22

❓ Problem 1

$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}, A = \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$，求其通解，并写出 e^{At} .

✅ Solution Solution >

矩阵 A 的特征方程为：

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -5-\lambda & -1 \\ 1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+4)^2 = 0.$$

解得重特征值：

$$\lambda = -4 \quad (\text{二重根}).$$

解方程 $(A+4I)\vec{v} = 0$：

$$A + 4I = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

可得线性方程 $-v_1 - v_2 = 0$，解为 $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$。

解方程 $(A+4I)\vec{v} = \vec{v}_1$：
取 $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$。
通解形式为：

$$\vec{x}(t) = e^{-4t}\left[C_1\vec{v}_1 + C_2\left(t\vec{v}_1 + \vec{v}_2\right)\right],$$

具体展开为：

$$\vec{x}(t) = e^{-4t}\left[C_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2\left(t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)\right].$$

利用幂零矩阵分解：$A = -4I + N$，其中 $N = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 满足 $N^2 = 0$，则：

$$e^{At} = e^{-4t}(I + Nt),$$

具体展开为：

$$e^{At} = e^{-4t}\begin{pmatrix}1-t & -t \\ t & 1+t\end{pmatrix}.$$

❓ Problem 2

$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}, A = \begin{pmatrix}1 & -1 \\ 1 & 1\end{pmatrix}$ ，求其通解，并写出 e^{At} .

✅ Solution Solution ›

矩阵 A 的特征方程为：

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

代入矩阵 A：

$$\det\begin{pmatrix}1-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda\end{pmatrix} = (1-\lambda)^2 + 1$$

$$(1-\lambda)^2 + 1 = 0 \implies (1-\lambda)^2 = -1 \implies 1 - \lambda = \pm i$$

因此，特征值为：

$$\lambda_1 = 1 + i, \quad \lambda_2 = 1 - i$$

观察矩阵 A 可分解为：

$$A = I + J, \quad \text{其中} \quad I = \begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix}0 & -1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

I 与 J 可交换，且 $J^2 = -I$。

利用 J 的幂级数展开：

$$e^{Jt} = \cos t \cdot I + \sin t \cdot J = \begin{pmatrix}\cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t\end{pmatrix}$$

由于 $A = I + J$ 且 I 与 J 可交换：

$$e^{At} = e^{It} \cdot e^{Jt} = e^t \cdot \begin{pmatrix}\cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t\end{pmatrix}$$

通解为：

$$\vec{x}(t) = e^{At}\vec{C} = e^t\begin{pmatrix}\cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_1 \\ C_2\end{pmatrix}$$

分量为：

$$\begin{cases} x_1(t) = e^t(C_1 \cos t - C_2 \sin t) \\ x_2(t) = e^t(C_1 \sin t + C_2 \cos t) \end{cases}$$

通解：

$$\vec{x}(t) = e^t \begin{pmatrix} C_1 \cos t - C_2 \sin t \\ C_1 \sin t + C_2 \cos t \end{pmatrix}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

矩阵指数：

$$e^{At} = e^t \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

❓ Problem 3

$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}, A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ，求其通解，并写出 e^{At} .

✅ Solution Solution >

矩阵 A 的特征方程为：

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

解得特征值：

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = -1$$

解方程 $(A - 0I)\vec{v} = 0$，得特征向量：

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

解方程 $(A - 2I)\vec{v} = 0$，得特征向量：

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

解方程 $(A + I)\vec{v} = 0$，得特征向量：

$$\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

由于矩阵 A 有三个不同的实特征值，通解为：

$$\vec{x}(t) = C_1 e^{0\cdot t}\vec{v}_1 + C_2 e^{2t}\vec{v}_2 + C_3 e^{-t}\vec{v}_3$$

即：

$$\vec{x}(t) = C_1\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + C_2 e^{2t}\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix} + C_3 e^{-t}\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}$$

构造可逆矩阵 P 和对角矩阵 D：

$$P = \begin{pmatrix}1 & 3 & 0\\0 & -2 & 1\\1 & 1 & -2\end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

矩阵指数为：

$$e^{At} = Pe^{Dt}P^{-1}$$

其中 $e^{Dt} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & e^{2t} & 0\\0 & 0 & e^{-t}\end{pmatrix}$。

通过矩阵乘法计算 e^{At}，结果为：

$$e^{At} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}3+3e^{2t} & 6-6e^{2t} & 3-3e^{2t}\\-2e^{2t}+2e^{-t} & 4e^{2t}+2e^{-t} & 2e^{2t}-2e^{-t}\\3+e^{2t}-4e^{-t} & 6-2e^{2t}-4e^{-t} & 3-e^{2t}+4e^{-t}\end{pmatrix}$$

通解：

$$\vec{x}(t) = C_1\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + C_2 e^{2t}\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix} + C_3 e^{-t}\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$$

矩阵指数：

$$e^{At} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}3+3e^{2t} & 6-6e^{2t} & 3-3e^{2t}\\-2e^{2t}+2e^{-t} & 4e^{2t}+2e^{-t} & 2e^{2t}-2e^{-t}\\3+e^{2t}-4e^{-t} & 6-2e^{2t}-4e^{-t} & 3-e^{2t}+4e^{-t}\end{pmatrix}$$

❓ Problem 4

$\dfrac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}, A = \begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\0 & -1 & 0\\1 & 0 & -4\end{pmatrix}$，求其通解，并写出 e^{At} .

Solution Solution

有特征值 $\lambda_1=-4,\lambda_2=\lambda_3=-1$, 特征向量 $\vec{v}=(0,0,1)'$.
解 $(A-\lambda_2 I)\vec{x}=0$, 有 $\vec{v}_{20}=(3,0,1)',\vec{v}_{30}=(1,3,0)'$.
$\vec{v}_{21}=(A-\lambda_2 I)^2\vec{v}_{20}=(0,0,0)',\vec{v}_{31}=(A-\lambda_2 I)^2\vec{v}_{30}=(3,0,1)'$.
故

$$\Phi(t)=\begin{pmatrix}0 & 3\mathrm{e}^{-t} & (1+3t)\mathrm{e}^{-t}\\ 0 & 0 & 3\mathrm{e}^{-t}\\ \mathrm{e}^{-4t} & \mathrm{e}^{-t} & t\mathrm{e}^{-t}\end{pmatrix}$$

因此

$$\Phi^{-1}(0)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3} & \frac{1}{9} & 1\\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{9} & 0\\ 0 & \frac{1}{3} & 0\end{pmatrix}$$

矩阵指数:

$$e^{At}=\Phi(t)\Phi^{-1}(0)=\begin{pmatrix}e^{-t} & te^{-t} & 0\\ 0 & e^{-t} & 0\\ \frac{e^{-t}-e^{-4t}}{3} & \frac{te^{-t}}{3}-\frac{e^{-t}-e^{-4t}}{9} & e^{-4t}\end{pmatrix}$$

通解:

$$\vec{x}(t)=C_1e^{-t}\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}+C_2e^{-t}\begin{pmatrix}3t+1\\3\\t\end{pmatrix}+C_3e^{-4t}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Problem 5

$\frac{d\vec{x}}{dt}=A\vec{x},A=\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ 2 & -1 & -2\\ -1 & 1 & 2\end{pmatrix}$ ，求其通解，并写出 e^{At} .

Solution Solution

有特征值 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$.
解 $(A-\lambda_1)\vec{x}=0$, 有 $\vec{v}_{10}=(1,0,0)',\vec{v}_{20}=(0,1,0)',\vec{v}_{30}=(0,0,1)'$.
故

$$\vec{v}_{11}=(A-\lambda_1)\vec{v}_{10}=(1,2,-1)',$$

$$\vec{v}_{12} = (A - \lambda_1)^2 \vec{v}_{10} = (0, 0, 0)',$$

$$\vec{v}_{21} = (A - \lambda_1) \vec{v}_{20} = (-1, -2, 1)',$$

$$\vec{v}_{22} = (A - \lambda_1)^2 \vec{v}_{20} = (0, 0, 0)',$$

$$\vec{v}_{31} = (A - \lambda_1) \vec{v}_{30} = (-1, -2, 1)',$$

$$\vec{v}_{32} = (A - \lambda_1)^2 \vec{v}_{30} = (0, 0, 0)',$$

则

$$\Phi(t) = e^t \begin{pmatrix} 1+t & -t & -t \\ 2t & 1-2t & -2t \\ -t & t & 1+t \end{pmatrix}$$

矩阵指数:

$$e^{At} = \Phi(t)\Phi^{-1}(0) = e^t \begin{pmatrix} 1+t & -t & -t \\ 2t & 1-2t & -2t \\ -t & t & 1+t \end{pmatrix}$$

通解:

$$\vec{x}(t) = e^{At} \vec{c}$$