

Some Tricks in OI

Wearry

组合计数相关

计数技巧

-

$$x^n = nx^{n-1} + (x-1)^n$$

- 对于无标号对象的计数，如果能够快速和有标号的情形相互转化，转化成对有标号对象计数可能更加简便。
- 求满足某个条件的对象的数量的 k 次方的和的问题，可以转化成每 i 个对象同时合法会产生 $\{^k_i\} i!$ 的贡献。

实现细节

- 使用分治 FFT 求函数值时，如果递推式里有这个函数的幂的形式，要考虑每一项的计算次数来确定系数。

容斥应用

- Stirling 公式可以从等价类的角度考虑并化成容斥形式，例：

计算 $n \times m$ 大小的矩阵，每一个元素的取值在 $[1, C]$ 之间，且任意两行两列不等价的方案数。

首先通过下降幂保证任意两行不等价，令：

$f(i)$ 表示所有列等价类个数小于等于 i 的方案

$g(i)$ 表示所有列等价类个数恰好等于 i 的方案

$$\begin{aligned} f(x) &= (C^x)^n \\ &= \sum_{i=1}^x \left\{ \begin{matrix} x \\ i \end{matrix} \right\} g(i) \end{aligned}$$

可以 Stirling 反演：

$$g(x) = \sum_{i=1}^x (-1)^{x-i} \begin{bmatrix} x \\ i \end{bmatrix} f(i)$$

图论

模型构建

- 最小割中出现负权边时，可以考虑先手动做一次增广，选择割掉一定最优的负权边，然后利用最小割在残图中调整。

数论相关

拓展 Euler 定理：

$$a^x \equiv a^{\min(x, x \bmod \varphi(p) + \varphi(p))} \pmod{p}$$

本质：

$$a^{\varphi(p)} \equiv a^{2\varphi(p)} \pmod{p}$$

证明：

设 $p = m_1 m_2$, 其中 m_1 中包含所有 a, p 的公共质因子。

显然有 $\gcd(m_1, m_2) = \gcd(a, m_2) = 1$, 则 $a^{\varphi(m_1 m_2)} \equiv 1 \pmod{m_2}$ 。

考虑 $a^{\varphi(m_1 m_2)} \pmod{m_1}$: 对于任意质因子 $p \mid m_1$, 设其在 m_1 中的指数为 exp , 在左式中其指数最小为 $(p-1) \times p^{exp-1}$ 显然大于 exp , 所以有：

$$\begin{aligned} a^{\varphi(p)} &\equiv a^{2\varphi(p)} \equiv 0 \pmod{m_1} \\ a^{\varphi(p)} &\equiv a^{2\varphi(p)} \equiv 1 \pmod{m_2} \end{aligned}$$

由 CRT, $a^{\varphi(p)} \equiv a^{2\varphi(p)} \pmod{p}$ 。

实现（卡常）技巧

- 需要多次计算的分块结构，可以用数组存下分块的位置反复使用。
- 杜教筛等算法中访问的形如 $\lfloor \frac{n}{i} \rfloor$ 的函数值在下标较大的时候可以利用 n 除以这个数的唯一性存在商中。