la réplique, dans une conversation qui restait platonique), site qui m'apparaît comme fortement redondant, pourquoi ne pas travailler avec le site cristallin, qui a fait ses preuves (même s'il a été oublié, semblerait-il, avec un ensemble touchant, par ceux qui furent mes élèves…) ? Et ceci d'autant plus qu'il était bien clair pour moi, dès l'année 1966 où j'ai dégagé les idées de démarrage du yoga cristallin, que les futurs "coefficients de De Rham" devaient s'exprimer justement en termes cristallins !

Cela m'amène donc à sortir de mes fonds de tiroir une photo qui a eu le temps d'amasser de la poussière, la pauvre - et pourtant, une fois soufflé dessus, elle m'apparaît comme neuve, et d'une netteté parfaite. C'est d'ailleurs une des premières choses à quoi j'aie songé, en écrivant l'an dernier (avant même d'avoir fait la rencontre de l' Enterrement…) la note "Mes orphelins" (n° 46), sentant obscurément qu'il était temps que quelqu'un s'exprime avec respect sur des choses qui méritent le respect… D'ailleurs, depuis que Mebkhout ◊ m'a parlé de $\mathscr{D}$-Modules (en 1980 - Dieu sait pourtant que je n'étais pas "branché" alors !), je n'ai pu m'empêcher d'y penser comme à des "cristaux" plutôt, et d'utiliser les mots "$\mathscr{D}$-Modules" et "cristaux" (de $\underline{O}_X$-Modules) comme synonymes, avec (bien sûr) une préférence marquée pour le deuxième.

J'en viens donc à la quatrième photo promise, la photo "cristalline". Supposons d'abord X lisse. Se donner un $\mathscr{D}$-Module F sur X, c'est la même chose que de se donner un $\underline{O}_X$-Module, avec une structure supplémentaire, qu'on peut exprimer de diverses façons équivalentes. L'une, la tautologique, consiste à dire qu'on "prolonge" les opérations de $\underline{O}_X$ sur le faisceau abélien F, en une X opération de l' Anneau $\mathscr{D}_X$ (qui contient $\underline{O}_X$). Comme $\mathscr{D}_X$ est engendré par $\underline{O}_X$ et le sous-faisceau additif des dérivations, on voit qu'il revient au même de se donner sur F ce qu'on appelle une "**connexion intégrable**", c'est à dire une loi qui, à chaque dérivation ξ sur un ouvert U de X, associe une "ξ-dérivation" θ_ξ de F, de façon linéaire en ξ, et de façon compatible avec l'opération "crochet" de dérivations[677](*). On peut dire que c'est là une structure de nature "différentielle" sur F, d'ordre 1.

Du fait qu'on est en caractéristique nulle[678](**), cette structure peut s'interpréter aussi comme une structure plus riche, une structure différentielle d'ordre infini, que j'ai appelée une "**stratification**" sur F (lequel F prend alors le nom de "**Module stratifié**"). Une façon d'exprimer une stratification, est comme une "**donnée de descente infinitésimale d'ordre infini**" sur F (par rapport au morphisme $X \to$ un point), ou plus précisément, comme la ◊ donnée d'un isomorphisme, au dessus du complété formel de XxX le long de la diagonale, entre les deux images inverses de F (par les deux projections canoniques $pr1$ et $pr2$), isomorphisme qui prolonge l'identité sur la diagonale, et satisfait de plus à une "condition de transitivité" convenable.

Le passage d'une connexion intégrable à une "donnée de descente infinitésimale" (ou structure stratifiée) représente une idée nouvelle - et "triviale", comme toutes les idées nouvelles que j'ai" eu l'honneur de découvrir ! Celle-ci ne prend cependant toute sa force qu'une fois ré-interprétée en termes de la notion de **cristal de modules**. On montre en effet que la structure en question sur F revient aussi à la donnée, pour tout "voisinage infinitésimal" U' d'un ouvert U de X, d'un **prolongement** $F_{U'}$, de $F|U$ à U' (en somme, F "croît" au dessus des voisinages infinitésimaux, tel un "cristal" - cristal de modules, en l'occurrence, mais il existe des cristaux en tous genres…) - ce prolongement se comportant de la façon qu'on devine, pour la notion de restriction à

[677](*) Il faut aussi, bien sûr, une condition de compatibilité pour la restriction à un ouvert.

[678](**) On peut, dans ce qui suit, s'affranchir de toute hypothèse de caractéristique (dans le cadre d'un schéma relatif lisse, disons), en remplaçant le complété formel de Xx_SX le long de la diagonale, par le complété formel "à puissances S divisées". Cela conduit également/ pour un faisceau de $\underline{O}_X$-Module F sur X, à remplacer le pro-faisceau $P^\infty(F)$ de ses "parties principales d'ordre infi ni", par des "parties principales à puissances divisées (d'ordre infi ni)". Du côté dual, cela revient à remplacer le faisceau d'anneaux $\mathscr{D}_{X/S}$ des opérateurs différentiels relatifs (lequel n'a rien de cohérent même si S est noethérien), par le faisceau d'anneaux "enveloppant" des dérivations relatives de $\underline{O}_X$ sur $\underline{O}_S$ (qui, d'après ce que m'assure Mebkhout, serait bien cohérent !).C'est là, en fait, le contexte conceptuel pour les coeffi cients de De Rham, qui va étendre celui de Mebkhout des $\mathscr{D}$-Modules, pour le développement notamment d'une théorie des coeffi cients de De Rham pour les schémas de type fi ni sur $\mathbb{Z}$.