Aufgabe 1:

$$f(x) = -2x^3$$

Funktion und Ableitung:

$$\begin{aligned} f(x) &= -2x^3 \\ f'(x) &= -6x^2 \\ f''(x) &= -12x \end{aligned}$$

Verhalten im Unendlichen:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$$

Nullstellen:

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ -2x^3 &= 0 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Nullstelle bei $N(0|0)$

Symmetrie:

$$f(-x) = -2(-x)^3 = 2x^3 = -(-2x^3) = -f(x)$$

$$\Rightarrow \text{punktsymmetrisch zum Ursprung}$$

Extrempunkte (Notwendige Bedingung):

$$\begin{aligned} f'(x) =& 0 \\ -6x^2 =& 0 \\ x =& 0 \quad : \quad f(0) = 0 \end{aligned}$$

Art der Extrempunkte ermitteln:

1. Möglichkeit: Funktionswerte in einer genügend kleinen Umgebung vergleichen

$$f(-0.1) = 0.002 > f(0) = 0 > f(0.1) = -0.002$$

$\Rightarrow$ Sattelpunkt bei $(0|0)$

2. Möglichkeit: Monotonieverhalten untersuchen

$$f'(-0.1) = -0.06 \quad \Rightarrow \text{ monoton fallend}$$

$$f'(0) = 0 \quad \Rightarrow \text{ waagerechte Tangente}$$

$$f'(0.1) = -0.06 \quad \Rightarrow \text{ monoton fallend}$$

$\Rightarrow$ Sattelpunkt bei $(0|0)$

3. Möglichkeit: Krümmungsverhalten untersuchen

$$f''(0) = 0$$

$\Rightarrow$ Keine Entscheidung möglich.

Aufgabe 2:

$$f(x) = 5x^3 - 3x^2$$

Funktion und Ableitung:

$$\begin{aligned} f(x) &= 5x^3 - 3x^2 \\ f'(x) &= 15x^2 - 6x \\ f''(x) &= 6\,(5x - 1) \end{aligned}$$

Verhalten im Unendlichen:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

Nullstellen:

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ 5x^3 - 3x^2 &= 0 \\ x_1 &= 0 \\ x_2 &= 0.6 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Nullstelle bei $N_1(0|0)$
$\Rightarrow$ Nullstelle bei $N_2(0.6|0)$
Symmetrie: keine Symmetrie
Extrempunkte (Notwendige Bedingung):

$$\begin{aligned} f'(x) =& 0 \\ 3x\,(5x - 2) =& 0 \\ x_1 =& 0 \quad &: \quad f(0) &= 0 \\ x_2 =& 0.4 \quad &: \quad f(0.4) &= -0.16 \end{aligned}$$

Art der Extrempunkte ermitteln:

1. Möglichkeit: Funktionswerte in einer genügend kleinen Umgebung vergleichen

$$f(-0.1) = -0.035 < f(0) = 0 > f(0.1) = -0.025$$

$\Rightarrow$ Hochpunkt bei $(0|0)$

$$f(0.3) = -0.135 > f(0.4) = -0.16 < f(0.5) = -0.125$$

$\Rightarrow$ Tiefpunkt bei $(0.4|-0.16)$

2. Möglichkeit: Monotonieverhalten untersuchen

$$f'(-0.1) = 0.75 \quad \Rightarrow \text{ monoton steigend}$$

$$f'(0) = 0 \quad \Rightarrow \text{ waagerechte Tangente}$$

$$f'(0.1) = -0.45 \quad \Rightarrow \text{ monoton fallend}$$

$\Rightarrow$ Hochpunkt bei $(0|0)$

$$f'(0.3) = -0.45 \quad \Rightarrow \text{ monoton fallend}$$
$$f'(0.4) = 0 \quad \Rightarrow \text{ waagerechte Tangente}$$
$$f'(0.5) = 0.75 \quad \Rightarrow \text{ monoton steigend}$$

$\Rightarrow$ Tiefpunkt bei $(0.4|-0.16)$

3. Möglichkeit: Krümmungsverhalten untersuchen

$$f''(0) = -6.0 < 0$$

$\Rightarrow$ Hochpunkt bei $H(0|0)$

$$f''(0.4) = 6.0 > 0$$

$\Rightarrow$ Tiefpunkt bei $T(0.4|-0.16)$

Aufgabe 3:

$$f(x) = x^3 + 4x$$

Funktion und Ableitung:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 + 4x \\ f'(x) &= 3x^2 + 4 \\ f''(x) &= 6x \end{aligned}$$

Verhalten im Unendlichen:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

Nullstellen:

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ x^3 + 4x &= 0 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Nullstelle bei $N(0|0)$

Symmetrie:

$$f(-x) = (-x)^3 + 4(-x) = -x^3 - 4x = -(x^3 + 4x) = -f(x)$$

$\Rightarrow$ punktsymmetrisch zum Ursprung

Extrempunkte (Notwendige Bedingung):

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ 3x^2 + 4 &= 0 \end{aligned}$$

Keine Lösung $\Rightarrow$ Keine Extrempunkte

Art der Extrempunkte ermitteln:

1. Möglichkeit: Funktionswerte in einer genügend kleinen Umgebung vergleichen
2. Möglichkeit: Monotonieverhalten untersuchen
3. Möglichkeit: Krümmungsverhalten untersuchen

Aufgabe 4:

$$f(x) = -2x^3 + 5x^2 - 3x$$

Funktion und Ableitung:

$$f(x) = -2x^3 + 5x^2 - 3x$$
$$f'(x) = -6x^2 + 10x - 3$$
$$f''(x) = 2(-6x + 5)$$

Verhalten im Unendlichen:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$$
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$$

Nullstellen:

$$f(x) = 0$$
$$-2x^3 + 5x^2 - 3x = 0$$
$$x_1 = 0$$
$$x_2 = 1.0$$
$$x_3 = 1.5$$

$\Rightarrow$ Nullstelle bei $N_1(0|0)$
$\Rightarrow$ Nullstelle bei $N_2(1.0|0)$
$\Rightarrow$ Nullstelle bei $N_3(1.5|0)$
Symmetrie: keine Symmetrie
Extrempunkte (Notwendige Bedingung):

$$f'(x) = 0$$
$$-6x^2 + 10x - 3 = 0$$
$$x_1 = 0.39 \quad : \quad f(0.39) = -0.53$$
$$x_2 = 1.3 \quad : \quad f(1.3) = 0.16$$

Art der Extrempunkte ermitteln:

1. Möglichkeit: Funktionswerte in einer genügend kleinen Umgebung vergleichen

$$f(0.29) = -0.5 > f(0.39) = -0.528 < f(0.49) = -0.504$$

$\Rightarrow$ Tiefpunkt bei $(0.39| - 0.53)$

$$f(1.2) = 0.133 < f(1.3) = 0.158 > f(1.4) = 0.129$$

$\Rightarrow$ Hochpunkt bei $(1.3|0.16)$

2. Möglichkeit: Monotonieverhalten untersuchen

$$f'(0.29) = -0.589 \quad \Rightarrow \text{ monoton fallend}$$
$$f'(0.39) = 0 \quad \Rightarrow \text{ waagerechte Tangente}$$

$$f'(0.49) = 0.469 \quad \Rightarrow \text{ monoton steigend}$$

$\Rightarrow$ Tiefpunkt bei $(0.39|-0.53)$

$$f'(1.2) = 0.469 \quad \Rightarrow \text{ monoton steigend}$$
$$f'(1.3) = 0 \quad \Rightarrow \text{ waagerechte Tangente}$$
$$f'(1.4) = -0.589 \quad \Rightarrow \text{ monoton fallend}$$

$\Rightarrow$ Hochpunkt bei $(1.3|0.16)$

3. Möglichkeit: Krümmungsverhalten untersuchen

$$f''(0.39) = 5.3 > 0$$

$\Rightarrow$ Tiefpunkt bei $T(0.39|-0.53)$

$$f''(1.3) = -5.3 < 0$$

$\Rightarrow$ Hochpunkt bei $H(1.3|0.16)$

Aufgabe 5:

$$f(x) = -4x^4$$

Funktion und Ableitung:

$$\begin{aligned} f(x) &= -4x^4 \\ f'(x) &= -16x^3 \\ f''(x) &= -48x^2 \end{aligned}$$

Verhalten im Unendlichen:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$$

Nullstellen:

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ -4x^4 &= 0 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Nullstelle bei $N(0|0)$

Symmetrie:

$$f(-x) = -4(-x)^4 = -4x^4 = f(x)$$

$$\Rightarrow \text{achsensymmetrich zur } y\text{-Achse}$$

Extrempunkte (Notwendige Bedingung):

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ -16x^3 &= 0 \\ x &= 0 \quad : \quad f(0) = 0 \end{aligned}$$

Art der Extrempunkte ermitteln:

1. Möglichkeit: Funktionswerte in einer genügend kleinen Umgebung vergleichen

$$f(-0.1) = -0.0004 < f(0) = 0 > f(0.1) = -0.0004$$

$\Rightarrow$ Hochpunkt bei $(0|0)$

2. Möglichkeit: Monotonieverhalten untersuchen

$$f'(-0.1) = 0.016 \quad \Rightarrow \text{ monoton steigend}$$

$$f'(0) = 0 \quad \Rightarrow \text{ waagerechte Tangente}$$

$$f'(0.1) = -0.016 \quad \Rightarrow \text{ monoton fallend}$$

$\Rightarrow$ Hochpunkt bei $(0|0)$

3. Möglichkeit: Krümmungsverhalten untersuchen

$$f''(0) = 0$$

$\Rightarrow$ Keine Entscheidung möglich.

Aufgabe 6:

$$f(x) = -3x^4 - 5x^3$$

Funktion und Ableitung:

$$\begin{aligned} f(x) &= -3x^4 - 5x^3 \\ f'(x) &= -12x^3 - 15x^2 \\ f''(x) &= -6x\,(6x+5) \end{aligned}$$

Verhalten im Unendlichen:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$$

Nullstellen:

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ -3x^4 - 5x^3 &= 0 \\ x_1 &= -1.7 \\ x_2 &= 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Nullstelle bei $N_1(-1.7|0)$
$\Rightarrow$ Nullstelle bei $N_2(0|0)$
Symmetrie: keine Symmetrie
Extrempunkte (Notwendige Bedingung):

$$\begin{aligned} f'(x) =& 0 \\ -x^2\,(12x+15) =& 0 \\ x_1 =& -1.3 \quad : \quad f(-1.3) = 2.4 \\ x_2 =& 0 \qquad\;\; : \quad f(0) \quad = 0 \end{aligned}$$

Art der Extrempunkte ermitteln:

1. Möglichkeit: Funktionswerte in einer genügend kleinen Umgebung vergleichen

$$f(-1.3) = 2.34 < f(-1.3) = 2.44 > f(-1.2) = 2.36$$

$\Rightarrow$ Hochpunkt bei $(-1.3|2.4)$

$$f(-0.1) = 0.0047 > f(0) = 0 > f(0.1) = -0.0053$$

$\Rightarrow$ Sattelpunkt bei $(0|0)$

2. Möglichkeit: Monotonieverhalten untersuchen

$$f'(-1.3) = 2.19 \quad \Rightarrow \text{ monoton steigend}$$

$$f'(-1.3) = 0 \quad \Rightarrow \text{ waagerechte Tangente}$$

$$f'(-1.2) = -1.59 \quad \Rightarrow \text{ monoton fallend}$$

$\Rightarrow$ Hochpunkt bei $(-1.3|2.4)$

$$f'(-0.1) = -0.138 \quad \Rightarrow \text{ monoton fallend}$$
$$f'(0) = 0 \quad \Rightarrow \text{ waagerechte Tangente}$$
$$f'(0.1) = -0.162 \quad \Rightarrow \text{ monoton fallend}$$

$\Rightarrow$ Sattelpunkt bei $(0|0)$

3. Möglichkeit: Krümmungsverhalten untersuchen

$$f''(-1.3) = -19.0 < 0$$

$\Rightarrow$ Hochpunkt bei $H(-1.3|2.4)$

$$f''(0) = 0$$

$\Rightarrow$ Keine Entscheidung möglich.

Aufgabe 7:

$$f(x) = 4x^4 - x^2$$

Funktion und Ableitung:

$$\begin{aligned} f(x) &= 4x^4 - x^2 \\ f'(x) &= 16x^3 - 2x \\ f''(x) &= 2\left(24x^2 - 1\right) \end{aligned}$$

Verhalten im Unendlichen:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

Nullstellen:

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ 4x^4 - x^2 &= 0 \\ x_1 &= -0.5 \\ x_2 &= 0 \\ x_3 &= 0.5 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Nullstelle bei $N_1(-0.5|0)$
$\Rightarrow$ Nullstelle bei $N_2(0|0)$
$\Rightarrow$ Nullstelle bei $N_3(0.5|0)$

Symmetrie:

$$f(-x) = 4(-x)^4 - (-x)^2 = 4x^4 - x^2 = f(x)$$

$$\Rightarrow \text{achsensymmetrich zur } y\text{-Achse}$$

Extrempunkte (Notwendige Bedingung):

$$\begin{aligned} f'(x) &=0 \\ 16x^3 - 2x &=0 \\ x_1 &=0 & : \quad & f(0) &&=0 \\ x_2 &=-0.35 & : \quad & f(-0.35) &&=-0.063 \\ x_3 &=0.35 & : \quad & f(0.35) &&=-0.063 \end{aligned}$$

Art der Extrempunkte ermitteln:

1. Möglichkeit: Funktionswerte in einer genügend kleinen Umgebung vergleichen

$$f(-0.1) = -0.0096 < f(0) = 0 > f(0.1) = -0.0096$$

$\Rightarrow$ Hochpunkt bei $(0|0)$

$$f(-0.45) = -0.0364 > f(-0.35) = -0.0625 < f(-0.25) = -0.0478$$

$\Rightarrow$ Tiefpunkt bei $(-0.35|-0.063)$

$$f(0.25) = -0.0478 > f(0.35) = -0.0625 < f(0.45) = -0.0364$$

$\Rightarrow$ Tiefpunkt bei $(0.35| - 0.063)$

2. Möglichkeit: Monotonieverhalten untersuchen

$$f'(-0.1) = 0.184 \quad \Rightarrow \text{ monoton steigend}$$
$$f'(0) = 0 \quad \Rightarrow \text{ waagerechte Tangente}$$
$$f'(0.1) = -0.184 \quad \Rightarrow \text{ monoton fallend}$$

$\Rightarrow$ Hochpunkt bei $(0|0)$

$$f'(-0.45) = -0.586 \quad \Rightarrow \text{ monoton fallend}$$
$$f'(-0.35) = 0 \quad \Rightarrow \text{ waagerechte Tangente}$$
$$f'(-0.25) = 0.246 \quad \Rightarrow \text{ monoton steigend}$$

$\Rightarrow$ Tiefpunkt bei $(-0.35| - 0.063)$

$$f'(0.25) = -0.246 \quad \Rightarrow \text{ monoton fallend}$$
$$f'(0.35) = 0 \quad \Rightarrow \text{ waagerechte Tangente}$$
$$f'(0.45) = 0.586 \quad \Rightarrow \text{ monoton steigend}$$

$\Rightarrow$ Tiefpunkt bei $(0.35| - 0.063)$

3. Möglichkeit: Krümmungsverhalten untersuchen

$$f''(0) = -2.0 < 0$$

$\Rightarrow$ Hochpunkt bei $H(0|0)$

$$f''(-0.35) = 4.0 > 0$$

$\Rightarrow$ Tiefpunkt bei $T(-0.35| - 0.063)$

$$f''(0.35) = 4.0 > 0$$

$\Rightarrow$ Tiefpunkt bei $T(0.35| - 0.063)$

Aufgabe 8:

$$f(x) = x^4 - 4x^3 + x^2$$

Funktion und Ableitung:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^4 - 4x^3 + x^2 \\ f'(x) &= 4x^3 - 12x^2 + 2x \\ f''(x) &= 2\left(6x^2 - 12x + 1\right) \end{aligned}$$

Verhalten im Unendlichen:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

Nullstellen:

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ x^4 - 4x^3 + x^2 &= 0 \\ x_1 &= 0 \\ x_2 &= 0.27 \\ x_3 &= 3.7 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Nullstelle bei $N_1(0|0)$
$\Rightarrow$ Nullstelle bei $N_2(0.27|0)$
$\Rightarrow$ Nullstelle bei $N_3(3.7|0)$
Symmetrie: keine Symmetrie
Extrempunkte (Notwendige Bedingung):

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ 2x\left(2x^2 - 6x + 1\right) &= 0 \\ x_1 &= 0 & &: & f(0) &= 0 \\ x_2 &= 0.18 & &: & f(0.18) &= 0.01 \\ x_3 &= 2.8 & &: & f(2.8) &= -19.0 \end{aligned}$$

Art der Extrempunkte ermitteln:

1. Möglichkeit: Funktionswerte in einer genügend kleinen Umgebung vergleichen

$$f(-0.1) = 0.0141 > f(0) = 0 < f(0.1) = 0.0061$$

$\Rightarrow$ Tiefpunkt bei $(0|0)$

$$f(0.077) = 0.00415 < f(0.18) = 0.0101 > f(0.28) = -0.00243$$

$\Rightarrow$ Hochpunkt bei $(0.18|0.01)$

$$f(2.7) = -18.4 > f(2.8) = -18.5 < f(2.9) = -18.4$$

$\Rightarrow$ Tiefpunkt bei $(2.8|-19.0)$

2. Möglichkeit: Monotonieverhalten untersuchen

$$f'(-0.1) = -0.324 \quad \Rightarrow \text{ monoton fallend}$$
$$f'(0) = 0 \quad \Rightarrow \text{ waagerechte Tangente}$$
$$f'(0.1) = 0.084 \quad \Rightarrow \text{ monoton steigend}$$

$\Rightarrow$ Tiefpunkt bei $(0|0)$

$$f'(0.077) = 0.0847 \quad \Rightarrow \text{ monoton steigend}$$
$$f'(0.18) = 0 \quad \Rightarrow \text{ waagerechte Tangente}$$
$$f'(0.28) = -0.282 \quad \Rightarrow \text{ monoton fallend}$$

$\Rightarrow$ Hochpunkt bei $(0.18|0.01)$

$$f'(2.7) = -2.77 \quad \Rightarrow \text{ monoton fallend}$$
$$f'(2.8) = 0 \quad \Rightarrow \text{ waagerechte Tangente}$$
$$f'(2.9) = 3.21 \quad \Rightarrow \text{ monoton steigend}$$

$\Rightarrow$ Tiefpunkt bei $(2.8|-19.0)$

3. Möglichkeit: Krümmungsverhalten untersuchen

$$f''(0) = 2.0 > 0$$

$\Rightarrow$ Tiefpunkt bei $T(0|0)$

$$f''(0.18) = -1.9 < 0$$

$\Rightarrow$ Hochpunkt bei $H(0.18|0.01)$

$$f''(2.8) = 30.0 > 0$$

$\Rightarrow$ Tiefpunkt bei $T(2.8|-19.0)$