潘承洞《数论基础》

Exercises on Undergraduate Mathematics

作者：韦明

时间：April 6, 2025

E-mail：wm31415926535@outlook.com

目录

第 1 章 作业

1.1 第三周作业

第二章

8 试证：当 $\omega(n)>1$ 时，$\sum\limits_{d|n}\mu(d)\log d=0$; 一般若 $m\geqslant 1$ 且 $\omega(n)>m$，则 $\sum\limits_{d|n}\mu(d)\log^m d=0.$

证明 由于若 d 存在平方因子，则 $\mu(d)=0$，不妨设

$$n=p_1p_2\cdots p_k$$

其中 $p_i,p_j(i\neq j)$ 为互异素因子。

(a). 当 $\omega(n)>1$ 时，$\sum\limits_{d|n}\mu(d)\log d=0$。

$k=\omega(n)>1 \implies k>1$

$$\begin{aligned}\sum_{d|n}\mu(d)\log d&=\sum_{S\subseteq\{p_1,p_2,\cdots,p_k\}}\mu(\prod_{p\in S}p)\log(\prod_{p\in S}p)\\&=\sum_{S\subseteq\{p_1,p_2,\cdots,p_k\}}(-1)^{|S|}\sum_{p\in S}\log p\end{aligned}$$

交换求和次序，有：

$$\sum_{d|n}\mu(d)\log d=\sum_{p|n}\log p\sum_{\substack{d|n\\p|d}}\mu(d)$$

固定 p，则

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{d|n\\p|d}}\mu(d)&=(-1)\left[(-1)^0\binom{k-1}{0}+(-1)^1\binom{k-1}{1}+\cdots+(-1)^{k-1}\binom{k-1}{k-1}\right]\\&=(-1)(-1+1)^{k-1}\\&=0\end{aligned}$$

因此，

$$\sum_{d|n}\mu(d)\log d=0$$

(b). 若 $m\geq 1$，且 $\omega(n)>m$，则 $\sum\limits_{d|n}\mu(d)\log^m d=0$。

$k=\omega(n)>m\geq 1 \implies k>1$

$$\sum_{d|n}\mu(d)\log^m d=\sum_{d|n}\mu(d)\sum_{\substack{p_1|d,\cdots,p_m|d\\ p_i|n}}\log p_1\cdots\log p_m$$

交换求和次序，有：

$$\sum_{d|n}\mu(d)\log^m d=\sum_{p_1|n}\cdots\sum_{p_m|n}\log p_1\cdots\log p_m\sum_{\substack{d|n\\ p_1|d,\cdots,p_m|d}}\mu(d)$$

固定 $p_1,p_2,\cdots,p_m$，令 $S=\{s:s=p_i,i=1,2,\cdots,m\}$ 为其中不同素因子的集合；设 $r=|S|$，则 $r\leq m<k$.

则：

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{d|n\\ p_1|d,\cdots,p_m|d}}\mu(d)\\
&=(-1)^r\left[(-1)^0\binom{k-r}{0}+(-1)^1\binom{k-r}{1}+\cdots+(-1)^{k-r}\binom{k-r}{k-r}\right]\\
&=(-1)^r(-1+1)^{k-r}\\
&=0
\end{aligned}$$

因此，

$$\sum_{d|n}\mu(d)\log^m d=0$$

10 求 $\sum_{n=1}^{\infty}\mu(n!)$ 之值.

解 对于 $n\geq 4$，有 $2^2=4|n$，故 $\mu(n)=0$。

则：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mu(n!)=\mu(1)+\mu(2)+\mu(6)=1+(-1)+(-1)^2=1$$

11 证明：$\sum_{d|n}\mu^2(d)=2^{\omega(n)}$ 及 $\sum_{t|n}\mu(t)d(t)=(-1)^{\omega(n)}$.

证明

(a). 设 $f=\mu^2*u$，则 f 为积性函数，且 $f(n)=\sum_{d|n}\mu^2(d)$。

设 $n = p^\alpha$，则有：

$$f(p^\alpha) = \begin{cases} 1, & \alpha = 0 \\ 2, & \alpha \geq 1 \end{cases}$$

若 $m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_s^{\alpha_s}$，则

$$f(m) = f(p_1^{\alpha_1}) f(p_2^{\alpha_2}) \cdots f(p_s^{\alpha_s}) = 2^{\omega(m)}$$

即

$$\sum_{d|n} \mu^2(d) = 2^{\omega(n)}$$

(b). 设 $g = \mu d * u$，则 g 为积性函数，且 $g(n) = \sum_{t|n} \mu(t) d(t)$。

设 $n = p^\alpha$，则有：

$$g(p^\alpha) = \begin{cases} 1, & \alpha = 0 \\ -1, & \alpha \geq 1 \end{cases}$$

若 $m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_s^{\alpha_s}$，则

$$g(m) = g(p_1^{\alpha_1}) g(p_2^{\alpha_2}) \cdots g(p_s^{\alpha_s}) = (-1)^{\omega(m)}$$

即

$$\sum_{t|n} \mu(t) d(t) = (-1)^{\omega(n)}$$

12 试证：$\sum_{d|n} \mu(d)\sigma(d) = (-1)^{\omega(n)} \prod_{p|n} p$ 及 $\sum_{d|n} \mu(d)\varphi(d) = (-1)^{\omega(n)} \prod_{p|n} (p-2)$.

证明

(a). $\sum_{d|n} \mu(d)\sigma(d) = (-1)^{\omega(n)} \prod_{p|n} p$。

设 $f = \mu * \sigma$，则 f 为积性函数，且 $f(n) = \sum_{d|n} \mu(d)\sigma(d)$。

设 $n = p^\alpha$，则有：

$$f(p^\alpha) = \begin{cases} 1, & \alpha = 0 \\ -p, & \alpha \geq 1 \end{cases}$$

若 $m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_s^{\alpha_s}$，则

$$f(m) = f(p_1^{\alpha_1}) f(p_2^{\alpha_2}) \cdots f(p_s^{\alpha_s}) = (-1)^{\omega(m)} \prod_{p|m} p$$

即

$$\sum_{d|n} \mu(d)\sigma(d) = (-1)^{\omega(n)} \prod_{p|n} p$$

(b). $\sum\limits_{d|n} \mu(d)\varphi(d) = (-1)^{\omega(n)} \prod\limits_{p|n} (p-2)$。

设 $g = \mu * \varphi$，则 g 为积性函数，且 $g(n) = \sum\limits_{d|n} \mu(d)\varphi(d)$。

设 $n = p^\alpha$，则有：

$$g(p^\alpha) = \begin{cases} 1, & \alpha = 0 \\ 2-p, & \alpha \geq 1 \end{cases}$$

若 $m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_s^{\alpha_s}$，则

$$g(m) = g(p_1^{\alpha_1}) g(p_2^{\alpha_2}) \cdots g(p_s^{\alpha_s}) = (-1)^{\omega(m)} \prod_{p|m} (p-2)$$

即

$$\sum_{d|n} \mu(d)\varphi(d) = (-1)^{\omega(n)} \prod_{p|n} (p-2)$$

14（1）设 $n > 1$，证明：$\sum\limits_{\substack{1 \leqslant d \leqslant n \\ (n,d)=1}} d = \dfrac{1}{2} n\varphi(n)$；

（2）设 n 为奇数，证明：$\sum\limits_{\substack{1 \leqslant d \leqslant \frac{n}{n} \\ (d,n)=1}} d = \dfrac{1}{8} n\varphi(n) - \dfrac{1}{8} \prod\limits_{p|n} (1-p)$.

证明

(a). 若 $n > 1$，则

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{1 \leq d \leq n \\ (n,d)=1}} d &= \frac{1}{2} \sum_{\substack{1 \leq d \leq n \\ (n,d)=1}} d + \frac{1}{2} \sum_{\substack{1 \leq d \leq n \\ (n,d)=1}} (n-d) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\substack{1 \leq d \leq n \\ (n,d)=1}} n \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}n\varphi(n)$$

(b). 设 $S = \sum\limits_{\substack{1\le d\le \frac{n}{2}\\(d,n)=1}} d$，则有

$$S = \sum_{d=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} d \cdot I((d,n))$$

其中 $I = \mu * u$，故

$$I((d,n)) = \sum_{k|(d,n)} \mu(k)$$

于是，

$$S = \sum_{d=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} d \sum_{k|(d,n)} \mu(k)$$

交换求和次序，有

$$S = \sum_{k|n} \mu(k) \sum_{\substack{1\le d\le \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\\k|d}} d$$

固定 k，设 $d = km$，则

$$\sum_{\substack{1\le d\le \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\\k|d}} d = k\sum_{m=1}^{\lfloor \frac{n}{2k} \rfloor} m = k \cdot \frac{M(M+1)}{2}$$

其中，$M = \lfloor \dfrac{n}{2k} \rfloor$。
而

$$\lfloor \frac{n}{2k} \rfloor = \lfloor \frac{\frac{n}{k}}{2} \rfloor = \frac{\frac{n}{k}-1}{2}$$

因此，

$$\sum_{\substack{1\le d\le \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\\k|d}} d = k \cdot \frac{\frac{\frac{n}{k}-1}{2}(\frac{\frac{n}{k}-1}{2}+1)}{2}$$

$$= \frac{n^2-k^2}{8k}$$

则

$$S = \sum_{k|n} \mu(k) \cdot \frac{n^2 - k^2}{8k}$$

$$= \frac{1}{8}\left(n^2 \sum_{k|n} \frac{\mu(k)}{k} - \sum_{k|n} \mu(k)k\right)$$

其中，

$$\sum_{k|n} \frac{\mu(k)}{k} = \frac{\varphi(n)}{n}$$

$$\sum_{k|n} \mu(k)k = \prod_{p|n}(1-p)$$

于是，

$$S = \frac{1}{8}\left(n^2 \cdot \frac{\varphi(n)}{n} - \prod_{p|n}(1-p)\right)$$

$$= \frac{1}{8}n\varphi(n) - \frac{1}{8}\prod_{p|n}(1-p)$$

16 求出所有使 $\varphi(n) = 24$ 的自然数.

解 对于 $n \in \mathbb{N}^+$，作如下素因数分解

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$$

则

$$\varphi(n) = n\prod_{p|n}(1 - \frac{1}{p})$$

$$= p_1^{\alpha_1 - 1}(p_1 - 1)p_2^{\alpha_2 - 1}(p_2 - 1) \cdots p_k^{\alpha_k - 1}(p_k - 1)$$

注意到：$24 = 2^3 \times 3$

(a). $n = p^k$

即

$$p^{k-1}(p-1) = 2^3 \times 3$$

无解。

(b). $n=p^aq^b$

即

$$p^{a-1}(p-1)q^{b-1}(q-1)=2^3\times 3$$

I. $a=1$，$b=1$，则

$$(p-1)(q-1)=24$$

而 $24=1\times 24=2\times 12=3\times 8=4\times 6$

又 p,q 均为素数，故

$$(p,q)=(3,13),(5,7)$$

于是

$$n=pq=39,35$$

II. $a=2$，$b=1$，则

$$p(p-1)(q-1)=24$$

故

$$(p,q)=(2,13),(3,5)$$

于是

$$n=p^2q=52,45$$

III. $a=3$，$b=1$，则

$$p^2(p-1)(q-1)=24$$

故

$$(p,q)=(2,7)$$

于是

$$n=p^3q=56$$

IV. $a=3$，$b=2$，则

$$p^2(p-1)q(q-1)=24$$

故

$$(p,q)=(2,3)$$

于是

$$n=p^3q^2=72$$

V. 其他情况，均无解。

(c). $n=p^aq^br^c$

即

$$p^{a-1}(p-1)q^{b-1}(q-1)r^{c-1}(r-1)=24$$

I. $a=b=c=1$，则

$$(p-1)(q-1)(r-1)=24$$

而 $24=1\times2\times12=1\times3\times8=1\times4\times6=2\times3\times4$

故

$$(p,q,r)=(2,3,13),(2,5,7)$$

于是

$$n=pqr=78,70$$

II. $a=2$，$b=c=1$，则

$$p(p-1)(q-1)(r-1)=24$$

故

$$(p,q,r)=(2,3,7),(3,2,5)$$

于是

$$n=p^2qr=84,90$$

III. $a=b=2$，$c=1$ 或其它情况，均无解。

(d). $n=p^aq^br^cs^t$.

因为若 $n=2\times3\times5\times7=210$，则 $\varphi(n)=48>24$，故无解。

综上所述，n 所有可能的取值为

$$39,35,52,45,56,72,78,70,84,90$$

共 10 种。

19 求出所有 $4\nmid\varphi(n)$ 的自然数 n .

解 对于 $n\in\mathbb{N}^+$，作如下素因数分解

$$n=p_1^{k_1}p_2^{k_2}\cdots p_m^{k_m}$$

则

$$\varphi(n)=p_1^{k_1-1}(p_1-1)p_2^{k_2-1}(p_2-1)\cdots p_m^{k_m-1}(p_m-1)$$

设 $n=2^a\cdot m$，其中 $2^a\mid n$ 而 $2^{a+1}\nmid m$。
由于 $\varphi(n)$ 为积性函数，于是

$$\varphi(n)=\varphi(2^a)\cdot\varphi(m)$$

(a). $a=0$，则 n 为奇数。
对于 m 作素因数分解

$$m=p_1^{b_1}p_2^{b_2}\cdots p_t^{b_t}$$

其中 p_i 为奇质数。

I. 若 $p_i\equiv 1\pmod 4$，则 $p_i-1\equiv 0\pmod 4$，则

$$4|\varphi(m)$$

II. 若 $p_i\equiv 3\pmod 4$，则

$$\varphi(p_i^{b_i})=p_i^{b_i-1}(p_i-1)\equiv 2\pmod 4$$

若 $t\leq 2$, 则存在 i,j 使得 $4|(p_i-1)(p_j-1)$，故 $4|\varphi(n)$。
若 $t=0$, 则 $n=1$，$\varphi(1)=1$，有 $4\nmid\varphi(1)$。
若 $t=1$，则 $n=p^b$，其中 $p\equiv 3\pmod 4$，故 $\varphi(p^b)\equiv 2\pmod 4$。

(b). $a=1$，则

$$\varphi(n)=\varphi(2\cdot m)=\varphi(2)\varphi(m)=\varphi(m)$$

与上一种情况类似，故

$$4\nmid\varphi(n)\iff n=2\text{或}n=2\cdot p^k$$

其中 $p\equiv 3\pmod 4$，$k\geq 1$。

(c). $a=2$，则

$$\varphi(n)=\varphi(4\cdot m)=\varphi(4)\varphi(m)=2\varphi(m)$$

比较可知，$4\nmid\varphi(m)\iff m=1\iff n=4$。

(d). $a\geq 3$，则 $4|\varphi(n)$，无解。

综上所述，n 所有可能的取值为

$$1, 2, 4, p^k, 2 \cdot p^k$$

其中 p 为素数且 $p \equiv 3 \pmod 4$，$k \geq 1$。

22 设 $\Lambda(n)$ 为 Mangoldt 函数，且 $\psi(x) = \sum\limits_{n \leq x} \Lambda(n)$，则

$$\sum_{n \leq x} \psi\left(\frac{x}{n}\right) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n) \left[\frac{x}{n}\right] = \sum_{n \leq x} \log n.$$

证明

(a).

$$\begin{aligned}
\sum_{n \leq x} \psi\left(\frac{x}{n}\right) &= \sum_{n \leq x} \sum_{m \leq \frac{x}{n}} \Lambda(m) \\
&= \sum_{m \leq x} \Lambda(m) \sum_{n \leq \frac{x}{m}} 1 \\
&= \sum_{m \leq x} \Lambda(m) \left[\frac{x}{m}\right]
\end{aligned}$$

(b).

$$\begin{aligned}
\sum_{n \leq x} \log n &= \sum_{n \leq x} \sum_{d \mid n} \Lambda(d) \\
&= \sum_{d \leq x} \Lambda(d) \sum_{k \leq \frac{x}{d}} 1 \\
&= \sum_{d \leq x} \Lambda(d) \left[\frac{x}{d}\right]
\end{aligned}$$

24 设 $\sigma(n)$ 为除数和函数，证明：

（1）$\sigma(n) = n + 1$ 的充要条件是 n 为素数；

（2）如果 n 为完全数，即 $\sigma(n) = 2n$ ，则

$$\sum_{d \mid n} \frac{1}{d} = 2$$

证明

(a). 必要性显然。

充分性：

若 $n = 1$，则 $\sigma(1) = 1$，而 $1 + n = 2$，故不满足。

若 n 为合数，则存在 d（$d \neq 1$ 且 $d \neq n$）s.t. $d \mid n$。

而

$$\sigma(n) \geq 1 + d + n > 1 + n$$

故 $\sigma(n) \neq 1 + n$，矛盾。

因此，n 为素数。

(b).

$$\sum_{d|n} \frac{1}{d} = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \frac{n}{d} = \frac{1}{n} \sum_{d|n} d = \frac{\sigma(n)}{n} = \frac{2n}{n} = 2$$