théories cohomologiques différentes, que j'ai dégagé la notion de "**motif**" associé à une variété algébrique. Par ce terme, j'entends suggérer qu'il s'agit du "motif commun" (ou de la "**raison** commune") sous-jacent à cette multitude d'invariants cohomologiques différents associés à la variété, à l'aide de la multitude des toutes les théories cohomologiques possibles à priori. Ces différentes théories cohomologiques seraient comme autant de développements thématiques différents, chacun dans le "tempo", dans la "clef" et dans le "mode" ("majeur" ou "mineur") qui lui est propre, d'un même "motif de base" (appelé "théorie cohomologique **motivique**"), lequel serait en même temps la plus fondamentale, ou la plus "fine", de toutes ces "incarnations" thématiques différentes (c'est-à-dire, de toutes ces théories cohomologiques possibles). Ainsi, le motif associé à une variété algébrique constituerait l'invariant cohomologique "ultime", "par excellence", dont tous les autres (associés aux différentes théories cohomologiques possibles) se déduiraient, comme autant d' "incarnations" musicales, ou de "réalisations" différentes. Toutes les propriétés essentielles de "**la** cohomologie" de la variété se "liraient" (ou s' "entendraient") déjà sur le motif correspondant, de sorte que les propriétés et structures familières sur les invariants cohomologiques particularisés ($\ell$-adique ou cristallins, par exemple), seraient simplement le fidèle reflet des propriétés et structures **internes au motif**[59].

◇C'est là, exprimé dans le langage non technique d'une métaphore musicale, la quintessence d'une idée d'une simplicité enfantine encore, délicate et audacieuse à la fois. J'ai développé cette idée, en marge des tâches de fondements que je considérais plus urgentes, sous le nom de "théorie des motifs" ou de "philosophie (ou "yoga") des motifs", tout au long des années 1963-69. C'est une théorie d'une richesse structurale fascinante, dont une grande partie est restée encore conjecturale[60].

Je m'exprime à diverses reprises dans Récoltes et Semailles au sujet de ce "yoga des motifs", qui me tient

---

endomorphisme de l'espace de cohomologie $H^i(X)$, le "polynôme caractéristique" de ce dernier devait être a coefficients **entiers**, ne dépendant pas de la théorie cohomologique particulière choisie (par exemple : $\ell$-adique, pour $\ell$ variable). Itou pour des correspondances algébriques générales, quand $X$ est supposée propre et lisse. La triste vérité (et qui donne une idée de l'état de lamentable abandon de la théorie cohomologique des variétés algébriques en caractéristique $p > 0$, depuis mon départ), c'est que la chose n'est toujours pas démontrée à l'heure actuelle, même dans le cas particulier où $X$ est une **surface** projective et lisse et $i = 2$. En fait, à ma connaissance, personne après mon départ n'a encore daigné s'intéresser à cette question cruciale, typique de celles qui apparaissent comme subordonnées aux conjectures standard. Le décret de la mode, c'est que le seul endomorphisme digne d'attention est l'endomorphisme de Frobenius (lequel a pu être traité à part par Deligne, par les moyens du bord...).

[59](A l'intention du lecteur mathématicien) Une autre façon de voir la catégorie des motifs sur un corps $k$, c'est de la visualiser comme une sorte de "catégorie abélienne enveloppante" de la catégorie des schémas séparés de type fini sur $k$. Le motif associé à un tel schéma $X$ (ou "cohomologie motivique de $X$ ", que je note $H^*_{mot}(X)$) apparaît ainsi comme une sorte de "avatar" abélianisé de $X$. La chose cruciale ici, c'est que, tout comme une variété algébrique $X$ est susceptible de "variation continue" (sa classe d'isomorphie dépend donc de "paramètres" continus, ou "modules"), le motif associé à $X$, ou plus généralement, un motif "variable", est lui aussi susceptible de variation continue. C'est là un aspect de la cohomologie motivique, qui est en contraste frappant avec ce qui se passe pour tous les invariants cohomologiques classiques, y compris les invariants $\ell$-adique, à la seule exception de la cohomologie de Hodge des variétés algébriques complexes.

Ceci donne une idée à quel point la "cohomologie motivique" est un invariant plus fin, cernant de façon beaucoup plus serrée la "forme arithmétique" (si j'ose hasarder cette expression) de $X$, que les invariants purement topologiques traditionnels. Dans ma vision des motifs, ceux-ci constituent une sorte de "cordon" très caché et très délicat, reliant les propriétés algébro-géométriques d'une variété algébrique, à des propriétés de nature "arithmétique" incarnées par son motif. Ce dernier peut être considéré comme un objet de nature "géométrique" dans son esprit même, mais où les propriétés "arithmétiques" subordonnées à la géométrie se trouvent, pour ainsi dire, "mises à nu".

Ainsi, le motif m'apparaît comme le plus profond "invariant de la forme" qu'on a su associer jusqu'à présent à une variété algébrique, mis à part son "groupe fondamental motivique". L'un et l'autre invariant représentent pour moi comme les "ombres" d'un "type d'homotopie motivique" qui resterait à décrire (et sur lequel je dis quelques mots en passant dans la note "Le tour des chantiers - ou outils et vision" (ReS IV, n° 178, voir chantier 5 (Motifs), et notamment page 1214)). C'est ce dernier objet qui me semble devoir être l'incarnation la plus parfaite de l'élusive intuition de "forme arithmétique" (ou "motivique") d'une variété algébrique quelconque.

[60]J'ai expliqué ma vision des motifs à qui voulait l'entendre, tout au long de ces années, sans prendre la peine de rien publier à ce sujet noir sur blanc (ne manquant pas d'autres tâches au service de tous). Cela a permis plus tard à certains de mes élèves de piller plus à l'aise, sous l'oeil attendri de l'ensemble de mes anciens amis, bien au courant de la situation. (Voir note de b. de p. qui suit. )