物联网 191/192 第一次测试题

1、已知 $P(\bar{A})=0.3$，$P(B)=0.4$，$P(A\bar{B})=0.5$，求条件概率 $P(B|A\cup\bar{B})$.

解：$P(B|A\cup\bar{B})=\dfrac{P(B(A\cup\bar{B}))}{P(A\cup\bar{B})}=\dfrac{P(AB)}{P(A)+P(\bar{B})-P(A\bar{B})}$

$$P(A)=1-P(\bar{A})=0.7$$

$$P(\bar{B})=1-P(B)=0.6$$

$$P(AB)=P(A)-P(A\bar{B})=0.7-0.5=0.2$$

$$P(B|A\cup\bar{B})=\frac{0.2}{0.7+0.6-0.2}=\frac{1}{4}$$

2、已知一批产品中 90%是合格品，检查时，一个合格品被误认为是次品的概率为 0.05，一个次品被误认为是合格品的概率为 0.02，求:

（1）一个产品经检查后被认为是合格品的概率；

（2）一个经检查后被认为是合格品的产品确是合格品的概率.

2、解: 设 $A=$‘任取一产品，经检验认为是合格品’

$B=$‘任取一产品确是合格品’

则（1） $P(A)=P(B)P(A|B)+P(\bar{B})P(A|\bar{B})$

$=0.9\times0.95+0.1\times0.02=0.857.$

（2） $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{0.9\times0.95}{0.857}=0.9977$

3、设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}a+x, & -1<x<0\\ a-x, & 0\le x<1\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$，

求：（1）常数 a 的值；（2） X 的分布函数 $F(x)$.

解：（1） $\because 1=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,dx=\int_{-1}^{0}(a+x)\,dx+\int_{0}^{1}(a-x)\,dx=2a-1$

$\therefore a=1$

（2） $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\,dt=\begin{cases}0, & x\le -1\\ \int_{-1}^{x}(1+t)\,dt, & -1\le x<0\\ \int_{-1}^{0}(1+t)\,dt+\int_{0}^{x}(1-t)\,dt, & 0\le x<1\\ \int_{-1}^{0}(1+t)\,dt+\int_{0}^{1}(1-t)\,dt, & x\ge 1\end{cases}$

$$=\begin{cases} 0 \quad , & x \le -1 \\ \dfrac{x^2}{2}+x+\dfrac{1}{2}, & -1 \le x < 0 \\ -\dfrac{x^2}{2}+x+\dfrac{1}{2}, & 0 \le x < 1 \\ 1, & x \ge 1 \end{cases}$$

4、设二维随机变量(X, Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} 2-x-y, 0<x<1, 0<y<1, \\ 0, \quad 其他. \end{cases},$$

判断 X 与 Y 是否相互独立？

解：$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\begin{cases} \int_0^1 (2-x-y)dy=\dfrac{3}{2}-x, & 0<x<1 \\ 0, & 其它 \end{cases}$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\begin{cases} \int_0^1 (2-x-y)dx=\dfrac{3}{2}-y, & 0<y<1 \\ 0 & ,其它 \end{cases}$$

$$f_x(x)f_y(y)=(\frac{3}{2}-x)(\frac{3}{2}-y)\ne f(x,y), 当 0\le x\le 1, 0\le y\le 1$$

因此 X 与 Y 不相互独立

5、设随机变量 X 的概率密度为：

$$f_X(x)=\begin{cases} \dfrac{2}{\pi(1+x^2)}, & x>0 \\ 0 \quad , & x\le 0 \end{cases}$$

求 $Y=\ln X$ 的概率密度函数.

解： $F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{\ln X\le y\}=P\{X\le e^y\}$

于是，$f_Y(y)=f_x(e^y)e^y=\dfrac{2e^y}{\pi(1+x^2)}, \quad -\infty<y<+\infty$

计算机 194/195 第一次测试题

1、设 A,B,C 是三事件，且 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}, P(AB)=P(BC)=0, P(AC)=\frac{1}{8}$，

求 A,B,C 至少有一个发生的概率.

解：由于 $P(AB)=0$，所以

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}=\frac{5}{8}.$$

2、病树的主人外出，委托邻居浇水，设已知如果不浇水，病树死去的概率为 0.8，若浇水则死去的概率为 0.15. 有 0.9 的把握确定邻居会记得浇水.

（1）求主人回来树还活着的概率；

（2）若主人回来树已死去，求邻居忘记浇水的概率.

解：设事件 B={树还活着}，A={邻居记得给树浇水}

$$P(A)=0.9,\quad P(\overline{A})=0.1,\quad P(B\mid A)=0.85,\quad P(B\mid \overline{A})=0.2,$$

（1）由全概率公式得：$P(B)=P(B\mid A)P(A)+P(B\mid \overline{A})P(\overline{A})$

$$=0.85\times 0.9+0.2\times 0.1=0.785$$

（2）由贝叶斯公式得：$P(\overline{A}\mid \overline{B})=\dfrac{P(\overline{B}\mid \overline{A})P(\overline{A})}{P(\overline{B})}=\dfrac{\left[1-P(B\mid\overline{A})\right]P(\overline{A})}{1-P(B)}$

$$=\frac{0.8\times 0.1}{0.215}=0.372$$

3、设随机变量 X 具有概率密度

$$f_X(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|},-\infty<x<+\infty$$，求：随机变量 $Y=X^2$ 的概率密度.

解：Y 的分布函数 $F_Y(y)=P(Y\le y)=P(X^2\le y)$

当 $y\le 0$ 时，$F_Y(y)=0$

当 $y>0$ 时，$F_Y(y)=P(X^2\le y)=P(-\sqrt{y}\le X\le\sqrt{y})$

$$=F_X(\sqrt{y})-F_X(-\sqrt{y})$$

求导：

$$f_Y(y)=\frac{1}{2\sqrt{y}}\left[f_X(\sqrt{y})+f_X(-\sqrt{y})\right]$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{y}}\left[\frac{1}{2}e^{-\sqrt{y}}+\frac{1}{2}e^{-\sqrt{y}}\right]=\frac{1}{2\sqrt{y}}e^{-\sqrt{y}}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{y}}\mathrm{e}^{-\sqrt{y}}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$$

4、设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases} x+b\ , 0<x<1 \\ 0, \quad 其他 \end{cases}$，且，求：（1）常数 b 的值；

（2）X 的分布函数 $F(x)$.

解：（1）$\because \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=\int_0^1 (x+b)\,dx=\frac{1}{2}+b=1$，

$$\therefore b=\frac{1}{2}$$

（2）$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt=\begin{cases} 0 \quad , \quad x\le 0 \\ \int_0^x \left(t+\frac{1}{2}\right)dt, \quad 0<x<1 \\ \int_0^1 \left(t+\frac{1}{2}\right)dt, \quad x\ge 1 \end{cases}=\begin{cases} 0 \quad , \quad x\le 0 \\ \frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x\ , \quad 0<x<1 \\ 1 \quad , \quad x\ge 1 \end{cases}$

5、设二维随机变量 $(X,\ Y)$ 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{21}{4}x^2y, \ -1\le x\le 1, x^2<y<1 \\ 0, \quad 其他 \end{cases},$$

试判断随机变量 X 与 Y 是否相互独立？

解：$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\begin{cases} \int_{x^2}^{1}\frac{21}{4}x^2ydy=\frac{21}{8}x^2(1-x^4), \quad -1\le x\le 1 \\ 0, \quad 其它 \end{cases}$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\begin{cases} \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}\frac{21}{4}x^2ydx=\frac{7}{2}y^{\frac{5}{2}}, \quad 0\le y\le 1 \\ 0 \quad ,其它 \end{cases}$$

$f_x(x)f_y(y)\ne f(x,y)$, 当 $-1\le x\le 1, 0\le y\le 1$

因此 X 与 Y 不相互独立。

计算机 196/遥感 191 第一次测试题

1、设 A,B 是两个随机事件，已知 $P(A)=0.4$，$P(B)=0.5$，$P(B|A)=0.45$，求 $P(\overline{A\cup B})$.

解： $P(\overline{A\cup B})=1-\mathrm{P}(A\cup B)$

$$=1-[P(A)+P(B)-P(AB)]$$

$$=1-[0.4+0.5-P(B|A)P(A)]$$

$$=1-[0.9-0.45\times0.4]=0.28\,.$$

2、某工厂由甲、乙、丙三个车间生产同一种电子元器件，每个车间的产量分别占全厂的 20%，35%，45%，各车间产品的次品率分别为 3%，1%，2%．求：(1)全厂产品的次品率；(2)若任取一件产品发现是次品，此次品是乙车间生产的概率是多少？

解：设事件 A_1={产品为甲车间生产}，A_2={产品为乙车间生产}，A_3={产品为丙车间生产}，B={产品为次品}

$$P(A_1)=0.2,\quad P(A_2)=0.35,\quad P(A_3)=0.45，P(B\mid A_1)=0.03,\quad P(B\mid A_2)=0.01，P(B\mid A_3)=0.02$$

（1）由全概率公式得：$P(B)=P(B\mid A_1)P(A_1)+P(B\mid A_2)P(A_2)+P(B\mid A_3)P(A_3)$

$$=0.2\times0.03+0.35\times0.01+0.45\times0.02=0.0185$$

（2）由贝叶斯公式得：$P(A_2\mid B)=\dfrac{P(B\mid A_2)P(A_2)}{P(B\mid A_1)P(A_1)+P(B\mid A_2)P(A_2)+P(B\mid A_3)P(A_3)}$

$$=\frac{0.35\times0.01}{0.2\times0.03+0.35\times0.01+0.45\times0.02}=\frac{0.0035}{0.0185}=\frac{35}{185}=\frac{7}{37}\approx0.189$$

3、设连续型随机变量 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}Ax^2\,, & 0<x<1\\ 0\,, & 其它\end{cases}$$

试求 (1) A；（2）求分布函数.

解：(1)由密度函数的性质有 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=1$，即

$$\int_0^1 Ax^2\mathrm{d}x=\frac{A}{3}x^3\Big|_0^1=\frac{A}{3}=1$$

得 $A=3$

（2）$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=\begin{cases}\int_{-\infty}^{x}0dt=0, & x\le 0\\ \int_{-\infty}^{0}0dt+\int_0^x 3t^2dt=x^3, & 0<x<1\\ \int_{-\infty}^{0}0dt+\int_0^1 3t^2dt+\int_1^x 0dt=1, & x\ge 1\end{cases}$$

4、设随机变量 $X\sim U(-1,1)$，求 $Y=X^2$ 的概率密度.

解：X 的概率密度为 $$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & -1<x<1\\ 0\,, & 其它\end{cases}$$

Y 的分布函数 $F_Y(y) = P(Y \le y) = P(X^2 \le y)$

当$y \le 0$时，$F_Y(y) = 0$

当$y > 0$时，$F_Y(y) = P(-\sqrt{y} \le X \le \sqrt{y}) = F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y})$

求导得：$f_Y(y) = \dfrac{1}{2\sqrt{y}} \cdot \left[f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y}) \right] = \dfrac{1}{2\sqrt{y}}$，当$0 < y < 1$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{y}}, & 0 < y < 1 \\ 0, & 其它 \end{cases}$$

5、设二维随机变量(X, Y)的概率密度为

$f(x,y) = \begin{cases} 8xy, & 0 \le x \le 1, 0 \le y \le x \\ 0, & 其他 \end{cases}$，判断随机变量 X，Y 是否相互独立.

解：$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \begin{cases} \int_0^x 8xydy = 4x^3, & 0 < x < 1 \\ 0, & 其它 \end{cases}$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx = \begin{cases} \int_y^1 8xydx = 4y(1-y^2), & 0 < y < 1 \\ 0, & 其它 \end{cases}$$

$f_x(x) f_y(y) = 4x^3 \cdot 4y(1-y^2) \ne f(x,y)$, 当$0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1$

因此 X 与 Y 不相互独立。