Aufgabe 1:

$$f(x) = -2x^3$$

Funktion und Ableitung:

$$\begin{aligned} f(x) &= -2x^3 \\ f'(x) &= -6x^2 \\ f''(x) &= -12x \\ f'''(x) &= -12 \end{aligned}$$

Verhalten im Unendlichen:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$$

Nullstellen:

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ \text{mit CAS:} \qquad x &= 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Nullstelle bei $N(0|0)$

Symmetrie:

$$f(-x) = -2(-x)^3 = 2x^3 = -(-2x^3) = -f(x)$$

$$\Rightarrow \text{punktsymmetrisch zum Ursprung}$$

Extrempunkte (Notwendige Bedingung):

$$\begin{aligned} f'(x) =& 0 \\ \text{mit CAS:} \qquad x =& 0 \quad : \quad f(0) = 0 \end{aligned}$$

Art der Extrempunkte ermitteln:

1. Möglichkeit: Funktionswerte in einer genügend kleinen Umgebung vergleichen

$$f(-0.1) = 0.002 > f(0) = 0 > f(0.1) = -0.002$$

$\Rightarrow$ Sattelpunkt bei $(0|0)$

2. Möglichkeit: Monotonieverhalten untersuchen

$$f'(-0.1) = -0.06 \quad \Rightarrow \text{ monoton fallend}$$

$$f'(0) = 0 \quad \Rightarrow \text{ waagerechte Tangente}$$

$$f'(0.1) = -0.06 \quad \Rightarrow \text{ monoton fallend}$$

$\Rightarrow$ Sattelpunkt bei $(0|0)$

3. Möglichkeit: Krümmungsverhalten untersuchen

$$f''(0) = 0$$

$\Rightarrow$ Keine Entscheidung möglich.

Wendepunkte (Notwendige Bedingung):

$$\begin{aligned} f''(x) =& 0 \\ \text{mit CAS:} \qquad x =& 0 \quad : \quad f(0) = 0 \end{aligned}$$

1. Möglichkeit: 3. Ableitung untersuchen

$$f'''(0) = -12.0 \neq 0$$

$\Rightarrow$ Wendepunkt bei $W(0|0)$

2. Möglichkeit: 2. Ableitung auf Vorzeichenwechsel untersuchen.

$$f''(-0.1) = 1.2 \quad \Rightarrow \text{ Linkskrümmung}$$
$$f''(0.1) = -1.2 \quad \Rightarrow \text{ Rechtskrümmung}$$

$\Rightarrow$ Wendepunkt bei $W(0|0)$

Aufgabe 2:

$$f(x) = -3x^3 + 3x^2$$

Funktion und Ableitung:

$$\begin{aligned} f(x) &= -3x^3 + 3x^2 \\ f'(x) &= -9x^2 + 6x \\ f''(x) &= 6\,(-3x + 1) \\ f'''(x) &= -18 \end{aligned}$$

Verhalten im Unendlichen:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$$

Nullstellen:

$$\begin{aligned} & & f(x) &= 0 \\ \text{mit CAS:} & & x_1 &= 0 \\ & & x_2 &= 1.0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Nullstelle bei $N_1(0|0)$
$\Rightarrow$ Nullstelle bei $N_2(1.0|0)$
Symmetrie: keine Symmetrie
Extrempunkte (Notwendige Bedingung):

$$\begin{aligned} & & f'(x) &= 0 & & \\ \text{mit CAS:} & & x_1 &= 0 & : \quad & f(0) = 0 \\ & & x_2 &= 0.67 & : \quad & f(0.67) = 0.44 \end{aligned}$$

Art der Extrempunkte ermitteln:

1. Möglichkeit: Funktionswerte in einer genügend kleinen Umgebung vergleichen

$$f(-0.1) = 0.033 > f(0) = 0 < f(0.1) = 0.027$$

$\Rightarrow$ Tiefpunkt bei $(0|0)$

$$f(0.57) = 0.417 < f(0.67) = 0.444 > f(0.77) = 0.411$$

$\Rightarrow$ Hochpunkt bei $(0.67|0.44)$

2. Möglichkeit: Monotonieverhalten untersuchen

$$f'(-0.1) = -0.69 \quad \Rightarrow \text{ monoton fallend}$$

$$f'(0) = 0 \quad \Rightarrow \text{ waagerechte Tangente}$$

$$f'(0.1) = 0.51 \quad \Rightarrow \text{ monoton steigend}$$

$\Rightarrow$ Tiefpunkt bei $(0|0)$

$$f'(0.57) = 0.51 \quad \Rightarrow \text{ monoton steigend}$$
$$f'(0.67) = 0 \quad \Rightarrow \text{ waagerechte Tangente}$$
$$f'(0.77) = -0.69 \quad \Rightarrow \text{ monoton fallend}$$

$\Rightarrow$ Hochpunkt bei $(0.67|0.44)$

3. Möglichkeit: Krümmungsverhalten untersuchen

$$f''(0) = 6.0 > 0$$

$\Rightarrow$ Tiefpunkt bei $T(0|0)$

$$f''(0.67) = -6.0 < 0$$

$\Rightarrow$ Hochpunkt bei $H(0.67|0.44)$

Wendepunkte (Notwendige Bedingung):

$$f''(x) = 0$$
$$\text{mit CAS:} \qquad x = 0.33 \quad : \quad f(0.33) = 0.22$$

1. Möglichkeit: 3. Ableitung untersuchen

$$f'''(0.33) = -18.0 \neq 0$$

$\Rightarrow$ Wendepunkt bei $W(0.33|0.22)$

2. Möglichkeit: 2. Ableitung auf Vorzeichenwechsel untersuchen.

$$f''(0.23) = 1.8 \quad \Rightarrow \text{ Linkskrümmung}$$
$$f''(0.43) = -1.8 \quad \Rightarrow \text{ Rechtskrümmung}$$

$\Rightarrow$ Wendepunkt bei $W(0.33|0.22)$

Aufgabe 3:

$$f(x) = 2x^3 - 3x$$

Funktion und Ableitung:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^3 - 3x \\ f'(x) &= 6x^2 - 3 \\ f''(x) &= 12x \\ f'''(x) &= 12 \end{aligned}$$

Verhalten im Unendlichen:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

Nullstellen:

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ \text{mit CAS:} \qquad x_1 &= 0 \\ x_2 &= -1.2 \\ x_3 &= 1.2 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Nullstelle bei $N_1(0|0)$
$\Rightarrow$ Nullstelle bei $N_2(-1.2|0)$
$\Rightarrow$ Nullstelle bei $N_3(1.2|0)$

Symmetrie:

$$f(-x) = 2(-x)^3 - 3(-x) = -2x^3 + 3x = -(2x^3 - 3x) = -f(x)$$

$$\Rightarrow \text{punktsymmetrisch zum Ursprung}$$

Extrempunkte (Notwendige Bedingung):

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ \text{mit CAS:} \qquad x_1 &= -0.71 \quad : \quad f(-0.71) = 1.4 \\ x_2 &= 0.71 \quad : \quad f(0.71) = -1.4 \end{aligned}$$

Art der Extrempunkte ermitteln:

1. Möglichkeit: Funktionswerte in einer genügend kleinen Umgebung vergleichen

$$f(-0.81) = 1.37 < f(-0.71) = 1.41 > f(-0.61) = 1.37$$

$\Rightarrow$ Hochpunkt bei $(-0.71|1.4)$

$$f(0.61) = -1.37 > f(0.71) = -1.41 < f(0.81) = -1.37$$

$\Rightarrow$ Tiefpunkt bei $(0.71|-1.4)$

2. Möglichkeit: Monotonieverhalten untersuchen

$$f'(-0.81) = 0.909 \quad \Rightarrow \text{ monoton steigend}$$

$$f'(-0.71) = 0 \quad \Rightarrow \text{ waagerechte Tangente}$$
$$f'(-0.61) = -0.789 \quad \Rightarrow \text{ monoton fallend}$$

$\Rightarrow$ Hochpunkt bei $(-0.71|1.4)$

$$f'(0.61) = -0.789 \quad \Rightarrow \text{ monoton fallend}$$
$$f'(0.71) = 0 \quad \Rightarrow \text{ waagerechte Tangente}$$
$$f'(0.81) = 0.909 \quad \Rightarrow \text{ monoton steigend}$$

$\Rightarrow$ Tiefpunkt bei $(0.71|-1.4)$

3. Möglichkeit: Krümmungsverhalten untersuchen

$$f''(-0.71) = -8.5 < 0$$

$\Rightarrow$ Hochpunkt bei $H(-0.71|1.4)$

$$f''(0.71) = 8.5 > 0$$

$\Rightarrow$ Tiefpunkt bei $T(0.71|-1.4)$

Wendepunkte (Notwendige Bedingung):

$$f''(x) = 0$$
$$\text{mit CAS:} \qquad x = 0 \quad : \quad f(0) = 0$$

1. Möglichkeit: 3. Ableitung untersuchen

$$f'''(0) = 12.0 \neq 0$$

$\Rightarrow$ Wendepunkt bei $W(0|0)$

2. Möglichkeit: 2. Ableitung auf Vorzeichenwechsel untersuchen.

$$f''(-0.1) = -1.2 \quad \Rightarrow \text{ Rechtskrümmung}$$
$$f''(0.1) = 1.2 \quad \Rightarrow \text{ Linkskrümmung}$$

$\Rightarrow$ Wendepunkt bei $W(0|0)$

Aufgabe 4:

$$f(x) = 3x^3 - 5x^2 + x$$

Funktion und Ableitung:

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x^3 - 5x^2 + x \\ f'(x) &= 9x^2 - 10x + 1 \\ f''(x) &= 2\,(9x - 5) \\ f'''(x) &= 18 \end{aligned}$$

Verhalten im Unendlichen:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

Nullstellen:

$$\begin{aligned} && f(x) &= 0 \\ \text{mit CAS:} && x_1 &= 0 \\ && x_2 &= 0.23 \\ && x_3 &= 1.4 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Nullstelle bei $N_1(0|0)$
$\Rightarrow$ Nullstelle bei $N_2(0.23|0)$
$\Rightarrow$ Nullstelle bei $N_3(1.4|0)$
Symmetrie: keine Symmetrie
Extrempunkte (Notwendige Bedingung):

$$\begin{aligned} && f'(x) &= 0 && \\ \text{mit CAS:} && x_1 &= 0.11 & : \quad & f(0.11) = 0.054 \\ && x_2 &= 1.0 & : \quad & f(1.0) = -1.0 \end{aligned}$$

Art der Extrempunkte ermitteln:

1. Möglichkeit: Funktionswerte in einer genügend kleinen Umgebung vergleichen

$$f(0.011) = 0.0105 < f(0.11) = 0.0535 > f(0.21) = 0.0165$$

$\Rightarrow$ Hochpunkt bei $(0.11|0.053)$

$$f(0.9) = -0.963 > f(1.0) = -1.0 < f(1.1) = -0.957$$

$\Rightarrow$ Tiefpunkt bei $(1.0|-1.0)$

2. Möglichkeit: Monotonieverhalten untersuchen

$$f'(0.011) = 0.89 \quad \Rightarrow \text{ monoton steigend}$$

$$f'(0.11) = 0 \quad \Rightarrow \text{ waagerechte Tangente}$$

$$f'(0.21) = -0.71 \quad \Rightarrow \text{ monoton fallend}$$

$\Rightarrow$ Hochpunkt bei $(0.11|0.053)$

$$f'(0.9) = -0.71 \quad \Rightarrow \text{ monoton fallend}$$
$$f'(1.0) = 0 \quad \Rightarrow \text{ waagerechte Tangente}$$
$$f'(1.1) = 0.89 \quad \Rightarrow \text{ monoton steigend}$$

$\Rightarrow$ Tiefpunkt bei $(1.0|-1.0)$

3. Möglichkeit: Krümmungsverhalten untersuchen

$$f''(0.11) = -8.0 < 0$$

$\Rightarrow$ Hochpunkt bei $H(0.11|0.053)$

$$f''(1.0) = 8.0 > 0$$

$\Rightarrow$ Tiefpunkt bei $T(1.0|-1.0)$

Wendepunkte (Notwendige Bedingung):

$$f''(x) = 0$$
$$\text{mit CAS:} \qquad x = 0.56 \quad : \quad f(0.56) = -0.47$$

1. Möglichkeit: 3. Ableitung untersuchen

$$f'''(0.56) = 18.0 \neq 0$$

$\Rightarrow$ Wendepunkt bei $W(0.56|-0.47)$

2. Möglichkeit: 2. Ableitung auf Vorzeichenwechsel untersuchen.

$$f''(0.46) = -1.8 \quad \Rightarrow \text{ Rechtskrümmung}$$
$$f''(0.66) = 1.8 \quad \Rightarrow \text{ Linkskrümmung}$$

$\Rightarrow$ Wendepunkt bei $W(0.56|-0.47)$

Aufgabe 5:

$$f(x) = -3x^4$$

Funktion und Ableitung:

$$\begin{aligned} f(x) &= -3x^4 \\ f'(x) &= -12x^3 \\ f''(x) &= -36x^2 \\ f'''(x) &= -72x \end{aligned}$$

Verhalten im Unendlichen:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$$

Nullstellen:

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ \text{mit CAS:} \qquad x &= 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Nullstelle bei $N(0|0)$

Symmetrie:

$$f(-x) = -3(-x)^4 = -3x^4 = f(x)$$

$$\Rightarrow \text{achsensymmetrich zur } y\text{-Achse}$$

Extrempunkte (Notwendige Bedingung):

$$\begin{aligned} f'(x) =& 0 \\ \text{mit CAS:} \qquad x =& 0 \quad : \quad f(0) = 0 \end{aligned}$$

Art der Extrempunkte ermitteln:

1. Möglichkeit: Funktionswerte in einer genügend kleinen Umgebung vergleichen

$$f(-0.1) = -0.0003 < f(0) = 0 > f(0.1) = -0.0003$$

$\Rightarrow$ Hochpunkt bei $(0|0)$

2. Möglichkeit: Monotonieverhalten untersuchen

$$f'(-0.1) = 0.012 \quad \Rightarrow \text{ monoton steigend}$$

$$f'(0) = 0 \quad \Rightarrow \text{ waagerechte Tangente}$$

$$f'(0.1) = -0.012 \quad \Rightarrow \text{ monoton fallend}$$

$\Rightarrow$ Hochpunkt bei $(0|0)$

3. Möglichkeit: Krümmungsverhalten untersuchen

$$f''(0) = 0$$

$\Rightarrow$ Keine Entscheidung möglich.

Wendepunkte (Notwendige Bedingung):

$$\begin{aligned} f''(x) =& 0 \\ \text{mit CAS:} \qquad x =& 0 \quad : \quad f(0) = 0 \end{aligned}$$

1. Möglichkeit: 3. Ableitung untersuchen

$$f'''(0) = 0$$

$\Rightarrow$ Keine Entscheidung möglich.
2. Möglichkeit: 2. Ableitung auf Vorzeichenwechsel untersuchen.

$$f''(-0.1) = -0.36 \quad \Rightarrow \text{ Rechtskrümmung}$$

$$f''(0.1) = -0.36 \quad \Rightarrow \text{ Rechtskrümmung}$$

Kein Wendepunkt.

Aufgabe 6:

$$f(x) = x^4 - 5x^3$$

Funktion und Ableitung:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^4 - 5x^3 \\ f'(x) &= 4x^3 - 15x^2 \\ f''(x) &= 6x\,(2x-5) \\ f'''(x) &= 6\,(4x-5) \end{aligned}$$

Verhalten im Unendlichen:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

Nullstellen:

$$\begin{aligned} & f(x) = 0 \\ \text{mit CAS:}\qquad & x_1 = 0 \\ & x_2 = 5.0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Nullstelle bei $N_1(0|0)$
$\Rightarrow$ Nullstelle bei $N_2(5.0|0)$
Symmetrie: keine Symmetrie
Extrempunkte (Notwendige Bedingung):

$$\begin{aligned} & f'(x) = 0 \\ \text{mit CAS:}\qquad & x_1 = 0 \quad : \quad f(0) = 0 \\ & x_2 = 3.8 \quad : \quad f(3.8) = -66.0 \end{aligned}$$

Art der Extrempunkte ermitteln:

1. Möglichkeit: Funktionswerte in einer genügend kleinen Umgebung vergleichen

$$f(-0.1) = 0.0051 > f(0) = 0 > f(0.1) = -0.0049$$

$\Rightarrow$ Sattelpunkt bei $(0|0)$

$$f(3.6) = -65.6 > f(3.8) = -65.9 < f(3.9) = -65.6$$

$\Rightarrow$ Tiefpunkt bei $(3.8|-66.0)$

2. Möglichkeit: Monotonieverhalten untersuchen

$$f'(-0.1) = -0.154 \quad \Rightarrow \text{ monoton fallend}$$

$$f'(0) = 0 \quad \Rightarrow \text{ waagerechte Tangente}$$

$$f'(0.1) = -0.146 \quad \Rightarrow \text{ monoton fallend}$$

$\Rightarrow$ Sattelpunkt bei $(0|0)$

$$f'(3.6) = -5.33 \quad \Rightarrow \text{ monoton fallend}$$
$$f'(3.8) = 0 \quad \Rightarrow \text{ waagerechte Tangente}$$
$$f'(3.9) = 5.93 \quad \Rightarrow \text{ monoton steigend}$$

$\Rightarrow$ Tiefpunkt bei $(3.8|-66.0)$

3. Möglichkeit: Krümmungsverhalten untersuchen

$$f''(0) = 0$$

$\Rightarrow$ Keine Entscheidung möglich.

$$f''(3.8) = 56.0 > 0$$

$\Rightarrow$ Tiefpunkt bei $T(3.8|-66.0)$

Wendepunkte (Notwendige Bedingung):

$$\begin{aligned} f''(x) &= 0 \\ \text{mit CAS:} \quad x_1 &= 0 \quad : \quad f(0) = 0 \\ x_2 &= 2.5 \quad : \quad f(2.5) = -39.0 \end{aligned}$$

1. Möglichkeit: 3. Ableitung untersuchen

$$f'''(0) = -30.0 \neq 0$$

$\Rightarrow$ Wendepunkt bei $W_1(0|0)$

$$f'''(2.5) = 30.0 \neq 0$$

$\Rightarrow$ Wendepunkt bei $W_2(2.5|-39.0)$

2. Möglichkeit: 2. Ableitung auf Vorzeichenwechsel untersuchen.

$$f''(-0.1) = 3.12 \quad \Rightarrow \text{ Linkskrümmung}$$
$$f''(0.1) = -2.88 \quad \Rightarrow \text{ Rechtskrümmung}$$

$\Rightarrow$ Wendepunkt bei $W_1(0|0)$

$$f''(2.4) = -2.88 \quad \Rightarrow \text{ Rechtskrümmung}$$
$$f''(2.6) = 3.12 \quad \Rightarrow \text{ Linkskrümmung}$$

$\Rightarrow$ Wendepunkt bei $W_2(2.5|-39.0)$

Aufgabe 7:

$$f(x) = 2x^4 - 4x^2$$

Funktion und Ableitung:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^4 - 4x^2 \\ f'(x) &= 8x^3 - 8x \\ f''(x) &= 8\left(3x^2 - 1\right) \\ f'''(x) &= 48x \end{aligned}$$

Verhalten im Unendlichen:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

Nullstellen:

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ \text{mit CAS:} \qquad x_1 &= 0 \\ x_2 &= -1.4 \\ x_3 &= 1.4 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Nullstelle bei $N_1(0|0)$
$\Rightarrow$ Nullstelle bei $N_2(-1.4|0)$
$\Rightarrow$ Nullstelle bei $N_3(1.4|0)$

Symmetrie:

$$f(-x) = 2(-x)^4 - 4(-x)^2 = 2x^4 - 4x^2 = f(x)$$

$$\Rightarrow \text{achsensymmetrich zur } y\text{-Achse}$$

Extrempunkte (Notwendige Bedingung):

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ \text{mit CAS:} \qquad x_1 &= -1.0 \quad : \quad f(-1.0) = -2.0 \\ x_2 &= 0 \quad : \quad f(0) = 0 \\ x_3 &= 1.0 \quad : \quad f(1.0) = -2.0 \end{aligned}$$

Art der Extrempunkte ermitteln:

1. Möglichkeit: Funktionswerte in einer genügend kleinen Umgebung vergleichen

$$f(-1.1) = -1.91 > f(-1.0) = -2.0 < f(-0.9) = -1.93$$

$\Rightarrow$ Tiefpunkt bei $(-1.0| - 2.0)$

$$f(-0.1) = -0.0398 < f(0) = 0 > f(0.1) = -0.0398$$

$\Rightarrow$ Hochpunkt bei $(0|0)$

$$f(0.9) = -1.93 > f(1.0) = -2.0 < f(1.1) = -1.91$$

$\Rightarrow$ Tiefpunkt bei $(1.0|-2.0)$

2. Möglichkeit: Monotonieverhalten untersuchen

$$f'(-1.1) = -1.85 \quad \Rightarrow \text{ monoton fallend}$$
$$f'(-1.0) = 0 \quad \Rightarrow \text{ waagerechte Tangente}$$
$$f'(-0.9) = 1.37 \quad \Rightarrow \text{ monoton steigend}$$

$\Rightarrow$ Tiefpunkt bei $(-1.0|-2.0)$

$$f'(-0.1) = 0.792 \quad \Rightarrow \text{ monoton steigend}$$
$$f'(0) = 0 \quad \Rightarrow \text{ waagerechte Tangente}$$
$$f'(0.1) = -0.792 \quad \Rightarrow \text{ monoton fallend}$$

$\Rightarrow$ Hochpunkt bei $(0|0)$

$$f'(0.9) = -1.37 \quad \Rightarrow \text{ monoton fallend}$$
$$f'(1.0) = 0 \quad \Rightarrow \text{ waagerechte Tangente}$$
$$f'(1.1) = 1.85 \quad \Rightarrow \text{ monoton steigend}$$

$\Rightarrow$ Tiefpunkt bei $(1.0|-2.0)$

3. Möglichkeit: Krümmungsverhalten untersuchen

$$f''(-1.0) = 16.0 > 0$$

$\Rightarrow$ Tiefpunkt bei $T(-1.0|-2.0)$

$$f''(0) = -8.0 < 0$$

$\Rightarrow$ Hochpunkt bei $H(0|0)$

$$f''(1.0) = 16.0 > 0$$

$\Rightarrow$ Tiefpunkt bei $T(1.0|-2.0)$

Wendepunkte (Notwendige Bedingung):

$$\begin{aligned} f''(x) &= 0 \\ \text{mit CAS:} \qquad x_1 &= -0.58 \quad : \quad f(-0.58) = -1.1 \\ x_2 &= 0.58 \qquad : \quad f(0.58) \;\; = -1.1 \end{aligned}$$

1. Möglichkeit: 3. Ableitung untersuchen

$$f'''(-0.58) = -28.0 \neq 0$$

$\Rightarrow$ Wendepunkt bei $W_1(-0.58|-1.1)$

$$f'''(0.58) = 28.0 \neq 0$$

$\Rightarrow$ Wendepunkt bei $W_2(0.58|-1.1)$

2. Möglichkeit: 2. Ableitung auf Vorzeichenwechsel untersuchen.

$$f''(-0.68) = 3.01 \quad \Rightarrow \text{ Linkskrümmung}$$
$$f''(-0.48) = -2.53 \quad \Rightarrow \text{ Rechtskrümmung}$$

$\Rightarrow$ Wendepunkt bei $W_1(-0.58| - 1.1)$

$$f''(0.48) = -2.53 \quad \Rightarrow \text{ Rechtskrümmung}$$
$$f''(0.68) = 3.01 \quad \Rightarrow \text{ Linkskrümmung}$$

$\Rightarrow$ Wendepunkt bei $W_2(0.58| - 1.1)$

Aufgabe 8:

$$f(x) = 3x^4 - 5x^3 - 4x^2$$

Funktion und Ableitung:

$$\begin{aligned}
f(x) &= 3x^4 - 5x^3 - 4x^2 \\
f'(x) &= 12x^3 - 15x^2 - 8x \\
f''(x) &= 2\left(18x^2 - 15x - 4\right) \\
f'''(x) &= 6\left(12x - 5\right)
\end{aligned}$$

Verhalten im Unendlichen:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

Nullstellen:

$$\begin{aligned}
& f(x) = 0 \\
\text{mit CAS:}\quad & x_1 = 0 \\
& x_2 = 2.3 \\
& x_3 = -0.59
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Nullstelle bei $N_1(0|0)$
$\Rightarrow$ Nullstelle bei $N_2(2.3|0)$
$\Rightarrow$ Nullstelle bei $N_3(-0.59|0)$
Symmetrie: keine Symmetrie
Extrempunkte (Notwendige Bedingung):

$$\begin{aligned}
& f'(x) = 0 \\
\text{mit CAS:}\quad & x_1 = 0 \quad &&: \quad f(0) = 0 \\
& x_2 = 1.7 \quad &&: \quad f(1.7) = -11.0 \\
& x_3 = -0.4 \quad &&: \quad f(-0.4) = -0.24
\end{aligned}$$

Art der Extrempunkte ermitteln:

1. Möglichkeit: Funktionswerte in einer genügend kleinen Umgebung vergleichen

$$f(-0.1) = -0.0347 < f(0) = 0 > f(0.1) = -0.0447$$

$\Rightarrow$ Hochpunkt bei $(0|0)$

$$f(1.6) = -10.9 > f(1.7) = -11.1 < f(1.8) = -10.9$$

$\Rightarrow$ Tiefpunkt bei $(1.7|-11.0)$

$$f(-0.5) = -0.183 > f(-0.4) = -0.243 < f(-0.3) = -0.203$$

$\Rightarrow$ Tiefpunkt bei $(-0.4|-0.24)$

2. Möglichkeit: Monotonieverhalten untersuchen

$$f'(-0.1) = 0.638 \quad \Rightarrow \text{ monoton steigend}$$
$$f'(0) = 0 \quad \Rightarrow \text{ waagerechte Tangente}$$
$$f'(0.1) = -0.938 \quad \Rightarrow \text{ monoton fallend}$$

$\Rightarrow$ Hochpunkt bei $(0|0)$

$$f'(1.6) = -3.65 \quad \Rightarrow \text{ monoton fallend}$$
$$f'(1.7) = 0 \quad \Rightarrow \text{ waagerechte Tangente}$$
$$f'(1.8) = 4.54 \quad \Rightarrow \text{ monoton steigend}$$

$\Rightarrow$ Tiefpunkt bei $(1.7| - 11.0)$

$$f'(-0.5) = -1.3 \quad \Rightarrow \text{ monoton fallend}$$
$$f'(-0.4) = 0 \quad \Rightarrow \text{ waagerechte Tangente}$$
$$f'(-0.3) = 0.712 \quad \Rightarrow \text{ monoton steigend}$$

$\Rightarrow$ Tiefpunkt bei $(-0.4| - 0.24)$

3. Möglichkeit: Krümmungsverhalten untersuchen

$$f''(0) = -8.0 < 0$$

$\Rightarrow$ Hochpunkt bei $H(0|0)$

$$f''(1.7) = 41.0 > 0$$

$\Rightarrow$ Tiefpunkt bei $T(1.7| - 11.0)$

$$f''(-0.4) = 10.0 > 0$$

$\Rightarrow$ Tiefpunkt bei $T(-0.4| - 0.24)$

Wendepunkte (Notwendige Bedingung):

$$\begin{aligned} f''(x) &= 0 \\ \text{mit CAS:} \qquad x_1 &= 1.0 \qquad : \quad f(1.0) &&= -6.5 \\ x_2 &= -0.21 \quad : \quad f(-0.21) &&= -0.13 \end{aligned}$$

1. Möglichkeit: 3. Ableitung untersuchen

$$f'''(1.0) = 45.0 \neq 0$$

$\Rightarrow$ Wendepunkt bei $W_1(1.0| - 6.5)$

$$f'''(-0.21) = -45.0 \neq 0$$

$\Rightarrow$ Wendepunkt bei $W_2(-0.21| - 0.13)$

2. Möglichkeit: 2. Ableitung auf Vorzeichenwechsel untersuchen.

$$f''(0.95) = -4.17 \quad \Rightarrow \text{ Rechtskrümmung}$$

$$f''(1.1) = 4.89 \quad \Rightarrow \text{ Linkskrümmung}$$

$\Rightarrow$ Wendepunkt bei $W_1(1.0| - 6.5)$

$$f''(-0.31) = 4.89 \quad \Rightarrow \text{ Linkskrümmung}$$

$$f''(-0.11) = -4.17 \quad \Rightarrow \text{ Rechtskrümmung}$$

$\Rightarrow$ Wendepunkt bei $W_2(-0.21| - 0.13)$