Some Tricks in OI

Wearry

目录

生成函数相关

计数技巧

- $$x^{\underline{n}} = nx^{\underline{n-1}} + (x-1)^{\underline{n}}$$

- 对于无标号对象的计数，如果能够快速和有标号的情形相互转化，转化成对有标号对象计数可能更加简便。

- 求满足某个条件的对象的数量的 k 次方的和的问题，可以转化成每 i 个对象同时合法会产生 $\left\{ {k \atop i} \right\} i!$ 的贡献。

实现细节

- 使用分治 FFT 求函数值时，如果递推式里有这个函数的幂的形式，要考虑每一项的计算次数来确定系数。

容斥应用

- Stirling 公式可以从等价类的角度考虑并化成容斥形式，例：

  > 计算 $n \times m$ 大小的矩阵，每一个元素的取值在 $[1, C]$ 之间，且任意两行两列不等价的方案数。

  首先通过下降幂保证任意两行不等价，令：

  $f(i)$ 表示所有列等价类个数小于等于 i 的方案

  $g(i)$ 表示所有列等价类个数恰好等于 i 的方案

  $$\begin{aligned} f(x) &= (C^x)^{\underline{n}} \\ &= \sum_{i=1}^{x} \left\{ {x \atop i} \right\} g(i) \end{aligned}$$

  可以 Stirling 反演：

$$g(x) = \sum_{i=1}^{x} (-1)^{x-i} \begin{bmatrix} x \\ i \end{bmatrix} f(i)$$

数论相关

拓展 Euler 定理：

$$a^x \equiv a^{\min(x, x \bmod \varphi(p) + \varphi(p))} \pmod{\text{p}}$$

本质：

$$a^{\varphi(p)} \equiv a^{2\varphi(p)} \pmod{\text{p}}$$

证明：

设 $p = \text{m1m2}$，其中 m1 中包含所有 a，p 的公共质因子。

显然有 $\gcd(\text{m1}, \text{m2}) = \gcd(a, \text{m2}) = 1$，则 $a^{\varphi(\text{m1m2})} \equiv 1 \pmod{\text{m2}}$。

考虑 $a^{\varphi(\text{m1m2})} \bmod \text{m1}$：对于任意质因子 $p \mid \text{m1}$，设其在 m1 中的指数为 exp，在左式中其指数最小为 $(p-1) \times p^{exp-1}$ 显然大于 exp，所以有：

$$\begin{aligned} a^{\varphi(p)} \equiv a^{2\varphi(p)} \equiv 1 \pmod{\text{m1}} \\ a^{\varphi(p)} \equiv a^{2\varphi(p)} \equiv 0 \pmod{\text{m2}} \end{aligned}$$

由 CRT，$a^{\varphi(p)} \equiv a^{2\varphi(p)} \pmod{\text{p}}$。