une $\mathbb{Q}$-algèbre. A cette restriction près, je ne serais pas étonné que la dualité de Poincaré (style "six opérations") marche telle quelle dans ce contexte. Il n'est pas étonnant que jamais personne ne l'ait regardé (sauf des géomètres différentiels impénitents, faisant mine de regarder la cohomologie de "l'espace des feuilles" d'un feuilletage), vu le boycott général sur la notion même de multiplicité, instauré par mes élèves cohomologistes, Deligne et Verdier en tête.

Pour tout dire, il manque une réflexion de fondements du type suivant : décrire (si faire ce peut) dans le contexte des topos quelconques et des faisceaux de coefficients "discrets" dessus, des notions de "propreté", de "lissité", de "propreté locale", de "séparation" pour un morphisme de topos, permettant de dégager une notion de "morphisme admissible" de topos $f : X \to Y$, pour lequel les deux opérations $Rf_!$ et $Lf^!$ aient un sens (l'une adjointe de l'autre) de façon à obtenir les propriétés habituelles du formalisme des six opérations. Ici les topos sont considérés comme non annelés, ou peut-être comme munis d' Anneaux (qui sont supposés au besoin constants ou localement constants), en supposant (dans un premier temps tout au moins) quelles morphismes de topos annelés $f : (X, \mathscr{A}) \to (Y, \mathscr{B})$ sont tels que $f^{-1}(\mathscr{B}) \to \mathscr{A}$ **soit un isomorphisme** (81_3). Les réflexions qui précèdent suggèrent que lorsqu'on se borne à des Anneaux de coefficients de caractéristique nulle (i.e. qui sont des $\mathbb{Q}$-Algèbres), on peut être nettement plus large pour la notion de "morphisme admissible", de façon à englober des "fibres" qui soient p.ex. des multiplicités (topologiques ou schématiques), plutôt que des "espaces" (topologiques ou schématiques) ordinaires.

Une première amorce dans ce sens (mis à part les cas traités par moi, puis par Verdier sur le même modèle) est due à Tate et Verdier, dans le contexte des groupes discrets ou profinis. Le souvenir de cette amorce m'avait encouragé à poursuivre une réflexion dans ce sens l'an dernier, dans le contexte des petites catégories (généralisant les groupes discrets) servant de modèles homotopiques. Sans aller bien loin, cette réflexion a néanmoins suffi pour me convaincre qu'il doit exister un formalisme complet des six opérations dans le contexte (Cat) de la catégorie des petites catégories. (Voir à ce sujet la ◇"Poursuite des Champs", Chap.VII, par.136, 137.) Le développement d'une telle théorie dans (Cat), voire dans Pro(Cat), tout comme une théorie de ce type dans le contexte des espaces et multiplicités topologiques ou schématiques, aurait pour moi comme principal intérêt d'être un pas vers une meilleure compréhension de la "dualité discrète" dans le contexte des topos généraux.

Illusie m'a fait entendre l'an dernier qu'il s'était battu avec des perplexités de dualité dans le cas d'espaces (ou schémas) semisimpliciaux. Cela m'avait bien l'air d'être toujours le même tabac - arriver à déceler l'existence d'un formalisme six opérations dans un cas d'espèce, et le comprendre. Mais il semblerait que la seule perspective d'une réflexion de fondements ait le don de glacer chacun et tous parmi mes anciens élèves - tout au moins parmi mes élèves cohomologistes. Si je me suis donné du mal avec eux, c'était avec la conviction pourtant qu'ils n'allaient pas s'arrêter pile (au point de vue travail conceptuel) à l'endroit précis où ils étaient allés en ma compagnie, et rester à se tordre les mains chaque fois qu'une situation nouvelle montrait que le travail qu'eux et leurs copains avaient fait avec moi était insuffisant. Le travail conceptuel qu'on fait est **toujours** insuffisant à la longue, et c'est en le reprenant et en allant au-delà, et pas autrement, que la mathématique progresse. Entre 1955 et 1970, chaque année à nouveau je constatais que ce que j'avais fait dans les années précédentes ne suffisait pas aux besoins, et je me remettais à l'ouvrage aussi sec, tout au moins quand quelqu'un d'autre (p.ex. Mike Artin}avec le point de vue des "variétés algébriques" en son sens) ne s'y était déjà mis. Mais il semblerait que mes élèves aient enterré aussi l'exemple que je leur ai donné, en même temps que ma personne et mon oeuvre.