空间解析几何资料

Author: 韦明

Date: March 12, 2025

E-mail: wm31415926535@outlook.com

Contents

Chapter 1 空间解析几何

1.1 作业

1.1.1 Assignment-1

Problem 1.1 给定平面多边形,其顶点为 $P_1(1,2), P_2(3,1), P_3(7,0), P_4(8,2), P_5(6,3), P_6(7,4)$ 求多四形面积.

Solution

$$\begin{aligned}
A_{P_1P_2P_3P_4P_5P_6P_7} &= \sum_{cyc}(S_{\triangle P_1P_2P_3}) \\
&= \sum_{cyc}(\frac{1}{2}(\overrightarrow{P_1P_2} \cdot \overrightarrow{P_1P_3})) \\
&= |\sum_{cyc}(\frac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1))| \\
&= \frac{1}{2}|(1\times 1 - 2\times 3) + (3\times 0 - 1\times 7) + \cdots + (5\times 2 - 2\times 5)| \\
&= \frac{37}{2}.
\end{aligned}$$

Problem 1.2 求 $\overrightarrow{v} = (1,2,3)$ 到 $\overrightarrow{u} = (3,6,-1)$ 的投影长度、外投影向量、内投影向量.

Solution *投影长度:* $\mathrm{Comp}_{\overrightarrow{u}}\overrightarrow{v} = |\frac{\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}}{\overrightarrow{u}}| = |\frac{1\times 3 + 2\times 6 + 3\times(-1)}{\sqrt{3^2+6^2+(-1)^2}}| = 6\sqrt{\frac{2}{23}}.$

内投影向量: $\overrightarrow{w} = \mathrm{Proj}_{\overrightarrow{u}}\overrightarrow{v} = \mathrm{Comp}_{\overrightarrow{u}}\overrightarrow{v}\cdot\frac{\overrightarrow{u}}{|\overrightarrow{u}|} = 6\sqrt{\frac{2}{23}}\cdot\frac{(3,6,-1)}{\sqrt{3^2+6^2+(-1)^2}} = (\frac{18}{23},\frac{36}{23},\frac{-6}{23}).$

外投影向量: $\overrightarrow{p} = \overrightarrow{v} - \overrightarrow{w} = (\frac{5}{23},\frac{10}{23},\frac{75}{23}).$

Problem 1.3 给定空间三点 $P(1,2,1), Q(2,4,-1)$ 和 $R(5,6,-3)$.

(1) 求 $\triangle PQR$ 面积;

(2) 求包含 $\triangle PQR$ 的平面的法向量;

(3) 给出含 P,Q,R 三点的平面方程.

Solution *(1)* $A = \frac{1}{2}|\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}| = \frac{1}{2}|(1,2,-2)\times(4,4,-3)| = 2\sqrt{2}.$

(2) $\overrightarrow{n}=\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}=\det\begin{bmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -2 \\ 4 & 4 & -4 \end{bmatrix}=(0,-4,-4).$

(3) $\pi: -4(y-2)-4(z-1)=0 \Leftrightarrow y+z=3.$

Problem 1.4 经定空间四点 $P(1,2,0), Q(2,4,-1), R(5,6,-3)$ 和 $S(1,1,1)$.

(1) 求以 P, Q, R 和 S 为顶点的平行六面体体积.

(2) 求平行六面体相对于包含 $\triangle PQR$ 的底面的高.

Solution *(1)* $V=(\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PR},\overrightarrow{PS})=\left|\det\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\right|=3.$

(2) $h=\dfrac{V}{|\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}|}=\dfrac{3}{|(1,2,-1)\times(4,4,-3)|}=\dfrac{\sqrt{21}}{7}.$

Problem 1.5 给定向量 $\overrightarrow{u}=(1,1,1)^T, \overrightarrow{v}=(1,-1,1)^T, \overrightarrow{w}=(3,5,7)^T$:

(1) 给出包含 $\overrightarrow{u}$ 和 $\overrightarrow{v}$ 的子空间 $W=\mathrm{span}\{\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\}$ 的表达式.

(2) 给出 $\overrightarrow{w}$ 向 W 投影的正规方程, 求投影矩阵 R，并求 $\mathrm{Proj}_W\,\overrightarrow{w}$;

(3) 求 $\overrightarrow{w}$ 关于 W 的外投影 (向量).

Solution *(1)* $W=\{\lambda\overrightarrow{u}+\mu\overrightarrow{v};\lambda,\mu\in\mathbb{R}\}=(\lambda+\mu,\lambda-\mu,\lambda+\mu).$

(2) 正规方程:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\overrightarrow{x}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

投影矩阵: $R=A(A'A)^{-1}A'=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\cdot(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix})^{-1}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}=$
$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$

$$\mathrm{Proj}_W\,\overrightarrow{w}=R\cdot\overrightarrow{w}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

(3) 外投影: $\overrightarrow{w}-\mathrm{Proj}_W\overrightarrow{w}=\begin{bmatrix}-2\\0\\2\end{bmatrix}.$

1.1.2 Assignment-2

Problem 1.6 设曲面 S 由 $(r\cos(\theta),r\sin(\theta),2\theta)$, 其中 $0\le r\le 4, 0\le\theta\le 2\pi$.
(1) 求曲面 S 在点 $(\sqrt{2},-\sqrt{2},\frac{7\pi}{2})$ 处的切平面方程 T_pS;
(2) 求曲面 S 的面积元 $\mathrm{d}A$;
(3) 设曲线 $\gamma:(2\cos(\theta),2\sin(\theta),2\theta)$, 求该曲线在 $\theta=\frac{7\pi}{4}$ 处的点 P_0 的曲率 k 和挠率 τ;
(4) 求曲面在 P_0 处的法曲率 k_n.

Solution *(1)* $\overrightarrow{r}=(r\cos(\theta),r\sin(\theta),2\theta)$, 求导有

$$\overrightarrow{r}_r=\begin{bmatrix}\cos(\theta)\\\sin(\theta)\\0\end{bmatrix},\overrightarrow{r}_\theta=\begin{bmatrix}-r\sin(\theta)\\r\cos(\theta)\\2\end{bmatrix}.$$

因此 S 在点 $(\sqrt{2},-\sqrt{2},\frac{7\pi}{2})$, 即 $\overrightarrow{r}(2,\frac{7\pi}{4})$ 处的切平面方程为

$$0=\det\begin{bmatrix}x-\sqrt{2} & y+\sqrt{2} & z-\frac{7\pi}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0\\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 2\end{bmatrix},$$

即 $\sqrt{2}x+\sqrt{2}y-2z+7\pi=0$.
(2) $\mathrm{d}A=|\overrightarrow{r}_r\times\overrightarrow{r}_\theta|\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=\sqrt{r^2+4}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$.
(3) $\overrightarrow{r}'=(-2\sin(\theta),2\cos(\theta),2)$, $\overrightarrow{r}''=(-2\cos(\theta),-2\sin(\theta),0)$, $\overrightarrow{r}'''=(2\sin(\theta),-2\cos(\theta),$
故

$$k=\frac{|\overrightarrow{r}'\times\overrightarrow{r}''|}{|\overrightarrow{r}'|^3}=\frac{1}{4},$$
$$\tau=\frac{|(\overrightarrow{r}',\overrightarrow{r}'',\overrightarrow{r}''')|}{|\overrightarrow{r}'\times\overrightarrow{r}''|^2}=\frac{1}{4}.$$

(4)

$$\overrightarrow{n} = \frac{\overrightarrow{r}_r \times \overrightarrow{r}_\theta}{|\overrightarrow{r}_r \times \overrightarrow{r}_\theta|} = (\frac{2\sin(\theta)}{\sqrt{r^2+4}}, -\frac{2\cos(\theta)}{\sqrt{r^2+4}}, \frac{r}{\sqrt{r^2+4}}),$$

$$\overrightarrow{n}_r = (-\frac{2r\sin(\theta)}{(r^2+4)^{\frac{3}{2}}}, \frac{2r\cos(\theta)}{(r^2+4)^{\frac{3}{2}}}, \frac{4}{(r^2+4)^{\frac{3}{2}}}),$$

$$\overrightarrow{n}_\theta = (\frac{2\cos(\theta)}{\sqrt{r^2+4}}, \frac{2\sin(\theta)}{\sqrt{r^2+4}}, 0).$$

$$\begin{aligned} M_p &= -\begin{bmatrix} u & v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overrightarrow{r}_r \cdot \overrightarrow{n}_r & \overrightarrow{r}_r \cdot \overrightarrow{n}_\theta \\ \overrightarrow{r}_\theta \cdot \overrightarrow{n}_r & \overrightarrow{r}_\theta \cdot \overrightarrow{n}_\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \\ &= -\frac{4uv}{\sqrt{r^2+4}}. \end{aligned}$$

,

$$\begin{aligned} D_p &= \begin{bmatrix} u & v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overrightarrow{r}_r \cdot \overrightarrow{r}_r & \overrightarrow{r}_r \cdot \overrightarrow{r}_\theta \\ \overrightarrow{r}_\theta \cdot \overrightarrow{r}_r & \overrightarrow{r}_\theta \cdot \overrightarrow{r}_\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \\ &= \left(r^2+4\right) v^2 + u^2. \end{aligned}$$

,

$$\begin{aligned} k_n &= \frac{M_p}{D_p} \\ &= -\frac{4uv}{\sqrt{r^2+4}\left(\left(r^2+4\right) v^2 + u^2\right)}. \end{aligned}$$

代入 $r = 2, \theta = \frac{7\pi}{4}$, 有

$$k_n = -\frac{\sqrt{2}uv}{u^2+8v^2}.$$

Problem 1.7 求准线为 $\begin{cases} z = \sqrt{x^2+y^2} \\ x = -1 \end{cases}$，母线 $\mathbb{R}\overrightarrow{V}$ 的柱面方程，其中 $\overrightarrow{V} = (1,1,1)$.

Solution $\begin{cases} \frac{x-a}{1} = \frac{y-b}{1} = \frac{z-c}{1} \\ c = \sqrt{a^2+b^2} \\ a = -1 \end{cases} \Rightarrow z = 1 + x + \sqrt{1+(y-x-1)^2}$

Problem 1.8 曲面方程由 $x^4+y^4+3x^2z^2+7xy^2z+2yz^3 = 0$ 给出，判断曲面的形状；并证明曲面是直纹面.

Solution 因为 $F(tx,ty,tz) = t^4F(x,y,z)$, 因此该方程为齐次方程，由 *Theorem 4.6*

知其为锥面，又由直纹面定义可知，锥面为直纹面，因此该曲面的形状为锥面，且为直纹面。

1.1.3 Assignment-3

Problem 1.9 求准线为 $\begin{cases} z=\sqrt{x^2+y^2} \\ z=y+1 \end{cases}$, 顶点为 $(1,0,0)$ 的锥面方程.

Solution $\begin{cases} \dfrac{x-1}{x_1-1}=\dfrac{y}{y_1}=\dfrac{z}{z_1} \\ z_1=\sqrt{x_1^2+y_1^2} \\ z_1=y_1+1 \end{cases} \Rightarrow \Gamma: x^2+2y^2-2xy-2yz+2zx-2x+2y-2z+1=0.$

Problem 1.10 设曲线 $\Gamma: 4x^2-4xy+y^2-6x-8y+3=0$.

(1) 判别曲线是否是有心曲线，并给出理由.

(2) 求出曲线 Γ 的渐近方向，是否有渐近线？

(3) 求主直径与主方向.

(4) 化简曲线，并判断其类型.

Solution *(1)* $I_2=|A|=\det\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}=0 \Rightarrow \Gamma$ 不是有心曲线.

(2) $\mathbf{v}'A\mathbf{v}=0 \Rightarrow \mathbf{v}=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow$ 渐近方向:$\mathbf{v}=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

因为 Γ 为无心曲线，因此 Γ 无渐近线.

(3) $(A-\lambda I)\mathbf{v}=0 \Rightarrow \mathbf{v}_1=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2=\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \Gamma$ 的主方向:$\mathbf{v}_1=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2=\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$\mathbf{v}'(A\mathbf{x}+\mathbf{b})=0 \Rightarrow$ 主直径: $l: -10x+5y+2=0$.

(4) 做转轴变换: $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$, 有:

$$\Gamma=\Gamma_1: 5\sqrt{5}y_1^2-22x_1+4y_1+3=0,$$

做移轴变换 $\begin{cases} x_1 = x_2 + \dfrac{71}{110\sqrt{5}} \\ y_1 = y_2 - \dfrac{2}{5\sqrt{5}} \end{cases}$，有

$$\Gamma_1 = \Gamma_2 : y_2^2 = \frac{22}{5\sqrt{5}} x_2,$$

为抛物线.

Problem 1.11 设曲面为 $5x^2 - 16y^2 + 5z^2 + 8xy - 14xz + 8yz + 4x + 20y + 12z = 24$.

(1) 求过点 $(0, 0, \dfrac{2\sqrt{39} - 6}{5})$ 的切平面.

(2) 求主径面与主方向.

(3) 化简曲面方程，并判断其类型.

Solution $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & -7 \\ 4 & -16 & 4 \\ -7 & 4 & 5 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 10 \\ 6 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x_0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dfrac{2\sqrt{39} - 6}{5} \end{bmatrix}$, $(A\mathbf{x_0} + \mathbf{b})'(\mathbf{x} - \mathbf{x_0}) = 0 \Rightarrow$

切平面: $\pi : (-26 + 7\sqrt{39})x - (13 + 4\sqrt{39})y - 5\sqrt{39}z + 78 - 6\sqrt{39} = 0.$

(2) $(A - \lambda I)\mathbf{v} = 0 \Rightarrow$ 主方向: $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$(A\mathbf{x} + \mathbf{b})'\mathbf{v} = 0 \Rightarrow$ 主径面: $\pi_1 : -3x + 3z + 1 = 0, \pi_2 : 9x - 36y + 9z + 16 = 0.$

(3) 做转轴变换 $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{2}{3} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{3\sqrt{2}} \\ \dfrac{1}{3} & 0 & -\dfrac{4}{3\sqrt{2}} \\ \dfrac{2}{3} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{3\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$, 有

$$\Gamma = \Gamma_1 : 18y^2 - 27z^2 + 26x + 6\sqrt{2}y - 16\sqrt{2}z - 36 = 0.$$

做移轴变换 $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 + \dfrac{67}{54} \\ y_2 - \dfrac{\sqrt{2}}{6} \\ z_2 - \dfrac{8\sqrt{2}}{27} \end{bmatrix}$，有

$$\Gamma_1 = \Gamma_2 : 26x_2 + 18y_2^2 - 27z_2^2 = 0,$$

为双曲抛物面.

1.2 历年卷

1.2.1 2022-2023 年度空间解析几何秋季学期试卷

Problem 1.12 (20 分) 已知空间中的四个点$P(1,2,0), Q(2,4,-1), R(5,6,-3)$, 以及 $S(1,1,1)$.
(i) 求四个点张出的平行六面体的体积.
(ii) 用 Π_1 表示包含点 P, Q 以及 R 的平面，用 Π_2 表示包含点 P, Q 以及 S 的平面. 求 Π_1 与 Π_2 的夹角.
(iii) 求点 S 到平面 Π_1 的距离.
(iv) 求点 S 关于 Π_1 的反射点.

Solution

Problem 1.13 2.(20 分) 曲面 S 由 $(r\cos\theta, r\sin\theta, 2\theta)(0 \le r \le 4, 0 \le \theta \le 2\pi, b = 2)$.
(a) 求曲面在 $(\sqrt{2}, -\sqrt{2}, \frac{7}{2}\pi)$ 处的切平面方程 $T_{P_0}(S)$.
(b) 求曲面的面积元 $\mathrm{d}A$.
(c) 设曲线 $\gamma : (2\cos\theta, 2\sin\theta, 2\theta)$, 求曲线在 $\theta = \frac{7}{4}\pi$ 处的点 P_0 的曲率 $\mathfrak{k}$ 以及挠率 τ.
(d) 求曲面在 P_{p} 处的法曲率 $\mathfrak{k}_n$.

Solution

Problem 1.14 (20 分)
(i) 求准线为

$$\begin{cases} z &= \sqrt{x^2+y^2} \\ x &= -1 \end{cases}$$

母线为 $\mathbb{R}\mathbf{v}$ 的柱面方程，其中 $\mathbf{v} = (1,1,1)$.
(ii) 曲面方程由 $x^4 + y^4 + 3x^2z^2 + 7xy^2z + 2yz^3 = 0$ 给出. 判断曲面的形状并证明曲面为直纹面.

Solution

Problem 1.15 (20 分) 设平面曲线由

$$F(x,y) = 3x^2 + 4xy + y^2 + 2x + 4y + 6 = 0$$

给出.
(i) 求曲线的渐近方向与中心.
(ii) 求共轭于 (1,1) 的直径方程.

(iii) 求过点 (1,-2) 的切线方程.

(iv) 化简曲线为标准形式.

Solution

Problem 1.16 (20 分) 设空间曲面 S 的方程为

$$2x^2+10y^2-z^2+12xy+8yz+12x+4y+8z-1=0$$

(i) 求曲面的奇向.

(ii) 求曲面上点 $(0,0,4+\sqrt{15})$ 处的切平面方程.

(iii) 求曲面的主方向与主径面.

(iv) 化简曲面方程。

Solution