**Aufgabe 1:**

$$f(x) = 3x^3$$

**Funktion und Ableitung:**

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x^3 \\ f'(x) &= 9x^2 \\ f''(x) &= 18x \end{aligned}$$

**Verhalten im Unendlichen:**

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

**Nullstellen:**

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ 3x^3 &= 0 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Nullstelle bei $N(0|0)$

**Symmetrie:**

$$f(-x) = 3(-x)^3 = -3x^3 = -(3x^3) = -f(x)$$

$$\Rightarrow \text{punktsymmetrisch zum Ursprung}$$

**Extrempunkte (Notwendige Bedingung):**

$$\begin{aligned} f'(x) =& 0 \\ 9x^2 =& 0 \\ x =& 0 \quad : \quad f(0) = 0 \end{aligned}$$

**Art der Extrempunkte ermitteln:**

*1. Möglichkeit:* Funktionswerte in einer genügend kleinen Umgebung vergleichen

$$f(-0.1) = -0.003 < f(0) = 0 < f(0.1) = 0.003$$

$\Rightarrow$ Sattelpunkt bei $(0|0)$

*2. Möglichkeit:* Monotonieverhalten untersuchen

$$f'(-0.1) = 0.09 \quad \Rightarrow \text{ monoton steigend}$$

$$f'(0) = 0 \quad \Rightarrow \text{ waagerechte Tangente}$$

$$f'(0.1) = 0.09 \quad \Rightarrow \text{ monoton steigend}$$

$\Rightarrow$ Sattelpunkt bei $(0|0)$

*3. Möglichkeit:* Krümmungsverhalten untersuchen

$$f''(0) = 0$$

$\Rightarrow$ Keine Entscheidung möglich.

**Wendepunkte (Notwendige Bedingung):**

$$\begin{aligned} f''(x) &= 0 \\ 18x &= 0 \\ x &= 0 \quad : \quad f(0) = 0 \end{aligned}$$

**Aufgabe 2:**

$$f(x) = 5x^3 + 2x^2$$

**Funktion und Ableitung:**

$$f(x) = 5x^3 + 2x^2$$
$$f'(x) = 15x^2 + 4x$$
$$f''(x) = 2(15x + 2)$$

**Verhalten im Unendlichen:**

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$
$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

**Nullstellen:**

$$f(x) = 0$$
$$5x^3 + 2x^2 = 0$$
$$x_1 = -0.4$$
$$x_2 = 0$$

$\Rightarrow$ Nullstelle bei $N_1(-0.4|0)$
$\Rightarrow$ Nullstelle bei $N_2(0|0)$
**Symmetrie:** keine Symmetrie
**Extrempunkte (Notwendige Bedingung):**

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ x(15x + 4) &= 0 \\ x_1 &= -0.27 \quad : \quad f(-0.27) = 0.047 \\ x_2 &= 0 \quad : \quad f(0) = 0 \end{aligned}$$

**Art der Extrempunkte ermitteln:**

*1. Möglichkeit:* Funktionswerte in einer genügend kleinen Umgebung vergleichen

$$f(-0.37) = 0.0224 < f(-0.27) = 0.0474 > f(-0.17) = 0.0324$$

$\Rightarrow$ Hochpunkt bei $(-0.27|0.047)$

$$f(-0.1) = 0.015 > f(0) = 0 < f(0.1) = 0.025$$

$\Rightarrow$ Tiefpunkt bei $(0|0)$

*2. Möglichkeit:* Monotonieverhalten untersuchen

$$f'(-0.37) = 0.55 \quad \Rightarrow \text{ monoton steigend}$$
$$f'(-0.27) = 0 \quad \Rightarrow \text{ waagerechte Tangente}$$
$$f'(-0.17) = -0.25 \quad \Rightarrow \text{ monoton fallend}$$

$\Rightarrow$ Hochpunkt bei $(-0.27|0.047)$

$$f'(-0.1) = -0.25 \quad \Rightarrow \text{ monoton fallend}$$
$$f'(0) = 0 \quad \Rightarrow \text{ waagerechte Tangente}$$
$$f'(0.1) = 0.55 \quad \Rightarrow \text{ monoton steigend}$$

$\Rightarrow$ Tiefpunkt bei $(0|0)$

*3. Möglichkeit:* Krümmungsverhalten untersuchen

$$f''(-0.27) = -4.0 < 0$$

$\Rightarrow$ Hochpunkt bei $H(-0.27|0.047)$

$$f''(0) = 4.0 > 0$$

$\Rightarrow$ Tiefpunkt bei $T(0|0)$

**Wendepunkte (Notwendige Bedingung):**

$$\begin{aligned} f''(x) &= 0 \\ 30x + 4 &= 0 \\ x &= -0.13 \quad : \quad f(-0.13) = 0.024 \end{aligned}$$

**Aufgabe 3:**

$$f(x) = -5x^3 - 2x$$

**Funktion und Ableitung:**

$$\begin{aligned} f(x) &= -5x^3 - 2x \\ f'(x) &= -15x^2 - 2 \\ f''(x) &= -30x \end{aligned}$$

**Verhalten im Unendlichen:**

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$$

**Nullstellen:**

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ -5x^3 - 2x &= 0 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Nullstelle bei $N(0|0)$

**Symmetrie:**

$$f(-x) = -5(-x)^3 - 2(-x) = 5x^3 + 2x = -(-5x^3 - 2x) = -f(x)$$

$$\Rightarrow \text{punktsymmetrisch zum Ursprung}$$

**Extrempunkte (Notwendige Bedingung):**

$$\begin{aligned} f'(x) =& 0 \\ -15x^2 - 2 =& 0 \end{aligned}$$

Keine Lösung $\Rightarrow$ Keine Extrempunkte

**Art der Extrempunkte ermitteln:**

*1. Möglichkeit:* Funktionswerte in einer genügend kleinen Umgebung vergleichen
*2. Möglichkeit:* Monotonieverhalten untersuchen
*3. Möglichkeit:* Krümmungsverhalten untersuchen

**Wendepunkte (Notwendige Bedingung):**

$$\begin{aligned} f''(x) =& 0 \\ -30x =& 0 \\ x =& 0 \quad : \quad f(0) = 0 \end{aligned}$$

**Aufgabe 4:**

$$f(x) = -x^3 + 4x^2 + 5x$$

**Funktion und Ableitung:**

$$f(x) = -x^3 + 4x^2 + 5x$$
$$f'(x) = -3x^2 + 8x + 5$$
$$f''(x) = 2(-3x + 4)$$

**Verhalten im Unendlichen:**

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$$
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$$

**Nullstellen:**

$$f(x) = 0$$
$$-x^3 + 4x^2 + 5x = 0$$
$$x_1 = -1.0$$
$$x_2 = 0$$
$$x_3 = 5.0$$

$\Rightarrow$ Nullstelle bei $N_1(-1.0|0)$
$\Rightarrow$ Nullstelle bei $N_2(0|0)$
$\Rightarrow$ Nullstelle bei $N_3(5.0|0)$
**Symmetrie:** keine Symmetrie
**Extrempunkte (Notwendige Bedingung):**

$$f'(x) = 0$$
$$-3x^2 + 8x + 5 = 0$$
$$x_1 = 3.2 \quad : \quad f(3.2) = 24.0$$
$$x_2 = -0.52 \quad : \quad f(-0.52) = -1.4$$

**Art der Extrempunkte ermitteln:**

*1. Möglichkeit:* Funktionswerte in einer genügend kleinen Umgebung vergleichen

$$f(3.1) = 24.1 < f(3.2) = 24.2 > f(3.3) = 24.1$$

$\Rightarrow$ Hochpunkt bei $(3.2|24.0)$

$$f(-0.62) = -1.32 > f(-0.52) = -1.38 < f(-0.42) = -1.32$$

$\Rightarrow$ Tiefpunkt bei $(-0.52|-1.4)$

*2. Möglichkeit:* Monotonieverhalten untersuchen

$$f'(3.1) = 1.08 \quad \Rightarrow \text{ monoton steigend}$$
$$f'(3.2) = 0 \quad \Rightarrow \text{ waagerechte Tangente}$$

$$f'(3.3) = -1.14 \quad \Rightarrow \text{ monoton fallend}$$

$\Rightarrow$ Hochpunkt bei $(3.2|24.0)$

$$f'(-0.62) = -1.14 \quad \Rightarrow \text{ monoton fallend}$$
$$f'(-0.52) = 0 \quad \Rightarrow \text{ waagerechte Tangente}$$
$$f'(-0.42) = 1.08 \quad \Rightarrow \text{ monoton steigend}$$

$\Rightarrow$ Tiefpunkt bei $(-0.52|-1.4)$

*3. Möglichkeit:* Krümmungsverhalten untersuchen

$$f''(3.2) = -11.0 < 0$$

$\Rightarrow$ Hochpunkt bei $H(3.2|24.0)$

$$f''(-0.52) = 11.0 > 0$$

$\Rightarrow$ Tiefpunkt bei $T(-0.52|-1.4)$

**Wendepunkte (Notwendige Bedingung):**

$$\begin{aligned} f''(x) &= 0 \\ -6x+8 &= 0 \\ x &= 1.3 \quad : \quad f(1.3) = 11.0 \end{aligned}$$

**Aufgabe 5:**

$$f(x) = 3x^4$$

**Funktion und Ableitung:**

$$f(x) = 3x^4$$
$$f'(x) = 12x^3$$
$$f''(x) = 36x^2$$

**Verhalten im Unendlichen:**

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$$
$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

**Nullstellen:**

$$f(x) = 0$$
$$3x^4 = 0$$
$$x = 0$$

$\Rightarrow$ Nullstelle bei $N(0|0)$

**Symmetrie:**

$$f(-x) = 3(-x)^4 = 3x^4 = f(x)$$

$\Rightarrow$ achsensymmetrich zur $y$-Achse

**Extrempunkte (Notwendige Bedingung):**

$$f'(x) = 0$$
$$12x^3 = 0$$
$$x = 0 \quad : \quad f(0) = 0$$

**Art der Extrempunkte ermitteln:**

*1. Möglichkeit:* Funktionswerte in einer genügend kleinen Umgebung vergleichen

$$f(-0.1) = 0.0003 > f(0) = 0 < f(0.1) = 0.0003$$

$\Rightarrow$ Tiefpunkt bei $(0|0)$

*2. Möglichkeit:* Monotonieverhalten untersuchen

$$f'(-0.1) = -0.012 \quad \Rightarrow \text{ monoton fallend}$$
$$f'(0) = 0 \quad \Rightarrow \text{ waagerechte Tangente}$$
$$f'(0.1) = 0.012 \quad \Rightarrow \text{ monoton steigend}$$

$\Rightarrow$ Tiefpunkt bei $(0|0)$

*3. Möglichkeit:* Krümmungsverhalten untersuchen

$$f''(0) = 0$$

$\Rightarrow$ Keine Entscheidung möglich.

**Wendepunkte (Notwendige Bedingung):**

$$\begin{aligned} f''(x) &= 0 \\ 36x^2 &= 0 \\ x &= 0 \quad : \quad f(0) = 0 \end{aligned}$$

**Aufgabe 6:**

$$f(x) = -x^4 + 3x^3$$

**Funktion und Ableitung:**

$$f(x) = -x^4 + 3x^3$$
$$f'(x) = -4x^3 + 9x^2$$
$$f''(x) = 6x\,(-2x + 3)$$

**Verhalten im Unendlichen:**

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$$

**Nullstellen:**

$$f(x) = 0$$
$$-x^4 + 3x^3 = 0$$
$$x_1 = 0$$
$$x_2 = 3.0$$

$\Rightarrow$ Nullstelle bei $N_1(0|0)$
$\Rightarrow$ Nullstelle bei $N_2(3.0|0)$
**Symmetrie:** keine Symmetrie
**Extrempunkte (Notwendige Bedingung):**

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ x^2\,(-4x + 9) &= 0 \\ x_1 &= 0 \quad : \quad f(0) = 0 \\ x_2 &= 2.3 \quad : \quad f(2.3) = 8.6 \end{aligned}$$

**Art der Extrempunkte ermitteln:**

*1. Möglichkeit:* Funktionswerte in einer genügend kleinen Umgebung vergleichen

$$f(-0.1) = -0.0031 < f(0) = 0 < f(0.1) = 0.0029$$

$\Rightarrow$ Sattelpunkt bei $(0|0)$

$$f(2.1) = 8.45 < f(2.3) = 8.54 > f(2.4) = 8.44$$

$\Rightarrow$ Hochpunkt bei $(2.3|8.5)$

*2. Möglichkeit:* Monotonieverhalten untersuchen

$$f'(-0.1) = 0.094 \quad \Rightarrow \text{ monoton steigend}$$

$$f'(0) = 0 \quad \Rightarrow \text{ waagerechte Tangente}$$

$$f'(0.1) = 0.086 \quad \Rightarrow \text{ monoton steigend}$$

$\Rightarrow$ Sattelpunkt bei $(0|0)$

$$f'(2.1) = 1.85 \quad \Rightarrow \text{ monoton steigend}$$
$$f'(2.3) = 0 \quad \Rightarrow \text{ waagerechte Tangente}$$
$$f'(2.4) = -2.21 \quad \Rightarrow \text{ monoton fallend}$$

$\Rightarrow$ Hochpunkt bei $(2.3|8.5)$

*3. Möglichkeit:* Krümmungsverhalten untersuchen

$$f''(0) = 0$$

$\Rightarrow$ Keine Entscheidung möglich.

$$f''(2.3) = -20.0 < 0$$

$\Rightarrow$ Hochpunkt bei $H(2.3|8.5)$

**Wendepunkte (Notwendige Bedingung):**

$$\begin{aligned} f''(x) &= 0 \\ 6x\,(-2x+3) &= 0 \\ x_1 &= 0 \quad &: \quad f(0) &= 0 \\ x_2 &= 1.5 \quad &: \quad f(1.5) &= 5.1 \end{aligned}$$

**Aufgabe 7:**

$$f(x) = 3x^4 - 3x^2$$

**Funktion und Ableitung:**

$$f(x) = 3x^4 - 3x^2$$
$$f'(x) = 12x^3 - 6x$$
$$f''(x) = 6\left(6x^2 - 1\right)$$

**Verhalten im Unendlichen:**

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$$
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

**Nullstellen:**

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ 3x^4 - 3x^2 &= 0 \\ x_1 &= -1.0 \\ x_2 &= 0 \\ x_3 &= 1.0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Nullstelle bei $N_1(-1.0|0)$
$\Rightarrow$ Nullstelle bei $N_2(0|0)$
$\Rightarrow$ Nullstelle bei $N_3(1.0|0)$
**Symmetrie:**

$$f(-x) = 3(-x)^4 - 3(-x)^2 = 3x^4 - 3x^2 = f(x)$$
$$\Rightarrow \text{achsensymmetrich zur } y\text{-Achse}$$

**Extrempunkte (Notwendige Bedingung):**

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ 12x^3 - 6x &= 0 \\ x_1 &= 0 && : \quad f(0) &&= 0 \\ x_2 &= -0.71 && : \quad f(-0.71) &&= -0.75 \\ x_3 &= 0.71 && : \quad f(0.71) &&= -0.75 \end{aligned}$$

**Art der Extrempunkte ermitteln:**

*1. Möglichkeit:* Funktionswerte in einer genügend kleinen Umgebung vergleichen

$$f(-0.1) = -0.0297 < f(0) = 0 > f(0.1) = -0.0297$$

$\Rightarrow$ Hochpunkt bei $(0|0)$

$$f(-0.81) = -0.681 > f(-0.71) = -0.75 < f(-0.61) = -0.698$$

$\Rightarrow$ Tiefpunkt bei $(-0.71|-0.75)$

$$f(0.61) = -0.698 > f(0.71) = -0.75 < f(0.81) = -0.681$$

$\Rightarrow$ Tiefpunkt bei $(0.71| - 0.75)$

*2. Möglichkeit:* Monotonieverhalten untersuchen

$$f'(-0.1) = 0.588 \quad \Rightarrow \text{ monoton steigend}$$
$$f'(0) = 0 \quad \Rightarrow \text{ waagerechte Tangente}$$
$$f'(0.1) = -0.588 \quad \Rightarrow \text{ monoton fallend}$$

$\Rightarrow$ Hochpunkt bei $(0|0)$

$$f'(-0.81) = -1.47 \quad \Rightarrow \text{ monoton fallend}$$
$$f'(-0.71) = 0 \quad \Rightarrow \text{ waagerechte Tangente}$$
$$f'(-0.61) = 0.957 \quad \Rightarrow \text{ monoton steigend}$$

$\Rightarrow$ Tiefpunkt bei $(-0.71| - 0.75)$

$$f'(0.61) = -0.957 \quad \Rightarrow \text{ monoton fallend}$$
$$f'(0.71) = 0 \quad \Rightarrow \text{ waagerechte Tangente}$$
$$f'(0.81) = 1.47 \quad \Rightarrow \text{ monoton steigend}$$

$\Rightarrow$ Tiefpunkt bei $(0.71| - 0.75)$

*3. Möglichkeit:* Krümmungsverhalten untersuchen

$$f''(0) = -6.0 < 0$$

$\Rightarrow$ Hochpunkt bei $H(0|0)$

$$f''(-0.71) = 12.0 > 0$$

$\Rightarrow$ Tiefpunkt bei $T(-0.71| - 0.75)$

$$f''(0.71) = 12.0 > 0$$

$\Rightarrow$ Tiefpunkt bei $T(0.71| - 0.75)$

**Wendepunkte (Notwendige Bedingung):**

$$\begin{aligned} f''(x) &= 0 \\ 36x^2 - 6 &= 0 \\ x_1 &= -0.41 \quad : \quad f(-0.41) = -0.42 \\ x_2 &= 0.41 \quad : \quad f(0.41) = -0.42 \end{aligned}$$

**Aufgabe 8:**

$$f(x) = x^4 - 5x^3 - 4x^2$$

**Funktion und Ableitung:**

$$\begin{aligned} f(x) &= x^4 - 5x^3 - 4x^2 \\ f'(x) &= 4x^3 - 15x^2 - 8x \\ f''(x) &= 2\left(6x^2 - 15x - 4\right) \end{aligned}$$

**Verhalten im Unendlichen:**

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

**Nullstellen:**

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ x^4 - 5x^3 - 4x^2 &= 0 \\ x_1 &= 0 \\ x_2 &= 5.7 \\ x_3 &= -0.7 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Nullstelle bei $N_1(0|0)$
$\Rightarrow$ Nullstelle bei $N_2(5.7|0)$
$\Rightarrow$ Nullstelle bei $N_3(-0.7|0)$
**Symmetrie:** keine Symmetrie
**Extrempunkte (Notwendige Bedingung):**

$$\begin{aligned} f'(x) =& 0 \\ x\left(4x^2 - 15x - 8\right) =& 0 \\ x_1 =& 0 && : \quad f(0) &&= 0 \\ x_2 =& 4.2 && : \quad f(4.2) &&= -1.3 \cdot 10^2 \\ x_3 =& -0.47 && : \quad f(-0.47) &&= -0.32 \end{aligned}$$

**Art der Extrempunkte ermitteln:**

*1. Möglichkeit:* Funktionswerte in einer genügend kleinen Umgebung vergleichen

$$f(-0.1) = -0.0349 < f(0) = 0 > f(0.1) = -0.0449$$

$\Rightarrow$ Hochpunkt bei $(0|0)$

$$f(4.1) = -129.0 > f(4.2) = -130.0 < f(4.3) = -129.0$$

$\Rightarrow$ Tiefpunkt bei $(4.2|-1.3 \cdot 10^2)$

$$f(-0.57) = -0.264 > f(-0.47) = -0.316 < f(-0.37) = -0.278$$

$\Rightarrow$ Tiefpunkt bei $(-0.47|-0.32)$

*2. Möglichkeit:* Monotonieverhalten untersuchen

$$f'(-0.1) = 0.646 \quad \Rightarrow \text{ monoton steigend}$$
$$f'(0) = 0 \quad \Rightarrow \text{ waagerechte Tangente}$$
$$f'(0.1) = -0.946 \quad \Rightarrow \text{ monoton fallend}$$

$\Rightarrow$ Hochpunkt bei $(0|0)$

$$f'(4.1) = -7.58 \quad \Rightarrow \text{ monoton fallend}$$
$$f'(4.2) = 0 \quad \Rightarrow \text{ waagerechte Tangente}$$
$$f'(4.3) = 8.3 \quad \Rightarrow \text{ monoton steigend}$$

$\Rightarrow$ Tiefpunkt bei $(4.2|-1.3 \cdot 10^2)$

$$f'(-0.57) = -1.1 \quad \Rightarrow \text{ monoton fallend}$$
$$f'(-0.47) = 0 \quad \Rightarrow \text{ waagerechte Tangente}$$
$$f'(-0.37) = 0.687 \quad \Rightarrow \text{ monoton steigend}$$

$\Rightarrow$ Tiefpunkt bei $(-0.47|-0.32)$

*3. Möglichkeit:* Krümmungsverhalten untersuchen

$$f''(0) = -8.0 < 0$$

$\Rightarrow$ Hochpunkt bei $H(0|0)$

$$f''(4.2) = 79.0 > 0$$

$\Rightarrow$ Tiefpunkt bei $T(4.2|-1.3 \cdot 10^2)$

$$f''(-0.47) = 8.9 > 0$$

$\Rightarrow$ Tiefpunkt bei $T(-0.47|-0.32)$

**Wendepunkte (Notwendige Bedingung):**

$$\begin{aligned} f''(x) &= 0 \\ 12x^2 - 30x - 8 &= 0 \\ x_1 &= 2.7 \quad : \quad f(2.7) = -77.0 \\ x_2 &= -0.24 \quad : \quad f(-0.24) = -0.16 \end{aligned}$$