pro-représente le foncteur

$$G \longmapsto Hom_{\mathbb{C}}(F,G)$$

sur la catégorie des $\underline{O}_X$-Module cohérents G sur X (au voisinage de K ...), lequel foncteur, étant exact à gauche, est bien pro-représentable. Par exemple, si F est le faisceau constant $\mathbb{C}_Y$ sur un sous-espace analytique fermé Y de X, "prolongé par zéro" sur tout X, on trouve le profaisceau formé par les $\underline{O}_{X_n}$ où les X sont les voisinages infinitésimaux de Y dans X. (NB La limite projective de ce système projectif est le complété formel de $\underline{O}_X$ le long de Y.) On constate (revenant au cas général) que le pro-faisceau (F_i) est muni d'une stratification canonique[696](**). L'idée de Deligne, c'est que le "**foncteur de** ◇(**Deligne**" allant de la catégorie des faisceaux de $\mathbb{C}$-vectoriels constructibles sur X, vers la catégorie des faisceaux pro-cohérents stratifiés, est **pleinement fidèle**, et permet donc d'interpréter la première catégorie (qui est de nature transcendante) en termes d'une sous-catégorie pleine de la catégorie des faisceaux pro-cohérents stratifiés. Cette dernière a un sens purement algébrique, et la sous-catégorie pleine en question peut se définir également (de façon plus ou moins tautologique[697](*)), en termes purement algébriques également. C'est la catégorie que je noterai

$$DRD^*(X) \text{ ou } Del^*(X)\,, \tag{10}$$

qui constitue la "**cinquième photo**", que je n'ai pas voulu expliciter hier[698](**). Je crois me rappeler d'ailleurs que Deligne avait pris la peine de développer son interprétation (et l'énoncé de pleine fidélité précédent) de telle façon qu'elle passe aux catégories dérivées (à un moment où il n'avait pas encore été décidé par mes élèves cohomologistes unanimes, Deligne en tête, de bazarder ces dernières), et c'est bien la version "catégorie dérivée" que je désigne par la notation (10), bien sûr.

Ceci dit, la "partie algébrique" dans $R\underline{Hom}_C(F,\underline{O}_X)$ doit pouvoir se définir de façon très naturelle comme une limite inductive (dans un sens convenable) des $R\underline{Hom}_{\underline{O}_X}(F_i,\underline{O}_X)$- et en particulier (passant aux faisceaux de cohomologie), on décrit des flèches canoniques

$$\varinjlim_i \underline{Ext}^d_{\underline{O}_X}(F_i,\underline{O}_X) \longrightarrow \underline{Ext}^d_{\mathbb{C}_X}(F,\underline{O}_X) \qquad (\forall d \in \mathbb{Z}) \tag{11}$$

En utilisant la stratification sur le pro-objet (F_i) et la stratification tautologique du deuxième argument $\underline{O}_X$, on doit pouvoir définir sur le premier membre de (11) une stratification i.e. une structure de $\mathscr{D}$-Module, de telle façon que (11) soit compatible avec l'homomorphisme des Anneaux d'opérateurs ◇(correspondants $\mathscr{D} \to \mathscr{D}^\infty$. Ceci dit, le théorème du bon Dieu de Mebkhout doit pouvoir se préciser, en disant que (11) identifie le deuxième membre au $\mathscr{D}^\infty$-Module déduit du premier par extension des scalaires[699](*) - ce qui implique notamment que la flèche est une **inclusion**. Ainsi, le membre de gauche doit se visualiser comme étant une sorte de **partie "algébrique"** (ou "**méromorphe**") dans le membre de droite (qui, lui, est de nature

[696](**) La notion de stratifi cation pour un pro-Module se défi nit de la même façon que pour un Module - la description donnée dans les notes de la veille (partie (a)) s'applique en principe chaque fois qu'on a une notion "relative" (telle que Modules, pro-Module, schéma relatif etc.) admettant une notion d' "image" inverse, i.e. donnant lieu à une "catégorie fi brée" sur la catégorie de "variétés" sur laquelle on travaille... On fera attention que si (F_i) est un pro-Module, une stratifi cation de celui-ci ne peut en général se décrire en termes d'un système "compatible" de stratifi cation des F_i. - les objets envisagés sont de nature beaucoup plus générale que les pro-objets de la catégorie des Modules stratifi és.

[697](*) "Tautologique" tout au moins en termes du dictionnaire déjà connu (dégagé d'abord par Deligne) entre faisceau de $\mathbb{C}$-vectoriels localement constants (ou "systèmes locaux") sur le complémentaire $Y - Z$ d'un diviseur Z dans un espace analytique Y, et Modules cohérents stratifi és sur $Y - Z$ qui sont "réguliers" (au sens de Deligne) le long de Z.

[698](**) Finalement, cette explicitation (qualifi ée de "tautologique" !) n'est pas donnée non plus ici, du moins pas sur le champ. Elle sera donnée cependant plus loin (page 1011). On fera attention que la notation (10) se réfère à la variante "catégories dérivées".

[699](*) De plus, bien sûr, le premier membre de (11) (en accord avec la philosophie de Mebkhout) doit être un $\mathscr{D}$-Module **cohérent**, **holonome** et **régulier**.