Aufgabe 1:

$$f(x) = xe^{4x}$$

Funktion und Ableitung:

$$\begin{aligned} f(x) &= xe^{4x} \\ f'(x) &= 4xe^{4x} + e^{4x} \\ f''(x) &= 8\left(2x+1\right)e^{4x} \end{aligned}$$

Verhalten im Unendlichen:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

Nullstellen:

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ xe^{4x} &= 0 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Nullstelle bei $N(0|0)$
Symmetrie: keine Symmetrie
Extrempunkte (Notwendige Bedingung):

$$\begin{aligned} f'(x) =& 0 \\ \left(4x+1\right)e^{4x} =& 0 \\ x =& -0.25 \quad : \quad f(-0.25) = -0.092 \end{aligned}$$

Art der Extrempunkte ermitteln:

1. Möglichkeit: Funktionswerte in einer genügend kleinen Umgebung vergleichen

$$f(-0.35) = -0.0863 > f(-0.25) = -0.092 < f(-0.15) = -0.0823$$

$\Rightarrow$ Tiefpunkt bei $(-0.25|-0.092)$

2. Möglichkeit: Monotonieverhalten untersuchen

$$f'(-0.35) = -0.0986 \quad \Rightarrow \text{ monoton fallend}$$

$$f'(-0.25) = 0 \quad \Rightarrow \text{ waagerechte Tangente}$$

$$f'(-0.15) = 0.22 \quad \Rightarrow \text{ monoton steigend}$$

$\Rightarrow$ Tiefpunkt bei $(-0.25|-0.092)$

3. Möglichkeit: Krümmungsverhalten untersuchen

$$f''(-0.25) = 1.5 > 0$$

$\Rightarrow$ Tiefpunkt bei $T(-0.25|-0.092)$

Aufgabe 2:

$$f(x) = -4xe^{-3x^2}$$

Funktion und Ableitung:

$$f(x) = -4xe^{-3x^2}$$
$$f'(x) = 24x^2e^{-3x^2} - 4e^{-3x^2}$$
$$f''(x) = 72x\left(-2x^2+1\right)e^{-3x^2}$$

Verhalten im Unendlichen:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$$

Nullstellen:

$$f(x) = 0$$
$$-4xe^{-3x^2} = 0$$
$$x = 0$$

$\Rightarrow$ Nullstelle bei $N(0|0)$

Symmetrie:

$$f(-x) = -4(-x)e^{-3(-x)^2} = 4xe^{-3x^2} = -(-4xe^{-3x^2}) = -f(x)$$

$$\Rightarrow \text{ punktsymmetrisch zum Ursprung}$$

Extrempunkte (Notwendige Bedingung):

$$f'(x) = 0$$
$$\left(24x^2-4\right)e^{-3x^2} = 0$$
$$x_1 = -0.41 \quad : \quad f(-0.41) = 0.99$$
$$x_2 = 0.41 \quad : \quad f(0.41) = -0.99$$

Art der Extrempunkte ermitteln:

1. Möglichkeit: Funktionswerte in einer genügend kleinen Umgebung vergleichen

$$f(-0.51) = 0.937 < f(-0.41) = 0.99 > f(-0.31) = 0.927$$

$\Rightarrow$ Hochpunkt bei $(-0.41|0.99)$

$$f(0.31) = -0.927 > f(0.41) = -0.99 < f(0.51) = -0.937$$

$\Rightarrow$ Tiefpunkt bei $(0.41|-0.99)$

2. Möglichkeit: Monotonieverhalten untersuchen

$$f'(-0.51) = 1.01 \quad \Rightarrow \text{ monoton steigend}$$
$$f'(-0.41) = 0 \quad \Rightarrow \text{ waagerechte Tangente}$$
$$f'(-0.31) = -1.29 \quad \Rightarrow \text{ monoton fallend}$$

$\Rightarrow$ Hochpunkt bei $(-0.41|0.99)$

$$f'(0.31) = -1.29 \quad \Rightarrow \text{ monoton fallend}$$
$$f'(0.41) = 0 \quad \Rightarrow \text{ waagerechte Tangente}$$
$$f'(0.51) = 1.01 \quad \Rightarrow \text{ monoton steigend}$$

$\Rightarrow$ Tiefpunkt bei $(0.41|-0.99)$

3. Möglichkeit: Krümmungsverhalten untersuchen

$$f''(-0.41) = -12.0 < 0$$

$\Rightarrow$ Hochpunkt bei $H(-0.41|0.99)$

$$f''(0.41) = 12.0 > 0$$

$\Rightarrow$ Tiefpunkt bei $T(0.41|-0.99)$

Aufgabe 3:

$$f(x) = 4x^2 e^{-4x^2}$$

Funktion und Ableitung:

$$\begin{aligned} f(x) &= 4x^2 e^{-4x^2} \\ f'(x) &= -32x^3 e^{-4x^2} + 8x e^{-4x^2} \\ f''(x) &= 8\left(32x^4 - 20x^2 + 1\right) e^{-4x^2} \end{aligned}$$

Verhalten im Unendlichen:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$$

Nullstellen:

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ 4x^2 e^{-4x^2} &= 0 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Nullstelle bei $N(0|0)$

Symmetrie:

$$f(-x) = 4(-x)^2 e^{-4(-x)^2} = 4x^2 e^{-4x^2} = f(x)$$

$$\Rightarrow \text{achsensymmetrich zur } y\text{-Achse}$$

Extrempunkte (Notwendige Bedingung):

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ 8x\left(-4x^2 + 1\right) e^{-4x^2} &= 0 \\ x_1 &= -0.5 \quad : \quad f(-0.5) = 0.37 \\ x_2 &= 0 \quad : \quad f(0) = 0 \\ x_3 &= 0.5 \quad : \quad f(0.5) = 0.37 \end{aligned}$$

Art der Extrempunkte ermitteln:

1. Möglichkeit: Funktionswerte in einer genügend kleinen Umgebung vergleichen

$$f(-0.6) = 0.341 < f(-0.5) = 0.368 > f(-0.4) = 0.337$$

$\Rightarrow$ Hochpunkt bei $(-0.5|0.37)$

$$f(-0.1) = 0.0384 > f(0) = 0 < f(0.1) = 0.0384$$

$\Rightarrow$ Tiefpunkt bei $(0|0)$

$$f(0.4) = 0.337 < f(0.5) = 0.368 > f(0.6) = 0.341$$

$\Rightarrow$ Hochpunkt bei $(0.5|0.37)$

2. Möglichkeit: Monotonieverhalten untersuchen

$$f'(-0.6) = 0.5 \quad \Rightarrow \text{ monoton steigend}$$
$$f'(-0.5) = 0 \quad \Rightarrow \text{ waagerechte Tangente}$$
$$f'(-0.4) = -0.607 \quad \Rightarrow \text{ monoton fallend}$$

$\Rightarrow$ Hochpunkt bei $(-0.5|0.37)$

$$f'(-0.1) = -0.738 \quad \Rightarrow \text{ monoton fallend}$$
$$f'(0) = 0 \quad \Rightarrow \text{ waagerechte Tangente}$$
$$f'(0.1) = 0.738 \quad \Rightarrow \text{ monoton steigend}$$

$\Rightarrow$ Tiefpunkt bei $(0|0)$

$$f'(0.4) = 0.607 \quad \Rightarrow \text{ monoton steigend}$$
$$f'(0.5) = 0 \quad \Rightarrow \text{ waagerechte Tangente}$$
$$f'(0.6) = -0.5 \quad \Rightarrow \text{ monoton fallend}$$

$\Rightarrow$ Hochpunkt bei $(0.5|0.37)$

3. Möglichkeit: Krümmungsverhalten untersuchen

$$f''(-0.5) = -5.9 < 0$$

$\Rightarrow$ Hochpunkt bei $H(-0.5|0.37)$

$$f''(0) = 8.0 > 0$$

$\Rightarrow$ Tiefpunkt bei $T(0|0)$

$$f''(0.5) = -5.9 < 0$$

$\Rightarrow$ Hochpunkt bei $H(0.5|0.37)$