l'un et l'autre, et ceci par des formules "de nature algébrique" également) :

$$\begin{cases} \Delta\hat{}(C') & = & R\underline{Hom}_{\underline{O}_X}(C', \underline{O}_X) \\ \delta\hat{}(C) & = & R\underline{Hom}_{\underline{O}_X}(C, \underline{O}_X). \end{cases} \tag{15}$$

On a donc ici deux fois la "même" formule, avec la seule différence que C' est ici un complexe de faisceaux pro-cohérents stratifiés (ou ce qui revient au même[702](*), un complexe de cristaux de Module pro-cohérents), alors que C est un complexe de $\mathscr{D}$-Modules (qu'on peut voir, moralement, comme un complexe de $\underline{O}_X$-Modules ind-cohérents stratifiés, ou encore, comme un cristal de Modules ind-cohérents). C'est le "même" foncteur essentiellement qui fait passer des uns aux autres, à savoir, le "foncteur dualisant ordinaire" (cohérent), mon vieil ami des années cinquante… Il est "évident", certes, que celui-ci doit échanger pro-objets et ind-objets (quitte à passer à la limite inductive dans ces derniers…).

◊(Bien sûr, il y a un travail de fondements à faire, pour donner un sens précis à ces formules - un travail du type de celui fait par Deligne dans son fameux séminaire sabordé, ou par Jouanolou dans sa fameuse thèse également sabordée (que tout le monde cite, depuis le Colloque Pervers, et que personne n'a tenue dans ses mains…). C'est là un travail, j'en suis sûr, qui sera peut-être un peu long, mais essentiellement "sorital". La partie "dure" est contenue dans le théorème du bon Dieu de Mebkhout, complété par les formules de Mebkhout (8) dites (improprement peut-être) formules de "bidualité". Leur traduction algébrique par contre, affirmant que les deux foncteurs (15) sont quasi-inverses l'un de l'autre, est bel et bien (moralement) "le" théorème de bidualité ordinaire pour coefficients $\underline{O}_X$-cohérents, mis à la sauce ind-pro et avec des stratifications à la clef (qui doivent "passer" sans problèmes dans le foncteur dualisant).

La correspondance entre les deux types d'objets duaux se visualise de façon parfaite (sans aucun travail de fondements à la clef !) en termes de complexes d'opérateurs différentiels. (Dans cette dualité, d'ailleurs, la condition d'holonomie (et à fortiori, celle de régularité) ne joue aucun rôle.) A un tel complexe $L^{\cdot}$, le foncteur $F \longmapsto \underline{Hom}_{\underline{O}_X}(F, \mathscr{D}_d)$ (contravariant) envisagé hier (dans (a),(1)), associe un complexe de $\mathscr{D}$-Modules à composantes localement libres de type fini, soit C. D'autre part, la "formalisation" de ce complexe $L^{\cdot}$, en passant aux parties principales d'ordre infini $P^{\infty}(L^i)$ (regardées comme des promodules stratifiés) fournit un complexe $C' = P^{\infty}(L^{\cdot})$ de pro-modules stratifiés. Ceci dit, on voit que ces deux complexes se correspondent par les formules (15), dans lesquelles ici, visiblement, le $R\underline{Hom}$ se réduit à $\underline{Hom}$. (Il suffit de vérifier cette dualité terme à terme pour les composantes L^i, et elle se réduit alors au fait plus ou moins tautologique que les homomorphismes linéaires "continus" $P^{\infty}(L^i) \longrightarrow \underline{O}_X$ correspondent exactement, tout comme les homomorphismes linéaires $L^i \longrightarrow \mathscr{D}$, aux opérateurs différentiels $L^i \longrightarrow \underline{O}_X$, en utilisant respectivement l'opérateur différentiel "universel" (d'ordre infini) $L^i \longrightarrow P^{\infty}(L^i)$, et "l'augmentation" $\mathscr{D} \longrightarrow \underline{O}_X$ donnée par $\theta \longmapsto \theta(1)$.). Comme au moins localement sur X, tout objet de $\underline{Cris}^*_{coh}(X)$, (i.e. tout complexe de $\mathscr{D}$-Modules à cohomologie cohérente) se décrit à l'aide d'un complexe d'opérateurs différentiels $L^{\cdot}$, on peut considérer qu'à toutes fins pratiques, ce cas particulier donne une prise parfaite sur la dualité (15) entre les deux types de coefficients, à condition de faire des hypothèses de $\mathscr{D}$-cohérence et de "$\mathscr{D}$-pro-cohérence" convenables sur C et sur C', "duales" l'une de l'autre. Il suffirait dès lors de développer le "sorite" auquel j'ai fait allusion, en se limitant, du côté C' ou "pro", à des complexes de faisceaux procohérents ◊(stratifiés qui, localement, peuvent se décrire (à quasi-isomorphisme près) comme un $P^{\infty}(L^{\cdot})$.

Par rapport à l'approche originelle de Deligne, le fait que les Modules pro-cohérents et complexes de tels qu'il introduit, puissent se réaliser localement par un complexe d'opérateurs différentiels, est d'ailleurs un **phénomène entièrement inattendu**, apporté par la théorie de Mebkhout. Il me paraît essentiellement équi-

[702](*) Voir la note de b. de p. (**) page 1006, au sujet de cette traduction.