plus grosse encore que $\underline{\mathrm{Cris}}^{*}_{\mathrm{coh}}(X)$, peut-être celle des cristaux "quasi-cohérents" (en un sens évident) - mais du coup il n'y a guère d'espoir de récupérer un théorème de bidualité ! De plus, le foncteur naturel d'extension des scalaires par $\underline{O}_X \to \mathscr{D}_X$ ne commute visiblement pas au produit tensoriel - donc, alors même qu'il y aurait une théorie des six opérations pour les cristaux, qui prolongerait celle (moralement connue dès à présent, grâce à Mebkhout) des cristaux de De Rham - Mebkhout (obtenue par "transport de structure" à partir de la théorie "discrète", via les foncteurs du bon Dieu), elle ne prolongerait pas celle des $\underline{O}_X$-Modules cohérents[733](*). Cela n'exclut peut-être pas, pour autant, qu'il puisse exister un "théorème de dualité globale", version cristaux quasi-cohérents, pour un morphisme propre (disons) de schémas de type fini sur un corps de caractéristique nulle, qui "coiffe" (dans un sens évident) le théorème de dualité "connu" (moralement, par transport de structure encore) pour les cristaux de De Rham - Mebkhout, et le théorème du dualité analogue connu (sans guillemets) dans le cas cohérent[734](**).

◇(J'ai été assez sidéré que Mebkhout lui-même ne se soit pas posé au moins cette dernière question, dès l'instant même où il était arrivé à la formulation de son théorème de dualité "absolue" (correspondant au cas où la variété but serait réduite à un point) - dernièrement encore il n'avait pas l'air de tellement la "sentir"[735](***). Cela rend saisissant pour moi à quel point une certaine "philosophie", qui dès la première moitié des années soixante était devenue pour moi une seconde nature, et (il m'avait semblé…) pour mes élèves aussi - à quel point cette philosophie a été oubliée de tous, à commencer par ceux qui se sont chargés de s'en faire les fossoyeurs, plutôt que de la transmettre. Et je vois que c'est bien là aussi la cause principale de cette stupéfiante stagnation qu'a connue après mon départ une théorie (celle de la cohomologie des schémas) que j'avais laissée en plein essor.

Il faut dire que Mebkhout se plaçait dans le contexte transcendant analytique complexe, au lieu du contexte schématique. Cela introduisait des difficultés techniques considérables, en quelque sorte "parasites", quand il s'agit de parvenir à une compréhension des phénomènes de variance essentiels. Là encore, ses aînés ont failli à leur tâche, qui aurait été de mettre leur expérience, acquise à mon contact, à la disposition du nouveau

---

(Par contre, le foncteur du bon Dieu covariant m n'y commute pas, et il transforme image inverse ordinaire en image inverse extraordinaire.) On peut montrer, en utilisant ce résultat, qu'il n'existe pas de formalisme des six opérations pour les coeffi cients de De Rham - Mebkhout, qui "prolonge" les deux opérations fondamentales déjà connues de produit tensoriel et d'image inverse. Notamment, la catégorie $\mathrm{DRM}^{\mathrm{b}}(X)$ n'admet pas d'opération "Hom interne" (jouant le rôle du $R\underline{Hom}$), et pour $f : X \to Y$, le foncteur f^* n'admet pas en général d'adjoint à droite Rf_*. Le foncteur $Rf_!$ introduit dès à présent par Mebkhout (pour X, Y lisses et pour f propre) est un adjoint à **gauche** de f^*. (NB L'opération $Rf_!$ sur les coeffi cients de De Rham - Mebkhout a été défi nie de telle façon que le foncteur du bon Dieu **covariant** y commute, et de même pour Rf_* - à tort, ou à raison…)

On voit donc qu'en termes des opérations "naturelles" dont on dispose dans le contexte De Rham -Mebkhout, celles-ci ne forment **pas** tels quels une "théorie des six opérations", mais une sorte de théorie duale. La question qui se pose, dès lors, est de voir dans quelle mesure celle-ci s'étend à des $\mathscr{D}$-Modules (quasi-cohérents disons) qui ne sont plus supposés holonomes et réguliers (par exemple, holonomes sans plus - condition qui est conservée par produit tensoriel et par image inverse). Il semblerait bien, notamment, que la formule de dualité globale puisse s'écrire pour des complexes de $\mathscr{D}$-Modules à cohomologie cohérente (voire seulement quasi-cohérente), et un morphisme $f : X \to Y$ quelconque de schémas séparés de type fi ni sur un corps K de car. nulle (disons), de façon à coiffer à la fois le théorème de dualité cohérente, et celui de dualité discrète, du moins sous la forme suivante : le foncteur dualisant "échange" les foncteurs Rf_* et $Rf_!$.

[733](*) Il y a lieu de reformuler plutôt cette assertion en termes d'une "théorie duale aux six opérations", voir la note de b. de p. précédente.

[734](**) On peut envisager un tel théorème de dualité sous trois formes différentes. Soit en disant que les foncteurs dualisants en haut et en bas "échangent" les foncteurs $Rf_!$, et Rf_*, soit en disant, que deux foncteurs convenablement défi nis $Rf_!$ et $Rf^!$ sont adjoints l'un de l'autre, soit en écrivant une "formule de projection" (qui coiffe l'un et l'autre énoncé) :

$$\mathrm{Rf}_*(\mathrm{R}\underline{\mathrm{Hom}}(F, \mathrm{Rf}^!(G))) \approx \mathrm{R}\underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{Rf}_!(F), G)$$

[735](***) (8 juin) Mebkhout m'assure pourtant qu'il s'était bel et bien posé la question depuis longtemps. Si j'ai eu l'impression du contraire, c'est sûrement que cette question était restée pour lui entièrement platonique.