jouissent en effet d'un ensemble de propriétés fortement typées[47], qui les font s'apparenter à des sortes de "pastiches" de la plus simple imaginable d'entre elles - celle qu'on obtient en partant d'un espace réduit à un seul point. Ceci dit, un "espace nouveau style (ou topos), généralisant les espaces topologiques traditionnels, sera décrit tout simplement comme une "catégorie" qui, sans provenir forcément d'un espace ordinaire, possède néanmoins toutes ces bonnes propriétés (explicitement désignées une fois pour toutes, bien sûr) d'une telle "catégorie de faisceaux".

* *
*

◇Voici donc l'idée nouvelle. Son apparition peut être vue comme une conséquence de cette observation, quasiment enfantine à vrai dire, que ce qui compte vraiment dans un espace topologique, ce ne sont nullement ses "points" ou ses sous-ensembles de points[48], et les relations de proximité etc entre ceux-ci, mais que ce sont les **faisceaux** sur cet espace, et la catégorie qu'ils forment. Je n'ai fait, en somme, que mener vers sa conséquence ultime l'idée initiale de Leray - et ceci fait, **franchir le pas**.

Comme l'idée même des faisceaux (due à Leray), ou celle des schémas, comme toute "grande idée" qui vient bousculer une vision invétérée des choses, celle des topos a de quoi déconcerter par son caractère de naturel, d' "évidence", par sa simplicité (à la limite, dirait-on, du naïf ou du simpliste, voire du "bébête" - par cette qualité particulière qui nous fait nous écrier si souvent : "Oh, ce n'est que ça ! ", d'un ton mi-déçu, mi-envieux ; avec en plus, peut-être, ce sous entendu du "farfelu", du "pas sérieux", qu'on réserve souvent à tout ce qui déroute par un excès de simplicité imprévue. A ce qui vient nous rappeler, peut-être, les jours depuis longtemps enfouis et reniés de notre enfance. . .

2.14. Mutation de la notion d'espace - ou le souffle et la foi

La notion de schéma constitue un vaste élargissement de la notion de "variété algébrique", et à ce titre elle a renouvelé de fond en comble la géométrie algébrique léguée par mes devanciers. Celle de topos constitue une extension insoupçonnée, pour mieux dire, **une métamorphose de la notion d'espace**. Par là, elle porte la promesse d'un renouvellement semblable de la topologie, et au delà de celle-ci, de la géométrie. Dès à présent d'ailleurs, elle a joué un rôle crucial dans l'essor de la géométrie nouvelle (surtout à travers les thèmes cohomologiques ℓ-adique et cristallin qui en sont issus, et à travers eux, dans la démonstration des conjectures de Weil). Comme sa soeur aînée (et quasi-jumelle), elle possède les deux caractères complémentaires essentiels pour toute généralisation fertile, que voici.

Primo, la nouvelle notion n'est pas **trop vaste**, en ce sens que dans les nouveaux "espaces" (appelés plutôt "topos", pour ne pas indisposer des oreilles délicates[49]), les intuitions et les constructions "géométriques" ◇les plus essentielles[50], familières pour les bons vieux espaces d'antan, peuvent se transposer de façon plus

[47](A l'intention du mathématicien) Il s'agit ici surtout de propriétés que j'ai introduites en théorie des catégories sous le nom de "propriétés d'exactitude" (en même temps que la notion catégorique moderne de "limites" inductives et projectives générales). Voir "Sur quelques points d'algèbre homologique", Tohoku math, journal, 1957 (p. 119-221).

[48]Ainsi, on peut construire des topos très "gros", qui n'ont qu'un seul "point", ou même pas de "points" du tout !

[49]Le nom "topos" a été choisi (en association avec celui de "topologie", ou "topologique") pour suggérer qu'il s'agit de "l'objet par excellence" auquel s'applique l'intuition topologique. Par le riche nuage d'images mentales que ce nom suscite, il faut le considérer comme étant plus ou moins l'équivalent du terme "espace" (topologique), avec simplement une insistance plus grande sur la spécifi cité "topologique" de la notion. (Ainsi, il y a des "espaces vectoriels", mais pas de "topos vectoriels" jusqu'à nouvel ordre !) Il s'impose de garder les deux expressions conjointement, chacune avec sa spécifi cité propre.