y a le point de vue "complexe d'opérateurs différentiels", avec des conditions d'holonomie et de régularité prenant la place des conditions de constructibilité. Et il y a le point de vue "complexe de $\mathscr{D}$-Modules", avec conditions de cohérence, d'holonomie et de régularité à la clef. La deuxième "photo" (prise sous l'angle "analyse") est séduisante, du fait qu'elle nous est intelligible en termes "classiques", et que les objets qu'elle nous montre, savoir des complexes d'opérateurs différentiels, nous paraissent de "dimensions" raisonnables, alors que les $\mathscr{D}$-Modules, même cohérents (à commencer par $\mathscr{D}$) lui-même !), paraissent démesurés quand on les regarde avec les lunettes "$\underline{O}_X$-Modules". Techniquement parlant pourtant, ceux-ci fournissent une photo plus complète. En effet, alors qu'il est "clair" que localement, chaque complexe de $\mathscr{D}$-Modules à cohomologie cohérente et à degrés bornés (disons) peut se représenter par un complexe d'opérateurs différentiels via (1), il est peu probable que ce soit aussi le cas globalement, si on ne fait sur X des hypothèses draconiennes (genre "variété de Stein" ou, dans le cadre algébrique, une hypothèse de quasi-projectivité)[676](*).

La "photo" 1 a l'avantage de garder un sens quand X n'est plus supposé lisse, mais est un espace analytique complexe quelconque. Par contre, telles quelles, les photos 2 et 3 sont raisonnables seulement sous l'hypothèse de lissité. On peut certes définir encore un faisceau d'anneaux $\mathscr{D}_X$ sans hypothèse de lissité sur X, et on trouve encore un dictionnaire tautologique entre complexe d'opérateurs différentiels (à composantes des $\underline{O}_X$-Modules localement libres) et complexes de $\mathscr{D}$-Modules (à composantes localement libres), mais $\mathscr{D}_X$ (paraît-il) cesse d'être cohérent, too bad ! Il y a peu de chances sans doute qu'un "théorème du bon Dieu" puisse se dégager dans le cas singulier, sur le modèle de celui connu dans le cas lisse. Il est évident d'autre part qu'on a besoin de photos du genre 2 ou 3 dans le cas singulier également, vu que la photo n° 1 est de **nature transcendante** : en la calquant naïvement, en termes de topologie de Zariski ou étale pour une variété algébrique, on trouverait des "coefficients" beaucoup trop particuliers pour être utilisables (car ces topologies sont trop grossières, par rapport à la topologie transcendante). Les photos 2 et 3, par contre, restreintes pour commencer au champ de vision "lisse", gardent un sens en géométrie algébrique "abstraite" (sur un corps de car. nulle, disons, pour commencer), ce qui fait (pour moi) leur principal charme. C'est dire qu'il s'impose d'en faire des agrandissements, de telle façon que les variétés singulières soient incluses dans le champ de vision.

Ça n'a pas semblé préoccuper Mebkhout, qui avait bien d'autres soucis- Quand je lui ai posé la question, son idée immédiate était la suivante. Supposons que X se plonge dans une variété lisse X', comme sous-espace analytique fermé. Alors la catégorie $\underline{Cons}^*(X, \mathbb{C})$ peut s'interpréter comme la sous-catégorie pleine de $\underline{Cons}^*(X', \mathbb{C})$ formée des objets dont la restriction à $U = X' - X$ est nulle (i.e. les objets à support dans X"). Mais celle-ci peut s'interpréter aussi, par le théorème du bon Dieu, en termes des photos 2 ou 3, comme la catégorie des "coefficients de De RHam - Mebkhout" sur X' dont la restriction à U est nulle. Il doit être facile de vérifier à priori (en restant dans le contexte des "coefficients de De Rham - Mebkhout", i.e. celui des photos 2,3), que cette catégorie, à équivalence près définie elle-même à isomorphisme unique près, est indépendant de la "lissification" choisie X' de X. J'ai fait moi-même plein de choses comme ça, et je veux bien croire que ça marche. Si d'autre part X n'est pas "lissifiable", qu'à cela ne tienne (dit Mebkhout), on va "faire de la descente cohomologique" pour reconstituer une catégorie globale à partir de ces morceaux locaux, ou bien introduire le "site des lissifications" d'ouverts de X, et travailler là-dessus. Il y a des chances qu'on peut se débrouiller en effet, mais au lieu d'un "site lissifiant" (improvisé par Mebkhout pour les besoins de

[676](*) Bien sûr, rien n'empêche de construire un "catégorie dérivée" à partir de la catégorie des complexes d'opérateurs différentiels sur X et des morphismes différentiels entre tels complexes, en "inversant" formellement les "quasi-isomorphismes" (défi nis par passage aux complexes de $\mathscr{D}$-Modules correspondants). On trouvera (je présume) une sous-catégorie **pleine** de $\underline{Cris}^*_{coh}(X)$, mais non pas toute cette catégorie sans doute, en l'absence d'hypothèses genre "Stein" ou "X projectif" (ou seulement, quasi-projectif, dans le cas algébriques).