(a) L'album "coefficients de De Rham" ◇(4 mai et 19-20 mai) Je rappelle que pour un espace analytique complexe lisse, on désigne par $\mathscr{D}_X$ (ou simplement $\mathscr{D}$), le faisceau d'anneaux (plus précisément, de $\mathbb{C}$-algèbres) des opérateurs différentiels analytiques complexes sur X. Un premier fait crucial, mis en évidence par Sato, est que c'est là un faisceau d'anneaux **cohérent**. Un deuxième fait, de nature tautologique et néanmoins crucial lui aussi, c'est que la catégorie des $\underline{O}_X$-Modules localement libres, où on prend comme morphismes non pas les seuls morphismes $\underline{O}_X$-linéaires, mais les opérateurs différentiels entre tels Modules, se plonge comme une **sous-catégorie pleine** (mais par un foncteur à priori **contravariant**) dans celle des $\mathscr{D}$-Modules localement libres, par le contrafoncteur[668](**)

$$F \mapsto \underline{Hom}_{\underline{O}_X}(F, \mathscr{D}_d \xrightarrow{\sim} \underline{Op}\,\underline{diff}(F, \underline{O}_X) \tag{1}$$

où $\mathscr{D}_d$ désigne $\mathscr{D}$, muni de sa structure de $\mathscr{D}$-Module induite par sa structure de $\mathscr{D}$-Module canonique **à droite**, laquelle commute avec les opérations ◇de $\mathscr{D}$ à gauche sur lui-même (qui font du deuxième membre de (1) un $\mathscr{D}$-Module). Ce foncteur pleinement fidèle induit d'ailleurs une (anti-) **équivalence** entre les sous-catégories pleines formées des Modules libres. Celle-ci n'admet pas un foncteur quasi-inverse canonique, "commutant à la restriction à un ouvert" - c'est pourquoi le premier contrafoncteur envisagé n'est sans doute pas (en général) une équivalence. Si C (C comme "cristal", voir plus bas) désigne un $\mathscr{D}$-Module localement libre (ou même libre, qu'à cela ne tienne), on peut lui associer, certes, un faisceau dépendant fonctoriellement de C :

$$C \longmapsto \underline{Hom}_{\mathscr{D}}(C, \underline{O}_X) \tag{2}$$

On a là une foncteur contravariant, qui pourrait sembler fournir "le" candidat naturel pour un foncteur quasi-inverse de (1). L'ennui, c'est que ce faisceau (2) n'est pas muni de façon naturelle d'une structure de $\underline{O}_X$-Module, mais seulement d'une structure de $\mathbb{C}_X$-Module (où ($\mathbb{C}_X$ est le faisceau constant sur X défini par le corps des complexes $\mathbb{C}$). Lorsque C provient d'un $\underline{O}_X$-Module localement libre F par le contrafoncteur (1), alors (2) est canoniquement isomorphe au faisceau de $\mathbb{C}$-vectoriels sous-jacent à F.

Le foncteur (1) se prolonge (comme tout foncteur additif) aux catégories de complexes : il transforme un complexe d'opérateurs différentiels sur X (au sens ordinaire) en un complexe de $\mathscr{D}_X$-Modules localement libres, et le (contra-) X foncteur obtenu ainsi est bien sûr pleinement fidèle (pour les morphismes différentiels entre complexes d'opérateurs différentiels, dans la première catégorie de complexes). C'est en ce sens qu'on peut dire que les complexes de $\mathscr{D}$-Modules (à composantes localement libres) "**généralisent**" les complexes d'opérateurs différentiels sur X.

Le point de vue des complexes de $\mathscr{D}$-Modules a l'avantage décisif, sur celui des complexes d'opérateurs différentiels, de s'insérer directement dans le yoga (développé d'abord dans mon article de 1955 "Sur quelques points d'algèbre homologique"[669](*)) des complexes de Modules sur un espace annelé, et par là et surtout, dans celui des **catégories dérivées** (que j'avais dégagé dans les années qui ont suivi l'article cité). La notion cruciale de "**quasi-isomorphisme**" n'apparaît pas à l'oeil nu, quand on adopte le point de vue des morphismes différentiels entre complexes différentiels, alors qu'elle devient manifeste en passant au complexe de $\mathscr{D}$-Modules associé. Donc, plus encore qu'une **généralisation** du point de vue des complexes d'opérateurs différentiels, le point de vue introduit par Mebkhout[670](**) représente un **assouplissement crucial** : ◇c'est grâce à ce point

[668](**) L'isomorphisme écrit ici est $u \mapsto \varepsilon\, o\, u$, où $\varepsilon\ :\ \mathscr{D} \to \underline{O}_X$ est "l'augmentation" $\theta \to \theta(1)$.
[669](*) In Tohoku Mathematical Journal, 9 (1957) p. 121-138.
[670](**) (8 juin) Il faut lire ici : introduit par Mebkhout dans la panoplie grothendieckienne, pour les besoins d'une nouvelle théorie des coeffi cients. Il est bien entendu que "le point de vue des $\mathscr{D}$-Modules" est dû à Sato, mais utilisé dans une optique toute différente.