(avec les ◇ développements du séminaire SGA 5, faisant suite à SGA 4 en 1963/64), d'une **maîtrise complète** de cette cohomologie, dans le cadre général de la cohomologie dite "étale" - sous forme du formalisme de dualité des "six opérations". Le principe de la définition de la cohomologie étale remonte à 1958, et j'ai prouvé les "résultats-clef" nécessaires et suffisants pour le formalisme complet (y compris les théorèmes du type "Lefschetz faible" et les notions de profondeur cohomologique dans le contexte étale) en février et mars 1963.

**Fil 2**. Avec le yoga des **motifs**, j'ai découvert **la** philosophie qui permet de relier entre elles les différentes cohomologies $\ell$-adiques (et autres) d'une variété, comme étant autant de "réalisations" différentes d'un "motif" qui est commun à toutes, et qui est la "cohomologie motivique" de cette variété. Cette philosophie prend naissance au début des années soixante, avec un "yoga des poids" directement inspiré des conjectures de Weil (et d'une idée de Serre inspirée par celles-ci, concernant une notion de "nombres de Betti virtuels" associés à une variété algébrique[419](*)). Elle s'enrichit en 1964, dans l'élan du démarrage de la cohomologie $\ell$-adique, de la notion cruciale de "groupe de Galois motivique".

**Fil 3**. M'inspirant des idées de Monsky-Washnitzer, qui avaient construit une théorie cohomologique (à coefficients constants) "$p$-adique" pour les variétés algébriques **lisses** et **affines** en car. $p > 0$, j'ai dégagé en 1968 une définition générale pour une "cohomologie "$p$-adique", que j'appelle aussi **cohomologie cristalline**[420](**). Cette ◇ théorie était censée englober des "coefficients" (dits "cristallins") pas nécessairement constants ni localement constants, et donner lieu à une formalisme des "six opérations" tout comme la théorie $\ell$-adique. Il était acquis d'emblée, tout au moins, que pour des variétés **lisses**, cette cohomologie a les relations qu'on attendait avec la cohomologie de De Rham, et qu'elle généralise celle de Monsky-Washnitzer[421](*).

des hypothèses de résolution des singularités et de "pureté cohomologique" (cf.a)), qui pour le moment ne s'appliquent **pas** aux variétés algébriques de car. $p > 0$. Je signale cependant que dans le cadre des coeffi cients de torsion (comme opposés aux coeffi cients $\ell$-adiques), le formalisme du dualité des six opérations (incluant donc la dualité de Poincaré) avait été établi par moi en 1963 sans conditions de fi nitude. Cela impliquait par exemple la "fi nitude" pour les $\dot{H}$ à coeffi cients constants ou localement constants (de torsion ou $\ell$-adiques) pour un schéma lisse (pas nécessairement propre) sur un corps algébriquement clos.

**c.** Validité du "théorème de dibualité" sur un schéma régulier excellent. Situation similaire à b).

La situation a été améliorée notablement, par l'élégante démonstration par Deligne (en 1973 ?) du théorème de fi nitude, pour un morphisme de schémas de type fi ni sur un schéma $S$ régulier de dimension $\leq 1$. Ce cas couvre la pluspart des applications (schémas algébriques sur un corps, schémas de type fi ni sur $\mathbb{Z}$ notamment). Dans la même situation d'un schéma $X$ de type fi ni sur un schéma régulier de dimension 1, et par des arguments simples similaires, Deligne parvient également à prouver le théorème de bidualité.

[419](*) Voir à ce sujet la sous-note n° 46 à la note "Mes orphelins" (n° 46).

[420](**) Cette terminologie est maintenant (et depuis longtemps) consacrée par l'usage, ainsi que l'expression "site cristallin". Les deux idées nouvelles (par rapport à celles de Monsky et Washnitzer) qui m'ont conduit à cette théorie, sont celle de **cristal** (de modules etc), liée à une idée de "croissance" au dessus d' "épaississements" (infi nitésimaux notamment) d'un schéma de départ, et d'autre part l'introduction d'une structure de **puissances divisées** dans les idéaux d'augmentation des épaississements envisagés, de façon à assurer la validité d'un "lemme de Poincaré formel" (à puissances divisées). Grâce à ces deux ingrédients, la cohomologie de De Rham d'un schéma lisse sur $k$ s'interprète comme la cohomologie "ordinaire", à **coeffi cients dans le faisceau structural d'anneaux**, d'un "site cristallin" convenable.

Chose étrange, l'intuition cruciale de cristal (tout comme celle, d'une portée plus vaste, de topos) semble avoir été laissée pour compte par mes élèves, ainsi que le fi l conducteur (omniprésent dans mes réflexions cohomologiques) des "six opérations". C'est là, il me semble, la raison principale de la regrettable stagnation qu'on constate en cohomologie cristalline après mon départ, et également dans la théorie (étroitement apparentée) dite "de Hodge-Deligne", depuis le premier démarrage en force de l'une et de l'autre.

Il me semble d'ailleurs pour le moins plausible, pour ne pas dire évident, que dans l'une et l'autre direction, la philosophie développée (dans l'indifférence générale. . . ) par **Zoghman Mebkhout** aurait un rôle essentiel à jouer. Mais ses timides suggestions dans ce sens (à Berthelot en 1978) sont tombées visiblement en des oreilles sourdes, venant de la part d'un si insignifi ant personnage. . .

[421](*) La thèse de P.Berthelot, prenant comme point de départ mes idées, en fournit une justifi cation supplémentaire, en établissant un formalisme de dualité pour des variétés propres et lisses, suffi samment riche tout au moins pour écrire une expression