valent[703](*) au théorème de Mebkhout mentionné plus haut (datant de 1976, dès avant la démonstration du théorème du bon Dieu), concernant la $\mathscr{D}$-cohérence des faisceaux $\underline{H}^d_Y(\underline{O}_X)_{alg}$ (qui figurent dans (12) ci-dessus). C'est là un théorème profond, aboutissement de quatre années de travail, et utilisant toute la force de la résolution des singularités de Hironaka (sans compter le courage de l'ouvrier qui l'a dégagé et prouvé, à l'encontre de l'indifférence générale). La conséquence [703](*) que je viens de signaler est une relation profonde entre coefficients de De Rham (tels que je les entrevoyais à partir des années 1966) et complexes d'opérateurs différentiels, relation que je n'avais aucunement prévue (ni Deligne non plus, quand il a développé sa première approche vers les coefficients de De Rham). Quant à la condition d'holonomie et de régularité sur le complexe d'opérateurs différentiels envisagé, elle doit être équivalente (à posteriori, grâce au providentiel théorème du bon Dieu) à la condition de "finitude" (plus "régularité") de Deligne (que j'ai omis tantôt d'expliciter, en introduisant la catégorie $DRD^*(X) = Del^*(X)$). C'est la suivante : les pro-faisceaux de cohomologie de $P^\infty(L^\cdot)$ se "dévissent" localement par des suites de composition, de telle façon que les facteurs successifs puissent se décrirent (via le foncteur de Deligne) par des système locaux de $\mathbb{C}$-vectoriels sur des sous-espaces $Y - Z$ de X (où $Z \subset Y \subset X$ sont des sous-espaces analytiques fermés de X). Pour achever de donner à ce critère un aspect "algébrique", il suffit de remplacer le système local de $\mathbb{C}$-vectoriels par un faisceau **cohérent** stratifié sur $Y - Z$, soumis à la condition que la connexion qui exprime la stratification (NB on peut supposer $Y - Z$ lisse) soit "régulière" au voisinage de Z, au sens de Deligne[704](**). (NB. Le pro-faisceau associé s'obtient en faisant croître le (cristal qu'on a sur $Y - Z = T$ au-dessus des voisinages infinitésimaux de T, et en "écrasant" le long de Z, pour avoir des faisceaux cohérents partout, pas seulement dans le complémentaire de Z…)

(d) Cristaux et co-cristaux - pleinement fidèles ? Quand on ne suppose plus X lisse, il reste donc, pour décrire des "coefficients de De Rham" sur X, en plus de la "photo" de nature transcendante $\underline{Cons}^*(X, \mathbb{C})$, les deux "photos" (de nature cristalline l'une et l'autre) $DRM^*(X)$ ou $Del^*(X)$, lesquelles elles, ont un sens purement algébrique. J'ai esquissé hier (dans (a)) un principe de définition pour $DRM^*(X)$, et aujourd'hui pour la catégorie $DRD^*(X)$. C'est cette dernière qui dès à présent est pour moi parfaitement intelligible. Comme je l'ai signalé hier (voir (a), note de b. de p.(***) page 998), il y a lieu ici d'affiner le point de vue des pro-Modules stratifiés, par celui des cristaux en pro-Modules (pro-cohérents)[705](*). Le seul ennui qui reste encore avec ce point de vue, c'est le sorite "pro" qu'il obligera à développer, sorite qui (selon ma modeste expérience en de telles matières) risque de prendre des dimensions prohibitives ! Ces cristaux de promodules, qui associent, à chaque épaississement infinitésimal U' d'un ouvert U de X, un Module pro-cohérent sur U', "de façon compatible avec les images inverses" pour des morphismes $U'' \to U'$ d'épaississements, ne peuvent même pas s'interpréter comme des pro-faisceaux sur le site cristallin (ou ce qui revient au même, sur le topos

[703](*) (26 mai) Ici encore, je suis "un peu vif", le résultat de 1976 ne suffit pas. Comparer avec commentaire de la note de b. de p. (***) page 1008.

[704](**) Cette condition de régularité s'introduit ici de façon naturelle, compte tenu de l'équivalence de catégories dégagées par Deligne, entre les systèmes locaux de $\mathbb{C}$-vectoriels sur $Y - Z$, et les fibres à connexion intégrable sur $Y - Z$, munis d'une "structure méromorphe" le long de Z, et à connexion régulière le long de Z. Cette structure méromorphe (impliquant la possibilité de prolonger le Module cohérent sur $Y - Z$ en un Module cohérent sur Y, du moins localement au voisinage de chaque point de Z) était sous-entendue dans la description donnée tantôt.

Sauf erreur, quand on laisse tomber la condition de régularité dans la condition précédente (en supposant simplement donnée une structure méromorphe de E au voisinage de Z, pour pouvoir lui associer un Module pro-cohérent sur X tout entier, par le procédé de Deligne), on trouve une description "cohomologique" de la condition d'holonomie. La définition de Sato se fait par voie "microlocale" - je n'en ai jamais vraiment pris connaissance encore, j'avoue…

[705](*) (27 mai) Réflexion faite, j'ai même du mal à croire que le théorème de Deligne $\underline{Cons}^*(X, \mathbb{C}) \approx \underline{Del}^*(X)$ soit vrai pour X non lisse, quand $\underline{Del}^*(X)$ est défini comme le fait Deligne sans recours au site cristallin. C'est peut-être même pour s'en être aperçu qu'il a finalement préféré saborder toute la théorie, plutôt que de consentir à réintroduire le site tabou… (Comparer avec la note "… et entrave", n° 171 (viii).)