me menant sans atermoiements ni détours vers la chambre nuptiale au vaste lit conjugal. Un lit si vaste en effet (telle une vaste et paisible rivière très profonde...), que

> "tous les chevaux du roi
> y pourraient boire ensemble..."

- comme nous le dit un vieil air que sûrement tu as dû chanter toi aussi, ou du moins l'entendre chanter. Et celui qui a été le premier à le chanter a mieux senti la beauté secrète et la force paisible du topos, qu'aucun de mes savants élèves et amis d'antan...

La clef a été la même, tant dans l'approche initiale et provisoire (via la notion très commode, mais non intrinsèque du "site"), que dans celle du topos. C'est l'idée du topos que je voudrais essayer à présent de décrire.

Considérons l'ensemble formé de **tous** les faisceaux sur un espace (topologique) donné, ou, si on veut, cet arsenal prodigieux formé de **tous** ces "mètres" servant à l'arpenter[44]. Nous considérons cet "ensemble" ou "arsenal" comme muni de sa structure la plus évidente, laquelle y apparaît, si on peut dire, "à vue de nez" ; à savoir, une structure dite de "catégorie". (Que le lecteur non mathématicien ne se trouble pas, de ne pas connaître le sens technique de ce terme. Il n'en aura nul besoin pour la suite.) C'est cette sorte de "superstructure d'arpentage", appelée "catégorie des faisceaux" (sur l'espace envisagé), qui sera dorénavant considérée comme "incarnant" ce qui est le plus essentiel à l'espace. C'est bien là chose licite (pour le "bon sens mathématique"), car il se trouve qu'on peut "reconstituer" de toutes pièces un espace topologique[45] en termes de cette "catégorie de faisceaux" (ou de cet arsenal d'arpentage) associée. (De le vérifier est un simple exercice - une fois la question posée, certes...) Il n'en faut pas plus pour être assuré que (s'il nous convient pour une raison ou une autre) nous pouvons désormais "oublier" l'espace initial, pour ne plus retenir et ne nous servir que de la "catégorie" (ou de l' "arsenal") associée, laquelle sera considérée comme l'incarnation la plus adéquate de la "structure topologique" (ou "spatiale") qu'il s'agit d'exprimer.

Comme si souvent en mathématique, nous avons réussi ici (grâce à l'idée cruciale de "faisceau", ou de "mètre cohomologique") à exprimer une certaine notion (celle d' "espace" en l'occurrence) en termes d'une autre (celle de "catégorie"). A chaque fois, la découverte d'une telle **traduction** d'une notion (exprimant un certain type de situations) en termes d'une autre (correspondant à un autre type de situations), enrichit notre compréhension et de l'une et de l'autre notion, par la confluence inattendue des intuitions spécifiques qui se rapportent soit à l'une, soit à l'autre. Ainsi, une situation de nature "topologique" (incarnée par un espace donné) se trouve ici traduite par une situation de nature "algébrique" (incarnée par une "catégorie") ; ou, si on veut, le "continu" incarné par l'espace, se trouve "traduit" ou "exprimé" par la structure de catégorie, de nature "algébrique" (et jusque là perçue comme étant de nature essentiellement "discontinue" ou "discrète").

Mais ici, il y a plus. La première de ces notions, celle d'espace, nous était apparue comme une notion en quelque sorte "maximale" - une notion si générale déjà, qu'on imagine mal comment en trouver encore une extension qui reste "raisonnable". Par contre, il se trouve que de l'autre côté du miroir[46], ces "catégories" (ou "arsenaux") sur lesquels on tombe, en partant d'espaces topologiques, sont de nature très particulière. Elles

---

[44](A l'intention du mathématicien) A vrai dire, il s'agit ici des faisceaux **d'ensembles**, et non des faisceaux **abéliens**, introduits par Leray comme coefficients les plus généraux pour former des "groupes de cohomologie". Je crois d'ailleurs être le premier à avoir travaillé systématiquement avec les faisceaux d'ensembles (à partir de 1955, dans mon article "A général theory of fibre spaces with structure sheaf" à l'Université de Kansas).

[45](A l'intention du mathématicien) A strictement parler, ceci n'est vrai que pour des espaces dits "sobres". Ceux-ci comprennent cependant la quasi-totalité des espaces qu'on rencontre communément, et notamment tous les espaces "séparés" chers aux analystes.

[46]Le "miroir" dont il est question ici, comme dans Alice au pays des merveilles, est celui qui donne comme "image" d'un espace, placé devant lui, la "catégorie" associée, considérée comme une sorte de "double" de l'espace, "de l'autre côté du miroir"...