

## 18.6. Les chantiers désolés

### 18.6.1. (1) Ce qui reste en suspens

**Note** 176'  $\diamond$  (25 mars) La nuit dernière, j'ai passé au lit plusieurs heures à me remettre dans le bain du "yoga des motifs", au lieu de m'endormir tranquille comme je devrais. Et tantôt encore, au lieu de me remettre à mes notes, j'ai passé encore une heure ou deux à gribouiller des diagrammes d'implications pour les conditions intrinsèques qui me sont connues sur une classe de cohomologie de De Rham (d'une variété projective non singulière sur un corps de car. nulle, disons) pour qu'elle soit "algébrique". J'ai trouvé **douze** variantes, en tout et pour tout, des conjectures de Hodge et de Tate<sup>971</sup>(\*). En même temps, j'ai pu me convaincre qu'on devait avoir à peu près en mains ce qu'il faut pour définir "la" catégorie (triangulée) des motifs sur un schéma de type fini sur  $\mathbb{Z}$ , ou du moins une approximation très serrée de celle-ci (à supposer que ce ne soit pas encore "la" bonne), à condition toutefois qu'on dispose d'une théorie du "foncteur mystérieux", que j'avais postulée vers la fin des années soixante <sup>972</sup>(\*\*).

Ce n'est pas le lieu ici de m'étendre à ce sujet, certes. Mais dès à présent je vois que c'est le moment ou jamais, vu l'état de lamentable abandon où je vois le thème motivique quinze ans après l'avoir laissé en des mains douteuses, de tracer quelques lignes-force des idées auxquelles j'étais parvenu naguère. Je n'ai pas le coeur d'attendre encore, le temps de trouver le loisir (une fois achevé "A la Poursuite des Champs") d'écrire "le" livre systématique qu'il faudrait écrire ; ce récit circonstancié d'un rêve, comme premier  $\diamond$  grand pas pour que le **rêve** prenne racine, enfin ! dans le terreau des formulations soigneusement mûries (et publiées...), et qu'il s'épanouisse suivant sa nature propre. En plus d'un premier jalon déjà prévu et annoncé pour ce livre de "mathématique-fiction", savoir une esquisse du formalisme algébrique de dualité dit "des six opérations", je vais donc joindre au volume 3 des Réflexions<sup>973</sup>(\*) un court travail où je compte poser quelques questions cruciales liées aux motifs et aux cycles algébriques. J'ai eu peine de les voir croupir dans un tombeau, et il me tarde de les voir revenir à la lumière du jour et participer à nouveau au rythme des saisons...

Cela fait plus de cinq semaines que la réflexion est revenue sur l'Enterrement, sans plus le quitter. C'est sans doute pourquoi la pensée des "orphelins", laissés pour compte dans un monde malade, m'est revenu dernièrement avec une certaine insistance. La dernière note où il est question de façon circonstanciée d'un de ces orphelins, est "La mélodie au tombeau - ou la suffisance" (n° 167), sur un thème tout proche de celui de la réflexion motivique de la nuit dernière et de tantôt (dont je viens de parler). C'était il y a un mois jour pour

<sup>971</sup>(\*) (27 mars) Chacune de ces douze variantes devrait donner lieu, pour tout schéma de base de caractéristique nulle  $X$ , à une "catégorie de coefficients" d'un type correspondant sur  $X$  (où la notion de "type de coefficients" est celle dont il a été question dans la note "La mélodie au tombeau - ou la suffisance", n° 167). Si la conjecture envisagée est vraie, cette catégorie de coefficients devrait contenir celle des motifs sur  $X$  comme une sous-catégorie (triangulée) pleine (la conjecture n'étant autre que cette même assertion, dans le cas particulier où  $X$  est le spectre d'un corps...). Pour des précisions, je renvoie à la partie du volume 3 des Réflexions qui sera consacrée à la théorie des motifs ("Les motifs mes amours").

C'est dire aussi que ces douze variantes de conjectures bien connues, donnent lieu à autant de notions différentes (à priori du moins) d'une notion de "motif" sur un corps de caractéristique nulle. Cela permettra à l'avenir à onze émules de mon ami Pierre de "découvrir" chacun sa propre notion de motif, tout en faisant mine d'ignorer celles des autres et surtout (comme il est de rigueur depuis quinze ans...) un certain défunt (connu surtout pour sa prédilection pour les détails inutiles...).

<sup>972</sup>(\*\*) Cette question du "foncteur mystérieux", établissant le "chaînon manquant" entre cohomologie cristalline en car.  $p$  (via la notion de  $F$ -cristal filtré,  $F$  comme "Frobénius"), et cohomologie  $p$ -adique en car. nulle, question visiblement cruciale pour notre compréhension de la cohomologie des variétés algébriques, n'a toujours pas été abordée sérieusement, près de vingt ans après que je l'aie soulevée en termes on ne peut plus clairs...

<sup>973</sup>(\*) Dans l'état actuel de mes projets de publication, les premières quatre parties de Récoltes et Semailles (se terminant avec la troisième et dernière partie de l'Enterrement) doivent former les volumes 1 et 2 des Réflexions. Le volume 3 sera formé de la cinquième partie de R et S (notes de lecture sur l'autobiographie de C.G. Jung) et d'un certain nombre de textes plus courts, dont la plupart ont été annoncés dans l'Introduction. Le premier tome de "A la Poursuite des Champs" est donc prévu comme quatrième volume des Réflexions.