参考数据： $z_{0.025}=1.96$，$z_{0.05}=1.645$，$t_{0.025}(24)=2.0639$，$t_{0.025}(25)=2.0595$

$t_{0.05}(24)=1.7109$，$t_{0.05}(25)=1.7081$， $t_{0.005}(15)=2.9467, t_{0.005}(16)=2.9208$

$t_{0.05}(8)=1.8595, t_{0.025}(8)=2.3060$ ， $\chi^2_{0.025}(24)=39.364$ ， $\chi^2_{0.975}(24)=12.401$ ，

$\chi^2_{0.025}(25)=40.646$， $\chi^2_{0.975}(25)=13.120$

1．设总体 X 具有分布律

X	1	2	3
P	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	$(1-\theta)^2$

其中θ（0<θ<1）为未知参数. 已知取得了样本$x_1=1, x_2=2, x_3=1.$ 试求θ的矩估计值.

解：

$EX=1\times\theta^2+2\times2\theta(1-\theta)+3(1-\theta)^2=3-2\theta.$

$\overline{X}=\dfrac{1}{3}(1+2+1)=\dfrac{4}{3}.$

故$\theta=\dfrac{5}{6}$.

2．设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$， X_1, X_2, X_3为总体的一个样本，试证明：

$\hat{\mu}_1=\dfrac{1}{5}X_1+\dfrac{3}{10}X_2+\dfrac{1}{2}X_3$，， $\hat{\mu}_2=\dfrac{1}{3}X_1+\dfrac{1}{6}X_2+\dfrac{1}{2}X_3$都是$\mu$的无偏估计量，并分析哪一个最好.

证：

$$E(\mu_1)=E\left(\frac{1}{5}X_1+\frac{3}{10}X_2+\frac{1}{2}X_3\right)=\frac{1}{5}EX_1+\frac{3}{10}EX_2+\frac{1}{2}EX_3=\frac{1}{5}\mu+\frac{3}{10}\mu+\frac{1}{2}\mu=\mu,$$

同理$E(\mu_2)=\mu$.

$$D(\mu_1)=D\left(\frac{1}{5}X_1+\frac{3}{10}X_2+\frac{1}{2}X_3\right)=\frac{1}{25}DX_1+\frac{9}{100}DX_2+\frac{1}{4}DX_3=\frac{38}{100}\sigma^2,$$

$$D(\mu_2)=D\left(\frac{1}{3}X_1+\frac{1}{6}X_2+\frac{1}{2}X_3\right)=\frac{1}{9}DX_1+\frac{1}{36}DX_2+\frac{1}{4}DX_3=\frac{7}{18}\sigma^2.$$

因$D(\mu_1)$较小，故μ_1较好.

3. 设某批电子元器件的寿命 X 服从正态分布，现随机抽取 25 个电子元器件测试寿命，其样

本均值 $\overline{x}$ =50（天），样本方差 $s^2 = 0.25$，试求该批电子元器件平均寿命的置信水平为 95%的置信区间.

解：$\overline{x} = 50$ ，$S = 0.5$ ，$n = 25$

$$t_{0.025}(25-1) = 2.0639$$

置信区间为 $[\overline{x} - t_{\frac{\alpha}{2}}(24) \times \frac{S}{\sqrt{n}}, \overline{x} + t_{\frac{\alpha}{2}}(24) \times \frac{S}{\sqrt{n}}]$

即 $[50 - 2.0639 \times \frac{0.5}{\sqrt{25}}, 50 + 2.0639 \times \frac{0.5}{\sqrt{25}}]$

$=[50 - 0.20639, 50 + 0.20639]$

$=[49.79361, 50.20639]$

4. 设总体 X 的概率密度为 $f(x;\theta) = \begin{cases} \theta x^{\theta-1}, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$，其中 $\theta > 0$ 是未知参数，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为总体 X 的一个样本，$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为相应的样本值，试求 θ 的最大似然估计量.

解：　似然函数 $L(\theta) = \theta^n \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\theta-1}$

$$\ln(L(\theta)) = n\ln(\theta) + (\theta - 1)\sum_{i=1}^{n} \ln(x_i)$$

$$\frac{\mathrm{d}(\ln(L(\theta)))}{\mathrm{d}\theta} = \frac{n}{\theta} + \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i) = 0$$

得最大似然估计值 $\hat{\theta} = -\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \ln x_i}$

最大似然估计量 $\hat{\theta} = -\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \ln X_i}$

5. 用传统工艺加工某种水果罐头，每瓶中维生素 C 的含量为随机变量 X（单位：mg）. 设

X 服从正态分布，且均值 $\mu_0 = 19\text{mg}$. 现改变了加工工艺，抽查了 16 瓶罐头，测得维生素 C 的含量的平均值 $\bar{x} = 20.8\text{mg}$，样本标准差 $s = 1.617\text{mg}$. 问在使用新工艺后，维生素 C 的含量是否有显著变化（$\alpha = 0.01$）？

解：

由题意，假设检验问题为 $H_0 : \mu = \mu_0 = 19$，$H_1 : \mu \neq \mu_0$，

又总体 X 的方差 σ 未知，所以检验统计量取 $T = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$，

$\alpha = 0.01$，$t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) = t_{0.005}(15) = 2.9467$，

H_0 的拒绝域为 $|t| \geq t_{\frac{\alpha}{2}}(15) = 2.9467$.

又 $\bar{x} = 20.8, n=16, s=1.617$，

可计算得到检测值为 $|z| = \left|\dfrac{20.8-19}{1.617/\sqrt{16}}\right| = 4.45 > 2.9467$.

故拒绝 H_0，即在使用新工艺后，维生素 C 的含量有显著变化.