24

❓ Problem Problem

讨论方程组 $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -ay - b\sin x \end{cases}$ $(ab \neq 0)$ 零解的稳定性。

✅ Solution Solution >

步骤1：确定平衡点 ...

令 $\dfrac{dx}{dt} = 0$ 和 $\dfrac{dy}{dt} = 0$，得：

$$\begin{cases} y = 0 \\ -a \cdot 0 - b\sin x = 0 \implies \sin x = 0 \implies x = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

平衡点为 $(k\pi, 0)$。题目要求讨论 **零解** $(0,0)$ 的稳定性。

步骤2：线性化系统 ...

在平衡点 $(0,0)$ 附近进行泰勒展开，保留一阶项：

- $\sin x \approx x$（线性近似）
- 原方程组线性化为：

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\ \dfrac{dy}{dt} = -ay - bx \end{cases}$$

对应的系数矩阵为：

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix}$$

步骤3：特征值分析 ...

求矩阵 A 的特征方程：

$$\det(A-\lambda I)=\lambda^2+a\lambda+b=0$$

解得特征值：

$$\lambda=\frac{-a\pm\sqrt{a^2-4b}}{2}$$

步骤4：参数分情况讨论 ...

情况1：$a>0$ 且 $b>0$ ...

- **实根情形**（$a^2>4b$）：
  两根均为负实数（根和为 $-a<0$，根积为 $b>0$）。
- **复根情形**（$a^2<4b$）：
  实部为 $-a/2<0$，虚部非零，系统为稳定焦点。
- **临界情形**（$a^2=4b$）：
  重根 $\lambda=-a/2<0$，系统稳定结点。

结论：零解 **渐近稳定。**

情况2：$a>0$ 但 $b<0$ ...

- 特征方程根积 $b<0$，必有一正一负实根。
- **结论**：零解 **不稳定。**

情况3：$a<0$ ...

- 无论 b 的符号：
  - 实根时至少一个正根（根和为 $-a>0$）。
  - 复根时实部为 $-a/2>0$。
- **结论**：零解 **不稳定。**

❓ Problem **Problem**

对方程组 $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y - xf(x,y) \\ \frac{dy}{dt} = -x - yf(x,y) \end{cases}$，其中 $f(x,y)$ 有一阶连续偏导数，

（1）证明：$(0,0)$ 是其唯一的平衡点。

（2）证明：当 $f(x,y)$ 在原点某领域内恒正时，零解是渐近稳定的；当 $f(x,y)$ 在原点某领域内恒负时，零解是不稳定的。

🔍 Proof Proof >

(1) 证明 $(0,0)$ 是唯一平衡点 ...

步骤1：平衡点定义

平衡点满足：

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y - xf(x,y) = 0 \\ \dfrac{dy}{dt} = -x - yf(x,y) = 0 \end{cases}$$

步骤2：联立方程求解

由第一式得：

$$y = xf(x,y) \tag{1}$$

代入第二式：

$$-x - yf(x,y) = 0 \implies -x - x[f(x,y)]^2 = 0 \implies x\left(1 + [f(x,y)]^2\right) = 0$$

由于 $1 + [f(x,y)]^2 \geq 1 > 0$，唯一解为 $x = 0$。代入式 (1) 得 $y = 0$。

结论

唯一平衡点为 $(0,0)$。

(2) 零解的稳定性分析 ...

步骤1：构造 Lyapunov 函数

定义正定函数：

$$V(x,y) = x^2 + y^2$$

步骤2：计算沿轨道的导数

$$
\begin{aligned}
\frac{dV}{dt} &= 2x \cdot \frac{dx}{dt} + 2y \cdot \frac{dy}{dt} \\
&= 2x(y - xf) + 2y(-x - yf) \\
&= 2xy - 2x^2 f - 2xy - 2y^2 f \\
&= -2f(x^2 + y^2)
\end{aligned}
$$

步骤3：分情况讨论

- **当** $f(x, y) > 0$ **在原点附近时**
  $\frac{dV}{dt} = -2f(x^2 + y^2) < 0$（除原点外严格负），
  零解 **渐近稳定。**
- **当** $f(x, y) < 0$ **在原点附近时**
  $\frac{dV}{dt} = -2f(x^2 + y^2) > 0$（除原点外严格正），
  零解 **不稳定。**