

Aufgabe 1:

$$f(x) = 3xe^{-4x}$$

Funktion und Ableitung:

$$\begin{aligned}f(x) &= 3xe^{-4x} \\f'(x) &= -12xe^{-4x} + 3e^{-4x} \\f''(x) &= 24(2x - 1)e^{-4x} \\f'''(x) &= 48(-4x + 3)e^{-4x}\end{aligned}$$

Verhalten im Unendlichen:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= -\infty \\ \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= 0\end{aligned}$$

Nullstellen:

$$\begin{aligned}f(x) &= 0 \\ \text{mit CAS: } x &= 0\end{aligned}$$

\Rightarrow Nullstelle bei $N(0|0)$

Symmetrie: keine Symmetrie

Extrempunkte (Notwendige Bedingung):

$$\begin{aligned}f'(x) &= 0 \\ \text{mit CAS: } x &= 0.25 \quad : \quad f(0.25) = 0.28\end{aligned}$$

Art der Extrempunkte ermitteln:

1. *Möglichkeit:* Funktionswerte in einer genügend kleinen Umgebung vergleichen

$$f(0.15) = 0.247 < f(0.25) = 0.276 > f(0.35) = 0.259$$

\Rightarrow Hochpunkt bei $(0.25|0.28)$

2. *Möglichkeit:* Monotonieverhalten untersuchen

$$\begin{aligned}f'(0.15) &= 0.659 \quad \Rightarrow \text{monoton steigend} \\ f'(0.25) &= 0 \quad \Rightarrow \text{waagerechte Tangente} \\ f'(0.35) &= -0.296 \quad \Rightarrow \text{monoton fallend}\end{aligned}$$

\Rightarrow Hochpunkt bei $(0.25|0.28)$

3. *Möglichkeit:* Krümmungsverhalten untersuchen

$$f''(0.25) = -4.4 < 0$$

\Rightarrow Hochpunkt bei $H(0.25|0.28)$

Wendepunkte (Notwendige Bedingung):

$$f''(x) = 0$$

mit CAS: $x = 0.5 \quad : \quad f(0.5) = 0.2$

1. *Möglichkeit*: 3. Ableitung untersuchen

$$f'''(0.5) = 6.5 \neq 0$$

\Rightarrow Wendepunkt bei $W(0.5|0.2)$

2. *Möglichkeit*: 2. Ableitung auf Vorzeichenwechsel untersuchen.

$$f''(0.4) = -0.969 \quad \Rightarrow \quad \text{Rechtskrümmung}$$

$$f''(0.6) = 0.435 \quad \Rightarrow \quad \text{Linkskrümmung}$$

\Rightarrow Wendepunkt bei $W(0.5|0.2)$

Aufgabe 2:

$$f(x) = -xe^{4x^2}$$

Funktion und Ableitung:

$$\begin{aligned}f(x) &= -xe^{4x^2} \\f'(x) &= -8x^2e^{4x^2} - e^{4x^2} \\f''(x) &= -8x(8x^2 + 3)e^{4x^2} \\f'''(x) &= -8(64x^4 + 48x^2 + 3)e^{4x^2}\end{aligned}$$

Verhalten im Unendlichen:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \infty \\ \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= -\infty\end{aligned}$$

Nullstellen:

$$\begin{aligned}f(x) &= 0 \\ \text{mit CAS: } x &= 0\end{aligned}$$

\Rightarrow Nullstelle bei $N(0|0)$

Symmetrie:

$$\begin{aligned}f(-x) &= -(-x)e^{4(-x)^2} = xe^{4x^2} = -(-xe^{4x^2}) = -f(x) \\ &\Rightarrow \text{punktsymmetrisch zum Ursprung}\end{aligned}$$

Extrempunkte (Notwendige Bedingung):

$$\begin{aligned}f'(x) &= 0 \\ \text{mit CAS:}\end{aligned}$$

Keine Lösung \Rightarrow Keine Extrempunkte

Art der Extrempunkte ermitteln:

1. *Möglichkeit:* Funktionswerte in einer genügend kleinen Umgebung vergleichen
2. *Möglichkeit:* Monotonieverhalten untersuchen
3. *Möglichkeit:* Krümmungsverhalten untersuchen

Wendepunkte (Notwendige Bedingung):

$$\begin{aligned}f''(x) &= 0 \\ \text{mit CAS: } x = 0 & : f(0) = 0\end{aligned}$$

1. *Möglichkeit:* 3. Ableitung untersuchen

$$f'''(0) = -24.0 \neq 0$$

\Rightarrow Wendepunkt bei $W(0|0)$

2. *Möglichkeit:* 2. Ableitung auf Vorzeichenwechsel untersuchen.

$$\begin{aligned}f''(-0.1) &= 2.56 \quad \Rightarrow \text{Linkskrümmung} \\ f''(0.1) &= -2.56 \quad \Rightarrow \text{Rechtskrümmung}\end{aligned}$$

\Rightarrow Wendepunkt bei $W(0|0)$

Aufgabe 3:

$$f(x) = -3x^2 e^{-2x^2}$$

Funktion und Ableitung:

$$\begin{aligned}f(x) &= -3x^2 e^{-2x^2} \\f'(x) &= 12x^3 e^{-2x^2} - 6x e^{-2x^2} \\f''(x) &= 6(-8x^4 + 10x^2 - 1) e^{-2x^2} \\f'''(x) &= 48x(4x^4 - 9x^2 + 3) e^{-2x^2}\end{aligned}$$

Verhalten im Unendlichen:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= 0\end{aligned}$$

Nullstellen:

$$\begin{aligned}f(x) &= 0 \\ \text{mit CAS: } x &= 0\end{aligned}$$

\Rightarrow Nullstelle bei $N(0|0)$

Symmetrie:

$$\begin{aligned}f(-x) &= -3(-x)^2 e^{-2(-x)^2} = -3x^2 e^{-2x^2} = f(x) \\ &\Rightarrow \text{achsensymmetrisch zur } y\text{-Achse}\end{aligned}$$

Extrempunkte (Notwendige Bedingung):

$$\begin{aligned}f'(x) &= 0 \\ \text{mit CAS: } \begin{array}{lll} x_1 = 0 & : & f(0) = 0 \\ x_2 = -0.71 & : & f(-0.71) = -0.55 \\ x_3 = 0.71 & : & f(0.71) = -0.55 \end{array}\end{aligned}$$

Art der Extrempunkte ermitteln:

1. *Möglichkeit:* Funktionswerte in einer genügend kleinen Umgebung vergleichen

$$f(-0.1) = -0.0294 < f(0) = 0 > f(0.1) = -0.0294$$

\Rightarrow Hochpunkt bei $(0|0)$

$$f(-0.81) = -0.531 > f(-0.71) = -0.552 < f(-0.61) = -0.529$$

\Rightarrow Tiefpunkt bei $(-0.71|-0.55)$

$$f(0.61) = -0.529 > f(0.71) = -0.552 < f(0.81) = -0.531$$

\Rightarrow Tiefpunkt bei $(0.71|-0.55)$

2. *Möglichkeit:* Monotonieverhalten untersuchen

$$f'(-0.1) = 0.576 \Rightarrow \text{monoton steigend}$$

$$f'(0) = 0 \Rightarrow \text{waagerechte Tangente}$$

$$f'(0.1) = -0.576 \Rightarrow \text{monoton fallend}$$

\Rightarrow Hochpunkt bei $(0|0)$

$$f'(-0.81) = -0.399 \Rightarrow \text{monoton fallend}$$

$$f'(-0.71) = 0 \Rightarrow \text{waagerechte Tangente}$$

$$f'(-0.61) = 0.458 \Rightarrow \text{monoton steigend}$$

\Rightarrow Tiefpunkt bei $(-0.71|-0.55)$

$$f'(0.61) = -0.458 \Rightarrow \text{monoton fallend}$$

$$f'(0.71) = 0 \Rightarrow \text{waagerechte Tangente}$$

$$f'(0.81) = 0.399 \Rightarrow \text{monoton steigend}$$

\Rightarrow Tiefpunkt bei $(0.71|-0.55)$

3. *Möglichkeit*: Krümmungsverhalten untersuchen

$$f''(0) = -6.0 < 0$$

\Rightarrow Hochpunkt bei $H(0|0)$

$$f''(-0.71) = 4.4 > 0$$

\Rightarrow Tiefpunkt bei $T(-0.71|-0.55)$

$$f''(0.71) = 4.4 > 0$$

\Rightarrow Tiefpunkt bei $T(0.71|-0.55)$

Wendepunkte (Notwendige Bedingung):

$$f''(x) = 0$$

$$\begin{array}{ll} \text{mit CAS:} & x_1 = -0.33 : f(-0.33) = -0.26 \\ & x_2 = 0.33 : f(0.33) = -0.26 \\ & x_3 = -1.1 : f(-1.1) = -0.35 \\ & x_4 = 1.1 : f(1.1) = -0.35 \end{array}$$

1. *Möglichkeit*: 3. Ableitung untersuchen

$$f'''(-0.33) = -26.0 \neq 0$$

\Rightarrow Wendepunkt bei $W_1(-0.33|-0.26)$

$$f'''(0.33) = 26.0 \neq 0$$

\Rightarrow Wendepunkt bei $W_2(0.33|-0.26)$

$$f'''(-1.1) = 11.0 \neq 0$$

\Rightarrow Wendepunkt bei $W_3(-1.1 | -0.35)$

$$f'''(1.1) = -11.0 \neq 0$$

\Rightarrow Wendepunkt bei $W_4(1.1 | -0.35)$

2. *Möglichkeit*: 2. Ableitung auf Vorzeichenwechsel untersuchen.

$$f''(-0.43) = 2.41 \quad \Rightarrow \text{Linkskrümmung}$$

$$f''(-0.23) = -2.64 \quad \Rightarrow \text{Rechtskrümmung}$$

\Rightarrow Wendepunkt bei $W_1(-0.33 | -0.26)$

$$f''(0.23) = -2.64 \quad \Rightarrow \text{Rechtskrümmung}$$

$$f''(0.43) = 2.41 \quad \Rightarrow \text{Linkskrümmung}$$

\Rightarrow Wendepunkt bei $W_2(0.33 | -0.26)$

$$f''(-1.2) = -0.88 \quad \Rightarrow \text{Rechtskrümmung}$$

$$f''(-0.97) = 1.24 \quad \Rightarrow \text{Linkskrümmung}$$

\Rightarrow Wendepunkt bei $W_3(-1.1 | -0.35)$

$$f''(0.97) = 1.24 \quad \Rightarrow \text{Linkskrümmung}$$

$$f''(1.2) = -0.88 \quad \Rightarrow \text{Rechtskrümmung}$$

\Rightarrow Wendepunkt bei $W_4(1.1 | -0.35)$