

DP 题选讲

Wearry

ARC074 E RGB Sequence

给你一个长度为 N 的序列和 M 组约束条件, 每组条件形如 L_i, R_i, X_i , 表示序列上的 $[L_i, R_i]$ 中恰好有 X_i 种颜色, 现在要用三种颜色给这个序列染色, 求满足所有约束的方案数.

$$N, M \leq 300$$

ARC074 E RGB Sequence

如果给定序列求区间中的颜色数, 可以对每个右端点, 记录它向左第一次出现某种颜色的位置. 按照类似的方式定义状态 $f_{i,r,g,b}$ 表示当前考虑到序列的第 i 个位置, 每种颜色最后一次出现位置分别是 r, g, b 的方案数, 然后每个把约束挂在右端点上, 就可以删去不合法的状态.

ARC074 E RGB Sequence

如果给定序列求区间中的颜色数, 可以对每个右端点, 记录它向左第一次出现某种颜色的位置. 按照类似的方式定义状态 $f_{i,r,g,b}$ 表示当前考虑到序列的第 i 个位置, 每种颜色最后一次出现位置分别是 r, g, b 的方案数, 然后每个把约束挂在右端点上, 就可以删去不合法的状态.

不难发现对于一个合法的状态, 一定有 $i = \max\{r, g, b\}$, 可以省掉一维, 复杂度 $O(N^3 + N^2M)$.

ARC086 E Smuggling Marbles

给出一棵 N 个点的有根树, 初始时其中一些点上有一个石子, 每次同时将所有石子从所在的点移动到父亲上, 根节点上的石子移动到篮子里. 如果有一个点上的石子数大于 1 则移除所有石子, 树上没有石子时结束. 求所有 2^N 种初始局面经过操作后篮子里石子的期望数量.

$$N \leq 2 \times 10^5$$

ARC086 E Smuggling Marbles

显然的一点是深度不同的点之间不会产生影响, 可以分开考虑.

ARC086 E Smuggling Marbles

显然的一点是深度不同的点之间不会产生影响, 可以分开考虑.

解法一

一条从上到下的链不会影响石子的状态, 所以可以对于每一个深度的点建虚树然后在虚树上 DP 即可, 这样虚树的总点数是 $O(N)$ 的.

ARC086 E Smuggling Marbles

显然的一点是深度不同的点之间不会产生影响, 可以分开考虑.

解法一

一条从上到下的链不会影响石子的状态, 所以可以对于每一个深度的点建虚树然后在虚树上 DP 即可, 这样虚树的总点数是 $O(N)$ 的.

解法二

可以维护子树内每个深度的信息, 然后相同深度的可以合并, 看起来是 $O(N^2)$ 的, 可以使用长链剖分的技巧优化到 $O(N)$.

ARC078 F Mole and Abandoned Mine

给出一个 N 个点 M 条边的简单无向联通图。

要求删除一些边使得 1 号点到 N 号点的简单路径唯一，求删去的最小边权和。

$$1 \leq N \leq 15, 1 \leq M \leq \frac{N(N-1)}{2}$$

ARC078 F Mole and Abandoned Mine

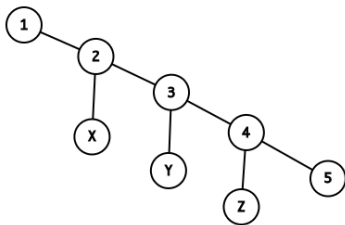
考虑满足条件的图的一般形式，发现一定基于一条 $1 \rightarrow N$ 的链。

然后为保证路径数唯一，链上两点不能通过非链上的边联通，图就会变成这样：

ARC078 F Mole and Abandoned Mine

考虑满足条件的图的一般形式，发现一定基于一条 $1 \rightarrow N$ 的链。

然后为保证路径数唯一，链上两点不能通过非链上的边联通，图就会变成这样：



ARC078 F Mole and Abandoned Mine

记 $dp(s, t)$ 表示当前在图中的点集为 s ，链上的最后一个点为 t 的最大边权。

转移有两种情况：

- 枚举一个没有访问过的点，将其作为链的终点。
- 枚举一个没有访问过的点集，将其接在当前的链的终点上。

NOI2015 寿司晚宴

给出 n , 求有多少对集合 S, T 满足 $S \cup T \subseteq [2, n], S \cap T = \emptyset$, 且 $\forall x \in S, y \in T \text{ gcd}(x, y) = 1$ 。

$$n \leq 500$$

记 $dp(S, T)$ 表示两个集合中出现的质因子集合分别为 S, T 的方案数。然后按顺序考虑每个数，可以根据当前的状态判断某个数是否能够放在 S 集合或者 T 集合中。

然而这样状态数还是太大了，还需要进一步的优化。

NOI2015 寿司晚宴

记 $dp(S, T)$ 表示两个集合中出现的质因子集合分别为 S, T 的方案数。然后按顺序考虑每个数，可以根据当前的状态判断某个数是否能够放在 S 集合或者 T 集合中。

然而这样状态数还是太大了，还需要进一步的优化。

由于在每个 $[2, n]$ 中的数里，大于 \sqrt{n} 的质因子至多只有一个，可以根据这个值将所有的数分组，每个组内部的数最大的质因子相同。

这样转移的时候保证每一组内的数最多只能选择一个，就能将状态数优化到可以接受的范围。