se résumer en **trois grands théorèmes**, tous les trois intimement liés aux idées que j'avais développées dans les années cinquante et soixante, mais dont moi (ni personne) n'avait su prévoir aucun[712](**).

Le premier grand théorème est le fruit principal des travaux de Mebkhout entre 1972 et 1976. Il concerne les faisceaux de **cohomologie locale** $\underline{H}^i_Y(\underline{O}_X$ (notion introduite indépendamment par Sato et par moi) du faisceau structural d'une variété analytique complexe lisse X, à supports dans un sous-espace analytique fermé Y. L'observation essentielle ici que personne n'avait songé à faire avant Mebkhout, c'est que les opérations de l'anneau $\mathscr{D}^\infty$ des opérateurs différentiels d'ordre infini sur X[713](***), du fait qu'ils ◊(opèrent sur l'argument $\underline{O}_X$, opèrent aussi sur ces faisceaux de cohomologie. D'autre part, dans le cadre "zariskien" de la géométrie algébrique, j'avais décrit ces faisceaux (vers la fin des années cinquante ?) comme des limites inductives de faisceaux $\underline{Ext}^i$. Cela a conduit Mebkhout, en analogie, à introduire une "partie algébrique" de la cohomologie locale, et une flèche canonique

$$\underline{H}^i_Y(\underline{O}_X)_{alg} \overset{\text{dfn}}{=} \varinjlim_n Ext^i_{\underline{O}_X}(\underline{O}_{X_n}, \underline{O}_X) \longrightarrow \underline{H}^i_Y(\underline{O}_X) \overset{\text{dfn}}{=} \underline{Ext}^i_{\mathbb{C}_X}(\mathbb{C}_Y, \underline{O}_X)\,, \tag{1}$$

où X_n désigne le n.ème voisinage infinitésimal de Y dans X, et $\mathbb{C}_X$, $\mathbb{C}_Y$ le faisceau constant $\mathbb{C}$ sur X resp. Y (ce dernier prolongé par zéro sur $X - Y$). La deuxième observation essentielle, c'est que cette fois l'anneau $\mathscr{D}$ des opérateurs différentiels ordinaires sur X opère sur le premier membre. Il était bien connu que le genre de faisceaux qu'on obtenait, aussi bien le membre de droite de nature transcendante, que le membre de gauche de nature "algébrique", étaient de dimensions assez prohibitives, en tant que $\underline{O}_X$-Modules - rien de cohérent, c'est sûr. Il est vrai aussi qu'on avait le sentiment (du moins du côté algébrique) qu'il y avait quand même un certain type de "finitude" ou de "cofinitude", en un sens que personne avant Mebkhout n'a songé à préciser. Le théorème remarquable de Mebkhout, c'est que le premier membre est un $\mathscr{D}$-Module, et que de plus, le deuxième membre (qui avait l'air encore plus intraitable) est simplement déduit du premier par le changement d' Anneaux

$$\mathscr{D} \longrightarrow \mathscr{D}^\infty$$

Comme le deuxième Anneau est connu pour être plat sur le premier, cela implique d'ailleurs que (1) est injectif. En même temps, vu le résultat de cohérence/ cela peut être considéré comme un théorème de finitude

---

711(*) La présente sous-note "Les trois jalons" est issue d'une note de bas de page à la note "L'oeuvre. . . " (n° 171 (ii)). Voir le signe de renvoi placé vers la fi n de cette note.

712(**) Comme je le signale dans la note "Les questions saugrenues" (n° 171(vi)), je connaissais pourtant depuis longtemps une variante du théorème du dualité globale de Mebkhout, pour un schéma relatif propre et lisse X/S, en termes de complexes d'opérateurs différentiels relatifs. De façon précise, si $L^\cdot$ et $L'^\cdot$ sont de tels complexes, "adjoints" l'un de l'autre, alors $Rf_*(L^\cdot)$ et $Rf_*(L'^\cdot)$, en tant qu'objets de la catégorie dérivées $D(S, \underline{O}_S)$, sont des complexes "parfaits" (localement représentables par des complexes de Modules libres de type fi ni à degrés bornés), et duals l'un de l'autre au sens habituel pour les complexes parfaits. Dans le cas où $S = Spec(\mathbb{C})$, ce théorème est plus ou moins équivalent à celui de Mebkhout (restreint au cas d'une variété analytique qui est algébrique et propre), avec cette différence importante cependant qu'il me manquait un point de vue "catégories dérivées", pour traiter des complexes d'opérateurs différentiels. D'autre part et surtout, je n'avais aucun soupçon que ces complexes (soumis à des conditions convenables dégagées par Mebkhout) forment un substitut parfait des "coeffi cients discrets" (ou coeffi cients de De Rham). Il était clair pour moi, d'autre part, dès l'année 1966 au moins, qu'il devait exister un tel substitut des coeffi cients $\mathbb{C}$-vectoriels algébriquement constructibles, ayant un sens pour des schémas relatifs en caractéristique quelconque, et mes idées cristallines étaient justement une première approche dans ce sens. Comme on le verra dans [Crystals] (ce sont les exposés cités dans la note précédente "Les cinq photos (cristaux et $\mathscr{D}$-Modules", n° 171(ix)), la logique interne de mes réflexions cristallines m'avaient pourtant amené à nouveau au contact des complexes d'opérateurs différentiels. J'étais alors tout près déjà de la philosophie de Mebkhout. Il fallait que mes élèves cohomologistes (et surtout Deligne, Berthelot, Illusie) soient bloqués par le syndrome d'Enterrement, pour ne pas avoir dégagé cette philosophie dès les années suivantes. (Moi-même étais alors pleinement occupé par d'autres tâches de fondements, et avais laissé le thème cristallin aux soins de mes élèves.)

713(***) Pour une défi nition de ces opérateurs, dont le nom fait peur au premier abord, mais qui donnent lieu à un formalisme en tous points parallèle à celui des opérateurs différentiels ordinaires, voir la partie (b) de la note précédente "Les cinq photos (cristaux et $\mathscr{D}$-Modules)" (n° 171 (ix)).