théorème de dualité de Mebkhout (dont il a été question, dans le contexte analytique complexe, dans la note "L'oeuvre...", n° 171 (ii)). Pourtant, mon énoncé de dualité ne me satisfaisait pas, et je n'ai pas songé à le publier ni même à lui faire de la publicité, car il m'apparaissait, sous la forme dite, trop proche du théorème de dualité de Serre (relativisé sur une base quelconque, c'est une chose entendue), dont c'est un corollaire plus ou moins immédiat. Pour arriver à un énoncé qui me satisfasse, il aurait fallu que je sache comment faire une "catégorie dérivée" avec des complexes d'opérateurs différentiels, de façon à pouvoir formuler un énoncé de dualité intrinsèque en termes d'objets de ces catégories, sur le modèle de la théorie de dualité cohérente dégagée au cours des années précédentes.

Ce qui manquait, donc, c'était une bonne notion de "quasi-isomorphisme" pour un morphisme (différentiel) entre complexes d'opérateurs différentiels, de façon à former une catégorie dérivée (en inversant formellement ces quasi-isomorphismes). Il était clair que la définition habituelle (via les faisceaux de cohomologie associés) n'était pas utilisable dans le cadre algébrique (et elle ne l'est sans doute pas plus dans le cadre transcendant[645](*)). Le passage aux complexes de $\mathscr{D}$-Modules correspondants donne maintenant une réponse merveilleusement simple à ma perplexité d'antan !

Ne voyant pas de définition toute prête pour la notion de quasi-isomorphisme, je n'ai pas essayé alors d'en avoir le coeur net si ça existait ou non, et s'il y aurait bel et bien là une catégorie dérivée remarquable. C'était à un moment où j'étais le seul à m'intéresser aux catégories dérivées (pourtant bien moins sophistiquées) formées à partir des modules cohérents et les morphismes **linéaires** entre ceux-ci... Je ne sentais pas clairement que cette question d'une notion à dégager de quasi-isomorphisme (un peu vague elle aussi, pour ne pas dire farfelue) touchait à un mystère fécond, lequel mystère admettait une "clef" d'une simplicité enfantine ! Et qu'il y avait une catégorie de "coefficients" remarquables qui attendait seulement qu'on la définisse. Il aurait fallu pour cela, sans doute, que mes réflexions se poursuivent dans une ambiance où elles rencontrent un minimum d'intérêt et d'écho, ne fût-ce que chez **un** interlocuteur qui soit partie prenante !

C'est la cohomologie de De Rham qui avait attiré mon attention sur ce fait, évident bien sûr, que les espaces de cohomologie globaux des faisceaux cohérents, sur une variété algébrique $X$ sur un corps $k$ disons, sont des "foncteurs" non seulement par rapport aux homomorphismes $O_X$-linéaires, mais même par rapport à **tous** les homomorphismes de faisceaux de $k$-vectoriels, et notamment, pour les opérateurs différentiels. C'est cette observation qui avait motivé un embryon de réflexion sur une théorie de dualité "cohérente" (ou "quasi-cohérente"), où les "morphismes" entre faisceaux seraient des opérateurs différentiels, au lieu d'être linéaires. Cette réflexion a tourné court, comme j'ai dit, et ceci à tel point même qu'elle ne m'est pas restée dans un coin de la mémoire, comme une chose (parmi un nombre d'autres) qu'il faudrait bien un jour tirer au clair - elle a sombré (je crois) dans un oubli total jusqu'à il y a quelques jours seulement. Même ma réflexion sporadique sur les cristaux, vers 1966, ne l'a pas fait remonter dans ma mémoire, pour autant que je me rappelle. Pourtant, cette réflexion cristalline, sans que je ne m'en doute alors (faute alors de me rappeler seulement de la question !), allait me fournir dès 1966 une **autre** clef, "duale" en quelque sorte de celle de Mebkhout, pour mes perplexités d'antan, via le complexe des parties principales d'ordre infini associé à un complexe d'opérateurs différentiels. J'y fais allusion dans une note de b. de p. écrite hier (note(**) page 946), et je compte y revenir de façon circonstanciée dans la partie du volume 3 des Réflexions, développant le yoga des "types de coefficients" et donnant, notamment, une définition en forme de ce que je présume être "les"

[645](*) Je fais erreur ici. Mebkhout me garantit que pour un homomorphisme (différentiel) entre complexes d'opérateurs différentiels, celui-ci est un quasi-isomorphisme (au sens naïf des complexes de faisceaux de $\mathbb{C}$-vectoriels associés) si et seulement si l'homomorphisme correspondant pour les complexes de $\mathscr{D}$-Modules associés est une quasi-isomorphisme. C'est en effet équivalent (moyennant passage au mapping-cylinder) de dire qu'un complexe d'opérateurs différentiels est quasi-nul au sens naïf, si et seulement si le complexe de $\mathscr{D}$-Modules associé est quasi-nul, chose apparemment bien connue (du moins à Mebkhout, qui la démontre dans son inépuisable thèse...).