replanter - ni qu'on soit copains comme toujours et qu'on passe des heures, et des heures encore à discuter maths (au téléphone, le plus souvent). Quand j'avais une question clairement tranchée, et sur une question qui était pas à l'index, c'était à lui surtout que j'avais coutume de m'adresser, des fois qu'il aurait des lumières - et souvent, en effet, il en avait. J'ai continué à apprendre plein de choses par lui, et sûrement il en apprenait par moi qui pouvaient alors l'intéresser. C'était mieux qu'un échange de bon procédés ou de services - il y avait toujours une passion commune qui nous reliait, il y avait le feu et l'étincelle.

Mais il avait déjà cessé d'être pour moi une source d'inspiration. Cette source désormais se trouvait en moi-même seulement[639](**).

## a2. Les questions saugrenues

**Note** $171(vi)$ (5 mai)[640](***) Mon souvenir ici était un peu flou, et s'est reprécisé au cours des semaines suivantes, où j'ai eu l'occasion de reprendre contact tant soit peu avec ces questions. Il y avait en fait deux questions distinctes dans mon esprit, l'une parfaitement précise, l'autre assez vague.

La première question concernait le besoin de dégager une théorie complète des six variances, pour des "coefficients de De Rham" qui restaient à définir de façon précise. Mes idées cristallines, tant en caractéristique $p > 0$ qu'en caractéristique nulle, fournissaient une amorce très précise - on connaissait déjà, d'avance, ce qui devait remplacer les "systèmes locaux" (ou "faisceaux$^\diamond$ constants tordus") $\ell$-adiques (ou de Betti, dans le cadre transcendant), et il fallait arriver à définir des "coefficients avec singularités", dans l'esprit des catégories dérivées bien sûr[641](*)'. Ce qui manquait donc, c'était une bonne condition "de finitude" pour les complexes cristallins. En caractéristique nulle, c'est la "$\mathscr{D}$-cohérence" (à laquelle ni moi ni aucun de mes élèves n'a songé, alors que c'est une idée tellement simple et naturelle !), jointe aux conditions plus délicates d'holonomie et de régularité, qui donne la réponse, comme nous l'a appris (douze ans après le démarrage du yoga cristallin) la philosophie du bon Dieu alias Mebkhout. J'attends avec curiosité si tel de mes ex-élèves va finir par bouger (sans nommer l'inconnu de service, ni l'ancêtre, c'est une chose entendue...) pour dégager les conditions

[639](**) (12 juin) Pour une continuation de cette réflexion au sujet de la relation entre Serre et moi, voir la note "L'album de famille" (n° 173), partie c. ("Celui entre tous - ou l'acquiescement"), du 11 juin, et parties d. et e.

[640](***)La présente note est issue d'une note de b. de p. à la note "L'ancêtre" (n° 171 (i)) - voir note (*) page 946 .

[641](*) Il est clair également, quand le corps de base était $\mathbb{C}$, qu'on voulait une catégorie équivalente à celle des complexes de faisceaux $\mathbb{C}$-vectoriels à faisceaux de cohomologie algébriquement constructibles. Cette indication d'une grande précision suggérait que, par dévissage, la question névralgique était celle d'associer, à tout système local cristallin sur un sous-schéma (pas nécessairement fermé), un faisceau cristallin sur le schéma ambiant. C'est essentiellement ce qui a été fait par Deligne en 1969, à cela près qu'il s'est avéré qu'au lieu d'un faisceau cristallin on trouvait un **pro-faisceau** cristallin, ce qui représentait alors une idée nouvelle importante (et "évidente", dès qu'on prend la peine de regarder...). Mais le travail systématique avec les pro-objets aurait demandé un travail de fondements assez considérable, dont celui fait par Jouanolou pour sa thèse (sur les coefficients $\ell$-adiques) donnait un avant-goût. Il aurait fallu là retrousser ses manches à nouveau...

L'approche nouvelle de Mebkhout par les $\mathscr{D}$-Modules revient dès lors (du point de vue de Deligne et du mien), à remplacer un pro-faisceau cristallin par un ind-faisceau cristallin (grâce au foncteur dualisant cohérent **ordinaire** $RH\underline{om}_{\underline{O}_X}(-, \underline{O}_X)$, et **passer à la limite inductive** pour trouver un faisceau cristallin ordinaire, i.e. (en supposant maintenant $X$ lisse sur un corps de caractéristique nulle) un $\mathscr{D}_X$-Modules. Le "miracle" inattendu alors, établi par Mebkhout entre 1972 et 1976 (en partant d'un "bout" opposé, cf. la note "Les trois jalons" n° 171 (x)), c'est que ce $\mathscr{D}$-Module est **cohérent** (plus précisément, à faisceaux de cohomologie cohérents). Un autre miracle tout aussi inattendu, c'est qu'on peut caractériser les $\mathscr{D}$-Modules (ou plutôt, les complexes de $\mathscr{D}$-Modules) qu'on obtient ainsi, par des conditions simples, de nature entièrement nouvelle par rapport à l'optique cristalline grothendieckienne (savoir la condition "microlocale" d'holonomie, en plus d'une condition de "régularité" introduite par Mebkhout et devenue familière entre-temps).

(26 mai) Pour des précisions au sujet de la relation de dualité entre coefficients de De Rham - Mebkhout et coefficients de De Rham - Deligne, voir la note "Les cinq photos (cristaux et $\mathscr{D}$-Modules)" (n° 171 (ix)), partie (c). Pour la nécessité de remplacer le point de vue de Deligne des modules procohérents par celui des cristaux en promodules cohérents, et sur la possibilité (non prouvée encore) de remplacer l'encombrant point de vue des pro-objets (cristallins ou stratifiés) par des faisceaux cristallins sans plus (par passage à la limite projective), voir la même note, parties (c) et (d).