◊(Quant à la photo cinq, il y en a plusieurs tirages différents. Le tirage originel de Deligne se fait en termes de modules pro-cohérents stratifiés. La première retouche importante, en vue de la généralisation au cas X non lisse, consiste à interpréter les animaux en question comme des **cristaux** en pro-Modules. Mais on s'engage là dans l'engrenage (peu engageant !) d'interminables pro-fondements d'algèbre pro-cohomologique - et on perd le bénéfice de l'intuition topossique directe, attachée à X_{cris}. Aussi je préfère (si faire se peut) carrément reprendre une autre photo, sous le même angle de vue à peu de choses près, via un foncteur **contravariant** (dit également "de Grothendieck", à bon entendeur…)

$$G^o \ : \ D^*_{coh}(X, \mathscr{D})^{opp} \longrightarrow D^*(X_{cris}, \underline{O}_{X_{cris}}) \, . \tag{19}$$

On peut dire que c'est celui qui est déduit de la photo de Deligne en passant brutalement au faisceaux limites projectives sur chaque épaississement infinitésimal d'un ouvert U de X. Si C dans le premier membre est associé (de façon contrevariante, comme dans la formule (1) de (a)) à un complexe d'opérateurs différentiels $L^{\cdot}$, son image par (19) s'obtient en regardant $P^{\infty}(L^{\cdot})$ (la "formalisation" du complexe $L^{\cdot}$) comme un complexe de promodules stratifiés (idée introduite dans [Crystal]), ou encore comme un complexe de cristaux de pro-Modules, et en passant à la limite projective sur tout épaississement. Une autre façon de dire ceci, c'est qu'à tout $\underline{O}_X$-Module localement libre (par exemple) L sur X, est associé un module cristallin (qui n'est **pas** un cristal de modules, sauf erreur), que je note $P^{\infty}(L)_{cris}$, d'une façon "évidente" certes (et que mes élèves ont depuis longtemps oubliée), lequel module dépend fonctoriellement de L par rapport aux opérateurs différentiels, et passe donc aux complexes d'opérateurs différentiels.

L'une ou l'autre description précédente du foncteur (19) reste d'ailleurs incomplète, du fait notamment qu'un objet du premier membre ne provient pas nécessairement, sur tout X, d'un complexe d'opérateurs différentiels. Je présume qu'on peut donner une interprétation intrinsèque de cette description heuristique, par la formule

$$G^o(C) \longrightarrow \tilde{R}\underline{Hom}_{\underline{O}_{X_{cris}}}(G(C), \underline{O}_{X_{cris}}) \text{ (où } G \text{ défini dans (17))} \tag{20}$$

mais n'ai pas vérifié qu'elle est correcte. Par les arguments standard, on se ramène encore ici (pour prouver que la flèche naturelle (20), lorsque C est associé comme dessus à $L^{\cdot}$, est bien un iso) au cas où $C = \mathscr{D}$, et alors (20) se réduit aux formules◊(

$$\underline{Ext}^i_{\underline{O}_{X_{cris}}}(G(\mathscr{D}, \underline{O}_{X_{cris}}) = 0 \text{ pour } i > 0, \tag{21}$$

qui ressemblent pas mal à (18).

Le sens de la pleine fidélité de (19) est en tous cas assez clair, et se ramène à nouveau, par dévissage (et comme pour (17)) au cas où $C = \mathscr{D}$, $C' = \mathscr{D}[i]$ (shift des degrés par i), et se réduit alors aux formules

$$\Gamma(X, \mathscr{D}) \simeq Hom(\mathscr{P}, \mathscr{P}) \, , \, Ext^i_{\underline{O}_{X_{cris}}}(X_{cris}; \mathscr{P}, \mathscr{P}) = 0 \text{ pour } i > 0 \, , \tag{18.1}$$

où on a posé

$$\mathscr{P} = P^{\infty}(\underline{O}_X)_{cris} \, ,$$

relatif lisse (ou dans le cadre analytique itou, sûrement), l'hypercohomologie "zariskienne" de $L^{\cdot}$ s'identifie à l'hypercohomologie cristalline de son formalisé $P^{\infty}(L^{\cdot})$. A vrai dire, cet énoncé concerne plus directement la flèche (19) "duale" de (17), et peut s'exprimer aussi en disant que pour C, C' des complexes de $\mathscr{D}$-Modules à cohomologie cohérente, la flèche

$$Hom(C, C') \longrightarrow Hom(G^o(C), G^o(C'))$$

est bijective, dans le cas où $C = \underline{O}_X$ (ce qui n'est déjà pas mal et permet tous les espoirs…).