



# 收获与播种

## RECOLTES ET SEMAILLES

作者：Alexandre GROTHENDIECK

时间：March 24, 2025

# 目录

<b>第一部分 主题呈现，或四乐章前奏曲</b>	<b>1</b>
<b>第1章 代序</b>	<b>2</b>
<b>第2章 漫步于一部作品之中，或孩子与母亲</b>	<b>6</b>
2.1 事物的魔力 . . . . .	6
2.2 独处的重要性 . . . . .	9
2.3 内心之旅——或神话与见证 . . . . .	11
2.4 风俗画卷 . . . . .	12
2.5 继承者与建设者 . . . . .	13
2.6 观点与视野 . . . . .	16
2.7 “伟大的思想”——或树木与森林 . . . . .	18
2.8 愿景——或十二个主题的和声 . . . . .	20
2.9 形式与结构——或事物之道 . . . . .	23
2.10 新几何学——或数与量的联姻 . . . . .	25
2.11 神奇的扇子——或纯真 . . . . .	27
2.12 拓扑学——或迷雾的测绘 . . . . .	29
2.13 拓扑斯——双人床 . . . . .	31
2.14 空间概念的嬗变——或气息与信仰 . . . . .	34
2.15 国王所有的马匹…… . . . . .	35
2.16 动机——或核心中的核心 . . . . .	36
2.17 探索母体——或两面性 . . . . .	39
2.18 孩子与母亲 . . . . .	42
<b>尾声：无形的圈子</b>	<b>44</b>
2.19 死亡是我的摇篮（或三个顽童为一个垂死者） . . . . .	44
2.20 对岸一瞥 . . . . .	45
2.21 独特——或孤独的馈赠 . . . . .	48

## 第一部分

# 主题呈现，或四乐章前奏曲

# 第1章 代序

1986年1月30日

万事俱备，只欠一篇序言，便可将《收获与播种》(Récoltes et Semailles)交付印刷。我发誓，我确实怀着最大的诚意，想要写出一篇合适的序言。这一次，要写点**合理**的东西。三四页足矣，但要言之有物，用以介绍这部超过千页的“巨著”。要写点能吸引那些麻木读者的东西，让他们隐约感到，在这“超过千页”的厚重篇幅中，或许有些内容会让他们感兴趣（甚至与他们息息相关，谁知道呢？）。说实话，吸引读者并非我的强项，但这次我打算破例一次！毕竟，总得让那位“敢于冒险的出版商”（愿意出版这部显然难以出版的“怪物”）尽可能地收回成本。

然而，事与愿违。我尽力了，真的尽力了。而且不止一个下午，正如我原本计划的那样，匆匆了事。明天就是整整三周了，稿纸堆积如山。写出来的东西，显然不能被称为一篇“序言”。又一次失败了，真是命中注定！到了我这个年纪，已经无法改变——我也不适合推销或让别人推销。即使是为了取悦自己或朋友们。

写出来的，更像是一段漫长的“漫步”，伴随着对我数学作品的评述。这段漫步主要是为“外行”准备的——那些“从未理解过数学”的人。同时也是为我自己准备的，因为我从未有过这样的闲情逸致。渐渐地，我发现自己开始揭示并说出一些一直未曾言明的东西。巧合的是，这些东西也是我感觉最为本质的，无论是在我的工作还是作品中。它们与技术无关。至于我是否成功地完成了这项天真的“传递”任务——这项或许同样有些疯狂的任务——就由你来评判了。我的满足与快乐，在于能否让你感受到这些。这些东西，我的许多博学同事早已无法感受。或许他们变得太过博学、太过显赫。这常常会让人失去与简单而本质的事物的联系。

在这段“漫步”中，我也谈到了我的生活。偶尔，也会提到《收获与播种》中的一些内容。在随后的“信件”（日期为去年五月）中，我会更详细地再次谈及这些内容。这封信原本是写给我的前学生和数学界“昔日好友”的。但它同样没有技术性内容。任何感兴趣的读者都可以毫无障碍地阅读，通过这段“鲜活”的叙述，了解最终促使我写作《收获与播种》的来龙去脉。比“漫步”更进一步，

---

它还会让你提前感受到数学“大世界”中的某种氛围。同时（与“漫步”一样），也能让你感受到我的表达风格——据说有些特别。还有通过这种风格表达的精神——这种精神也并非人人都能欣赏。

在“漫步”以及《收获与播种》的许多地方，我谈到了**数学工作**。这是我非常熟悉且亲身经历的工作。我所说的许多内容，无疑适用于任何创造性工作，任何发现性工作。至少对于所谓的“智力工作”是如此，那种主要通过“头脑”完成并通过书写表达的工作。这种工作的标志是对我们正在探索的事物的**理解**的萌发与绽放。但举一个相反的例子，爱情的激情同样是一种发现的冲动。它向我们敞开了一种被称为“肉体”的知识，这种知识同样会更新、绽放、深化。这两种冲动——一种是驱动工作中的数学家的冲动，另一种是驱动爱人的冲动——比人们通常认为的或愿意承认的要接近得多。我希望《收获与播种》的篇章能让你在你的工作和日常生活中感受到这一点。

在“漫步”中，主要讨论的是数学工作本身。然而，我几乎对这项工作的背景以及在工作时间之外的动机保持沉默。这可能会给人一种关于我本人，或关于数学家或“科学家”的过于美好但扭曲的形象。像是“伟大而崇高的激情”，没有任何修正。总之，符合“科学神话”（请用大写字母S）的基调。这种英雄式的、“普罗米修斯式”的神话，作家和科学家们（并且仍在继续）争先恐后地陷入其中。或许只有历史学家有时能抵抗这种如此诱人的神话。事实是，在“科学家”的动机中，有时驱使他们不计代价地投入工作的，野心和虚荣心扮演着与任何其他职业同样重要且几乎普遍的角色。它们以或粗糙或微妙的形式表现出来，取决于当事人。我绝不声称自己是个例外。我希望我的证言不会让人对此产生任何怀疑。

同样真实的是，最贪婪的野心也无法发现或证明任何一个数学命题——正如它无法（例如）“让人勃起”（字面意义）。无论是男性还是女性，让人“勃起”的绝不是野心、炫耀的欲望或展示力量的欲望——恰恰相反！而是对某种强烈、真实且微妙的事物的敏锐感知。我们可以称之为“美”，这是这种事物的千面之一。有野心并不一定妨碍我们偶尔感受到一个人或一件事的美，但可以肯定的是，让我们感受到美的绝不是野心……

第一个发现并掌握火的人，正是像你我一样的普通人。绝不是我们想象中的“英雄”或“半神”。当然，像你我一样，他也曾经历过焦虑的刺痛，以及虚荣的安慰，这种安慰让人忘记刺痛。但在他“认识”火的那一刻，既没有恐惧，也没



---

有虚荣。这就是英雄神话中的真相。当神话被用来掩盖事物的另一面——同样真实且同样本质的一面时，它就变得乏味，变成了一种安慰剂。

我在《收获与播种》中的意图是谈论这两方面——知识的冲动，以及恐惧及其虚荣的解毒剂。我相信我“理解”或至少了解这种冲动及其本质。（也许有一天，我会惊讶地发现，我一直在自欺欺人……）但对于恐惧和虚荣，以及由此衍生的创造力的隐秘阻碍，我知道我并未深入探究这一巨大的谜题。我也不知道在我余下的岁月里，是否能够揭开这一谜题的真相……

在写作《收获与播种》的过程中，两幅画面浮现出来，代表了人类冒险的这两方面。它们是**孩子**（即工人）和**老板**。在接下来的“漫步”中，几乎完全讨论的是“孩子”。他也是副标题“孩子与母亲”中的主角。我希望这个名字能在“漫步”过程中逐渐清晰。

在其余部分的反思中，老板则占据了舞台的中心。他成为老板并非没有原因！更准确地说，这里讨论的不是一个老板，而是竞争企业的老板们。但所有老板在本质上都是相似的。当我们开始谈论老板时，也意味着会出现一些“坏人”。在反思的第一部分（“疲劳与更新”，紧随这篇介绍性部分之后，即“四乐章前奏”），主要是我，“坏人”。在接下来的三部分中，主要是“其他人”。轮流上场！

这意味着，除了深刻的哲学反思和“忏悔”（绝非悔悟）之外，还会有一些“尖刻的肖像画”（借用我一位同事和朋友的表达，他发现自己被稍微冒犯了……）。更不用说一些大规模的“行动”，绝非儿戏。罗伯特·若兰<sup>1</sup>曾半开玩笑地告诉我，在《收获与播种》中，我是在“做数学界的人类学”（或者也许是社会学，我也说不清了）。当然，当得知自己在不知不觉中做了些学术性的事情时，我感到很受恭维！事实上，在反思的“调查”部分（尽管我并不情愿……），我看到自己正在书写的页面上，数学界的大部分机构轮番登场，更不用说许多地位较为普通的同事和朋友了。而最近几个月，自从去年十月我寄出《收获与播种》的临时印刷版以来，这种情况又再次发生。显然，我的证言像一块石头扔进了池塘。反响五花八门（除了无聊……）。几乎每次，都完全出乎我的意料。还有许多沉默，意味深长。显然，我还有很多东西要学习，而且是各种各样的东西，关于我的前学生和其他同事（无论地位高低）脑子里在想什么——抱歉，我是说关于“数学界的社会学”！对于那些已经为我晚年这部伟大社会学作品做出贡献的人，我在

---

<sup>1</sup> 罗伯特·若兰（Robert Jaulin）是我的老朋友。我了解到，他在民族学界的处境（作为“白狼”）与我在数学“美丽世界”中的处境有些相似。

此表达我的感激之情。

当然，我对那些热情洋溢的回应特别敏感。也有一些罕见的同事向我表达了他们的情感，或一种（此前未曾表达的）危机感，或对数学界内部退化的感受，他们觉得自己是这个圈子的一部分。

在这个圈子之外，最早对我的证言表示热烈甚至感动的欢迎的人中，我想在此提到西尔维和凯瑟琳·谢瓦莱<sup>2</sup>、罗伯特·若兰、斯特凡·德利戈尔热、克里斯蒂安·布尔瓜。如果《收获与播种》能够比最初的临时印刷版（面向一个非常有限的圈子）传播得更广，这主要归功于他们。归功于他们那种富有感染力的信念：我努力捕捉和表达的东西，必须被说出来。而且它能够被一个比我的同事（常常阴郁、甚至暴躁，并且千百次地愿意重新审视自己……）更广泛的圈子所理解。正是因此，克里斯蒂安·布尔瓜毫不犹豫地冒险出版了这部难以想象的作品，而斯特凡·德利戈尔热则荣幸地将我这难以消化的证言收录在“认识论”系列中，与牛顿、居维叶和阿拉戈并列（我无法想象更好的伙伴！）。对于每一位在这个特别“敏感”的时刻给予我反复的同情和信任的人，我在此表达我深深的感激。

现在，我们即将开始一段“漫步”，作为穿越一生的旅程的序章。一段漫长的旅程，是的，超过千页，每一页都密密麻麻。我用了一生的时间来完成这段旅程，却仍未穷尽它，又用了一年多的时间重新发现它，一页一页地。有时，词语犹豫不决，难以表达一种仍在逃避犹豫不决的理解的经验——就像堆积在压榨机中的成熟葡萄，有时似乎想要逃避挤压它的力量……但即使在词语似乎争先恐后地涌出的时刻，它们也并非为了“幸运的幸福”而争先恐后地涌出。每一个词都在经过时被称重，或者事后被调整，如果发现它太轻或太重，就会被仔细调整。因此，这部反思-证言-旅程并非为了被匆忙阅读，在一天或一个月内，由一个急于看到结局的读者读完。在《收获与播种》中，没有“结局”，没有“结论”，正如我的生活或你的生活中也没有。这里有一种酒，在我的存在之桶中陈酿了一生。你喝下的最后一杯不会比第一杯或第一百杯更好。它们都是“同一杯”，又各不相同。如果第一杯酒变质了，整个桶也就变质了；那么，不如喝点好水（如果有的话），而不是坏酒。

但好酒不能匆匆喝下，也不能随意饮用。

---

<sup>2</sup>西尔维和凯瑟琳·谢瓦莱（Sylvie et Catherine Chevalley）是克劳德·谢瓦莱（Claude Chevalley）的遗孀和女儿，克劳德是我的同事和朋友，《收获与播种》的核心部分（RES III，“阴阳之钥”）就是献给他的。在反思的多个地方，我谈到了他，以及他在我的历程中所扮演的角色。

## 第2章 漫步于一部作品之中，或孩子与母亲

1986年1月

### 2.1 事物的魔力

小时候，我很喜欢上学。我们有一位老师教我们读写、算术、唱歌（他会用小提琴为我们伴奏），还有史前人类和火的发现。我记得那时候在学校从未感到无聊。数字有魔力，文字、符号和声音也是。歌曲或小诗中的韵律同样如此。韵律似乎蕴含着超越文字的神秘。直到有一天，有人向我解释了一个简单的“窍门”：韵律不过是让连续的两个口语动作以相同的音节结尾，这样一来，仿佛被施了魔法，它们就变成了诗句。这真是一个启示！在家里，我找到了共鸣，连续几周甚至几个月，我都乐此不疲地创作诗句。有一段时间，我说话都带着韵律。幸好，这种状态过去了。但即使到了今天，偶尔我还会写诗——只是不再刻意追求韵律，除非它自然而然来。

还有一次，一个已经上高中的大朋友教我负数。那是另一个有趣的游戏，但很快就玩腻了。还有填字游戏——我花了几几天甚至几周时间制作，越来越复杂。这个游戏结合了形状的魔力，以及符号和文字的魔力。但这种热情已经离我而去，似乎没有留下任何痕迹。

在高中，先在德国读了一年，后来在法国，我是个不错的学生，但算不上“优秀学生”。我对最感兴趣的东西投入无限热情，而对不太感兴趣的东西则倾向于忽视，不太在意相关“老师”的评价。1940年，我在法国的第一年高中，和母亲一起被关在里厄克罗斯集中营，靠近芒德。那时是战争时期，我们是外国人——所谓的“不受欢迎者”。但集中营的管理者对营里的孩子们睁一只眼闭一只眼，尽管他们也是“不受欢迎者”。我们可以随意进出。我是年纪最大的，也是唯一一个上高中的，离集中营四五公里，无论下雪还是刮风，我都穿着总是进水的破鞋去上学。

我还记得第一次“数学作文”，老师因为我对“三角形全等的三种情况”之一的证明给了我很低的分。我的证明不是书上的那种，而他严格遵循书本。然而，我清楚地知道，我的证明并不比书上的逊色，我遵循的是同样的思路，用那



些传统的“将某个图形以某种方式滑动到另一个图形上”的方法。显然，这位教我的老师觉得自己没有能力独立判断（在这里，是一个推理的有效性）。他必须依赖权威，在这里就是书本。这种态度一定给我留下了深刻印象，以至于我至今还记得这个小插曲。后来直到今天，我有很多机会看到，这种态度绝非例外，而是几乎普遍的规则。关于这一点，有很多可以说的——我在《收获与播种》中多次以不同形式触及这个话题。但即使到了今天，无论我愿不愿意，每当我再次遇到这种情况时，我仍然感到困惑……战争最后几年，当我母亲仍被关在集中营时，我在“瑞士救助”组织为逃难儿童设立的儿童之家，位于尚邦-叙尔-利尼翁。我们大多是犹太人，每当接到（当地警方的）通知，说盖世太保要来搜捕，我们就会分成两三个人的小组，躲进树林里过上一两夜，并未真正意识到这关乎我们的生死。这个地区隐藏着许多犹太人，在塞文山区，许多人因当地居民的团结互助而得以幸存。

在“塞文学院”（我在此就读）最让我印象深刻的是，我的同学们对所学内容兴趣寥寥。而我则在新学年伊始便如饥似渴地阅读课本，以为这次终于能学到真正有趣的东西；而一年中的其余时间，我尽力利用时间，而预定的课程却无情地按部就班，贯穿整个学期。尽管如此，我们有些老师非常和蔼可亲。自然历史老师弗里德尔先生，其人文与智力素养非凡。但他无法“严厉”，结果被学生们闹得不可开交，到了学年末，他的课几乎无法继续，他那无助的声音被一片喧嚣淹没。或许正因为如此，我才没有成为生物学家！

我花了不少时间，甚至在课堂上（嘘……），做数学题。很快，书上的题目已不能满足我。也许是因为它们逐渐变得过于相似：但更重要的是，我认为，它们出现得太过突兀，一个接一个，没有说明来龙去脉。这些是书上的问题，不是我的问题。然而，真正自然的问题并不缺乏。例如，当三角形三边长度  $a$ 、 $b$ 、 $c$  已知时，这个三角形就确定了（忽略其位置），因此应该有一个明确的“公式”来表达，比如，三角形的面积作为  $a$ 、 $b$ 、 $c$  的函数。同样，对于一个已知六条棱长的四面体：体积是多少？那次我可能费了不少劲，但最终还是解决了。无论如何，一旦某件事“抓住”了我，我会不计时间地投入，甚至忘记其他一切！（现在依然如此……）

在数学课本中，最让我不满的是缺乏对长度（曲线的）、面积（表面的）、体积（固体的）概念的严格定义。我决心一旦有机会就要填补这一空白。1945年至1948年间，我在蒙彼利埃大学求学时，大部分精力都投入于此。大学的课程并不

能满足我。虽然从未明说，我可能觉得教授们只是在重复他们的课本，就像我在芒德高中的第一位数学老师一样。因此，我只是偶尔去大学，了解那永恒的“课程”进展。书本足以应付所谓的课程，但显然它们无法回答我心中的疑问。实际上，它们甚至没有触及这些问题，就像我的高中课本一样。既然它们提供了计算长度、面积和体积的通用方法，通过单重、双重、三重积分（谨慎地避开了三维以上的维度……），似乎没有必要给出一个内在的定义，无论是我的教授还是教材作者都这么认为。

根据我当时有限的经验，似乎我是世界上唯一一个对数学问题充满好奇的人。无论如何，那是我在完全孤独的智力生活中未言明的信念，而这份孤独并未让我感到沉重<sup>1</sup>说实话，我相信在那段时间里，我从未深入思考过自己是否真的是世界上唯一一个可能对我所做的事情感兴趣的人。我的精力完全被自己设定的挑战所占据：

我内心毫不怀疑，只要我肯下功夫去探究，将它们的启示一一记录在案，我必定能够揭开事物的终极奥秘。比如说，对体积的直觉是不可否认的。它只能是暂时难以捉摸但完全可触的现实的反映。正是这个现实需要被把握，简单来说——或许有点像“韵律”这一神奇现实曾被某一天“捕捉”、“理解”那样。

十七岁，刚从高中毕业，我开始着手此事时，以为几周就能完成。结果我坚持了三年。甚至在大学第二年末，由于一个愚蠢的数字计算错误，我错过了球面三角学的考试（在“深入天文学”选修课中，没错）。（必须承认，自从高中毕业后，我在计算方面一直不太在行...）正因如此，我不得不在蒙彼利埃多待一年完成我的学位，而不是直接前往巴黎——据说是唯一一个能让我遇到那些了解数学界重要事务的人的地方。我的消息来源，苏拉先生，还向我保证，数学中最后剩下的问题已在二三十年前被一个叫勒贝格的人解决了。他恰好（真是奇妙的巧合！）发展了一套测度与积分理论，为数学画上了句号。

苏拉先生，我的“微分计算”老师，是一位对我既仁慈又友善的人。尽管如

<sup>1</sup>1945年至1948年间，我与母亲住在离蒙彼利埃约十公里的小村庄 Maurargues（靠近 Vendargues），四周环绕着葡萄园。（我父亲于1942年在奥斯威辛失踪。）我们靠我微薄的学生奖学金勉强维持生计。为了收支平衡，我每年都参与葡萄收获，之后还会制作一些残次葡萄酒，尽管过程磕磕绊绊（据说还违反了当时的法规...）。此外，我们有一个花园，无需劳作，便为我们提供了丰富的无花果、菠菜，甚至（接近尾声时）还有西红柿，这些是由一位好心的邻居在一片绚丽的罂粟花海中种植的。那是美好的生活——但有时也会捉襟见肘，比如需要更换眼镜框或一双穿到破旧的鞋子时。幸运的是，对于因长期集中营生活而饱受折磨、病痛缠身的母亲，我们有资格享受免费医疗援助。否则，我们根本无力支付医生的费用...

此，我并不认为他说服了我。我内心早已存在一种认知，即数学在广度和深度上都是无限的。大海有“终点”吗？无论如何，我从未有过一丝念头去翻阅苏拉先生提及的那本勒贝格的书，而且他本人大概也从未真正拥有过那本书。在我心中，书中所能包含的内容与我为了满足自己对某些引发好奇事物的探索而进行的工作之间，毫无共同之处。

## 2.2 独处的重要性

当我最终在巴黎与数学界取得联系时，已是两年之后的事了。在那里，我学到了许多东西，其中就包括我独自一人用有限资源完成的工作，几乎就是众所周知的“勒贝格测度与积分理论”。对于我向两三位明智之人提及甚至展示过手稿的这项工作，在他们看来，我似乎只是在浪费时间，重复“已知之事”。不过，我并未因此感到失望。那时，我心中尚未萌生通过所做工作获取“认可”、哪怕只是他人赞同或兴趣的念头。更何况，我的精力全被用于适应一个截然不同的环境，尤其是学习在巴黎被视为数学家基础的知识<sup>2</sup>。

然而，如今回想那三年时光，我意识到它们绝非虚度。在不知不觉中，我在孤独中领悟了数学家职业的精髓——这是任何导师都无法真正传授的。无需他人告知，也无需遇见能分享我求知渴望的伙伴，我内心深处便已明白，自己是一名数学家：一个真正“做”数学的人，如同“做”爱一般。数学于我，已成为一位永远欢迎我渴望的情人。那些独处的岁月奠定了一种从未动摇的信心——无论是二十岁初到巴黎时发现自己无知之广、需学之多的震撼；还是二十多年后，我毅然决然离开数学界的动荡经历；亦或是近年来，由昔日亲密伙伴精心策划的，对我个人及作品的某种“葬礼”（预演且无瑕疵）的种种离奇桥段……

换句话说：在这些关键的年头里，我学会了独处<sup>3</sup>。我的意思是：凭借自己的理解去探索我想了解的事物，而不是依赖来自某个群体——无论我是否自认为是其中一员，或是出于其他原因赋予其权威——的明示或默示的观念与共识。

<sup>2</sup>我在《收获与播种》(ReS I)的第一部分“受欢迎的异乡人”(第9节)中简要叙述了那段略显艰难的过渡时期。

<sup>3</sup>这一表述有些不准确。我从未需要“学会独处”，原因很简单，我童年时期从未丧失过这种与生俱来的能力，它存在于我出生之时，如同存在于每个人身上。但独自工作的这三年，让我能够按照自己自发的高标准来衡量自己，确认并重新确立了我与数学工作的关系中的自信与从容，这种自信与从容不依赖于任何共识或潮流。我将在“根源与孤独”笔记中再次提及这一点(ReS IV, n° 171<sub>3</sub>，特别是第1080页)。

在中学和大学时期，无声的共识告诉我，对于“体积”这一概念本身无需质疑，它被视为“众所周知”、“显而易见”、“没有问题”。我像对待理所当然的事情一样忽略了这一点——正如几十年前勒贝格不得不忽略的那样。正是在这种“忽略”的行为中，在本质上做自己而非仅仅是法律共识的表达，不局限于它们为我们划定的强制性圈子里——正是在这种孤独的行为中，存在着“创造”。其余的一切都是额外的。

后来，在这个接纳我的数学世界里，我有机会遇到许多人，既有前辈也有与我年龄相仿的年轻人，他们显然比我聪明得多，天赋异禀。我钦佩他们轻松学习新概念的能力，仿佛在玩耍中就能掌握，并像从摇篮时期就熟知一般运用自如——而我却感到笨拙，像只鼯鼠一样艰难地在需要学习（据说是重要的）的庞杂事物中开辟道路，感到无法把握其中的来龙去脉。实际上，我并非那种轻松通过著名竞赛、迅速掌握繁重课程的天才学生。

我那些更为出色的同学大多成为了有能力的知名数学家。然而，回顾过去三十或三十五年，我发现他们并未在我们时代的数学上留下深刻的印记。他们在既定的框架内做了一些事情，有时是美好的事情，但未曾想过触碰那个框架本身。他们在不知不觉中成为了那些无形而强制性的圈子的囚徒，这些圈子在特定环境和时代中界定了一个宇宙。要跨越这些圈子，他们需要重新找回出生时拥有的那种能力，正如我一样：独处的能力。

小孩子则毫无困难地独处。他们天生孤独，尽管偶尔的陪伴并不令他们反感，也知道在需要喝奶时向妈妈索要奶瓶。他们无需言语便知道奶瓶是为他们准备的，也知道如何喝奶。但往往，我们与内心那个孩子失去了联系。我们不断错过最好的东西，却不愿看见……

在《收获与播种》中，如果我向除了自己之外的某人倾诉，那对象并非“公众”。我向你——阅读此书的个体，且是独自一人的你——诉说。我愿与深藏于你内心、懂得孤独的那个孩子对话，仅此而已。那孩子常居远方，我深知此点。他历经沧桑，久远以来目睹了世间百态。他隐匿于无人知晓的角落，往往难以触及。人们或许会断言他早已逝去，甚至从未存在过，然而我坚信，他仍在某处，生机勃勃。

我也知晓自己被倾听的迹象。那便是，当跨越文化与命运的种种差异，我所讲述的关于自身与生活的点滴，能在你心中激起回响与共鸣；当你在其中亦寻觅到自己的生活轨迹，自我体验的片段，或许是以一种你此前未曾留意的方式。这



并非对远离你的事物的“认同”。而是，或许在某种程度上，你通过我逐页在《收获与播种》中，乃至此刻我正在书写的篇章里，对自我生活的重新发现，再次邂逅了最贴近你自身的生活本质。

## 2.3 内心之旅——或神话与见证

首先，《收获与播种》是对我自己及我生活的反思。因此，它也是一种见证，且以两种方式呈现。它是对我过去的见证，这是反思的主要承载。但同时，它也是对最直接当下的见证——即我写作之时，以及《收获与播种》一页页诞生的时刻，不分昼夜。这些页面忠实记录了我对生活的长期冥想，正如它真实地持续着（并且此刻仍在继续……）。

这些页面并无文学野心。它们构成了关于我自身的一份文献。我只在非常有限的范围内允许自己对其进行修改（主要是偶尔的文体修饰）<sup>4</sup>。若说有何追求，那便是力求真实。而这已足够重要。

此外，这份文献并非“自传”。你从中不会得知我的出生日期（这对绘制星盘或许有些许意义），也不会了解我父母的名字及其生平，不会提及曾为我妻及在我生命中占据重要地位的其他女性的名字，也不会提及这些爱情结晶的子女及其各自的生活轨迹。并非这些事物在我生命中无足轻重，或至今仍不重要。而是随着自我反思的展开与延续，我从未感到有必要深入描述这些我偶尔触及的事物，更不用说刻意罗列姓名与数字。我始终认为，这些内容无法为我当时所追求的主题增添任何价值。（尽管在前几页中，我或许不由自主地包含了比后续千页更多的个人生活细节……）

若你问我，这千页篇幅所追求的“主题”究竟是什么，我会回答：是讲述并由此发现我生命中的内心冒险。这一冒险的叙述-见证同时在我刚才提到的两个层面上展开。一方面，是对过去冒险的探索，追溯其根源直至我的童年。另一方面，则是这一“同一”冒险在《收获与播种》写作过程中的延续与更新，作为对外界强烈呼唤的自然回应<sup>5</sup>。

外部事件仅在激发内心冒险的反弹或有助于其明晰时，才为反思提供养分。

<sup>4</sup>因此，对于可能存在的错误（实质性的或视角上的等）的修正，并非初稿的修改机会，而是通过脚注或后续对考察情境的“回顾”来完成。

<sup>5</sup>关于这一“强烈呼唤”的具体说明，参见“信件”，特别是第3至8节。



而我的数学作品被埋葬与掠夺，这一事件便是如此强烈的刺激。它在我内心激起了强烈的自我反应，同时揭示了我与源自我的作品之间深藏不露的紧密联系。

确实，我属于“数学高手”这一事实，并不必然成为你对我这段“特殊”冒险感兴趣的理由（更谈不上是个好理由）——同样，我在改变环境和生活方式后与同事间产生的摩擦，也不足以引起你的兴趣。况且，不乏同事乃至朋友，他们认为公开表露（如他们所言）自己的“内心状态”极为可笑。重要的是“成果”。而“灵魂”，即我们体内体验这些“成果”产生过程的部分，或是其带来的各种影响（无论是在“生产者”的生活中，还是在其同类的生活中心），却遭到轻视，甚至公开嘲笑。这种态度自诩为“谦逊”的表现，而我视之为逃避的迹象，一种由我们呼吸的空气所助长的奇异失调。显然，我并非为那些深受这种自我潜在蔑视之苦的人写作，这种蔑视使他们对我所能提供的最宝贵之物不屑一顾。这是一种对真正构成其自身生活，以及构成我生活的要素的蔑视：那些驱动心灵的表层与深层、粗糙或细腻的运动，正是这“灵魂”体验并回应经历，时而凝固，时而绽放，时而退缩，时而学习……

唯有亲身经历者，才能讲述内心的冒险，他人无法代劳。然而，即便这叙述仅为自己而作，也鲜有不滑入构建神话的窠臼者，其中叙述者自封为英雄。此类神话非源于民族与文化的创造性想象，而是源自不敢直面卑微现实、乐于以心灵构建取而代之者的虚荣。但真实的叙述（若有之），如实记录一段真正经历的冒险，实属珍贵。其价值不在于叙述者可能（无论对错）享有的声望，而仅在于其存在本身，及其真实性的品质。这样的见证弥足珍贵，无论它出自一位声名显赫乃至杰出的人物，还是一位前途渺茫、肩负家庭重担的小职员，或是一名普通法罪犯之口。

若此类叙述对他人有所裨益，首要之处在于通过他人未经粉饰的经验见证，使其重新面对自我。或者换种说法，或许能在他心中（哪怕仅在阅读的片刻）消除那种对自己冒险经历的轻视，以及对那既是乘客又是船长的“灵魂”的轻蔑……

## 2.4 风俗画卷

谈及我作为数学家的过往，随后又（仿佛身不由己地）发现了我作品巨大葬礼中的曲折与奥秘，我无意中被引导去描绘某个特定环境与时代的图景——

个以某些赋予人类工作意义的价值解体为标志的时代。这便是围绕“科学”年鉴中无疑独一无二的“杂闻”所勾勒出的“风俗画卷”面貌。我想，我之前所言已足够清晰地表明，你不会在《收获与播种》中找到关于某件不寻常“事件”的“档案”，以便快速了解情况。然而，某位寻找档案的朋友，却闭目而过，几乎错过了构成《收获与播种》实质与血肉的一切。

正如我在信中更为详尽地解释的那样，“调查”（或“风俗画卷”）主要在第二部分和第四部分继续展开，即“葬礼（1）——或中国皇帝的袍子”与“葬礼（3）——或四则运算”。随着页面的推进，我坚持不懈地逐一揭示出众多（至少可以说是）引人入胜的事实，并尽力将它们适时“安置”。渐渐地，这些事实汇聚成一幅整体图景，逐渐从迷雾中显现，色彩愈发鲜明，轮廓愈加清晰。在这些日常笔记中，刚浮现的“原始事实”与个人回忆、心理、哲学乃至（偶尔）数学性质的评论和思考错综复杂地交织在一起。事情就是这样，我无能为力！

基于我耗时一年多的紧张工作，以“调查结论”风格整理出一份档案，对于感兴趣的读者而言，根据其好奇心与要求，可能只需额外花费几小时或几天的时间。我曾一度尝试整理那份著名的档案。那是在我开始撰写一篇本应名为“四则运算”的笔记时<sup>6</sup>。但后来，我放弃了。我做不到！这显然不是我的表达风格，尤其是在晚年，更是如此。如今，我认为通过《收获与播种》，我已为“数学界”的利益做了足够多，可以毫无愧疚地将整理必要“档案”的任务留给他人（如果我的同事中有感到关切者）。

## 2.5 继承者与建设者

是时候在这里谈谈我的数学工作了，它在我生命中占据了重要位置，并且（令我惊讶地）持续保持着这一地位。在《收获与播种》中，我不止一次提及这项工作——有时以每个人都能清晰理解的方式，有时则用略带技术性的语言<sup>7</sup>。这些段落大多会“超出”不仅“外行”的理解范围，甚至对于那些不再或不太“涉足”相关数学领域的数学同行也是如此。你当然可以跳过那些对你来说显得过于“专业”的部分。同样，你也可以浏览它们，或许能在途中捕捉到数学世界“神

<sup>6</sup>该笔记最终扩展为《收获与播种》第四部分（同名“四则运算”），包含约 70 条笔记，跨越近四百页。

<sup>7</sup>除了对我过去工作的数学见解外，书中还散布着包含新数学发展的段落。最长的一段是《五张照片（晶体与  $\mathcal{D}$ -模）》在 ReS IV 中的注释 n° 171 (ix)。

秘之美”的一瞥（正如一位非数学界的朋友写信告诉我的那样），它如同在广阔流动的思维海洋中涌现的“奇异而不可及的岛屿”……

正如我之前所说，大多数数学家倾向于将自己局限在一个概念框架内，一个一旦确定便不再改变的“宇宙”——基本上，这是他们在求学时期就已发现的现成世界。他们就像继承了一座宏伟且布置妥当的大宅，里面有客厅、厨房、工作室，还有一应俱全的厨具和工具，确实，有了这些，烹饪和修理都不在话下。这座房子是如何历经数代逐渐建成的，这些工具为何及如何被设计并制造出来（而非其他……），为何房间在这里这样布置，那里又是另一种安排——这些都是这些继承者们从未想过要问的问题。这就是“宇宙”，是必须接受的“给定”，仅此而已！它看似宏大（而且往往远未探索完所有角落），同时又熟悉，最重要的是：永恒不变。当他们忙碌时，是为了维护和美化这份遗产：修理摇晃的家具，粉刷外墙，磨利工具，甚至有时，对于最具进取心的人来说，在工作室里从头打造一件新家具。当他们全身心投入时，那件家具可能美轮美奂，整座房子也因此增色不少。

更为罕见的是，其中一人会考虑对储备中的某件工具进行些许修改，或是在反复且迫切的需求压力下，构想并制造一件全新的工具。这样做时，他几乎会不自觉地道歉，因为他感到自己似乎触犯了应尊重的家族传统，觉得自己通过一项不寻常的创新冒犯了它。

在房屋的大多数房间里，窗户和百叶窗都小心翼翼地紧闭着——大概是害怕从别处吹来的风会灌进来。当新添置的漂亮家具，一件在这里，另一件在那里，更不用说那些后代们，开始让本已狭窄的房间变得拥挤，甚至侵占到走廊时，这些继承者们谁也不愿意承认，他们那熟悉而温馨的小天地开始显得有些局促了。与其接受这一现实，他们宁愿在路易十五风格的餐柜和藤制摇椅之间，或是在一个流着鼻涕的小孩和一座埃及石棺之间，勉强挤过身去；而另一些人，在绝望中，则会尽力攀爬上一堆摇摇欲坠、杂乱无章的椅子和长凳……

我刚才描绘的这幅小图景并非数学家世界所独有。它描绘了根深蒂固、由来已久的条件反射，这些条件反射在人类活动的各个领域和各个层面都能遇到，而且（据我所知）在所有社会和所有时代都是如此。我之前已经提到过这一点，并且我绝不声称自己能够免俗。正如我的证言所示，事实恰恰相反。只不过，在相对有限的创造性智力活动层面上，我受这种条件反射的影响较小<sup>8</sup>，这种条件反

<sup>8</sup>我认为主要原因在于我五岁之前所处的某种有利环境。关于这一点，请参阅“纯真”注释（ReS

射可以被称为“文化盲视”——即无法看到（也无法行动）于周围文化所设定的“宇宙”之外。

就我个人而言，我感觉自己属于那些自发地以建造新房子为乐和使命的数学家之列<sup>9</sup>。在建造过程中，他们不可避免地也会发明并逐步打造出所有必要的工具、器皿、家具和仪器，既用于从地基到屋顶的房屋建造，也用于为未来的厨房和工作室提供充足的物资，并布置好房屋以便居住和舒适生活。然而，一旦所有东西，直到最后一块檐槽和最后一张凳子都安置妥当，工匠很少会在这些地方久留，因为每一块石头和每一根椽子都留有他亲手加工和安置的痕迹。他的位置不在那些现成的、无论多么温馨和谐的宇宙中——无论这些宇宙是由他自己的双手还是由他的前辈们所布置。其他任务已经在召唤他前往新的工地，在那些他可能是唯一能清晰感受到的迫切需求推动下，或者（更常见的是）在他预感到的需求之前。他的位置是在广阔天地中。他是风的朋友，毫不畏惧独自承担任务，无论是数月、数年，甚至是一生，除非有援手及时到来。他只有两只手，和所有人一样，这是肯定的——但这两只手每时每刻都能猜出它们该做什么，既不拒绝最繁重的工作，也不回避最精细的任务，而且永远不厌倦去认识和重新认识那些不断召唤它们去了解的无数事物。两只手或许不多，因为世界是无限的。它们永远无法穷尽世界！然而，两只手，已经足够……

我对历史并不精通，若要列举这一脉络中的数学家，我脑海中自然浮现的是伽罗瓦和黎曼（上个世纪）以及希尔伯特（本世纪初）的名字。若要在那些在我初入数学界时接纳我的前辈中寻找一位代表<sup>10</sup>，那么首先想到的便是让·勒雷的名字，尽管我与他的接触极为有限<sup>11</sup>。

我刚刚勾勒了两幅肖像：一幅是满足于维护和美化遗产的“居家型”数学家，另一幅则是不断跨越“无形而威严的界限”界定宇宙的建设者-先驱者<sup>12</sup>。我

III, n° 107)。

<sup>9</sup>这一“房子”建造的原型意象首次出现并表述于“Yin le Serviteur, et les nouveaux maîtres”注释中(ReS III, n° 135)。

<sup>10</sup>我在“受欢迎的异乡人”一节(ReS I, n° 9)中谈到了这些初入时的经历。

<sup>11</sup>这并不妨碍我(继 H. 嘉当和 J.P. 塞尔之后)成为勒雷引入的一个重要创新概念——层的主要使用者和推广者之一，这一概念贯穿了我整个几何学工作的始终。它同样为我提供了扩展(拓扑)空间概念至拓扑斯的关键，下文将对此进行讨论。此外，勒雷似乎与我描绘的“建设者”形象有所不同，在我看来，他似乎并不倾向于“从地基到屋顶完整地建造房屋”。相反，他不由自主地在无人想到的地方打下广阔的基础，而将完成建筑和在其上建造的任务留给他人，一旦房屋建成，便搬入其中(哪怕只是暂时)...

<sup>12</sup>我刚刚，不经意间且“旁敲侧击”地，将两个具有男性共鸣的形容词(“建设者”和“先驱者”)



们也可以用一些略显随意但富有暗示性的名称来称呼他们，即“保守派”和“革新派”。两者都有其存在的理由和扮演的角色，在跨越世代、世纪乃至千年的集体冒险中共同前行。在一门科学或艺术蓬勃发展的时期，这两种气质之间并无对立或对抗<sup>13</sup>。他们彼此不同却又相辅相成，正如面团与酵母的关系。

在这两种极端（但本质上并不对立）的类型之间，自然存在着各式各样的中间性格。比如，某个“恋家者”可能从未想过离开熟悉的居所，更不用说去某个未知之地另建新居了，然而一旦空间确实变得局促，他便会毫不犹豫地拿起泥铲，改造地下室或阁楼，加高楼层，甚至在必要时，为墙壁添建一处小巧的附属建筑<sup>14</sup>。尽管他们骨子里并非建筑家，却常常以同情的眼光，至少不带忧虑或暗自责备，看待曾与他们共居一室，如今却在偏远之地辛苦收集梁木与石块，仿佛已预见一座宫殿的同伴……

## 2.6 观点与视野

然而，我回归到自身及我的作品。

若我在数学家的艺术上有所卓越，与其说是凭借解决前人遗留问题的技巧与毅力，不如说是源于我内在的一种自然倾向，驱使我发现那些显然关键却无人察觉的问题，或是提炼出缺失的“正确概念”（往往在全新概念显现之前，无人意识到其缺失），以及构思出无人想到的“恰当表述”。很多时候，这些概念与表述搭配得如此完美，以至于我心中几乎确信它们是正确的（至多需稍作修饰）——因此，当面对的是为发表而进行的“片段工作”时，我常省去进一步深入，不再花时间完善证明，因为一旦表述及其背景清晰，证明往往不过是“技艺”问题，甚至可以说是例行公事。吸引注意力的事物无穷无尽，不可能逐一响应到底！尽管如此，在我撰写并发表的著作中，以正规形式证明的命题与定理数以千计，我相信可以说，除极少数例外，它们均已融入数学界公认的“已知”知识库，并在

并列，它们表达了探索冲动中截然不同且更为微妙的方面，这些方面是这些名称所无法完全传达的。这将在接下来的反思漫步中，在“发现母亲——或两面”阶段（n°17）中显现。

<sup>13</sup>特别是在数学界，在我亲身经历的 1948 年至 1969 年期间便是如此。1970 年我离开后，似乎出现了一种大规模的反动，一种对“思想”尤其是对我引入的重大创新思想的“普遍蔑视共识”。

<sup>14</sup>我的许多“前辈”（例如在《一笔受欢迎的债务》引言第 10 页提及的那些）便属于这种中间性格。我特别想到了亨利·嘉当、克劳德·谢瓦莱、安德烈·韦伊、让-皮埃尔·塞尔、洛朗·施瓦茨。除了韦伊可能例外，他们都以“同情的目光”，毫无“担忧或暗自责备”，看待我独自踏上的那些冒险旅程。



数学的各个角落广泛使用。

但比起发现新问题、新概念和新表述，我更倾向于寻找富有成效的视角，这些视角不断引导我引入并或多或少地发展全新的主题。这，在我看来，是我为当代数学贡献的最核心部分。事实上，上述无数的问题、概念、表述，唯有在这样一个“视角”的照耀下，对我而言才具有意义——更准确地说，它们由此视角自发而生，带着不言自明的力量；就如同黑夜中突然出现的一束光（即便是散射的），似乎从虚无中勾勒出那些或模糊或清晰的轮廓，瞬间展现在我们眼前。没有这束将它们汇聚于共同光束中的光，那十、百、千个问题、概念、表述，只会呈现为一堆杂乱无章、形态各异的“思维小玩意”，彼此孤立——而非作为一个整体的组成部分，这个整体虽可能仍隐匿于夜的褶皱之中，却已清晰可感。

富有成效的视角，是那种向我们揭示，如同同一整体中鲜活部分般，那些无人感知的紧迫问题，以及（或许作为对这些问题的回应）那些自然得令人惊讶却无人想到要提炼的概念，还有那些似乎水到渠成、在相关问题与概念尚未显现之前无人敢于提出的表述。在数学中，比所谓的“关键定理”更为重要的，是这些富有成效的视角，它们是我们这门艺术中最强大的发现工具——或者说，它们并非工具，而是研究者渴望了解数学事物本质的双眼，充满激情地探索着。

因此，富有成效的观点无异于那只“眼睛”，它既让我们发现，又让我们在发现的多重性中认识到统一。而这种统一正是生命本身，是连接并激活这些多样事物的气息。

然而，正如其名所示，一个“观点”本身仍是片面的。它向我们揭示了一个景观或全景的一个方面，在众多同样有效、同样“真实”的其他方面之中。正是在同一现实的不同互补观点相结合，我们的“眼睛”增多之时，目光才能更深入地洞察事物的本质。我们渴望了解的现实越是丰富复杂，拥有多个“眼睛”以全面而细致地把握它就显得愈发重要<sup>15</sup>。

有时，一系列针对同一广阔景观的汇聚观点，凭借其内在力量，使我们能够透过多样把握统一，赋予新事物以形体；这新事物超越了每一个局部视角，正如一个生命体超越其每一个肢体和器官。这新事物，我们可以称之为一种愿景。愿景将已知的、体现它的观点统一起来，并揭示出我们之前未曾注意到的其他观点，正如富有成效的观点发现并理解众多问题、概念和新陈述为同一整体的一部

<sup>15</sup>任何观点都会催生一种表达它且独具特色的语言。拥有多个“眼睛”或“观点”来理解一个情境，也相当于（至少在数学上）掌握了多种不同的语言来界定它。

分。

换言之，愿景与其看似源自并统一的各种观点之间的关系，犹如清澈温暖的日光与太阳光谱的不同组成部分之间的关系。一个广阔而深邃的愿景如同不竭的源泉，不仅旨在激励和启迪其诞生之日的主人——那位成为其仆人的个体——的工作，也旨在照亮被其揭示的遥远界限所吸引的世代的工作，或许他们（如同他本人一样）会被这些界限所深深吸引……

## 2.7 “伟大的思想”——或树木与森林

我数学活动的所谓“高产”时期，即以正式出版物为标志的时期，从 1950 年持续到 1969 年，共二十年。而从 1945 年（我十七岁时）到 1969 年（我即将四十二岁时）的二十五年间，我几乎将全部精力投入了数学研究。这种投入无疑是过度的。我为此付出了精神长期停滞的代价，经历了一种逐渐的“僵化”，我将在《收获与播种》的篇章中多次提及这一点。然而，在纯粹智力活动的有限领域内，通过一种仅限于数学世界的视野的萌发与成熟，那是一段充满强烈创造力的岁月。

在这段漫长的人生阶段中，我几乎将所有时间和精力都投入到了所谓的“零件工作”中：即那些精细的塑造、组装和调试工作，这些工作是为了建造一座座房屋，而一个内在的声音（或恶魔……）命令我按照一位工头的指示去建造，这位工头随着工作的进展不断向我传达指令。我被“手艺”任务所占据：时而充当石匠，时而充当泥瓦匠、木匠，甚至管道工、细木工和家具匠——我很少有时间将那个对所有人（正如后来显现的那样……）都不可见的总体规划记录下来，哪怕只是粗略地勾勒出来，而这个规划在日复一日、月复一月、年复一年中，以梦游者般的确定性指引着我的手<sup>16</sup>。必须承认，这种我乐于投入的“零件工作”并

<sup>16</sup> “梦游者”这一形象受到了科斯特勒（Koestler）的杰出著作《梦游者》（Calman Lévy 出版社）的启发，该书呈现了“关于宇宙观念的历史随笔”，从科学思想的起源一直到牛顿。科斯特勒强调的一个历史现象是，我们对于世界的认识从某一点到另一点（逻辑上且回顾起来似乎很近）的路径，常常会经过一些令人震惊的迂回，这些迂回似乎违背了理性；然而，通过这些看似会永远迷失的千回百转，那些寻找宇宙“钥匙”的人们却以“梦游者般的确定性”，仿佛不经意间，甚至常常毫无察觉地，找到了他们远未预见的其他“钥匙”，而这些钥匙却最终被证明是“正确的”。

根据我在数学发现领域的观察，这些发现路径中的巨大迂回是一些杰出研究者的特征，但绝非所有人都是如此。这可能是过去两三个世纪以来，自然科学的研究，尤其是数学研究，已经摆脱了与特定文化和时代相关的宗教或形而上学的强制性预设，这些预设曾是阻碍对宇宙“科学”理解（无论好坏）发展的强大力量。然而，确实有一些最基本、最显而易见的数学思想和概

未让我感到不快。此外，我的前辈们所教授和实践的数学表达方式，至少可以说，更注重工作的技术层面，而不鼓励那些可能停留在“动机”上的“离题”；甚至，那些试图从迷雾中召唤出某种或许具有启发性的形象或愿景的尝试，由于尚未具体化为木材、石头或纯粹坚硬水泥的构造，更像是梦的碎片，而非工匠专注而细致的工作。

从数量上看，我在这段高产时期的成果主要体现在约一万两千页的出版物中，包括文章、专著和研讨会记录<sup>17</sup>，以及数百甚至数千个新概念，这些概念连同我为它们命名的名称一起进入了数学的共同遗产<sup>18</sup>。在数学史上，我相信我是为这门科学引入最多新概念的人，同时也是为此创造了最多新名称的人，以便以尽可能细腻且富有启发性的方式表达这些概念。

这些“数量”上的指标当然只能对我的作品提供一个极为粗略的把握，而忽略了其真正的灵魂、生命与活力。正如我之前所写，我为数学带来的最宝贵的东西，是我首先预见并随后耐心提炼和发展的“新观点”。正如我提到的那些概念一样，这些新观点在众多不同情境中引入，其数量几乎不可计数。

然而，有些观点比其他观点更为广阔，它们本身就能激发并涵盖众多局部观点，适用于多种不同的特定情境。这样的观点也可以恰当地被称为“伟大的思想”。凭借其自身的丰富性，这样的思想会孕育出一群活跃的后代，这些后代继承了它的丰富性，但大多数（如果不是全部）的适用范围都比母思想更为有限。

至于表达一个伟大的思想，“说出”它，这通常几乎与其构思本身以及在构思者内心的缓慢孕育过程一样微妙——或者更准确地说，这种孕育和形成的艰辛过程正是“表达”思想的过程：即耐心地将其从诞生时的迷雾中剥离出来，逐

念（如位移、群、零、文字计算、空间中点的坐标、集合的概念，或拓扑“形式”的概念，更不用说负数和复数）花费了数千年才得以出现。这些都是根深蒂固的心理“障碍”的显著标志，这种障碍阻碍了全新概念的诞生，即使这些概念简单如孩童般，且似乎以不言自明的力量自我显现，却仍然需要数代甚至数千年的时间才能被接受……

回到我自己的工作，我感觉其中的“失误”（可能比大多数同事更多）仅限于一些细节问题，通常很快被我自行发现。这些只是“局部”性质的“行进中的意外”，对所研究情境的基本直觉的有效性没有严重影响。然而，在思想和重大指导性直觉的层面上，我的作品似乎没有任何“失败”，尽管这听起来难以置信。正是这种从未出错的确定性，使我在每一刻都能把握住那些最富成果的方向，带领我直奔事物的本质——正是这种确定性让我想起了科斯特勒的“梦游者”形象。

<sup>17</sup>从 20 世纪 60 年代起，这些出版物中的一部分是与同事（尤其是 J. Dieudonné）和学生合作完成的。

<sup>18</sup>其中最重要的概念在《主题纲要》及其附带的《历史评论》中进行了回顾，这些内容将被收录在《反思》第四卷中。一些名称是由朋友或学生建议的，例如“光滑态射”（J. Dieudonné）或“位、场、层、链”这一系列术语，这些术语在 Jean Giraud 的论文中得到了发展。

渐赋予其具体形态，形成一幅随着周、月、年的推移而不断丰富、巩固和精细化的图景。简单地用一个引人注目的公式或一些或多或少技术性的关键词来命名这个思想，可能只需要几行甚至几页——但很少有人能在尚未深入了解它的情况下，听懂这个“名字”并从中辨认出一个面孔。而当这个思想完全成熟时，也许一百页就足以表达它，足以让孕育它的工匠感到满意——但也可能需要一万页经过精心打磨的文字，却仍然无法完全表达<sup>19</sup>。

无论是哪种情况，在那些为了掌握这一思想而阅读了最终展现其蓬勃发展的作品的人中——就像在一片荒地上生长出的一片茂密森林——很可能会有许多人看到这些挺拔而强壮的树木并加以利用（有人攀爬，有人取材做梁木和木板，还有人用来点燃壁炉中的火焰……），但很少有人能真正看到整片森林……

## 2.8 愿景——或十二个主题的和声

或许可以说，“伟大思想”是这样一种观点：它不仅展现出新颖且富有成果的特质，更在科学中引入了一个全新而广阔的主题，使之得以体现。而当我们不将科学视为权力与支配的工具，而是将其视为人类世代相传的认知冒险时，任何科学都只不过是这种和声——在不同时代或广阔或狭小，或丰富或贫瘠——它通过各个主题的微妙对位法，在世代与世纪中展开，如同从虚无中被召唤出来，彼此交织融合。

在我所揭示的众多数学新观点中，有十二个，回顾起来，我愿称之为“伟大思想”<sup>20</sup>。

<sup>19</sup>在1970年离开数学舞台时，我关于“概形”这一核心主题的出版物（其中许多是与他人合作的）总计约一万页。然而，这仅代表了我所看到的关于概形的宏大计划中的一小部分。这一计划在我离开后被无限期搁置，尽管事实上，几乎所有已经开发和发布的内容都立即进入了数学共同遗产，成为被广泛使用的“众所周知”的概念和结果。我在离开前完成的关于概形主题及其延伸和分支的部分，是数学史上最广泛的基础工作之一，也无疑是科学史上最广泛的工作之一。

<sup>20</sup>为满足好奇的数学读者，以下是这十二个主导思想或我作品的“主旋律”（按出现时间顺序排列）：

1. 拓扑张量积与核空间 2. “连续”与“离散”对偶（导出范畴，“六运算”） 3. 黎曼-罗赫-格罗滕迪克瑜伽（ $K$ -理论，与相交理论的关系） 4. 概形 5. 拓扑斯 6. 平展上同调与 $\ell$ -进上同调 7. 动机与动机伽罗瓦群（格罗滕迪克的 $\otimes$ -范畴） 8. 晶体与晶体上同调，德拉姆系数、霍奇系数瑜伽... 9. “拓扑代数”： $\infty$ -叠、导子；拓扑斯的上同调形式体系，作为新同伦代数的灵感 10. 温和拓扑 11. 代数几何阿贝尔瑜伽，伽罗瓦-泰希米勒理论 12. 正多面体与各类正则构型的“概形”或“算术”观点

除第一个主题的重要部分出现在我的博士论文（1953年）并在1950-1955年间的泛函分析时期得到发展外，其余十一个主题均在我1955年后的几何学家时期逐渐形成。



要”看见”我的数学作品，就是要”感受”其中至少某些思想，以及它们所引入的这些宏大主题——它们构成了作品的经纬与灵魂。

由于事物本质，某些思想比其他思想”更伟大”（相应地，其他思想就”更渺小”！）。换言之，在这些新主题中，有些比其他主题更广阔，有些则更深地触及数学事物的奥秘核心<sup>21</sup>。

其中有三个主题（在我看来并非最不重要的）在我退出数学舞台后才出现，至今仍处于萌芽状态；”正式”而言它们甚至不存在，因为没有正式出版物为其提供出生证明<sup>22</sup>。

在我退出前出现的九个主题中，最后三个主题当时正处于蓬勃发展期，如今却仍处于幼年期，因为在我离开后缺乏关爱之手来照料这些”孤儿”，它们被遗弃在一个充满敌意的世界中<sup>23</sup>。

至于其他六个主题，它们在我离开前的二十年里已臻成熟，可以说（除一两个保留意见外<sup>24</sup>）它们在当时已成为共同遗产：尤其在几何学家群体中，如今”每个人”都在不知不觉中（如同莫里哀笔下的茹尔丹先生写散文般）日复一日地运用它们。它们已成为”做几何”时的空气，或在做算术、代数或多少带点”几何”的分析时不可或缺。

<sup>21</sup>在这些主题中，我认为最广阔的是拓扑斯，它提供了代数几何、拓扑与算术的综合思想。就目前发展程度而言，最广阔的是概形主题。（参见第 20 页脚注（\*））它为其他八个主题（即除第 1、5、10 主题外的所有主题）提供了”卓越”的框架，同时为代数几何及其语言的彻底革新提供了核心概念。

相反，十二个主题中的第一个和最后一个在我看来比其他主题规模更小。然而，就最后一个主题而言，它为正多面体与正则构型这一古老主题引入了新视角，我怀疑即使一位数学家倾其一生也难以穷尽。至于第一个主题——拓扑张量积，它更多扮演了一个即用型新工具的角色，而非后续发展的灵感源泉。尽管如此，直到近年我仍不时收到零散的研究成果，这些成果在二三十年后解决了我当年遗留的某些问题。

在我看来，这十二个主题中最深刻的是动机主题，以及与之紧密相关的代数几何阿贝尔瑜伽与伽罗瓦-泰希米勒瑜伽。

从工具完善程度与使用广度来看，过去二十年间在多个”前沿领域”研究中广泛使用的”概形”与”平展上同调及  $\ell$ -进上同调”部分最为显著。对于一位消息灵通的数学家而言，我认为现在已毋庸置疑，概形工具及其衍生的  $\ell$ -进上同调工具属于本世纪几项重大成就之列，它们滋养并革新了近代人的数学科学。

<sup>22</sup>唯一”半官方”提及这三个主题的文本是 1984 年 1 月为申请法国国家科学研究中心（CNRS）借调而撰写的《纲领草案》。该文本（在引言 3”指南针与行囊”中也有提及）原则上将收录于《反思》第四卷。

<sup>23</sup>在我离开后不久，这三个孤儿就被无声无息地埋葬了，其中两个在 1981 年和次年（鉴于操作的成功）被大张旗鼓地重新发掘，却未提及原作者的贡献。

<sup>24</sup>”几乎”主要涉及格罗滕迪克对偶瑜伽（导出范畴与六运算）和拓扑斯瑜伽。这将在《收获与播种》第二部分和第四部分（《葬礼（1）》和《（3）》）中详细讨论。



我作品中的这十二个宏大主题绝非彼此孤立。在我看来，它们构成了精神与意图的统一体，如同贯穿我所有”书面”与”非书面”作品的共同而持久的基调。在写下这些文字时，我仿佛又听到了同样的音符——如同一种召唤！——穿越那些无偿、执着而孤独的工作岁月，那时我甚至不曾关心世上是否还有其他数学家存在，只因我被那召唤我的事物深深吸引...

这种统一性不仅源于同一工匠在其作品上留下的印记。这些主题通过无数微妙而明显的联系相互关联，如同在一首宏大对位法中展开并交织的各个清晰可辨的主题——它们被一种和声所集合、推动，赋予每个主题以意义、运动与圆满，而这一切都与其他主题息息相关。每个局部主题似乎都诞生于这种更广阔的和声，并随着时间流逝从中重生，远胜于和声作为”总和”或”结果”由预先存在的构成主题所呈现。说实话，我无法摆脱这样一种感觉（或许有些荒谬...）：在某种意义上，正是这种尚未显现但肯定已然”存在”的和声——它潜藏在尚未诞生之物的幽暗怀抱中——依次唤起了这些主题，而这些主题只有通过它才能获得完整意义；也正是它在那些炽热孤独的青春岁月里，以低沉而迫切的声音召唤着我...

无论如何，我作品中的这十二个主旋律都仿佛被一种隐秘的预定所引导，共同谱写出一首交响曲——或者换一个比喻，它们体现了不同的”观点”，共同指向同一个宏大的愿景。

这一愿景直到 1957、58 年左右才开始从迷雾中显现，呈现出可辨识的轮廓——那是孕育的岁月<sup>25</sup>。奇怪的是，这一愿景对我来说如此接近，如此”显而易见”，以至于直到一年前<sup>26</sup>，我都没有想过要给它一个名字。（尽管我的一大爱好

<sup>25</sup>1957 年是我提出”黎曼-罗赫”主题（格罗滕迪克版本）的一年——一夜之间，我成为了”大明星”。这也是我母亲去世的年份，标志着我的生命中一个重要转折点。这是我一生中创造力最旺盛的年份之一，不仅在数学层面。那时，我全部的精力已投入数学工作整整十二年。那一年，我开始感到自己已经”走遍”了数学工作的方方面面，也许是时候投身其他事物了。那显然是一种内在更新的需求，在我生命中首次浮现。当时我考虑成为一名作家，并停止了所有数学活动数月之久。最终，我决定至少要把手头已有的数学工作付诸文字，估计需要几个月，最多一年...

或许时机尚未成熟，无法实现这一重大跨越。无论如何，一旦重新开始数学工作，它就再次占据了我。在接下来的十二年里，它再也没有放开我！

这次间歇后的第二年（1958 年）或许是我数学生涯中最富成果的一年。这一年见证了新几何两个核心主题的诞生：概形理论的强势启动（同年夏天我在爱丁堡国际数学家大会上的报告主题），以及”位点”概念的出现——这是关键概念拓扑斯的临时技术版本。回顾近三十年后的今天，我可以说是这一年真正诞生了新几何的愿景，伴随着这一几何的两大工具：概形（代表了旧有”代数簇”概念的蜕变）与拓扑斯（代表了更深层次的”空间”概念的蜕变）。

<sup>26</sup>我第一次想到为这一愿景命名是在 1984 年 12 月 4 日的思考中，在”阴之仆（2）——或慷慨”一节的主注（n°1361）（《收获与播种》第三卷，第 637 页）。

就是不断为发现的事物命名，作为理解它们的第一步...) 确实，我无法指出某个特定时刻，将其视为这一愿景出现的时刻，或在回顾时能将其认定为这样的时刻。一个新的愿景是如此广阔，以至于它的出现不可能定位于某个特定时刻，而必须经过漫长岁月（如果不是几代人的话）逐渐渗透并占据那些观察与沉思者的身心；仿佛新的眼睛必须在熟悉的双眼背后艰难地形成，逐渐取代它们。这一愿景也过于广阔，以至于无法像抓住路旁突然出现的第一个概念那样”抓住”它。因此，最终不必惊讶，为如此广阔、如此接近又如此弥散的事物命名的想法，只有在回顾时，当它完全成熟后才出现。

说实话，直到两年前，我与数学的关系还仅限于（除了教学任务外）实践数学——追随一种不断推动我前进的冲动，进入那不断吸引我的”未知”。我从未想过要停下脚步，哪怕片刻，回头看看或许已经走过的道路，甚至定位一段已完成的作品。（无论是将其定位在我的生命中，作为一件与我保持着深刻而长期被忽视的联系的事物；还是将其定位在”数学”这一集体冒险中。）

更奇怪的是，要让我最终”停下”脚步，重新认识这件半被遗忘的作品，或仅仅想到为作为其灵魂的愿景命名，我必须突然面对一场规模空前的葬礼的现实：通过沉默与嘲弄，埋葬了愿景，也埋葬了孕育它的工匠...

## 2.9 形式与结构——或事物之道

未曾预料，这篇“前言”逐渐演变成对我作品的一种正式介绍，主要面向非数学专业的读者。既然已经深入其中无法回头，我只好继续完成这些“介绍”！我试图尽力至少对前面几页中提到的那些令人惊叹的“伟大思想”（或“主题”）的实质，以及这些主导思想汇聚而成的著名“愿景”的本质，说上几句。由于无法使用任何技术性语言，我恐怕只能传递一个极其模糊的印象（如果真有什么能“传递”的话……<sup>27</sup>）。

传统上，我们将宇宙中事物的“品质”或“方面”分为三类，作为数学思考的对象：它们是数<sup>28</sup>、大小和形状。我们也可以称之为事物的“算术”方面、“度

<sup>27</sup>这幅图像必须保持“模糊”，但这并不妨碍它忠实，并且确实反映了所观察对象（即我的作品）的本质。相反，即使图像清晰，也可能被扭曲，并且只包含次要内容，完全遗漏了本质。因此，如果你能理解我对作品的看法（那么我心中的某些印象必定会“传递”给你），你可能会自豪地认为自己比我的任何学者同事都更好地把握了我作品的核心！

<sup>28</sup>这里指的是所谓的“自然数”0, 1, 2, 3等，或者（严格来说）那些通过基本运算用这些数表示的

量”（或“分析”）方面和“几何”方面。在数学研究的大多数情况下，这三个方面同时存在并紧密互动。然而，通常其中一个方面会明显占主导地位。在我看来，对于大多数数学家来说，他们的基本气质是“算术家”、“分析家”还是“几何学家”是相当清楚的（对于那些了解他们或熟悉他们作品的人而言）——即使他们多才多艺，涉猎了所有可能的领域和范围。

我最初独自对测度论和积分论的思考，无疑属于“大小”或“分析”的范畴。同样，我在数学中引入的第一个新主题（在我看来，其规模不及其他十一个主题）也是如此。我通过“分析”的途径进入数学，似乎并非由于我的特殊气质，而是由于一种可以称为“偶然情况”的原因：在我中学和大学所接受的教育中，对于我追求普遍性和严谨性的思维来说，最大的空白恰恰在于事物的“度量”或“分析”方面。

1955 年标志着我数学工作的一个关键转折点：从“分析”转向“几何”。我至今仍记得那种震撼的感觉（尽管完全是主观的），仿佛我离开了贫瘠而崎岖的草原，突然置身于一个“应许之地”，那里繁茂的财富无限繁衍，随处可摘、可探……而这种超乎一切度量的、压倒性的丰富感<sup>29</sup>，在随后的岁月里不断得到证实和深化，直至今日。

这就是说，如果数学中有一件事（或许一直以来）比其他任何事物都更让我着迷，那既不是“数”，也不是“量”，而是形式。而在形式向我们展现的无数面貌中，最令我着迷且持续吸引我的，是隐藏在数学事物中的结构。

事物的结构绝不是我们可以“发明”的东西。我们只能耐心地揭示它，谦逊地认识它，“发现”它。如果在这项工作中存在创造性，如果我们有时像铁匠或不知疲倦的建筑师那样工作，那绝不是为了“塑造”或“建造”“结构”。这些结构根本不需要我们等待它们存在，它们早已存在，并且正是它们本来的样子！但为了尽可能忠实地表达我们正在发现和探索的事物，以及那些不愿轻易展现的结构，我们摸索着，或许用一种尚不成熟的语言，试图去界定它们。因此，我们不断“发明”能够越来越精细地表达数学事物内在结构的语言，并借助这种语

---

数（如分数）。这些数不像“实数”那样适合测量可能连续变化的量，例如直线上、平面内或空间中两点之间的距离。

<sup>29</sup>我使用了“压倒性的，超乎一切度量”这一词组，试图尽可能传达德语“überwältigend”及其英语对应词“overwhelming”的含义。在前一句中，“震撼的感觉”这一（不恰当的）表达也应理解为带有这种细微差别：当我们面对非凡的辉煌、伟大或美丽时，内心的感受和情感突然淹没我们，以至于任何表达我们感受的企图似乎都预先被摧毁了。

言，逐步且从头开始“构建”那些旨在解释所把握和所见内容的“理论”。这里存在着一种持续不断的、不间断的往复运动，在事物的把握与通过不断精炼和再创造的语言表达所把握内容之间，这种运动在工作的过程中，在即时需求的持续压力下进行。

正如读者可能已经猜到的那样，这些“理论”，“凭空构建”的，也不过是之前提到的那些“美丽房屋”：我们从先辈那里继承下来的，以及我们在事物的召唤和倾听中亲手建造的。如果说我之前谈到了建造者或铁匠的“创造力”（或想象力），那么我必须补充的是，其灵魂和隐秘力量绝非来自那些傲慢地说：“我要这个，不要那个！”并乐于随心所欲做决定的人；就像一个糟糕的建筑师，在未观察和感受场地、未探明其可能性和要求之前，就已经在脑海中准备好了设计图。研究者创造力和想象力的质量，取决于其倾听事物声音的专注程度。因为宇宙中的事物从不厌倦自我表达和揭示，只要有人愿意倾听。而最美的房屋，“其中显现出工匠之爱的，并非比其它房屋更大或更高。美丽的房屋是那些忠实反映事物隐藏结构和美感的房屋。

## 2.10 新几何学——或数与量的联姻

然而，我又一次偏离了主题——我本打算谈论那些汇聚于同一母愿景中的主题，就像众多河流最终回归它们所源自的海洋……

这种广阔的统合性愿景可以被描述为一种新几何学。据说，这是克朗内克（Kronecker）在上个世纪所梦想的<sup>30</sup>。但现实（一个大胆的梦想有时会预示或隐约揭示它，并鼓励我们去发现……）每一次都在丰富性和共鸣上超越了最大胆或最深刻的梦想。当然，对于这种新几何学的许多方面（如果不是全部），在其出现的前一天，没有人会想到——包括工匠本人。

可以说，“数”能够捕捉“离散”或“不连续”聚合体的结构：这些系统通常

<sup>30</sup>我仅通过传闻了解到这个“克朗内克的梦想”，当时有人（可能是约翰·泰特（John Tate））告诉我，我正在实现这个梦想。在我从前辈那里接受的教育中，历史参考极为罕见，我的知识来源并非阅读古代或当代作者的著作，而主要是通过与其他数学家的口头或书信交流，尤其是我的前辈们。1958年，概形理论的突然而迅猛的启动，主要的外部灵感或许是唯一的灵感，来自塞尔（Serre）那篇以FAC（“代数凝聚层”）为名的著名文章，该文章发表于几年前。除此之外，我在理论后续发展中的主要灵感源于其自身，并随着时间推移不断更新，仅仅是为了满足内在的简洁性和一致性要求，努力在这一新背景下解释代数几何中“众所周知”的内容（这些内容在我手中逐渐转化），以及这些“已知”内容让我隐约感受到的东西。



由孤立的“元素”或“对象”组成，彼此之间没有某种“连续过渡”的原则。而“量”则是一种能够“连续变化”的特质；因此，它能够捕捉连续的结构和现象：运动、空间、各种“流形”、力场等。因此，算术（大致上）表现为离散结构的科学，而分析则表现为连续结构的科学。

至于几何学，可以说，自从它作为一门现代意义上的科学存在两千多年以来，它一直“横跨”这两种结构类型：“离散”和“连续”<sup>31</sup>。长期以来，这两种几何学之间并没有真正的“分离”，它们并非属于不同种类，一种是离散的，另一种是连续的。相反，它们是对同一几何图形的两种不同研究视角：一种强调“离散”性质（尤其是数值和组合性质），另一种则强调“连续”性质（例如在周围空间中的位置，或通过点之间距离测量的“量”等）。

直到上个世纪末，随着所谓的“抽象（代数）几何”的出现和发展，一种分离才开始显现。大致上，这种几何学为每个素数  $p$  引入了一种“特征  $p$ ”的（代数）几何，它模仿了从前几个世纪继承下来的（连续）几何模型，但其背景却显得不可还原地“离散”。这些新的几何对象自本世纪初以来变得越来越重要，尤其是因为它们与算术——离散结构的科学——之间的紧密联系。这似乎是安德烈·韦伊（André Weil）作品中的主导思想之一<sup>32</sup>，甚至可能是主要的思想动力（在其著作中或多或少保持隐晦，正如应有的那样），即“代数几何”，尤其是与不同素数相关的“离散”几何，应该为算术的广泛革新提供关键。正是在这种精神下，他在1949年提出了著名的“韦伊猜想”。这些猜想绝对令人惊叹，它们为这些新的“离散”性质的“流形”（或“空间”）预示了某些类型的构造和论证的可能性<sup>33</sup>，而这些构造和论证在此之前似乎只能在分析学家认为值得称为“空间”的框架内进行——即所谓的“拓扑”空间（其中连续变化的概念成立）。

可以说，新几何学首先是这两个世界之间的综合：一个是“算术”世界，其

<sup>31</sup>事实上，传统上几何学家的注意力集中在“连续”方面，而“离散”性质的特征，尤其是数值和组合性质，则被忽视或草率处理。大约十年前，我惊奇地发现了二十面体的组合理论的丰富性，而这一主题在克莱因（Klein）关于二十面体的经典著作中甚至未被提及（甚至可能未被注意到）。我认为，几何学家对几何中自发引入的离散结构的忽视（长达两千年）的另一个显著标志是，群（尤其是对称群）的概念直到上个世纪才出现，而且它最初（由埃瓦里斯特·伽罗瓦（Évariste Galois））是在一个当时不被视为“几何”领域的背景下引入的。事实上，即使在今天，仍有许多代数学家尚未理解，伽罗瓦理论本质上是一种“几何”视角，它革新了我们对所谓“算术”现象的理解……

<sup>32</sup>安德烈·韦伊，法国数学家，移民美国，是“布尔巴基学派”的“创始成员”之一，在《收获与播种》的第一部分中将多次提及该学派（以及韦伊本人）。

<sup>33</sup>（针对数学读者。）这里指的是与微分流形或复流形的上同调理论相关的“构造和论证”，尤其是涉及莱夫谢茨（Lefschetz）不动点公式和霍奇（Hodge）理论的那些。



中生活着没有连续性原则的（所谓的）“空间”；另一个是连续量的世界，其中生活着分析学家认可的“空间”，这些空间因其可访问性而被视为值得存在于数学领域。在新愿景中，这两个曾经分离的世界合二为一。

这种“算术几何”（我提议这样称呼这种新几何学）愿景的雏形可以在韦伊猜想中找到。在我某些主要主题的发展中<sup>34</sup>，这些猜想一直是我在 1958 年至 1969 年间的主要灵感来源。事实上，在我之前，奥斯卡·扎里斯基（Oscar Zariski）和让-皮埃尔·塞尔（Jean-Pierre Serre）已经为“抽象”代数几何中的无规则空间开发了一些“拓扑”方法，这些方法受到了此前用于“正统”空间的方法的启发<sup>35</sup>。

当然，他们的思想在我构建算术几何的初期发挥了重要作用；然而，它们更多是作为起点和工具（我需要根据更广泛的需求对其进行彻底改造），而非一种持续滋养我梦想和计划的灵感来源。无论如何，从一开始就很清楚，即使经过改造，这些工具也远远不足以迈出朝向那些惊人猜想的第一步。

## 2.11 神奇的扇子——或纯真

在新型几何学的启动与发展中，两个核心思想力量分别是概形（schéma）与拓扑斯（topos）的概念。它们几乎同时出现，并紧密共生<sup>36</sup>，自诞生之日起，它们就如同同一根动力神经，推动着新几何学的惊人发展。在总结我的工作之际，至少有必要对这两个概念稍作阐述。

<sup>34</sup>这里指的是四个“中间”主题（编号 5 至 8），即平展上同调和  $\ell$ -进上同调的拓扑、动机理论，以及（在较小程度上）晶体理论。我在 1958 年至 1966 年间逐步提炼出这些主题。

<sup>35</sup>（针对数学读者。）在我看来，扎里斯基在这方面的主要贡献是引入了“扎里斯基拓扑”（后来成为塞尔在 FAC 中的重要工具），以及他的“连通性原理”和他所谓的“全纯函数理论”——这些在他手中发展为形式概形理论和形式与代数之间的“比较定理”（塞尔的另一篇基础文章 GAGA 是第二个灵感来源）。至于我在文中提到的塞尔的贡献，当然主要是他在抽象代数几何中引入了层观点（由让·勒雷（Jean Leray）在十几年前在一个完全不同的背景下引入），这体现在他另一篇已提及的基础文章 FAC（“代数凝聚层”）中。

根据这些“回顾”，如果要列举新几何学愿景的直接“祖先”，我立刻想到的名字是奥斯卡·扎里斯基、安德烈·韦伊、让·勒雷和让-皮埃尔·塞尔。其中，塞尔扮演了一个特殊的角色，因为正是通过他，我不仅了解了他自己的思想，还了解了扎里斯基、韦伊和勒雷的思想，这些思想在新几何学的萌芽和发展中发挥了重要作用。

<sup>36</sup>关于这一始于 1958 年的启动，参见 b. de p. 第 23 页的注释。格罗滕迪克拓扑（Grothendieck topology）或“站点”的概念，作为拓扑斯的初步版本，紧随概形概念之后出现。正是这一概念提供了“局部化”或“下降”的新语言，在主题与概形工具的发展过程中每一步都得到应用。更为内在且几何化的拓扑斯概念，在随后的几年里起初隐而不显，直到 1963 年随着 étale 上同调的发展才逐渐显现，并逐渐被我视为最基础的概念。

概形的概念是最自然、最“显而易见”的，旨在将之前使用的无限系列“(代数)簇”概念统一为一个单一概念（每个素数对应一个这样的概念<sup>37</sup>...）。此外，同一个“概形”（或新式“簇”）为每个素数  $p$  生成一个确定特征的“(代数)簇”。这些不同特征的簇的集合，可以被视作一种“(无限)簇的扇子”（每种特征对应一个）。概形就是这把神奇的扇子，它将所有可能特征的“化身”或“体现”作为不同的“分支”相互连接。由此，它提供了一个有效的“过渡原则”，将之前看似孤立、互不相连的几何学中的“簇”联系起来。如今，它们被纳入一个共同的“几何学”并通过它相互关联。我们可以称之为概形几何学，这是后来几年中它将绽放为“算术几何学”的初步形态。

概形这一概念本身简单得近乎幼稚——如此简单，如此谦逊，以至于在我之前无人想到要俯身至此。甚至可以说，它“傻”到在多年后，尽管显而易见，对我许多博学的同事而言，它仍显得“不够严肃”！我不得不独自埋头苦干数月，才说服自己这确实“行得通”——那个我固执地坚持测试的、看似愚蠢的新语言，确实足以在新的光芒与细腻中，在一个共同的框架下，捕捉到与之前“ $p$  特征几何学”相关的一些最初几何直觉。这是一种被所有“知情者”预先判定为愚蠢且无望的练习，而我，或许是所有同事和朋友中唯一一个，不仅想到了要尝试，甚至（受某种隐秘的驱动力驱使...）不顾一切地将其完成！

与其让我被周围那些关于何为“严肃”、何为不严肃的共识所分心，我选择像过去一样，简单地信任事物那谦卑的声音，以及我内心懂得倾听的那一部分。回报是立竿见影的，且超乎所有预期。在这短短几个月内，甚至无需刻意“努力”，我便触及了一些强大而意想不到的工具。这些工具不仅让我以更深刻的视角重新发现（仿佛游戏般）那些曾被认为艰深的旧有成果，并超越了它们，还最终让我能够着手解决“特征  $p$  几何”中的问题，这些问题在此之前似乎用尽所有已知方法都遥不可及<sup>38</sup>。

在我们对宇宙万物（无论是数学还是其他领域）的认知中，那股革新之力无非是我们内心的纯真。那是我们出生时共同分享的原始纯真，它深藏于每个人心中，常遭我们轻视，也是我们最隐秘恐惧的对象。唯有这纯真，能将谦逊与勇

<sup>37</sup> 此系列还应包括  $p = \infty$  的情况，对应于“零特征”的代数簇。

<sup>38</sup> 关于这一理论“强力启动”的记述，见于我在 1958 年爱丁堡国际数学家大会上的报告。该报告文本在我看来是介绍概形观点的最佳入门之一，或许能激励几何学读者勉力熟悉那部宏大的（后续）著作《代数几何基础》，它详尽地（且不遗漏任何技术细节）阐述了代数几何的新基础与新技巧。

敢融为一体，引领我们深入事物的核心，也让事物得以深入我们，与我们融为一体。

这种力量绝非非凡“天赋”的特权——那种（可以说）超乎寻常的脑力，用以熟练而自如地吸收和驾驭大量已知的事实、思想和技术。这样的天赋固然珍贵，对于像我这样出生时并未“超乎寻常”地得到如此恩赐的人来说，无疑令人羡慕。

然而，并非这些天赋，甚至不是最炽热的野心，辅以坚定不移的意志，能够突破那些环绕我们宇宙的“无形而严苛的界限”。唯有纯真，在不知不觉中，在我们独处倾听万物、全神贯注于孩童般游戏的瞬间，才能跨越这些界限……

## 2.12 拓扑学——或迷雾的测绘

我们刚刚看到，“概形”这一创新思想使得与不同素数（或不同“特征”）相关联的各种“几何”得以相互联系。然而，这些几何本质上仍然是“离散”或“不连续”的，与过去几个世纪（可追溯至欧几里得）传承下来的传统几何形成对比。扎里斯基（Zariski）和塞尔（Serre）引入的新思想在某种程度上为这些几何恢复了“连续性”维度，这一维度随即被刚刚出现的“概形几何”所继承，以实现它们的统一。但就“非凡猜想”（韦伊猜想）而言，这还远远不够。从这一角度来看，这些“扎里斯基拓扑”是如此粗糙，以至于几乎仍停留在“离散聚合”阶段。显然，缺少的是某种新原则，能够将这些几何对象（或“簇”，或“概形”）与通常的“空间”（拓扑空间）或“优质”空间联系起来；也就是说，那些“点”明显彼此分离的空间，而在扎里斯基引入的无法无天的空间中，点往往倾向于相互粘附…

正是这样一个“新原则”的出现，而非其他，才能实现这些“数与量的联姻”或“离散几何”与“连续几何”的结合，韦伊猜想中首次预示了这一点。

“空间”的概念无疑是数学中最古老的概念之一。它在我们对世界的“几何”理解中如此基础，以至于在两千多年里一直或多或少地保持沉默。直到上个世纪，这一概念才逐渐摆脱了直接感知（我们周围唯一且相同的“空间”）及其传统理论化（“欧几里得”）的专制束缚，获得了自身的自主性与动力。如今，它已成为数学中最普遍、最常用的概念之一，无疑为所有数学家所熟悉。此外，它还是一个多面概念，根据所纳入的结构类型呈现出千百种面貌，从最丰富的结构（如古老的“欧几里得”结构，或“仿射”与“射影”结构，或同名“簇”的“代数”结构，

它们推广并柔化了这些结构)到最简化的结构:那些所有“定量”信息似乎都已消失,仅保留“邻近”或“极限”概念的精髓<sup>39</sup>,以及形式直觉(称为“拓扑”)的最难以捉摸的版本。在这些概念中,最简化的——在过去半个世纪里一直充当涵盖所有其他概念的广阔概念母体——是拓扑空间的概念。对这些空间的研究构成了几何学中最迷人、最活跃的分支之一:拓扑学。

尽管这种由“空间”(称为“拓扑”空间)体现的“纯粹质量”结构乍看之下似乎难以捉摸,缺乏任何定量数据(如两点之间的距离)让我们能够依附于某种熟悉的“大小”直觉,但在上个世纪,我们仍然成功地将这些空间精细地捕捉在精心“量身定制”的语言的紧密而灵活的网中。更有甚者,我们发明并制造了各种“米尺”或“测杆”,尽管困难重重,仍用于为这些似乎逃避任何测量尝试的触手可及的空间(如同难以捉摸的迷雾)附加某种“度量”(称为“拓扑不变量”)。确实,这些不变量中的大多数,尤其是最本质的,其性质比简单的“数字”或“量”更为微妙——它们本身就是或多或少精巧的数学结构,通过或多或少复杂的构造附加在所考虑的空间上。其中最古老且最关键的一个不变量,由意大利数学家贝蒂(Betti)在上个世纪引入,由与空间相关联的不同“群”(或“空间”)组成,称为“上同调”群<sup>40</sup>。正是这些不变量(主要在“字里行间”)介入韦伊猜想,赋予其深刻的存在理由,并(至少对我而言,在塞尔的解释下“浸入其中”)赋予其全部意义。但将这些不变量与这些猜想中涉及的“抽象”代数簇相关联的可能性,以满足这一事业所需的非常精确的要求——这只是一个希望。我怀疑除了塞尔和我

<sup>39</sup>谈到“极限”概念,我主要指的是“极限过程”,而非(非数学家更熟悉的)“边界”概念。

<sup>40</sup>实际上,贝蒂引入的不变量是同调不变量。上同调是其或多或少等价的“对偶”版本,引入时间要晚得多。这一方面在初始的“同调”方面获得了优势,尤其是(无疑)在让·勒雷(Jean Leray)引入层观点之后,下文将讨论这一点。从技术角度来看,可以说我的几何学家工作的很大一部分在于揭示并或多或少地发展所缺少的上同调理论,适用于各种空间和簇,尤其是“代数簇”和概形。在此过程中,我还重新诠释了传统的同调不变量,将其转化为上同调术语,从而使其呈现出全新的面貌。

拓扑学家还引入了许多其他“拓扑不变量”,以捕捉拓扑空间的这种或那种性质。除了空间的“维度”和(上)同调不变量外,第一批其他不变量是“同伦群”。我在1957年引入了另一个不变量,即(称为“格罗滕迪克”群的) $K(X)$ 群,它立即获得了巨大成功,其重要性(无论在拓扑学还是算术中)不断得到证实。

在我的“温和拓扑”计划中,预见到了大批比目前已知和使用的不变量更为微妙的新不变量,但我认为它们是基础的。(该计划的简要概述见《纲领草案》,将收录于《反思》第四卷。)该计划基于“温和理论”或“温和空间”的概念,它有点像拓扑斯概念,是“空间”概念的(第二次)“蜕变”。在我看来,它比后者更为明显且不那么深刻。我预计它对“纯粹”拓扑学的直接影响将更为显著,并将通过深刻改变几何拓扑学家工作的概念背景,彻底改变他们的“职业”。(正如在代数几何中引入概形观点一样。)我已将我的《草案》寄给了几位老朋友和著名拓扑学家,但似乎没有引起任何人的兴趣。



之外，没有人真正相信这一点（甚至，尤其是安德烈·韦伊本人！<sup>41</sup>）...

不久之前，我们对这些上同调不变量的理解因让·勒雷（Jean Leray）的工作（在战争期间，四十年代上半叶，他在德国被囚禁期间继续进行）而得到了极大的丰富和更新。关键的创新思想是空间上的（阿贝尔）层概念，勒雷将其与一系列相应的“上同调群”（称为“以该层为系数”）相关联。这就像我们迄今为止用于“测绘”空间的标准“上同调米尺”突然倍增为数量难以想象的新“米尺”，具有所有可想象的大小、形状和物质，每一种都紧密适应于所考虑的空间，每一种都为我们提供了关于该空间的完美精确信息，且只有它才能提供这些信息。这是我们对各种空间方法的深刻转变中的核心思想，无疑是本世纪出现的最关键思想之一。主要得益于让-皮埃尔·塞尔（Jean-Pierre Serre）的后续工作，勒雷的思想在出现后的十年内，首先在拓扑空间理论（尤其是与其密切相关的“同伦”不变量）中取得了令人印象深刻的重新启动，并在所谓的“抽象”代数几何中取得了同样重要的重新启动（塞尔的基础文章“FAC”于1955年发表）。我从1955年开始的几何工作与塞尔的这些工作一脉相承，因此也与勒雷的创新思想紧密相连。

## 2.13 拓扑斯——双人床

Leray 引入的层观点和语言使我们以全新的视角审视各种“空间”和“流形”。然而，它们并未触及空间概念本身，只是让我们以新的眼光更细致地理解这些传统的“空间”，这些空间对所有人来说早已熟悉。但事实证明，这种空间概念不足以解释表达“抽象”代数流形（如适用于 Weil 猜想的那些）乃至一般“概形”（推广了旧有的流形）的“形状”的最基本“拓扑不变量”。对于期待中的“结合”，“在数量和规模上”，这就像一张显然狭窄的床，其中只有未来的伴侣之一（即新娘）勉强可以找到栖身之所，但两人同时却绝无可能！为了兑现由吉

<sup>41</sup> 矛盾的是，韦伊对上同调形式体系有一种顽固的、似乎是本能的“抵触”——而正是他的著名猜想在很大程度上激发了从1955年开始的代数几何中伟大上同调理论的发展（塞尔以其基础文章FAC打响了第一枪，前文脚注中已提及）。

在我看来，这种“抵触”是韦伊对所有“大杂烩”、对任何类似于形式体系（当它无法用几页纸概括时）或任何稍微复杂的“构造”的普遍厌恶的一部分。他当然不是“建造者”，显然是在不情愿的情况下，在三十年代被迫发展了“抽象”代数几何的第一个基础，这些基础（鉴于这种倾向）对用户来说成为了真正的“普罗克拉斯提斯之床”。

我不知道他是否因为我走得更远，并致力于建造广阔的殿堂，使得克罗内克（Kronecker）和他的梦想得以体现在精致而有效的语言和工具中，而对我有所不满。无论如何，他从未对我所从事的工作或已完成的工作发表过任何评论。我也没有收到他对《收获与播种》的任何回应，我在三个多月前寄给了他，并附上了我亲笔的热烈题词。

祥仙女承诺的结合，尚待发现的“新原则”，正是未来夫妇所缺少的那张宽敞的“床”，而此前竟无人察觉……

这张“双人床”随着拓扑斯的概念出现（仿佛魔杖一挥……）。这一概念在一个共同的拓扑直觉中，既包含了体现连续规模世界的传统（拓扑）空间，也包含了那些执迷不悟的抽象代数几何学家所谓的“空间”（或“流形”），以及无数其他类型的结构，这些结构此前似乎无可救药地固着于“离散”或“不连续”聚集的“算术世界”。

正是层的观点，作为无声而可靠的向导，有效的钥匙（绝非秘密），引领我毫不犹豫、直截了当地走向拥有宽阔婚床的新房。一张如此宽阔的床（宛如一条宽阔而平静的深邃河流……），以至于

“tous les chevaux du roi  
y pourraient boire ensemble...”

-正如一首老歌所唱，想必你也曾唱过，或至少听过。而那位最早唱出这首歌的人，比我的任何一位昔日博学的学生和朋友，都更深刻地感受到了 *topos* 隐秘之美与宁静之力……

无论是初步且临时的探索（通过“*site*”这一非常便利但非本质的概念），还是对 *topos* 的探索，关键始终如一。现在，我想尝试描述 *topos* 这一概念。

考虑由给定（拓扑）空间上所有层构成的集合，或者，如果你愿意，可以想象成由所有用于丈量的“尺子”组成的庞大武库<sup>42</sup>。我们将这个“集合”或“武库”视为配备了其最明显的结构，这种结构可以说是一目了然的；即所谓的“范畴”结构。（非数学专业的读者不必因不了解这一术语的技术含义而感到困惑，后续内容无需此知识。）正是这种被称为“层范畴”（在所考虑的空间上）的“超级丈量结构”，从今以后将被视为“体现”空间最本质的东西。这在“数学常识”中是合理的，因为事实证明，我们可以完全通过与之关联的“层范畴”（或丈量武库）来“重建”一个拓扑空间<sup>43</sup>。（验证这一点是一个简单的练习——一旦问题被提出，当然……）这足以让我们确信，如果出于某种原因我们愿意，我们现

<sup>42</sup>（致数学家）实际上，这里指的是集合层，而非由 Leray 引入作为构成“上同调群”的最一般系数的阿贝尔层。此外，我相信我是第一个系统性地使用集合层的人（始于 1955 年，在我于堪萨斯大学发表的论文《A general theory of fibre spaces with structure sheaf》中）。

<sup>43</sup>（致数学家）严格来说，这仅适用于所谓的“sober”空间。然而，这类空间涵盖了几乎所有常见的空间，特别是分析学家钟爱的所有“分离”空间。

在可以“忘记”初始空间，仅保留并使用关联的“范畴”（或“武库”），它将被视为表达“拓扑结构”（或“空间结构”）最恰当的体现。

正如数学中常见的那样，我们在此（得益于“层”或“上同调尺”这一关键思想）成功地将某一概念（此处为“空间”）用另一概念（“范畴”）来表达。每一次，将一种概念（表达某种类型的情境）翻译成另一种概念（对应另一种类型的情境）的发现，都通过特定直觉的意外汇合，丰富了我们对于这两种概念的理解。因此，一个“拓扑”性质的情境（由给定空间体现）在此被翻译为一个“代数”性质的情境（由“范畴”体现）；或者说，空间所体现的“连续”被“翻译”或“表达”为具有“代数”性质的范畴结构（而此前，这种结构主要被视为“离散”或“不连续”性质的）。

但这里还有更多内容。第一个概念，即空间的概念，对我们来说似乎是一种“最大”的概念——它已经如此普遍，以至于我们难以想象如何再找到一种仍然“合理”的扩展。然而，在镜子的另一侧<sup>44</sup>，从拓扑空间出发所遇到的这些“范畴”（或“武器库”）具有非常特殊的性质。事实上，它们拥有一系列高度类型化的属性<sup>45</sup>，这使得它们类似于最简单可想象的范畴的“拼贴”——即从一个仅包含一个点的空间出发所得到的范畴。也就是说，一种“新风格的空间”（或拓扑斯），它推广了传统的拓扑空间，将被简单地描述为一个“范畴”，它不一定来自普通空间，但拥有所有这些良好属性（当然，这些属性已被明确指定）的“层范畴”。

\*   \*  
\*  
\*

这就是新思想。它的出现可以被视为这一观察的结果，实际上几乎是幼稚的，即在拓扑空间中真正重要的根本不是它的“点”或点的子集<sup>46</sup>，以及它们之间的邻近关系等，而是该空间上的层及其形成的范畴。总之，我只是将 Leray 的初始思想推向其最终结论——并在此过程中迈出了关键一步。

<sup>44</sup>这里提到的“镜子”，如同《爱丽丝梦游仙境》中的那样，是指将放置在它前面的空间的“图像”呈现为与之相关联的“范畴”，被视为空间的一种“镜像”，即“镜子的另一侧”...

<sup>45</sup>（针对数学家）这里主要涉及的是我在范畴论中引入的“精确性属性”（同时引入了现代范畴论中“归纳极限”和“投射极限”的一般概念）。参见《关于同调代数的几点》，东北数学杂志，1957年（第119-221页）。

<sup>46</sup>因此，可以构建非常“大”的拓扑斯，它们只有一个“点”，甚至根本没有“点”！

正如层的思想（归功于 Leray）或概形的思想，如同任何“伟大思想”一样，它们颠覆了根深蒂固的观念，拓扑斯的思想也因其自然性、“显而易见”的特质及其简单性（可以说，近乎天真或简单，甚至“幼稚”）而令人困惑。这种特质常常让我们惊呼：“哦，原来只是这样！”语气中带着半失望半羡慕；或许还带有一种“古怪”、“不严肃”的暗示，这种暗示常常被赋予那些因出乎意料的简单性而令人困惑的事物。它或许让我们回想起那些早已被埋藏和否认的童年时光...

## 2.14 空间概念的嬗变——或气息与信仰

图式的概念极大地扩展了“代数簇”的概念，并因此彻底革新了由我前辈传承下来的代数几何。而拓扑斯的概念则构成了一个意想不到的扩展，更确切地说，是空间概念的一次蜕变。由此，它预示着拓扑学乃至更广泛的几何学将迎来类似的革新。事实上，它已经在新型几何（特别是通过由此衍生的  $\ell$ -adic 和晶体上同调主题，以及通过这些主题在 Weil 猜想的证明中）的兴起中发挥了关键作用。如同其长姐（近乎双胞胎）一般，它具备所有富有成效的推广所必需的两个互补特性，如下所述。

首先，新概念并不过于宽泛，这意味着在新的“空间”（更确切地称为“拓扑斯”，以免冒犯敏感的耳朵<sup>47</sup>）中，那些对于昔日经典空间最为基本的“几何”直觉和构造<sup>48</sup>，可以或多或少明显地移植过来。换言之，新对象拥有了全部丰富的心理意象与联想、概念及至少部分技术，这些以往仅限于旧式对象。

其次，新概念同时足够广泛，能够涵盖大量此前不被认为能引发“拓扑-几何”直觉的情境——正是那些过去仅保留给普通拓扑空间的直觉（原因显而易见……）。

从 Weil 猜想的角度来看，关键在于新概念确实足够广泛，使我们能够为每个“图式”关联一个这样的“广义空间”或“拓扑斯”（称为该图式的“*étale* 拓扑斯”）。该拓扑斯的某些“上同调不变量”（尽管看似简单！）似乎极有可能提供“所需之物”，以充分理解这些猜想，并（谁知道呢！）或许提供证明它们的手段。

<sup>47</sup> “拓扑斯”这一名称的选择（与“拓扑学”或“拓扑的”相关联）旨在暗示它是拓扑直觉应用的“卓越对象”。通过这一名称唤起的丰富心理意象，应将其视为与“空间”（拓扑的）一词大致相当，只是更加强调了概念的“拓扑”特性。（因此，存在“向量空间”，但迄今为止没有“向量拓扑斯”！）有必要同时保留这两个表达，各自保持其独特性。

<sup>48</sup> 在这些“构造”中，尤其包括所有熟悉的“拓扑不变量”，包括上同调不变量。对于后者，我在已引用的文章（“Tohoku” 1955）中已做了必要的工作，以便能够为任何“拓扑斯”赋予其意义。



正是在我撰写这些文字的过程中，作为数学家生涯中的首次，我得以悠闲地回顾（哪怕只是对自己）我数学作品中的全部主导主题和重大指导思想。这使我更深刻地认识到每个主题及其所体现的“观点”在统一并孕育它们的宏大几何视野中的地位与影响。正是通过这项工作，两个在新型几何强劲崛起中至关重要的创新理念——图式与拓扑斯——得以清晰显现。

这是两个想法中的第二个，即拓扑斯 (topos) 的概念，现在在我看来是两者中更为深刻的一个。如果在五十年代末期，我没有卷起袖子，日复一日地坚持开发一个精致而强大的“图解工具”——尽管这似乎几乎难以想象，但在随后的十年或二十年里，其他人最终可能也会不可避免地引入这一显然必要的概念（即使他们自己并不情愿），并至少搭建起一些简陋的“预制”建筑，而不是像我那样，用心一块石头一块石头地搭建起宽敞舒适的住所。然而，在过去的三十年里，我在数学界没有看到其他人能有这种天真或纯真，去（代替我）迈出这关键的一步，引入如此孩子气的拓扑斯概念（或者仅仅是“站点”的概念）。即使假设这个想法已经被慷慨地提供，并且伴随着它似乎蕴含的微弱希望——我也看不到其他人，无论是我的老朋友还是学生，有那份气魄，尤其是信念，去完成这个谦卑的想法<sup>49</sup>（表面上看似微不足道，而目标却显得遥不可及……）：从最初的蹒跚起步，到“掌握 étale 上同调”的完全成熟，它最终在我手中得以体现，在随后的岁月中。

## 2.15 国王所有的马匹……

是的，河流深邃，我童年时代的水域广阔而宁静，在那片我原以为早已离去的王国里。国王所有的马匹都能在那里一同畅饮，尽情满足，却不会使水源枯竭！它们源自冰川，炽热如同那遥远的雪原，又带着平原黏土的温柔。我刚提到其中一匹马，一个孩子牵着它来饮水，它便久久地喝了个够。我还看见另一匹，或许

<sup>49</sup>（针对数学读者。）当我提到“完成这个谦卑的想法”时，指的是将 étale 上同调作为通向 Weil 猜想的方法。正是受到这一想法的启发，我在 1958 年发现了站点的概念，随后这一概念（或与之非常接近的拓扑斯概念）以及 étale 上同调形式体系，在 1962 年至 1966 年间在我的推动下得以发展（并得到了一些合作者的协助，这些将在适当的地方提及）。

当我提到“气魄”和“信念”时，指的是那些“非技术性”的品质，在我看来，这些正是至关重要的品质。在另一个层面上，我还可以加上我称之为“上同调逃避”的东西，即在我心中发展起来的那种逃避，用于构建上同调理论。我曾以为我已经将其传达给我的上同调学生。然而，在我离开数学界十七年后，我发现它并未在他们中的任何一人身上保留下来。

循着同一个孩子的足迹前来饮水片刻——但这次它没待多久。想必有人驱赶了它。仅此而已，可以说。然而，我目睹无数群饥渴的马匹在平原上游荡——就在今晨，它们的嘶鸣不合时宜地将我从床上唤醒，尽管我已年近六旬，偏爱宁静。无可奈何，我只好起身。看到它们瘦骨嶙峋的模样，我心生怜悯，尽管清澈的水源并不匮乏，绿意盎然的牧场也近在咫尺。但似乎有一股恶意的咒语笼罩了这片我曾熟悉的乐土，阻断了通往这丰沛水源的道路。或许，这是当地马贩设下的圈套，只为压低价格，谁知道呢？又或者，这片土地已无孩童引领马匹饮水，马儿因无人指引而干渴，找不到通往河流的小径……

## 2.16 动机——或核心中的核心

拓扑斯 (topos) 主题源于概形 (schemes) 主题，甚至与概形的出现同年——但其范围远远超出了母主题。正是拓扑斯主题，而非概形主题，成为了那个“床”或“深河”，几何与代数、拓扑与算术、数理逻辑与范畴论、连续世界与“离散”或“不连续”结构的世界在此联姻。如果说概形主题是新几何学的核心，那么拓扑斯主题则是其外壳或居所。它是我构思的最广阔的主题，旨在通过一种富有几何共鸣的语言，精细地捕捉数学世界中来自不同领域情境的“本质”。

然而，拓扑斯主题远未像概形主题那样广为人知。我在《收获与播种》中多次谈及这一点，这里不再赘述这一概念所经历的奇特波折。尽管如此，新几何学的两个主要主题——两个互补的上同调理论——都源于拓扑斯主题，它们旨在为韦伊猜想提供一种途径：平展（或“ $\ell$ -进”）主题和晶体主题。前者在我手中具体化为  $\ell$ -进上同调工具，如今已成为本世纪最强大的数学工具之一。而晶体主题在我离开后几乎被埋没，最终在 1981 年 6 月因需求压力而被重新发掘，以一种借用的名义登上舞台，其背景甚至比拓扑斯更为奇特。

$\ell$ -进上同调工具如预期般成为证明韦伊猜想的关键工具。我自己证明了其中的大部分，而最后一步则由我最杰出的“上同调学家”学生皮埃尔·德利涅 (Pierre Deligne) 在我离开三年后以大师级的手法完成。

此外，我在 1968 年左右提出了韦伊猜想的一个更强且更“几何”的版本。这些猜想仍然“沾染”（如果可以这么说！）着一种看似不可还原的“算术”特征，尽管这些猜想的精神正是通过“几何”（或“连续”）来表达和捕捉“算术”（或

“离散”)<sup>50</sup>。从这个意义上说,我提出的猜想版本比韦伊本人的版本更“忠实”于“韦伊哲学”——这种未书写且极少被提及的哲学,或许是过去四十年几何学非凡发展的主要潜在动机<sup>51</sup>。我的重述主要是提炼出一种“精华”,即在所谓的“抽象”代数流形框架内,保留经典“霍奇理论”中对“普通”代数流形有效的部分<sup>52</sup>。我将这一全新的、完全几何化的猜想版本称为“标准猜想”(针对代数循环)。

在我看来,这是在发展 $\ell$ -进上同调工具之后,迈向这些猜想的又一步。但与此同时,更重要的是,这也是通向我认为自己在数学中引入的最深刻主题的可能途径之一<sup>53</sup>: 动机主题(它本身源于“ $\ell$ -进上同调主题”)。这一主题如同概形主题的核心或灵魂,是概形主题中最隐秘、最难以窥见的部分,而概形主题本身又是新愿景的核心。标准猜想中提炼出的几个关键现象<sup>54</sup>可以被视为动机主题的终极精华,如同这一最微妙主题的“生命气息”,是新几何学“核心中的核心”。

简而言之,事情是这样的。我们已经看到,对于给定的素数 $p$ ,构建“特征 $p$ ”的“(代数)流形”的“上同调理论”的重要性(尤其是为了韦伊猜想)。而著名的“ $\ell$ -进上同调工具”正好提供了这样一种理论,甚至提供了无限多种不同的上同调理论,即每一种都与不同于 $p$ 的素数 $\ell$ 相关联。然而,这里显然还缺少一种理论,即对应于 $\ell$ 等于 $p$ 的情况。为了解决这个问题,我特意构思了另一种上同调理论(即前面提到的“晶体上同调”)。此外,在 $p$ 为无穷的重要情况下,我们还有另外三种上同调理论<sup>55</sup>——并且没有证据表明我们不会在不久的将来引入更多具有类似形式性质的新上同调理论。与普通拓扑学不同,我们在这里

<sup>50</sup> (针对数学读者) 韦伊猜想依赖于“算术”性质的假设,尤其是所考虑的流形必须定义在有限域上。从上同调形式主义的角度来看,这导致与这种情境相关的弗罗贝尼乌斯自同态(Frobenius endomorphism)被赋予特殊地位。在我的方法中,关键性质(如“广义指标定理”类型)涉及任意代数对应,并且不对预先给定的基域做任何算术性质的假设。

<sup>51</sup> 然而,在我1970年离开后,出现了一种明显的反动运动,导致了相对的停滞,我在《收获与播种》中多次提及这一点。

<sup>52</sup> “普通”在这里意味着“定义在复数域上”。霍奇理论(即“调和积分理论”)是复数域上代数流形背景下最强大的已知上同调理论。

<sup>53</sup> 这是最深刻的主题,至少在我作为数学家的“公开”活动期间(1950年至1969年,即我离开数学舞台之前)是如此。我认为从1977年开始发展的阿贝尔几何和伽罗瓦-泰希米勒理论的深度与之相当。

<sup>54</sup> (针对代数几何读者) 这些猜想可能需要重新表述。更详细的评论请参见《工地巡礼》(ReS IV 注释第178号,第1215-1216页)和《信念与知识》(ReS III, 注释第162号)中的脚注。

<sup>55</sup> (针对数学读者) 这些理论分别对应于贝蒂上同调(通过基域嵌入复数域的超越方法定义)、霍奇上同调(由塞尔定义)和德·拉姆上同调(由我定义),后两种理论早在五十年代就已出现(而贝蒂上同调则出现在上个世纪)。

面对的是令人困惑的多种上同调理论。我们有一种非常清晰的感觉，即这些理论在某种起初相当模糊的意义上应该“殊途同归”，它们“给出了相同的结果”<sup>56</sup>。

正是为了表达这种不同上同调理论之间“亲缘关系”的直觉，我提出了与代数流形相关的“动机”概念。通过这一术语，我试图暗示它是潜在于流形所有可能上同调理论中不同上同调不变量的“共同动机”（或“共同理由”）。这些不同的上同调理论就像是对同一“基本动机”（称为“上同调动机理论”）的不同主题发展，每一种都有其独特的“节奏”、“调性”和“模式”（“大调”或“小调”），而这一基本动机同时也是所有这些不同“主题化身”（即所有可能的上同调理论）中最基本或最“精细”的。因此，与代数流形相关的动机将构成“终极”上同调不变量，所有其他不变量（与不同上同调理论相关）都将从中推导出来，就像不同的“音乐化身”或“实现”一样。流形“上同调”的所有基本性质都已经“绑定”（或“听到”）在相应的动机上，因此特定上同调不变量（例如  $\ell$ -进或晶体）上的熟悉性质和结构，仅仅是动机内部性质和结构的忠实反映<sup>57</sup>。

这是用一种非技术的音乐隐喻语言表达的，一种既简单又微妙且大胆的想法的精华。我在 1963 年至 1969 年间，在完成我认为更紧迫的基础任务之余，以“动机理论”或“动机哲学（或‘瑜伽’）”的名义发展了这一思想。这是一个结

<sup>56</sup>（针对数学读者）例如，如果  $f$  是代数流形  $X$  的自同态，诱导出上同调空间  $H^i(X)$  的自同态，那么后者的“特征多项式”应该是整系数的，且不依赖于所选的特定上同调理论（例如： $\ell$ -进， $\ell$  可变）。对于一般的代数对应，当  $X$  被假设为紧致且光滑时，情况也是如此。可悲的事实是（这让人对  $p > 0$  特征的代数流形上同调理论在我离开后的悲惨状态有所了解），即使在  $X$  是光滑射影曲面且  $i = 2$  的特殊情况下，这一点至今仍未得到证明。事实上，据我所知，在我离开后，还没有人愿意关注这一关键问题，它是标准猜想的典型子问题。时尚的法令是，唯一值得关注的自同态是弗罗贝尼乌斯自同态（德利涅用现有方法单独处理了它……）。

<sup>57</sup>（针对数学读者）另一种看待域  $k$  上动机范畴的方式是将其视为  $k$  上有限型分离概形范畴的一种“阿贝尔包络范畴”。与这样一个概形  $X$  相关的动机（或“ $X$  的动机上同调”，我记为  $H_{\text{mot}}^*(X)$ ）因此表现为  $X$  的一种“阿贝尔化化身”。这里的关键在于，正如代数流形  $X$  可能“连续变化”（其同构类因此依赖于“连续参数”或“模”），与  $X$  相关的动机，或更一般地，一个“可变”动机，也可能连续变化。这是动机上同调的一个方面，与所有经典上同调不变量（包括  $\ell$ -进不变量）形成鲜明对比，唯一的例外是复代数流形的霍奇上同调。

这让我们对“动机上同调”作为一种更精细的不变量有了一个概念，它比纯粹的拓扑不变量更紧密地捕捉了流形  $X$  的“算术形式”（尽管这一表达可能有些冒险）。在我的动机愿景中，动机构成了一种非常隐秘且微妙的“纽带”，将流形  $X$  的代数几何性质与由其动机体现的“算术”性质联系起来。后者可以被视为本质上具有“几何”性质的对象，但其中从属于几何的“算术”性质可以说被“赤裸裸地”展现出来。

因此，动机在我看来是迄今为止与代数流形相关的最深刻的“形式不变量”，除了其“动机基本群”  $\pi_1$  和最近被我视为“动机同伦类型”的“阴影”的另一个不变量（我在《工地巡礼——或工具与愿景》（ReS IV，第 178 号，参见第 5 章动机）中顺便提到了一些，尤其是第 1214 页）。在我看来，后者应该是任意代数流形的“算术形式”（或“动机”）这一难以捉摸的直觉的最完美体现。



构丰富性令人着迷的理论，其中大部分内容仍然是猜想性的<sup>58</sup>。

我在《收获与播种》中多次谈到这种“动机瑜伽”，它对我尤为重要。这里不再赘述我在其他地方对此的论述。我只想说，“标准猜想”最自然地源于动机瑜伽的世界。同时，它们为动机概念的某种可能构造提供了一种途径。

这些猜想在我看来，至今仍然是代数几何中最根本的两个问题之一。无论是这个问题，还是另一个同样关键的问题（即所谓的“奇点解消”问题），目前都尚未解决。然而，尽管第二个问题在今天和一百年前一样，被视为一个 *prestigious* 且令人生畏的问题，我有幸提出的这个问题却被时尚的专断法令归类为格罗滕迪克式的可爱胡闹（在我离开数学舞台后的几年里，动机主题本身也是如此<sup>59</sup>）。但又一次，我跑题了……

## 2.17 探索母体——或两面性

说实话，我对于 Weil 猜想本身的思考，旨在证明它们，一直是零星的。开始展现在我面前并努力审视和捕捉的全景，其广度和深度远远超出了证明所需的假设需求，甚至超出了这些著名猜想最初所能暗示的一切。随着概型主题和拓扑斯主题的出现，一个全新且意想不到的世界突然敞开。“猜想”在其中占据了核心位置，确实，就像一个大帝国或大陆的首都，拥有无数省份，但其中大多数与这个光辉而显赫的地方只有最遥远的联系。我从未明言，但我知道自己从此成为一项伟大任务的仆人：探索这个广阔而未知的世界，把握其轮廓直至最远的边界；同时，全方位地遍历并系统而细致地盘点那些最接近、最易达的省份，绘制出忠实且精确的地图，连最小的村庄和最简陋的茅屋都有其位置……

尤其是这最后一项工作，占据了我大部分精力——这是一项耐心而广泛的基础工作，只有我清楚地看到，尤其是“深切感受到”。从 1958 年（概型主题和拓扑斯主题接连出现的那一年）到 1970 年（我退出数学舞台的那一年），这项工作远远占据了我最多的时间。

<sup>58</sup>我在这些年里向任何愿意倾听的人解释了我的动机愿景，却没有费心将其以书面形式发表（因为还有其他为所有人服务的任务）。这后来让我的某些学生能够更轻松地剽窃，而我的所有老朋友都对此视而不见，他们对情况了如指掌。（见下文脚注。）

<sup>59</sup>事实上，这一主题在 1982 年（晶体主题被发掘一年后）以其原名被重新发掘（尽管形式狭隘，仅限于基域特征为零的情况），而工匠的名字却未被提及。这是众多例子中的一个，说明在我离开后，某些概念或主题被埋葬为格罗滕迪克的幻想，却在接下来的十到十五年间被我的某些学生一一发掘，带着谦逊的骄傲（无需赘言）且未提及工匠……

很多时候，我因被这些无尽的任务所束缚而感到焦躁，这些任务（一旦看到本质）对我来说更像是“后勤工作”，而非向未知的冲刺。我不得不不断抑制那种向前冲的冲动——那种先驱者或探索者的冲动，他们出发去发现和探索无名未知的世界，不断呼唤我去认识和命名它们。这种冲动，以及我投入其中的精力（几乎是偷偷摸摸地！），总是处于极度匮乏的状态。

然而，我深知，正是这种从“任务”中“偷来”的精力，才是最稀有、最自由的精髓——在我作为数学家的工作中，“创造”首先就体现在这里：在那强烈的关注中，去把握温暖而无穷尽的母体那阴暗、无形且潮湿的褶皱中，尚未诞生之物的最初形态和轮廓的痕迹，它们似乎在呼唤我，以成形、具象并诞生……在探索工作中，这种强烈的关注，这种炽热的关怀，是一种本质的力量，就像太阳的热量对于埋藏在肥沃土壤中的种子的黑暗孕育，以及它们卑微而奇迹般地破土而出，迎接日光。

在我的数学工作中，我主要看到这两种力量或冲动在起作用，它们同样深刻，但性质（在我看来）不同。为了描述这两者，我使用了建设者的形象，以及先驱者或探索者的形象。将它们并列，我突然意识到它们都非常“阳刚”，非常“男性化”，甚至“大男子主义”！它们带有神话的高傲回响，或是“重大时刻”的共鸣。无疑，它们受到我内心残留的“英雄式”创作观——超级阳刚的视角——的启发。如此这般，它们呈现了一种强烈着色、甚至僵化、“立正”的现实观，而现实本应更加流动、谦逊、“简单”——一种活生生的现实。

在这股“建设者”的强烈冲动中，它似乎不断驱使我投身于新的工地，然而，我同时也能辨识出居家者的那份情怀：深深依恋于“那个”家的人。首要的，是“他的”家，属于“亲近之人”的所在——一个他感到自己是其中一部分的亲密生命体的栖息地。随后，随着“亲近”之圈的扩展，它才逐渐成为“众人的家”。在这“建造家园”的冲动中（如同“进行”爱抚一般……），首要且核心的，是一份柔情。那是对待每一块亲手雕琢、倾注爱心、唯有通过这种深情的触碰才能真正了解的材料所怀有的接触冲动。当墙壁竖起，梁柱与屋顶安置妥当，一间间房间被布置起来，目睹这些厅堂、卧室及角落中逐渐建立起和谐有序的生活之家——美丽、温馨、宜居——内心便涌起深深的满足。因为家，在我们每个人内心深处，首先且隐秘地，也是母亲——环绕并庇护我们的存在，既是避风港也是慰藉；或许（更深一层，即便我们正亲手一砖一瓦地构建它），它也是我们自身的起源，那个在我们出生前已被永远遗忘的时代里，曾庇护并滋养我们的所在……

它同样是怀抱。

而先前自发浮现的形象，为了超越“先驱者”这一显赫称号，揭示其背后更为隐秘的现实，同样剥离了所有“英雄主义”的色彩。再次，显现的是母性的原型意象——滋养的“子宫”及其无形且晦暗的劳作……

这两股在我看来“性质各异”的冲动，最终比我预想的更为接近。两者皆属于“接触冲动”的本质，引领我们与“母亲”相遇：她既体现亲近、“已知”，也包含“未知”。屈服于其中任何一种冲动，便是“重归母亲怀抱”。这是对亲近、“或多或少已知”以及“遥远”、“未知”但同时又预感即将揭示的事物的接触的更新。

这里的区别在于调性、比例，而非本质。当我“建造房屋”时，是“已知”主导；而当我“探索”时，则是未知。这两种“模式”的发现，或更准确地说，同一过程或同一工作的这两个方面，是密不可分的。它们各自至关重要，且互为补充。在我的数学工作中，我察觉到一种在这两种探索方式之间，或者说，在其中一种占主导的时刻（或时期）与另一种占主导的时刻之间不断往复的运动<sup>60</sup>。但同样明显的是，在每一刻，这两种模式都是并存的。当我构建、布置，或清理、整理、排序时，是工作的“阳”或“男性”面向在定调。当我摸索着探索难以捉摸、无形、无名之物时，我则处于“阴”或“女性”的面向。

对我而言，不存在贬低或否认我本性中任何一面的问题，两者都至关重要——“男性”面构建并孕育，“女性”面构思并孕育缓慢而隐秘的成长。我“是”两者——“阳”与“阴”，“男”与“女”。但我也知道，在创造过程中，最微妙、最轻盈的本质往往存在于“阴”、“女性”的一面——谦逊、幽暗，且常常显得微不足道的一面。

正是工作的这一面，我相信，自古以来对我施加了最强烈的吸引力。然而，盛行的共识却鼓励我将大部分精力投入到另一面，即体现在有形“产品”中的那一面，更不用说那些轮廓分明、以雕琢石头的明显性证明其真实性的成品……

回首往事，我清楚地看到这些共识如何影响了我，以及我是如何“承受其重”的——以柔克刚！直到我离开的那一刻，我工作中“构思”或“探索”的部分仍被压缩至最小限度。然而，在回顾我作为数学家的成就时，一个惊人的事实

<sup>60</sup>我在此关于数学工作的论述同样适用于“冥想”工作（这在《收获与播种》中多处有所提及）。我几乎可以肯定，这是所有发现工作中都会出现的现象，包括艺术家的创作（比如作家或诗人）。我这里描述的两种“面向”也可以被视为，一方面是表达及其“技术”要求，另一方面是接收（各种感知和印象），通过高度集中的注意力转化为灵感。两者在工作的每一刻都同时存在，且在这两种“时间”之间——一种占主导，另一种占主导——存在着这种持续的“往复”运动。

显而易见：构成我作品精髓与力量的，正是如今被忽视、甚至沦为嘲笑或居高临下轻蔑对象的那一面——“思想”，乃至“梦想”，而绝非“成果”。在这些篇章中，我试图通过俯瞰森林而非细究树木的视角，界定出我为当代数学贡献的最核心内容——我所见的，不是一系列“伟大定理”的榜单，而是一幅生机勃勃、孕育丰硕思想的画卷<sup>61</sup>，所有这一切共同汇聚成一个宏大而统一的视野。

## 2.18 孩子与母亲

当这篇“前言”开始在我作为数学家的作品中漫步，伴随着我对“继承者”（纯正血统）和“建设者”（不可救药）的小小论述时，一个名字也开始浮现于这篇未竟的前言之中：“孩子与建设者”。随后的日子里，越来越清晰地显现出，“孩子”与“建设者”实则是同一个人物。于是，这个名字简化为“建设中的孩子”。一个，说实话，颇具风采的名字，完全合我心意！

然而，深思之下，这位高傲的“建设者”，或更谦逊地说，那个喜欢搭建房屋的孩子，不过是著名“玩耍的孩子”的一面，而后者拥有两面。还有那个喜欢探索事物、潜入沙地或无名泥潭，深入最不可能、最奇异之地的小孩……为了混淆视听（至少对自己而言……），我起初以“先锋”这一耀眼之名引入，随后是更为朴实却仍带光环的“探索者”。在“建设者”与“先锋-探索者”之间，真让人疑惑，哪一个更具男子气概，更吸引人！正面还是反面？

再细看之下，我们勇敢的“先锋”原来是个女孩（我曾乐于将她装扮成男孩）——她是池塘、雨水、薄雾与夜晚的姐妹，静默且几乎隐形，因总隐于阴影之中——那个总被遗忘的人（当人们不假装嘲笑她时……）。而我，日复一日，也找到了双重遗忘她的方式：起初我只愿看见那个男孩（那个搭建房屋的……）——即便最终不得不看见另一个，我仍视其为男孩……

至于我那漫步的美丽名字，此刻已不再适用。这是一个全阳、全“男子气概”的名字，一个跛脚的名字。要让它站稳，必须同时包含另一方。但奇怪的是，“另

<sup>61</sup>并非说我的作品中缺少所谓的“伟大定理”，包括那些解决了他人提出、此前无人能解的问题的定理。（我在第 554 页的脚注 b 中回顾了其中一些，见“涨潮之海...”笔记（ReS III, n° 122）。）但正如我在这段“漫步”之初就已强调的（在“观点与视野”阶段，n°6），这些定理对我来说，唯有置于由某个“丰硕思想”开启的重大主题的滋养背景下，才具有完整的意义。它们的证明因此如同泉水般自然流畅地涌现，源自承载它们的主题本身的“深度”——就像河流的波浪似乎温柔地从其水深处诞生，无断裂，无费力。我在已引用的“涨潮之海...”笔记中，以类似但不同的意象表达了这一点。



一方”并无确切名字。唯一勉强贴切的是“探索者”，但这仍是个男孩的名字，无可奈何。语言在此成了陷阱，不知不觉中让我们陷入，显然与古老的偏见同谋。

或许我们可以用“建设中的孩子与探索中的孩子”来解围。不明确指出一个是“男孩”，另一个是“女孩”，而是同一个男孩女孩，在建设探索，在探索中建设……但昨日，除了这阴阳两面的观照与探索、命名与构建之外，事物的另一面也显现出来。

宇宙、世界，乃至宇宙，本质上是陌生且遥远的。它们并不真正关乎我们。内心深处，求知欲并非指向它们。吸引我们的，是它们具体而直接的化身，最亲近、最“肉感”，充满深刻共鸣与丰富神秘——那与我们的血肉之躯及物种起源相混淆的存在，也是自古以来默默等待、准备迎接我们的“道路尽头”。正是她，母亲，那个孕育了我们如同孕育了世界的她，涌动着欲望的冲动，开辟着欲望之路——它们引领我们与她相遇，朝她奔去，不断回归并消融于她之中。

于是，在一次意外的“漫步”途中，我意外地重拾了一个曾经熟悉却稍被遗忘的寓言——孩子与母亲的寓言。这可以被视为“生命，追寻自我”的寓言。或者，在个体存在更为谦卑的层面上，是“存在，追寻事物”的寓言。

这是一个寓言，也是深深植根于心灵深处的祖先经验的表达——滋养深层创造力的最强大原始象征之一。我相信，在其中，我认出了以原型图像那古老语言表达的，正是人类创造力的气息，它激活了人的肉体与精神，在其最谦卑、最短暂的表现中，如同在最辉煌、最持久的显现里。

这“气息”，正如体现它的肉体形象一样，是世间最谦卑之物。它也是最脆弱的，最被众人忽视与轻视的……

而这一气息在你存在历程中的兴衰史，正是你的冒险，你生命中的“认知冒险”。表达这一点的无言寓言，便是孩子与母亲的故事。

你是那孩子，源自母亲，受她庇护，汲取她的力量。孩子从母亲——那最亲近、最熟悉的怀抱中跃出，去迎接那无限、永远未知且充满神秘的母性……

“穿越一部作品的漫步”结束

## 尾声：无形的圈子

### 2.19 死亡是我的摇篮（或三个顽童为一个垂死者）

直到五十年代末拓扑观点的出现，空间概念的演变在我看来本质上是一种“连续”的演变。它似乎从欧几里得对我们周围空间的理论化开始，以及希腊人遗留下来的几何学，专注于研究存在于该空间中的某些“图形”（直线、平面、圆、三角形等），平稳而无跳跃地延续着。诚然，数学家或“自然哲学家”对“空间”的理解方式发生了深刻的变化<sup>62</sup>。但这些变化在我看来都属于一种本质上的“连续性”——它们从未让数学家（像所有人一样）面对突然的陌生感。这些变化就像我们从小就认识的一个人的变化，可能深刻但渐进，从蹒跚学步到成年直至完全成熟。在某些漫长的平静时期，变化几乎察觉不到，而在其他时期则可能动荡不安。但即使在最强烈的成长或成熟期，即使我们数月甚至数年未见，也绝不会有丝毫怀疑或犹豫：我们再次见到的，依然是他，一个熟悉而亲切的存在，尽管面貌可能有所改变。

此外，我认为可以说，到了本世纪中叶，这个熟悉的存在已经相当老迈——就像一个最终筋疲力尽、被新任务压垮的人，这些任务他完全没有准备。也许他甚至已经安详离世，却无人留意并记录。“所有人”仍在忙碌于一个活人的家中，仿佛他确实还活着。

然而，想象一下，当习惯于这所房子的人们，看到原本僵直坐在椅子上的尊贵老人突然被一个活力四射、不过三颗苹果高的小男孩取代，他漫不经心、一本正经地声称自己就是空间先生（现在你甚至可以随意省略“先生”二字），这该是多么令人不快的景象！如果他至少看起来有家族特征，或许是个私生子也说不定……但完全不是！乍一看，没有任何地方让人想起我们曾经熟知（或自以为熟知……）的老空间父亲，我们当然确信（这是最起码的……）他是永恒的……

这就是那著名的“空间概念的转变”。这就是我早在六十年代初期至少就已经“看到”的、显而易见的事情，直到此刻写下这些文字之前，我从未有机会将其表述出来。而通过这一形象的唤起及其立刻引发的一连串联想，我突然以全新

<sup>62</sup>我最初撰写《跋》的意图，是包含对这些“深刻变化”的简要概述，并展示我所看到的这种“本质连续性”。我放弃了这一打算，以免使这次漫游过于冗长，它已经比预期长了许多！我打算在《反思》第四卷的历史评论中再谈这个问题，这次是面向数学读者（这完全改变了阐述的任务）。

的清晰度看到：传统的“空间”概念，以及与之紧密相关的“多样性”（各种类型，尤其是“代数多样性”）概念，在我涉足这一领域时，已经显得如此陈旧，仿佛它们已经死去……<sup>63</sup> 我可以说，随着概型观点（及其后代<sup>64</sup>，外加一万页的基础理论）的接连出现，以及拓扑斯观点，一个未命名的危机局面最终得以解开。

在刚才的比喻中，不应说是由一个孩子，而是由两个孩子作为突变的结果。这两个孩子之间有着不可否认的“家族相似性”，尽管他们与已故的老者并不相似。进一步细看，可以说概型这个小孩像是已故的空间之父（又名各种类型的多样性）与拓扑斯小孩之间的“亲缘纽带”<sup>65</sup>。

## 2.20 对岸一瞥

在我看来，这种情况与本世纪初爱因斯坦相对论理论出现时的情况非常相似。当时存在一个更为明显的概念死胡同，表现为一个突然的矛盾，似乎无法解决。理所当然地，将秩序带回混乱的新思想是一个极其简单的想法。值得注意的是（并且符合一个非常重复的剧本...），在所有那些突然紧张起来试图“挽救局面”的杰出、卓越、有声望的人中，没有人想到这个想法。必须是一个不知名的年轻人，刚从学生讲堂的座位上走出来（也许对自己的大胆感到有些尴尬...），向他的杰出前辈们解释如何“挽救现象”：只需要不再将空间与时间分开<sup>66</sup>。从技术上讲，当时一切条件都已具备，让这个想法得以开花结果并被接受。爱因斯坦的前辈们能够接受这个新想法，而没有过多责备，这是他们的荣誉。这表明那仍然

<sup>63</sup> 这一断言（对某些人来说可能显得武断）应持保留态度。它的有效性并不比我在下文重申的观点更强或更弱，即在本世纪初爱因斯坦介入之前，“牛顿模型”的（地球或天体）力学已经“垂死”。事实上，即使在今天，在物理学的大多数“常规”情况下，牛顿模型仍然完全适用，考虑到测量中允许的误差范围，寻求相对论模型将是疯狂的。同样，在数学的许多情况下，熟悉的旧“空间”和“多样性”概念仍然完全适用，无需引入幂零元素、拓扑或“适度结构”。但在两种情况下，对于尖端研究中越来越多的情境，旧的概念框架已无法表达即使是最“常规”的情况。

<sup>64</sup> （针对数学家）在这“后代”中，我特别包括形式概型、各种类型的“多重性”（尤其是概型或形式多重性），以及所谓的“刚性解析空间”（由 Tate 引入，遵循我提供的“总设计师”，受到新拓扑概念和形式概型概念的启发）。这份列表远非详尽无遗……

<sup>65</sup> 此外，对于这两个小孩，还应加上第三个更年幼的，出现在不那么宽容的时代：那就是适度空间的小孩。正如我在别处提到的，它没有得到出生证明，我是在完全非法的情况下将其列入我有幸在数学中引入的十二个“主题”之一的。

<sup>66</sup> 当然，作为对爱因斯坦思想的描述，这有点简短。在技术层面上，必须明确在新时空中放置什么结构（尽管麦克斯韦理论和洛伦兹的思想已经“在空气中”）。这里的关键步骤不是技术性的，而是“哲学性的”：意识到远距离事件的同时性概念没有任何实验现实。这就是“幼稚的观察”，“但皇帝是赤裸的！”，它突破了那个著名的“限制宇宙的无形而专制的圆圈”...

是一个伟大的时代...

从数学的角度来看，爱因斯坦的新想法是平凡的。但从我们对物理空间的概念来看，这是一个深刻的突变和突然的“异化”。这是自 2400 年前欧几里得提出的物理空间数学模型以来的第一次此类突变，自古代以来（包括牛顿），所有物理学家和天文学家都为了力学的需要而原封不动地采用了这个模型，以描述地球和恒星的力学现象。

爱因斯坦的这个初始想法后来得到了极大的深化，体现在一个更微妙、更丰富、更灵活的数学模型中，借助了已有的丰富数学概念<sup>67</sup>。随着“广义相对论”，这个想法扩展为一个广阔的物理世界视野，将无限小的亚原子世界、太阳系、银河系和遥远的星系，以及电磁波在每一点都被存在的物质弯曲的时空中的传播，都纳入同一个视野<sup>68</sup>。这是宇宙学和物理学史上第二次（也是最后一次）出现一个广阔的统合视野，用数学模型的语言描述宇宙中所有物理现象，继三个世纪前牛顿的第一次伟大综合之后。

爱因斯坦的物理宇宙视野后来也被事件所超越。自本世纪初以来，“所有物理现象”的范围已经大大扩展！出现了大量的物理理论，以或多或少成功地解释所有“观察到的现象”的巨大混乱中的有限事实。我们仍在等待那个大胆的孩子，他会在玩耍中找到新的钥匙（如果有的话...），那个梦想中的“蛋糕模型”，能够“运行”以同时挽救所有现象...<sup>69</sup>。

<sup>67</sup>主要是“黎曼流形”的概念，以及在这种流形上的张量计算。

<sup>68</sup>这个模型与欧几里得（或牛顿）的时空模型，以及爱因斯坦的最初模型（“狭义相对论”）最显著的区别之一是，时空的整体拓扑形式仍然是不确定的，而不是由模型本身的性质强制规定的。作为一个数学家，我认为确定这种整体形式的问题是宇宙学中最迷人的问题之一。

<sup>69</sup>有人将这种假设的理论称为“统一理论”，它能够“统一”并调和前面提到的众多部分理论。我认为，等待进行的基本反思必须在两个不同的层面上展开。

1°) 一种“哲学性”的反思，关于“数学模型”概念本身，用于描述现实的一部分。自牛顿理论的成功以来，物理学家们已经默认存在一个数学模型（甚至是一个唯一的模型，或“那个”模型）来完美表达物理现实，没有“脱节”或瑕疵。这个共识，已经存在了两个多世纪，就像毕达哥拉斯“万物皆数”的生动视野的化石遗迹。也许这就是新的“无形圆圈”，取代了旧的形而上学圆圈，限制了物理学家的宇宙（而“自然哲学家”的种族似乎已经彻底灭绝，被计算机轻松取代...）。只要稍作停留，就会清楚地看到这个共识的有效性并不明显。甚至有一些非常严肃的哲学理由，导致人们先验地怀疑它，或者至少预见到它的有效性有非常严格的限制。现在是时候对这个公理进行严格的批判，甚至可能“证明”它没有基础：不存在一个严格的唯一数学模型，能够解释迄今为止记录的所有“物理”现象。

一旦“数学模型”的概念及其“有效性”（在允许的“误差范围”内）得到满意的界定，“统一理论”或至少一个“最优模型”（在某种意义上）的问题将最终明确提出来。同时，我们可能会更清楚地了解选择这样一个模型所附带的（也许是必要的）任意程度。

2°) 只有在这样的反思之后，我认为，提出一个比其前辈更令人满意的明确模型的“技术”问



将我对当代数学的贡献与爱因斯坦对物理学的贡献进行比较，有两个原因：两者都是在“空间”概念（一个是数学意义上的，另一个是物理意义上的）发生突变的背景下完成的；两者都采取了一种統合的视野，涵盖了在此之前似乎彼此分离的大量现象和情况。我在他的作品<sup>70</sup>和我的作品之间看到了明显的精神亲缘关系。

这种亲缘关系似乎并没有被明显的“实质”差异所否定。正如我之前所暗示的，爱因斯坦的突变涉及物理空间的概念，而他借鉴了已有的数学概念，从未需要扩展甚至颠覆它们。他的贡献在于从当时已知的数学结构中，找出最适合<sup>71</sup>作为物理现象世界“模型”的结构，取代他的前辈们遗留下来的垂死模型。从这个意义上说，他的作品确实是物理学家的作品，更进一步说，是牛顿及其同时代人所理解的“自然哲学家”的作品。这种“哲学”维度在我的数学作品中是缺失的，我从未被引导去思考“理想”概念构造（在数学事物的宇宙中进行）与物理宇宙中发生的现象（甚至是在心灵中展开的体验事件）之间的可能关系。我的作品是一个数学家的作品，他刻意回避了“应用”（到其他科学）的问题，或工作的“动机”和心理根源。此外，这是一个具有特殊天赋的数学家，他不断扩展其艺术基础的概念库。就这样，我不知不觉地、仿佛在玩耍中，颠覆了几何学家最基本的概念：空间（和“簇”）的概念，即我们对几何生物所居住的“场所”的理解。

题才会真正有意义。那时，也许是时候摆脱物理学家的第二个默认公理了，这个公理可以追溯到古代，深深植根于我们对空间的感知方式：即空间和时间（或时空）的连续性，也就是“物理现象”发生的“场所”。

大约十五或二十年前，我在翻阅黎曼的完整作品集时，被他的一句“顺便一提”的话所震撼。他指出，空间的最终结构可能是“离散的”，而我们对它的“连续”表示可能是一种（也许长期来看是过度的...）简化，是对更复杂现实的简化；对人类思维来说，“连续”比“离散”更容易把握，因此它作为一种“近似”帮助我们理解离散。这是一个令人惊讶的深刻见解，尤其是出自一位数学家之口，当时欧几里得的物理空间模型还从未受到质疑；从严格的逻辑意义上讲，传统上“离散”是技术性地接近“连续”的方式。

过去几十年的数学发展也显示了连续和离散结构之间比本世纪前半叶所想象的更为密切的共生关系。无论如何，找到一个“令人满意”的模型（或者，如果需要，一组这样的模型，尽可能“无缝”地连接...），无论它是“连续”的、“离散”的还是“混合”性质的——这样的工作肯定会涉及大量的概念想象力，以及把握和揭示新型数学结构的敏锐直觉。在我看来，这种想象力或“直觉”在物理学家中非常罕见（爱因斯坦和薛定谔似乎是少数例外），甚至在数学家中也是如此（我在这里说的是有充分根据的）。

总之，我预计期待中的更新（如果它还会到来...）更可能来自一个具有数学灵魂、对物理学的重大问题有深入了解的人，而不是一个物理学家。但最重要的是，这将需要一个具有“哲学开放性”的人来把握问题的核心。这个问题绝不是技术性的，而是一个基本的“自然哲学”问题。

<sup>70</sup>我绝不声称熟悉爱因斯坦的作品。事实上，我从未读过他的任何著作，对他的思想只有道听途说和非常粗略的了解。然而，我似乎能辨别出“森林”，即使我从未费心去仔细观察任何一棵树...

<sup>71</sup>关于“垂死”这个形容词的评论，请参见前面的脚注（第 55 页的注释）。

新的空间概念（作为一种“广义空间”，但构成“空间”的点或多或少消失了）在实质上与爱因斯坦在物理学中引入的概念毫无相似之处（后者对数学家来说并不令人困惑）。然而，与薛定谔发现的量子力学进行比较是恰当的<sup>72</sup>。在这种新力学中，传统的“质点”消失了，取而代之的是一种“概率云”，根据点出现在该区域的“概率”，在周围空间的不同区域中密度不同。在这种新视角下，我们感受到一种比爱因斯坦模型所体现的更深层次的突变，它不仅仅是用一个稍微宽松或更合身的类似模型取代一个有点狭窄的数学模型。这一次，新模型与传统的老模型如此不同，以至于即使是力学领域的顶尖数学家也突然感到陌生，甚至迷失（或愤怒...）。从牛顿力学过渡到爱因斯坦力学，对数学家来说，有点像从古老而亲切的普罗旺斯方言过渡到最新潮的巴黎俚语。然而，过渡到量子力学，我想，就像从法语过渡到中文。

而这些取代了昔日令人安心的物质粒子的“概率云”，让我奇怪地联想到拓扑斯中那些难以捉摸的“开邻域”，它们像幽灵般围绕着“虚构”的点，尽管想象力顽固地抗拒，仍然紧紧依附于它们...

## 2.21 独特——或孤独的馈赠

这次短暂地造访“对面的邻居”——物理学家们，或许能为一位读者（如同大多数人一样）对数学家的世界一无所知，但肯定听说过爱因斯坦及其著名的“第四维度”，甚至量子力学，提供一个参考点。毕竟，即便发明者们未曾预料到他们的发现会具体化为广岛事件，以及后来军事和（所谓的）“和平”原子竞赛，事实是物理学发现对人类世界有着直接且几乎立竿见影的影响。数学发现，尤其是所谓的“纯”数学（即没有“应用”动机的数学）的影响则不那么直接，且无疑更难以界定。例如，我未曾听闻我的数学贡献“服务于”任何事物，比如建造任何设备。我对此并无功劳可言，这是肯定的，但这并不妨碍我感到安心。一旦有应用出现，可以肯定的是，军方（紧随其后的是警方）会首先将其据为己有——至于工业（即便是所谓的“和平”工业），情况也不总是好得多……

对我自己而言，或者对一位数学家读者来说，更恰当的做法是通过数学史本身的“地标”来定位我的作品，而非在其他领域寻找类比。最近几天，在我对这

<sup>72</sup>我相信（通过各种渠道传回的回声）人们普遍认为本世纪物理学中有三次“革命”或重大变革：爱因斯坦的理论，居里夫妇发现的放射性，以及薛定谔引入的量子力学。

段历史相当模糊的了解范围内，我思考了这一点<sup>73</sup>。在《漫步》中，我已经有机会提到一系列与我气质相投的数学家：伽罗瓦、黎曼、希尔伯特。如果我对我的艺术史了解更多，我可能会将这一谱系追溯得更远，或在其间插入一些我仅耳闻其名的其他人物。令我印象深刻的是，我不记得有听说过，即便是通过比我更精通历史的朋友或同事的暗示，除了我自己之外，还有哪位数学家带来了众多创新思想，这些思想并非或多或少相互独立，而是作为一个统一广阔视野的一部分（如牛顿和爱因斯坦在物理学和宇宙学中，达尔文和巴斯德在生物学中所做的那样）。我只知道数学史上的两个“时刻”，其中诞生了全新的广阔视野。其中一个时刻是数学作为我们今天所理解的科学的诞生，2500年前在古希腊。另一个则是微积分和积分学的诞生，主要发生在17世纪，以牛顿、莱布尼茨、笛卡尔等人为代表。据我所知，这两个时刻诞生的视野并非一人之功，而是一个时代的集体成果。

当然，从毕达哥拉斯和欧几里得的时代到十七世纪初，数学已有足够的时间改头换面，同样地，从十七世纪数学家创立的“微积分”到十九世纪中叶，数学也经历了显著变化。但据我所知，在这两个时期——一个跨越两千多年，另一个长达三个世纪——发生的深刻变革，从未具体化或凝聚成体现在某一特定作品中的新视野<sup>74</sup>，然而，其方式与物理学和宇宙学中牛顿及爱因斯坦在其历史关键时刻所实现的伟大综合颇为相似。

<sup>73</sup>从小时候起，我就对历史（以及地理）不太感兴趣。（在《收获与播种》第五部分（仅部分完成）中，我有机会“顺便”揭示了我对历史部分“抵触”的深层原因——我相信，这种抵触在最近几年正在逐渐消退。）我在“布尔巴基圈”中接受的长辈们的数学教育，并未改善这一状况——那里偶尔的历史参考极为罕见。

<sup>74</sup>写完这几行后不久，我猛然意识到，我在此处竟未提及 M. Bourbaki（集体）著作中竭力呈现的当代数学宏大综合。（在《收获与播种》的第一部分中，Bourbaki 小组还将被频繁提及。）这似乎源于两个原因。

一方面，这一综合仅限于对大量已知思想和成果进行某种“整理”，并未引入自身独创的新颖理念。若说有新意，那便是对“结构”概念给出了精确的数学定义，这一概念贯穿全书，成为宝贵的指导线索。然而，在我看来，这一理念更类似于一位聪明且富有想象力的词典编纂者的工作，而非语言革新的一部分，后者能赋予现实（此处指数学事物）以全新的理解。

另一方面，自五十年代起，随着“范畴论”方法在数学某些最具活力的领域（如拓扑学或代数几何）中的突然涌现，结构的观念已被事件所超越。（例如，“拓扑斯”的概念拒绝被纳入 Bourbaki 的“结构之袋”，显然，这个袋子在接缝处显得过于狭窄！）Bourbaki 在充分知情的情况下，决定不涉足这一“纷争”，从而放弃了其最初的目标，即为整个当代数学提供基础和基本语言。

相反，它确立了一种语言，同时，也确立了一种特定的数学写作和探索风格。这一风格最初是某种精神（希尔伯特生动而直接的遗产）的（非常片面的）反映。在五六十年代，这一风格最终确立——既有其优点，也（尤其）有其弊端。近二十年来，它已演变为一种僵化的“规范”，其“严谨”仅流于表面，昔日赋予其生命的精神似乎已一去不复返。



似乎，作为诞生于我内心的广阔统一愿景的仆人，我在数学史上从起源至今都是“独一无二”的。抱歉，我可能显得过于自我标榜了！但令我欣慰的是，我相信自己发现了一个潜在的（且天赐的！）兄弟。我之前曾提到过他，作为我“性情兄弟”中的第一位：那就是埃瓦里斯特·伽罗瓦。在他短暂而辉煌的一生中，我察觉到了一种伟大愿景的萌芽——即“数与量的联姻”，在一个全新的几何视角中。我在《收获与播种》<sup>75</sup>中其他地方提到，两年前，我心中突然涌现出这种直觉：在我当时最为着迷的数学工作中，我正在“继承伽罗瓦的遗产”。这一直觉虽鲜少提及，却已在静默中成熟。过去三周里，我对自身作品的回顾无疑也促进了这一点。我现在认为，与过去数学家中最直接的传承关系，正是我与埃瓦里斯特·伽罗瓦之间的联系。无论对错，我觉得自己生命中十五年发展起来的这一愿景，以及在我离开数学舞台后十六年间继续成熟和丰富的这一愿景，正是伽罗瓦若在世也必定会发展的愿景<sup>76</sup>，如果他处于我的位置，且未因早逝而骤然中断那壮丽的飞跃。

还有另一个原因，无疑加深了我这种“本质亲缘”的感觉——这种亲缘不仅限于“数学性情”，也不仅限于作品的显著特征。在他的生命与我的生命之间，我也感受到了一种命运的亲缘。诚然，伽罗瓦愚蠢地死于二十一岁，而我即将步入六十岁，决心长寿。但这并不妨碍埃瓦里斯特·伽罗瓦在世时，如同我一个半世纪后一样，是官方数学世界中的“边缘人”。对于伽罗瓦，表面看来，这种边缘性似乎是“偶然的”，他只是还没来得及通过其创新思想和作品“确立自己的地位”。而在我这里，作为数学家的头三年，我的边缘性源于我对数学家世界存在的无知（或许是故意的...），我本应与之交锋；而自从十六年前离开数学舞台后，这种边缘性则是我有意选择的结果。正是这一选择，无疑引发了“无懈可击的集体意志”的报复，欲从数学中抹去我名字的所有痕迹，连同我为之服务的愿景。

然而，在这些偶然的差异之外，我认为我察觉到了这种“边缘性”的一个共同原因，我感到这是本质性的。这个原因，我并未在历史环境中看到，也不在于“性情”或“性格”的特殊性（这些无疑在他与我之间，如同人与人之间一样，存在差异），更不用说是在“天赋”的层面上（伽罗瓦的天赋显然惊人，而相比之下，我的则显得谦逊）。如果确实存在一种“本质上的亲缘关系”，我是在一个更

<sup>75</sup>参见“伽罗瓦的遗产”（ReSI，第7节）。

<sup>76</sup>我深信，伽罗瓦若在世，其成就将远超于我。一方面，因其非凡的天赋（这是我未曾分享到的）。另一方面，他可能不会像我一样，将大部分精力分散于无尽的、精细的整理工作中，去逐步完善那些已或多或少掌握的内容...



为谦卑、更为基础的层面上看到的。

在我的一生中，我曾在极少数场合感受到这样的亲缘关系。正是通过这种亲缘，我也感到与另一位数学家——我的前辈克劳德·谢瓦莱（Claude Chevalley）——的“亲近”<sup>77</sup>。我想说的联系是一种特定的“天真”或“纯真”，我曾有机会谈及这一点。它表现为一种倾向（往往不为周围人所欣赏），即用自己的眼睛去看待事物，而不是通过由某个或多或少广泛的人类群体慷慨提供的、因某种原因被赋予权威的专利眼镜。

这种“倾向”，或者说这种内心的态度，并非成熟的专利，而是童年的特权。它是与生命一同降临的礼物——一份谦逊而又令人敬畏的礼物。这份礼物常常深埋心底，有些人能够或多或少地保留它，或者或许能够重新发现它……

我们也可以称之为孤独的礼物。

---

<sup>77</sup>我在《收获与播种》中多处提及克劳德·谢瓦莱，特别是在“与克劳德·谢瓦莱的相遇——或自由与善意”一节（ReS I 第 11 节），以及“告别克劳德·谢瓦莱”笔记中（ReS III，笔记第 100 号）。