高等代数 A 资料

Author: 韦明

Date: March 13, 2025

E-mail: wm31415926535@outlook.com

Contents

Chapter 1 高等代数 A

1.1 习题课

1.1.1 习题课 (上)

1.1.1.1 行列式

Problem 1.1 计算下述 n 阶行列式:

$$\begin{vmatrix} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}.$$

Solution 此行列式的每一行有 $n-1$ 个元素为 *0*, 因此在它的完全展开式中, 可能不为 *0* 的项只有一项, 从而这个行列式的值为

$$(-1)^{r(23\cdots n1)}a_1a_2\cdots a_{n-1}a_n = (-1)^{n-1}a_1a_2\cdots a_{n-1}a_n.$$

Problem 1.2 计算下述 n 阶行列式:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & \cdots & a_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-1} & \cdots & 0 & 0 \\ a_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Solution

$$\begin{aligned} \text{原式} &= (-1)^{r(n(n-1)\cdots 21)}a_1a_2\cdots a_{n-1}a_n \\ &= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_1a_2\cdots a_{n-1}a_n. \end{aligned}$$

Problem 1.3 计算 n 阶行列式 $(n \geqslant 2)$:

$$\begin{vmatrix} x_1-a_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2-a_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 & x_3-a_3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n-a_n \end{vmatrix},$$

其中 $a_i \neq 0, i = 1, 2, \cdots, n$.

Solution 先把第 *1* 行的 (-1) 倍分别加到第 $2, 3, \cdots, n$ 行上, 然后各列分别提出公因子 $a_1, a_2, \cdots, a_n$;

$$
\text{原式} = \begin{vmatrix} x_1 - a_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ a_1 & -a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & 0 & -a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & 0 & 0 & \cdots & -a_n \end{vmatrix}
$$

$$
= a_1 a_2 a_3 \cdots a_n \begin{vmatrix} \frac{x_1}{a_1} - 1 & \frac{x_2}{a_2} & \frac{x_3}{a_3} & \cdots & \frac{x_n}{a_n} \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{vmatrix}
$$

$$
= a_1 a_2 a_3 \cdots a_n \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{a_i} - 1 & \frac{x_2}{a_2} & \frac{x_3}{a_3} & \cdots & \frac{x_n}{a_n} \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{vmatrix}
$$

$$
= (-1)^{n-1} a_1 a_2 a_3 \cdots a_n \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{a_i} - 1 \right).
$$

Problem 1.4 计算实数域上 n 阶三对角线行列式:

$$
D_n = \begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ c & a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & a & b & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & c & a & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & c & a \end{vmatrix}.
$$

Solution

$$
D_n = \begin{cases} \dfrac{\alpha_1^{n+1} - \beta_1^{n+1}}{\alpha_1 - \beta_1}, & \text{当 } a^2 \neq 4bc, \\ (n+1)\dfrac{a^n}{2^n}, & \text{当 } a^2 = 4bc, \end{cases}
$$

其中 α_1, β_1 是方程 $x^2 - ax + bc = 0$ 的两个根.

Problem 1.5 求 $\begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & a_n \\ -1 & \lambda & 0 & \dots & 0 & a_{n-1} \\ 0 & -1 & \lambda & \dots & 0 & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & \lambda + a_1 \end{vmatrix}$.

Solution

Problem 1.6 求 n 阶行列式 $\begin{vmatrix} x & a & a & \dots & a \\ a & x & a & \dots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \dots & x \end{vmatrix}$.

Solution

Problem 1.7 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 是 n 阶矩阵, 求证:

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{A} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}||\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}|$$

Proof 将分块矩阵的第二行加到第一行上, 再将第二列减去第一列, 可得

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A+B & A+B \\ B & A \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A+B & O \\ B & A-B \end{pmatrix}$$

第三类分块初等变换不改变行列式的值, 因此可得

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A+B & O \\ B & A-B \end{vmatrix} = |A+B||A-B|$$

Problem 1.8 设 $A, B, C, D \in \mathbb{K}^{n\times n}$ 且 A 可逆, 若 $AC = CA$, 证明: $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |AD - CB|$.

Proof

1.1.1.2 矩阵

Problem 1.9 计算 A^m, 其中 m 是正整数, 且

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Solution

$$A=\begin{pmatrix}2&3\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&3\\0&0\end{pmatrix}=2I+3B,$$

其中 $B=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$. 直接计算得,

$$B^2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}.$$

由于 $(2I)(3B)=(3B)(2I)$, 因此由二项式定理得

$$\begin{aligned}A^m&=(2I+3B)^m=(2I)^m+C_m^1(2I)^{m-1}(3B)=2^mI+2^{m-1}\cdot 3mB\\&=\begin{pmatrix}2^m&2^{m-1}\cdot 3m\\0&2^m\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Problem 1.10 计算 A^k, 其中 $A=\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$.

Solution 归纳证明

$$A^k=\begin{pmatrix}\cos k\theta&-\sin k\theta\\\sin k\theta&\cos k\theta\end{pmatrix}.$$

当 $k=1$ 时，根据条件即得. 假设当 k 时结论成立，则当 $k+1$ 时，

$$\begin{aligned}A^{k+1}=A^k\cdot A&=\begin{pmatrix}\cos k\theta&-\sin k\theta\\\sin k\theta&\cos k\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}\cos(k+1)\theta&-\sin(k+1)\theta\\\sin(k+1)\theta&\cos(k+1)\theta\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

这就证明了结论.

Problem 1.11 求下述 n 级矩阵 A 的逆矩阵 $(n\geqslant 2)$:

$$A=\begin{pmatrix}0&1&1&\cdots&1\\1&0&1&\cdots&1\\1&1&0&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&1&\cdots&0\end{pmatrix}$$

Solution *(方法一)* 设 $\boldsymbol{\alpha}=(1,1,\cdots,1)'$, 则 $\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}'$. 设 $\boldsymbol{B}=c\boldsymbol{I}_n+d\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}'$, 则

通过简单的计算可知 $\boldsymbol{AB} = -c\boldsymbol{I}_n + (c+(n-1)d)\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}'$. 令 $c=-1, c+(n-1)d=0$, 则 $d=\dfrac{1}{n-1}$, 于是 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{I}_n$, 从而 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{B}=-\boldsymbol{I}_n+\dfrac{1}{n-1}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}'$.

Solution *(方法二)* 取 $n\times 2n$ 矩阵

$$B=\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right).$$

把矩阵 B 的第 $2,3,\ldots,n$ 行都加到第 *1* 行，矩阵 B 化为

$$B_1=\left(\begin{array}{ccccc:ccccc} n-1 & n-1 & n-1 & \cdots & n-1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right).$$

用 $\dfrac{-1}{n-1}$ 遍乘矩阵 B_1 的第 *1* 行，然后分别加到第 $2,3,\ldots,n$ 行，矩阵 B_1 化为

$$B_2=\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \cdots & \frac{1}{n-1}\\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & -\frac{1}{n-1} & \frac{n-2}{n-1} & -\frac{1}{n-1} & \cdots & -\frac{1}{n-1}\\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 & -\frac{1}{n-1} & -\frac{1}{n-1} & \frac{n-2}{n-1} & \cdots & -\frac{1}{n-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & -\frac{1}{n-1} & -\frac{1}{n-1} & -\frac{1}{n-1} & \cdots & \frac{n-2}{n-1} \end{array}\right).$$

矩阵 B_2 的第 $2,3,\ldots,n$ 行都加到第 *1* 行，然后用 *-1* 分别乘以第 $2,3,\ldots,n$ 行，矩阵 B_2 变为

$$B_2=\left(\begin{array}{ccccc:ccccc} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\frac{n-2}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \cdots & \frac{1}{n-1}\\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{n-1} & -\frac{n-2}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \cdots & \frac{1}{n-1}\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & -\frac{n-2}{n-1} & \cdots & \frac{1}{n-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \cdots & -\frac{n-2}{n-1} \end{array}\right).$$

由此求得, $A^{-1}=(c_{ij})$, 其中

$$\begin{cases} c_{ij}=\dfrac{1}{n-1}, & \text{当}\, 1\leqslant i\neq j\leqslant n\ \text{时;} \\ c_{ii}=-\dfrac{n-2}{n-1}, & \text{当}\, i=1,2,\ldots,n\ \text{时.} \end{cases}$$

Solution *(方法三)* 设 J 为基础循环矩阵，则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{J}+\boldsymbol{J}^2+\cdots+J^{n-1}$. 设 $B=c\boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{J}+J^2+\cdots+J^{n-1}$, 其中 c 为待定系数, 则通过简单的计算可得

$$\boldsymbol{AB}=(n-1)\boldsymbol{I}_n+(c+n-2)\left(\boldsymbol{J}+\boldsymbol{J}^2+\cdots+\boldsymbol{J}^{n-1}\right).$$

只要令 $c=2-n$, 则 $\boldsymbol{AB}=(n-1)\boldsymbol{I}_n$, 于是 $\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{1}{n-1}\boldsymbol{B}$.

Solution *(方法四)* 设 $\boldsymbol{\alpha}=(1,1,\cdots,1)'$, 则 $\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{\alpha\alpha}'$。由 *Sherman-Morrison* 公式可得

$$\begin{aligned} A^{-1}=(-I_n+\alpha\alpha')^{-1}&=(-I_n)^{-1}-\frac{1}{1+\boldsymbol{\alpha}'(-I_n)^{-1}\boldsymbol{\alpha}}(-I_n)^{-1}\alpha\boldsymbol{\alpha}'(-I_n)^{-1} \\ &=-I_n+\frac{1}{n-1}\boldsymbol{\alpha\alpha}'. \end{aligned}$$

Problem 1.12 设

$$B=\begin{pmatrix} 0 & B_1 \\ B_2 & 0 \end{pmatrix},$$

其中 B_1,B_2 分别是 r 级、s 级矩阵。求 B 可逆的充分必要条件; 当 B 可逆时, 求 B^{-1}.

Solution $|B|=(-1)^r|B_1||B_2|$. 于是 B 可逆 $\Longleftrightarrow$ $|B|\neq 0$ $\Longleftrightarrow$ $|B_1|\neq 0$ 且 $|B_2|\neq 0 \Longleftrightarrow B_1,B_2$ 都可逆. 当 B 可逆时，由于

$$\begin{pmatrix} 0 & B_1 \\ B_2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & B_2^{-1} \\ B_1^{-1} & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & I_s \end{pmatrix},$$

因此

$$B^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & B_2^{-1} \\ B_1^{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

Problem 1.13 (Frobenius 秩不等式) 证明: $\mathrm{rk}(RST)\geq \mathrm{rk}(RS)+\mathrm{rk}(ST)-\mathrm{rk}(S)$, 前提是这些线性映射的合成有意义.

Remark 原题为矩阵版本.

Proof

应用

$$\begin{aligned}\dim(\mathrm{im}(RST)) &= \dim(\mathrm{im}(ST)) - \dim(\mathrm{im}(ST)\cap\ker(R))\\ &\geq \dim(\mathrm{im}(ST)) - \dim(\mathrm{im}(S)\cap\ker(R)),\\ \dim(\mathrm{im}(RS)) &= \dim(\mathrm{im}(S)) - \dim(\mathrm{im}(S)\cap\ker(R)).\end{aligned}$$

Problem 1.14 证明: (1) 若 A 为可逆对称矩阵, 则 $A^{-1}=(A^{-1})^T$, 若 $|A|\neq 0, A^T=-A$, 则 $A^{-1}=-(A^{-1})^T$.
(2) 不存在奇数级可逆反对称矩阵.

Proof

Problem 1.15 证明: (1) 两个上 (下) 三角矩阵乘积仍是上 (下) 三角阵.
(2) 可逆上 (下) 三角矩阵的逆仍是上 (下) 三角矩阵.

Proof

Problem 1.16 设有 n 阶矩阵 A, 证明: 存在可逆矩阵 P 使得 PAP^{-1} 的后 $n-\mathrm{r}(A)$ 行全为零.

Proof

Problem 1.17 求证: 任一 n 阶方阵均可表示为一个对称阵与一个反对称阵之和.

Proof 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵, 则 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}'$ 是对称阵, $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}'$ 是反对称阵, 并且

$$\boldsymbol{A}=\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}'\right)+\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}'\right)$$

Remark 上例中的 $\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}'\right)$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的对称化, $\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}'\right)$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的反对称化. 上述分解使得我们可以利用对称阵和反对称阵的众多性质去研究方阵的性质.

Problem 1.18 设 A 为 n 阶实矩阵, 证明:$\exists t\in\mathbb{R}$ 使得 $A+tI_n$ 可逆.

Proof

Problem 1.19 设 A,B 为实方阵, 证明:A,B 在 $\mathbb{R}$ 上相似 $\Leftrightarrow A,B$ 在 $\mathbb{C}$ 上相似.

Proof

Problem 1.20

Solution

Problem 1.21

Proof

1.1.2 习题课 (下)

1.1.2.1 2025-1-10 日习题课

1. 设

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ b & 2 & 1 \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix}$$

有特征向量

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

求 A^{2022}。

2. 设 A_m, B_n 是复矩阵，A 与 B 无公共的特征值。若 A, B 可对角化，求证

3. 设

$$D = \begin{pmatrix} A_m & C_{m\times n} \\ C^{\mathrm{T}} & B_n \end{pmatrix}$$

其中 A, B, C 均为实矩阵，且 $A = A', B = B'$。求证：
1. 若 D 正定，则 A, B 可逆。2. 若 D 正定，则 $B - C^{\mathrm{T}}A^{-1}C$ 也正定。

4. 设 $A_n, B_n \neq 0$，且有 $A^2 = A, B^2 + B = 0$。
1. 证明 $\mu = 1, \lambda = -1$ 分别是 A, B 的特征值。2. 若 $AB = 0 = BA$，α 是 A 关于特征值 1 的特征向量，β 是 B 关于特征值 -1 的特征向量，证明 α, β 线性无关。

5. 设

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. 证明：$A^n = A^{n-2} + A^2 - I_3, n \geq 3$。2. 求 A^{10}。

6. 求 $x^3 - 1$ 与 $x^5 - 1$ 的最大公因式。

7. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2-ax_2^2+(a-1)x_3^2+2x_1x_3-2x_2x_3$，则 $a=\underline{1,0}$ 时，在 $\mathbb{R}$ 上的规范形为 $y_1^2-y_2^2$。

1.1.2.2 2025-2-17 日习题课

1. 证明：秩为 r 的对称阵可以写成 r 个秩为 1 的对称阵之和。
2. 证明：一个实二次型 f 可以分解为两个实系数的一次齐次多项式的乘积当且仅当 $r(f)=2$ 且符号差 $s=0$, 或者秩等于 1.
3. 设实二次型

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\sum_{i=1}^{s}(a_{i1}x_1+\cdots+a_{in}x_n)^2$$

证明：$\mathrm{r}(f)=\mathrm{r}(A), A=(a_{ij})_{s\times n}$。

4. t 取何值时，二次型

$$t(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+2x_1x_2-2x_1x_3+2x_2x_3$$

正定？

5. 实数 a,b 满足什么条件时

$$\begin{pmatrix} a & 1 & b \\ 1 & -1 & 0 \\ b & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

正定，负定，半正定，半负定，不定？

6. 证明：任一实对称矩阵，都是两个正定矩阵的差。
7. 设半正定矩阵 A 且 $\mathrm{r}(A)=1$, 证明：存在 n 维非零实向量 α s.t. $A=\alpha\alpha'$.

1.1.2.3 2025-2-19 日习题课

1. 在 $\mathbb{R}[x]$, 且 $\forall f\in\mathbb{R}[x], \deg f<4$，定义 $(f(x),g(x))=\displaystyle\int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x$.

（1）证：$\mathbb{R}[x]$ 为欧式空间。

（2）求与 $1,x,x^2$ 都正交的多项式。

2. 证明：任一实可逆矩阵 A，都可以分解为 $A=QR$，Q 为正交矩阵，R 为上三角矩阵。（QR 分解）

3. 证明：任一正定矩阵 A 可作分解 $A = T'T$，其中 T 为对角元均为正的上三角矩阵。（Cholesky 分解）
4. $(1,2,2),(-1,0,2) \in \mathbb{R}^3$，将其变为标准正交的向量组.
5. 设 $A \in S_n(\mathbb{R}), B$ 为 n 阶正定矩阵，证明：$\exists C \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ s.t.$C'AC, C'BC$ 均为对角阵。
6. 设 A, B, C 为正定阵，若 ABC 为对角阵，证明 ABC 为正定阵。
7. $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, 求正交阵 T,s.t.$T'AT$ 为对角阵。

1.1.2.4 2025-2-21 日习题课

1. 用非退化线性替换化二次型

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_5$$

为规范形，并求二次型的正惯性指数和符号差。

2. 求矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & 6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

的 Jordan 标准型。

3. 设 φ 是 n 维线性空间 V 上的自同构，若 W 是 φ 的不变子空间，求证：W 也是 φ^{-1} 的不变子空间.
4. 设 $f_1, f_2, \ldots, f_{2024}, g_1, g_2, \ldots, g_{2025} \in P[x]$, 证明:$(f_1f_2\ldots f_{2024}, g_1g_2\ldots g_{2025}) = 1 \Leftrightarrow (f_i, g_j) = 1, i = 1, 2, \ldots, 2024; j = 1, 2, \ldots, 2025.$
5. 求多项式 $f(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 1$ 与 $g(x) = x^3 + x^2 - x - 1$ 的最大公因式。
6. 设 A 为五阶方阵，其不变因子为 $1, 1, 1, (\lambda - 2)^2, (\lambda - 3)(\lambda - 1)^2$, 求 A 的 Jordan 标准型。
7. 求 $x^3 - 6x^2 + 15x - 14$ 的有理根。

1.1.2.5 2025-2-24 日习题课

1. 设 A, B 为实对称矩阵，B 正定，则 A 正定 $\Leftrightarrow AB$ 的特征值是正数。
2. 设 A 半正定，$k \in \mathbb{Z}^+$, 则 $\exists!$ 半正定矩阵 B,s.t.$A = B^k$.
3. 设 $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, 则 $\exists U \in O(m), V \in O(n), S = \begin{pmatrix} \mathrm{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_v\} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, s.t $A = USV$.

1.1.2.6 2025-2-26 日习题课

1. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是三维欧氏空间的一组标准正交基，$\alpha = 3\alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3, \beta = \alpha_1 - 2\alpha_2$. 1. 求与 α, β 都正交的全部向量；2. 求与 α, β 都正交的全部单位向量。
2. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是三维欧氏空间 V 的一组基,其度量矩阵为 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 6 \end{pmatrix}$.
   1. 令 $\gamma_1 = \alpha_1 + \alpha_2$, 证明 γ_1 是一个单位向量。2. 求参数 k, 使 $\beta_2 = \alpha_1 + \alpha_2 + k\alpha_3$ 与 γ_1 正交。3. 把 β_2 单位化，记作 γ_2. 4. 扩充 γ_1, γ_2 为 V 的一组标准正交基。
3. 求一正交相似变换矩阵，将矩阵 A 化为对角矩阵，其中 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
4. 已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 2tx_2x_3 (t > 0)$ 通过正交线性替换化为标准型 $f = y_1^2 + 2y_2^2 + 5y_3^2$, 求参数 t 及所用的正交线性替换。
5. 已知 $A, A - E$ 都是 n 阶正定矩阵，证明 $E - A^{-1}$ 是正定矩阵。

1.2 历年卷

1.2.1 2024-2025 年度高等代数 A(下) 冬季学期试卷 (回忆版)

填空题

1. 求多项式
$$f(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 1 \quad 与 \quad g(x) = x^3 + x^2 - x - 1$$
的最大公因式。
2. 求
$$x^3 - 6x^2 + 15x - 14$$
的有理根。
3. 写出二次型对应的矩阵。
4. 设 A 为五阶方阵，其不变因子为
$$1,\ 1,\ 1,\ (\lambda-2)^2,\ (\lambda-3)(\lambda-1)^2,$$
求 A 的 Jordan 标准型。
5. 对 $\alpha = (\alpha_1, \beta_1)$ 与 $\beta = (\alpha_2, \beta_2)$ 定义新的内积
$$(\alpha, \beta) = 2\alpha_1\alpha_2 + 4\beta_1\beta_2,$$
求 $\alpha = (1, 1), \beta = (1, -1)$ 的度量矩阵。

选择题

1. $p(x)$ 为 $f(x)$ 的重因式，同时是 $f'(x)$ 与 $f(x)$ 的公因式，其条件是 。
2. 2025 阶实对称矩阵按合同分类有多少种？
3. 求向量之间的夹角。
4. 判断矩阵是正定，负定，……。
5. （题目内容不全）

计算题

1. 用非退化线性替换将二次型
$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_5$$
化为规范形，并求二次型的正惯性指数和符号差。

2. 求矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & 6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

的 Jordan 标准型。

3. 设 φ 为 n 维线性空间 V 上的自同构，若 W 是 φ 的不变子空间，证明：W 也是 φ^{-1} 的不变子空间。

4.（类似）求一正交相似变换矩阵，将矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

化为对角矩阵。

证明题

1. 设 $f_1, f_2, \ldots, f_{2024}$，$g_1, g_2, \ldots, g_{2025} \in P[x]$，证明：

$$(f_1 f_2 \ldots f_{2024},\ g_1 g_2 \ldots g_{2025}) = 1$$

当且仅当

$$(f_i, g_j) = 1, \quad i = 1, 2, \ldots, 2024;\ j = 1, 2, \ldots, 2025.$$

2. 证明：若变换 T 保持内积，即满足

$$(T\alpha, T\beta) = (\alpha, \beta),$$

则 T 为线性变换，从而为正交变换。

1.2.2 2023-2024 年度高等代数 A(下) 冬季学期试卷

填空题

1. 多项式 $f(x)$ 除以 $ax-b(a\neq 0)$ 所得的余式是_________.
2. $2x^4-x^3+2x-3=0$ 的所有有理根为_________.
3. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ 的矩阵是_________.
4. 矩阵
$$\begin{pmatrix}0&0&a_3\\1&0&-a_2\\0&1&-a_1\end{pmatrix}$$
的不变因子是_________.
5. 设 V 是三维欧氏空间，$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 是 V 的标准正交基，如果 $\alpha_1=\varepsilon_1$，$\alpha_2=\varepsilon_1+\varepsilon_2$，$\alpha_3=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3$，则基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的度量矩阵为
$$\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&2\\1&2&3\end{pmatrix}$$
.

选择题

1. 数域 P 上多项式 $f(x)$ 在 P 上无重因式的条件是 $(f(x),f'(x))=1$.
   (A) 充要
   (B) 充分非必要
   (C) 必要非充分
   (D) 非充分非必要
2. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_1x_3+x_2x_3$ 是 ( ) 二次型。
   (A) 正定
   (B) 不定
   (C) 负定
   (D) 半正定
3. $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$，在实数域 $\mathbb{R}$ 上与 A 合同的矩阵为 ( )。

(A) $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$
(B) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$
(C) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$
(D) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

4. ( ) 不是 λ-矩阵的初等变换。
   (A) 矩阵的某一行（列）乘非零常数 c
   (B) 矩阵的某一行（列）乘非零常数 $\frac{1}{c}$
   (C) 矩阵的某一行（列）加另一行（列）的 λ 倍
   (D) 矩阵的某一行（列）加另一行（列）的 $\frac{1}{\lambda}$ 倍
5. 在 $\mathbb{R}^4$ 中, $\alpha = (2,1,3,2)$，$\beta = (1,2,x,1)$，$(\alpha,\beta) = 0$，则 x = ( )。
   (A) -1
   (B) 1
   (C) -2
   (D) 2

计算题

1. (10 分) 用非退化线性替换化二次型
$$f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$$
为规范形，并求相应的线性替换和符号差。
2. (10 分) 设 T 是线性空间 V 上的线性变换，α 是 V 的非零向量，若向量组 $\alpha, T\alpha, \ldots, T^{m-1}\alpha$ 线性无关。
   (1) 证明：子空间 $W = L(\alpha, T\alpha, \ldots, T^{m-1}\alpha)$ 是 T 的不变子空间。
   (2) 求 T 在子空间 W 的基 $\alpha, T\alpha, \ldots, T^{m-1}\alpha$ 下的矩阵。
3. (10 分) 求
$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 6 \\ 1 & 7 & 25 \\ 0 & -2 & -7 \end{pmatrix}$$
的 Jordan 标准型。

4. (10 分) ....., 求 $T^{-1}e^{i\pi A/2}T$。

证明题

1. (10 分) 设 $f(x),g(x)\in P[x]$，$a,b,c,d\in P$，$f_1(x)=af(x)+bg(x)$，$g_1(x)=cf(x)+dg(x)$，$ad\neq bc$，$(f(x),g(x))=1$，证明：$(f_1(x),f_1(x)+g_1(x))=1$。
2. (10 分) 设 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$ 和 $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_m$ 是 n 维欧式空间 V 中的两个向量组，证明存在一个正交变换 T 使得 $T\alpha_i=\beta_i(1\leq i\leq m)$ 的充要条件是 $(\alpha_i,\alpha_j)=(\beta_i,\beta_j)(1\leq i,j\leq m)$。

1.2.3 2022-2023 年度高等代数 A(下) 冬季学期试卷

Texer: 萌小小

填空题（5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

1. 设实对称矩阵 A 的符号差是 3, 秩是 5, 则 A 的负惯性指数是$\underline{1}$.
2. 矩阵 $A=\begin{pmatrix} k & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k+2 \end{pmatrix}$ 是正定矩阵的充要条件是 $k\underline{>1}$.
3. 设 U 是 n 维欧式空间 V 的子空间，且 $\dim U=1$，则 U 在 V 中的正交补空间 $U^{\perp}$ 的维数 $\dim U^{\perp}=\underline{n-1}$.
4. 多项式 x^3+3x^2-4 与 x^3-3x+2 的首一的最大公因式为 $\underline{x^2+x-2}$.
5. 设复方阵 A 可对角化，若 $f_A(\lambda)=\lambda^3(\lambda-1)^2$, 则 $m_A(\lambda)=\underline{\lambda(\lambda-1)}$.

选择题（5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

1. 设 A 是 2 阶复方阵，则 A 的特征多项式是 (B).
   (A) $\lambda^2+(\operatorname{tr}(A))\lambda+\det(A)$.
   (B) $\lambda^2-(\operatorname{tr}(A))\lambda+\det(A)$.
   (C) $\lambda^2-(\det(A))\lambda+\operatorname{tr}(A)$.
   (D) $\lambda^2+(\det(A))\lambda+\operatorname{tr}(A)$.
2. 设 A 是 n 阶复方阵则下列叙述中不能 A 在 $\mathbb{C}$ 上可对角化的等价命题的是 (D).
   (A) A 的初等因子全是一次的.
   (B) A 有 n 个线性无关的特征向量.
   (C) A 的所有特征子空间的维数之和为 n.
   (D) A 有 n 个互不相同的特征值.
3. 下列关于 n 阶 $(n>1)$ 实对称矩阵的叙述中正确的是 (D).
   (A) 不一定能对角化.
   (B) 特征值不一定是实数.
   (C) 特征多项式一定没有重根.
   (D) 两个实对称矩阵相似当且仅当它们正交相似.
4. 下列多项式在 $\mathbb{Q}$ 上可约的是 (A).
   (A) $x^3-6x^2+15x-14$.

(B) $x^4-2x^3+8x-10$.

(C) $x^4+x^3+x^2+x+1$.

(D) $1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}$.

5. 已知 A 是三阶矩阵，且 $\mathrm{r}(A)=1$, 则 $\lambda=0$(B).
   (A) 必是 A 的二重特征值.
   (B) 至少是 A 的二重特征值.
   (C) 至多是 A 的二重特征值.
   (D) 一重，二重，三重特征值都有可能.

???

1. $A=\begin{pmatrix}1&a&c\\0&1&b\\0&0&2\end{pmatrix}$, 求出 A 的初等因子组.
2. A 为三阶实对称矩阵，特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=-2$. $x_1=(1,-1,1)^{\mathrm{T}}$ 为 A 关于 λ_1 的一个特征向量，记 $B=$???.
   (1) 验证 x_1 为 B 的特征向量并求 B 的全部特征值和特征向量.
   (2) 求 B.
3. (10 分) 设 A 是四阶正交矩阵，且 $\det(A)=-1$. 写出 A 在正交相似下所有可能的标准形.

证明题（3 题，共 40 分）

1. (10 分) 设 $f(x)$ 是次数大于 0 的整系数多项式，若 $2-\sqrt{3}$ 是 $f(x)$ 的根. 证明 $2+\sqrt{3}$ 也是 $f(x)$ 的根.
2. (15 分) 设 V 是 n 维欧式空间对给定的 $0\neq\eta\in V, 0\neq k\in\mathbb{R}$. 定义 V 上的线性变换

$$\tau(\alpha)=\alpha+k(\alpha,\eta)\eta,\quad \alpha\in V.$$

   证明:
   (1) τ 是对称变换.
   (2) τ 是正交变换当且仅当 $k=-\dfrac{2}{(\eta,\eta)}$; 称这个正交变换为镜面反射.
   (3) 设 β,γ 是 V 中两个不同的单位向量，证明存在非零向量 $\eta\in V$, 使得用 η 定义的镜面反射 τ 能将 β 映到 γ.

3. (15 分) 设 A, B 是 n 阶正定矩阵.

(1) 举例说明 AB 不一定是正定矩阵.

(2) 求证:AB 是正定矩阵当且仅当 $AB = BA$.

1.2.4 2020-2021 年度高等代数 A(下) 冬季学期试卷

Texer: 萌小小　Reviewer:C++

填空题（每空 2 分，共 20 分）

1. 代数学基本定理是每一个次数 ≥ 1 的复系数多项式在 $\mathbb{C}$ 中都有根.
2. 设 A 是 2021 维欧式空间 V 的一组基的度量矩阵，则 A 的符号差为 2021, A^* 秩为2021.
3. 复数域上不可约多项式的次数为1，实数域上不可约多项式的次数为1, 2.
4. 如果不可约多项式 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的 k 重因式 $(k \geq 1)$，那么它是微商 $f'(x)$ 的$k-1$ 重因式.
5. 矩阵 A 为欧式空间中由标准正交基到标准正交基的过渡矩阵，则 $|A| = \pm 1$.
6. 全体 2021 阶复对称矩阵按合同共分为2022 类.
7. 两个有限维欧式空间同构的充分必要条件是它们的维数相同.
8. 同一线性变换在不同基下的矩阵的迹必相等.

判断题（每题 2 分，共 10 分，正确的填 T, 错的填 F）

1. 属于不同特征根的特征向量线性无关. (T)
2. 实对称矩阵 A 为负定的充分必要条件是 A 的所有顺序主子式都小于 0. (F)
3. 任何有限维欧式空间都存在标准正交基. (T)
4. 实对称矩阵的特征值可以不是实数. (F)
5. 奇数次实系数多项式不一定有实根. (F)

计算题（共 30 分）

1. (10 分) 设三维欧式空间 V 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的度量矩阵是
$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$
求 V 的一组标准正交基（用 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的线性组合）.

Solution 对 (T, I) 作系列合同变换，将 T 化为单位矩阵 I，

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \cdots \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

可以得到

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

则 $P'TP = I$．取 $(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) P$，即

$$\beta_1 = \alpha_1, \beta_2 = -\alpha_1 + \alpha_2, \beta_3 = \alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3.$$

则内积在基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 下的度量矩阵为 $P'TP = 1$, 所以 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 即为所求标准正交基.

2. (10 分) 求 $f(x) = x^4 - 4x^3 + 1$ 与 $g(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ 的首项系数为 1 的最大公因式.

   Solution *1.*

3. (10 分) 求用正交线性变换化二次型为标准型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$.

证明题（共 40 分）

1. (10 分) 证明实数域上二次型规范形的唯一性.
2. (10 分) 设 $\sigma, \tau \in L(\mathbb{C}^n)$ 且 $\sigma + \tau + \sigma\tau = 0$，求证：
   (1) 若 λ 是 σ 的一个特征值，则 V_λ 是 τ 的不变子空间.
   (2) σ, τ 至少有一个公共的特征向量.
3. (10 分) 设 A 为 n 维欧氏空间中一组基的度量矩阵,B 为半正定矩阵. 求证 AB 的特征值全部是非负实数.
4. (10 分)

1.2.5 2024-2025 年度高等代数 A(上) 秋季学期试卷 (回忆版)

填空题 (5 题)

1. 矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ 不是可逆矩阵, 则 a 的值等于 ( ).
2. 设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 是 n 阶矩阵, $|\boldsymbol{A}| = 2, |\boldsymbol{B}| = -3$, 则 $\left|2\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}^{-1}\right| = (\quad)$.
3. (类似) 求 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 的逆矩阵 ( ).
4. n 阶实对称矩阵的维数为 ( ).
5. 已知某 3 阶矩阵的特征值为 $1, 2, 4$, 求其伴随矩阵的迹 ( ).

选择题 (5 题)

1. 包含 V_1, V_2 的最小子空间为 ( ).

计算题

1. (类似) 计算 n 阶行列式:
$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \end{vmatrix}.$$
2. (类似) 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关, 向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示:
$$\begin{cases} \boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1 + 2\boldsymbol{\alpha}_2 + 3\boldsymbol{\alpha}_3, \\ \boldsymbol{\beta}_2 = 3\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2 + 4\boldsymbol{\alpha}_3, \\ \boldsymbol{\beta}_3 = \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3. \end{cases}$$
问 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 是否线性无关?
3. (类似)

1. 在四维行向量空间中求从基 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 到 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 的过渡矩阵，其中

$$\boldsymbol{e}_1 = (1,1,0,1), \boldsymbol{e}_2 = (2,1,2,0), \boldsymbol{e}_3 = (1,1,0,0), \boldsymbol{e}_4 = (0,1,-1,-1)$$
$$\boldsymbol{f}_1 = (1,0,0,1), \boldsymbol{f}_2 = (0,0,1,-1), \boldsymbol{f}_3 = (2,1,0,3), \boldsymbol{f}_4 = (-1,0,1,2)$$

2. 设线性变换 σ 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 下的矩阵为 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, 求 σ 的特征值与特征向量，并判断 σ 的矩阵是否可以在某一组基下为对角阵.

4. 求解下列线性方程组, 其中 k 为参数:

$$\begin{cases} kx_1 + x_2 + x_3 = -2, \\ x_1 + kx_2 + x_3 = -2, \\ x_1 + x_2 + kx_3 = -2. \end{cases}$$

5. (类似) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,0,-1,0), \boldsymbol{\alpha}_2 = (0,1,2,1), \boldsymbol{\alpha}_3 = (2,1,0,1)$ 是四维实行向量空间 V 中的向量, 它们生成的子空间为 V_1, 又向量 $\boldsymbol{\beta}_1 = (-1,1,1,1), \boldsymbol{\beta}_2 = (1,-1,-3,-1), \boldsymbol{\beta}_3 = (-1,1,-1,1)$ 生成的子空间为 V_2, 求子空间 $V_1 + V_2$ 和 $V_1 \cap V_2$ 的基.

证明题 (1 题，8 分)

设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 是 n 阶矩阵, 求证:

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{A} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}||\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}|$$

1.2.6 2023-2024 年度高等代数 A(上) 秋季学期试卷

填空题，共 5 题，每题 3 分

1. 设 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\a\end{pmatrix}$ 当满足 $\underline{a\neq 5}$ 时，任意三维向量 α 必可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出.
2. 设 A,B 分别为 $m\times n$ 和 $n\times s$ 的矩阵. 若 $r(AB)=n$. 则 $r\left(B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}\right)=\underline{n}$.
3. 设 $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ 是非齐次线性方程组 $A\mathbf{x}=\beta$ 的通解. 其中 k_1,k_2 为任意常数. 则 $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ 是 $Ax=\underline{3\beta}$ 的解.
4. 写出线性方程组 $A\mathbf{x}=0,B\mathbf{x}=0$ 同解的一个充要条件 $\underline{\mathrm{r}\begin{bmatrix}A\end{bmatrix}=\mathrm{r}\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix}=\mathrm{r}\begin{bmatrix}B\end{bmatrix}}$.
5. $r(A+B)\underline{\leq}r(A)+r(B)$.

选择题，共 5 题，每题 3 分

1. 当 $n\geqslant 2$ 时, 求 $\begin{vmatrix}1&2&2&\cdots&2\\2&2&2&\cdots&2\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\2&2&2&\cdots&n\end{vmatrix}$ ，则结果是 (C).
   (A) $-2n!$
   (B) $-2(n+2)!$
   (C) $-2(n-2)!$
   (D) 0
2. n 阶矩阵具有 n 个不同的特征值是 A 与对角阵相似的（B）条件.
   (A) 充要
   (B) 充分不必要
   (C) 必要不充分
   (D) 不充分与不必要

3. 设向量组 $A: \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 可由向量组 $B: \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_t$ 线性表示，则 (A).
   (A) 若 $s > t$, 则向量组 A 线性相关
   (B) 若 $s < t$, 则向量组 A 线性无关
   (C) 若 $s > t$, 则向量组 A 线性无关
   (D) 若 $s < t$, 则向量组 B 线性相关
4. 设 α_1, α_2 ，α_3 是线性空间 V 的一组基则 (D) 是 V 的另一组基.
   (A) $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$
   (B) $\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3$
   (C) $\alpha_1, \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_2$
   (D) $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$
5. 设 A, B 相抵，且 A 有一个 k 阶子式不等于 0，则 $r(B)$ <u>B</u> k.
   (A) =
   (B) $\geq$
   (C) >
   (D) $\leq$

计算题，4 题，共 54 分

1. 求 $\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a-2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b-2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c-2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d-2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix}$.

   Solution *0.*
2. 设线性变换 σ 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 下的矩阵为 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, 求 σ 的特征值与特征向量，并判断 σ 的矩阵是否可以在某一组基下为对角阵.
3. 设有线性方程组 $\begin{cases} x_1 + \lambda x_2 + \mu x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ 3x_1 + (2+\lambda)x_2 + (4+\mu)x_3 + 4x_4 = 1 \end{cases}$ ，已知 $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ 是该方程组的一个解，试求:
   (1) 该方程组的全部解，并用对应的齐次线性方程组的基础解系表示全部解.

(2) 该方程组满足 $x_2 = x_3$ 的全部解.

4. 数域 F 上 n 阶反对称矩阵全体 $V = \{A \in F^{n\times n}; A' = -A\}$, 按照通常的矩阵加法和数乘构成 F 上的线性空间，请给出它的一组基.

证明题，2 题，每题 8 分

1. 设 A 是 n 阶方阵. 则 $|A| = 0$ 的充要条件是存在非零矩阵 B, 使 $AB = 0$.
2. 设 A, B 为别为 $m \times n, n \times s$ 矩阵, 求证 F^n 的子空间 $W = \{Bx; ABx = 0\}$ 的维数等于 $r(B) - r(AB)$.

Proof 将矩阵同构于线性映射: $U \xrightarrow{T} V \xrightarrow{S} W$. 其中 T 与 B 同构,S 与 A 同构.

则有 $W = \ker(S) \cap \mathrm{im}(T)$,

而

$$
\begin{aligned}
\mathrm{r}(ST) &= \dim\left(\mathrm{im}\left(S|_{\mathrm{im}\,(T)}\right)\right) \\
&= \dim(\mathrm{im}(T)) - \dim(\ker(S|_{\mathrm{im}(T)})) \\
&= \dim(\mathrm{im}(T)) - \dim(\ker(S) \cap \mathrm{im}(T)) \\
&= \mathrm{r}(T) - \dim(W),
\end{aligned}
$$

故 $\dim(W) = \mathrm{r}(T) - \mathrm{r}(ST) = \mathrm{r}(B) - \mathrm{r}(AB)$.