两道概率题

2017-07-17 21:01:11

玛里苟斯

Description

> 给你一个大小为 N 的可重集合, 求该集合子集异或和的 K 次方的期望, 保证答案不超过 2^{64}.

$N \leq 100000, K \leq 5, A_i \leq 10^9$

Solution

$K = 1$ 时满足期望的线性性, 可以对每一个二进制位分开计算答案. 不难发现每一个二进制位变成 1 的概率恰好为 $\frac{1}{2}$ (集合的奇数和偶数大小的子集数相同).

$K = 2$ 时要求的是期望的平方, 即:

$$\sum_{i=0}^{32}\sum_{j=0}^{32} b_i b_j 2^{i+j}$$

其中 b_i 表示期望二进制第 i 位的值, 枚举两个二进制位再求一下两个位置同时取到 1 的概率即可.

$K \geq 3$ 时由于答案不超过 2^{64}, 所以集合内的数也不会很大, 直接用线性基处理.

主旋律

Description

求 N 个点, M 条边的有向图有多少生成子图满足整个图是强联通的.

$N \leq 15, M \leq N(N-1)$

Solution

这题一眼看上去不太好做, 不妨从问题的反面来考虑. 首先一个非强联通的图缩掉 Scc 之后会得到若干个 DAG. 如果知道 Scc 的划分情况, 计算 DAG 的数量就变成一个经典问题了:

$$E(S,T) = |\{(u,v) \in E | u \in S, v \in T)\}|$$

$$F(S) = \sum_{T \subset S, T \neq \varnothing} (-1)^{|T|-1} \times 2^{E(T,S-T)} F(T)$$

然而感觉枚举 Scc 划分更不可做. 先不考虑 Scc 如何划分, 考虑哪一些点集构成多少个 Scc. 假设 $G_K(T)$ 表示 T 集合分成 K 个 Scc 的方案数, 类似上面式子地, 有:

$$F(S) = \sum_{T \subset S, T \neq \varnothing} \sum_{K=1}^{|T|} (-1)^{K-1} \times G_K(T) \times 2^{E(T,S-T)+E(S-T,S-T)}$$

$$DP(S) = 2^{E(S,S)} - F(S)$$

实际上只需要求将某个集合分成奇数个 Scc 与偶数个 Scc 的方案数之差 $P(S)$:

$$P(S) = DP(S) + \sum_{T \subset S, u \in T} -DP(T) \times P(S-T)$$

其中 $u \in T$ 避免重复计数.

这样加上一些预处理的技巧可以做到 $O(3^n)$.