题目选讲

11Dimensions

Dark

定义一个图的权值为其连通分量的个数的 m 次方。对于所有 n 个点的简单无向图，求它们的权值的和。题目包含 T 组数据。

$$T \leq 1000, n \leq 30000, m \leq 15$$

先考虑一个经典问题：求 n 个点的简单连通无向图个数。

先考虑一个经典问题：求 n 个点的简单连通无向图个数。
设 $G(x)=\sum_{x\geq 0} 2^{\binom{n}{k}} x^n/n!$ 为简单无向图个数的 EGF，$F(x)$ 为简单连通无向图个数的 EGF，则有：

$$G(x)=1+F(x)+\frac{F(x)^2}{2!}+\frac{F(x)^3}{3!}+\cdots=e^{F(x)}$$

先考虑一个经典问题：求 n 个点的简单连通无向图个数。
设 $G(x) = \sum_{x \geq 0} 2^{\binom{n}{k}} x^n / n!$ 为简单无向图个数的 EGF，$F(x)$ 为简单连通无向图个数的 EGF，则有：

$$G(x) = 1 + F(x) + \frac{F(x)^2}{2!} + \frac{F(x)^3}{3!} + \cdots = e^{F(x)}$$

可以得到

$$F(x) = \ln G(x)$$

设答案的 EGF 为 $P(x)$，则有：

$$\begin{aligned}
P(x) &= \sum_{k\geq 0} \frac{F(x)^k k^m}{k!} \\
&= \sum_{k\geq 0} \frac{F(x)^k \sum_{i=0}^{k} S(m,i)(k)_i}{k!} \\
&= \sum_{i\geq 0} S(m,i) \sum_{k\geq i} \frac{F(x)^k (k)_i}{k!} \\
&= \sum_{i\geq 0} S(m,i) \sum_{k\geq i} \frac{F(x)^k}{(k-i)!}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
P(x) &= \sum_{i\geq 0} S(m,i) \sum_{k\geq i} \frac{F(x)^k}{(k-i)!} \\
&= \sum_{i\geq 0} S(m,i) F(x)^i \sum_{k\geq 0} \frac{F(x)^k}{k!} \\
&= \left(\sum_{i\geq 0} S(m,i) F(x)^i \right) G(x)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P(x) &= \sum_{i\geq 0} S(m,i) \sum_{k\geq i} \frac{F(x)^k}{(k-i)!} \\
&= \sum_{i\geq 0} S(m,i) F(x)^i \sum_{k\geq 0} \frac{F(x)^k}{k!} \\
&= \left(\sum_{i\geq 0} S(m,i) F(x)^i \right) G(x)
\end{aligned}
$$

递推 Stirling 数之后使用 FFT 即可。

复杂度 $O(m^2 n + mn\log n + T)$。

TheCowDivOne

求 $S = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ 的大小为 k 且元素和为 n 的倍数的子集的个数。

$$n \leq 10^9, k \leq 1000$$

首先考虑没有关于子集大小的约束的情况。

首先考虑没有关于子集大小的约束的情况。

设 f_s 为 S 的元素的和为 s 的子集个数，则答案为 $\sum_{n|s} a_s$。同时 a_s 的 OGF 为

$$F(x) = \sum_s a_s x^s = \prod_{i=0}^{n-1} (1 + x^i)$$

设 ζ_n 为一 n 次本源单位根，则对任意多项式 $P(x)=\sum a_i x^i$，我们有

$$\sum_{i\equiv k \pmod{n}} a_i = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} P(\zeta_n^i)\zeta_n^{-ik}$$

其本质为 IDFT 过程。

这时我们有

$$\begin{aligned}\text{ans} &= \sum_{n|s} a_s \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} F(\zeta_n^i)\end{aligned}$$

因此我们只需要考虑 $F(\zeta_n^i)$ 的值即可。

设 $d=(n,i)$，我们有如下结论：

$$\zeta_n^i=\zeta_{n/d}$$

$$\prod_{i=0}^{n-1}(x+\zeta_n^i)=x^n-(-1)^n$$

这时我们有

$$
\begin{aligned}
F(\zeta_n^i) &= \prod_{j=0}^{n-1}(1+\zeta_n^{ij}) \\
&= \prod_{j=0}^{n-1}(1+\zeta_{n/d}^{j}) \\
&= \left(\prod_{j=0}^{n/d-1}(1+\zeta_{n/d}^{j})\right)^d \\
&= \left(1-(-1)^{n/d}\right)^d
\end{aligned}
$$

计算答案时，我们考虑枚举 $d=(n,i)$，有

$$
\begin{aligned}
\text{ans} &= \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} F(\zeta_n^i) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\left(1-(-1)^{n/(n,i)}\right)^{(n,i)} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{d\mid n}\left(1-(-1)^{n/d}\right)^{d}\varphi\left(\frac{n}{d}\right)
\end{aligned}
$$

直接计算答案即可。

考虑限制子集大小的情况，我们可以增加一个自由元，设 $a_s(y)$ 中的 y^k 项的系数为元素和为 s 且大小为 k 的子集个数，则 a_s 的 OGF 为

$$F(x,y)=\sum_{s}a_s(y)=\prod_{i=0}^{n-1}(1+x^iy)$$

而答案为 $\mathrm{ans}(y)=\sum_{n|s}a_s(y)$ 中 y^k 项的系数。

则类似的，我们有

$$\begin{aligned}\operatorname{ans}(y) &= \sum_{n|s} a_s(y) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} F(\zeta_n^i, y)\end{aligned}$$

考虑 $F(\zeta_n^i, y)$，有

$$\begin{aligned}
F(\zeta_n^i, y) &= \prod_{j=0}^{n-1} (1 + y\zeta_n^{ij}) \\
&= \prod_{j=0}^{n-1} (1 + y\zeta_{n/d}^{j}) \\
&= \left(\prod_{j=0}^{n/d-1} (1 + y\zeta_{n/d}^{j}) \right)^d \\
&= \left(1 - (-y)^{n/d}\right)^d
\end{aligned}$$

答案也可以类似的计算：

$$\begin{aligned}\operatorname{ans}(y) &= \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} F(\zeta_n^i, y) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\left(1-(-y)^{n/(n,i)}\right)^{(n,i)} \\ &= \frac{1}{n}\sum_{d\mid n}\left(1-(-y)^{n/d}\right)^{d}\varphi\left(\frac{n}{d}\right)\end{aligned}$$

注意到答案的每一项都是一个二项式，因此我们可以直接计算它的 k 次项系数，就可以求出答案。
复杂度为 $O(n^{1/2}\log n + k\log^2 n)$。