un ouvert V de U, et pour les morphismes entre voisinages infinitésimaux (ou "épaississements") U', U'' d'un même U (morphismes induisant l'identité sur U, bien sûr).

L'intérêt du point de vue cristallin, c'est que les objets à étudier (les $\mathscr{D}$-Modules) peuvent s'interpréter comme des faisceaux de Modules "ordinaires" sur un site convenable[679](*), annelé en **anneaux locaux commutatifs**, savoir le "site cristallin" formé par les épaississements U' des divers ouverts U de X (le faisceau structural cristallin étant simplement $U' \longmapsto \Gamma(U', \underline{O}_{U'})$). Dès lors, on dispose de toute l'arsenal d'intuitions géométriques associées à une telle situation. Une relation remarquable que j'ai découverte en 1966 et qui m'a alors sidérée, c'est que la cohomologie du site cristallin (ou du topos cristallin qui lui correspond), à coefficients dans le faisceaux structural (ou plus généralement, à coefficients dans F, du moins quand F est cohérent sur $\underline{O}_X$), s'identifie à la **cohomologie de De Rham** de X (à coefficients dans F, en l'occurrence, i.e. l'hypercohomologie ordinaire de X à coefficients dans $DR(F)$). Ça a été le démarrage de la cohomologie cristalline[680](**).

◊Ainsi on a un dictionnaire parfait, expliqué en long et en large dans mes exposés de 1966 déjà cités[681](*), entre quatre types d'objets sur X, ou quatre types de structure sur un $\underline{O}_X$-Module :

$$\begin{cases} \mathscr{D}\text{-Modules} \\ \underline{O}_X\text{-Modules à connexion intégrable} \\ \text{Modules stratifiés (données de descente infinitésimales d'ordre infini)} \\ \text{cristaux de } \underline{O}_X\text{-Modules} \end{cases} \tag{Cr}$$

Ce dictionnaire est valable sans aucune restriction du type cohérence ou quasicohérence sur F. On notera cependant que si on compare les termes extrêmes

$$\mathscr{D}\text{-Modules} \Longleftrightarrow \text{cristaux de } \underline{O}_X\text{-Modules}$$

les notions naturelles de "cohérence" dans l'un et l'autre contexte **ne se correspondent pas**. Le faisceau structural cristallin est cohérent, mais les Modules cohérents sur le topos annelé cristallin correspondent exactement aux $\mathscr{D}$-Modules qui sont cohérents **en tant que $\underline{O}_X$-modules**, auquel cas ils sont même libres de type fini. La catégorie qu'ils forment est canoniquement équivalente, par le foncteur "extension des scalaires" relatif à $\mathbb{C}_X \to \underline{O}_X$, à la catégorie des faisceaux de $\mathbb{C}_X$-modules localement libres, i.e. à celle des "**systèmes locaux** de $\mathbb{C}$-vectoriels" sur X. Cela fait donc, pour ce genre d'objets, cinq descriptions possibles (ou cinq "photos" en comptant les quatre du tableau (Cr) précédent) ! Mais ce sont là des "coefficients" de nature excessivement spéciale[682](**), parmi ceux (de De Rham - Mebkhout) qui nous intéressent.

Revenons plutôt aux quatre photos du tableau (Cr) ci-dessus, et voyons ce qui se passe quand on ne suppose plus X lisse. Les quatre types d'objets envisagés gardent un sens. Il semblerait d'autre part, que les deux premiers ne forment pas des catégories importantes - plutôt, que tous les $\mathscr{D}_X$-Modules et tous les $\underline{O}_X$-Modules à connexion intégrable, qu'on rencontre de façon naturelle, comme "ayant un sens géométrique", "proviennent" (dans un sens évident) de Modules stratifiés, lesquels d'ailleurs peuvent encore s'interpréter comme des cristaux de $\underline{O}_X$-Modules, tout comme dans le cas lisse[683](***).

[679](*) On fera attention qu'on ne trouve pas **tous** les faisceaux de modules sur le site cristallin, mais seulement ceux qui satisfont une condition supplémentaire simple (faisceaux appelés "spéciaux" dans [Crystals])

[680](**) Là encore, les idées de démarrage sont si "triviales" que ce n'est vraiment pas la peine de s'embarrasser du peu, quand on a passé quinze ans de sa vie, après, à en développer un petit bout (et à oublier le reste. . .).

[681](*) Voir l'exposé [Crystals], cité dans la première note de bas de page à la présente sous-note (note (*) page 988).

[682](**) En fait, c'est la $\mathscr{D}$-cohérence, bien sûr (qui m'avait échappé dans les années soixante) qui est ici la notion de finitude importante.

[683](***) cette assertion a été faite hâtivement, et est fausse telle quelle. Pour qu'elle devienne vraie, il faut remplacer le "site