pour autant bâcler ce peu qui reste encore à voir et à dire...), et de faire retour en moi-même...

En plus du travail sur les notes, il y a autre chose ces derniers jours qui fait diversion. C'est la reprise, comme malgré moi, d'une réflexion mathématique. J'ai compris depuis quelques jours qu'une construction en forme d'une théorie des motifs, avec toute l'ampleur que je lui voyais il y a vingt ans, n'est nullement aussi loin "à l'horizon" qu'il m'avait semblé. Il se pourrait même qu'une théorie "pleinement adulte", avec le formalisme complet des six opérations (plus la bidualité), soit une question de quelques années de travail seulement, pour quelqu'un qui s'y investirait tout entier (sans dégrader son énergie créatrice par des dispositions fossoyantes). Il m'apparaît aussi qu'il y a deux "clefs"[981](**) pour la description explicite de "la" catégorie des motifs◇ sur un schéma, disons de type fini sur la base absolue $\mathbb{Z}$ (cas auquel on devrait toujours pouvoir se ramener). D'une part, il y a la théorie du "foncteur mystérieux", avec une généralité et une souplesse suffisante pour passer aux catégories triangulées idoines, permettant de relier coefficients de De Rham - Mebkhout et coefficients p-adiques ordinaires (en car. nulle). D'autre part, il y a la question de la construction explicite de la catégorie des motifs sur un corps **fini** k (par une construction "purement algébrique", de préférence, sans référence à la géométrie algébrique sur k), et de plus, du foncteur "cohomologie motivique" allant des schémas séparés de type fini sur k (et pour commencer, des schémas projectifs et lisses) vers cette catégorie. J'avais construit cette dernière à équivalence près, en utilisant heuristiquement les conjectures de Weil et celles de Tate[982](*).

---

[981](**) Il y a pourtant une troisième "clef", que je ne mentionne pas ici parce que le problème en question me paraît (à tort ou à raison) moins délicat. Il s'agit de la bonne définition des "coefficients de De Rham-Mebkhout" (d'abord sans filtrations ni F-structures) au dessus, disons, d'un schéma lisse sur la base absolue $\mathbb{Z}$. Cette définition devrait en même temps fournir la clef de "la" bonne définition des coefficients cristallins généraux en car. $p > 0$, que mes chers ex-élèves (Berthelot en tête cette fois) n'ont toujours pas su ou voulu dégager.

Quand, en juin 83 (il va y avoir deux ans) Mebkhout m'expliquait sa "philosophie" autour du théorème du bon Dieu, j'avais l'impression que sa description "purement algébrique" (type "De Rham") pour la catégorie des coefficients discrets constructibles (sur $\mathbb{C}$) d'un schéma lisse sur le corps $\mathbb{C}$ des complexes, était duale de l'approche (jamais publiée) suivie par Deligne dans le séminaire (déjà mentionné ailleurs) donné par lui à l'IHES en 1969/70 (sauf erreur), à coups de promodules à connexion. Je présume que le passage d'un point de vue à l'autre se fait par le foncteur dualisant $R\underline{Hom}(.,\underline{O}_X)$ par rapport au faisceau structural du schéma envisagé, qui transforme $\mathscr{D}_X$-Modules de type fini (qu'on peut considérer comme des "$\underline{O}_X$-Modules indcohérents" munis d'une connexion intégrable) en des modules "pro-cohérents" (munis également d'une connexion intégrable). L'avantage du point de vue de Mebkhout, c'est qu'il fournit une expression algébrique simple et profonde (M-cohérence, holonomie, régularité) pour les "bons coefficients", qui manquait à Deligne. L'avantage du point de vue de Deligne, c'est qu'il fournit une équivalence (au lieu d'une antiéquivalence) avec les coefficients de nature transcendante qu'il s'agit d'exprimer, et qu'il se prête mieux à l'expression de la structure multiplicative (produit tensoriel) pour la catégorie de coefficients envisagée. Je présume qu'en pratique, on aura souvent intérêt à travailler sur les deux tableaux à la fois, mutuellement duals l'un de l'autre. L'interprétation de Deligne me semble plus proche d'une intuition géométrique directe, via celle de module (ou promodule) à connexion intégrable. Cela s'exprime notamment par le fait que (si le corps de base est $\mathbb{C}$) à un faisceau constructible de $\mathbb{C}$-vectoriels correspond un promodule à connexion unique, au lieu d'un complexe de tels promodules. C'est pourquoi (à mon grand regret, on le devine...) je prévois que c'est son point de vue (qu'il avait pourtant enterré sans regrets, lui, comme pour enterrer par là même le problème des coefficients légué par le maître désavoué...) qui sera le mieux adapté pour développer le formalisme des six variances, et comme troisième ingrédient - clef dans la construction des catégories de motifs.

(9 mai) Voir aussi à ce sujet la sous-note "... et l'entrave", n° 171(viii), ainsi que "Les cinq photos" (n° 171 (ix)).

[982](*) Si je me rappelle bien, je m'étais borné à décrire alors la catégorie des motifs semi-simples. Une variante immédiate de la construction (en suivant le même principe) donne d'ailleurs un candidat plausible pour la catégories des motifs pas nécessairement semi-simples. Quand je parle ici de "motifs", il s'agit en fait d' "isomotifs" ou motifs à isogénie près. Mais en utilisant les foncteurs "réalisation ℓ-adique" pour tout nombre premier ℓ, on arrive à reconstituer à partir de là la catégorie des motifs-pas-iso (où les Hom seront donc des modules de type fini sur $\mathbb{Z}$, non sur $\mathbb{Q}$).

Quand je dis que ma construction utilisait heuristiquement la conjecture de Tate, il ne faut pas le prendre au sens littéral. S'il est vrai qu'il existe (au dessus d'un corps fini, en l'occurrence), sur un schéma lisse projectif, des classes de cohomologie qui sont "motiviques" (dans un sens qui reste à dégager justement) sans être "algébriques" (i.e. sans provenir de cycles algébriques), alors il y a lieu de réénoncer la conjecture de Tate (tout comme celle de Hodge d'ailleurs, cette fois au dessus de $\mathbb{C}$) en y remplaçant "classes algébriques" par "classes motiviques". A supposer qu'on arrive bien (comme je le suggère plus loin) de définir le foncteur cohomologique canonique (et présumé "universel" dans un sens convenable) sur la catégorie des schémas projectifs et lisses sur le corps fini k, vers la catégorie (dite "des motifs semi-simples sur k") déjà construite, cela fournira ipso facto une définition en forme des classes de cohomologie qu'on appellera "motiviques", comme les éléments de $Hom(T^i, H^{\cdot}_{mot}(X))$ (en dimension $2i$), où T est l'objet de Tate, et $H^{\cdot}_{mot}$ est le foncteur hypothétique envisagé. C'est bien pourquoi la construction de ce