entre arguments $F \to F'$ qui sont seulement des opérateurs différentiels (au lieu d'être linéaires). Le deuxième foncteur (4), qu'il faut regarder comme un contrafoncteur

$$\underline{Cris}^*_{coh}(X) \longrightarrow D^*(X, \mathbb{C}_X)\,,$$

admet également un "pendant" covariant important, donné par

$$C \longmapsto R\underline{Hom}_{\mathscr{D}}(\underline{O}_X, C) \overset{\text{dfn}}{=} DR(C) \text{ ("complexe de De Rham" associé à C) ,} \tag{6}$$

où le deuxième membre s'explicite bel et bien par un complexe du type de De Rham, grâce à la résolution canonique dite "de Spencer" de $\underline{O}_X$, par des $\mathscr{D}$-Modules localement libres de type fini. (Cette résolution est déduite du complexe de De Rham ordinaire, en prenant le complexe de $\mathscr{D}$-Modules associé par le foncteur (1).) En termes cristallins (qui seront explicités plus bas), le foncteur DR s'explicite comme le foncteur dérivé total du fonction $C \mapsto \underline{Hom}_{\mathscr{D}}(\underline{O}_X, C)$, associant à chaque $\mathscr{D}$-Modules" (ou "cristal) le faisceau de $\mathbb{C}$-vectoriels formé de ses sections "horizontales" (sur des ouverts variables). C'est là une opération de **nature locale**. La bonne notion (globale) "**d'intégration**" (ou d'o**bjet de cohomologie global**) pour un "coefficient" C (i.e. un $\mathscr{D}$-Module ou complexe de tels) n'est pas ici le foncteur habituel

$$R\Gamma_X(C) \simeq RHom_{\mathscr{D}}(X; \mathscr{D}, C)$$

mais le foncteur (qui m'est familier comme foncteur de **cohomologie totale cristalline**) dérivé total du foncteur "sections horizontales (globales)" $C \mapsto \underline{Hom}_{\mathscr{D}}(\underline{O}_X, C)$; je note ce dérivé total par $\overset{\diamond}{}R\Gamma_{cris}(C)$, de sorte qu'on a des isomorphismes tautologiques

$$R\Gamma_{cris}(C) \overset{\text{dfn}}{=} RHom_{\mathscr{D}}(\underline{O}_X, C) \simeq R\Gamma_X(DR(C))\,, \tag{7}$$

i.e. la cohomologie cristalline de C sur X s'obtient en prenant la cohomologie (globale) ordinaire du complexe de De Rham associé.

On peut définir dans $\underline{Cris}^*_{coh}(X)$ un **foncteur dualisant**, donnant lieu à un théorème de bidualité, sur le modèle de ceux que j'ai dégagés dans le contexte (commutatif) cohérent d'abord, discret (étale) ensuite. Je le noterai D (comme dans les contextes cités) :

$$D\ :\ \underline{Cris}^*_{coh}(X) \xrightarrow{\approx} \underline{Cris}^*_{coh}(X)\,. \tag{8}$$

C'est une anti-équivalence, essentiellement involutive (i.e. on a un isomorphisme de bidualité, fonctoriel en C :

$$C \simeq D(D(X))\,. \tag{9}$$

(9). Ce foncteur permet de transformer (par composition) les contrafoncteurs (1) et (2) en des foncteurs covariants. Le fait simple à retenir, c'est que si C et C' sont "duals" l'un de l'autre, alors le complexe de De Rham (6) de l'un s'identifie au "co-De Rham" (2) de l'autre : (10)

$$R\underline{Hom}_{\mathscr{D}}(\underline{O}_X, C) \simeq R\underline{Hom}_{\mathscr{D}}(C', \underline{O}_X)\,,\ \text{et inversement.} \tag{10}$$

Sur les complexes d'opérateurs différentiels, cette opération D s'exprime (à un "shift" de n près sur les degrés)

ordinaire.