structures supplémentaires (parmi les trois qu'on vient de nommer) qu'on peut se proposer d'introduire sur un complexe cristallin, on peut prévoir à priori **huit** variantes au total, pour une notion de "coefficients de De Rham-Mebkhout". C'est un travail sur pièces seulement qui pourra nous montrer lesquelles de ces variantes donnent lieu bel et bien à un formalisme des six opérations. Il est vrai aussi que pour les besoins du yoga des motifs, alors qu'on se propose de trouver des objets "algébriques" simples, qui "collent" le plus près possible aux motifs, pour en décrire le plus fidèlement et richement possible la structure, ce sont les coefficients "les plus riches" qui à priori paraissent "les meilleurs". C'est là, dans leur grande richesse, que résidait d'ailleurs le charme principal des coefficients de Hodge - au point même qu'on pouvait espérer reconstruire de toutes pièces la catégorie des motifs sur $\mathbb{C}$ si la conjecture de Hodge était vraie), voire même, celles des motifs sur tout X de type fini sur $\mathbb{C}$.

Cela rappelle à mon attention qu'il est possible que certaines des structures soient "superfétatoires", qu'elles découlent des autres (mais d'une façon, il est vraie, si cachée, qu'on aura du mal à l'expliciter en termes terre-à-terre)[385](*). Par exemple, sur la cohomologie de De Rham (relative sur S) d'un schéma X lisse sur un autre S, j'ai mis en évidence (vers la fin des années soixante)[386](**) l'existence d'une connexion (absolue) canonique sans courbure, que j'ai appelée **connexion de Gauss-Manin**. Il en résulte que la structure de Hodge-Deligne associée par Deligne à un schéma X lisse sur $\mathbb{C}$ (et sûrement même, celle associée à tout schéma de type fini X sur $\mathbb{C}$) est munie canoniquement d'une telle connexion, relativement au sous-corps premier $\mathbb{Q}$. Si tant est que la cohomologie motivique elle-même se reconstitue déjà à partir de sa "réalisation de Hodge", cela signifie que sur toute structure de Hodge qu'on pourrait appeler "motivique" ou "algébrique" (i.e. provenant d'un motif), il y aurait une telle connexion canonique de Gauss-Manin. Il ne serait pas difficile dès lors, de même, de décrire d'autres structures canoniques, plus subtiles, associées à une structure de Hodge-Deligne, et dont l'existence "découle du motif" : existence d'opérations de certains groupes de Galois profinis sur $Bet(K) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_\ell$ (où $Bet(K)$ est le "réseau" sous-jacent à la structure de Hodge-Deligne K), et "structure de Frobenius" sur les "réductions mod p" (pour presque tout p). C'est justement cette riche multiplicité de structures sans liens apparents, dont le lien caché est **"le motif" commun** à toutes ces structures - c'est cette richesse qui pour moi a représenté (et représente encore) la fascination particulière du thème de la cohomologie des variétés algébriques, et la fascination des "motifs", qui sont comme la délicate mélodie commune qui donne vie et sens à ce thème aux innombrables variations[387](*).

---

[385](*) Comme remarque qui va dans le même sens, je signale ici la nécessité de faire attention aux compatibilités éventuelles, plus ou moins cachées, à imposer à l'ensemble des structures associées à un type de "coefficients cohomologiques" donné. Je songe ici, surtout, aux compatibilités (de nature plus ou moins algébriques) qui se trouvent automatiquement réalisées dans le cas des coefficients "motivisables" (i.e., qui proviennent d'un motif). Il est plausible qu'il faudra les imposer dans les catégories de coefficients envisagés, si on tient à avoir un formalisme des "six opérations" (indépendamment même du propos de "cerner" les motifs d'aussi près que possible). Je songe notamment aux conditions d'holonomie et de régularité à l'infini pour les coefficients de Mebkhout, et aussi (si on met comme structure supplémentaire une filtration de De Rham) les conditions à la Griffiths reliant filtration de De Rham et connexion de Gauss-Manin,. Ces exemples rendent assez clair, je suppose, à quel point la tâche fondamentale de décrire les "bonnes" catégories de coefficients cohomologiques, avec la contrainte "six opérations", obligera à explorer et à utiliser à fond toutes les structures envisagées à ce jour sur "la cohomologie des variétés algébriques", et les relations qui peuvent lier ces structures. C'était d'ailleurs là, dès le début, le propos principal du yoga des motifs - fournir une **unité** derrière une disparité, et en même temps, un fil conducteur sûr pour se reconnaître dans cette disparité.

[386](**) (2 mai) En fait, c'était dès l'année 1966.

[387](*) (26 mars) Après ma courte réflexion sur les questions (intimement reliées) des divers types de "catégories de coefficients" (pour "cerner les motifs"), et les "conditions algébriques" que doit satisfaire une classe de cohomologie "algébrique" (i.e. provenant d'un cycle algébrique) dont il a été question au début de la note de hier (n° 176), j'ai décidé d'inclure une réflexion sur les motifs, les "coefficients", et les conjectures standard, dès le tome 3 des Réflexions (contenant la dernière partie de Récoltes et Semailles). Je crois dès à présent avoir le principe d'une description en forme de "la" catégorie triangulée des motifs sur un schéma, tout au moins dans le cas crucial (auquel on devrait pouvoir se ramener par passages à la limite) où celui-ci est de type fini sur la base absolue $\mathbb{Z}$ Comme seul ingrédient nouveau par rapport à mes idées des années soixante, il y a la "philosophie de Mebkhout" (exprimée par le "théorème du bon Dieu"). De plus, je suppose résolu le problème (sûrement abordable dès à