quand le corps de base est le corps des complexes) - cette idée se trouve "entre les lignes" dans l'énoncé des célèbres conjectures de Weil (1949). C'est en termes cohomologiques, en tous cas, que Serre m'a expliqué les conjectures de Weil, vers les années 1955 - et ce n'est qu'en ces termes qu'elles étaient susceptibles de m' "accrocher" en effet.

Personne n'avait alors la moindre idée comment définir une telle cohomologie, et je ne suis pas sûr que personne d'autre que Serre et moi, pas même Weil si ça se trouve, avait seulement l'intime conviction que ça devait exister. On n'avait une bonne prise géométrique directe que sur le H^1, via la théorie des variétés abéliennes et leurs points d'ordre fini (développée par Weil), et via les variétés d' Albanese ou de Picard associées à une variété algébrique projective non singulière. Cette construction du H^1 suggérait que les corps de coefficients "naturels" devaient être les corps ℓ-adique $\mathbb{Q}_\ell$, pour ℓ nombre premier **distinct** de la caractéristique.

Pour ℓ égal à la caractéristique (quand celle-ci est non nulle), des résultats très partiels de Serre, probants surtout dans le cas des **courbes** algébriques, suggéraient qu'on devrait pouvoir prendre comme corps de base le corps des fractions de l'anneau des vecteurs de Witt de k (supposé parfait). On pouvait donc espérer qu'il y aurait une théorie ℓ-adique (avec grain de sel pour $\ell = p$) pour **tout** nombre premier ℓ - et en un sens convenable, elles devaient "toutes donner le même résultat". Enfin, quand k est de caractéristique nulle, de sorte qu'on dispose (au moins dans le cas X projective non singulière) des espaces de cohomologie de Hodge (qui avaient un sens pour k quelconque, depuis l'introduction par Serre de la théorie cohomologique "cohérente" des variétés algébriques) et ceux de De Rham (que j'avais introduits en m'inspirant de la cohomologie de De Rham différentiable), ceux-ci fournissaient dans l'immédiat des théories cohomologiques ayant toutes les propriétés ◇ voulues[416](*), et elles devaient donner encore "le même résultat" que les cohomologies hypothétiques ℓ-adiques.

Ces questions ont été au centre de mes réflexions et de mon oeuvre mathématique publiée et non publiée, entre les années 1955 et 1970 (année de mon départ de la scène mathématique). Si on met à part mes travaux en cohomologie cohérente (formalisme des "six opérations", formule de Riemann-Roch-Grothendieck), on peut dire, grosso modo, que l'essentiel de mon oeuvre cohomologique a consisté à dégager les réponses, ou des grandes lignes de réponses, à ces questions. Dans l'optique tout au moins des conjectures de Weil, agissant comme principale source d'inspiration, ma réflexion sur le thème cohomologique s'est matérialisée en quatre grands **courants**, ou "**fils**", s'entrelaçant étroitement pour former une même et vaste trame.

Fil 1- J'ai développé (avec l'assistance de collaborateurs[417](**)), un formalisme de la **cohomologie** $\ell-$ **adique** des schémas, pour ℓ premier aux caractéristiques résiduelles, ayant toutes les propriétés connues (et au delà...) de la cohomologie "discrète" familière des espaces topologiques. A trois questions ouvertes près[418](***), de nature technique, on peut dire qu'on disposait, "en principe" dès 1963, et "en fait" dès 1965/66

[416](*) J'avais notamment développé dès les années 50 le formalisme des classes de cohomologie (de Hodge et de De Rham) associées à un cycle algébrique.

[417](**) Le principal collaborateur pour le développement du formalisme de la cohomologie étale a été Artin. Les adaptations ℓ-adiques sont développées dans la thèse de mon ex-élève P. Jouanolou (qu'il n'a malheureusement pas pris la peine de publier, que je n'ai jamais tenue entre les mains, et qui est devenue introuvable). Je pense donner des précisions au sujet du développement de la cohomologie étale, dans des commentaires "historiques" que je compte joindre à l'Esquisse Thématique (à paraître dans les Réflexions à la suite de R et S).

[418](***) Ces trois "questions ouvertes" sont les suivantes :

a. La "conjecture de pureté cohomologique" (version étale) pour un sous-schéma régulier Y d'un schéma régulier X. L'énoncé pertinent est prouvé quand X et Y sont tous deux lisses sur un schéma de base S régulier (cas suffisant pour la plupart des applications), et également (par Artin, en utilisant à fond la résolution des singularités) dans le cas où X est excellent de caractéristique nulle.

b. Plus sérieuse encore est la question de la validité du **théorème de finitude** pour les $R^{\cdot} f_*$, pour f morphisme séparé de type fini de schémas noethériens (excellents s'il le faut), quand f n'est **pas** supposé propre. On a besoin de ce résultat pour définir Rf_*(et deux autres parmi les "six opérations") dans le cadre ℓ-adique "constructible". J'ai prouvé le résultat de finitude moyennant