参考数据： $z_{0.025}=1.96$, $z_{0.05}=1.645$, $t_{0.025}(24)=2.0639$, $t_{0.025}(25)=2.0595$

$t_{0.05}(24)=1.7109$, $t_{0.05}(25)=1.7081$， $t_{0.005}(15)=2.9467, t_{0.005}(16)=2.9208$

$t_{0.05}(8)=1.8595, t_{0.025}(8)=2.3060$ ， $\chi^2_{0.025}(24)=39.364$ ， $\chi^2_{0.975}(24)=12.401$ ，

$\chi^2_{0.025}(25)=40.646$， $\chi^2_{0.975}(25)=13.120$

1. 设 $X_1, X_2, ..., X_n$ 为总体 X 的简单样本,密度 $f(x;\alpha)=\begin{cases}\alpha x^{\alpha-1}, \alpha>0, 0\le x\le 1,\\ 0, \text{其他},\end{cases}$

计算参数 α 的矩估计量.

解： $EX=\int_0^1 xf(x;\alpha)dx=\int_0^1 x\cdot\alpha x^{\alpha-1}dx=\dfrac{\alpha}{1+\alpha},\quad \alpha=\dfrac{EX}{1-EX}$,

用样本均值 $\overline{X}$ 估计（或替换）总体期望 EX 得 α 矩估计为 $\widehat{\alpha}=\dfrac{\overline{X}}{1-\overline{X}}$.

2. 设总体 $X\sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$， X_1, X_2, X_3 为总体的一个样本，试证明：

$\hat{\mu}_1=\dfrac{1}{3}X_1+\dfrac{1}{4}X_2+\dfrac{5}{12}X_3$， $\hat{\mu}_2=\dfrac{1}{3}X_1+\dfrac{1}{6}X_2+\dfrac{1}{2}X_3$ 都是 μ 的无偏估计量，并分析哪一个较好.

证：

$$E\left(\mu_1\right)=E\left(\frac{1}{5}X_1+\frac{3}{10}X_2+\frac{1}{2}X_3\right)=\frac{1}{3}EX_1+\frac{1}{4}EX_2+\frac{5}{12}EX_3=\frac{1}{3}\mu+\frac{1}{4}\mu+\frac{5}{12}\mu=\mu,$$

同理 $E\left(\mu_2\right)=\mu$.

$$D\left(\mu_1\right)=D\left(\frac{1}{3}X_1+\frac{1}{4}X_2+\frac{5}{12}X_3\right)=\frac{1}{9}DX_1+\frac{1}{16}DX_2+\frac{25}{144}DX_3=\frac{25}{72}\sigma^2,$$

$$D\left(\mu_2\right)=D\left(\frac{1}{3}X_1+\frac{1}{6}X_2+\frac{1}{2}X_3\right)=\frac{1}{9}DX_1+\frac{1}{36}DX_2+\frac{1}{4}DX_3=\frac{7}{18}\sigma^2.$$

因 $D\left(\mu_1\right)$ 较小，故 μ_1 较好.

3. 设某厂生产的电器零件的电阻 X 服从正态分布，其标准差 σ=1 Ω，现随机抽取 100 个零件测试电阻值，样本均值为 $\overline{x}$ =2.62 Ω，试求该厂生产的电器零件的平均电阻值的置信水平为 95%的置信区间.

解： $\bar{x}=2.62$ ， $\sigma=1$ ， $n=100$

$$z_{0.025}=1.96$$

置信区间为 $[\bar{x}-z_{\frac{\alpha}{2}}\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\bar{x}+z_{\frac{\alpha}{2}}\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}]$

即 $[2.62-1.96\times\frac{1}{\sqrt{100}}, 2.62+1.96\times\frac{1}{\sqrt{100}}]$

$=[2.62-0.196，2.62+0.196]$

$=[2.424，2.816]$

4. 设总体 X 具有概率密度 $f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{\theta^2}xe^{-\frac{x}{\theta}}, x>0\\ 0， \quad 其他.\end{cases}$，其中 $\theta>0$ 为未知参数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为总体 X 的一个样本，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为相应的样本值，试求 θ 的最大似然估计量.

解： 似然函数 $L(\theta)=\theta^{-2n}\cdot\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)\cdot e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{\theta}}$

$$\ln(L(\theta))=-2n\cdot\ln(\theta)+\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i)-\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{\theta}$$

$$\frac{\mathrm{d}(\ln(L(\theta)))}{\mathrm{d}\theta}=\frac{-2n}{\theta}+\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{\theta^2}=0$$

得 θ 的最大似然估计值为 $\hat{\theta}=\frac{\bar{x}}{2}$

最大似然估计量为 $\hat{\theta}=\frac{\bar{X}}{2}$

5. 已知某种铁钉长度(单位：*cm*)服从正态分布，μ 和 σ^2 均未知. 今从一批这 种铁钉中随机抽取 25 件，测得其长度的样本均值 $\bar{x}=2.125(cm)$, 样本均方差 $s=0.015(cm)$. 问能否认为这批铁钉的方差 $\sigma^2=0.0004$？（取 $\alpha=0.05$）

解：$H_0:\sigma^2=0.0004,\qquad H_1:\sigma^2\neq 0.0004$

构造检验统计量，$\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0{}^2}$———— χ^2 检验法

$\alpha=0.05$，$\chi^2_{\alpha/2}(n-1)=39.364$，$\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)=12.401$

拒绝域：$\left\{\chi^2\leq\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)=12.401\right\}\cup\left\{\chi^2\geq\chi^2_{\alpha/2}(n-1)=39.364\right\}.$

计算，$s=0.015,\chi^2=13.5,\ 12.401<13.5<39.364.$

接受 H_0，可以认为这批铁钉的方差为 $0.0004.$