dans l'appellation de la conjecture - quelques années plus tard déjà cela n'aurait plus été de mise…

(6 juin) Je prends cette occasion pour expliciter ici quelle avait, été la conjecture que j'avais énoncée dans le séminaire dans le cadre schématique, en y signalant sûrement la variante évidente dans le cadre analytique complexe (voire, rigide-analytique). Je la concevais comme un théorème du type "Riemann-Roch", mais à coefficients discrets au lieu que ce soit à coefficients cohérents. (Zoghman Mebkhout m'a dit d'ailleurs que son point de vue des $\mathscr{D}$-Modules doit permettre de considérer les deux théorèmes de Riemann-Roch comme contenus dans un même théorème de Riemann-Roch cristallin, qui représenterait donc en caractéristique nulle la synthèse naturelle des deux théorèmes de Riemann-Roch que j'ai introduits en mathématique, l'un en 1957, l'autre en 1966.) On fixe un anneau de coefficients Λ (pas nécessairement commutatif, mais noethérien pour simplifier et de plus de torsion premier aux caractéristiques des schémas envisagés, pour les besoins de la cohomologie étale...). Pour un schéma X on désigne par

$$\mathrm{K.}(X, \Lambda)$$

le groupe de Grothendieck formé avec les faisceaux étales constructibles de Λ-modules. En utilisant les foncteurs $Rf_!$, ce groupe dépend fonctoriellement de X, pour X noethérien et des morphismes de schémas qui sont séparés et de type fini. Pour X régulier, je postulais l'existence d'un homomorphisme de groupes canonique, jouant le rôle du "caractère de Chern"◊ dans le théorème de RR cohérent,

$$\mathrm{ch}_X : \mathrm{K.}(X, \Lambda) \to \mathrm{A}(X) \otimes_Z \mathrm{K.}(\Lambda), \tag{15.1}$$

où $\mathrm{A}(X)$ est l'anneau de Chow de X et $K.(\Lambda)$ le groupe de Grothendieck formé avec les Λ-modules de type fini. Cet homomorphisme devait être uniquement déterminé par la validité de la "formule de Riemann-Roch discrète", pour un morphisme **propre** $f : X \to Y$ de schémas régulier, laquelle formule s'écrit comme la formule de Riemann-Roch cohérente, avec le "multiplicateur" de Todd remplacé par la classe de Chern relative totale :

$$ch_Y(f_!(x)) \quad = \quad f_*(ch_X(x)\, c(f)\,, \tag{15.2}$$

où $c(f) \in A(X)$ est la classe de Chern totale de f. Il n'est pas difficile de voir que dans un contexte où on dispose de la résolution des singularités sous la forme forte de Hironaka, la formule de RR détermine bien les ch_X de façon unique.

Bien entendu, on suppose qu'on est dans un contexte où l'anneau de Chow est défini. (Je n'ai pas eu connaissance que quelqu'un ait seulement essayé d'écrire une théorie des anneaux de Chow, pour des schémas réguliers qui ne seraient de type fini sur un corps.) Sinon, on peut travailler aussi dans l'anneau gradué associé à l'anneau "de Grothendieck" $K^\circ(X)$ habituel dans le contexte cohérent, filtré de la façon habituelle (voir SGA 6). On peut aussi remplacer $A(X)$ par l'anneau de cohomologie ℓ-adique pair, somme directe des $H^{2i}(X, \underline{Z}_\ell(i))$. Cela a l'inconvénient d'introduire un paramètre artificiel ℓ, et de donner des formules moins fines "purement numériques", alors que l'anneau de Chow a le charme d'avoir une structure continue, détruite en passant à la cohomologie.

Déjà dans le cas où X est une courbe algébrique lisse sur un corps algébriquement clos, le calcul de ch_X fait intervenir des invariants locaux délicats du type Artin-Serre-Swan. C'est dire que la conjecture générale est une conjecture profonde, dont la poursuite est liée à une compréhension des analogues en dimension supérieure de ces invariants.

Remarque. Désignant de même par $K^\cdot(X, \Lambda)$ "l'anneau de Grothendieck" formé avec les complexes construc-