d'ailleurs (notamment en ce qui concerne la traduction de structures filtrées ou graduées etc sur certains foncteurs fibres, ou celle d'une notion de "polarisation" associée à une catégorie tannakienne), que cela n'est fait dans la thèse de Saavedra[1000](**), ou dans le "mémorable volume" LN 900 (où la thèse de Saavedra se trouve refaite et la notion de groupe de Galois motivique est au centre de la problématique, sans que mon nom y soit plus prononcé à ce sujet-là, que pour tout autre concernant les motifs).

Je signale également que le premier pas dans la détermination (à équivalence près) de la catégorie des motifs sur un corps fini, dont il a été question précédemment[1001](***), avait été la détermination du groupe de Galois motivique dudit corps fini, lequel doit être commutatif (étant engendré topologiquement par l'élément de Frobenius), et est en fait une extension de $\hat{\mathbb{Z}}$ (engendré par Frobenius) par un certain pro-tore algébrique sur $\mathbb{Q}$[1002](*). Le deuxième pas a été la description de l'élément de $H^2(\mathbb{Q}, T)$ qui (selon la théorie de Giraud) classifie la G-gerbe des foncteurs fibres[1003](**).

Comme je l'exprime dans la note "Souvenir d'un rêve - ou la naissance des motifs" (n° 51), je suis tombé sur le groupe de Galois motivique en cherchant le lien entre les représentations ℓ-adiques, pour ℓ variable, d'un groupe de Galois profini $Gal(\overline{K}/K)$ dans les modules ℓ-adiques, obtenues par exemple en prenant les $H^i(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_\ell)$, où X est un schéma projectif lisse sur X et i un entier (ou éventuellement, un sous-module convenable de celui-ci). Serre regardait l'image du groupe de Galois dans $Aut(V(\ell))$ pour tout ℓ, qui est un groupe de Lie ℓ-adique réductif, et il semblait bien que sa structure (au sens de la théorie de Lie) était indépendante de ℓ. C'est en cherchant la raison profonde pour ce phénomène (lui-même hypothétique encore jusqu'à aujourd'hui), en le mettant en relation avec les conjectures de Tate, que j'ai découvert la notion de groupe de Galois motivique, dans la foulée de celle de "motif" et de "cohomologie motivique".

S'il y a eu une chose simple et profonde que j'aie amené au jour, et s'il y a eu acte créateur dans ma vie de mathématicien, c'est bien avec la naissance de cette notion cruciale, reliant la géométrie et l'arithmétique. C'est pourquoi aussi, ce mémorable 19 avril l'an dernier, j'ai été suffoqué par le sentiment d'une inimaginable **impudence**, en voyant cette chose-là appropriée avec cette désinvolture superbe, comme la dernière des bagatelles qu'on viendrait d'improviser là à l'instant au détour d'un paragraphe technique : voyez, c'est bête comme choux, il n'y a qu'à appliquer ici la proposition 4.7.3 de notre modeste article exposant la théorie des catégories tannakiennes...[1004](***). Voilà comment se font les mathématiques dans les années 1980, après de

---

volume, de faire le nécessaire pour qu'elle revienne (suivant l'expectative de tous) à celui déjà tout désigné pour cela. Pour des détails pour cette brillante opération sur une dépouille (la première et seule d'une telle envergure, avant l'opération "SGA $4\frac{1}{2}$ - SGA 5" faite dans le même style inimitable), voir la suite de notes "Le sixième clou au cercueil" (n°s 176_1 à 176_7).

[1000](**) (10 mai) C'est là une présomption qui s'avère erronée. Elle était due à ma conviction que Saavedra ne serait absolument pas à même de "boucler" le programme que je lui avais indiqué, alors que déjà la seule maîtrise du point de vue "représentations linéaires de gerbes proalgébriques" semblait pendant longtemps le dépasser, et que son bagage mathématique était des plus réduits. Vu les moyens nullement exceptionnels de Saavedra, il est pour moi impensable qu'en les moins de deux ans entre mon départ (où il n'avait aucune notion de cohomologie, ou sur la structure des groupes algébriques) et la parution du livre, il ait eu la possibilité d'assimiler (et ceci de façon parfaite, comme en témoigne la tenue du livre) la foule de notions tous azimuts avec lesquelles on y jongle. Voir à ce sujet la note "Monsieur Verdoux - ou le cavalier servant" dans la suite de notes déjà citée "Le sixième clou au cercueil".

[1001](***) (10 mai) je constate que cette détermination, elle aussi, figure dans l'inépuisable livre de Saavedra (sans allusion à ma modeste personne, est-il besoin de le dire). Elle utilise la théorie cohomologique du corps de classes global (détermination du groupe $H^2(\mathbb{Q}, T)$, où T est un groupe de type multiplicatif sur $\mathbb{Q}$) - cela fait donc partie aussi des choses que mon ex-élève (aux moyens apparemment surhumains) aurait assimilées en moins de deux ans...

[1002](*) Il s'agit ici du groupe de Galois motivique qui classifie les motifs **semi-simples**. Pour obtenir les motifs généraux, il faut faire son produit par le groupe additif $\mathbb{G}_a$ sur $\mathbb{Q}$.

[1003](**) Le point crucial, c'est que cette classe devient nulle (grâce à l'existence des foncteurs fibres "cohomologie ℓ-adique") en toutes les places $\ell \neq p = \text{car}.k$, et l'existence du foncteur-fibre cristallin nous donne des renseignements suffisants sur le sort de cette classe en la place manquante p.

[1004](***) En écrivant ces lignes, s'est imposée à moi l'association avec la façon toute similaire d'introduire la définition de la fonction L à coefficients dans un faisceau ℓ-adique, sans référence à personne et comme la dernière des banalités que viendrait