两道题

fuboat

2017 年 3 月 6 日

Atcoder agc009 Uninity

题目大意

给定一棵树，要求对其进行点分治并最小化分治结构的最大深度，输出这个深度 $+1$.

$n \leq 10^5$.

Atcoder agc009 Uninity

分析

问题本质是给每个节点编号，要求每两个 **编号相等**的节点之间的路径上存在节点满足其编号大于它们的节点编号，最小化最大的编号. 编号从 0 开始.

把树 DFS 一遍，遍历到一个节点时，枚举当前节点填的编号，贪心地填最小的编号，但要保证所在子树合法.

由于编号最大是 $O(\log n)$ 的，所以复杂度可以做到 $O(n \log n)$.

Atcoder agc009 Eternal Average

题目大意

你有一些数字，每次你可以选 K 个数，记这 K 个数的平均数为 x，然后删去这 K 个数，并将 x 加入这些数中，直至只剩一个数.

初始时你只有 N 个 1 和 M 个 0，要求输出最后得到的数的种数.
注意，得到的数可能是分数.

保证 $N + M - 1 \equiv 0 \pmod{K - 1}$.
$1 \leq N, M \leq 10^3, 2 \leq K \leq 10^3$.

Atcoder agc009 Eternal Average

分析

考虑到最后的数都是由原本的 1 多次取平均值后得到的结果，因此每个 1 对得到的数的贡献都可以写成 K^{-x} 的形式，其中 x 为它及由它生成的数被选中的次数.

我们记 x_i 为第 i 个 0 被选中及由它生成的数被选中的次数，y_i 表示第 i 个 1 的，含意同左.

显然有 $\sum_{i=1}^{M} K^{-x_i} + \sum_{i=1}^{N} K^{-y_i} = 1$，而 $\sum_{i=1}^{N} K^{-y_i}$ 就是最后得到的数.

证明的话，如果 $M = 0$，显然等式成立：不管怎么取平均值，结果都是 1. 对于上面的式子也可以用这种方法理解，因为 0 和 1 对等式右边都有贡献.

事实上，对于一个数 $\sum_{i=1}^{N} K^{-y_i}$，如果存在 $\sum_{i=1}^{M} K^{-x_i}$ 使得两者相加为 1，则 $\sum_{i=1}^{N} K^{-y_i}$ 一定能被表示出来.

Atcoder agc009 Eternal Average

分析

接下来思路就比较明确了：不妨将生成的数以 K 进制表示，记为 $w = \sum_{i=1}^{l} z_i \times K^{-i}$，其中 $0 \le z_{1..l} \le K-1, z_l > 0, z_{l+1..\infty} = 0$ 则只要满足以下条件即可被表示：

1. w 能被 $\sum_{i=1}^{N} K^{-y_i}$ 表示
2. $1-w$ 能被 $\sum_{i=1}^{M} K^{-x_i}$ 表示

显然 $1-w = \sum_{i=1}^{l} (K-1-z_i) \times K^{-i} + K^{-l}$.

Atcoder agc009 Eternal Average

分析

如果考虑进位的过程, 不难得出: w 能被 $\sum_{i=1}^{N} K^{-y_i}$ 表示等价于 $\sum_{i=1}^{l} z_i \leq N, \sum_{i=1}^{l} z_i \equiv N \pmod{K-1}$.

最终的结论是:

1. $\sum_{i=1}^{l} z_i \leq N$
2. $\sum_{i=1}^{l} z_i \equiv N \pmod{K-1}$
3. $\sum_{i=1}^{l}(K-1-z_i) \leq M-1$
4. $\sum_{i=1}^{l}(K-1-z_i) \equiv M-1 \pmod{K-1}$ (因为有一个 K^{-l} 已经被钦定了, 所以等式右边都是 $M-1$)
5. $z_l > 0$.

这个东西 DP + 前缀和 即可.

完

可能写得不太详细. 详见 editorial.pdf, 后面有英文题解.