(e) L'ubiquité du bon Dieu (27 mai) Une "dernière" note de bas de page, rajoutée aux "Cinq photos" in extremis hier (avant de donner à la frappe les douze premières notes de l' Apothéose), a pris encore "des dimensions prohibitives", et je vais ◊(finalement continuer "cette longue digression mathématique" par une dernière (et courte) section. Ainsi, "Les Cinq Photos" consisteront en les **cinq** sections (a) à (e) - comme quoi tout s'arrondit et se parfait…

Il s'agit d'un commentaire sur le véritable domaine de validité (présumé) du "théorème du bon Dieu" de Mebkhout, lequel dépasse de très loin (selon moi) le cadre initial des espaces analytiques complexes - non seulement par la **philosophie** nouvelle qu'il apporte (et qui a dès à présent renouvelé le thème cohomologique), mais également dans un sens technique.

Une fois qu'on interprète les faisceaux de $\mathbb{C}$-vectoriels constructibles sur X (lisse), soit en termes de Modules procohérents stratifiés (à la Deligne), soit (par passage à la limite projective sur des épaississements infinitésimaux d'ouverts de X) en termes de faisceaux cristallins (à la Grothendieck), le "théorème du bon Dieu" alias Mebkhout affirme l'équivalence de deux catégories qui, cette fois, sont **l'une et l'autre** de nature "purement algébrique". En d'autres termes, ce théorème prend à présent un sens précis, dans d'autres contextes que le contexte analytique complexe : aussi bien le contexte des schémas lisses sur un corps (qu'il n'y a pas même lieu de supposer de caractéristique nulle - voir à ce sujet la note de b. de p.(**) page 996 plus haut ; en car. $p > 0$ le point de vue "cristallin à puissances divisées" est ici essentiel), soit les variétés rigide-analytiques de toute caractéristique, soit les schémas lisses de type fini sur $\mathbb{Z}$ (et j'en passe…).

La partie "formelle" du théorème du bon Dieu concerne **tous** les complexes de $\mathscr{D}$-Modules cohérents, pas seulement ceux qui sont holonomes, et dit que le foncteur du bon Dieu, revu et corrigé par les soins de l'ancêtre (i.e. la dualité par rapport au faisceau structural $\underline{O}_X$ essentiellement) est **pleinement fidèle** de la catégorie $D_{coh}(X, \mathscr{D}_X = \underline{Cris}^*_{coh}(X)$, vers la catégorie de coefficients envisagée $\underline{Coeff}^*$ prise au choix du goût de l'intéressé). Quand on prend bien les choses, ça devrait être plus ou moins "sorital".

Mais dans la catégorie d'arrivée, on définit, "par dévissage", deux sous-catégories pleines remarquables, celle des "coefficients.holonomes" resp. celle des "coefficients holonomes réguliers" (comme à la fin de (c))et dans la note de b. de p.(**) page 1011). Ceci dit, le "théorème de Mebkhout généralisé" (au contexte envisagé), qui lui n'aura rien de sorital certes mais est sûrement profond, dira deux choses :

1. ◊(La catégorie $\underline{Coeff}^*_{hol}$ des "coefficients" holonomes est dans l'image de la catégorie $\underline{Cris}^*_{coh}(X)$ par le foncteur (pleinement fidèle) "de Mebkhout-Grothendieck". (NB. Moralement, ce foncteur est le foncteur de Mebkhout, mais regardé sur $\underline{Cris}^*_{coh}(X)$ tout entier, et de plus "revu et corrigé par les soins de l'ancêtre", pour que le but soit dans $\underline{Coeff}^*$ qui a un sens purement algébrique…).
2. Caractériser l'image inverse de $\underline{Coeff}^*_{hol}$ et de $\underline{Coeff}^*_{hol\,reg}$ par des conditions d' "holonomie" et de "régularité" "microlocales", en termes de complexes d'opérateurs différentiels.

Pour ce dernier point (qui pour mon programme des années soixante est peut-être relativement accessoire), on a en caractéristique nulle une condition d'holonomie déjà toute trouvée. Quant à la condition de régularité, c'est le moment de voir si les japonais n'auraient pas justement la bonne notion dans leurs manches - mais ce n'est pas Mebkhout qui me l'apprendra, vu qu'il en a trop vu pour vouloir en entendre parler.

Quant à moi qui n'en ai pas vu comme lui, il me semble qu'il y a **trois aspects** différents de la régularité, qui se complètent mutuellement :

1. Aspect "géométrique" dégagé par Deligne par dévissage dans $\underline{Coeff}^*_{hol}$, en se ramenant à la condition de régularité pour un "système local" (p. ex. fibre à connexion intégrable) au voisinage d'un diviseur

---

cristaux…