cristallin X_{cris}) ! Donc on ne peut à priori leur appliquer le formalisme cohomologique connu des faisceaux de Modules sur des topos (commutativement) annelés, tels X_{cris}.

La tentation est grande, ici, de passer à la limite projective du profaisceau qu'on a sur chaque épaississement. On trouve ainsi des Modules cristallins (sinon des cristaux en Modules), dont la "valeur" sur chaque U' n'a rien de cohérent ni de quasi-cohérent. L'espoir, c'est que tout au moins pour ◇(le type de cristaux de pro-Modules qui nous intéressent (ceux, notamment, obtenus par le foncteur de Deligne) un tel cristal de pro-modules puisse se **reconstituer** à partir du Module cristallin C déduit par passage à la limite, en prenant sur chaque épaississement U' "l'enveloppe pro-cohérente" du faisceau zariskien C_U, (restriction de C aux ouverts zariskiens de U')[706](*). Ça me paraît bien être le cas tout au moins pour les cristaux de pro-modules associés à un Module cohérent stratifié sur un $Y - Z$ comme ci-dessus, par exemple dans le cas-type où on prend le complété formel de $\underline{O}_X$ le long de $Y - Z$ et qu'on prolonge par zéro ailleurs (et itou sur les épaississements). Si mon "espoir" est justifié, alors la catégorie $DRD^*(X)$ des coefficients de De Rham - Deligne sur X pourrait s'interpréter comme une sous-catégorie pleine de la catégorie dérivée ordinaire $D^*(X_{cris}, \underline{O}_{X_{cris}})$, définie par des conditions du type "finitude" et "régularité" (elles-mêmes décrites en termes de dévissage, comme ci-dessus) sur les faisceaux de cohomologie. Ce serait-là une description d'une simplicité déconcertante, que j'aurais aussi bien pu donner dès 1966, si j'avais pris le loisir alors de continuer ma réflexion cristalline…

Cette question "de fondements" (s'il est licite de passer à la limite) ne dépend visiblement pas de la question si X est lisse ou non - s'il ne l'est pas, on le plonge dans un X' lisse et on se réduit au cas lisse. Si ce point de vue (quasiment trop beau pour être vrai !) marchait bel et bien, alors (dans le cas lisse maintenant) il y aurait lieu du coup (je pense) d'interpréter les formules "de bidualité" (version algébrique) (15) comme étant des $R\underline{Hom}_{\underline{O}_X}$ **ordinaires**, sans s'embarrasser de pro-questions (mais en faisant simplement attention à transporter les stratifications…). Un premier test dans ce sens serait le suivant : si $u : C_1 \longrightarrow C_2$ est un morphisme de complexes de $\mathscr{D}$-Modules à cohomologie cohérente, tel que son image par le foncteur dualisant naïf $R\underline{Hom}_{\underline{O}_X}(-, \underline{O}_X)$ est un quasi-isomorphisme, en est-il de même pour u ? Mais cela revient (par un argument de mapping-cylinder) à demander si un complexe de $\mathscr{D}$-Modules à cohomologie cohérente, tel que son "dual naïf" soit nul (au sens des cat. dérivées, i.e. à faisceaux de cohomologie nuls), est lui même nul (au même sens). Ou encore, si on a le complexe d'opérateurs différentiels $L^\cdot$, revient-il au même de dire que le complexe de $\mathscr{D}$-Modules associé est à faisceaux de cohomologie nulle, ou qu'il en soit ainsi pour le complexe "formalisé" $P^\infty(L^\cdot)$, vu cette fois non comme un complexe de pro-faisceaux, mais comme un complexe de faisceaux ordinaires (en passant aux $\lim_{\longleftarrow}$). Mebkhout va sûrement pouvoir me dire…

◇((23 mai) J'ai encore téléphoné à Mebkhout hier soir - ça fait d'ailleurs bien une semaine ou deux que je lui téléphone presque chaque soir, pour des questions mathématiques, ou historiques - et au total, ça va faire une note de téléphone astronomique ! Mais l' Apothéose, sur laquelle je m'échine et que j'astique depuis trois semaines bien tassées, vaut bien ça…

Toujours est-il que Zoghman m'a garanti un résultat qui a l'air voisin de la "question test" sur laquelle j'ai terminé la nuit dernière : si C dans $\underline{Cris}^*_{coh}$ est tel que le complexe d'opérateurs $L^\cdot = DR(C)$ associé soit quasi-nul, alors C est lui-même quasi-nul (cas analytique). On a un homomorphisme de complexes de faisceaux (de $\mathbb{C}$-vectoriels), donné par les "parties principales d'ordre infini"

$$L^\cdot \longrightarrow P^\infty(L^\cdot)\,,$$

[706](*) En parlant ici de faisceau "zariskien" (par opposition à "cristallin", j'ai reglissé subrepticement dans le contexte schématique. Le lecteur qui préférerait le contexte analytique aura rectifi é de lui-même.