Atcoder 选做

2017.6.30

其实是总结一下比赛中遇到的好题, 然后瞎做了几场 AGC 的题目练习, 感觉还比较有意思.

AGC

AGC002 F Leftmost Ball

> 给你 N 种不同颜色的球, 每种有 K 个, 现在你可以将球任意排列, 但最终的序列中每种颜色的第一个出现位置要被染成 0 颜色, 求能够得到的本质不同的序列数, 对 10^9+7 取模.

$N, K \le 2000$

这题正着处理没有什么思路, 但是如果从右往左来会比较好考虑. 我们可以记 $f(i,j)$ 表示当前从右往左填剩下 i 个 0 颜色的球, 还剩下 j 种颜色没有放的方案数. 那么每一次的决策就包括放入一个 0 颜色的球以及添加一种颜色的 $k-1$ 个球:

$$
\begin{aligned}
&f(i-1,j) \leftarrow f(i,j) \mid [i>j] \\
&f(i,j-1) \leftarrow f(i,j) \times \binom{n-i+(n-j)\times(k-1)+k-2}{k-2}
\end{aligned}
$$

后面那个公式是可重集, 还有最后的答案要乘以 $n!$.

AGC005 D ~K Perm Counting

> 求长度为 N 的排列中, 满足对任意的 i, 都有 $|a_i - i| \neq K$ 的排列数量.

$1 \leq K < N \leq 2000$

考虑容斥, 计算至少有 i 个位置不合法的方案数. 由于 K 是确定的, 那么所有不合法的方案可以看成是完全二分图匹配中出现了一条 $(i, i+k)$ 的边或者一条 $(i, i-k)$ 的边.

将这样的边在画出来就是若干条交叉路径. 观察到这样的交叉路径不相交, 所以可以拆开拼成一个序列, 然后在序列上 dp 即可.

AGC015 D A or...or B Problem

> 求在 $[A, B]$ 中任意选出一个非空整数集合的元素位或和有多少种不同的答案.

$1 \leq A \leq B \leq 2^{60}$

先考虑一些比较特殊的情况 (以下默认 A, B 的位数相同):

- 当 B 可以表示为 $2^k - 1$ 时, 这个位或和恰好取遍 $[A, B]$ 之间的所有整数.
- 当 A 可以表示为 2^k 时, 这个位或和在区间 $[A, A + 2^{t+1}) \mid t < log_2 A$ 中, 其中 t 是最大的满足 B 的第 t 位为 1 的数.

那么一般情况下这些条件有什么用呢?

我们考虑找到最大的一个 T, 使得 B 的第 T 位为 1 且 A 的第 T 位不为 1, 记 $K = 2^T$. 当选择的数的集合在 $[A, K)$ 以及在 $[K, B]$ 中的情况可以直接用上述结论.

接下来考虑同时选取两个集合中的数可能会产生的答案. 因为这时小于 K 的部分是没有贡献的, 所以直接将 $[A, K)$ 中的所有答案取出. 不难发现 $[K, B]$ 中取任意个都与只使用 K 没有区别, 那么这时候的范围是 $[K + A, 2 \times K - 1]$, 注意减去重复贡献.

AGC015 F Kenus the Ancient Greek

Q 组询问, 每组询问的形式为 A, B, 表示求 $x \in [1, A], y \in [1, B]$ 的 $g(x, y)$ 的最大值, 及最大值的方案数, 其中:

$$g(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{y = 0} \\ g(y,x), & \text{x > y} \\ g(y \; mod \; x, x) + 1, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$1 \le Q \le 3 \times 10^5$, $1 \le A, B \le 10^{18}$

以下无特殊说明, 均默认所有 $x < y, A < B$

先考虑第一问, 如果我们由一个特定的 (x, y), 从小到大地构造使得 $g(x, y)$ 的值不断地变大, 那么如何构造使得这个值最大呢?

对于所有 (x', y') 满足 $g(x', y') = g(x, y) + 1$, 显然有:

$$(x', y') \in \{(y, x + ky) \mid k \in Z^+\}$$

同时, 为了使得这个过程尽可能的多次进行, 我们从 $(0, 1)$ 出发, 每次取 $k = 1$. 发现这样生成了一组 $Fibonacci$ 数列, 这里 $Fibonacci$ 数列从 0 开始标号.

那么第一问的答案就是求满足 $Fib_k \le A$, $Fib_{k+1} \le B$ 的最大的 k. 同时, 这样的数对是满足 $g(x, y) = k$ 的最小的数对.

接下来考虑统计方案数. 首先, 对于一组询问我们只需考虑其中**与最优解相关**的 (x, y).

考虑所有最优的 (x, y) 会具有的性质:

- $x \ge Fib_k$, $y \ge Fib_{k+1}$
- 不存在一组 $(x' < x, y' < y)$, 使得 $g(x', y') > g(x, y)$

然而这样的 (x, y) 并不一定是最优的.

我们接着分析所有在最优解的 g 的计算路径上的数对 (x, y) 的性质: 不难发现, 经过一次变化后得到的 (x', y'), 一定满足:

- $g(x', y') = k - 1$
- $x' \geq Fib_{k-1}, y' \geq Fib_k$
- $y' \leq Fib_{k+1} + Fib_{k-2}$

后面条件的解释: 若 $y' > Fib_{k+1} + Fib_{k-2}$, 则

$$(x, y) = (y' > Fib_{k+1} + Fib_{k-2} > Fib_{k+1}, x' + py' \geq x' + y' > Fib_{k+2})$$

则 (x, y) 不再满足上述最优性质 2, 矛盾.

同时每次向下一步进行构造的时候只有 (Fib_k, Fib_{k+1}) 可能取到 $p = 2$ 所以这样的数对个数是 $O(k)$ 的. 所以我们预处理所有的这样的数对, 然后用除法算下答案就好了.

复杂度 $O(log^2 MAX + QlogMAX)$.

ARC

ARC 的题目主要来源是打过的几场比赛, 暂时不多.

ARC074 E RGB Sequence

> 给你一个长度为 N 的序列和 M 组约束条件, 每组条件形如 L_i, R_i, X_i, 表示序列上的 $[L_i, R_i]$ 中恰好有 X_i 种颜色, 现在要你用三种颜色给这个序列染色, 求满足所有约束的方案数.

$1 \leq N, M \leq 300$

dp 的思路应该比较显然, 然而普通的状态表示不太好处理. 我们记 $dp_{r,g,b}$ 表示三种颜色的球最后一次出现的位置分别是 r, g, b 时的方案数.

然后考虑状态的合法性, 可以把条件存在 R_i 的位置. 当选择一个状态时, 考虑这个状态的最末位的所有约束即可.

ARC077 F SS

定义一个字符串为偶的, 当且仅当这个字符串能够被分成两个完全相同的字符串.

定义函数 $f(s)$, 其中 $s, f(s)$ 均是字符串,$f(s)$ 为在字符串 s 后添加非空的字符满足新串为偶且长度最小的串. 现在给你串 s(初始为偶的), 求 $f^{10^{100}}(s)[L,R]$ 中各个字母的出现次数. $1 \le |S| \le 2 \times 10^5$ $1 \le L \le R \le 10^{18}$

首先对于一个给定的 s, 其 $f(s)$ 必定唯一. 考虑每次最少加一个字符,$f^{10^{100}}(s)$ 就等价于一个长度无穷的字符串. 这个答案的形式显然可以前缀和, 又因为 s 在变化过程中始终是偶的, 实际上我们只需要关注左半部分的字符.

我们从最简单的一次操作来考虑. 记初始的字符串 s 为 SS, 记一次变化之后左边的部分为 ST, 那么得到的新串就是 $STST$. 要使得加的字符长度最小, 就要在 S 中找到最长前后缀匹配长度, 这时 T 就是 S 去掉最长匹配后缀所得.

我们发现, 每次操作都等价于找到前后缀匹配最大长度 (当然要小于 $|S|$), 然后将剩下部分的前缀 T 添加到 S 的末尾.

- 当 $|T| \mid |S|$ 时,$|S|$ 有长为 $|T|$ 的最小周期, 每次加入的 $|T|$ 相同.
- 当 $|T| \nmid |S|$ 时, 我们~~通过打表~~发现, 这样的 T 是在有规律地变化的, 因为每次加入 T 之后的串前后缀最长匹配一定是 $|T|$, 否则的话, 上一步中最长匹配的性质就不一定会满足.

然后我们得到了一个 $Fibonacci$ 数列? 直接暴力算就好了... 实际上第一种情况也可以直接算, 因为整个序列都是 T 的若干次重复得到的.