Aufgabe 1:

$$f(x) = -4x^3$$

Funktion und Ableitung:

$$\begin{aligned} f(x) &= -4x^3 \\ f'(x) &= -12x^2 \\ f''(x) &= -24x \end{aligned}$$

Verhalten im Unendlichen:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$$

Nullstellen:

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ -4x^3 &= 0 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Nullstelle bei $N(0|0)$

Extrempunkte (Notwendige Bedingung):

$$\begin{aligned} f'(x) =& 0 \\ -12x^2 =& 0 \\ x =& 0 \quad : \quad f(0) = 0 \end{aligned}$$

Art der Extrempunkte ermitteln:

1. Möglichkeit: Funktionswerte in einer genügend kleinen Umgebung vergleichen

$$f(-0.1) = 0.004 > f(0) = 0 > f(0.1) = -0.004$$

$\Rightarrow$ Sattelpunkt bei $(0|0)$

2. Möglichkeit: Monotonieverhalten untersuchen

$$f'(-0.1) = -0.12 \quad \Rightarrow \text{ monoton fallend}$$

$$f'(0) = 0 \quad \Rightarrow \text{ waagerechte Tangente}$$

$$f'(0.1) = -0.12 \quad \Rightarrow \text{ monoton fallend}$$

$\Rightarrow$ Sattelpunkt bei $(0|0)$

Aufgabe 2:

$$f(x) = x^3 + x^2$$

Funktion und Ableitung:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 + x^2 \\ f'(x) &= 3x^2 + 2x \\ f''(x) &= 2\,(3x+1) \end{aligned}$$

Verhalten im Unendlichen:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

Nullstellen:

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ x^3 + x^2 &= 0 \\ x_1 &= -1.0 \\ x_2 &= 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Nullstelle bei $N_1(-1.0|0)$
$\Rightarrow$ Nullstelle bei $N_2(0|0)$

Extrempunkte (Notwendige Bedingung):

$$\begin{aligned} f'(x) =&0 \\ x\,(3x+2) =&0 \\ x_1 =&-0.67 \quad : \quad f(-0.67) = 0.15 \\ x_2 =&0 \quad : \quad f(0) = 0 \end{aligned}$$

Art der Extrempunkte ermitteln:

1. Möglichkeit: Funktionswerte in einer genügend kleinen Umgebung vergleichen

$$f(-0.77) = 0.137 < f(-0.67) = 0.148 > f(-0.57) = 0.139$$

$\Rightarrow$ Hochpunkt bei $(-0.67|0.15)$

$$f(-0.1) = 0.009 > f(0) = 0 < f(0.1) = 0.011$$

$\Rightarrow$ Tiefpunkt bei $(0|0)$

2. Möglichkeit: Monotonieverhalten untersuchen

$$f'(-0.77) = 0.23 \quad \Rightarrow \text{ monoton steigend}$$

$$f'(-0.67) = 0 \quad \Rightarrow \text{ waagerechte Tangente}$$

$$f'(-0.57) = -0.17 \quad \Rightarrow \text{ monoton fallend}$$

$\Rightarrow$ Hochpunkt bei $(-0.67|0.15)$

$$f'(-0.1) = -0.17 \quad \Rightarrow \text{ monoton fallend}$$
$$f'(0) = 0 \quad \Rightarrow \text{ waagerechte Tangente}$$
$$f'(0.1) = 0.23 \quad \Rightarrow \text{ monoton steigend}$$

$\Rightarrow$ Tiefpunkt bei $(0|0)$

Aufgabe 3:

$$f(x) = -3x^3 + 4x$$

Funktion und Ableitung:

$$\begin{aligned} f(x) &= -3x^3 + 4x \\ f'(x) &= -9x^2 + 4 \\ f''(x) &= -18x \end{aligned}$$

Verhalten im Unendlichen:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$$

Nullstellen:

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ -3x^3 + 4x &= 0 \\ x_1 &= 0 \\ x_2 &= -1.2 \\ x_3 &= 1.2 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Nullstelle bei $N_1(0|0)$
$\Rightarrow$ Nullstelle bei $N_2(-1.2|0)$
$\Rightarrow$ Nullstelle bei $N_3(1.2|0)$

Extrempunkte (Notwendige Bedingung):

$$\begin{aligned} f'(x) =& 0 \\ -9x^2 + 4 =& 0 \\ x_1 =& -0.67 && : && f(-0.67) =& -1.8 \\ x_2 =& 0.67 && : && f(0.67) =& 1.8 \end{aligned}$$

Art der Extrempunkte ermitteln:

1. Möglichkeit: Funktionswerte in einer genügend kleinen Umgebung vergleichen

$$f(-0.77) = -1.71 > f(-0.67) = -1.78 < f(-0.57) = -1.72$$

$\Rightarrow$ Tiefpunkt bei $(-0.67|-1.8)$

$$f(0.57) = 1.72 < f(0.67) = 1.78 > f(0.77) = 1.71$$

$\Rightarrow$ Hochpunkt bei $(0.67|1.8)$

2. Möglichkeit: Monotonieverhalten untersuchen

$$f'(-0.77) = -1.29 \quad \Rightarrow \text{ monoton fallend}$$

$$f'(-0.67) = 0 \quad \Rightarrow \text{ waagerechte Tangente}$$

$$f'(-0.57) = 1.11 \quad \Rightarrow \text{ monoton steigend}$$

$\Rightarrow$ Tiefpunkt bei $(-0.67|-1.8)$

$$f'(0.57) = 1.11 \quad \Rightarrow \text{ monoton steigend}$$

$$f'(0.67) = 0 \quad \Rightarrow \text{ waagerechte Tangente}$$

$$f'(0.77) = -1.29 \quad \Rightarrow \text{ monoton fallend}$$

$\Rightarrow$ Hochpunkt bei $(0.67|1.8)$

Aufgabe 4:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 4x$$

Funktion und Ableitung:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - 3x^2 - 4x \\ f'(x) &= 3x^2 - 6x - 4 \\ f''(x) &= 6\,(x-1) \end{aligned}$$

Verhalten im Unendlichen:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

Nullstellen:

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ x^3 - 3x^2 - 4x &= 0 \\ x_1 &= -1.0 \\ x_2 &= 0 \\ x_3 &= 4.0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Nullstelle bei $N_1(-1.0|0)$
$\Rightarrow$ Nullstelle bei $N_2(0|0)$
$\Rightarrow$ Nullstelle bei $N_3(4.0|0)$

Extrempunkte (Notwendige Bedingung):

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ 3x^2 - 6x - 4 &= 0 \\ x_1 &= 2.5 \quad &: \quad f(2.5) &= -13.0 \\ x_2 &= -0.53 \quad &: \quad f(-0.53) &= 1.1 \end{aligned}$$

Art der Extrempunkte ermitteln:

1. Möglichkeit: Funktionswerte in einer genügend kleinen Umgebung vergleichen

$$f(2.4) = -13.1 > f(2.5) = -13.1 < f(2.6) = -13.1$$

$\Rightarrow$ Tiefpunkt bei $(2.5|-13.0)$

$$f(-0.63) = 1.08 < f(-0.53) = 1.13 > f(-0.43) = 1.08$$

$\Rightarrow$ Hochpunkt bei $(-0.53|1.1)$

2. Möglichkeit: Monotonieverhalten untersuchen

$$f'(2.4) = -0.886 \quad \Rightarrow \text{ monoton fallend}$$

$$f'(2.5) = 0 \quad \Rightarrow \text{ waagerechte Tangente}$$

$$f'(2.6) = 0.947 \quad \Rightarrow \text{ monoton steigend}$$

$\Rightarrow$ Tiefpunkt bei $(2.5|-13.0)$

$$f'(-0.63) = 0.947 \quad \Rightarrow \text{ monoton steigend}$$
$$f'(-0.53) = 0 \quad \Rightarrow \text{ waagerechte Tangente}$$
$$f'(-0.43) = -0.886 \quad \Rightarrow \text{ monoton fallend}$$

$\Rightarrow$ Hochpunkt bei $(-0.53|1.1)$

Aufgabe 5:

$$f(x) = x^3 + x^2 + x - 4$$

Funktion und Ableitung:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 + x^2 + x - 4 \\ f'(x) &= 3x^2 + 2x + 1 \\ f''(x) &= 2\,(3x + 1) \end{aligned}$$

Verhalten im Unendlichen:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

Nullstellen:

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ x^3 + x^2 + x - 4 &= 0 \\ x &= 1.2 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Nullstelle bei $N(1.2|0)$

Extrempunkte (Notwendige Bedingung):

$$\begin{aligned} f'(x) =& 0 \\ 3x^2 + 2x + 1 =& 0 \end{aligned}$$

Keine Lösung $\Rightarrow$ Keine Extrempunkte

Art der Extrempunkte ermitteln:

1. Möglichkeit: Funktionswerte in einer genügend kleinen Umgebung vergleichen

2. Möglichkeit: Monotonieverhalten untersuchen