上海大学 2022～2023 学年冬季学期 A 卷

| 成绩 | |
|---|---|

# 课程名：常微分方程 A 课程号：01015043 学分：5

应试人声明：

我保证遵守《上海大学学生手册》中的《上海大学考场规则》，如有考试违纪、作弊行为，愿意接受《上海大学学生考试违纪、作弊行为界定及处分规定》的纪律处分。

应试人 ____________ 应试人学号 ____________ 应试人所在院系 ____________

| 题 号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 六 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 得 分 | | | | | | |

| 得 分 | 评卷人 |
|---|---|
| | |

## 一、填空题（每空 3 分，共 15 分）

1. 方程 $y'' + y' + 2y^2 \sin x = 0$ 是 __________ 阶、__________(线性 or 非线性) 方程.

2. 设某首项系数为 1 的二阶齐次线性方程的通解为 $y = C_1 e^x \cos x + C_2 e^x \sin x$ 则该方程为_________.

3. 若 $n$ 阶方阵 $\Phi(t)$ 是线性方程组 $\vec{x}' = A_{n\times n}\vec{x}(t)$ 的基解矩阵, 则该方程组满足初始条件 $\vec{x}(t_0) = \vec{\eta}$ 的解 $\vec{\varphi}(t)$ 用 $\Phi(t)$ 表示为 _________.

4. 当 $M(x,y) =$______________ 时, 方程 $M(x,y)dx + x \sin y dy = 0$ 是恰当方程.

| 得 分 | 评卷人 |
|---|---|
| | |

## 二. 求解下列方程（每小题 7 分, 共 35 分）

5. (本题 7 分) 求方程的解: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{2x - y^2}$

6. (本题 7 分) 求方程的解 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x - y + 2}{x + y^2 + 4}$

7. (本题 7 分) 求解 $\dfrac{dy}{dx} + 2xy + xy^4 = 0$

8. (本题 7 分) 求解 $y''' - y'' - y' + y = 0$

9. (本题 7 分) 求解 $y'' - 7y' + 12y = 6\sin x$

| 得　分 | 评卷人 |
| --- | --- |
| | |

## 三, 方程组 (本题共 16 分)

10. (本题共 16 分) 已知方程组 $\dot{x} = Ax$, 其中

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1°. (10 分) 计算标准基解矩阵 $e^{At}$.

2°. (6 分) 说明是否存在一个常数 $K > 0$, 使得

$$\|e^{At}\| \leq Ke^{2t}, \quad \forall t \geq 0$$

| 得　分 | 评卷人 |
| --- | --- |
| | |

## 四、综合题（本题共 16 分）

11. (本题共 16 分) 考虑如下二维非线性方程组:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = bx^2 + \sin y \\ \frac{dy}{dt} = x(a^2 - x^2) - by \end{cases}$$

其中 $a, b \in \mathbb{R}$.

1°. (8 分) 给出该方程组在 $(0,0)$ 点附近的线性化方程组, 系数矩阵及其特征值.

2°. (8 分) 当 $a \neq 0$ 时, 讨论该方程组零解的稳定性.

| 得　分 | 评卷人 |
| --- | --- |
| | |

## 五、综合题（本题共 18 分）

12. (本题共 18 分) 考虑如下二维非线性方程组:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y - ax^3 \\ \frac{dy}{dt} = x - ay^3 \end{cases}$$

其中 $a > 0$ 为常数.

1°. (2 分) 给出该方程组的所有平衡点.

2°. (4 分) 给出该方程组在平衡点附近的线性化方程组, 并确定其特征值.

3°. (6 分) 应用 Lyapunov 函数法证明该平衡点的稳定性.

4°. (6 分) 请说明从集合 $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ 中的点出发的轨道, 在时间 $t \geq 0$ 时不会跑出该集合.