1. 若随机变量 X 服从均值为 3，方差为 σ^2 的正态分布，且 $P(2<X<4)=0.3$，计算 $P(X<2)$。

解：$P(X<2)=[1-P(2<X<4)]/2=0.35$

2. 设总体 X 和 Y 相互独立，且都服从正态分布 $N(30,3^2)$， $X_1,X_2,\cdots,X_{20}$ 和 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_{25}$ 是分别来自 X 和 Y 的样本，求 $P\left\{\left|\overline{X}-\overline{Y}\right|>0.4\right\}$ 的概率.

解：$\overline{X}\sim N(30,\dfrac{9}{20}),\overline{Y}\sim N(30,\dfrac{9}{25})$

$$\overline{X}-\overline{Y}\sim N(0,0.9^2)$$

$$\begin{aligned}P\left\{\left|\overline{X}-\overline{Y}\right|>0.4\right\}&=1-P\left\{\left|\overline{X}-\overline{Y}\right|\le 0.4\right\}\\&=1-P\left\{\left|\frac{\overline{X}-\overline{Y}}{0.9}\right|\le 0.44\right\}\\&=1-\left[2\Phi\left(0.44\right)-1\right]=2-2\times 0.67=0.66\end{aligned}$$

3. 设随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f\left(x,y\right)=\begin{cases}12y^2\ , & 0\le y\le x\le 1,\\ 0\ , & \text{其他}\end{cases},$$

求：$Cov(X,Y)$。

解： $E\left(X\right)=\int_0^1 dx\int_0^x 12xy^2dy=\dfrac{4}{5}$

$$E\left(Y\right)=\int_0^1 dx\int_0^x\ y^3dy=\frac{3}{5}$$

$$E\left(XY\right)=\int_0^1 dx\int_0^x 12\ xy^3dy=\frac{1}{2}$$

$$Cov\left(X,Y\right)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{1}{50}$$

4. 设随机变量 (X,Y) 的联合密度

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{4}, & 0<x<2, |y|<x\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$，试证明：X 与 Y 不相关.

证明：$E(X)=\int_0^2 dx\int_{-x}^{x}\frac{1}{4}xdy=\frac{4}{3}$

$$E(Y)=\int_0^2 dx\int_{-x}^{x}\frac{1}{4}ydy=0$$

$$E(XY)=\int_0^2 dx\int_{-x}^{x}\frac{1}{4}xydy=0$$

$$Cov(X,Y)=0$$

$$\rho_{XY}=0$$

故 X 与 Y 不相关.

5. 设 X 服从参数为 1 的指数分布,计算 $E(X+e^{-2X})$

解: $E(X+e^{-2X})=E(X)+E(e^{-2X})$

$$=1+\int_0^{+\infty}e^{-2x}\cdot e^{-x}dx$$

$$=1+\left(-\frac{1}{3}\right)e^{-3x}\Big|_0^{+\infty}$$

$$=1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$$