Note 168(i) I l'opération "Motifs"

En m'inspirant de certaines idées de Serre, et du désir aussi de trouver un certain "principe" (ou "motif") commun pour les divers "avatars" purement algébriques connus (ou pressentis) pour la cohomologie de Betti classique d'une variété algébrique complexe, j'avais introduit vers les débuts des années soixante la notion de "motif". Tout au long des années soixante et surtout à partir de 1963⁴⁰⁰(**), et en marge de mes tâches de rédaction de fondements, j'ai développé sur ce thème un "yoga" (ou "philosophie") à la fois riche, et précis. Cette vaste théorie, qui restait conjecturale et le restera sans doute pendant quelques générations encore 401 (***), offrait pourtant dans l'immédiat (et jusqu'à aujourd'hui encore) un guide très sûr pour s'y reconnaître dans les situations ou intervient la cohomologie des variétés algébriques, tant pour deviner "ce qu'on est en droit d'en attendre", que pour suggérer "les bonnes notions" à introduire et parfois, pour fournir des approches vers des démonstrations. Je dis à ce sujet dans l' Introduction à Récoltes et Semailles ("La fin d'un silence", p. xviii):

"Parmi toutes les choses mathématiques que j'avais eu le privilège de découvrir et d'amener au jour, cette réalité des motifs m'apparaît encore comme la plus fascinante, la plus chargée de mystère - au coeur même de l'identité profonde entre la "géométrie" et l' "arithmétique". Et le "yoga des motifs" auquel m'a conduit cette réalité longtemps ignorée est peut-être le plus puissant instrument de découverte que j'aie dégagé dans cette première période 402 (*) de ma vie de mathématicien."

Mis à part des esquisses provisoires d'une construction explicite possible (parmi de nombreuses autres) pour la catégorie des motifs semi-simples sur un corps, les idées que j'avais développées sur ce thème dans mes notes personnelles sont restées au stade de la communication orale. J'étais bien trop absorbé par de nombreuses autres tâches de rédaction de textes de fondements 403 (**) pour trouver le loisir des quelques mois requis pour développer mes notes manuscrites, de façon à en faire un "maître d'oeuvre" d'ensemble de la vision intérieure qui s'était développée en moi, suffisamment "fouillé" pour me paraître publiable. A partir de 1965 et jusqu'au moment de mon départ de la scène mathématique en 1970, mon interlocuteur privilégié pour mes méditations motiviques (et autres), et le seul aussi qui ait pleinement assimilé le yoga des motifs et qui en ait senti toute la portée, a été Pierre Deligne.

On trouvera des précisions au sujet du "yoga des motifs" (plus circonstanciées que dans la partie de l' Introduction dont est extrait le passage cité) à la fin de la note "Mes orphelins" (n° 46) et surtout (concernant notamment la genèse du yoga) dans "Souvenir d'un rêve - ou la naissance des motifs" (n° 51). Pour l'insertion du "yoga des motifs" dans le formalisme des six opérations (lequel reste, aujourd'hui encore et depuis mon

⁴⁰⁰(**) L'année 1963 est celle du "démarrage" en force de la cohomologie étale (développée dans le séminaire SGA 4 en 1963/64), lequel apportait enfi n une eau abondante au moulin des réflexions motiviques, qui jusque là, avaient un peu fait fi gure de spéculations. C'est dès l'année suivante que je développe le formalisme du "groupe de Galois motivique", dont le fondement conceptuel circonstancié a été développé (suivant le programme de théorie que je lui avais soumis) dans la thèse de N. Saavedra, parue seulement en 1972 (Springer Verlag, Lecture Notes n° 265).

⁴⁰¹(***) (8 avril) Il me semble à présent que cette théorie n'est pas aussi loin "à l'horizon" qu'il avait pu me sembler - pour peu seulement qu'on fi nisse enfi n par s'y atteler! Voir à ce sujet les commentaires dans la note "L'avare et le croulant" (n 177) du 27 mars.

⁴⁰²(*) Si je fais ici restriction à "cette première période de ma vie de mathématicien", c'est en pensant au "yoga de géométrie algébrique anabelienne", qui me paraît être d'une profondeur et d'une portée comparables, Il en est question, tant soit peu, dans "Esquisse d'un Programme", qui sera inclus dans les "Réfèxions" à la suite de Récoltes et Semailles.

^{403(**)} Il s'agit avant tout des textes EGA (Eléments de Géométrie Algébrique, en collaboration avec Jean Dieudonné) et SGA ("Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie), ces derniers rédigés seuls ou en collaboration (avec des élèves notamment), suivant des idées directrices et des maîtres d'oeuvre de mon crû. Pendant les années 1959 à 1969, le "débit" moyen de ces textes, qui tous sans exception sont devenus des textes de références standard, a été de mille pages par an environ. Ce travail de fondements s'est arrêté net du jour au lendemain, dès mon départ de la scène mathématique. Voir à ce sujet la note "Yin le Serviteur, et les nouveaux maîtres" (n° 135).