常微分方程 A 资料

Author: 韦明

Date: March 13, 2025

E-mail: wm31415926535@outlook.com

Contents

Chapter 1 常微分方程 A

1.1 习题课

1.1.1 2025-2-18 习题

1. $y'' + \cos(x+y) = \sin(x)$ 是 $\underline{2}$ 阶 .
2. 写出具有 $y_1 = 2x, y_2 = 3\mathrm{e}^x$ 三阶常系数微分方程
3. 设方程 $P(x,y)\mathrm{d}x + x^2\mathrm{e}^y\mathrm{d}y = 0$ 有积分因子 $\dfrac{1}{x}$, 求 $P(x,y)$.
4. 求解 1. $(1+x)y\mathrm{d}x + (1-y)x\mathrm{d}y = 0$. 2. $(y^2 - 2xy)\mathrm{d}x + x^2\mathrm{d}y = 0$. 3. $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{y^2 - x}{2xy}$. 4. $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1 + y^2\sin(2x)}{y\cos(2x)}$.
5. 设 $y(x)$ 为连续函数，求解积分方程 $y(x) = 1 + x^2 + 2\displaystyle\int_0^x y(t)\mathrm{d}t$.
6. 求解 $(\sin(x) + \sin(y) + x)\mathrm{d}x + \cos(y)\mathrm{d}y = 0$.

1.1.2 2025-2-20 习题

1. 若方程有特解 $x = t\mathrm{e}^t\sin 2t$, 写出这个方程（阶数最低）。
2. 已知 $f(x)\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = 1, x \neq 0$, 求 $f(x)$.
3. 设 $f(x)$ 连续，且满足 $f(x) = \sin x - \displaystyle\int_0^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t$, 求 $f(x)$.

1.1.3 2025-2-25 习题

1. 对方程组 $\begin{cases} x' = y - x - x^2 \\ y' = 3x - y - x^2 \end{cases}$.

   1. 求出所有平衡点。2. 判断所有平衡点的稳定性。若稳定，是否渐进稳定？
2. 讨论 $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = y \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = ay - b\sin(x) \end{cases}$ 零解的稳定性。
3. 讨论 $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -3y + x(x^2+y^2) \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 2x + y(x^2+y^2) \end{cases}$ 零解的稳定性。

4. 判断 $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -y^2 + x(x^2+y^2) \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -x^2 - y^2(x^2-y^2) \end{cases}$ 零解的稳定性。

1.1.4 2025-2-27 习题

1. 判断零解稳定性 1. $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -x - y + (x-y)(x^2+y^2) \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = x - y + (x+y)(x^2+y^2) \end{cases}$ 2. $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \sin(x+y) \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -\ln(1+y) \end{cases}$
2. 求解方程组 $\vec{x}' = A\vec{x}$, 其中 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.
3. 求解 $\begin{cases} y\ln y\mathrm{d}x + (x - \ln y)\mathrm{d}y = 0 \\ y|_{x=2} = \mathrm{e}^2 \end{cases}$.