d'où des homomorphismes

$$\underline{H}^i(L^\cdot) \longrightarrow \underline{H}^i(P^\infty(L^\cdot)) \qquad (i \in \mathbb{Z}) \tag{16}$$

sur les faisceaux de cohomologie. On a envie de dire que cet homomorphisme (16) est toujours injectif, et identifie le premier membre au sous-faisceau des sections "horizontales" du second (ce qui serait une sorte de propriété d'exactitude du foncteur "faisceau des sections horizontales" sur une catégorie de pro-Modules stratifiés convenable. . .). L'injectivité impliquerait déjà que si le deuxième membre est nul, il en est de même du premier, donc si c'est vrai pour tout i (et selon ce que m'assure Mebkhout) le complexe de $\mathscr{D}$-Modules associé à $L^\cdot$ est quasi-nul - ce que je voulais.

L'injectivité dans (16) signifie aussi que pour un opérateur différentiel $E \xrightarrow{d} F$, et une section f de F qui en chaque point $x \in X$ est "formellement" dans l'image (en passant à l'anneau local complété du point), et tel de plus que la "solution formelle" (de l'équation $d(g) = f$ en g) puisse être prise, pour x variable, dépendante de façon analytique de x - l'équation admet alors localement une solution. Mebkhout me dit qu'il n'a pas connaissance d'un tel résultat ; pourtant la question est si naturelle que la réponse devrait bien être connue !

Pour en terminer avec les "cinq photos", je voudrais encore ici revenir sur les deux "photos cristallines", l'une correspondant au point de vue de Mebkhout des $\mathscr{D}$-Modules, l'autre au point de vue dual. Il est bien entendu qu'on doit travailler dans l'esprit des catégories dérivées - donc une interprétation "cristalline" digne de ce nom doit en tenir compte. Donc les deux photos cristallines ne sont "pleinement fidèles" que si le foncteur correspondant, $\diamond$(allant de la catégorie $D^b_{coh}(X, \mathscr{D})$ (disons), vers une catégorie idoine cristalline, telle que $D^b(X_{cris}, \underline{O}_{X_{cris}})$, est lui-même pleinement fidèle. J'ai l'espoir que tel est bien le cas, **sans même s'encombrer de conditions d'holonomie et de régularité** sur les complexes de $\mathscr{D}$-Modules envisagés.

Le cas le plus simple sans doute est celui de la photo n° 4, qui consiste à interpréter la catégorie des $\mathscr{D}$-Modules comme celle des cristaux de Modules, d'où un foncteur dérivé total (dit "de Grothendieck" - pour prendre les devants sur les amateurs de "détails inutiles" et de "digressions techniques". . .) :

$$G \,:\, D^*_{coh}(X, \mathscr{D}) \longrightarrow D^*(X_{cris}, \underline{O}_{X_{cris}})\,. \tag{17}$$

La question cruciale ici, est si ce foncteur est pleinement fidèle. C'est dans ce cas seulement que la notation $\underline{Cris}^*_{coh}(X)$ pour le premier membre est totalement justifiée - et du même coup, aussi, le point de vue cristallin en cohomologie de De Rham (du moins, en l'espèce, dans le cadre analytique complexe, ou le cadre des schémas algébriques sur un corps de car. nulle). Pour prouver la pleine fidélité, en géométrie algébrique disons, on est ramené par des arguments standard au cas où X est affine (ou, dans le cas analytique, au cas d'un polydisque), et au cas où les deux objets C, C' envisagés dans le premier membre (dont il s'agit de comparer les Hom dans l'un et l'autre sens) sont tous deux égaux à $\mathscr{D}$ lui-même, avec simplement un shift de degrés. (Cette réduction se fait sans problème, tout au moins en supposant C, C' à degrés bornés, donc en se bornant à $D^b_{coh}(X, \mathscr{D})$, ce qui semble largement suffisant pour les applications,) On est donc conduit à vérifier finalement les formules

$$\Gamma(X, \mathscr{D}_X) \xrightarrow{\sim} Hom(G(\mathscr{D}), G(\mathscr{D})),\ Ext^i_{\underline{O}_{X_{cris}}}(X_{cris}; G(\mathscr{D}), G(\mathscr{D})) = 0 \,\text{pour}\, i > 0. \tag{18}$$

(pour X affine, resp. Stein). Je n'ai pas pris le loisir de le vérifier[707](*), mais ne doute guère que ce soit vrai. J'ai démontré quelque chose de très voisin, il me semble, dans [Crystals] (en 1966)[708](**).

[707](*) J'ai des excuses, le plus clair de mon temps, depuis plus d'une année, ayant été absorbé à suivre à la trace les prouesses de certains parmi ceux qui furent mes élèves. . .

[708](**) Il s'agit du résultat auquel j'ai déjà fait allusion ailleurs, que pour un complexe d'opérateurs différentiels $L^\cdot$ sur un schéma