

# 广义容斥原理

Sengxian

武汉市第二中学

2017 年 3 月 7 日

# 引入

- ▶ 今天我要分享的东西比较简单
- ▶ 很可能大家都做过这些题了
- ▶ 然而我在做这些题的时候，发现题中所用的容斥原理并不是普通的容斥原理
- ▶ 它们都是要求『恰好具有  $K$  个性质』的方案数
- ▶ 于是我就研究了一下，发现这种东西叫『广义容斥原理』

# 容斥原理

要求计算集合  $S$  中不具有性质  $P_1, P_2, \dots, P_m$  的元素个数。

$$\left| \bigcap_{i=1}^m \overline{A_i} \right| = |S| + \sum_{s \subseteq \{1, 2, \dots, m\}, s \neq \emptyset} (-1)^{|s|} \left| \bigcap_{i \in s} A_i \right|$$

容斥原理可以计算具有 0 个性质的元素个数，但需要枚举子集，往往复杂度较高。

# 广义容斥原理

设性质  $P_1, P_2, \dots, P_m$ , 对应的集合分别是  $A_1, A_2, \dots, A_m$ , 令

$$\alpha(0) = |S|$$

$$\alpha(1) = |A_1| + |A_2| + \dots + |A_m|$$

$$\alpha(2) = |A_1 \cap A_2| + \dots + |A_{m-1} \cap A_m|$$

$$\vdots$$

$$\alpha(m) = |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_m|$$

则  $\alpha(n)$  将具有  $n+k$  个性质的元素计算了  $\binom{n+k}{n}$  次。

# 广义容斥原理

设  $\beta(k)$  恰好具有  $k$  个性质的元素个数，则：

$$\beta(k) = \sum_{k \leq i \leq m} (-1)^{i-k} \binom{i}{k} \alpha(i)$$

这就是广义容斥原理。

# 广义容斥原理

设  $\beta(k)$  恰好具有  $k$  个性质的元素个数，则：

$$\beta(k) = \sum_{k \leq i \leq m} (-1)^{i-k} \binom{i}{k} \alpha(i)$$

这就是广义容斥原理。

$\beta(k)$  也满足以下递推关系：

$$\beta(k) = \alpha(k) - \sum_{k \leq i \leq m} \binom{i}{k} \beta(i)$$

# 广义容斥原理

设  $\beta(k)$  恰好具有  $k$  个性质的元素个数, 则:

$$\beta(k) = \sum_{k \leq i \leq m} (-1)^{i-k} \binom{i}{k} \alpha(i)$$

这就是广义容斥原理。

$\beta(k)$  也满足以下递推关系:

$$\beta(k) = \alpha(k) - \sum_{k \leq i \leq m} \binom{i}{k} \beta(i)$$

证明可以考虑具有  $k+x$  个性质的元素在  $\alpha(k)$  中出现了几次。

## 举例

某校有 12 个教师，已知教数学的有 8 位，教物理的有 6 位，教化学的 5 位；教数理的 5 位，教数化的 4 位，教理化的 3 位；教数理化的 3 位。

问教其他课的有几位？只教一门课的有几位？只教两门课的有几位？

## 举例

令教数学的教师属于  $A_1$ ，教物理的属于  $A_2$ ，教化学的属于  $A_3$ 。  
则

$$\alpha(0) = 12$$

$$\alpha(1) = |A_1| + |A_2| + |A_3| = 19$$

$$\alpha(2) = |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3| = 12$$

$$\alpha(3) = |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 3$$

算出  $\beta(0) = 2, \beta(1) = 4, \beta(2) = 3$ ，即教其他课的有 2 位，只教一门课的有 4 位，只教两门课的有 3 位。

## BZOJ 3622 - 已经没有什么好害怕的了

有糖果和药片各  $n$  ( $n \leq 2000$ ) 个。

糖果  $i$  有能量  $a_i$  ( $a_i \leq 10^9$ ), 药片  $i$  有能量  $b_i$  ( $b_i \leq 10^9$ )。

你需要将药片和糖果两两配对, 求有多少种方案满足糖果比药片能量大的组数恰好有  $k$  ( $k \leq n$ ) 组。

答案对  $10^9 + 9$  取模。保证所有的能量两两不同。

# 分析

本题是求恰好具有  $k$  个性质的元素个数，我们只需求出  $\alpha(k), \alpha(k+1), \dots, \alpha(n)$  便可求出  $\beta(k)$ 。

## 分析

本题是求恰好具有  $k$  个性质的元素个数，我们只需求出  $\alpha(k), \alpha(k+1), \dots, \alpha(n)$  便可求出  $\beta(k)$ 。

我们先将糖果和药片按照能量分别从小到大排序，用单调队列求出  $\text{cnt}(i)$ ，表示有多少个药片的能量小于糖果  $i$  的能量。

设  $dp(i, j)$  为考虑前  $i$  个糖果，满足至少有  $j$  组糖果比药片能量大的方案数，剩下的  $i - j$  组如何匹配不予考虑。

## 分析

本题是求恰好具有  $k$  个性质的元素个数，我们只需求出  $\alpha(k), \alpha(k+1), \dots, \alpha(n)$  便可求出  $\beta(k)$ 。

我们先将糖果和药片按照能量分别从小到大排序，用单调队列求出  $\text{cnt}(i)$ ，表示有多少个药片的能量小于糖果  $i$  的能量。

设  $dp(i, j)$  为考虑前  $i$  个糖果，满足至少有  $j$  组糖果比药片能量大的方案数，剩下的  $i - j$  组如何匹配不予考虑。

$$dp(i, j) = dp(i - 1, j) + dp(i - 1, j - 1) \cdot \max(0, \text{cnt}_i - j + 1)$$

我们可以发现  $\alpha(k) = dp(n, k) \cdot (n - k)!$ ，按照  $\alpha(k)$  的定义，任意的  $k$  组都需要计算贡献，按照我们的转移方程，也确实如此，而我们没有考虑剩下  $n - k$  组的匹配情况，所以要乘上  $(n - k)!$ 。

# 分析

求出了  $\alpha(k), \dots, \alpha(n)$ , 用之前的公式即可求出  $\beta(k)$ :

$$\beta(k) = \sum_{k \leq i \leq m} (-1)^{i-k} \binom{i}{k} \alpha(i)$$

瓶颈在于 DP 的复杂度是  $O(n^2)$ , 所以总的复杂度为  $O(n^2)$ 。

## 分析

求出了  $\alpha(k), \dots, \alpha(n)$ , 用之前的公式即可求出  $\beta(k)$ :

$$\beta(k) = \sum_{k \leq i \leq n} (-1)^{i-k} \binom{i}{k} \alpha(i)$$

瓶颈在于 DP 的复杂度是  $O(n^2)$ , 所以总的复杂度为  $O(n^2)$ 。

本题利用动态规划的方法来求  $\alpha(k)$ , 其要点就在于, 我们只考虑满足  $k$  个性质, 剩下的随意匹配。但要注意, 我们需要将任意的  $k$  个性质的组合都考虑进来。

## BZOJ 4559 - [JLOI2016] 成绩比较

有  $n(n \leq 100)$  位同学，编号  $0, 1, \dots, n-1$ 。

有  $m(m \leq 100)$  门课程，编号  $0, 1, \dots, m-1$ 。

每一门课程的满分为  $U_i (U_i \leq 10^9)$ ，每个同学的得分可能是 1 到  $U_i$  中的一个整数。

如果在每门课上 A 获得的成绩均小于等于 B 获得的成绩，则称 A 被 B 碾压。

现在得知，0 号同学 Menci 碾压了恰好  $k$  个同学（不包括自己）。  
还知道，对于课程  $i$ ，有  $R_i$  位同学在课程  $i$  中所得的分数超过了 Menci。

求所有同学每门课程得分的情况数，对  $10^9 + 7$  取模，保证有解。

# 分析

还是用广义容斥原理，我们考虑求  $\alpha(k)$ 。

# 分析

还是用广义容斥原理，我们考虑求  $\alpha(k)$ 。

我们首先枚举是哪  $k$  个人被 Menci 碾压，由于人与人之间没有差别，所以只需乘组合数  $\binom{n-1}{k}$ 。

然后对每门课分别考虑。枚举超过 Menci 分数的  $R_i - 1$  个人，同理，也只需要乘组合数  $\binom{n-1-k}{R_i-1}$ 。则剩下  $n - k - R_i$  个人的分数不超过 Menci 的分数。再枚举 Menci 在这门课中的分数，然后乘上剩下人的分数取值情况即可。

$$\alpha(k) = \binom{n-1}{k} \prod_{i=0}^m \sum_{j=1}^{U_i} \binom{n-k-1}{R_i-1} j^{n-R_i} (U_i - j)^{R_i-1}$$

# 分析

整理一下

$$\alpha(k) = \binom{n-1}{k} \prod_{i=0}^m \binom{n-k-1}{R_i-1} \sum_{j=1}^{U_i} j^{n-R_i} (U_i - j)^{R_i-1}$$

瓶颈在于求  $\sum_{j=1}^{U_i} j^{n-R_i} (U_i - j)^{R_i-1}$ ，由于  $U_i$  高达  $10^9$ ，硬求是不行的。可以发现这是个不超过  $n$  次的多项式，我们可以考虑使用拉格朗日插值法计算出多项式的系数，即可在  $O(n^2)$  的时间内求出这个和式的值。

这个和式与  $k$  无关，对于每个  $m$  都预处理出来这个和式，复杂度为  $O(mn^2)$ 。总的复杂度为  $O(mn^2 + m^2n)$ 。

# 分析

整理一下

$$\alpha(k) = \binom{n-1}{k} \prod_{i=0}^m \binom{n-k-1}{R_i-1} \sum_{j=1}^{U_i} j^{n-R_i} (U_i - j)^{R_i-1}$$

瓶颈在于求  $\sum_{j=1}^{U_i} j^{n-R_i} (U_i - j)^{R_i-1}$ ，由于  $U_i$  高达  $10^9$ ，硬求是不行的。可以发现这是个不超过  $n$  次的多项式，我们可以考虑使用拉格朗日插值法计算出多项式的系数，即可在  $O(n^2)$  的时间内求出这个和式的值。

这个和式与  $k$  无关，对于每个  $m$  都预处理出来这个和式，复杂度为  $O(mn^2)$ 。总的复杂度为  $O(mn^2 + m^2n)$ 。

但还有更妙的方法。

## 分析

运用二项式定理展开

$$\begin{aligned} & \binom{n-1}{k} \prod_{i=0}^m \binom{n-k-1}{R_i-1} \sum_{j=1}^{U_i} j^{n-R_i} (U_i - j)^{R_i-1} \\ &= \binom{n-1}{k} \prod_{i=0}^m \binom{n-k-1}{R_i-1} \sum_{j=1}^{U_i} j^{n-R_i} \sum_{t=0}^{R_i-1} \binom{R_i-1}{t} U_i^t (-j)^{R_i-t-1} \\ &= \binom{n-1}{k} \prod_{i=0}^m \binom{n-k-1}{R_i-1} \sum_{t=0}^{R_i-1} \binom{R_i-1}{t} U_i^t (-1)^{R_i-t-1} \sum_{j=1}^{U_i} j^{n-t-1} \end{aligned}$$

于是现在问题变成了求  $1^k + 2^k + \cdots + x^k (x \leq 10^9, k \leq 100)$ , 这是个经典问题, 这里介绍一种递推的方法。

## 分析

设  $f(i) = 1^i + 2^i + \cdots + x^i$ , 那么  $f(n)$  就是答案。考虑下列式子:

$$\begin{aligned}(x+1)^{i+1} - x^{i+1} &= \binom{i+1}{0}x^0 + \cdots + \binom{i+1}{i}x^i \\ x^{i+1} - (x-1)^{i+1} &= \binom{i+1}{0}(x-1)^0 + \cdots + \binom{i+1}{i}(x-1)^i \\ &\vdots \\ 2^{i+1} - 1^{i+1} &= \binom{i+1}{0}1^0 + \cdots + \binom{i+1}{i}1^i\end{aligned}$$

第二行的技巧是把  $x$  看作  $(x-1) + 1$ , 后面的行同理。全部相加得:

$$(x+1)^{i+1} - 1 = \binom{i+1}{0}f(0) + \binom{i+1}{1}f(1) + \cdots + \binom{i+1}{i}f(i)$$

## 分析

移项，即可得到  $f(i)$  的递推公式：

$$f(i) = \frac{(x+1)^{i+1} - 1 - \binom{i+1}{0}f(0) - \binom{i+1}{1}f(1) - \cdots - \binom{i+1}{i-1}f(i-1)}{\binom{i+1}{i}}$$

用  $O(n^2)$  的时间预处理组合数，同时用  $O(n)$  的时间预处理 1 到  $n$  的逆元，就能在  $O(n^2)$  的时间内计算出  $f(1)$  到  $f(n)$  的所有值。对于每门课都预处理出  $f(1), \dots, f(n)$ ，复杂度为  $O(mn^2)$ 。与之前的做法相比，总的复杂度同样是  $O(mn^2 + m^2n)$ ，但更好写，常数更小。

# 总结

广义容斥原理应用于求『恰好具有  $K$  个性质』的元素数量，是一个重要的计数技巧。

与一般的容斥原理需要枚举子集不同，广义容斥原理需要计算  $\alpha(k)$ ，而这类题往往能通过 DP，组合数等方法来快速计算  $\alpha(k)$ ，因而达到一个较为理想的复杂度。

# 总结

广义容斥原理应用于求『恰好具有  $K$  个性质』的元素数量，是一个重要的计数技巧。

与一般的容斥原理需要枚举子集不同，广义容斥原理需要计算  $\alpha(k)$ ，而这类题往往能通过 DP，组合数等方法来快速计算  $\alpha(k)$ ，因而达到一个较为理想的复杂度。

除了分享的 2 道题之外，这里还有一些有关『广义容斥原理』的题可以供大家参考：

BZOJ 3198, BZOJ 2024, BZOJ 2839, BZOJ 4558

谢谢大家。