Devoir surveillé

Nom prénom :

Dén ordre	Dén sans ordre	équiprob	formules proba	arbre	Calculs arbre	indép	un tableau de loi	esp (loi non usuelle)	var (loi non usuelle)	trouver la loi usuelle	esp/ var loi connue	proba loi usuelle	calculs	analyser

primitive simple	primitive comp	IPP	chgt var	proba loi cont	esp loi cont	densité loi cont	lecture table	lecture inverse	pie	centrer réduire	app loi bino	intervalle de conf	calculs

Calculatrice non alphanumérique et polycopié de cours autorisés et indispensables

Les calculs de loi normale seront donnés avec 4 chiffres après la virgule, et les autres calculs seront donnés avec deux chiffres après la virgule. Tous les nombres seront arrondis au plus proche.

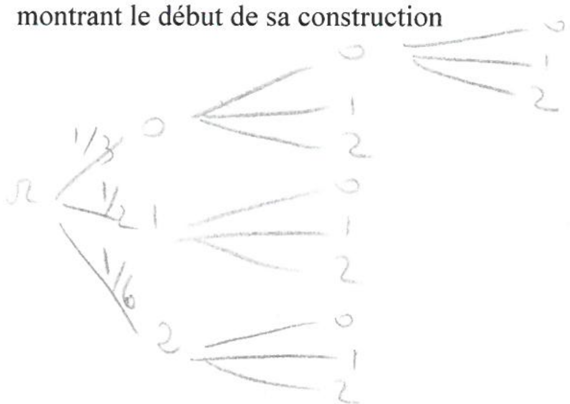
5 Exercice 1 (~~5,5~~ points)

moy 2,5

Saison 1 : Chaque jour, Joyce peut communiquer avec son fils, une fois dans la journée avec le probabilité ½, deux fois avec la probabilité 1/6 et le reste c'est la probabilité qu'elle ne communique pas (0 fois). On note X le nombre de fois où elle a pu communiquer avec son fils sur 3 jours indépendants.Le tableau suivant indique la loi de X

xi	0	1	2	3	4	5	6	
Pi	8/216	36/216	66/216	63/216	33/216	9/216	1/216	1

1) Pour construire le tableau, on s'est servi d'un arbre, Expliquer de quel arbre il s'agit en montrant le début de sa construction



$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{6-3-1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

1

0,5 2) Compléter le tableau suivant avec les valeurs prises par X, on utilisera l'arbre.

3) Quel calcul nous permet de vérifier que le tableau est correct ?

0,5 Σ proba = 1

4) Donner le détail du calcul qui permet d'obtenir le 8/216

0,5 $\frac{8}{216} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3}$

5) Donner le détail du calcul qui permet d'obtenir 66/216.

1,5

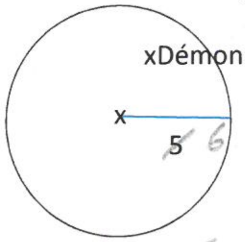
6) Calculer l'espérance et la variance de X

$E(X) = 2,5$ $var(X) = 7,66 - 2,5^2 = 1,41$

1

$E(X^2) = 7,66$ $\sigma(X) = 1,19$

Exercice 2 (3,5 points)
Saison 1
Le démon gorgon sort de son antre située au centre (cf schéma) et peut parcourir jusqu'à 5km à partir de là.



On note X la variable aléatoire égale à la position du monstre à minuit. X suit la loi continue à densité $f(x)=\frac{1}{25}x.1_{[0,5]}(x)$

(distance par rapport au centre)

1) Vérifier que f est bien une fonction à densité.

1 $\int_0^6 \frac{x}{18}dx = \left[\frac{x^2}{36}\right]_0^6 = \frac{36}{36} - 0 = 1$

2) Quelle est la probabilité que $1 \le X \le 4$?

1 $P(2 \le x \le 7) = \int_2^6 \frac{x}{18}dx = \left[\frac{x^2}{36}\right]_2^6 = \frac{36}{36} - \frac{4}{36} = \frac{8}{9}$

3) Mike et ses amis ont exploré le premier cercle de 2km et il n'est pas là. Quelle est la probabilité qu'il le trouve avant la fin du 3ème kilomètre ?

1,5 $P_{(x>2)}(x<3) = \frac{\int_2^3}{\int_2^6} = \frac{\left[\frac{x^2}{36}\right]_2^3}{\left[\frac{x^2}{36}\right]_2^6} = \frac{\frac{9-4}{36}}{\frac{36-4}{36}} = \frac{5}{32}$ /8 9

4) A quel endroit peuvent-ils espérer le trouver un autre soir à minuit ?

1 $E(x) = \int_0^6 \frac{x^2}{18}dx = \left[\frac{x^3}{3\cdot 18}\right]_0^6 = \frac{6\times6\times6}{3\times6\times3} = 4$ à 4km

Exercice 3 (2 points)
Saison 1/2 :
Il y a 12 personnages principaux dans le film (Shérif Hooper, Joyce, Bob, Mike, Will, Lucas, Dustin, Jonathan, Steve, Barbara, Nancy, Onze et Max). Il y a 5 filles parmi les 10.

1) On choisit au hasard 3 personnes pour mourir, peu importe à quel moment. Quelle est la probabilité qu'il y ait 2 filles parmi les 3?

1,5 $\frac{\binom{5}{2}\binom{8}{1}}{\binom{13}{3}} = \frac{40}{143}$

2) Sur ces 3 personnes choisies on note X le nombre de filles. Quelle est la loi de X ?

0,5 $X \sim \mathcal{H}(13,5,3)$

	0	1	2	3
	$\frac{\binom{8}{3}}{\binom{13}{3}}$	$\frac{\binom{5}{1}\binom{8}{2}}{\binom{13}{3}}$	$\frac{40}{143}$	$\frac{\binom{5}{3}}{\binom{13}{3}}$

3) Quelle est l'espérance de X ?

0,5 $E(X) = n\times\frac{K}{N} = 3\times\frac{5}{13} = \frac{15}{13}$

Exercice 4 (5 points)
Saison 2 :
Les démons-chiens attaquent le centre de recherche. Chaque personne du centre a 4/5 de chance de se faire tuer. Et ils se font tuer indépendamment les uns des autres.
Il y a 225 personnes dans le bâtiment.
On note X le nombre de tués à la fin de l'attaque.

1) Quelle est la loi de X ?

$X \sim \mathcal{B}(225, \frac{4}{5})$

0,5

2) Combien de personnes risquent de mourir en moyenne ? On note N ce nombre.

0,5 $E(X) = 180$

3) Calculer P(X=N), on donnera le calcul sans le faire.

0,5 $P(X=180) = \binom{225}{180} \left(\frac{4}{5}\right)^{180} \left(\frac{1}{5}\right)^{45}$

4) Prouver qu'on peut approcher la loi de X par N(180 ; 6). On utilisera ensuite cette approximation

$225 \geq 30 \quad 225 \times \frac{4}{5} \times \frac{1}{5} = 36 > 10$

~~0,5~~ 1 on peut approcher par $N(\underset{180}{np}, \underset{\sqrt{36}=6}{\sqrt{np(1-p)}})$

5) Quelle est la probabilité qu'il y ait plus de 170 morts ?

$P(X \geq 171) = P\left(\frac{X-180}{6} \geq \frac{171-180}{6}\right)$

1,5 $= P\left(\frac{X-180}{6} \geq -1,5\right)$

$= 1 - \Pi(-1,5) = \Pi(1,5) = 0,9332$

6) Donner un intervalle de confiance pour X avec la probabilité 0.85.

$P(180-\varepsilon \leq X \leq 180+\varepsilon) \geq 0,85$

$P\left(-\frac{\varepsilon}{6} \leq \frac{X-180}{6} \leq \frac{\varepsilon}{6}\right) \geq 0,85$

$2\Pi\left(\frac{\varepsilon}{6}\right) - 1 \geq 0,85$

1,5 $\Pi\left(\frac{\varepsilon}{6}\right) \geq 0,925$

$\frac{\varepsilon}{6} \geq 1,44$

$\varepsilon \geq 8,64$

$X \in [171,36 ; 188,64]$ avec la proba 0,85

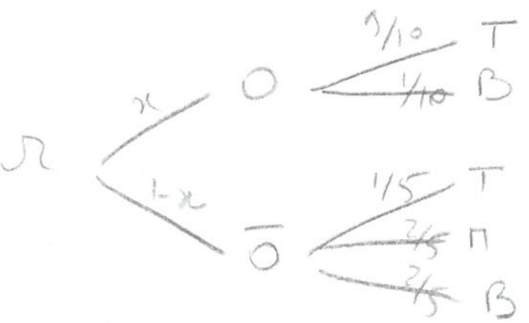
Exercice 5 (4 points)

Saison 2.

Quand Onze est là, elle a 9/10 de tuer un demon, et 1/10 de le louper car il s'est enfui.
Quand Onze n'est pas là, le groupe a 1/5 de tuer un démon gorgon, 2/5 de malchance qu'il y ait un mort dans le groupe et le reste de blesser le démon et de le faire s'enfuire.
On note x la probabilité que Onze soit là.
On note O, l'évènement Onze est là, T l'évènement tuer le démon, M, l'évènement, perdre un membre du groupe (mort), B, l'évènement blesser le démon.

A)

1) Effectuer un arbre modélisant la situation



1,5

2) La probabilité de tuer un démon (p(T)) vaut 2/3. En écrivant p(T) à l'aide de l'arbre, et en résolvant une équation avec x que l'on écrira prouver que x=2/3

1,5

$x \times \frac{9}{10} + (1-x)\frac{1}{5} = \frac{9x}{10} + \frac{1}{5} - \frac{x}{5} = \frac{2}{3}$ $\quad \frac{7x}{10} = \frac{10-3}{15} = \frac{7}{15}$

$x = \frac{10}{7} \times \frac{7}{15} = \frac{2}{3}$

3) Max arrive, voit le monstre mort. Quelle est la probabilité que ce soit Onze qui l'ait tué ?

1 ~~0,5~~

$P_T(O \cap T) = \frac{P(O \cap T)}{P(T)} = \frac{\frac{2}{3}\frac{9}{10}}{\frac{2}{3}} = \frac{9}{10}$

4) Calculer la probabilité qu'il y ait un mort, on notera p cette probabilité.

0,5 $\quad P(M) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{2}{15}$.

B) La probabilité de tuer un démon est 2/3.

1) Le groupe + Onze attaque les démons jusqu'à en tuer un (on suppose le nombre de démon non limité) ? On note Y le nombre de ceux qu'il va falloir affronter avant d'en voir un mourir. Quelle est la loi de Y ?

0,5 $\quad Y \sim \mathcal{G}(\frac{2}{3})$

2) 20 démons arrivent, on note Z le nombre de ceux qui seront tués, quelle est la loi de Z ?

0,5 $\quad Z \sim \mathcal{B}(20, \frac{2}{3})$

Exercice 6 (4.5 points)
Calculer

1) $\int_1^2 1.\ln(\mathrm{t})dt$ en utilisant une intégration par partie.(On utilisera le 1 comme une fonction)

$u' = 1 \quad u = x$

$v = \ln(x) \quad v' = \frac{1}{x}$

1,5

$\int_1^2 1 \ln x \, dx = [x \ln x]_1^2 - \int_1^2 1 \, dx$
$= 2\ln 2 - [x]_1^2$
$= 2\ln 2 - 2 + 1 =$
$= 2\ln 2 - 1$

2) Calculer $\int_{-1}^{0} \frac{x}{1+(x^2+2)^2}$dx en utilisant le changement de variable t=x² -1

$t = x^2 - 1$

$dt = 2x \, dx$

qd $x = -1 \quad t = 0$

$x = 0 \quad t = -1$

1,5

$\int_{-1}^{0} \frac{x}{1+(t+1)^2} dx = \frac{1}{2}\int_{0}^{-1} \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{1}{2}\left[\arctan(t)\right]_0^{-1}$
$= \frac{1}{2}\arctan(-1)$
$= -\frac{\pi}{8}$

3) Calculer $\int_0^1 x^2 e^{x^3} \, dx$ en utilisant les primitives de fonctions composées

$3x^2 e^{x^3} \to e^{x^3}$

e^u

$u' = 3x^2$

1,5

$\frac{1}{3}\int_0^1 3x^2 e^{x^3} dx = \left[\frac{1}{3} e^{x^3}\right]_0^1$
$= \frac{1}{3} e - \frac{1}{3}$.