

Aufgabe 1:

$$f(x) = -2xe^{2x^2}$$

Funktion und Ableitung:

$$f(x) = -2xe^{2x^2}$$

$$f'(x) = -8x^2e^{2x^2} - 2e^{2x^2}$$

$$f'(x) = -(8x^2 + 2)e^{2x^2}$$

$$f''(x) = -8x(4x^2 + 3)e^{2x^2}$$

Nullstellen:

$$f(x) = 0$$

$$-2xe^{2x^2} = 0$$

$$x = 0$$

\Rightarrow Nullstelle bei $N(0|0)$

Extrempunkte (Notwendige Bedingung:)

$$f'(x) = 0$$

$$-(8x^2 + 2)e^{2x^2} = 0$$

Keine Lösung \Rightarrow Keine Extrempunkte

Aufgabe 2:

$$f(x) = 2xe^{-x}$$

Funktion und Ableitung:

$$f(x) = 2xe^{-x}$$

$$f'(x) = -2xe^{-x} + 2e^{-x}$$

$$f'(x) = (-2x + 2)e^{-x}$$

$$f''(x) = 2(x - 2)e^{-x}$$

Nullstellen:

$$f(x) = 0$$

$$2xe^{-x} = 0$$

$$x = 0$$

\Rightarrow Nullstelle bei $N(0|0)$

Extrempunkte (Notwendige Bedingung:)

$$f'(x) = 0$$

$$(-2x + 2)e^{-x} = 0$$

$$x = 1.0 \quad : \quad f(1.0) = 0.74$$

Extrempunkte (Hinreichende Bedingung:)

$$f''(1.0) = -0.74 < 0$$

\Rightarrow Hochpunkt bei $H(1.0|0.74)$

Aufgabe 3:

$$f(x) = 4x^2 e^{5x}$$

Funktion und Ableitung:

$$f(x) = 4x^2 e^{5x}$$

$$f'(x) = 20x^2 e^{5x} + 8x e^{5x}$$

$$f'(x) = 4x (5x + 2) e^{5x}$$

$$f''(x) = 4 (25x^2 + 20x + 2) e^{5x}$$

Nullstellen:

$$f(x) = 0$$

$$4x^2 e^{5x} = 0$$

$$x = 0$$

\Rightarrow Nullstelle bei $N(0|0)$

Extrempunkte (Notwendige Bedingung:)

$$f'(x) = 0$$

$$4x (5x + 2) e^{5x} = 0$$

$$x_1 = -0.4 \quad : \quad f(-0.4) = 0.087$$

$$x_2 = 0 \quad : \quad f(0) = 0$$

Extrempunkte (Hinreichende Bedingung:)

$$f''(-0.4) = -1.1 < 0$$

\Rightarrow Hochpunkt bei $H(-0.4|0.087)$

$$f''(0) = 8.0 > 0$$

\Rightarrow Tiefpunkt bei $T(0|0)$

Aufgabe 4:

$$f(x) = -xe^{3x}$$

Funktion und Ableitung:

$$f(x) = -xe^{3x}$$

$$f'(x) = -3xe^{3x} - e^{3x}$$

$$f'(x) = -(3x + 1)e^{3x}$$

$$f''(x) = -3(3x + 2)e^{3x}$$

Nullstellen:

$$f(x) = 0$$

$$-xe^{3x} = 0$$

$$x = 0$$

\Rightarrow Nullstelle bei $N(0|0)$

Extrempunkte (Notwendige Bedingung:)

$$f'(x) = 0$$

$$-(3x + 1)e^{3x} = 0$$

$$x = -0.33 \quad : \quad f(-0.33) = 0.12$$

Extrempunkte (Hinreichende Bedingung:)

$$f''(-0.33) = -1.1 < 0$$

\Rightarrow Hochpunkt bei $H(-0.33|0.12)$

Aufgabe 5:

$$f(x) = 4x^2 e^{-5x^2}$$

Funktion und Ableitung:

$$f(x) = 4x^2 e^{-5x^2}$$

$$f'(x) = -40x^3 e^{-5x^2} + 8x e^{-5x^2}$$

$$f'(x) = 8x (-5x^2 + 1) e^{-5x^2}$$

$$f''(x) = 8 (50x^4 - 25x^2 + 1) e^{-5x^2}$$

Nullstellen:

$$f(x) = 0$$

$$4x^2 e^{-5x^2} = 0$$

$$x = 0$$

\Rightarrow Nullstelle bei $N(0|0)$

Extrempunkte (Notwendige Bedingung:)

$$f'(x) = 0$$

$$8x (-5x^2 + 1) e^{-5x^2} = 0$$

$$x_1 = 0 \quad : \quad f(0) = 0$$

$$x_2 = -0.45 \quad : \quad f(-0.45) = 0.29$$

$$x_3 = 0.45 \quad : \quad f(0.45) = 0.29$$

Extrempunkte (Hinreichende Bedingung:)

$$f''(0) = 8.0 > 0$$

\Rightarrow Tiefpunkt bei $T(0|0)$

$$f''(-0.45) = -5.9 < 0$$

\Rightarrow Hochpunkt bei $H(-0.45|0.29)$

$$f''(0.45) = -5.9 < 0$$

\Rightarrow Hochpunkt bei $H(0.45|0.29)$

Aufgabe 6:

$$f(x) = -5xe^{5x^2}$$

Funktion und Ableitung:

$$f(x) = -5xe^{5x^2}$$

$$f'(x) = -50x^2e^{5x^2} - 5e^{5x^2}$$

$$f'(x) = -(50x^2 + 5)e^{5x^2}$$

$$f''(x) = -50x(10x^2 + 3)e^{5x^2}$$

Nullstellen:

$$f(x) = 0$$

$$-5xe^{5x^2} = 0$$

$$x = 0$$

\Rightarrow Nullstelle bei $N(0|0)$

Extrempunkte (Notwendige Bedingung:)

$$f'(x) = 0$$

$$-(50x^2 + 5)e^{5x^2} = 0$$

Keine Lösung \Rightarrow Keine Extrempunkte

Aufgabe 7:

$$f(x) = 3xe^{-x}$$

Funktion und Ableitung:

$$f(x) = 3xe^{-x}$$

$$f'(x) = -3xe^{-x} + 3e^{-x}$$

$$f'(x) = (-3x + 3)e^{-x}$$

$$f''(x) = 3(x - 2)e^{-x}$$

Nullstellen:

$$f(x) = 0$$

$$3xe^{-x} = 0$$

$$x = 0$$

\Rightarrow Nullstelle bei $N(0|0)$

Extrempunkte (Notwendige Bedingung:)

$$f'(x) = 0$$

$$(-3x + 3)e^{-x} = 0$$

$$x = 1.0 \quad : \quad f(1.0) = 1.1$$

Extrempunkte (Hinreichende Bedingung:)

$$f''(1.0) = -1.1 < 0$$

\Rightarrow Hochpunkt bei $H(1.0|1.1)$

Aufgabe 8:

$$f(x) = 5xe^{4x}$$

Funktion und Ableitung:

$$f(x) = 5xe^{4x}$$

$$f'(x) = 20xe^{4x} + 5e^{4x}$$

$$f'(x) = (20x + 5)e^{4x}$$

$$f''(x) = 40(2x + 1)e^{4x}$$

Nullstellen:

$$f(x) = 0$$

$$5xe^{4x} = 0$$

$$x = 0$$

\Rightarrow Nullstelle bei $N(0|0)$

Extrempunkte (Notwendige Bedingung:)

$$f'(x) = 0$$

$$(20x + 5)e^{4x} = 0$$

$$x = -0.25 \quad : \quad f(-0.25) = -0.46$$

Extrempunkte (Hinreichende Bedingung:)

$$f''(-0.25) = 7.4 > 0$$

\Rightarrow Tiefpunkt bei $T(-0.25 | -0.46)$

Aufgabe 9:

$$f(x) = -3xe^{2x^2}$$

Funktion und Ableitung:

$$f(x) = -3xe^{2x^2}$$

$$f'(x) = -12x^2e^{2x^2} - 3e^{2x^2}$$

$$f'(x) = - (12x^2 + 3) e^{2x^2}$$

$$f''(x) = -12x (4x^2 + 3) e^{2x^2}$$

Nullstellen:

$$f(x) = 0$$

$$-3xe^{2x^2} = 0$$

$$x = 0$$

\Rightarrow Nullstelle bei $N(0|0)$

Extrempunkte (Notwendige Bedingung:)

$$f'(x) = 0$$

$$- (12x^2 + 3) e^{2x^2} = 0$$

Keine Lösung \Rightarrow Keine Extrempunkte

Aufgabe 10:

$$f(x) = -4x^2 e^{3x}$$

Funktion und Ableitung:

$$\begin{aligned}f(x) &= -4x^2 e^{3x} \\f'(x) &= -12x^2 e^{3x} - 8x e^{3x} \\f'(x) &= -4x (3x + 2) e^{3x} \\f''(x) &= -4 (9x^2 + 12x + 2) e^{3x}\end{aligned}$$

Nullstellen:

$$\begin{aligned}f(x) &= 0 \\-4x^2 e^{3x} &= 0 \\x &= 0\end{aligned}$$

\Rightarrow Nullstelle bei $N(0|0)$

Extrempunkte (Notwendige Bedingung:)

$$\begin{aligned}f'(x) &= 0 \\-4x (3x + 2) e^{3x} &= 0 \\x_1 = -0.67 & : f(-0.67) = -0.24 \\x_2 = 0 & : f(0) = 0\end{aligned}$$

Extrempunkte (Hinreichende Bedingung:)

$$f''(-0.67) = 1.1 > 0$$

\Rightarrow Tiefpunkt bei $T(-0.67 | -0.24)$

$$f''(0) = -8.0 < 0$$

\Rightarrow Hochpunkt bei $H(0|0)$