

Je reconnais d'ailleurs que même dans le cas où X est lisse, je ne m'y retrouve pas tellement, dans la description de Mebkhout des coefficients "de De Rham", en termes du foncteur du bon-Dieu celui-ci ne respecte pas les structures multiplicatives naturelles : c'est le contra-foncteur de Mebkhout, dont il sera question dans (b), qui (paraît-il) y est compatible⁶⁸⁷(***). A fortiori, ce foncteur ne commute pas "aux six opérations". L'intuition qui \diamond s'attache aux coefficients de Mebkhout semble donc de nature très différente, à première vue, de celle qui s'attache aux coefficients discrets. C'est, d'un certain point de vue, un avantage - on dispose de deux photos prises sous des angles radicalement différents ! Cela rend simplement plus difficile, à celui habitué à regarder sous un de ces angles, de bien s'y reconnaître dans la photo prise sous l'autre.

En fait, en plus des quatre photos déjà passées en revue (pour les "coefficients de De Rham", j'entends), il y en a une **cinquième**⁶⁸⁸(*) que je maintenais en réserve : c'est celle de Deligne, à coups de pro-modules stratifiés⁶⁸⁹(**). Elle a l'avantage de "coller" de très près à l'intuition des faisceaux discrets constructibles : un objet "de degré zéro" correspond à un objet du même type, les notions de produit tensoriel et d'image inverse se correspondent par l'équivalence de Deligne ; donc il en sera de même pour l'ensemble des six opérations (qui peuvent en effet se décrire en termes de ces deux-là). D'autre part, l'opération de passage des "coefficients de De Rham - Deligne" $DRD^*(X)$, à ceux de De Rham - Mebkhout $DRM^*(X)$, me semble en principe particulièrement bien comprise, en termes d'opérations (" \mathcal{Q}_X -dualité") sur des \mathcal{Q}_X -Modules (tout au moins, d'abord, pour X lisse) - j'y ai fait déjà allusion dans une précédente note de bas de page⁶⁹⁰(***). J'ai donc l'impression, là, d'être sur un terrain à la fois solide et familier, qui doit me permettre de m'y reconnaître, dès que j'en prendrai le loisir. Je pensais même esquisser \diamond (dans cette note le point de vue de Deligne, et faire le lien avec celui de Mebkhout et avec le formalisme esquissé dans mes exposés déjà cités de 1966. Mais cette sous-note commence à se faire longue, et devient de plus en plus une digression ! Aussi je préfère renvoyer la chose au volume 3 des Réflexions, où je pense donner aussi la description des "bons" coefficients de De Rham (style Deligne, ou Mebkhout, au choix) sur les schémas de type fini sur \mathbb{Z} .

(b) La formule du bon Dieu (5 mai et 21 mai) Je voudrais revenir ici sur la description du foncteur de Mebkhout (dit aussi "du bon Dieu")

$$M : \underline{Cons}^*(X, \mathbb{C}) \longrightarrow \underline{Cris}^*_{coh}(X) \stackrel{\text{dfn}}{=} D^*_{coh}(X, \mathcal{D}_X) \tag{1}$$

les cristaux de modules comme des cas particuliers de modules cristallins.
⁶⁸⁷(***) Ce "paraît-il" est une façon un peu désinvolte (quasiment genre "nouveau style"...) d'escamoter un beau théorème, dû toujours au même inconnu de service (mais de cuvée plus récente, ai-je crû comprendre, que celle du bon Dieu). Il implique par exemple, pour deux sous-espaces analytiquement fermés Y et Z de K , la formule suivante sur la cohomologie locale, visiblement trop belle même pour être vraie (et pourtant...) :

$$R\Gamma^{alg}_{Y \cap Z}(\mathcal{Q}_X) \simeq R\Gamma^{alg}_Y(\mathcal{Q}_X) \overset{L}{\otimes} R\Gamma^{alg}_Z(\mathcal{Q}_X),$$

que certains beaux messieurs vont d'ailleurs empocher un des ces matins, je parie, comme "s'ils l'avaient toujours sue" - en attendant de l'adjudger au plus beau d'entre eux...
⁶⁸⁸(*) Ainsi, j'ai fait mieux que tenir la promesse du titre de la présente note "Les cinq photos" : j'ai en fait mis en évidence **deux séries** de cinq photos, la première décrivant les seuls "coefficients de De Rham", et la seconde les coefficients cristallins en général.
⁶⁸⁹(**) Comme il a été signalé dans une précédente note de b. de p. (note (***) page 998), cette photo de De Rham - Deligne a été prise avec un "objectif" un peu faussé (pour des raisons d'ailleurs qui échappent à la compétence de l'ouvrier fabricant). Il s'impose de la retoucher, et également de l'agrandir, en la faisant sortir du cadre de la caractéristique nulle. Ce sera fait dans le volume 3 des Réflexions, où mes chers ex-élèves pourront venir pomper à l'aise tous les "détails inutiles" et autres "digressions techniques" qu'ils n'ont pas eu le loisir de trouver par eux-mêmes, depuis bientôt vingt ans que je les ai laissés se débrouiller par eux-mêmes avec un splendide sujet en mains...
⁶⁹⁰(***) Cette "précédente note de b. de p." s'est transformée entre-temps en la partie (c) de la présente note "Les cinq photos".