参考数据： $z_{0.025}=1.96$, $z_{0.05}=1.645$, $t_{0.025}(24)=2.0639$, $t_{0.025}(25)=2.0595$

$t_{0.05}(24)=1.7109$, $t_{0.05}(25)=1.7081$， $t_{0.005}(15)=2.9467, t_{0.005}(16)=2.9208$

$t_{0.05}(8)=1.8595, t_{0.025}(8)=2.3060$ ， $\chi^2_{0.025}(24)=39.364$ ， $\chi^2_{0.975}(24)=12.401$ ，

$\chi^2_{0.025}(25)=40.646$， $\chi^2_{0.975}(25)=13.120$

1. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为总体 X 的样本，X 的概率密度为 $f(x;\lambda)=\begin{cases}\dfrac{\lambda}{2}e^{-\frac{\lambda}{2}x}, x>0\\ 0, x<0\end{cases}$

计算:参数 λ 的矩估计量.

解：$\mu_1=EX=\dfrac{2}{\lambda}, \lambda=\dfrac{2}{\mu_1}$, 用样本一阶原点矩 $M_1=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i=\bar{X}$ 估计 μ_1 得 $\hat{\lambda}=\dfrac{2}{\bar{X}}$.

2．设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$， X_1,X_2,X_3 为总体的一个样本，试证明：

$\hat{\mu}_1=\dfrac{1}{5}X_1+\dfrac{3}{10}X_2+\dfrac{1}{2}X_3$， $\hat{\mu}_2=\dfrac{1}{3}X_1+\dfrac{1}{4}X_2+\dfrac{5}{12}X_3$ 都是 μ 的无偏估计量，并分析哪一个较好.

证：

$$E(\mu_1)=E\left(\frac{1}{5}X_1+\frac{3}{10}X_2+\frac{1}{2}X_3\right)=\frac{1}{5}EX_1+\frac{3}{10}EX_2+\frac{1}{2}EX_3=\frac{1}{5}\mu+\frac{3}{10}\mu+\frac{1}{2}\mu=\mu,$$

同理 $E(\mu_2)=\mu$.

$$D(\mu_1)=D\left(\frac{1}{5}X_1+\frac{3}{10}X_2+\frac{1}{2}X_3\right)=\frac{1}{25}DX_1+\frac{9}{100}DX_2+\frac{1}{4}DX_3=\frac{38}{100}\sigma^2,$$

$$D(\mu_2)=D\left(\frac{1}{3}X_1+\frac{1}{4}X_2+\frac{5}{12}X_3\right)=\frac{1}{9}DX_1+\frac{1}{16}DX_2+\frac{25}{144}DX_3=\frac{25}{72}\sigma^2,$$

因 $D(\mu_2)$ 较小，故 μ_2 较好.

3. 已知某种商品的月销售量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$， μ,σ^2 均未知．现为了合理确定对该商品的进货量， 需对 μ 进行估计，为此，随机抽取 9 个月的销售量，算得 $\bar{x}=65.143$, $s=11.220$，试求 μ 的置信度为 0.95 的置信区间.（保留 3 位小数）

解： 由题意，可知 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，且 σ^2 未知，则

μ 的置信度为 α 的置信区间为 $\left[\bar{x}-\frac{s}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1),\bar{x}+\frac{s}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right]$.

又 $\bar{x}=65.143,\ s=11.220, n=9, \alpha=0.05, t_{\frac{\alpha}{2}}(\mathrm{n}-1)=t_{0.025}(8)=2.3060$

代入，可得

$\bar{x}-\frac{s}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)=56.519$，　$\bar{x}+\frac{s}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)=73.767$

所以，μ 的置信度为 95%的置信区间为[56.519, 73.767].

4. 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是取自总体 X 的一组样本值，X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

其中 $\theta>0$ 未知，求 θ 的最大似然估计值.

解：似然函数为

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x_i}{\theta}}$$

当 $x_i>0$ 时，

$$\mathrm{lnL}(\theta)=-\mathrm{nln}\theta-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}x_i$$

$$\frac{d}{d\theta}lnL(\theta)=-\frac{n}{\theta}+\frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n}x_i=0$$

得 θ 的最大似然估计值为 $\hat{\theta}=\bar{x}$。

5. 已知某种铁钉长度(单位：*cm*)服从方差 $\sigma^2=0.0004$ 的正态分布，μ 未知. 今从一批这种铁钉中随机抽取 25 件，测得其长度的平均值为 2.125 (*cm*). 问能否认为该种铁钉的平均长度为 2.12 *cm* ？($\alpha=0.05$)

解：（1）$H_0:\mu=\mu_0=2.12$　　$H_1:\mu\ne\mu_0(2.12)$　（2 分）

（2）检验统计量　$Z=\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$，——$Z$ 检验法

（3）$\alpha=0.05$，$z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0.025}=1.96$，$\mathrm{H}_0$ 的拒绝域为 $|z|\ge z_{\frac{\alpha}{2}}=1.96$

（4）n=25，$\alpha=0.05$，$\bar{x}=2.125$，

计算知$|z|=\left|\dfrac{\bar{x}-2.12}{0.02/\sqrt{25}}\right|=1.25<1.96$

接受H_0，可以认为该种铁钉的平均长度为2.12 cm