standard" comme une impasse, hors d'atteinte ce qui plus est, et comme un **obstacle**, pour tout dire, désormais dépassé grâce à Dieu (et à sa modeste personne), sur le chemin de la démonstration de la conjecture de Weil[488](*).

b_{10}. La Formule

(a) Les vraies maths...

Note 169_5 ◇(17 mars) Les fameuses "conjectures de Weil", pour une variété algébrique X définie sur un corps fini k, concernent la "fonction L" (dite "de Artin-Weil") associée à X. Celle-ci est définie comme une certaine série formelle à coefficients rationnels, dont la connaissance équivaut à celle du nombre de points de X rationnels sur le corps k et sur toutes ses extensions finies. La première assertion parmi ces conjectures, c'est que cette série formelle (à terme constant 1) est le développement en série d'une **fonction** rationnelle sur $\mathbb{Q}$. Toutes les autres affirmations concernent la forme particulière et les propriétés de cette fonction rationnelle, dans le cas particulier où X est connexe projective et non singulière. Au coeur de ces conjectures est une certaine formule, présumée canonique, présentant cette fonction rationnelle sous la forme

$$\mathrm{L}(t) \quad = \quad \frac{\mathrm{P}_0(t)\,\mathrm{P}_2(t)\cdots\mathrm{P}_{2\mathrm{n}}(t)}{\mathrm{P}_1(t)\cdots\mathrm{P}_{2\mathrm{n}\text{-}1}(t)}$$

où les P_i ($0 \leq i \leq 2n$, avec $n = \dim X$) sont des polynômes à coefficients entiers à terme constant 1. Le degré b_i, de P_i est censé jouer le rôle d'un "i.ème nombre de Betti" pour X (ou plus précisément, pour la variété correspondante $\overline{X}$ sur la clôture algébrique $\overline{k}$ du corps k). Ainsi, quand X provient par "réduction en car. $p > 0$" d'une variété projective non singulière X_K définie sur un corps K de caractéristique nulle, alors b_i doit être égal au i.ème nombre de Betti (défini par voie transcendante) de la variété algébrique **complexe**, obtenue à partir de X_K par un plongement quelconque de K dans $\mathbb{C}$[489](*). La fonction rationnelle doit satisfaire une **équation fonctionnelle**, qui équivaut à dire que les racines de P_{2n-1} sont exactement les $\frac{q^n}{\xi_\alpha}$, où $q = p^f$ est le cardinal du corps de base k, et où ξ_α parcourt les racines de P_i. (Moralement, cela devait "provenir" de l'existence d'une "dualité de Poincaré" pour la "cohomologie", non nommée et non définie, de la variété $\overline{X}$.) Je crois que Weil devait conjecturer également que pour $i \leq n$, les zéros de P_{2n-i} étaient exactement les $q^{n-i}\xi_\alpha$, où ξ_α parcourt encore les zéros de P_i (ou, ce qui revient au même au vu de la condition de dualité, que les zéros de P_i se groupent par paires, de produit égal à q^i pour chacune). La "raison" heuristique ici est une autre propriété importante de la cohomologie des variétés projectives◇non singulières complexes, exprimée cette fois par le "théorème de Lefschetz" (version dite "vache"). Enfin, la dernière des conjectures de Weil, analogue "géométrique" de la conjecture de Riemann, est que les valeurs absolues des inverses des zéros de P_i sont toutes égales à $q^{\frac{i}{2}}$ (assertion qui conduit à des estimations d'une grande précision sur des nombres de

[488](*) (16 mars) Pour quelques précisions sur ce double escamotage-débinage, voir l'Eloge Funèbre (notes n°s 104,105), et les quelques mots sur cet Eloge au début de la note n° 171 (x). Pour un examen plus circonstancié de l'art de l'escamotage, voir l'ensemble des sous-notes "La Formule" (n°s 169_5 - 169_9).

(x) (11 mai) Ce début de l'ancienne note "L'apothéose" s'est séparé de celle-ci, pour devenir une note séparée "Les joyaux" (n° 170(iii)).

[489](*) Au moment où Weil faisait ses conjectures, il n'était pas même connu que les b_i défi nis ainsi étaient indépendants du plongement choisi de K dans $\mathbb{C}$. Quelques années plus tard, cela allait résulter de la théorie de Serre de la cohomologie des faisceaux cohérents, qui donnait un sens "purement algébrique" aux invariants plus fi ns $h^{i,j}$ de la théorie de Hodge.