# Введение

Значительная часть работы инженера-конструктора связана с проектированием силовых (несущих) конструкций. Силовые конструкции воспринимают, передают и уравновешивают все нагрузки, приходящиеся на разрабатываемый технический объект, во многом обусловливая его работоспособность, надежность и эффективность. Причем требования к проектируемым конструкциям, наряду с ограничениями функционального характера, определяются необходимостью снижения их массы и материалоемкости. Так, например, при оптимизации конструкций аэрокосмического назначения масса, как правило, выбирается в качестве основной целевой функции.

Под структурой (силовой схемой) конструкции принято понимать информацию о типе, расположении и взаимной связи основных силовых элементов, определяющих генеральные пути передачи внутренних усилий в конструкции.

От выбранной структуры в существенной степени зависит масса проектируемой силовой конструкции. В том случае, если структура изначально выбрана неудачно, то даже тщательная конструкторская проработка и оптимизация параметров не поможет получить работоспособную конструкцию минимальной массы. Поэтому разумный выбор структуры на начальном этапе проектирования – залог получения эффективной конструкции летательного аппарата.

Для сравнения различных силовых схем между собой необходим специальный критерий, например, силовой вес G. Для стержневых систем силовой вес конструкции равен сумме, составленной из произведения модуля внутренних осевых сил, действующих в каждом из стержней, на длину стержня.

Величина силового веса зависит в основном от выбранной схемы передачи усилий и является достаточно эффективным критерием для сравнения вариантов конструкции между собой.

Создаваемый онлайн-тренажер предназначен для приобретения и развития практических умений проектирования силовых механических конструкций, оптимальных в весовом отношении. Тренажер ориентирован на развитие инженерной интуиции и конструкторского «чутья» по выбору рационального способа передачи усилий в конструкциях.

Тренажер предназначен для использования в учебном курсе «Строительная механика летательных аппаратов» для обучающихся по направлениям подготовки 24.03.01 и 24.05.01.

# Основные сведения о расчете стержневых систем

В расчётах на прочность реальная конструкция заменяется некоторой расчётной схемой (моделью) путём игнорирования второстепенных свойств системы и выделения наиболее существенных особенностей, определяющих силовую работу конструкции. Для стержневых систем простейшими расчётными схемами служат фермы.

*Фермой называется расчётная схема такой стержневой системы, работоспособность которой обеспечивается в предположении о шарнирном соединении стержней в узлах.* Каждый стержень заменяется в расчётной схеме прямолинейным отрезком, представляющим его геометрическую ось. Концы стержней, образующие узел, считаются сходящимися в одной точке и соединяются посредством идеальных шарниров. Принимается что внешние силы приложены только в узловых точках. При таких ограничениях в стержнях будут возникать только осевые силы.

Стержневая система может быть закреплена в пространстве посредством опорных устройств, устраняющих одну или две кинематические степени свободы узлы.

Рассмотрим плоскую ферму, состоящую из трех стержней, каждый из которых одним концом закреплен неподвижно, а другим связан шарнирно с остальными стержнями (Рисунок 1). К свободному узлу приложена горизонтальная сила . Площади сечений и модули упругости всех стержней примем одинаковыми ().

Отнесем конструкцию к декартовой системе координат и пронумеруем узловые точки. Вектор перемещений каждого узла будем характеризовать двумя компонентам – по соответствующим осям координат. Пронумеруем последовательно компоненты вектора перемещений (Рисунок 2).

Рисунок – Схема стержневой системы

4

Рисунок – Нумерация узловых перемещений

Запишем вектор узловых перемещений стержневой системы (здесь и далее фигурными скобками обозначается вектор-столбец)

Введем аналогичный по структуре вектор внешних сил

здесь суть каждого значения – компонент вектора внешних сил, приложенных в узлы системы. При отсутствии в узле внешней силы по заданному направлению подразумевается, что компонент равен нулю.

Из теории матричного метода перемещений известно соотношение, связывающее узловые перемещения и внешние силы, в виде

(1)

где – матрица жесткости фермы, получаемая суперпозицией матриц жесткости отдельных стержней.

Часть узловых перемещений уже известна (компоненты равны нулю, поскольку соответствуют перемещениям узлов 1, 3 и 4 в направлении опорных устройств), но этим перемещениям соответствуют неизвестные внешние силы (реакции в опорных устройствах).

Произведем перестановку компонент в векторах и по следующему правилу – вначале перечислим все неизвестные перемещения в порядке возрастания индекса, затем все известные величины в таком же порядке. И выделим все неизвестные перемещения в вектор , а известные перемещения – в вектор :

Аналогично поступим с вектором внешних сил

Из исходных данных известны внешние силы и , а компоненты вектора соответствуют неизвестным реакциям опорных устройств.

Учитывая блочное представление векторов и представим матричное равенство (1) в блочной форме

которое распадается на два отдельных уравнения (в силу):

Решая первое уравнение относительно , определим узловые перемещения стержневой системы. Формально решение можно получить

где – сокращённая матрица жесткости системы.

Затем из второго уравнения, при необходимости, могут быть найдены реакции в опорных устройствах

Согласно структуре векторов и сокращённая матрица жесткости для рассматриваемой задачи имеет вид

где каждый компонент вычисляется по формуле

Рассмотрим построение матрицы жесткости отдельного стержня. В местной системе координат, связанной с его продольной осью, перемещение каждого узла характеризуется одной компонентой. Примем, что местная ось направлена от узла с меньшим номером к узлу с большим номером (Рисунок 3).

Рисунок – Перемещения узлов в местной системе координат

Векторы узловых перемещений и сил для стержня в местной системе координат имеют вид

а матрица жесткости стержня в местной системе координат записывается как

здесь –длина стержня .

Для получения матрицы жесткости стержня в общей системе координат необходимо установить связь между перемещениями узлов в общей и местной системе координат.

В общей системе координат перемещения стержня характеризуется перемещениями концевых узлов, и матрица перемещений стержня может быть записана в виде .

Из геометрических соображений можно записать связь между перемещениями концов стержня в местной и общей системах координат:

где , – суть косинусы углов между осью местной системы координат и осями и общей системы координат конструкции.

Связь между перемещениями в общей и местной системе удобнее представить в матричной форме с помощью матрицы преобразования координат :

Матрица преобразований координат составлена из направляющих косинусов и имеет следующую структуру

При помощи матрицы преобразования координат становиться возможно вычислить матрицу жесткости стержня в общей системе координат по его матрице жесткости в местной системе координат

а с учётом информации о структуре матриц и можно упростить выражение

Постоим матрицы жесткости стержней, составляющих ферменную конструкцию (Рисунок 1).

Координаты узлов представлены в таблице

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| № узла |  |  |
| 1 | 0 | 0 |
| 2 |  |  |
| 3 |  | 0 |
| 4 |  | 0 |

Информация по стержням в таблице

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № стержня | Узел начала стержня | Узел конца стержня | Длина стержня |  |  |
| 1-2 | 1 | 2 |  |  |  |
| 2-3 | 2 | 3 |  | 0 | -1 |
| 2-4 | 2 | 4 |  |  |  |

Вычислим матрицы жесткости всех стержней в общей системе координат:

В этих выражениях снизу и справа от матрицы показаны номера перемещений узлов начала и конца стержня.

Построим сокращённую матрицу жесткости . Для этого просуммируем соответствующие элементы матриц жесткости отдельных стержней, соответствующих перемещениям с индексами 3 и 4:

Система уравнений примет вид

Решая систему уравнений, находим

Отрицательные знаки в этих формулах указывают, что узел 2 перемещается в отрицательных направлениях осей и .

Для нахождения усилий в стержнях необходимо построить векторы узловых перемещений каждого стержня в общей системе координат, а затем преобразовать их в местную систему координат:

Используя формулу преобразования перемещений в местную систему координат получим

Далее по формуле можно вычислить узловые силы, действующие на каждый стержень вдоль его оси

Внутренняя осевая сила в каждом стержне равна:

(стержень сжат)

(стержень сжат)

(стержень растянут)

Силовой вес конструкции