◇**Fil** 4. La notion géométrique unificatrice, reliant par une intuition "topologique" commune la cohomologie étale et ses variantes immédiates (liées aux topologies de Zariski, fpqc, fppf etc.), la cohomologie cristalline, et enfin la cohomologie "de Betti" définie dans le contexte transcendant, et (plus généralement encore) la cohomologie faisceautique des espaces topologiques quelconques, est la notion de "**site**", et, au delà de celle-ci, plus intrinsèque et plus cachée, celle de **topos**. Celle-ci, à partir de 1964 et les années suivantes, vient progressivement sur le devant de la scène. Je m'exprime au sujet de la portée de cette notion, centrale dans mon oeuvre, aujourd'hui bannie de la géométrie, dans la note "Mes orphelins" (n°46), pp. 180-182, dont je me bornerai ici a extraire le passage suivant :

> "Ce couple de notions [les schémas, et les topos] contient en puissance un renouvellement de vaste envergure aussi bien de la géométrie algébrique et de l'arithmétique, que de la topologie, par une synthèse de ces "mondes", trop longtemps séparés, dans une intuition géométrique commune."[422](*)

Le langage des topos, et le formalisme de la cohomologie étale, se trouvent développés dans les deux séminaires consécutifs et inséparables SGA 4 (en 1963/64) et SGA 5 (en 1965/66)[423](**). Le premier est fait en collaboration avec◇d'autres[424](*), et développe, en plus du langage des topos, les résultats-clefs de cohomologie étale, y compris les énoncés-clef de démarrage en dualité (style six opérations). Le deuxième, où je faisais pratiquement cavalier seul[425](**), développe de façon beaucoup plus détaillée un formalisme complet

---

cohomologique **cristalline** pour la fonction L ordinaire d'une telle variété sur un corps fi ni. Mais, comme je le souligne dans la note de b. de p. précédente, on est loin, aujourd'hui encore, d'une maîtrise comparable à celle que nous avons en cohomologie ℓ-adique, qui s'exprimerait par un formalisme des "six opérations" pour des "coeffi cients cristallins" généraux. Ceux-ci (selon ce que m'en a dit Deligne dernièrement) n'ont pas été seulement **défi nis** encore à l'heure actuelle, pas plus d'ailleurs que les bons "coeffi cients de Hodge" (au dessus de variétés algébriques complexes) ! Pour quelques commentaires au sujet du "problème des coeffi cients", crucial selon moi pour une compréhension de la cohomologie des variétés algébriques, voir la note "La mélodie au tombeau - ou la suffi sance" (n° 167). Ce problème était clairement présent pour moi tout au long des années soixante, mais a été enterré (parmi bien d'autres, et par le soin des mes élèves cohomologistes) jusqu'à aujourd'hui même. . .

(23 avril) Voir aussi à ce sujet la note "Le tour des chantiers - ou outils et vision", n° 178.

[422](*)Je propose ailleurs (dans la sous-note n° 136_1 à la note "Yin le Serviteur (2) - ou la générosité" (n° 136), d'appeler du nom de **géométrie arithmétique** cette "science nouvelle" encore dans son enfance, "si vaste que jusqu'à aujourd'hui encore je n'avais pas songé à lui donner de nom", née au début des années soixante dans le sillage des conjectures de Weil, et dont le "yoga des motifs" est "comme l'âme, ou tout au moins comme une partie névralgique entre toutes". Par ce nom, je voudrais suggérer

> "l'image d'une "géométrie" que l'on développerait "au dessus de la base absolue" Spec$\mathbb{Z}$, et qui admet des "spécialisations" aussi bien en les "géométries algébriques" traditionnelles des différentes caractéristiques, qu'en des notions géométriques "transcendantes" (au dessus des corps de base $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, ou $\mathbb{Q}_\ell \ldots$), via les notions de "variétés" (ou mieux, de **multiplicités**) analytiques ou rigide-analytiques, et leurs variantes.

(loc. cit. p. 637). J'écris plus haut (même page) :

> " Au delà de l'édifi cation de la nouvelle geométrie algébrique, et à travers vers la "maîtrise de la cohomologie étale" (et celle de la cohomologie ℓ-adique qui en découle), c'est l'élaboration d'un maître d'oeuvre de cette nouvelle science encore en devenir, qui a été à mes yeux ma principale contribution à la mathématique de mon temps."

[423](**) Une deuxième édition (en trois volumes) de SGA 4, entièrement refondue par rapport à l'édition originale (surtout en ce qui concerne le langage des sites et des topos, et les compléments catégoriques) est parue dans les Lecture Notes (Springer Verlag) en 1972-73, n°s 269, 270, 305. Pour les vicissitudes de SGA 5, voir les précisions données plus bas. Une "édition Illusie" d'une version copieusement démantelée du séminaire originel a été publiée dans ces même Lecture Notes (no 589) en 1977, **onze ans après** la fi n du séminaire oral.

[424](*) Le développement du langage des sites et des topos, à partir de mon idée initiale de 1958, s'est fait surtout sous l'impulsion et avec l'aide de M. Artin, J. Giraud, J.L. Verdier. Voir pour des détails le commentaire historique promis, déjà cité dans une précédente note de b. de p.

[425](**) La seule exception (si mon souvenir est correct) est fournie par J.P.Serre qui a fait quelques beaux exposés sur les groupes fi nis et le module de Serre-Swan associé au conducteur d'Artin, dont j'avais besoin pour le développement de la formule de points fi xes générale que j'avais en vue. Il était prévu que ces exposés fi gureraient dans SGA 5, mais voyant la tournure que prenaient les événements, Serre a eu le bon sens de les mettre à la disposition du public mathématique en les publiant ailleurs.