杂题选讲

Wearry

Jan 17, 2020

Best Subsequence

给出一个长度为 n 的序列 $\{a_i\}$，求长度为 k 的子序列 $\{a_{i_j}\}$，使得：

$$\max\{(a_{i_1}+a_{i_2}),(a_{i_2}+a_{i_3}),\dots,(a_{i_k}+a_{i_1})\}$$

最小，求最小值是多少。

$n,k\le 10^5,|a_i|\le 10^9$

Best Subsequence

- 对于要求最大值最小的题目，直接的想法是二分答案，考虑二分之后如何判断。

Best Subsequence

- 对于要求最大值最小的题目，直接的想法是二分答案，考虑二分之后如何判断。
- 记 $f_{i,j}$ 表示前 i 个数中选择了 j 个位置作为子序列，并且 i 也在自序列中是否能够取到。
- 直接转移的复杂度是 $O(n^3)$ 的，利用数据结构优化可以做到 $O(n^2 \log n)$。

Best Subsequence

- 对于要求最大值最小的题目，直接的想法是二分答案，考虑二分之后如何判断。
- 记 $f_{i,j}$ 表示前 i 个数中选择了 j 个位置作为子序列，并且 i 也在自序列中是否能够取到。
- 直接转移的复杂度是 $O(n^3)$ 的，利用数据结构优化可以做到 $O(n^2 \log n)$。
- 注意到只记录 $0/1$ 状态损失了很多信息，考虑改成记录最大值的方式，注意到求最大值的过程是循环的，因此可以先将最小值循环移动到序列开头，由于最小值一定在一个最优方案中，因此只需要最长子序列的长度不小于 k 即可。

Dates

你想要和 t 个女孩在接下来的 n 天中约会，其中第 i 个女孩愿意在第 $[l_i, r_i]$ 中的某一天和你约会，如果成功约会你能够获得 p_i 的愉悦度，并且满足 $l_i \le l_{i+1}, r_i \le r_{i+1}$。

然而你的精力有限，第 i 天最多只能和 a_i 个女孩约会，求你能获得的愉悦度的最大值。

$1 \le l_i \le r_i \le n, t \le 3 \times 10^5, p_i \le 10^9$

Dates

考虑按照 p_i 的顺序贪心地插入所有点，那么一定是能选就选，不能选就一定不选。

Dates

考虑按照 p_i 的顺序贪心地插入所有点，那么一定是能选就选，不能选就一定不选。

考虑二分图匹配的霍尔定理，由于区间之间没有包含的情况，因此只需要判断对于任意的 l_i 连续的区间段，是否满足：

$$r - l + 1 \leq \sum_{i=L(l)}^{R(r)} a_i$$

简单变换式子可以得到：

$$S_{R(r)} - r \geq S_{L(l)-1} - (l - 1)$$

Dates

$$S_{R(r)} - r \geq S_{L(l)-1} - (l-1)$$

又注意到选择 $[l,r]$ 这个区间至多只会影响所有跨越区间的部分的选择，因此只需要满足区间右侧的最小值大于等于左侧的最大值即可。

在线段树上分别维护 $S_{R(i)} - i$ 和 $S_{L(i)-1} - (i-1)$ 即可。

Planes

给出一个 n 个点 m 条边的有向图，求最小路径覆盖数，并求可能成为最小路径覆盖方案中的路径的端点的点集。

$n, m \leq 10^5$

Planes

首先对于最小路径覆盖数，可以将原图 (u, v) 中的所有边加入新的二分图中作为边 (u, v')，然后求新的二分图的最大匹配，用总点数减去匹配数就可以得到最小路径覆盖数。

接着考虑可能成为端点的点集的性质，对于二分图匹配中的每一条匹配边，相当于最优方案中这条边也在某一条覆盖路径上，如果某个点 x 是路径的端点，则相当于形如 $(x, y'), (y, x')$ 这样的边至少有一类不存在。

由于题目要求的是所有方案中可能的点集，因此只需要至少存在一个最大匹配的方案，满足上述形式的匹配边不存在即可，这样的问题与 x 或 x' 是非匹配点等价。而非匹配点有两类：

1. 在初始求出的匹配方案中的未配点。
2. 从一个未配点出发，能够经过交替路遍历到的同侧点。

于是直接在求出最大匹配的残图上进行一次 BFS 即可。

Knowledge

给出一个长度为 n 字符串，仅包含 a, b 两种字符，你可以进行任意次如下操作：

- 删除 aa
- 删除 bbb
- 删除 ababab
- 添加 aa
- 添加 bbb
- 添加 ababab

求能够利用这种方法得到多少长度为 x 的字符串。

$n \leq 3 \times 10^5, x \leq 10^9$

Knowledge

注意到：

- $\mathrm{abb} = \mathrm{baba}$
- $\mathrm{ababb} = \mathrm{bbab}$

Knowledge

注意到：

- abb = baba
- ababb = bbab

因此长度超过一定大小时等价类的数量不超过 20，可以表示成 bb 的一个前缀加上 ababa 的一个前缀的形式，因此利用矩阵乘法即可计算答案。

Cool Pairs

给出两个排列 $\{p_i\},\{q_i\}$，对于两个序列 $\{a_i\},\{b_i\}$，定义一个二元组 (i,j) 是好的，当且仅当：

$$i < j \text{ and } a_i + b_j < 0$$

现在要求你构造两个序列 $\{a_i\},\{b_i\}$ 值域在 $[-n,n]$, 满足好的二元组数量恰好有 k 个，并且有：

$$a_{p_1} \le a_{p_2} \le ... \le a_{p_n}$$
$$b_{q_1} \le b_{q_2} \le ... \le b_{q_n}$$

$n \le 10^5, k \le \binom{n}{2}$

Cool Pairs

认真观察可以发现，一定存在构造方案满足 $b_{q_i} = i - 1$。

认真观察可以发现，一定存在构造方案满足 $b_{q_i} = i - 1$。

接下来考虑从小到大从初值为 $-n$ 开始填 a_i，如果在 a_i 右边且满足条件的 b_j 的数量大于等于 k，那么一定存在一种更大的取值能够恰好取到等号，剩下的其他 a_i 则全部填 0 即可。

Cool Pairs

认真观察可以发现，一定存在构造方案满足 $b_{q_i} = i - 1$。

接下来考虑从小到大从初值为 $-n$ 开始填 a_i，如果在 a_i 右边且满足条件的 b_j 的数量大于等于 k，那么一定存在一种更大的取值能够恰好取到等号，剩下的其他 a_i 则全部填 0 即可。

否则保持 a_i 的值为 $-n$ 不变，将当前的 k 减掉 a_i 产生的贡献进行迭代即可。

Cake

给出一个 n 个点构成的凸包，现在你会随机从中选出 k 个点，求选出的点都成的图形的期望面积。

$3 \leq k \leq n \leq 2500$

Cake

利用期望的线性性，将图形的面积拆成图形所有边的两端点的叉积的和的形式。

Cake

利用期望的线性性，将图形的面积拆成图形所有边的两端点的叉积的和的形式。

这样问题转化成求一条边出现在图形边缘的概率，注意到这个概率其实就是一个组合数的形式，因此直接 $O(n^2)$ 计算即可。

XOR

给定 n, m 和 2^m 个数 $\{p_i\}$，保证 $[1, n]$ 至少在 $\{p_i\}$ 中出现一次。求有多少组值域范围是 $[0, 2^m - 1]$ 的长度为 n 的序列 $\{x_i\}$ 满足:

$$\forall y, y \oplus x_{p_y} > y \oplus x_{p_i}, \forall i \neq y$$

$m \leq 16, n \leq 2^m$

XOR

考虑从高位向低位按位确定每一个位为 $0/1$，注意到对于当前位上为 0 的那些位和当前位置为 1 的那些位如果在 p 的集合上出现交集，则必定最高位全为 0 或者全部为 1。

XOR

考虑从高位向低位按位确定每一个位为 $0/1$，注意到对于当前位上为 0 的那些位和当前位置为 1 的那些位如果在 p 的集合上出现交集，则必定最高位全为 0 或者全部为 1。

否则，如果 p 集合没有交集，则最高位上一定分别填 $0/1$ 来以此满足 p 的性质。

Set

给出一个大小为 n 的正整数集合 S，判断是否能找到一个大小不小于 $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ 的子集 T，满足不存在 $a, b \in T$ 且 $a + b \in T$，如果能则求出一组可能的解。

$n \leq 10^6$

Set

首先答案一定是能，不过证明起来比较复杂。

Set

首先答案一定是能，不过证明起来比较复杂。

考虑随机算法:

- 每次将所有的数乘上一个 x 然后对 p 取模
- 这样所有的数会几乎等概率分布在 $[0, p-1]$ 中

Set

首先答案一定是能，不过证明起来比较复杂。

考虑随机算法:

- 每次将所有的数乘上一个 x 然后对 p 取模
- 这样所有的数会几乎等概率分布在 $[0, p-1]$ 中
- 期望下分布在 $[\frac{1}{p}, \frac{2}{p}]$ 中的数的个数就是 $\frac{n}{3}$
- 多次随机找到合法方案的概率大约是 $1-(\frac{2}{3})^k$，实际效果其实更好