analogue à (6)

$$\delta_\infty \overset{\text{dfn}}{=} Dm_\infty = m_\infty D_\infty \tag{7}$$

On trouve alors l'expression de Mebkhout de Δ_∞, δ_∞ par les deux formules suivantes, d'une symétrie remarquable :

$$\begin{cases} \Delta_\infty(F) &= R\underline{Hom}_{\mathbb{C}}(F, \underline{O}_X) \\ \delta_\infty(C) &= R\underline{Hom}_{\mathscr{D}}(C, \underline{O}_X) \end{cases} \tag{8}$$

On notera que dans la première de ces formules, le deuxième membre hérite d'une $\mathscr{D}^\infty$-structure, grâce aux opérations de $\mathscr{D}^\infty$; sur le deuxième argument $\underline{O}_X$, tandis que dans la deuxième formule, le deuxième membre est interprété simplement comme un complexe de faisceaux de $\mathbb{C}$-vectoriels. La deuxième de ces formules, mise là "pour mémoire", est d'ailleurs essentiellement tautologique, et dit simplement que le foncteur δ_∞ associe au complexe de $\mathscr{D}^\infty$-Modules C le complexe d'opérateurs différentiels (d'ordre infini) "adjoint" de celui associé à C (par le foncteur DR_∞ de De Rham) - ce complexe étant interprété comme complexe de faisceaux de $\mathbb{C}$-vectoriels. (Que l'on trouve bien ainsi un complexe à faisceaux de cohomologie constructibles équivaut au théorème de constructibilité de Kashiwara.)

◊(C'est un théorème profond, par contre, que le premier foncteur Δ_∞ transforme faisceaux constructibles en (complexes de) $\mathscr{D}^\infty$-Modules qui sont holonomes. Le seul théorème de finitude impliqué par ce résultat[691](*) (sans même parler d'holonomie) est déjà en lui-même un résultat nouveau remarquable. La chose encore plus extraordinaire cependant, **c'est que les deux foncteurs sont quasi-inverses l'un de l'autre**. Formellement, ce fait ressemble aux relations de bidualité, qu'on peut exprimer soit dans la catégorie $\underline{Cons}^*$, soit dans la catégorie $\underline{Cris}^*_\infty(X)_{hol}$ - à cela près que les contrafoncteurs "dualisants" (exprimés dans les deux cas comme un $R\underline{Hom}_\infty(-, \underline{O}_X)$) relient entre elles deux catégories **différentes**. C'est cette analogie formelle qui a conduit Mebkhout à appeler le théorème qui affirme l'isomorphie

$$\Delta_\infty \delta_\infty \simeq id \qquad \text{dans } \underline{Cris}^*_\infty(X)_{coh} \tag{9}$$

le "**théorème de bidualité**" pour les complexes de $\mathscr{D}^\infty$-Modules (terminologie qui risque d'ailleurs de prêter à confusion). Cette relation, plus le fait que le foncteur δ_∞ est pleinement fidèle (ou plus précisément, que Δ_∞ en est un adjoint, chose qu'il inclut dans l'énoncé de son théorème de bidualité) avait été obtenu par Mebkhout dès 1977, avant le théorème du bon Dieu complet. Le théorème dit "de bidualité" signifie donc essentiellement, (tout comme "mon" théorème de bidualité, dont il est inspiré) qu'un complexe de $\mathscr{D}^\infty$-Modules **holonome** peut se **reconstituer**, en tant qu'objet d'une catégorie dérivée, par la connaissance du complexe d'opérateurs différentiels (d'ordre infini) associé, vu comme étant simplement un complexe de faisceaux $\mathbb{C}$-vectoriels (dans la catégorie dérivée idoine) ; et plus précisément, qu'il peut se reconstituer par la formule d'inversion explicite (8) (première formule). A fortiori, un morphisme entre complexes de $\mathscr{D}^\infty$-Modules holonomes est un quasi-isomorphisme si et seulement si le morphisme correspondant pour les complexes d'opérateurs différentiels (d'ordre infini) l'est au sens naïf (i.e. induit un isomorphisme sur les faisceaux de cohomologie)[692](**).

[691](*) Ce résultat de finitude implique par exemple que localement sur X, le complexe $R\underline{Hom}_\infty(F, \underline{O}_X)$ est isomorphe (dans la catégorie dérivée) à un complexe de $\mathscr{D}^\infty$-Modules qui est localement libre de type fini en chaque degré, et que ses Modules de cohomologie proviennent (localement), par extension des scalaires, de $\mathscr{D}$-Modules cohérents. En fait, on peut même supposer ces derniers holonomes et réguliers.

[692](**) (26 mai) En fait (comme je le signale plus bas, début de (c)) Mebkhout prouve ce dernier résultat, même en dehors de toute condition d'holonomie, sous, la forme équivalente : si le complexe d'opérateurs différentiels associé à un complexe de $\mathscr{D}^\infty$-Modules est quasi-nul, il en est de même de ce dernier (et itou pour les $\mathscr{D}$-Modules).