

# Solution

Wearry

Stay determined!

## Refract

注意到直接按照题目要求按照  $Y$  坐标顺序转移复杂度难以优化。考虑倒着转移，那么每次  $X$  坐标的极值一定是单调变化的，于是按照  $X$  坐标排序转移， $X$  的极大值就一定是单调的，而极小值每次只需要考虑新加入的点影响到的部分，可以一边转移一边更新。

## Sequence

本题解法比较多，这里讲一下出题人的做法：

对于第一问可以根据题意暴力递归计算答案，复杂度  $O(Q \log N)$ 。

对于第二问考虑从第一问中归纳出关于  $x_N$  的性质：将  $N$  二进制分解，末尾的 0 对答案产生的影响可以快速处理，末尾的若干个连续的 1 可以合并到它们左边的那个 0 上并得到一个新的 1，合并过程中会产生  $-1$  的贡献当且仅当 1 的个数大于一且是奇数。可以数位 dp。

## Calc

考虑转化条件:

令  $d = \gcd(a, b)$ ,  $a = a'd$ ,  $b = b'd$ .

$$a'd + b'd \mid a'b'd^2 \Rightarrow a' + b' \mid a'b'd \Rightarrow a' + b' \mid d$$

令  $d = t(a' + b')$ , 则:

$$b = b'd = b'(a' + b')t$$

考虑枚举  $p = b'$ ,  $q = (a' + b')$ , 计算  $t$  的数量:

$$Ans = \sum_{p=2}^{\sqrt{N}} \sum_{q=p+1}^{2p-1} [\gcd(p, q) = 1] \left\lfloor \frac{N}{pq} \right\rfloor$$

### Algorithm 1

定义  $L_i$  为  $i$  的质因子个数. 首先枚举  $p$ , 考虑有哪些  $q$  能对答案产生贡献, 每次用  $O(L_p)$  的时间判断  $p, q$  是否互质.

复杂度为  $O(\sqrt{N} \sum_{i=2}^{\sqrt{N}} L_i) = O(N \log \log \sqrt{N})$

### Algorithm 2

枚举完  $p$  之后,  $T = \lfloor \frac{N}{p} \rfloor$  的值就确定了.

只需要考虑  $\lfloor \frac{T}{q} \rfloor$  的值即可, 考虑对这样的  $q$  进行分块, 每一块内部利用  $2^{L_p}$  的容斥计算与  $p$  互质的  $q$  的个数.

复杂度近似为  $O(\sqrt{N} \sum_{i=2}^{\sqrt{N}} 2^{L_i})$

## Complexity Analysis

分析实际运行的情况, 发现理论复杂度更高的算法二表现优于算法一, 原因是  $\lfloor \frac{T}{q} \rfloor$  的取值很少. 考虑综合两种算法的长处, 在  $q$  比较小的时候,  $\lfloor \frac{T}{q} \rfloor$  的取值比较多, 我们使用算法一,  $q$  比较大的时候使用算法二.

假设这个分界点为  $k$ , 复杂度:

$$f(k) = (k - p)L + (\left\lfloor \frac{T}{k} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{T}{2p} \right\rfloor)2^L$$

只考虑其中与  $k$  相关的部分:

$$f(k) = kL + \frac{T2^L}{k}$$

根据基本不等式, 使得  $f$  最优的  $k = \sqrt{\frac{T2^L}{L}}$ , 此时  $f(k) = 2\sqrt{T2^L L}$ . 算一下复杂度, 发现在  $N = 2^{31} - 1$  时, 复杂度大约为  $8 \times 10^7$ .