Abstract

This is abstract.

RECOLTES ET SEMAILLES

Alexandre GROTHENDIECK

March 26, 2025

Contents

1 La vision - ou douze thèmes pour une harmonie

Peut-être peut-on dire que la "grande idée" est le point de vue qui, non seulement se révèle nouveau et fécond, mais qui introduit dans la science un thème nouveau et vaste qui l'incarne. Et toute science, quand nous l'entendons non comme un instrument de pouvoir et de domination, mais comme aventure de connaissance de notre espèce à travers les âges, n'est autre chose que cette harmonie, plus ou moins vaste et plus ou plus riche d'une époque à l'autre, qui se déploie au cours des générations et des siècles, par le délicat contrepoint de tous les thèmes apparus tour à tour, comme appelés du néant, pour se joindre en elle et s'y entrelacer.

Parmi les nombreux points de vue nouveaux que j'ai dégagés en mathématique, il en est douze, avec le recul, que j'appellerais des "grandes idées" [1].

---

[1]Voici, pour le lecteur mathématicien qui en serait curieux, la liste de ces douze idées maîtresses, ou des "maître-thèmes" de mon oeuvre (par ordre chronologique d'apparition).

1. Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires.
2. Dualité "continue" et "discrète" (catégories dérivées, "six opérations").
3. Yoga Riemann-Roch-Grothendieck (K-théorie, relation à la théorie des intersections).
4. Schémas.
5. Topos.
6. Cohomologie étale et ℓ-adique.
7. Motifs et groupe de Galois motivique ($\otimes$-catégories de Grothendieck).
8. Cristaux et cohomologie cristalline, yoga "coeffi cients de De Rham", "coeffi cient de Hodge"...
9. "Algèbre topologique" : ∞-champs, dérivateurs; formalisme cohomologique des topos, comme inspiration pour une nouvelle algèbre homotopique.

Voir mon oeuvre de mathématicien, la "sentir", c'est voir et "sentir" tant soit peu au moins certaines de ces idées, et ces grands thèmes qu'elles introduisent et qui font et la trame et l'âme de l'oeuvre.

Par la force des choses, certaines de ces idées sont "plus grandes" que d'autres (lesquelles, par là-même, sont "plus petites" !). En d'autres termes, parmi ces thèmes nouveaux, certains sont plus vastes que d'autres, et certains plongent plus profond au coeur du mystère des choses mathématiques [2].

---

10. Topologie modérée.
11. Yoga de géométrie algébrique anabélienne, théorie de Galois-Teichmüller.
12. Point de vue "schématique" ou "arithmétique" pour les polyèdres réguliers et les confi gurations régulières en tous genres.

Mis à part le premier de ces thèmes, dont un volet important fait partie de ma thèse (1953) et a été développé dans ma période d'analyse fonctionnelle entre 1950 et 1955, les onze autres se sont dégagés au cours de ma période de géomètre, à partir de 1955.

[2]Parmi ces thèmes, le plus vaste par sa portée me paraît être celui des topos, qui fournit l'idée d'une synthèse de la géométrie algébrique, de la topologie et de l'arithmétique. Le plus vaste par l'étendue des développements auxquels il a donné lieu dès à présent, est le thème des schémas. (Voir à ce sujet la note de b. de p. (*) page 20.) C'est lui qui fournit le cadre "par excellence" de huit autres parmi les thèmes envisagés (savoir, tous les autres à l'exclusion des thèmes 1,5 et 10), en même temps qu'il fournit la notion centrale pour un renouvellement de fond en comble de la géométrie algébrique, et du langage algébrico-géométrique.

Au bout opposé, le premier et le dernier des douze thèmes m'apparaissent comme étant de dimensions plus modestes que les autres. Pourtant, pour ce qui est du dernier, introduisant une optique nouvelle dans le thème fort ancien des polyèdres réguliers et des confi gurations régulières, je doute que la vie d'un mathématicien qui s'y consacrerait corps et âme suffi se à l'épuiser. Quant au premier de tous ces thèmes, celui des produits tensoriels topologiques, il a joué plus le rôle d'un nouvel outil prêt à l'emploi, que celui d'une source d'inspiration pour des développements ultérieurs. Cela n'empêche qu'il m'arrive encore, jusqu'en ces dernières années, de recevoir des échos sporadiques de travaux plus ou moins récents, résolvant (vingt ou trente ans après) certaines des questions

Il en est trois (et non des moindres à mes yeux) qui, apparus seulement après mon départ de la scène mathématique, restent encore à l'état embryonnaire ; "officiellement" ils n'existent même pas, puisqu'aucune publication en bonne et du forme n'est là pour leur tenir lieu de certificat de naissance [3].

Parmi les neuf thèmes apparus dès avant mon départ, les trois derniers, que j'avais laissés en plein essor, restent aujourd'hui encore à l'état d'enfance, faute (après mon départ) de mains aimantes pour pourvoir au nécessaire de ces "orphelins", laissés pour compte dans un monde hostile [4].

Quant aux six autres thèmes, parvenus à pleine maturité au cours des deux décennies précédant mon départ, on peut dire (à une ou deux réserves près [5]) qu'ils étaient déjà dès ce

---

que j'avais laissées en suspens.

Les plus profonds (à mes yeux) parmi ces douze thèmes, sont celui des motifs, et celui étroitement lié de géométrie algébrique anabélienne et du yoga de Galois-Teichmüller.

Du point de vue de la puissance d'outils parfaitement au point et rodés par mes soins, et d'usage courant dans divers "secteurs de pointe" dans la recherche au cours des deux dernières décennies, ce sont les volets "schémas" et "cohomologie étale et ℓ adique" qui me paraissent les plus notables. Pour un mathématicien bien informé, je pense que dès à présent il ne peut guère y avoir de doute que l'outil schématique, comme celui de la cohomologie ℓ-adique qui en est issu, font partie des quelques grands acquis du siècle, venus nourrir et renouveler notre science au cours de ces dernières générations.

[3]Le seul texte "semi-offi ciel" où ces trois thèmes soient esquissés tant soit peu, est l'Esquisse d'un Programme, rédigé en janvier 1984 à l'occasion d'une demande de détachement au CNRS. Ce texte (dont il est question aussi dans l'Introduction 3, "Boussole et Bagages") sera inclus en principe dans le volume 4 des Réflexions.

[4]Après enterrement sans tambour ni trompette de ces trois orphelins-là, aux lendemains même de mon départ, deux parmi eux se sont vus exhumer à grandes fanfares et sans mention de l'ouvrier, l'un en 1981 et l'autre (vu le succès sans bavures de l'opération) dès l'année d'après.

[5]Le "à peu de choses près" concerne surtout le yoga grothendieckien de dualité (catégories dérivées et six opérations), et celui des topos. Il en sera question de façon circonstanciée (entre bien autres choses) dans les parties II et IV de Récoltes et Semailles (L'Enterrement (1) et (3)).

moment-là entrés dans le patrimoine commun : parmi la gent géomètre surtout, ”tout le monde” de nos jours les entonne sans même plus le savoir (comme Monsieur Jourdain faisait de la prose), à longueur de journée et à tout moment. Ils font partie de l'air qu'on respire, quand on ”fait de la géométrie”, ou quand on fait de l'arithmétique, de l'algèbre ou de l'analyse tant soit peu ”géométriques”.

Ces douze grands thèmes de mon oeuvre ne sont nullement isolés les uns des autres. Ils font partie à mes yeux d'une unité d'esprit et de propos, présente, telle une note de fond commune et persistante, à travers toute mon oeuvre ”écrite” et ”non écrite”. Et en écrivant ces lignes, il m'a semblé retrouver la même note encore - comme un appel ! - à travers ces trois années de travail ”gratuit”, acharné et solitaire, aux temps où je ne m'étais pas soucié encore de savoir s'il existait des mathématiciens au monde à part moi, tant j'étais pris alors par la fascination de ce qui m'appelait...

Cette unité n'est pas le fait seulement de la marque du même ouvrier, sur les oeuvres qui sortent de ses mains. Ces thèmes sont liés entre eux par d'innombrables liens, à la fois délicats et évidents, comme sont reliés entre eux les différents thèmes, clairement reconnaissables chacun, qui se déployent et s'enlacent dans un même et vaste contrepoint - dans une harmonie qui les assemble, les porte en avant et donne à chacun un sens, un mouvement et une plénitude auxquels participent tous les autres. Chacun des thèmes partiels semble, naître de cette harmonie plus vaste et en renaître à nouveau au fil des instants, bien plus que celle-ci n'apparaît comme une ”somme” ou comme un ”résultat”, de thèmes constituants qui préexisteraient à elle. Et à dire vrai, je ne peux me défendre de ce sentiment (sans doute saugrenu...) que d'une certaine façon c'est bien cette harmonie, non encore apparue mais qui sûrement ”existait” déjà bel et bien, quelque part dans le giron obscur des choses encore à naître - que c'est bien elle qui a suscité tour à tour ces thèmes qui n'allaient prendre tout leur sens que par elle, et que c'est elle aussi qui déjà m'appelait à voix basse et pressante, en ces années de solitude ardente, au sortir de l'adolescence...

Toujours est-il que ces douze maître-thèmes de mon oeuvre se trouvent bien tous, comme par une prédestination secrète, concourir à une même symphonie - ou, pour reprendre une image différente, ils se trouvent incarner autant de "points de vue" différents, venant tous concourir à une même et vaste vision.

Cette vision n'a commencé à émerger des brumes, à faire apparaître des contours reconnaissables, que vers les années 1957, 58 - des années de gestation intense [6].Chose étrange peut-

[6] L'année 1957 est celle où je suis amené à dégager le thème "Riemann-Roch" (version Grothendieck) - qui, du jour au lendemain, me consacre "grande vedette". C'est aussi l'année de la mort de ma mère, et par là, celle d'une césure importante dans ma vie. C'est une des années les plus intensément créatrices de ma vie, et non seulement au niveau mathématique. Cela faisait douze ans que la totalité de mon énergie était investie dans un travail mathématique. Cette année-là s'est fait jour le sentiment que j'avais à peu près "fait le tour" de ce qu'est le travail mathématique, qu'il serait peut-être temps maintenant de m'investir dans autre chose. C'était un besoin de renouvellement intérieur, visiblement, qui faisait surface alors, pour la première fois de ma vie. J'ai songé à ce moment à me faire écrivain, et pendant plusieurs mois j'ai cessé toute activité mathématique. Finalement, j'ai décidé que je mettrai au moins encore noir sur blanc les travaux mathématiques que j'avais déjà en train, histoire de quelques mois sans doute, ou une année à tout casser...

Le temps n'était pas mûr encore, sans doute, pour le grand saut. Toujours est-il qu'une fois repris le travail mathématique, c'est lui qui m'a repris alors. Il ne m'a plus lâché, pendant douze autres années encore !

L'année qui a suivi cet intermède (1958) est peut-être la plus féconde de toutes dans ma vie de mathématicien. C'est en cette année que se place l'éclosion des deux thèmes centraux de la géométrie nouvelle, avec le démarrage en force de la théorie des schémas (sujet de mon exposé au congrès international des mathématiciens à Edinburgh, l'été de cette même année), et l'apparition de la notion de "site", version technique provisoire de la notion cruciale de topos. Avec un recul de près de trente ans, je peux dire maintenant que c'est l'année vraiment où est née la vision de la géométrie nouvelle, dans le sillage des deux maître-outils de être, cette vision était pour moi si proche, si "évidente", que jusqu'à il y a un an encore [7], je n'avais songé à lui donner un nom. (Moi dont une des passions pourtant a été de constamment nommer les choses qui se découvrent à moi, comme un premier moyen de les appréhender...) Il est vrai que je ne saurais indiquer un moment particulier, qui aurait été vécu comme le moment de l'apparition de cette vision, ou que je pourrais reconnaître comme tel avec le recul. Une vision nouvelle est une chose si vaste, que son apparition ne peut sans doute se situer à un moment particulier, mais qu'elle doit pénétrer et prendre possession progressivement pendant de longues années, si ce n'est sur des générations, de celui ou de ceux qui scrutent et qui contemplent; comme si des yeux nouveaux devaient laborieusement se former, derrière les yeux familiers auxquels ils sont appelés à se substituer peu à peu. Et la vision est trop vaste également pour qu'il soit question de la "saisir", comme on saisirait la première notion venue apparue au tournant du chemin. C'est pourquoi sans doute il n'y a pas à s'étonner, finalement, que la pensée de nommer une chose aussi vaste, et si proche et si diffuse, ne soit apparue qu'avec le recul, une fois seulement que cette chose était parvenue à pleine maturité.

A vrai dire, jusqu'à il y a deux ans encore ma relation à la mathématique se bornait (mis à part la tâche de l'enseigner) à en faire - à suivre une pulsion qui sans cesse me tirait en avant, dans un "inconnu" qui m'attirait sans cesse. L'idée ne me serait pas venue de m'arrêter dans cet élan, de poser ne fut-ce que l'espace d'un instant, pour me retourner et voir se dessiner peut-être un chemin parcouru, voire même, pour situer une oeuvre révolue. (Que ce soit pour la situer dans ma vie,

---

cette géométrie : les schémas (qui représentent une métamorphose de l'ancienne notion de "variété algébrique"), et les topos (qui représentent une métamorphose, plus profonde encore, de la notion d'espace).

[7] Je songe pour la première fois à donner un nom à cette vision dans la réflexion du 4 décembre 1984, dans la sous-note (n°136_1 à la note "Yin le Serviteur (2) -ou la générosité" (ReS III, page 637).

comme une chose à laquelle continuent à me relier des liens profonds et longtemps ignorés; ou aussi, la situer dans cette aventure collective qu'est "la mathématique".)

Chose étrange encore, pour m'amènera "poser" enfin et à refaire connaissance avec cette oeuvre à demi oubliée, ou pour songer seulement à donner un nom à la vision qui en a été l'âme, il aura fallu que je me trouve confronté soudain à la réalité d'un Enterrement aux gigantesques proportions : à l'enterrement, par le silence et par la dérision, et de la vision, et de l'ouvrier en qui elle était née...

2 Forme et structure - ou la voie des choses

Sans l'avoir prévu, cet "avant-propos" a fini, de fil en aiguille, par devenir une sorte de présentation en règle de mon oeuvre, à l'intention (surtout) du lecteur non mathématicien. Trop engagé déjà pour pouvoir encore reculer, il ne me reste plus qu'à terminer "les présentations"! Je voudrais essayer tant bien que mal de dire au moins quelques mots sur la substance de ces mirifiques "grandes idées" (ou de ces "maître-thèmes") que j'ai fait miroiter dans les pages précédentes, et sur la nature de cette fameuse "vision" en quoi ces idées maîtresses sont censées venir confluer. Faute de pouvoir faire appel à un langage tant soit peu technique, je ne pourrai sans doute que faire passer une image d'un flou extrême (si tant est que quelque chose veuille bien "passer" en effet. . . [8]).

Traditionnellement, on distingue trois types de "qualités" ou d' "aspects" des choses de l' Univers, qui soient objet de la réflexion mathématique : ce sont le nombre [9], la grandeur, et la forme. On peut aussi les appeler l'aspect "arithmétique", l'aspect "métrique" (ou "analytique"), et l'aspect "géométrique" des choses. Dans la plupart des situations étudiées dans la

[8]Que cette image doive rester "foue" n'empêche nullement que cette image ne soit fi dèle, et qu'elle ne restitue bel et bien quelque chose de l'essence de ce qui est regardé (en l'occurrence, mon oeuvre). Inversement, une image a beau être nette, elle peut fort bien être distordue, et de plus, n'inclure que l'accessoire et manquer entièrement l'essentiel. Aussi, si tu "accroches" à ce que je vois à dire sur mon oeuvre (et sûrement alors quelque chose de l'image en moi "passera" bel et bien), tu pourras te flutter d'avoir mieux saisi ce qui fait l'essentiel dans mon oeuvre, qu'aucun peut-être de mes savants collègues!

[9]Il est entendu ici qu'il s'agit des "nombres" dits "entiers naturels" $0, 1, 2, 3$ etc, ou (à la rigueur) des nombres (tels les nombres fractionnaires) qui s'expriment à l'aide de ceux-ci par des opérations de nature élémentaire. Ces nombres ne se prêtent pas, comme les "nombres réels", à mesurer une grandeur susceptible de variation continue, telle la distance entre deux points variables sur une droite, dans un plan ou dans l'espace.

mathématique, ces trois aspects sont présents simultanément et en interaction étroite. Cependant, le plus souvent, il y a une prédominance bien marquée de l'un des trois. Il me semble que chez la plupart des mathématiciens, il est assez clair (pour ceux qui les connaissent, ou qui sont au courant de leur oeuvre) quel est leur tempérament de base, s'ils sont "arithméticiens", "analystes", ou "géomètres" - et ceci, alors même qu'ils auraient beaucoup de cordes à leur violon, et qu'ils auraient travaillé dans tous les registres et diapasons imaginables.

Mes premières et solitaires réflexions, sur la théorie de la mesure et de l'intégration, se placent sans ambiguïté possible dans la rubrique "grandeur", ou "analyse". Et il en est de même du premier des nouveaux thèmes que j'ai introduits en mathématique (lequel m'apparaît de dimensions moins vastes que les onze autres). Que je sois entré dans la mathématique par le "biais" de l'analyse m'apparaît comme dû, non pas à mon tempérament particulier, mais à ce qu'on peut appeler une "circonstance fortuite" : c'est que la lacune la plus énorme, pour mon esprit épris de généralité et de rigueur, dans l'enseignement qui m'était proposé au lycée comme à l'université, se trouvait concerner l'aspect "métrique" ou "analytique" des choses.

L'année 1955 marque un tournant crucial dans mon travail mathématique : celui du passage de l' "analyse" à la "géométrie". Je me rappelle encore de cette impression saisissante (toute subjective certes), comme si je quittais des steppes arides et revêches, pour me retrouver soudain dans une sorte de "pays promis" aux richesses luxuriantes, se multipliant à l'infini partout où il plaît à la main de se poser, pour cueillir ou pour fouiller... Et cette impression de richesse accablante, au delà de toute mesure [10], n'a fait que se confirmer et s'approfondir

[10] J'ai utilisé l'association de mots "accablant, au delà de toute mesure", pour rendre tant bien que mal l'expression en allemand "überwältigend", et son équivalent en anglais "overwhelming". Dans la phrase précédente, l'expression (inadéquate) "impression saisissante" est à comprendre aussi avec cette nuance-là : quand les impressions et sentiments suscités en nous

au cours des ans, jusqu'à aujourd'hui même.

C'est dire que s'il y a une chose en mathématique qui (depuis toujours sans doute) me fascine plus que toute autre, ce n'est ni "le nombre", ni "la grandeur", mais toujours la forme. Et parmi les mille-et-un visages que choisit la forme pour se révéler à nous, celui qui m'a fasciné plus que tout autre et continue à me fasciner, c'est la structure cachée dans les choses mathématiques.

La structure d'une chose n'est nullement une chose que nous puissions "inventer". Nous pouvons seulement la mettre à jour patiemment, humblement en faire connaissance, la "découvrir". S'il y a inventivité dans ce travail, et s'il nous arrive de faire oeuvre de forgeron ou d'infatigable bâtisseur, ce n'est nullement pour "façonner", ou pour "bâtir", des "structures". Celles-ci ne nous ont nullement attendues pour être, et pour être exactement ce qu'elles sont! Mais c'est pour exprimer, le plus fidèlement que nous le pouvons, ces choses que nous sommes en train de découvrir et de sonder, et cette structure réticente à se livrer, que nous essayons à tâtons, et par un langage encore balbutiant peut-être, à cerner. Ainsi sommes-nous amenés à constamment "inventer" le langage apte à exprimer de plus en plus finement la structure intime de la chose mathématique, et à "construire" à l'aide de ce langage, au fur et à mesure et de toutes pièces, les "théories" qui sont censées rendre compte de ce qui a été appréhendé et vu. Il y a là un mouvement de va-et-vient continuel, ininterrompu, entre l'appréhension des choses, et l'expression de ce qui est appréhendé, par un langage qui s'affine et se re-crée au fil du travail, sous la constante pression du besoin immédiat.

Comme le lecteur l'aura sans doute deviné, ces "théories", "construites de toutes pièces", ne sont autres aussi que ces "belles maisons" dont il a été question précédemment : celles

par la confrontation à une splendeur, à une grandeur ou à une beauté hors du commun, nous submergent soudain, au point que toute velléité d'exprimer ce que nous ressentons semble comme anéantie d'avance.

dont nous héritons de nos devanciers et celles que nous sommes amenés à bâtir de nos propres mains, à l'appel et à l'écoute des choses. Et si j'ai parlé tantôt de l' "inventivité" (ou de l'imagination) du bâtisseur ou du forgeron, il me faudrait ajouter que ce qui en fait l'âme et le nerf secret, ce n'est nullement la superbe de celui qui dit : "je veux ceci, et pas cela !" et qui se complaît à décider à sa guise ; tel un piètre architecte qui aurait ses plans tout prêts en tête, avant d'avoir vu et senti un terrain, et d'en avoir sondé les possibilités et les exigences. Ce qui fait la qualité de l'inventivité et de l'imagination du chercheur, c'est la qualité de son attention, à l'écoute de la voix des choses. Car les choses de l' Univers ne se lassent jamais de parler d'elles-mêmes et de se révéler, à celui qui se soucie d'entendre. Et la maison la plus belle, "celle en laquelle apparaît l'amour de l'ouvrier, n'est pas celle qui est plus grande ou plus haute que d'autres. La belle maison est celle qui reflète fidèlement la structure et la beauté cachées des choses.

3 La géométrie nouvelle - ou les épousailles du nombre et de la grandeur

Mais me voilà diverger encore - je me proposais de parler de maîtres-thèmes, venant s'unir dans une même vision-mère, comme autant de fleuves venant retourner à la Mer dont ils sont les fils...

Cette vaste vision unificatrice peut être décrite comme une géométrie nouvelle. C'est celle, paraît-il, dont Kronecker avait rêvé, au siècle dernier [11]. Mais la réalité (qu'un rêve hardi parfois fait pressentir ou entrevoir, et qu'il nous encourage à découvrir...) dépasse à chaque fois en richesse et en résonance le rêve même le plus téméraire ou le plus profond. Sûrement, pour plus d'un des volets de cette géométrie nouvelle (si ce n'est pour tous), personne, la veille encore du jour où il est apparu, n'y aurait songé - l'ouvrier lui-même pas plus que les autres.

On peut dire que "le nombre" est apte à saisir la structure des agrégats "discontinus", ou "discrets" : les systèmes, souvent finis, formés d' "éléments" ou "objets" pour ainsi dire

[11] Je ne connais ce "rêve de Kronecker" que par ouïe dire, quand quelqu'un (peut-être bien que c'était John Tate) m'a dit que j'étais en train de réaliser ce rêve-là. Dans l'enseignement que j'ai reçu de mes aînés, les références historiques étaient rarissimes, et j'ai été nourri, non par la lecture d'auteurs tant soit peu anciens ni même contemporains, mais surtout par la communication, de vive voix ou par lettres interposées, avec d'autres mathématiciens, à commencer par mes aînés. La principale, peut-être même la seule inspiration extérieure pour le soudain et vigoureux démarrage de la théorie des schémas en 1958, a été l'article de Serre bien connu sous le sigle FAC ("Faisceaux algébriques cohérents"), paru quelques années plus tôt. Celui-ci mis à part, ma principale inspiration dans le développement ultérieur de la théorie s'est trouvée découler d'elle-même, et se renouveler au fi l des ans, par les seules exigences de simplicité et de cohérence internes, dans un effort pour rendre compte dans ce nouveau contexte, de ce qui était "bien connu" en géométrie algébrique (et que j'assimilais au fur et à mesure qu'il se transformait entre mes mains), et de que ce "connu" me faisait pressentir.

isolés les uns par rapport aux autres, sans quelque principe de "passage continu" de l'un à l'autre. "La grandeur" par contre est la qualité par excellence, susceptible de "variation continue" ; par là, elle est apte à saisir les structures et phénomènes continus : les mouvements, espaces, "variétés" en tous genres, champs de force etc. Ainsi, l'arithmétique apparaît (grosso-modo) comme la science des structures discrètes, et l'analyse, comme la science des structures continues,

Quant à la géométrie, on peut dire que depuis plus de deux mille ans qu'elle existe sous forme d'une science au sens moderne du mot, elle est "à cheval" sur ces deux types de structures, les "discrètes" et les "continues" [12]. Pendant longtemps d'ailleurs, il n'y avait pas vraiment "divorce", entre deux géométries qui auraient été d'espèce différente, l'une discrète, l'autre continue. Plutôt, il y avait deux points de vue différents dans l'investigation des mêmes figures géométriques : l'un mettant l'accent sur les propriétés "discrètes" (et notamment, les propriétés numériques et combinatoires), l'autre sur les propriétés "continues" (telles que la position dans l'espace ambiant, ou la "grandeur" mesurée en terme de distances mutuelles de ses

[12] A vrai dire, traditionnellement c'est l'aspect "continu" qui était au centre de l'attention du géomètre, alors que les propriétés de nature "discrète", et notamment les propriétés numériques et combinatoires, étaient passées sous silence ou traitées par dessous la jambe. C'est avec émerveillement que j'ai découvert, il y a une dizaine d'années, la richesse de la théorie combinatoire de l'icosaèdre, alors que ce thème n'est pas même effleuré (et probablement, pas même vu) dans le classique livre de Klein sur l'icosaèdre. Je vois un autre signe frappant de cette négligence (deux fois millénaire) des géomètres vis-à-vis des structures discrètes qui s'introduisent spontanément en géométrie : c'est que la notion de groupe (de symétries, notamment) ne soit apparue qu'au siècle dernier, et que de plus, elle ait été d'abord introduite (par Evariste Galois) dans un contexte qui n'était pas considéré alors comme ressortissant de la "géométrie". Il est vrai que de nos jours encore, nombreux sont les algébristes qui n'ont toujours pas compris que la théorie de Galois est bien, dans son essence, une vision "géométrique", venant renouveler notre compréhension des phénomènes dits "arithmétiques"...

points, etc.).

C'est à la fin du siècle dernier qu'un divorce est apparu, avec l'apparition et le développement de ce qu'on a appelé parfois la "géométrie (algébrique) abstraite". Grosso-modo, celle-ci a consisté à introduire, pour chaque nombre premier p, une géométrie (algébrique) "de caractéristique p ", calquée sur le modèle (continu) de la géométrie (algébrique) héritée des siècles précédents, mais dans un contexte pourtant, qui apparaissait comme irréductiblement "discontinu", "discret". Ces nouveaux objets géométriques ont pris une importance croissante depuis les débuts du siècle, et ceci, tout particulièrement, en vue de leurs relations étroites avec l'arithmétique, la science par excellence de la structure discrète. Il semblerait que ce soit une des idées directrices dans l'oeuvre d' André Weil [13], peut-être même la principale idée-force (restée plus ou moins tacite dans son oeuvre écrite, comme il se doit), que "la" géométrie (algébrique), et tout particulièrement les géométries "discrètes" associées aux différents nombres premiers, devaient fournir la clef pour un renouvellement de vaste envergure de l'arithmétique. C'est dans cet esprit qu'il a dégagé, en 1949, les célèbres "conjectures de Weil". Conjectures absolument époustouflantes, à vrai dire, qui faisaient entrevoir, pour ces nouvelles "variétés" (ou "espaces") de nature discrète, la possibilité de certains types de constructions et d'arguments [14] qui jusque là ne semblaient pensables que dans le cadre des seuls "espaces" considérés comme dignes de ce nom par les analystes - savoir, les espaces dits "topologiques" (où la notion de variation continue a cours).

[13] André Weil, mathématicien français émigré aux Etats-Unis, est un des "membres fondateurs" du "groupe Bourbaki", dont il sera pas mal question dans la première partie de Récoltes et Semailles (ainsi d'ailleurs que de Weil lui-même, occasionnellement).

[14] (A l'intention du lecteur mathématicien.) Il s'agit ici des "constructions et arguments" liés à la théorie cohomologique des variétés différentiables ou complexes, et notamment de ceux impliquant la formule des points fi xes de Lefschetz, et la théorie de Hodge.

On peut considérer que la géométrie nouvelle est avant toute autre chose, une synthèse entre ces deux mondes, jusque là mitoyens et étroitement solidaires, mais pourtant séparés : le monde "arithmétique", dans lequel vivent les (soi-disants) "espaces" sans principe de continuité, et le monde de la grandeur continue, ou vivent les "espaces" au sens propre du terme, accessibles aux moyens de l'analyste et (pour cette raison même) acceptés par lui comme dignes de gîter dans la cité mathématique. Dans la vision nouvelle, ces deux mondes jadis séparés, n'en forment plus qu'un seul.

Le premier embryon de cette vision d'une "géométrie arithmétique" (comme je propose d'appeler cette géométrie nouvelle) se trouve dans les conjectures de Weil. Dans le développement de certains de mes thèmes principaux [15], ces conjectures sont restées ma principale source d'inspiration, tout au long des années entre 1958 et 1969. Dès avant moi, d'ailleurs, Oscar Zariski d'un côté, puis Jean-Pierre Serre de l'autre, avaient développé pour les espaces-sans-foi-ni-loi de la géométrie algébrique "abstraite" certaines méthodes "topologiques", inspirées de celles qui avaient cours précédemment pour les "espaces bon teint" de tout le monde [16].

[15] Il s'agit des quatre thèmes "médians" (n's 5 à 8), savoir ceux des topos de la cohomologie étale et ℓ-adique, des motifs, et (dans une moindre mesure) celui des cristaux. J'ai dégagé ces thèmes tour à tour entre 1958 et 1966.

[16] (A l'intention du lecteur mathématicien.) La principale contribution de Zariski dans ce sens me paraît l'introduction de la "topologie de Zariski" (qui plus tard a été un outil essentiel pour Serre dans FAC), et son "principe de connexité" et ce qu'il a appelé sa "théorie des fonctions holomorphes" - devenus entre ses mains la théorie des schémas formels, et les "théorèmes de comparaison" entre le formel et l'algébrique (avec, comme deuxième source d'inspiration, l'article fondamental GAGA de Serre). Quant à la contribution de Serre à laquelle je fais allusion dans le texte, il s'agit bien sûr, avant tout, de l'introduction par lui, en géométrie algébrique abstraite, du point de vue des faisceaux (introduit par Jean Leray une douzaine d'années auparavant, dans un contexte tout différent), dans cet autre article fondamental déjà cité FAC ("Faisceaux algébriques

Leurs idées, bien sûr, ont joué un rôle important lors de mes premiers pas dans l'édification de la géométrie arithmétique; plus, il est vrai, comme points de départ et comme outils (qu'il m'a fallu refaçonner plus ou moins de toutes pièces, pour les besoins d'un contexte beaucoup plus vaste), que comme une source d'inspiration qui aurait continué à nourrir mes rêves et mes projets, au cours des mois et des années. De toutes façons, il était bien clair d'emblée que, même refaçonnés, ces outils étaient très en deçà de ce qui était requis, pour faire même les tout premiers pas en direction des fantastiques conjectures.

cohérents").

A la lumière de ces "rappels", si je devais nommer les "ancêtres" immédiats de la nouvelle vision géométrique, ce sont les noms de Oscar Zariski, André Weil, Jean Leray et Jean-Pierre Serre qui s'imposent à moi aussitôt. Parmi eux Serre a joué un rôle à part, du fait que c'est par son intermédiaire surtout que j'ai eu connaissance non seulement de ses propres idées, mais aussi des idées de Zariski, de Weil et de Leray qui ont eu à jouer un rôle dans l'éclosion et dans le développement de la géométrie nouvelle.

4 L'éventail magique - ou l'innocence

Les deux idées-forces cruciales dans le démarrage et dans le développement de la géométrie nouvelle, ont été celle de schéma et celle de topos. Apparues à peu près simultanément et en étroite symbiose l'une avec l'autre [17], elles ont été comme un seul et même nerf moteur dans l'essor spectaculaire de la nouvelle géométrie, et ceci dès l'année même de leur apparition. Pour terminer ce tour d'horizon sur mon oeuvre, il me reste à dire quelque mots au sujet tout au moins de ces deux idées-là.

La notion de schéma est la plus naturelle, la plus "évidente" imaginable, pour englober en une notion unique la série infinie de notions de "variété" (algébrique) qu'on maniait précédemment (une telle notion pour chaque nombre premier [18]...). De plus, un seul et même "schéma" (ou "variété" nouveau style) donne naissance, pour chaque nombre premier p, à une "variété (algébrique) de caractéristique p " bien déterminée. La collection de ces différentes variétés des différentes caractéristiques peut alors être visualisée comme une sorte d' "éventail (infini) de variétés" (une pour chaque caractéristique). Le "schéma" est cet éventail magique, qui relie entre eux, comme autant de "branches" différentes, ses "avatars" ou "incarnations" de toutes les caractéristiques possibles. Par là-même, il fournit un efficace "principe de passage" pour relier entre

[17] Il est question de ce démarrage, qui se place en 1958, dans la note de b. de p. page 23. La notion de site ou de "topologie de Grothendieck" (version provisoire de celle de topos) est apparue dans le sillage immédiat de la notion de schéma. C'est elle à son tour qui fournit le langage nouveau de la "localisation" ou de "la descente", utilisé à chaque pas dans le développement du thème et de l'outil schématiques. La notion plus intrinsèque et plus géométrique de topos, restée d'abord implicite au cours des années suivantes, se dégage surtout à partir de 1963, avec le développement de la cohomologie étale, et s'impose peu à peu à moi comme la notion la plus fondamentale.

[18] Il convient d'inclure dans cette série également le cas $p = \infty$, correspondant aux variétés algébriques "de caractéristique nulle".

elles des "variétés", ressortissant de géométries qui jusque là étaient apparues comme plus ou moins isolées, coupées les unes des autres. A présent, elles se trouvent englobées dans une "géométrie" commune et reliées par elle. On pourrait l'appeler la géométrie schématique, première ébauche de cette "géométrie arithmétique" en quoi elle allait s'épanouir dans les années suivantes.

L'idée même de schéma est d'une simplicité enfantine - si simple, si humble, que personne avant moi n'avait songé à se pencher si bas. Si "bébête" même, pour tout dire, que pendant des années encore et en dépit de l'évidence, pour beaucoup de mes savants collègues, ça faisait vraiment "pas sérieux"! Il m'a fallu d'ailleurs des mois de travail serré et solitaire, pour me convaincre dans mon coin que "ça marchait" bel et bien - que le nouveau langage, tellement bébête, que j'avais l'incorrigible naïveté de m'obstiner à vouloir tester, était bel et bien adéquat pour saisir, dans une lumière et avec une finesse nouvelles, et dans un cadre commun désormais, certaines des toutes premières intuitions géométriques attachées aux précédentes "géométries de caractéristique p ". C'était le genre d'exercice, jugé d'avance idiot et sans espoir par toute personne "bien informée", que j'étais le seul sans doute, parmi tous mes collègues et amis, a pouvoir avoir jamais idée de me mettre en tête, et même (mû par un démon secret...) par mener à bonne fin envers et contre tous!

Plutôt que de me laisser distraire par les consensus qui faisaient loi autour de moi, sur ce qui est "sérieux" et ce qui ne l'est pas, j'ai fait confiance simplement, comme par le passé, à l'humble voix des choses, et à cela en moi qui sait écouter. La récompense a été immédiate, et au delà de toute attente. En l'espace de ces quelques mois, sans même "faire exprès", j'avais mis le doigt sur des outils puissants et insoupçonnés. Ils m'ont permis, non seulement de retrouver (comme en jouant) des résultats anciens, réputés ardus, dans une lumière plus pénétrante et de les dépasser, mais aussi d'aborder enfin et de résoudre des problèmes de "géométrie de caractéristique p " qui jusque là étaient apparus comme hors d'atteinte par tous les moyens alors connus [19].

Dans notre connaissance des choses de l' Univers (qu'elles soient mathématiques ou autres), le pouvoir rénovateur en nous n'est autre que l'innocence. C'est l'innocence originelle que nous avons tous reçue en partage à notre naissance et qui repose en chacun de nous, objet souvent de notre mépris, et de nos peurs les plus secrètes. Elle seule unit l'humilité et la hardiesse qui nous font pénétrer au coeur des choses, et qui nous permettent de laisser les choses pénétrer en nous et de nous en imprégner.

Ce pouvoir-là n'est nullement le privilège de "dons" extraordinaires - d'une puissance cérébrale (disons) hors du commun pour assimiler et pour manier, avec dextérité et avec aisance, une masse impressionnante de faits, d'idées et de techniques connus. De tels dons sont certes précieux, dignes d'envie sûrement pour celui qui (comme moi) n'a pas été comblé ainsi à sa naissance, "au delà de toute mesure".

Ce ne sont pas ces dons-là, pourtant, ni l'ambition même la plus ardente, servie par une volonté sans failles, qui font franchir ces "cercles invisibles et impérieux" qui enferment notre Univers. Seule l'innocence les franchit, sans le savoir ni s'en soucier, en les instants où nous nous retrouvons seul à l'écoute des choses, intensément absorbé dans un jeu d'enfant...

[19] Le compte rendu de ce "démarrage en force" de la théorie des schémas fait l'objet de mon exposé au Congrès International des Mathématiciens à Edinburgh, en 1958. Le texte de cet exposé me semble une des meilleures introductions au point de vue des schémas, de nature (peut-être) à motiver un lecteur géomètre à se familiariser tant bien que mal avec l'imposant traité (ultérieur) "Eléments de Géométrie Algébrique", exposant de façon circonstanciée (et sans faire grâce d'aucun détail technique) les nouveaux fondements et les nouvelles techniques de la géométrie algébrique.

5 La topologie - ou l'arpentage des brumes

L'idée novatrice du ”schéma”, nous venons de le voir, est celle qui permet de relier entre elles les différentes ”géométries” associées aux différents nombres premiers (ou différentes ”caractéristiques”). Ces géométries, pourtant, restaient encore chacune de nature essentiellement ”discrète” ou ”discontinue”, en contraste avec la géométrie traditionnelle léguée par les siècles passés (et remontant à Euclide). Les nouvelles idées introduites par Zariski et par Serre restituaient dans une certaine mesure, pour ces géométries, une ”dimension” de continuité, héritée aussitôt par la ”géométrie schématique” qui venait d'apparaître, aux fins de les unir. Mais pour ce qui était des ”fantastiques conjectures” (de Weil), on était très loin du compte. Ces ”topologies de Zariski” étaient, de ce point de vue, à tel point grossières, que c'était quasiment comme si on en était resté encore au stade des ”agrégats discrets”. Ce qui manquait, visiblement, était quelque principe nouveau, qui permette de relier ces objets géométriques (ou ”variétés”, ou ”schémas”) aux ”espaces” (topologiques) habituels, ou ”bon teint” ; ceux, disons, dont les ”points” apparaissent comme nettement séparés les uns des autres, alors que dans les espaces-sans-foi-ni-loi introduits par Zariski, les points ont une fâcheuse tendance à s'agglutiner les uns aux autres...

C'était l'apparition d'un tel ”principe nouveau” décidément, et rien de moins, qui pouvait faire se consommer ces ”épousailles du nombre et de la grandeur” ou de la ”géométrie du discontinu” avec celle du ”continu”, dont un premier pressentiment se dégageait des conjectures de Weil.

La notion d' ”espace” est sans doute une des plus anciennes en mathématique. Elle est si fondamentale dans notre appréhension ”géométrique” du monde, qu'elle est restée plus ou moins tacite pendant plus de deux millénaires. C'est au cours du siècle écoulé seulement que cette notion a fini, progressivement, par se détacher de l'emprise tyrannique de la perception immédiate (d'un seul et même "espace" qui nous entoure), et de sa théorisation traditionnelle ("euclidienne"), pour acquérir son autonomie et sa dynamique propres. De nos jours, elle fait partie des quelques notions les plus universellement et les plus couramment utilisées en mathématique, familière sans doute à tout mathématicien sans exception. Notion protiforme d'ailleurs s'il en fut, aux cents et mille visages, selon le type de structures qu'on incorpore à ces espaces, depuis les plus riches de toutes (telles les vénérables structures "euclidiennes", ou les structures "affines" et "projectives", ou encore les structures "algébriques" des "variétés" de même nom, qui les généralisent et qui assouplissent) jusqu'aux plus dépouillées : celles où tout élément d'information "quantitatif" quel qu'il soit semble disparu sans retour, et où ne subsistent plus que la quintessence qualitative de la notion de "proximité" ou de celle de "limite" [20], et la version la plus élusive de l'intuition de la forme (dite "topologique"). La plus dépouillée de toutes parmi ces notions, celle qui jusqu'à présent, au cours du demi-siècle écoulé, avait tenu lieu d'une sorte de vaste giron conceptuel commun pour englober toutes les autres, était celle d'espace topologique. L'étude de ces espaces constitue l'une des branches les plus fascinantes, les plus vivaces de la géométrie : la topologie.

Si élusif que puisse paraître de prime abord cette structure "de qualité pure" incarnée par un "espace" (dit, "topologique"), en l'absence de toute donnée de nature quantitative (telle la distance entre deux points, notamment) qui nous permette de nous raccrocher à quelque intuition familière de "grandeur" ou de "petitesse", on est pourtant arrivé, au cours du siècle écoulé, à cerner finement ces espaces dans les mailles serrées et souples d'un langage soigneusement "taille sur pièces". Mieux encore, on a inventé et fabrique de toutes pièces des sortes de "mètres"

[20] Parlant de la notion de "limite", c'est surtout à celle de "passage à la limite" que je pense ici, plutôt qu'à celle (plus familière au non mathématicien) de "frontière".

ou de "toises" pour servir tout de même, envers et contre tout, à attacher des sortes de "mesures" (appelées "invariants topologiques") à ces "espaces" tentaculaires qui semblaient se dérober, telles des brumes insaisissables, à toute tentative de mensuration. Il est vrai que la plupart de ces invariants, et les plus essentiels, sont de nature plus subtile qu'un simple "nombre" ou une "grandeur" - ce sont plutôt eux-mêmes des structures mathématiques plus ou moins délicates, attachées (à l'aide de constructions plus ou moins sophistiquées) à l'espace envisagé. L'un des plus anciens et des plus cruciaux de ces invariants, introduits déjà au siècle dernier (par le mathématicien italien Betti), est formé des différents "groupes" (ou "espaces") dits de "cohomologie", associés à l'espace [21].Ce sont

[21]A vrai dire, les invariants introduits par Betti étaient les invariants d'homologie. La cohomologie en constitue une version plus ou moins équivalente, "duale", introduite beaucoup plus tard. Cet aspect a acquis une prééminence sur l'aspect initial, "homologique ", surtout (sans doute) à la suite de l'introduction, par Jean Leray, du point de vue des faisceaux, dont il est question plus bas. Au point de vue technique, on peut dire qu'une grande partie de mon oeuvre de géomètre a consisté à dégager, et à développer plus ou moins loin, les théories cohomologiques qui manquaient, pour les espaces et variétés en tous genres et surtout, pour les "variétés algébriques" et les schémas. Chemin faisant, j'ai été amené aussi à réinterpréter les invariants homologiques traditionnels en termes cohomologiques, et par là-même, à les faire voir dans un jour entièrement nouveau.

Il y a de nombreux autres "invariants topologiques" qui ont été introduits par les topologues, pour cerner tel type de propriétés ou tel autre des espaces topologiques. A part la "dimension" d'un espace, et les invariants (co)homologiques, les premiers autres invariants sont les "groupes d'homotopie". J'en ai introduit un autre en 1957, le groupe (dit "de Grothendieck") $K(X)$, qui a connu aussitôt une grande fortune, et dont l'importance (tant en topologie qu'en arithmétique) ne cesse de se confirmer.

Une foule de nouveaux invariants, de nature plus subtile que les invariants actuellement connus et utilisés, mais que je sens fondamentaux, sont prévus dans mon programme de "topologie modérée" (dont une esquisse très sommaire se trouve dans l' "Esquisse d'un Programme", à paraître dans le volume 4 des Réflexions). Ce programme est basé sur la notion eux qui interviennent (surtout entre les lignes", il est vrai) dans les conjectures de Weil, qui en font la "raison d'être" profonde et qui (pour moi du moins, "mis dans le bain" par les explications de Serre) leur donnent tout leur sens. Mais la possibilité d'associer de tels invariants aux variétés algébriques "abstraites" qui interviennent dans ces conjectures, de façon à répondre aux desiderata très précis exigés pour les besoins de cette cause-là - c'était là un simple espoir. Je doute qu'en dehors de Serre et de moi-même, personne d'autre (pas même, et surtout, André Weil lui-même ! [22]) n'y croyait vraiment...

---

de "théorie modérée" ou "d'espace modéré", qui constitue, un peu comme celle de topos, une (deuxième) "métamorphose de la notion d'espace". Elle est bien plus évidente (me semble-t-il) et moins profonde que cette dernière. Je prévois que ses retombées immédiates sur la topologie "proprement dite" vont être pourtant nettement plus percutantes, et qu'elle va transformer de fond en comble le "métier" de topologue géomètre, par une transformation profonde du contexte conceptuel dans lequel il travaille. (Comme cela a été le cas aussi en géométrie algébrique avec l'introduction du point de vue des schémas.) J'ai d'ailleurs envoyé mon "Esquisse" à plusieurs de mes anciens amis et illustres topologues, mais il ne semble pas qu'elle ait eu le don d'en intéresser aucun.

[22]Chose paradoxale, Weil avait un "bloc" tenace, apparemment viscéral, contre le formalisme cohomologique - alors que ce sont en grande partie ses célèbres conjectures qui ont inspiré le développement des grandes théories cohomologiques en géométrie algébrique, à partir des années 1955 (avec Serre donnant le coup d'envoi, avec son article fondamental FAC, déjà mentionné dans une précédente note de bas de page).

Il me semble que ce "bloc" fait partie, chez Weil, d'une aversion générale contre tous les "gros fourbis", contre tout ce qui s'apparente à un formalisme (quand celui-ci ne peut se résumer en quelques pages), ou à une "construction" tant soit peu imbriquée. Il n'avait rien du "bâtisseur", certes, et c'est visiblement à son corps défendant qu'il s'est vu contraint, au cours des années trente, à développer les premiers fondements de géométrie algébrique "abstraits" qui (vu ces dispositions) se sont révélés un véritable "lit de Procruste" pour l'usager.

Je ne sais s'il m'en a voulu d'être allé au delà, et de m'être investi à construire les vastes demeures, qui ont permis aux rêves d'un Kronecker et au sien de s'incarner en un langage et en des outils délicats et efficaces. Toujours est-il qu'à aucun moment il ne m'a fait un mot de commentaire

Peu de temps avant, notre conception de ces invariants de cohomologie s'était d'ailleurs vue enrichir et renouveler profondément par les travaux de Jean Leray (poursuivis en captivité en Allemagne, pendant la guerre, dans la première moitié des années quarante). L'idée novatrice essentielle était celle de faisceau (abélien) sur un espace, auxquels Leray associe une suite de "groupes de cohomologie" correspondants (dits "à coefficients dans ce faisceau"). C'était comme si le bon vieux "mètre cohomologique" standard dont on disposait jusqu'à présent pour "arpenter" un espace, s'était soudain vu multiplier en une multitude inimaginablement grande de nouveaux "mètres" de toutes les tailles, formes et substances imaginables, chacun intimement adapté à l'espace en question, et dont chacun nous livre à son sujet des informations d'une précision parfaite, et qu'il est seul à pouvoir nous donner. C'était là l'idée maîtresse dans une transformation profonde dans notre approche des espaces en tous genres, et sûrement une des idées les plus cruciales apparues au cours de ce siècle. Grâce surtout aux travaux ultérieurs de Jean-Pierre Serre, les idées de Leray ont eu comme premiers fruits, au cours de la décennie déjà suivant leur apparition, un redémarrage impressionnant dans la théorie des espaces topologiques (et notamment, de leurs invariants dits "d'homotopie", intimement liés à la cohomologie), et un autre redémarrage, non moins capital, de la géométrie algébrique dite "abstraite" (avec l'article fondamental "FAC" de Serre, paru en 1955). Mes propres travaux en géométrie, à partir de 1955, se placent en continuité avec ces travaux de Serre, et par là même, avec les idées novatrices de Leray.

---

au sujet du travail dans lequel il me voyait engagé, ou de celui qui était déjà fait. Je n'ai pas non plus eu d'écho à Récoltes et Semailles, que je lui avais envoyé il y a plus de trois mois, avec une dédicace chaleureuse de ma main.