été introduite d'abord par H. Cartan, et a été reprise par Serre dans son travail classique FAC (Faisceaux algébriques cohérents). C'est ce travail qui a été l'impulsion initiale pour une réflexion me conduisant vers la notion de "schéma". Ce qui manquait encore dans l'approche de Cartan reprise par Serre, pour englober tous les types d' "espaces" ou "variétés" qui se sont présentés jusqu'à ce jour, c'est la notion de topos (c'est-à-dire justement "quelque chose" sur lequel la notion de "faisceau d'ensembles" ait un sens, et possède les propriétés familières).

Note 46_6 $^\diamond$Comme autres exemples remarquables de topos qui ne sont pas des espaces ordinaires, et pour lesquels il ne semble pas y avoir non plus de substitut satisfaisant en termes des notions "admises", je signalerai : les topos quotients d'un espace topologique par une relation d'équivalence locale (par exemple des feuilletages de variétés, auquel cas le topos quotient est même une "multiplicité" i.e. est localement une variété) ; les topos "classifiants" pour à peu près n'importe quelle espèce de structure mathématique (tout au moins celles "s'exprimant en termes de limites projectives finies et de limites inductives quelconques"). Quand on prend une structure de "variété" (topologique, différentiable, analytique réelle ou complexe, de Nash, etc... ou même schématique lisse sur une base donnée) on trouve dans chaque cas un topos particulièrement alléchant, qui mérite le nom de "variété universelle" (de l'espèce envisagée). Ses invariants homotopiques (et notamment sa cohomologie, qui mérite le nom de "cohomologie classifiante" pour l'espèce de variété envisagée) devraient être étudiés et connus depuis longtemps, mais pour le moment ça n'en prend nullement le chemin...

Note 46_7 Il s'agit des espaces X dont le type d'homotopie est décrit "de façon naturelle" comme celui d'une variété algébrique complexe. Celle-ci peut se définir alors sur un sous-corps $\mathbb{K}$ du corps des complexes, tel que $\mathbb{K}$ soit une extension de type fini du corps premier $\mathbb{Q}$. Le groupe de Galois profini $Gal(\bar{K}/K)$ opère alors de façon naturelle sur les invariants homotopiques profinis de X. Souvent (p.ex. quand X est une sphère homotopique de dimension impaire) on peut prendre pour $\mathbb{K}$ le corps premier $\mathbb{Q}$.

Note 46_8 (13 mai) Au moment où j'ai appris mes premiers rudiments de géométrie algébrique dans l'article FAC de Serre (lequel allait me "déclencher" en direction des schémas), la notion même de changement de base était pratiquement inconnue en géométrie algébrique, sauf dans le cas particulier du changement de corps de base. Avec l'introduction du langage des schémas, cette opération est devenue sans doute la plus couramment utilisée en géométrie algébrique, où elle s'introduit à tout moment. Le fait que cette opération reste encore pratiquement inconnue en topologie, sauf dans des cas très particuliers, m'apparaît comme un signe typique (entre bien d'autres) de l'isolement de la topologie par rapport aux idées et techniques provenant de la géométrie algébrique, et un tenace héritage de fondements inadéquats de la topologie "géométrique".

Note 46_9 $^\diamond$(5 juin) L'idée de Serre était qu'on devait pouvoir associer à tout schéma X de type fini sur un corps K, des entiers

$$h^i(X) \ \ (i \in N)$$

qu'il appelle ses "nombres de Betti virtuels", de telle façon que l'on ait :

a) pour Y un sous-schéma fermé et U l'ouvert complémentaire

$$h^i(X) \ = \ h^i(Y) + h^j(U)$$