$Rf_!$ (cohomologie à support propre), et ceci d'ailleurs dans les jours mêmes (si mon souvenir est exact) qui ont suivi ma découverte de la **définition** d'un tel foncteur en cohomologie étale (coïncidant ! avec le "banal" Rf^* quand f est supposé propre). C'était au mois de février 1963, avant d'avoir eu l'honneur de rencontrer mon futur élève, et à un moment où personne encore sauf moi (et Artin, à la rigueur) n'était encore trop sûr si la cohomologie étale ça "existait" bel et bien. Elle s'est mis à **exister** vraiment en ces jours-là.

Il restait la question analogue pour Rf_*, qui s'est avérée plus résistante, et n'est d'ailleurs toujours pas résolue avec toute la généralité qui (sans doute) lui revient. J'avais d'ailleurs fait dès cette même année (si ce n'est le mois même) les "dévissages" nécessaires (que le premier venu aujourd'hui expédié d'un tournemain...) montrant qu'à partir de la finitude pour Rf_*, on pouvait prouver celle de $Lf^!$ et de $R\underline{Hom}(.,.)$RHom(.,.)[486](**). Il est vrai que c'est devenu depuis du "folklore de base" de la cohomologie étale, et fait partie sûrement des "digressions techniques" que mon brillant précurseur "SGA $4\,\frac{1}{2}$" est destiné à "faire oublier"...

b_9. "La" conjecture

Note 169_4 (12 mars)[487](***) Plus d'une fois depuis la parution de l'article de Deligne "La conjecture de Weil I" (où il établit le "dernier volet" des conjectures, que j'avais laissées en suspens), j'avais noté comme une chose bizarre, mais sans m'y arrêter avant ces tout derniers jours, que Deligne parle de la conjecture de Weil, là où l'usage avait été jusque là de dire **les** conjectures de Weil. C'est bien sous cette forme, d'une série d'assertions les unes plus époustouflantes que les autres, que se présentent les conjectures en question dans l'article de Weil (Number of solutions of équations in finite fields, Bull$^\diamond$Amer. Math. Soc. 55 (1949), p. 497-508), et c'est ainsi aussi que je les ai apprises de la bouche de Serre, vers le milieu des années cinquante. Il est vrai qu'il y a dans cet ensemble de conjectures, hétéroclite à première vue, une évidente **unité** d'inspiration, provenant en premier lieu des intuitions liées au formalisme cohomologique (via la formule de Lefschetz), et également (je le présume du moins) de la théorie de Hodge.

En créant et développant un tel **outil cohomologique** pour des variétés sur un corps de base quelconque, j'ai pu démontrer une bonne partie de ces conjectures. Je l'ai fait, assisté par Artin, Verdier et d'autres, en consacrant trois années bien tassées de ma vie à un travail sur pièces méticuleux, se matérialisant en deux mille pages "illisibles" de "gangue de non sens" et de "digressions techniques", qui ont permis à un Deligne de "sabrer" le dernier pas en vingt pages serrées... De plus, m'inspirant d'un remarquable "analogue kahlérien" aux conjectures de Weil, découvert par Serre, j'ai pu dégager (avec ce que j'ai appelé les "**conjectures standard**" sur les cycles algébriques) le principe tout au moins d'une **transposition de la théorie de Hodge** sur un corps de base arbitraire (ou plus précisément, une transposition de ce qui, dans la théorie de Hodge, est réellement pertinent, d'un point de vue "algébrique", pour la théorie des cycles algébriques sur les variétés algébriques complexes). Quitte à reformuler légèrement (et de façon évidente) ces conjectures sous leur forme initiale (peut être trop optimiste), celles-ci sont valables tout au moins en caractéristique nulle, et sont "sûrement vraies" également en caractéristique $p > 0$ (du moment que les conjecture de Weil le sont...).

Ce n'est sûrement pas une coïncidence, si le même Deligne qui tient à mettre "au singulier" les conjectures de Weil, s'est attaché également à escamoter le rôle joué dans leur démonstration par celui qui fut son maître, et que c'est lui encore qui s'est efforcé (avec succès, vu l'apathie générale) de discréditer les "conjectures

[486](**) Quant aux deux opérations restantes parmi les six, savoir Lf^* et $\overset{L}{\otimes}$, il est trivial qu'elles transforment coeffi cients constructibles en coeffi cients constructibles.

[487](***) La présente sous-note est issue d'une note de b. de p. à la note "Les manoeuvres" (n° 169) ; voir la note de b. de p. (***) page 857 .