

être plus longue, qu'elle est plus "difficile". Dans l'une et l'autre étape, il fallait **une idée** : l'idée de "dévisser" dans un cas (chose qu'on n'avait jamais songé à faire dans ce genre de situations, et pour cause quand il s'agit de formules de points fixes pour toute autre correspondance que celle de Frobenius !); dans l'autre cas, une idée sans doute plus délicate à formuler, inspirée d'une formule de points fixes (due à Nielsen-Wecken⁵⁰⁹(**)) plus sophistiquée que la formule originelle de Lefschetz, et mise en oeuvre en introduisant un découpage soigneux du faisceau de coefficients, s'exprimant en terme de catégories dérivées convenables⁵¹⁰(***). La deuxième étape a été plus longue, il se trouve : lorsqu'il s'est agi de la mettre au point avec toute la généralité qui lui incombait⁵¹¹(*) (vu qu'il existe d'autres endomorphismes d'une courbe que celui de Frobenius), il y avait tout un "tapis" de traces non commutatives "à la Stallinge" qui se trouvait finalement coller après et qu'il m'a fallu développer avec soin. C'était long et c'était "facile" - et c'était une chose aussi qui **devait** être faite, s'était bien clair. Mais même trouver ce genre d'idées qui rendent un travail "facile" (ou tout simplement, possible...), fait partie pour moi du "travail de routine". Cela contribue à donner son charme à ce travail, qui en fait autre chose, le plus souvent, qu'un simple tournage de manivelle.

La partie **créatrice** du travail, par contre, c'est l'idée **enfantine** : celle que tout le monde aurait dû voir depuis des années, quand ce n'est depuis des siècles ou des millénaires - et que personne pourtant ne voyait, alors qu'elle crevait les yeux pendant tout ce temps et qu'on devait faire un grand détour autour, à tous les coups, pour pas cogner dedans !

Quand on rencontre une telle idée, qu'on soit "tombé dessus" (c'est le cas de le dire...) tout seul, ou que quelqu'un d'autre vous l'explique (comme Verdier m'en a expliqué une, un jour), on se sent tout idiot : c'est pas permis quand même qu'on l'ait pas vue avant, alors que c'était justement la chose la plus naturelle de

de base en cohomologie étale (pour un morphisme propre, et par un morphisme lisse), qui constituent les deux énoncés-clef qui rendent "vivable" (comme écrit Deligne) ladite cohomologie, et le "théorème de comparaison" pour Rf_1 , entre la cohomologie étale et la cohomologie transcendante (pour des schémas de type fini sur le corps des complexes). (Il y a également le théorème de Lefschetz (dit "faible") pour les morphismes affines.) Psychologiquement parlant, c'est une fois arrivé à me réduire à de telles situations dites "irréductibles" que j'avais l'impression que c'était (plus ou moins) "gagné", que le théorème attendu allait bel et bien "sortir", et l'expérience a bien confirmé en chacune de ces : occasions que ce sentiment ne m'avait pas trompé. Techniquement parlant, pourtant, ce sont les déviassages qui représentent l'étape dite "facile". Il se trouve que par une sorte de "providence" qui m'a alors beaucoup frappé, les ingrédients nécessaires pour traiter les deux cas "irréductibles", dans l'un et l'autre théorème de changement de base, avaient été développés par moi (sans me douter de rien), dans SGA 1 pour le premier, dans SGA 2 pour le deuxième, trois et deux ans avant...

⁵⁰⁹(**) (10 avril) C'est de ma bouche d'ailleurs, en même temps que les autres auditeurs de SGA 5, que Deligne a appris cette formule de "Nielsen-Wecken" et sa transposition en cohomologie étale, ce qui l'a dispensé d'avoir à jamais regarder les trois beaux articles (en allemand) de ces auteurs (parus entre 1941 et 1943), et lui a servi de la façon assez particulière qu'on sait (voir la sous-note "Les vraies maths..." , n° 169₅).

⁵¹⁰(***) Le langage des catégories dérivées est indispensable dans cette démonstration. Après mon départ, et jusque vers l'année de la parution du volume nommé SGA 4 $\frac{1}{2}$, mes élèves cohomologiques ont instauré un boycott tacite et efficace contre les catégories dérivées, lesquelles avaient constitué l'outil conceptuel clef pour développer le formalisme de dualité ("six opérations" et bidualité), dans le contexte des coefficients "cohérents", puis "discrets". Malgré son rôle crucial dans la démonstration de la formule de Lefschetz-Verdier, et dans celle aussi des formules de dualité "classiques" dans le contexte étale, ce formalisme lui-même, en tant que structure mathématique et ensemble conceptuel cohérent, a été l'objet du même boycott et qui dure jusqu'à aujourd'hui encore (à commencer par le **nom** même "six opérations", qui est toujours anathème).

Il est possible que ce soient les nécessités de la démonstration de la formule des traces qui aient incité Deligne, en 1977, à faire un premier pas vers la levée du boycott sur les catégories dérivées, par l'exhumation dans le volume-pirate d'un "Etat zéro" squelettique de la "thèse" de Verdier (texte où aucune mention n'est faite de mon nom). Voir à ce sujet la note "Le partage" (n° 170) consacrée à "l'opération III", et pour plus de détails sur la cocasse affaire de la "thèse", les notes "Le compère" et "Thèse à crédit et assurance tous risques" (n° 63", 81).

⁵¹¹(*) (23 avril) Généralité qualifiée, comme de juste, de "superflue" par Illusie dans son Introduction à l'édition-massacre de SGA 5 (deuxième alinéa), en se faisant l'obséquieux écho de son prestigieux ami Deligne, lequel réfère (sans autres précisions) aux "détails inutiles" qu'il aurait "élagués". Ce débinage le dispense en même temps une fois pour toutes de laisser soupçonner au lecteur qu'il existe en dimension un une formule des traces explicite plus générale que celle qu'il expose pour Frobenius, où il reprend pas à pas les étapes de ma démonstration tout en donnant l'impression que celle-ci est de son crû. Voir la sous-note suivante "Les double-sens - ou l'art de l'arnaque", n° 169₇.