

$$\Phi(0.1)=0.5398, \Phi(1.96)=0.975, \Phi(0.44)=0.67, \Phi(1)=0.8413$$

1. 某县农民年平均收入服从 $\mu=500$ 元, $\sigma=200$ 元的正态分布, 如果要使此县农民年平均收入在 $(\mu-a, \mu+a)$ 内的概率不少于 0.95, 则 a 至少有多大?

解: 设 ξ 表示此县农民年平均收入, 则 $\xi \sim N(500, 200^2)$

$$\because P(\mu-a < \xi < \mu+a) = \Phi\left(\frac{a}{200}\right) - \Phi\left(-\frac{a}{200}\right) = 2\Phi\left(\frac{a}{200}\right) - 1 \geq 0.95,$$

$$\therefore \Phi\left(\frac{a}{200}\right) \geq 0.975.$$

$$\text{查表知: } \frac{a}{200} \geq 1.96 \Rightarrow a \geq 392.$$

2. 设某厂生产圆形的芯片和芯片底座, 芯片直径 (单位: 毫米) X 服从正态分布 $N(10, 0.3^2)$, 芯片底座内径 (单位: 毫米) Y 服从正态分布 $N(10.5, 0.4^2)$, X 与 Y 相互独立, 随机取一只芯片, 一个芯片底座, 求芯片能装入底座的概率.
- 解:

$$\begin{aligned} P\{X-Y < 0\} &= P\left\{\frac{(X-Y)-(10-10.5)}{\sqrt{0.3^2+0.4^2}} < \frac{0-(10-10.5)}{\sqrt{0.3^2+0.4^2}}\right\} \\ &= \Phi(1) = 0.8413 \end{aligned}$$

3. 设随机变量 X 服从参数为 1 的指数分布, 其概率密度为 $f_X(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$,

随机变量 $Y = e^{-2X}$, 试求 X 与 Y 的协方差 $Cov(X, Y)$.

$$\text{解: } Cov(X, Y) = E(XY) - E(X) \cdot E(Y)$$

$$E(X) = \int_0^{+\infty} x e^{-x} dx = 1$$

$$E(Y) = \int_0^{+\infty} e^{-2x} e^{-x} dx = \frac{1}{3}$$

$$E(XY) = \int_0^{+\infty} x e^{-2x} e^{-x} dx = \frac{1}{9}$$

$$Cov(X, Y) = E(XY) - E(X) \cdot E(Y) = -\frac{2}{9}$$

4. 一提炼某种产品的生产过程, 一天可生产该种产品一吨, 但由于机器损坏和减速, 一天实际产量 X 是一个随机变量, 设 X 的概率密度为

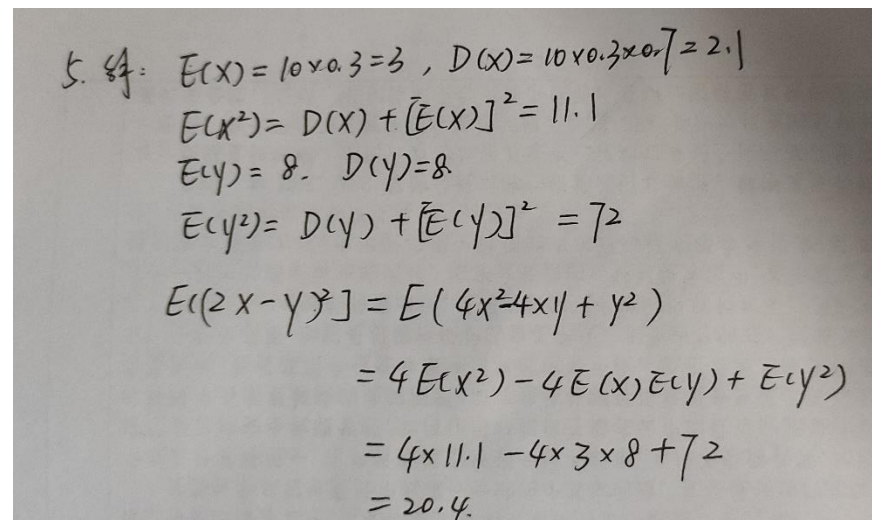
$$f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

一天的利润（以千元计） $U=6X-1$, U 也是随机变量，求 U 的数学期望.

解 U 的数学期望为

$$\begin{aligned} E(U) &= E(6X-1) = \int_{-\infty}^{+\infty} (6x-1)f(x)dx \\ &= \int_0^1 (6x-1) \cdot 2x dx \\ &= 12 \int_0^1 x^2 dx - 1 = 3 \quad (\text{千元}) \end{aligned}$$

5. 设随机变量 X 和 Y 相互独立，且 $X \sim B(10, 0.3)$, $Y \sim \pi(8)$ ，计算 $E[(2X-Y)^2]$ 。



5. 解: $E(X) = 10 \times 0.3 = 3$, $D(X) = 10 \times 0.3 \times 0.7 = 2.1$
 $E(X^2) = D(X) + [E(X)]^2 = 11.1$
 $E(Y) = 8$, $D(Y) = 8$
 $E(Y^2) = D(Y) + [E(Y)]^2 = 72$
 $E[(2X-Y)^2] = E(4X^2 - 4XY + Y^2)$
 $= 4E(X^2) - 4E(X)E(Y) + E(Y^2)$
 $= 4 \times 11.1 - 4 \times 3 \times 8 + 72$
 $= 20.4$