Gry topologiczne

Adrian Bętkowski, Olaf Jankowski-Pluntke, Marta Kosz

Stan na 11.11.2025

1 Pojęcia wstępne

TO DO:

1. Do bibliografii: definicje w rozdziałach "definicje" i "zupełność" zostały wzięte z notatek z topologii,warto więc wybrać z której książki korzystamy i je do tego dostosować.
2. do definicji: ciąg zbieżny
3. Czy definiować topologię, zb. otw i domkn?
4. Czy przestrzen metryczna =¿ topologiczna dać jako twierdzenie?

W tym rozdziale przytoczymy często powtarzające się definicje potrzebne do pełnego zrozumienia pracy.

Definicja 1. Metryką na zbiorze M nazwiemy funkcję $d : M \times M \to [0, +\infty)$ spełniającą następujące warunki dla $a, b, c \in M$:

1. $d(a, b) = 0 \iff a = b$,
2. $d(a, b) = d(b, a)$,
3. (Nierówność trójkąta) $d(a, b) \leqslant d(a, c) + d(c, b)$.

Definicja 2. Przestrzeń metryczna (M, d) składa się ze zbioru M oraz zadanej na nim metryki d. Każda przestrzeń metryczna jest również przestrzenią topologiczną.

Definicja 3. Domknięcie zb. A jest to najmniejszy zbiór domknięty zawierający A. Oznaczać je będziemy symbolem $\overline{A}$.

Definicja 4. Przez średnicę zbioru rozumiemy: $\mathrm{diam(F_n) := sup\{d(y_1, y_2) \mid y_1, y_2 \in F_n\}}$.

Definicja 5. Przestrzeń Baire'a - zbiór nieskończonych ciągów liczb naturalnych z topologią produktową, ozn. $B(\omega)$.

2 Zupełność

Definicja 6. Niech (M, d) będzie przestrzenią metryczną. Ciągiem Cauchy'ego nazwiemy taki ciąg $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ elementów M, dla którego niezależnie od wyboru $\varepsilon > 0$, istnieje N taki, że dla n i m większych lub równych N zachodzi $d(x_n, x_m) < \varepsilon$.

Twierdzenie 1. W dowolnej przestrzeni metrycznej każdy ciąg zbieżny jest ciągiem Cauchy'ego.

Dowód. Niech $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, będzie ciągiem w przestrzeni metrycznej zbiegającym do x. Wobec tego dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje taki N, że dla $i \geqslant N$ zachodzi $d(x_i, x) < \varepsilon/2$. Wobec tego dla dowolnych wyrazów x_n oraz x_m takich, że $n, m \geqslant N$, z nierówności trójkąta zachodzi również

$$d(x_n, x_m) \leqslant d(x_n, x) + d(x_m, x) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

□

Definicja 7. Przestrzeń metryczną, która spełnia warunki z poniższego twierdzenia, nazywamy zupełną.

Twierdzenie 2. Następujące warunki są równoważne:

1. Każdy ciąg Cauchy'ego w dowolnej przestrzeni metrycznej (M, d) posiada granicę.
2. (Twierdzenie Cantora) każdy zstępujący ciąg niepustych zbiorów domkniętych $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \ldots$ o średnicach dążących do zera ($\mathrm{diam(F_n)} \to 0$) ma niepuste przecięcie.

Dowód. **1 ⇒ 2**
Niech $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \ldots$ będzie ciągiem zbiorów domkniętych spełniającym $\mathrm{diam(F_n)} \to 0$. Zauważmy, że możemy wybrać ciąg $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, taki że dla każdego n, $x_n \in F_n$. Będzie to ciąg Cauchy'ego, ponieważ dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje N, dla którego $d(y_1, y_2) < \varepsilon$ dla $y_1, y_2 \in F_N$. Natomiast jeżeli $n, m \geqslant N$ to x_n, x_m należą do F_N, czyli zachodzi $d(x_n, x_m) < \varepsilon$. Z założenia wiemy, że dowolny ciąg Cauchy'ego ma granicę x. Ponieważ w dowolnym $F_n \setminus F_{n+1}$ mamy jedynie pierwsze skończenie wiele wyrazów ciągu, to x musi należeć do każdego F_n, czyli do ich przecięcia.

2 ⇒ 1
Niech x_n będzie ciągiem Cauchy'ego. Weźmy zb. domknięte $F_n = \mathrm{cl}\{x_m : m \geqslant n\}$. Zauważmy, że skoro x_n jest ciągiem Cauchy'ego, to $\mathrm{diam(F_n)} \to 0$. Wobec tego istnieje punkt $x \in \bigcap F_n$, więc mamy $\sup\{d(x, y) \mid y \in F_n, x \in \bigcap F_n\} \to 0$, ale jak łatwo można zauważyć $\sup\{d(x, y) \mid y \in F_n, x \in \bigcap F_n\} \geqslant d(x, x_n)$ dla wyrazów ciągu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, zatem $x_n \to x$.

□

3 Gry topologiczne

Gra topologiczna to w ogólności nieskończona gra pozycyjna między dwoma graczami, których kolejne ruchy polegają na wybieraniu obiektów o zadanych własnościach topologicznych, np. punktów, zbiorów otwartych/domkniętych.
Niech gra toczy się między graczami I i II i niech wybierają oni w każdym kroku podzbiory przestrzeni topologicznej X, oznaczone odpowiednio przez I_n dla gracza I oraz J_n dla gracza II. Wówczas rezultatem gry jest ciąg $I_0, J_0, I_1, J_1, \ldots$. Gracz I wygrywa, jeżeli ciąg ten spełnia jakąś zadaną wcześniej własność, w przeciwnym wypadku wygrywa gracz II.
Strategią wygrywającą dla danego gracza nazwiemy taki sposób podejmowania decyzji w swojej turze, który gwarantuje mu zwycięstwo niezależnie od decyzji drugiego gracza.

4 Gra Banacha-Mazura

Przykładem gry topologicznej jest gra Banacha-Mazura. Rozgrywa się ona na przestrzeni Baire'a $B(\omega)$ z wyróżnionym $E \subseteq B(\omega)$. W swoim ruchu każdy gracz wybiera liczbę naturalną, konstruując w tej sposób ciąg $(m_n)_{n=0}^{\infty}$, gdzie elementy o indeksach parzystych wybierał gracz I a elementy o indeksach nieparzystych gracz II. Gracz I wygrywa, jeżeli $(m_n)_{n=0}^{\infty} \in E$, w przeciwnym wypadku wygrywa gracz II. Taką grę oznaczamy poprzez $G_{BM}(E)$.
Grę Banacha-Mazura można uogólnić do dowolnej przestrzeni topologicznej X z wyróżnionym podzbiorem $E \subseteq X$. Wówczas grę rozpoczyna gracz I wybierając otwarty zbiór $U_0 \subseteq X$, po czym każdy gracz wybiera zbiory otwarte tak, aby utworzyć ciąg $U_0 \supseteq V_0 \supseteq U_1 \supseteq V_1, \ldots$. Gracz I wygrywa tę grę jeśli $E \cap (\bigcap_{n=0}^{\infty} U_n) \neq \emptyset$, w przeciwnym wypadku wygrywa gracz II. Oznaczamy tę grę poprzez $G_{uBM}(X, E)$.
Mówimy, że gra $G_{BM}(E)$ lub $G_{uBM}(X, E)$ jest zdeterminowana, jeżeli któryś z graczy ma strategię wygrywającą.

Twierdzenie 3.
Jeżeli zbiór $E \subseteq B(\omega)$ jest przeliczalny, to wówczas gracz II ma strategię wygrywającą.

Dowód.
Niech $E = \{({}_l k_n) \in B(\omega) : l \in \mathbb{N}\}$.
Wówczas wystarczy, żeby gracz II wybrał $m_{2n+1} \neq {}_n k_{2n+1}$. Każda taka decyzja zapewnia, że $(m_n) \neq ({}_n k_n)$, zatem $(m_n) \notin E$. □

Analogicznie można znaleźć również strategię wygrywającą dla gracza I jeżeli $B(\omega) \setminus E$ jest przeliczalny.

5 Aksjomat determinacji

Aksjomat determinacji to jeden z możliwych aksjomatów teorii mnogości, mówiący:

Dla każdego $E \subseteq B(\omega)$ gra $G_{BM}(E)$ jest zdeterminowana.