◇J'avoue que, faute d'y avoir réfléchi, je ne visualise pas très bien encore la relation exacte, pour X plongé dans X' lisse (disons), entre cristaux sur X et cristaux sur X' (et ceci même quand X lui-même est lisse)[684](*). Ce qui est sûr, c'est que le site cristallin, ou mieux, le topos cristallin X_{cris}, avec sa structure annelée, dépend de l'espace analytique X de façon covariante, i.e. si $f : X \longrightarrow X'$ est un morphisme entre espaces analytiques, on en déduit

$$f_{cris} : X_{cris} \longrightarrow X'_{cris};$$

d'où notamment un foncteur "image directe" pour les faisceaux de Modules sur ces topos annelés. On aimerait comprendre cette opération (dans le cas d'une immersion fermée $X \hookrightarrow X'$, notamment), et comprendre à quelle condition un cristal est transformé en cristal. On voudrait aussi, dans le cas d'une immersion fermée, que ce foncteur soit exact. L'idée ici est celle-ci : si F est un objet de la catégorie dérivée $D^*(X_{cris}, \underline{O}_{X_{cris}})$ et F' son image par le foncteur dérivé total de f_{cris^*}, et supposant de plus X' lisse, la condition que F' soit holonome régulier **ne devrait pas dépendre de l'immersion choisie de** X **dans un espace**◇**(lisse** X'. S'il en est bien ainsi, alors on définira la catégorie des coefficients cristallins de De Rham - Mebkhout sur X comme la sous-catégorie pleine (de la catégorie dérivée) définie par la condition précédente (visiblement locale sur X).

Ainsi, module un travail de fondements qui devrait être fait depuis vingt ans et qui apparemment reste toujours à faire (concernant les opérations fondamentales sur les modules cristallins), on peut dire que dans le cas où X est un espace analytique quelconque (pas forcément lisse), il reste **deux** photos (au lieu de quatre) pour nous décrire les "coefficients de De Rham" auxquels nous en avons : il y a $\underline{Cons}^*(X, \mathbb{C})$ ne varietur, et il y a la catégorie (qui pour l'instant reste hypothétique, et que telle quelle je vois mal encore [685](*)) des coefficients "de De Rham - Mebkhout" $DRM^*(X)$, pour laquelle je viens de hasarder un principe de définition. La catégorie $\underline{Cons}^*(X, \mathbb{C})$, dont la description n'offre aucun problème du point de vue transcendant, **disparaît** cependant dès qu'on passe au contexte algébrique. Cela rend évident le besoin de dégager une bonne définition de $DRM^*(X)$, qui garde un sens dans ce contexte. Et il est clair pour moi, également, que le bon "cadre" pour cette photo, qui du coup semble bien (à première vue du moins) la seule qui reste, est celui formé par les modules cristallins[686](**).

---

cristallin", formé par tous les épaississements infinitésimaux d'ouverts de X, par le sous-site (appelé "site stratifiant") formé par ceux qui admettent localement une rétraction sur X (condition automatiquement satisfaite quand X est lisse). Quand on se donne un module stratifié F sur X, son image inverse par une telle rétraction **ne dépend pas**, à isomorphisme unique près, de la rétraction choisie, d'où un "prolongement canonique" de F au dessus de l'épaississement envisagé.

On voit donc que lorsque X n'est pas lisse, une structure cristalline sur F est "plus riche" qu'une simple stratification, puisqu'elle permet de prolonger F (i.e. de le "faire croître") au dessus de voisinages infinitésimaux **quelconques** d'ouverts de X, et notamment (et c'est là une chose d'importance particulière), au dessus des voisinages infinitésimaux de tous ordres de X, plongé dans un espace ambiant **lisse**. Il se trouve, en fait, que la notion nouvelle la plus cruciale et féconde, entre celle de Module stratifié et celle de cristal de Modules, est cette dernière. C'est elle qui est appelée à dominer la théorie des coefficients de De Rham. Je "rappelle" à ce propos que pour un schéma relatif propre et lisse Z sur X, la cohomologie de De Rham relative de Z sur X (tant dans le contexte transcendant, qu'algébrique…) est "non seulement" muni d'une stratification, mais bel et bien d'une structure cristalline, la faisant "croître" sur tout voisinage infinitésimal.

C'est là une **fait** mathématique crucial, que Deligne avait d'ailleurs oublié dès avant mon départ, en 1969, quand il décrivait des coefficients du type de De Rham en termes de Modules procohérents **stratifiés**, au lieu de la version cristalline plus forte, i.e. en termes de **cristaux** de Modules procohérents. Il faut dire que mon nom était attaché de façon moins notoire à la notion de Module stratifié (tellement naturelle qu'on jurerait qu'elle doit remonter au siècle dernier), qu'à celle de notion de cristal de Modules, d'allure beaucoup moins "traditionnelle". Voir à ce sujet les réflexions dans "… et entrave" (sous-note n ° 171 (viii)).

[684](*) (26 mai) La situation s'est considérablement clarifiée pour moi avec l'introduction de la notion de co-cristal, à laquelle il est fait allusion dans D) ci-dessous.

[685](*) Je fais allusion plus bas à une "cinquième photo", qui elle est beaucoup plus nette pour moi dès à présent, pour capter les "bons" coefficients de De Rham par un langage purement algébrique en termes cristallins, gardant un sens sans hypothèses de lissité. Cette photo est prise sous un angle en quelque sorte "dual" de celui de la photo de De Rham-Mebkhout.

[686](**) J'appelle "**Module cristallin**" sur X un faisceau de Modules sur le topos annelé cristallin X_{cris}. On peut donc considérer