dont les objets se présentaient comme "**les** coefficients" naturels dans le formalisme homologique et cohomologique des espaces et variétés en tous genres, s'insérant dans un premier embryon d'un formalisme des "six opérations" sur les espaces annelés (en attendant les topos annelés). Quatre de ces opérations m'étaient déjà plus ou moins familières depuis mon travail de 1955 "Sur quelques points d'algèbres homologique"[581](*), au langage des catégories dérivées près : avec les notations qui se sont dégagées au cours des années suivantes (en même temps que le point de vue des catégories dérivées), ce sont les opérations "internes" $\overset{L}{\otimes}$ et $R\underline{Hom}$ (version "foncteur dérivé total" du formalisme des faisceaux $\underline{Tor}_i$ et $\underline{Ext}^i$ introduit dans "Tohoku"), et "externes" Lf^* et Rf_* (images inverses, et directes "à la Leray"), formant deux couples de foncteurs (ou bifoncteurs) adjoints. Dans le cas où f est un morphisme "immersion" $i : X \to Y$, il s'y ajoute encore le couple de foncteurs adjoints $Ri_!$, $Ri^!$, incarnant respectivement les opérations de "prolongement par zéro" et "cohomologie locale à supports dans X". Le fil conducteur dans mes réflexions est d'arriver à un **théorème de dualité** (globale, à un moment où il n'était pas question encore de version locale. . .), généralisant celui prouvé par Serre pour un faisceau cohérent localement libre sur une variété projective lisse sur un corps. Il s'agissait de donner une formulation qui s'appliquerait à un faisceau cohérent quelconque (ou complexe de tels), voire même un faisceau quasi-cohérent, sans hypothèse de lissité ni de projectivité sur X (en gardant seulement la propreté, qui paraissait alors essentielles[582](**)). De plus, en analogie avec mes réflexions sur le théorème de Riemann-Roch, je sentais que le bon énoncé devait concerner, non une variété sur un corps, mais un morphisme propre $f : X \to Y$ de schémas, par ailleurs quelconques. C'est par approximations ◇ successives, au cours de plusieurs années de travail[583](*), que le théorème de dualité globale se décante progressivement de ses hypothèses superflues, en même temps que la notion de catégorie dérivée elle aussi sort des limbes du pressenti pour prendre forme concrète, et donner au formalisme et aux énoncés un **sens intrinsèque**, à défaut duquel je me serais senti bien incapable de travailler ! C'est tout d'abord pour arriver à dégager un énoncé de dualité globale qui me satisfasse pleinement, que j'introduis le formalisme des **complexes dualisants** et dégage le **théorème de bidualité**, et que je découvre (sous des hypothèses noethériennes convenables) l'existence d'un complexe dualisant injectif, essentiellement canonique, que j'appelle le "**complexe résiduel**", et une théorie de variance pour celui-ci. Une première formulation du théorème de dualité globale, qui à un moment me semblait être "la bonne", était que le foncteur Rf_* commutait aux foncteurs dualisants sur X et sur Y (pour deux complexes dualisants qui se "correspondent"). C'est par la suite seulement que je découvre que la théorie de variance pour les seuls complexes dualisants (via les complexes résiduels) se généralise par un foncteur de nature entièrement nouvelle, le foncteur $Rf^!$ où "image inverse inhabituelle", de nature locale sur X. Dès lors, apparaît aussi la formulation définitive du théorème de dualité pour le morphisme propre f : ce nouveau foncteur est **adjoint à droite** de Rf_*, s'insérant donc dans une suite de trois foncteurs adjoints

$$Lf^*,\ Rf_*,\ Rf^!.$$

Pour avoir un formalisme entièrement achevé, il manquait seulement la description d'un foncteur $Rf_!$,

---

très beau séminaire à Harvard, publié en 1966 ("Residues and duality" par R. Hartshorne, Lecture Notes in Mathematics, n° 20, Springer Verlag).

[581](*) In Tohoku Mathematical Journal, 9 (1957), p. 119-221.

[582](**) Voir à ce sujet la note de b. de p. (*) page 940, plus bas.

[583](*) Il va sans dire qu'au cours de ces "plusieurs années de travail", j'avais bien d'autres fers dans le feu que les seules questions de dualité cohérente ! Je me familiarise alors avec les fondements alors connus de géométrie algébrique (avec le point de vue de FAC de Serre comme principale référence), avec la problématique des conjectures de Weil, et avec le formalisme des multiplicités d'intersection appris dans un cours de Serre, où il développait son idée des "sommes alternées des tor") . Cela allait me déclencher en 1957 sur le formalisme de K-théorie et le théorème de Riemann-Roch-Grothendieck, très proche (par son esprit) de mes réflexions de dualité.