par le passage au complexe d'opérateurs différentiels "adjoint", de composantes $\underline{Hom}_{\underline{O}_X}(F, \underline{\omega}_X)$, obtenu en prenant les opérateurs adjoints terme à terme. Ainsi, le foncteur dualisant pour les $\mathscr{D}$-Modules est compatible avec le foncteur dualisant familier dans la dualité de Serre,

$$F \longmapsto \underline{Hom}_{\underline{O}_X}(F, \underline{\omega}_X) \simeq F \otimes_{\underline{O}_X} \omega_X (F \text{ un } \underline{O}_X\text{-Module loc. lib. de type fini}), \tag{11}$$

où $\underline{\omega}_X$ désigne le "module dualisant" des formes différentielles de degré maximum sur X. On fera attention que le foncteur de De Rham

$$DR : D^*_{coh}(X, \mathscr{D} \longrightarrow D^*(X, \mathbb{C}),$$

ne commute pas en général aux foncteurs dualisants (en prenant dans la deuxième catégorie le foncteur $R\underline{Hom}_C(-, \mathbb{C}_X)$). Mais c'est un théorème profond de Mebkhout (que tout le monde utilise sans citer personne bien sûr et comme si c'était un simple sorite) que pour des arguments **holonomes**, donc pour le foncteur induit

$$\underline{Cris}^*(X)_{hol} \longrightarrow \underline{Cons}^*(X, \mathbb{C}) \ (\hookrightarrow D^*(X, \mathbb{C}))$$

il y a commutation aux foncteurs dualisants. Je ne "rappelle" pas ici la condition d'**holonomie**, et me borne à signaler qu'un complexe de $\mathscr{D}$-Module est holonome sss ses faisceaux de cohomologie sont des $\mathscr{D}$-Modules holonomes, et que c'est là une condition de nature **locale** sur X, et de plus, "**algébrique**". D'autre part, le théorème de constructibilité de Kashiwara (que celui-ci avait énoncé pour un **Module** holonome, à un moment où lui ni personne - sauf Mebkhout - ne travaillait avec des catégories dérivées...) implique que la restriction du foncteur de De Rham aux complexes holonomes aboutit bien dans $\underline{Cons}^*(X, \mathbb{C})$. En introduisant la notion de **régularité** de Mebkhout, elle aussi de nature locale et "algébrique"[674](*), on trouve le "foncteur du bon Dieu" (alias Mebkhout)

$$m : \underline{Cris}^*(X)_{\text{hol rég}} \xrightarrow{\approx} \underline{Cons}^*(X, \mathbb{C}) \tag{12}$$

qui, cette fois, est une **équivalence** (comme on a vu dans la note "L'oeuvre...", n° 171 (ii)), laquelle est donc compatible avec les foncteurs dualisant naturels. C'est le foncteur quasi-inverse (13)

$$M : \underline{Cons}^*(X,) \xrightarrow{\approx} \underline{Cris}^*(X)_{\text{hol rég}} \hookrightarrow \underline{Cris}^*_{coh}(X) \tag{13}$$

qui permet de considérer la catégorie des "coefficients discrets constructibles" (de $\mathbb{C}$-vectoriels) sur X, comme une sous-catégorie pleine de $D^*(X, \mathscr{D})$ et plus précisément de $D^*_{cons}(X, \mathscr{D}) = \underline{Cris}^*_{coh}(X)$, qu'on va interpréter tantôt comme une catégorie de coefficients "cristallins".

(19 mai) Pour l'instant, on peut dire que nous avons décrit en trois "langages" ou "points de vue" différents, comme par autant de "photos" différentes, une même réalité, ou (essentiellement) un "même" type de coefficients", dits "coefficients de De Rham" : il y a le point de vue faisceaux de $\mathbb{C}$-vectoriels et complexes de tels (prise de vue "topologique"), avec une condition de "constructibilité analytique"[675](**), jouant le rôle d'une condition de finitude (essentielle, notamment, pour pouvoir écrire des théorèmes du type Riemann-Roch, impliquant des "caractéristiques d' Euler-Poincaré" et des "groupes de Grothendieck" convenables). Il

[674](*) Je rappelle que la défi nition originale de Mebkhout de la régularité était de nature transcendante. Pour une traduction "purement algébrique", je renvoie à l'exposé prévu sur les coeffi cients de De Rham (style "Mebkhout" ou style "Deligne"), dans le volume 3 des Réflexions.

[675](**) Je rappelle qu'un faisceau de $\mathbb{C}$-vectoriels sur un espace analytique X est dit "analytiquement constructible", si au voisinage de chaque point, il admet une suite de composition dont les facteurs successifs sont de la forme $i_!(F)$, où $i : Y \to X$ est l'inclusion d'un sous-espace analytique $Y = Z \backslash T$ de X (avec $T \subset Z$ deux sous-espaces analytiquement fermés de X), et F un $\mathbb{C}$-faisceau localement libre de type fi ni (ou "système local de $\mathbb{C}$-vectoriels") sur Y.