$\begin{cases}2x_1+\lambda x_2=0\\ 8x_2+\lambda x_1=0\\ 32x_3=0\\ x_1x_2=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x_1=\sqrt{4}\\ x_2=\frac{1}{\sqrt{4}}\\ x_3=0\\ \lambda=-4\end{cases} \text{或} \begin{cases}x_1=-\sqrt{4}\\ x_2=\frac{-1}{\sqrt{4}}\\ x_3=0\\ \lambda=-4\end{cases}$$
即KKT点为：$(\sqrt{4},\frac{1}{\sqrt{4}},0)$、$(-\sqrt{4},\frac{-1}{\sqrt{4}},0)$

(3) 若 $c(x)=x_1x_2x_3-1$，易得 $\nabla c(x)=[x_2x_3\ \ x_1x_3\ \ x_1x_2]^T$

使其满足①，则：
$$\begin{cases}2x_1+\lambda x_2x_3=0\\ 8x_2+\lambda x_1x_3=0\\ 32x_3+\lambda x_1x_2=0\\ x_1x_2x_3=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x_1=2\\ x_2=1\\ x_3=\frac{1}{2}\\ \lambda=-8\end{cases} \text{或} \begin{cases}x_1=-2\\ x_2=-1\\ x_3=\frac{1}{2}\\ \lambda=-8\end{cases} \begin{matrix}-2\\ 1\\ -\frac{1}{2}\\ -8\end{matrix} \text{或} \begin{matrix}2\\ -1\\ -\frac{1}{2}\\ -8\end{matrix}$$

即KKT点为：$(2,1,\frac{1}{2})$、$(-2,-1,\frac{1}{2})$、$(-2,1,-\frac{1}{2})$、$(2,-1,-\frac{1}{2})$

2. 求下列问题的KKT点和对应的lagrange乘子.

(1) $\min\ (x_1-1)^2+(x_2-2)^2$

s.t. $(x_1-1)^2-5x_2=0$;

解: 令 $f(x)=(x_1-1)^2+(x_2-2)^2$, $c(x)=(x_1-1)^2-5x_2$, lagrange乘子 λ

则: $\nabla f(x)=[2(x_1-1)\ \ 2(x_2-2)]^T$

$\nabla c(x)=[2(x_1-1)\ \ -5]^T$

令 $\begin{cases}\nabla f(x)+\lambda\nabla c(x)=0\\ c(x)=0\end{cases}$ 得: $\begin{cases}2(x_1-1)+\lambda\cdot 2(x_1-1)=0\\ 2(x_2-2)-5\lambda=0\\ (x_1-1)^2-5x_2=0\end{cases}$

解得: $\begin{cases}x_1=1\\ x_2=0\\ \lambda=-\frac{4}{5}\end{cases}$ 即KKT点为(1,0), lagrange乘子为 $-\frac{4}{5}$.

(2) $\min\ (x_1+x_2)^2+2x_1+x_2^2$

s.t. $\begin{cases}x_1+3x_2\le 4\\ 2x_1+x_2\le 3\\ x_1\ge 0\\ x_2\ge 0\end{cases}$

构造拉格朗日函数如下: $(\lambda_1、\lambda_2、\mu_1、\mu_2\ge 0)$

$L=(x_1+x_2)^2+2x_1+x_2^2+\lambda_1(x_1+3x_2-4)+\lambda_2(2x_1+x_2-3)-\mu_1x_1-\mu_2x_2$

令 $\begin{cases}\frac{\partial L}{\partial x_1}=0\\ \frac{\partial L}{\partial x_2}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2(x_1+x_2)+2+\lambda_1+2\lambda_2-\mu_1=0\\ 2(x_1+x_2)+2x_2+3\lambda_1+\lambda_2-\mu_2=0\end{cases}$ ①

取 $\begin{cases}x_1+3x_2=4\\ 2x_1+x_2=3\end{cases}$ 得: $\begin{cases}x_1=1\\ x_2=1\end{cases}$ 代入①,得: $\begin{cases}6+\lambda_1+2\lambda_2-\mu_1=0\\ 6+3\lambda_1+\lambda_2-\mu_2=0\end{cases}$ ②

再 $\begin{cases}\mu_1x_1=0\\ \mu_2x_2=0\end{cases}$ 得: $\begin{cases}\mu_1=0\\ \mu_2=0\end{cases}$ 代入②,得: $\begin{cases}\lambda_1=-\frac{6}{5}\\ \lambda_2=-\frac{12}{5}\end{cases}$

∴ KKT点为(1,1), 对应的lagrange乘子为: $\begin{cases}\lambda_1=-\frac{6}{5}\\ \lambda_2=-\frac{12}{5}\\ \mu_1=0\\ \mu_2=0\end{cases}$

由①,得: $\begin{cases}\mu_1=2(x_1+x_2)+2+\lambda_1+2\lambda_2\\ \mu_2=2(x_1+x_2)+2x_2+3\lambda_1+\lambda_2\end{cases}$

考虑不等约束条件: $x_1\ge 0$, $x_2\ge 0$, 及 $\lambda_1\ge 0$、$\lambda_2\ge 0$

得: $\begin{cases}\mu_1\ge 2 \Rightarrow 得: x_1=0\\ \mu_2\ge 0 \Rightarrow 若\mu_2=0, 则即 4x_2+3\lambda_1+\lambda_2=0 只能\begin{cases}x_2=0\\ \lambda_1=0\\ \lambda_2=0\end{cases}, 则: \mu_1=2\end{cases}$

若 $\mu_2>0$, 则: $x_2=0$

综上, KKT点为(0,0), 对应的lagrange乘子有: $\begin{cases}\lambda_1=0\\ \lambda_2=0\\ \mu_1=2\\ \mu_2=0\end{cases}$

(3) min $f(x)=2x_1^2+x_2^2-10x_1-10x_2$

s.t. $\begin{cases} g_1(x)=x_1+x_2\le 5 \\ g_2(x)=2x_1+x_2\le 6 \end{cases}$

设拉格朗日函数如下:

$$L=2x_1^2+x_2^2-10x_1-10x_2+\lambda_1(x_1+x_2-5)+\lambda_2(2x_1+x_2-6)$$

令 $\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_1}=4x_1-10+\lambda_1+2\lambda_2=0 \\ \frac{\partial L}{\partial x_2}=2x_2-10+\lambda_1+\lambda_2=0 \end{cases}$ ①

取边界 $\begin{cases} x_1+x_2=5 \\ 2x_1+x_2=6 \end{cases}$ 得: $\begin{cases} x_1=1 \\ x_2=4 \end{cases}$ 代入①得: $\begin{cases} 4-10+\lambda_1+2\lambda_2=0 \\ 8-10+\lambda_1+\lambda_2=0 \end{cases}$

得: $\begin{cases} \lambda_1=-2 \\ \lambda_2=4 \end{cases}$

∴该问题的KKT点为(1,4),对应lagrance乘子为: $\begin{cases} \lambda_1=-2 \\ \lambda_2=4 \end{cases}$

注:取边界是由于经过检验,函数的驻点不符合题意,因此取函数边界值,即为目标值点.(最值定理)