et où ne subsistent plus que la quintessence qualitative de la notion de "**proximité**" ou de celle de "**limite**"[41], et la version la plus élusive de l'intuition de la **forme** (dite "topologique"). La plus dépouillée de toutes parmi ces notions, celle qui jusqu'à présent, au cours du demi-siècle écoulé, avait tenu lieu d'une sorte de vaste giron conceptuel commun pour englober toutes les autres, était celle **d'espace topologique**. L'étude de ces espaces constitue l'une des branches les plus fascinantes, les plus vivaces de la géométrie : la **topologie**.

Si élusif que puisse paraître de prime abord cette structure "de qualité pure" incarnée par un "espace" (dit, "topologique"), en l'absence de toute donnée de nature quantitative (telle la distance entre deux points, notamment) qui nous permette de nous raccrocher à quelque intuition familière de "grandeur" ou de "petitesse", on est pourtant arrivé, au cours du siècle écoulé, à cerner finement ces espaces dans les mailles serrées et souples d'un langage soigneusement "taille sur pièces". Mieux encore, on a inventé et fabrique de toutes pièces des sortes de "mètres" ou de "toises" pour servir tout de même, envers et contre tout, à attacher des sortes de "mesures" (appelées "invariants topologiques") à ces "espaces" tentaculaires qui semblaient se dérober, telles des brumes insaisissables, à toute tentative de mensuration. Il est vrai que la plupart de ces invariants, et les plus essentiels, sont de nature plus subtile qu'un simple "nombre" ou une "grandeur" - ce sont plutôt eux-mêmes des structures mathématiques plus ou moins délicates, attachées (à l'aide de constructions plus ou moins sophistiquées) à l'espace envisagé. L'un des plus anciens et des plus cruciaux de ces invariants, introduits déjà au siècle dernier (par le mathématicien italien **Betti**), est formé des différents "groupes" (ou "espaces") dits de "cohomologie", associés à l'espace[42]. Ce sont eux qui interviennent (surtout "entre les lignes", il est vrai) dans les conjectures de Weil, qui en font la "raison d'être" profonde et qui (pour moi du moins, "mis dans le bain" par les explications de Serre) leur donnent tout leur sens. Mais la possibilité d'associer de tels invariants aux variétés algébriques "abstraites" qui interviennent dans ces conjectures, de façon à répondre aux desiderata très précis exigés pour les besoins de cette cause-là - c'était là un simple espoir. Je doute qu'en dehors de Serre et de moi-même, personne d'autre (pas même, et surtout, André Weil lui-même ![43] ) n'y croyait vraiment. . .

---

[41] Parlant de la notion de "limite", c'est surtout à celle de "passage à la limite" que je pense ici, plutôt qu'à celle (plus familière au non mathématicien) de "frontière".

[42] A vrai dire, les invariants introduits par Betti étaient les invariants **d'homologie**. La **cohomologie** en constitue une version plus ou moins équivalente, "duale", introduite beaucoup plus tard. Cet aspect a acquis une prééminence sur l'aspect initial, "homologique ", surtout (sans doute) à la suite de l'introduction, par Jean Leray, du point de vue des faisceaux, dont il est question plus bas. Au point de vue technique, on peut dire qu'une grande partie de mon oeuvre de géomètre a consisté à dégager, et à développer plus ou moins loin, les théories cohomologiques qui manquaient, pour les espaces et variétés en tous genres et surtout, pour les "variétés algébriques" et les schémas. Chemin faisant, j'ai été amené aussi à réinterpréter les invariants homologiques traditionnels en termes cohomologiques, et par là-même, à les faire voir dans un jour entièrement nouveau.

Il y a de nombreux autres "invariants topologiques" qui ont été introduits par les topologues, pour cerner tel type de propriétés ou tel autre des espaces topologiques. A part la "dimension" d'un espace, et les invariants (co)homologiques, les premiers autres invariants sont les "groupes d'homotopie". J'en ai introduit un autre en 1957, le groupe (dit "de Grothendieck") $K(X)$, qui a connu aussitôt une grande fortune, et dont l'importance (tant en topologie qu'en arithmétique) ne cesse de se confi rmer.

Une foule de nouveaux invariants, de nature plus subtile que les invariants actuellement connus et utilisés, mais que je sens fondamentaux, sont prévus dans mon programme de "topologie modérée" (dont une esquisse très sommaire se trouve dans l' "Esquisse d'un Programme", à paraître dans le volume 4 des Réflexions). Ce programme est basé sur la notion de "théorie modérée" ou "d'espace modéré", qui constitue, un peu comme celle de topos, une (deuxième) "métamorphose de la notion d'espace". Elle est bien plus évidente (me semble-t-il) et moins profonde que cette dernière. Je prévois que ses retombées immédiates sur la topologie "proprement dite" vont être pourtant nettement plus percutantes, et qu'elle va transformer de fond en comble le "métier" de topologue géomètre, par une transformation profonde du contexte conceptuel dans lequel il travaille. (Comme cela a été le cas aussi en géométrie algébrique avec l'introduction du point de vue des schémas.) J'ai d'ailleurs envoyé mon "Esquisse" à plusieurs de mes anciens amis et illustres topologues, mais il ne semble pas qu'elle ait eu le don d'en intéresser aucun. . .

[43] Chose paradoxale, Weil avait un "bloc" tenace, apparemment viscéral, contre le formalisme cohomologique - alors que ce sont en grande partie ses célèbres conjectures qui ont inspiré le développement des grandes théories cohomologiques en géométrie algébrique, à partir des années 1955 (avec Serre donnant le coup d'envoi, avec son article fondamental FAC, déjà mentionné dans une précédente note de bas de page).

Il me semble que ce "bloc" fait partie, chez Weil, d'une aversion générale contre tous les "gros fourbis", contre tout ce