b) pour X projectif lisse, on a

$$h(X) = \text{i.ème nombre de Betti de} \, X$$

(défini par exemple via la cohomologie χ-adique, pour χ premier à la caractéristique de k). Si on admet la résolution des singularités pour les schémas algébriques sur $\overline{k}$, alors il est immédiat que les $h^i(X)$ sont uniquement déterminés par ces propriétés. L'e**xistence** d'une telle fonction $X \longrightarrow (h^i(X))_{i \in N}$ pour k fixé, utilisant le formalisme de la cohomologie à support propre, peut se réduire essentiellement au cas où le corps de base est fini. Travaillant dans le "groupe de Grothendieck" des vectoriels de dimension finie sur $\mathbb{Q}_\chi$ sur lesquels $\mathrm{Gal}(\frac{\overline{k}}{k})$ opère continûment, et prenant la caractéristique d' Euler-Poincaré χ-adique (à support propre) de X dans ce groupe, $h^i(X)$ désigne alors le rang virtuel de la "composante de poids i" de $\mathrm{EP}(X, \mathbb{Q}_\chi)$, où la notion de poids est celle déduite des conjectures de Weil, plus une forme faible de la résolution des singularités. Même sans résolution, l'idée de Serre se trouve réalisée grâce à la forme forte des conjectures de Weil (établie par Deligne dans "Conjectures de Weil II").

J'ai poursuivi des réflexions heuristiques dans cette voie, me menant vers un formalisme des six opérations pour les "schémas relatifs virtuels", le corps de base k étant remplacé par un schéma de base S plus ou moins quelconque - et vers diverses notions de "classes caractéristiques" pour de tels schémas virtuels (de présentation finie) sur S. Ainsi, j'ai été amené (revenant pour simplifier au cas d'un corps de base) à envisager des invariants numériques entiers plus fins que ceux de Serre, notés $h^{p,q}(X)$, satisfaisant aux propriétés analogues à a), b) ci-dessus, et redonnant les nombres de Betti virtuels de Serre par la formule habituelle

$$h^i(X) = \sum_{p+q=i} h^{p,q}(X)$$

13.2.2. Refus d'un héritage - ou prix d'une contradiction

Note 47 [Cette note est la continuation directe de la note 46 p.13.2.1]

◇On notera que quatre parmi les cinq notions que je viens de passer en revue (celles justement qui passent pour choses "pas sérieuses") concernent la cohomologie, et avant tout, **la cohomologie des schémas et des variétés algébriques**. En tous cas, toutes les quatre m'ont été suggérées par les besoins d'une théorie cohomologique des variétés algébriques, pour des coefficients continus d'abord, discrets ensuite. C'est dire qu'une motivation principale et un Leitmotiv constant dans mes travaux, pendant les quinze années de 1955 à 1970, a été la cohomologie des variétés algébriques.

Chose remarquable, c'est là le thème aussi que Deligne considère aujourd'hui encore comme sa principale source d'inspiration, si j'en crois ce qui est dit à ce sujet dans la brochure de l' IHES de l'an dernier[23](*). J'ai pris connaissance de la chose avec un certain étonnement. Certes, j'étais encore "sur les lieux" et tout ce qu'il y a de branché, quand Deligne (après son beau travail sur la conjecture de Ramanuyam) a développé sa remarquable extension de la théorie de Hodge. C'était là surtout, pour lui tout comme pour moi, un premier pas vers une construction en forme de la notion de motif sur le corps des complexes - pour commencer ! Dans les premières années après mon "tournant" de 1970, j'ai eu bien sûr écho aussi de la démonstration par Deligne des conjectures de Weil (ce qui prouvait aussi la conjecture de Ramanuyam), et dans la foulée, du "théorème de Lefschetz vache" en caractéristique positive. Je n'en attendais pas moins de lui ! J'étais sûr même qu'il devait

[23](*) (12 mai) Par contre, je viens de constater que rien dans ladite brochure pourrait faire soupçonner au lecteur que mon oeuvre ait quoi que ce soit à voir avec la cohomologie des variétés algébriques, ou celle de quoi que ce soit d'autre ! Voir à ce sujet la note "L'Eloge Funèbre (1) - ou les compliments" (n° 98) écrite ce jour. La brochure dont il est question est celle mentionnée dans la note de bas de page à la note "L'arrachement salutaire", n° 42, et examinée d'un peu plus près dans la note "L'Eloge Funèbre" qu'on vient de mentionner.