杂题选讲

xubtoi

TC SRM636 500pt

Description

有一个 $n \times m$ 大小的停车场，上面有一些空位停有汽车，有 r 辆摩托车要停进来，每个车主等概率随机选择一个没有汽车的空位然后停在里面，每个空位最多只能停一辆摩托车.

sherco 看到这种情况，想到了一个问题

当所有摩托车都停好后，对第 i 辆摩托车，设 $f(i)(f(i) \neq i)$ 表示离他欧几里得距离最近的摩托车编号，如果有距离相同的优先选所在行编号小的，行编号相同优先选列编号小的.

把 i 和 $f(i)$ 连在一起，变成一张图，问图中联通块期望数量是多少?

Constraints

$n, m \leq 20, 2 \leq r \leq n \times m$-汽车数

性质 1

Solution

- 我们考虑分析一下这个图，我们将它看成 $i \to f(i)$ 的有向边，因为只有 n 条边，那么这个图的每一个联通分量是一个以环为根的内向树.

性质 1

Solution

- 我们考虑分析一下这个图，我们将它看成 $i \to f(i)$ 的有向边，因为只有 n 条边，那么这个图的每一个联通分量是一个以环为根的内向树.
- 那么我们可以得出结论，联通分量的数量等于环的数量.

性质 1

Solution

- 我们考虑分析一下这个图，我们将它看成 $i \to f(i)$ 的有向边，因为只有 n 条边，那么这个图的每一个联通分量是一个以环为根的内向树.
- 那么我们可以得出结论，联通分量的数量等于环的数量.
- 那么题目转换为求环的数量的期望.

性质 2

- 进一步分析，在环上的所有点 x 到 $f(x)$ 的距离都是相等的

性质 2

- 进一步分析，在环上的所有点 x 到 $f(x)$ 的距离都是相等的
- 考虑环上路径 $a_{i-1} \to a_i \to a_{i+1}$，那么 a_{i+1} 的行列字典序小于 a_{i-1}，可以推断出 a_{i+3} 的行列字典序小于 a_{i+1}，我们可以在环上递推下去，发现如果环的大小大于 2 是不合法的.

性质 2

- 进一步分析，在环上的所有点 x 到 $f(x)$ 的距离都是相等的
- 考虑环上路径 $a_{i-1} \to a_i \to a_{i+1}$，那么 a_{i+1} 的行列字典序小于 a_{i-1}，可以推断出 a_{i+3} 的行列字典序小于 a_{i+1}，我们可以在环上递推下去，发现如果环的大小大于 2 是不合法的.
- 那么我们可以枚举两个点 (x_i, y_i) 和 (x_j, y_j)，计算成环的期望加起来即可.

性质 2

- 进一步分析，在环上的所有点 x 到 $f(x)$ 的距离都是相等的
- 考虑环上路径 $a_{i-1} \to a_i \to a_{i+1}$，那么 a_{i+1} 的行列字典序小于 a_{i-1}，可以推断出 a_{i+3} 的行列字典序小于 a_{i+1}，我们可以在环上递推下去，发现如果环的大小大于 2 是不合法的.
- 那么我们可以枚举两个点 (x_i, y_i) 和 (x_j, y_j)，计算成环的期望加起来即可.
- 复杂度 $\Theta(n^3m^3)$

一道不知道出处哪里的数学题

Description

给定 n, m, k，求

$$\sum_{a_1=1}^{n} \sum_{a_2=1}^{n} \cdots \sum_{a_m=1}^{n} \gcd(a_1, a_2, \cdots, a_m)^k$$

答案对 998244353 取模

Constraints

$n \le 10^9, m \le 10^9, k \le 10^5$

Solution

- 设 $d = \gcd(a_1, a_2, \cdots, a_m)$, 我们相当于要求

$$\sum_{d=1}^{n} d^k \sum_{a_1=1}^{n} \sum_{a_2=1}^{n} \cdots \sum_{a_m=1}^{n} [\gcd(a_1, a_2, \cdots, a_m) = d]$$

Solution

- 设 $d = \gcd(a_1, a_2, \cdots, a_m)$，我们相当于要求

$$\sum_{d=1}^{n} d^k \sum_{a_1=1}^{n} \sum_{a_2=1}^{n} \cdots \sum_{a_m=1}^{n} [\gcd(a_1, a_2, \cdots, a_m) = d]$$

- 将 $N = n/d, a_i = A_i \times d$，后面等于 $\sum_{A_1=1}^{N} \sum_{A_2=1}^{N} \cdots \sum_{A_m=1}^{N} [\gcd(A_1, A_2, \cdots, A_m) = 1]$

Solution

- 设 $d = \gcd(a_1, a_2, \cdots, a_m)$，我们相当于要求

$$\sum_{d=1}^{n} d^k \sum_{a_1=1}^{n} \sum_{a_2=1}^{n} \cdots \sum_{a_m=1}^{n} [\gcd(a_1, a_2, \cdots, a_m) = d]$$

- 将 $N = n/d, a_i = A_i \times d$，后面等于 $\sum_{A_1=1}^{N} \sum_{A_2=1}^{N} \cdots \sum_{A_m=1}^{N} [\gcd(A_1, A_2, \cdots, A_m) = 1]$
- 设 $f_k(n)$ 表示取值范围为 $[1, n]$，gcd 的值为 k 的方案数，显然我们可以得到

$$\sum_{k=1}^{n} f_i(n) = n^m$$

Solution

- 设 $d = \gcd(a_1, a_2, \cdots, a_m)$，我们相当于要求

$$\sum_{d=1}^{n} d^k \sum_{a_1=1}^{n} \sum_{a_2=1}^{n} \cdots \sum_{a_m=1}^{n} [\gcd(a_1, a_2, \cdots, a_m) = d]$$

- 将 $N = n/d, a_i = A_i \times d$，后面等于 $\sum_{A_1=1}^{N} \sum_{A_2=1}^{N} \cdots \sum_{A_m=1}^{N} [\gcd(A_1, A_2, \cdots, A_m) = 1]$
- 设 $f_k(n)$ 表示取值范围为 $[1, n]$，gcd 的值为 k 的方案数，显然我们可以得到

$$\sum_{k=1}^{n} f_i(n) = n^m$$

- 又因为 $f_k(n) = f_1(\lfloor \frac{n}{k} \rfloor)$，于是可以递归记忆化求解

Solution

- 设 $d = \gcd(a_1, a_2, \cdots, a_m)$，我们相当于要求

$$\sum_{d=1}^{n} d^k \sum_{a_1=1}^{n} \sum_{a_2=1}^{n} \cdots \sum_{a_m=1}^{n} [\gcd(a_1, a_2, \cdots, a_m) = d]$$

- 将 $N = n/d, a_i = A_i \times d$，后面等于 $\sum_{A_1=1}^{N} \sum_{A_2=1}^{N} \cdots \sum_{A_m=1}^{N} [\gcd(A_1, A_2, \cdots, A_m) = 1]$
- 设 $f_k(n)$ 表示取值范围为 $[1, n]$，gcd 的值为 k 的方案数，显然我们可以得到

$$\sum_{k=1}^{n} f_i(n) = n^m$$

- 又因为 $f_k(n) = f_1(\lfloor \frac{n}{k} \rfloor)$，于是可以递归记忆化求解
- 复杂度 $O(n^{\frac{3}{4}} + \sqrt{n} \log m)$

- 题目转化为求 $\sum_{d=1}^{n} d^k f(\lfloor \frac{n}{d} \rfloor)$

- 题目转化为求 $\sum_{d=1}^{n} d^k f(\lfloor \frac{n}{d} \rfloor)$
- 我们发现 $\lfloor \frac{n}{d} \rfloor$ 只有 $\sqrt{n}$ 个取值，我们就可以分段来做，对于每一段 $[l, r]$，我们就需要求 $\sum_{i=l}^{r} i^k$，记 $S(n) = \sum_{i=1}^{n} i^k$，我们就要求 $S(r) - S(l-1)$

- 题目转化为求 $\sum_{d=1}^{n} d^k f(\lfloor \frac{n}{d} \rfloor)$
- 我们发现 $\lfloor \frac{n}{d} \rfloor$ 只有 $\sqrt{n}$ 个取值，我们就可以分段来做，对于每一段 $[l,r]$，我们就需要求 $\sum_{i=l}^{r} i^k$，记 $S(n) = \sum_{i=1}^{n} i^k$，我们就要求 $S(r) - S(l-1)$
- 暴力求肯定会 T，但是我们发现 $S(n)$ 是一个 $k+1$ 次多项式，最多只有 $2 \times \sqrt{n}$ 个值需要求，于是我们只需要多项式求值即可

- 题目转化为求 $\sum_{d=1}^{n} d^k f(\lfloor \frac{n}{d} \rfloor)$
- 我们发现 $\lfloor \frac{n}{d} \rfloor$ 只有 $\sqrt{n}$ 个取值，我们就可以分段来做，对于每一段 $[l, r]$，我们就需要求 $\sum_{i=l}^{r} i^k$，记 $S(n) = \sum_{i=1}^{n} i^k$，我们就要求 $S(r) - S(l-1)$
- 暴力求肯定会 T，但是我们发现 $S(n)$ 是一个 $k+1$ 次多项式，最多只有 $2 \times \sqrt{n}$ 个值需要求，于是我们只需要多项式求值即可
- 总复杂度 $O(n^{\frac{3}{4}} + \sqrt{n} \log m + \sqrt{n} \log^2 k + k \log k)$