"image directe à supports propres", pour un morphisme (séparé) de type fini quelconque, généralisant le foncteur déjà connu quand f est une immersion, se réduisant à Rf_* pour f propre, et formant avec $Rf^!$ un couple de foncteurs adjoints $Rf_!$, $Rf^!$. Je ne me rappelle pas m'être affligé dans les années cinquante de cette imperfection d'un formalisme dont la portée générale, au delà de la dualité cohérente schématique ou analytique, ◇ m'échappait encore[584](*).

Cette lacune m'apparaît pleinement en 1963 seulement, quand je découvre que dans le contexte de la cohomologie étale (à coefficients "discrets") qui venait de naître, existe un formalisme en tous points analogue au formalisme cohérent, avec en plus, justement, un foncteur $Rf_!$ ((d'image directe à supports propres) défini pour **tout** morphisme séparé de type fini. C'est d'ailleurs en me guidant pas à pas sur le travail que j'avais fait dans le cas cohérent des années auparavant (sans intéresser personne d'autre que moi), que j'arrive alors (en l'espace d'une semaine ou deux, à tout casser), à partir des deux théorèmes-clef de changement de base, à établir le formalisme complet dit "des six opérations". C'est là un formalisme de dualité incomparablement plus perfectionné et plus puissant que celui dont on disposait précédemment dans le contexte transcendant, pour les seules variétés topologiques (et systèmes locaux sur icelles), et plus satisfaisant même que le formalisme auquel j'étais parvenu en dualité cohérente.

Mes travaux de dualité cohérente sont exposés dans le séminaire bien connu de R. Hartshorne "Residues and Duality" (paru seulement en 1966)[585](**), ceux ◇ sur la dualité étale dans un ou deux chapitres de SGA 4, et surtout dans le séminaire SGA 5, qui y était entièrement consacré. Et c'est au moment d'écrire ces lignes seulement que je me rends compte, soudain, que mis à part quelques textes-précurseurs sporadiques (dans les séminaires Cartan et Bourbaki des années cinquante), il n'y a aucun texte systématique **publié** : et de ma plume, exposant le formalisme et le yoga de dualité, que ce soit dans le contexte cohérent, ou dans le contexte étale. Les exposés de SGA 4 consacrés à ce thème, centrés autour du seul "théorème de dualité globale" pour un morphisme séparé de type fini (en établissant que $Rf_!$, $Rf^!$ sont adjoints), ont été rédigés

---

[584](*) Bien entendu, je m'étais rendu compte que déjà dans le cas d'une immersion ouverte $f : X \hookrightarrow Y$, où le foncteur $Rf^!$ coïncide donc avec le foncteur Lf^* de "restriction à X", celui-ci n'admettait **pas** (dans le contexte des faisceaux quasi-cohérents) d'adjoint à gauche. L'adjoint à gauche habituel $Rf_!$ ("prolongement par zéro hors de X") ne conserve pas la quasi-cohérence. D'autre part, j'avais vérifié également qu'en dehors d'hypothèses de quasi-cohérence et même pour un morphisme propre de base un point, il n'y a pas de "théorème de dualité". Ainsi, l'impossibilité de définir un $Rf_!$ sous des hypothèses générales me semblait acquise et dans la nature des choses.

C'est Deligne qui s'est aperçu en 1965 ou 66 (à peine débarqué !) que l'on pouvait donner un sens à $Rf_!$ et récupérer le théorème de dualité cohérente pour un morphisme séparé de type fini non propre, à condition de travailler avec des coefficients qui sont des (complexes de) **pro-faisceaux** quasicohérents. Cette belle idée n'a pas eu pourtant la fortune qu'on aurait pu attendre - pas plus que le formalisme initial de dualité cohérente, qu'elle permettait de parfaire.

Deligne a repris cette idée avec succès dans son essai d'une construction de "coefficients de De Rham" sur les schémas algébriques de caractéristique nulle, essai prometteur qu'il a néanmoins largué aux profits et pertes dès après mon départ en 1970. C'est à Mebkhout, six ans plus tard, qu'il était réservé de dégager "la" bonne catégorie de "coefficients de De Rham" (cristallins) que j'anticipais depuis dix ans alors…

[585](**) Le séminaire en question (paru dans Lecture Notes in Mathematics, n° 20, Springer Verlag) expose l'essentiel de mes idées sur le formalisme de dualité cohérente, centrées sur le formalisme des six opérations, la bidualité, et une théorie des "complexes résiduels" (lesquels sont des représentants injectifs canoniques des complexes dualisants). Ces idées ont été reprises dans le cadre analytique par Verdier et surtout par Ramis et Ruguet. Le séminaire Hartshorne ne contient pas, par contre, divers développements plus fins, intimement liés à ce formalisme : une théorie des résidus (pour des schémas de type fini et plats sur une base quelconque), et une théorie cohomologique de la différente, lesquels n'ont jamais été publiés (à ma connaissance). J'avais également développé dans les années 50 le formalisme du "module déterminant" des complexes parfaits, lequel devait finalement être inclus dans SGA 7 et dont le rédacteur (suivant l'exemple déjà bien établi par certains "rédacteurs" de SGA 5) a déclaré forfait, au bout de deux ans.

Enfin, je signale que dans la foulée de mes réflexions de dualité cohérente des années cinquante, j'avais été amené alors à introduire et à développer tant soit peu la version purement algébrique de la **cohomologie de Hodge** et de celle de **De Rham**, et notamment le formalisme des classes de cohomologie associées à un cycle algébrique (supposé lisse dans un premier temps), et une théorie des classes de Chern, sur le modèle de celle que j'avais développée en théorie de Chow.