

广义容斥原理

Sengxian

武汉市第二中学

2017 年 3 月 7 日

引入

- ▶ 今天我要分享的东西比较简单
- ▶ 很可能大家都做过这些题了
- ▶ 然而我在做这些题的时候，发现题中所用的容斥原理并不是普通的容斥原理
- ▶ 它们都是要求『恰好具有 K 个性质』的方案数
- ▶ 于是我就研究了一下，发现这种东西叫『广义容斥原理』

容斥原理

要求计算集合 S 中不具有性质 P_1, P_2, \dots, P_m 的元素个数。

$$\left| \bigcap_{i=1}^m \overline{A}_i \right| = |S| + \sum_{s \subseteq \{1, 2, \dots, m\}, s \neq \emptyset} (-1)^{|s|} \left| \bigcap_{i \in s} A_i \right|$$

容斥原理可以计算具有 0 个性质的元素个数，但需要枚举子集，往往复杂度较高。

广义容斥原理

设性质 P_1, P_2, \dots, P_m , 对应的集合分别是 A_1, A_2, \dots, A_m , 令

$$\alpha(0) = |S|$$

$$\alpha(1) = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_m|$$

$$\alpha(2) = |A_1 \cap A_2| + \cdots + |A_{m-1} \cap A_m|$$

⋮

$$\alpha(m) = |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_m|$$

则 $\alpha(n)$ 将具有 $n+k$ 个性质的元素计算了 $\binom{n+k}{n}$ 次。

广义容斥原理

设 $\beta(k)$ 恰好具有 k 个性质的元素个数，则：

$$\beta(k) = \sum_{k \leq i \leq m} (-1)^{i-k} \binom{i}{k} \alpha(i)$$

这就是广义容斥原理。

广义容斥原理

设 $\beta(k)$ 恰好具有 k 个性质的元素个数，则：

$$\beta(k) = \sum_{k \leq i \leq m} (-1)^{i-k} \binom{i}{k} \alpha(i)$$

这就是广义容斥原理。

$\beta(k)$ 也满足以下递推关系：

$$\beta(k) = \alpha(k) - \sum_{k \leq i \leq m} \binom{i}{k} \beta(k)$$

广义容斥原理

设 $\beta(k)$ 恰好具有 k 个性质的元素个数，则：

$$\beta(k) = \sum_{k \leq i \leq m} (-1)^{i-k} \binom{i}{k} \alpha(i)$$

这就是广义容斥原理。

$\beta(k)$ 也满足以下递推关系：

$$\beta(k) = \alpha(k) - \sum_{k \leq i \leq m} \binom{i}{k} \beta(k)$$

证明可以考虑具有 $k+x$ 个性质的元素在 $\alpha(k)$ 中出现了几次。

举例

某校有 12 个教师，已知教数学的有 8 位，教物理的有 6 位，教化学的 5 位；教数理的 5 位，教数化的 4 位，教理化的 3 位；教数理化的 3 位。

问教其他课的有几位？只教一门课的有几位？只教两门课的有几位？

举例

令教数学的教师属于 A_1 , 教物理的属于 A_2 , 教化学的属于 A_3 。
则

$$\alpha(0) = 12$$

$$\alpha(1) = |A_1| + |A_2| + |A_3| = 19$$

$$\alpha(2) = |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3| = 12$$

$$\alpha(3) = |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 3$$

算出 $\beta(0) = 2, \beta(1) = 4, \beta(2) = 3$, 即教其他课的有 2 位, 只教
一门课的有 4 位, 只教两门课的有 3 位。

BZOJ 3622 - 已经没有什么好害怕的了

有糖果和药片各 $n(n \leq 2000)$ 个。

糖果 i 有能量 $a_i(a_i \leq 10^9)$, 药片 i 有能量 $b_i(b_i \leq 10^9)$ 。

你需要将药片和糖果两两配对, 求有多少种方案满足糖果比药片能量大的组数恰好有 $k(k \leq n)$ 组。

答案对 $10^9 + 9$ 取模。保证所有的能量两两不同。

分析

本题是求恰好具有 k 个性质的元素个数，我们只需求出 $\alpha(k), \alpha(k+1), \dots, \alpha(n)$ 便可求出 $\beta(k)$ 。

分析

本题是求恰好具有 k 个性质的元素个数，我们只需求出 $\alpha(k), \alpha(k+1), \dots, \alpha(n)$ 便可求出 $\beta(k)$ 。

我们先将糖果和药片按照能量分别从小到大排序，用单调队列求出 $\text{cnt}(i)$ ，表示有多少个药片的能量小于糖果 i 的能量。

设 $dp(i, j)$ 为考虑前 i 个糖果，满足至少有 j 组糖果比药片能量大的方案数，剩下的 $i - j$ 组如何匹配不予考虑。

分析

本题是求恰好具有 k 个性质的元素个数，我们只需求出 $\alpha(k), \alpha(k+1), \dots, \alpha(n)$ 便可求出 $\beta(k)$ 。

我们先将糖果和药片按照能量分别从小到大排序，用单调队列求出 $\text{cnt}(i)$ ，表示有多少个药片的能量小于糖果 i 的能量。

设 $dp(i, j)$ 为考虑前 i 个糖果，满足至少有 j 组糖果比药片能量大的方案数，剩下的 $i - j$ 组如何匹配不予考虑。

$$dp(i, j) = dp(i-1, j) + dp(i-1, j-1) \cdot \max(0, \text{cnt}_i - j + 1)$$

我们可以发现 $\alpha(k) = dp(n, k) \cdot (n-k)!$ ，按照 $\alpha(k)$ 的定义，任意的 k 组都需要计算贡献，按照我们的转移方程，也确实如此，而我们没有考虑剩下 $n-k$ 组的匹配情况，所以要乘上 $(n-k)!$ 。

分析

求出了 $\alpha(k), \dots, \alpha(n)$, 用之前的公式即可求出 $\beta(k)$:

$$\beta(k) = \sum_{k \leq i \leq m} (-1)^{i-k} \binom{i}{k} \alpha(i)$$

瓶颈在于 DP 的复杂度是 $O(n^2)$, 所以总的复杂度为 $O(n^2)$ 。

分析

求出了 $\alpha(k), \dots, \alpha(n)$, 用之前的公式即可求出 $\beta(k)$:

$$\beta(k) = \sum_{k \leq i \leq m} (-1)^{i-k} \binom{i}{k} \alpha(i)$$

瓶颈在于 DP 的复杂度是 $O(n^2)$, 所以总的复杂度为 $O(n^2)$ 。

本题利用动态规划的方法来求 $\alpha(k)$, 其要点就在于, 我们只考虑满足 k 个性质, 剩下的随意匹配。但要注意, 我们需要将任意的 k 个性质的组合都考虑进来。

BZOJ 4559 - [JLOI2016] 成绩比较

有 $n(n \leq 100)$ 位同学，编号 $0, 1, \dots, n - 1$ 。

有 $m(m \leq 100)$ 门课程，编号 $0, 1, \dots, m - 1$ 。

每一门课程的满分为 $U_i (U_i \leq 10^9)$ ，每个同学的得分可能是 1 到 U_i 中的一个整数。

如果在每门课上 A 获得的成绩均小于等于 B 获得的成绩，则称 A 被 B 碾压。

现在得知，0 号同学 Menci 碾压了恰好 k 个同学（不包括自己）。

还知道，对于课程 i ，有 R_i 位同学在课程 i 中所得的分数超过了 Menci。

求所有同学每门课程得分的情况数，对 $10^9 + 7$ 取模，保证有解。

分析

还是用广义容斥原理，我们考虑求 $\alpha(k)$ 。

分析

还是用广义容斥原理，我们考虑求 $\alpha(k)$ 。

我们首先枚举是哪 k 个人被 Menci 碾压，由于人与人之间没有差别，所以只需乘组合数 $\binom{n-1}{k}$ 。

然后对每门课分别考虑。枚举超过 Menci 分数的 $R_i - 1$ 个人，同理，也需要乘组合数 $\binom{n-1-k}{R_i-1}$ 。则剩下 $n - k - R_i$ 个人的分数不超过 Menci 的分数。再枚举 Menci 在这门课中的分数，然后乘上剩下人的分数取值情况即可。

$$\alpha(k) = \binom{n-1}{k} \prod_{i=0}^m \sum_{j=1}^{U_i} \binom{n-k-1}{R_i-1} j^{n-R_i} (U_i - j)^{R_i-1}$$

分析

整理一下

$$\alpha(k) = \binom{n-1}{k} \prod_{i=0}^m \binom{n-k-1}{R_i-1} \sum_{j=1}^{U_i} j^{n-R_i} (U_i - j)^{R_i-1}$$

瓶颈在于求 $\sum_{j=1}^{U_i} j^{n-R_i} (U_i - j)^{R_i-1}$, 由于 U_i 高达 10^9 , 硬求是不行的。可以发现这是个不超过 n 次的多项式, 我们可以考虑使用拉格朗日插值法计算出多项式的系数, 即可在 $O(n^2)$ 的时间内求出这个和式的值。

这个和式与 k 无关, 对于每个 m 都预处理出来这个和式, 复杂度为 $O(mn^2)$ 。总的复杂度为 $O(mn^2 + m^2 n)$ 。

分析

整理一下

$$\alpha(k) = \binom{n-1}{k} \prod_{i=0}^m \binom{n-k-1}{R_i-1} \sum_{j=1}^{U_i} j^{n-R_i} (U_i - j)^{R_i-1}$$

瓶颈在于求 $\sum_{j=1}^{U_i} j^{n-R_i} (U_i - j)^{R_i-1}$, 由于 U_i 高达 10^9 , 硬求是不行的。可以发现这是个不超过 n 次的多项式, 我们可以考虑使用拉格朗日插值法计算出多项式的系数, 即可在 $O(n^2)$ 的时间内求出这个和式的值。

这个和式与 k 无关, 对于每个 m 都预处理出来这个和式, 复杂度为 $O(mn^2)$ 。总的复杂度为 $O(mn^2 + m^2 n)$ 。

但还有更妙的方法。

分析

运用二项式定理展开

$$\begin{aligned} & \binom{n-1}{k} \prod_{i=0}^m \binom{n-k-1}{R_i-1} \sum_{j=1}^{U_i} j^{n-R_i} (U_i - j)^{R_i-1} \\ &= \binom{n-1}{k} \prod_{i=0}^m \binom{n-k-1}{R_i-1} \sum_{j=1}^{U_i} j^{n-R_i} \sum_{t=0}^{R_i-1} \binom{R_i-1}{t} U_i^t (-j)^{R_i-t-1} \\ &= \binom{n-1}{k} \prod_{i=0}^m \binom{n-k-1}{R_i-1} \sum_{t=0}^{R_i-1} \binom{R_i-1}{t} U_i^t (-1)^{R_i-t-1} \sum_{j=1}^{U_i} j^{n-t-1} \end{aligned}$$

于是现在问题变成了求 $1^k + 2^k + \cdots + x^k (x \leq 10^9, k \leq 100)$, 这是个经典问题, 这里介绍一种递推的方法。

分析

设 $f(i) = 1^i + 2^i + \cdots + x^n$, 那么 $f(n)$ 就是答案。考虑下列式子：

$$(x+1)^{i+1} - x^{i+1} = \binom{i+1}{0} x^0 + \cdots + \binom{i+1}{i} x^i$$

$$x^{i+1} - (x-1)^{i+1} = \binom{i+1}{0} (x-1)^0 + \cdots + \binom{i+1}{i} (x-1)^i$$

⋮

$$2^{i+1} - 1^{i+1} = \binom{i+1}{0} 1^0 + \cdots + \binom{i+1}{i} 1^i$$

第二行的技巧是把 x 看作 $(x-1)+1$, 后面的行同理。全部相加得：

$$(x+1)^{i+1} - 1 = \binom{i+1}{0} f(0) + \binom{i+1}{1} f(1) + \cdots + \binom{i+1}{i} f(i)$$

分析

移项，即可得到 $f(i)$ 的递推公式：

$$f(i) = \frac{(x+1)^{i+1} - 1 - \binom{i+1}{0}f(0) - \binom{i+1}{1}f(1) - \cdots - \binom{i+1}{i-1}f(i-1)}{\binom{i+1}{i}}$$

用 $O(n^2)$ 的时间预处理组合数，同时用 $O(n)$ 的时间预处理 1 到 n 的逆元，就能在 $O(n^2)$ 的时间内计算出 $f(1)$ 到 $f(n)$ 的所有值。对于每门课都预处理出 $f(1), \dots, f(n)$ ，复杂度为 $O(mn^2)$ 。与之前的做法相比，总的复杂度同样是 $O(mn^2 + m^2n)$ ，但更好写，常数更小。

总结

广义容斥原理应用于求『恰好具有 K 个性质』的元素数量，是一个重要的计数技巧。

与一般的容斥原理需要枚举子集不同，广义容斥原理需要计算 $\alpha(k)$ ，而这类题往往能通过 DP，组合数等方法来快速计算 $\alpha(k)$ ，因而达到一个较为理想的复杂度。

总结

广义容斥原理应用于求『恰好具有 K 个性质』的元素数量，是一个重要的计数技巧。

与一般的容斥原理需要枚举子集不同，广义容斥原理需要计算 $\alpha(k)$ ，而这类题往往能通过 DP，组合数等方法来快速计算 $\alpha(k)$ ，因而达到一个较为理想的复杂度。

除了分享的 2 道题之外，这里还有一些有关『广义容斥原理』的题可以供大家参考：

BZOJ 3198, BZOJ 2024, BZOJ 2839, BZOJ 4558

谢谢大家。