Очень краткий конспект по ТФКП

Виталий Геннадьевич Курбатов

20 мая 2016 г.

Оглавление

Глава 1

Комплексные числа

1.1 Определение комплексного числа

Комплексным числом называют упорядоченную пару (x, y) действительных чисел, которую обычно записывают в виде $x + iy$. Такую запись называют также *декартовой формой* комплексного числа. Множество всех комплексных чисел обозначают символом $\mathbb{C}$.

x называют *действительной частью*, а y — *мнимой*. Обозначения: $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$. Очевидно, Re и Im можно интерпретировать как функции из $\mathbb{C}$ в $\mathbb{R}$.

Два комплексных числа называют *равными*, если их действительные и мнимые части равны. Тем самым множество $\mathbb{C}$ всех комплексных чисел находится в биективном соответствии с $\mathbb{R}^2$.

В силу этого изоморфизма

- комплексные числа изображают в виде точек или векторов на плоскости;
- определяют сложение в $\mathbb{C}$ и умножение на действительные числа;
- определяют расстояние между комплексными числами и сходимость.

Расширенной комплексной плоскостью называют множество $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \infty$. (Проколотой) r-окрестностью бесконечности называют множество $\{\, z \in \mathbb{C} : |z| > r \,\}$. Подробнее см. § 1.7.

Число $\bar{z} = x - iy$ называют *сопряженным* к числу $z = x + iy$. Операция сопряжения геометрически означает отражение относительно действительной оси.

Произведение комплексных чисел определяют по правилу: если $z_1 = x_1 + iy_1$, а $z_2 = x_2 + iy_2$, то

$$\boxed{z_1 * z_2 = x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + x_2 y_1).}$$

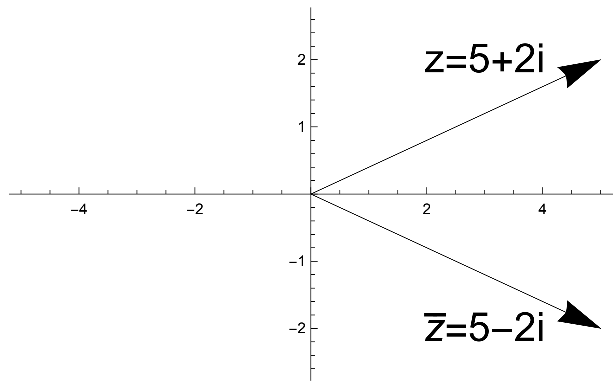

Рис. 1.1: Определение сопряженного числа

Правило для запоминания: надо перемножить все слагаемые, заменить i^2 на -1 и привести подобные.

Теорема 1. *Множество $\mathbb{C}$ всех комплексных чисел образует поле. Это означает, что выполнены следующие 9 аксиом:*

1. *Коммутативность сложения:* $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$.
2. *Ассоциативность сложения:*
   $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$.
3. *Существование нуля:* $\exists \vartheta \in \mathbb{C} \quad \forall z \in \mathbb{C} \qquad z + \vartheta = z$.
4. *Существование противоположного:*
   $\forall z \in \mathbb{C} \quad \exists (-z) \in \mathbb{C} \qquad z + (-z) = \vartheta$.
5. *Коммутативность умножения:* $z_1 * z_2 = z_2 * z_1$.
6. *Ассоциативность умножения:*
   $(z_1 * z_2) * z_3 = z_1 * (z_2 * z_3)$.
7. *Существование единицы:*
   $\exists e \in \mathbb{C} \quad \forall z \in \mathbb{C} \qquad z * e = z$.
8. *Существование обратного:*
   $\forall z \in \mathbb{C} : \ z \neq \vartheta \quad \exists z^{-1} \in \mathbb{C} \qquad z * z^{-1} = e$.
9. *Дистрибутивность умножения относительно сложения:*
   $\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C} \qquad (z_1 + z_2) * z_3 = z_1 * z_3 + z_2 * z_3$.

Доказательство. Проверим выполнение аксиомы (8). Имеем

$$\begin{aligned}\frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2} = \frac{(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)}{(x_2+iy_2)(x_2-iy_2)} &= \\ &= \frac{x_1x_2+y_1y_2+i(-x_1y_2+x_2y_1)}{x_2^2+y_2^2} = \\ &= \frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\frac{-x_1y_2+x_2y_1}{x_2^2+y_2^2}. \quad \square\end{aligned}$$

Оформим последнюю процедуру в виде **правила**: чтобы разделить одно комплексное число на другое (представленные в декартовой форме), надо умножить числитель и знаменатель на сопряженное к знаменателю.

Комплексные числа вида $x+i0$ отождествляют с действительными. Нетрудно видеть что для них комплексное сложение и умножение совпадают с обычным (действительным). Приняты сокращения типа $x = x+i0$, $iy = 0+iy$, $i = 0+1i$ и т.п.

Еще одно доказательство теоремы 1 можно получить, используя следующее предложение.

Предложение 2. *Поле $\mathbb{C}$ комплексных чисел изоморфно множеству матриц вида*

$$\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix},$$

где $x, y \in \mathbb{R}$.

1.2 Модуль и аргумент

Модулем комплексного числа z называют длину изображающей его стрелки, а *аргументом* — угол, между действительной осью и стрелкой, отсчитываемый против часовой стрелки. Обозначения модуля и аргумента: r и φ или $|z|$ и $\arg z$. Очевидно, модуль и аргумент точки, изображающей z, — ее полярные координаты.

Аргумент определен с точностью до $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. *Главным (основным) значением аргумента* считают величину $\arg z \in (-\pi, \pi]$. *Полным аргументом* называют множество всех возможных значений аргумента

$$\boxed{\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}.}$$

Очевидно, $\arg z$ и $\operatorname{Arg} z$ являются функциями z, причем Arg — *многозначная* функция.

Связь с действительной и мнимой частями:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \end{cases}$$

$$\begin{cases} |z| = \sqrt{x^2+y^2}, \\ \arg z = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} \text{ при } \operatorname{Re} z > 0, \\ \arg z = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} \pm \pi \text{ при } \operatorname{Re} z < 0. \end{cases}$$

1.3 Тригонометрическая и показательная форма

Выражение комплексного числа z через модуль и аргумент имеет вид

$$\boxed{z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).}$$

Такую запись называют *тригонометрической формой* комплексного числа z.

Введем сокращение

$$\cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi}.$$

В результате придем к *показательной форме*

$$\boxed{z = r\,e^{i\varphi}.}$$

1.4 Умножение и деление в тригонометрической форме

Лемма 3. *Для любых* $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{R}$ *справедливы формулы*

$$e^{i\varphi_1}\,e^{i\varphi_2} = e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}, \qquad \frac{e^{i\varphi_1}}{e^{i\varphi_2}} = e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}.$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} e^{i\varphi_1}\,e^{i\varphi_2} &= (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = \\ &= (\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + \\ &+ i(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2) = \\ &= \cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2) = e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}. \end{aligned}$$

Вторая формула получается заменой $\psi_1 = \varphi_1 + \varphi_2$ и $\psi_2 = \varphi_2$:

$$e^{i(\psi_1-\psi_2)}\,e^{i\psi_2} = e^{i\psi_1}.$$

Или

$$e^{i(\psi_1-\psi_2)} = \frac{e^{i\psi_1}}{e^{i\psi_2}}. \quad \square$$

Теорема 4. *Пусть*

$$z_1 = r_1\, e^{i\varphi_1}, \qquad z_2 = r_2\, e^{i\varphi_2}.$$

Тогда

$$z_1 z_2 = r_1\, r_2\, e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}, \qquad \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\, e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}.$$

Формулировка словами или **геометрический смысл умножения и деления**: при умножении комплексных чисел модули перемножаются, а аргументы складываются; при делении комплексных чисел модули делятся, а аргументы вычитаются.

1.5 Формула Муавра

Следствие 5. *Для любых $\varphi \in \mathbb{R}$ и $n \in \mathbb{Z}$*[1] *справедлива формула*

$$(e^{i\varphi})^n = e^{in\varphi}.$$

Теорема 6 (формула Муавра)**.** *Пусть*

$$z = r\, e^{i\varphi} \qquad \text{или} \qquad z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi). \tag{1.1}$$

Тогда

$$\boxed{z^n = r^n\, e^{in\varphi}} \qquad \text{или} \qquad \boxed{z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).}$$

По определению $\sqrt[n]{z}$ есть решение w уравнения $z = w^n$. Множество всех решений этого уравнения описывается в следующем следствии.

Следствие 7. *Пусть*

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ все значения $\sqrt[n]{z}$ задаются формулой

$$\sqrt[n]{r}\left[\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right], \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

[1] $\mathbb{Z}$ — множество целых чисел, включая отрицательные.

Доказательство. По определению значения $\sqrt[n]{z}$ — корни уравнения $w^n = z$. Положим

$$w = \rho\, e^{i\psi}.$$

Тогда уравнение $w^n = z$ примет вид

$$\rho^n\, e^{in\psi} = r\, e^{i\varphi}.$$

Отсюда (с учетом того, что аргумент определен с точностью до $2k\pi$) имеем

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt[n]{r}, \\ \psi &= \frac{\varphi + 2\pi k}{n}, \qquad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Остается заметить, что полный набор различных углов ψ получается при

$$k = 0, 1, \ldots, n-1. \quad \square$$

Таким образом, $w = \sqrt[n]{z}$ — n-значная функция. Значение $\sqrt[n]{z}$, имеющее аргумент, ближайший к нулю (т.е. $\arg w = \frac{\varphi}{n} \in (-\frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{n}]$), называют *главным*.

1.6 Комплексные корни квадратного уравнения

Напомним, что решения z квадратного уравнения

$$a\, z^2 + b\, z + c = 0$$

находят по формуле

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, \qquad \text{где} \quad D = b^2 - 4ac.$$

Те же формулы справедливы для комплексных корней уравнения с комплексными коэффициентами. Но при этом квадратный корень из комплексного (или отрицательного) числа находят по следствию 7.

Для уравнения вида

$$z^2 + pz + q = 0.$$

решения выглядят так:

$$z_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{D}}{2}, \qquad \text{где} \quad D = p^2 - 4q. \tag{1.2}$$

Если $D > 0$, то уравнение имеет два различных действительных корня. Если $D = 0$, уравнение имеет два совпадающих действительных корня. Если $D < 0$, то *действительных корней нет, но есть комплексные корни.*

Задача 1. Найти корни квадратного уравнения

$$z^2 + 12\,z + 40 = 0$$

1.7 Бесконечно удаленная точка

Как известно из матанализа, удобно добавлять к множеству $\mathbb{R}$ дополнительную точку ∞. Интуитивно, в нее можно попасть, если очень долго двигаться влево или вправо. В аккуратном изложении это соответствует тому, что окрестностью бесконечности размера $r \in (0, \infty)$ называют множество

$$U(\infty, r) = \{\, x \in \mathbb{R} :\, |x| > r \,\}.$$

Наличие воображаемой точки ∞ позволяет придать привычный смысл словам "предел при $n \to \infty$" и "предел равен ∞". Кроме того, можно доказать очень удобное правило: единица, деленная на бесконечно большую функцию, есть бесконечно малая функция, а единица, деленная на бесконечно малую функцию, есть бесконечно большая функция.

Еще одно полезное наблюдение: преобразование $y = \frac{1}{x}$ осуществляет биективное отображение r-окрестностей бесконечности на $\frac{1}{r}$-окрестности нуля.

Отождествим $\mathbb{R}$ с осью X на плоскости. Рассмотрим окружность радиуса $1/2$ с центром в точке $(0, 1/2)$, см. рис. 1.2. Поместим в верхнюю точку N лампочку.

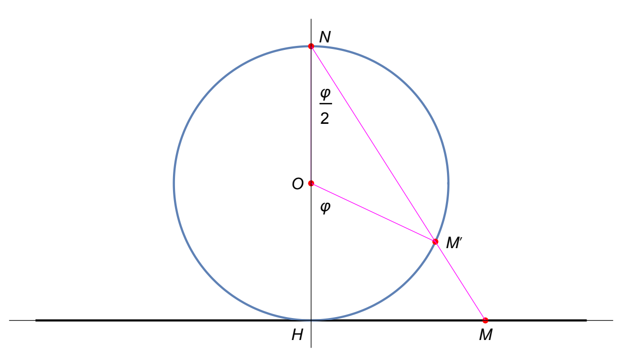

Рис. 1.2: Универсальная тригонометрическая подстановка

Из рис. 1.2 видно, что лучи, выходящие из N, устанавливают биективное соответствие между точками окружности и $\mathbb{R}$. При этом удобно считать, что точке N соответствует точка ∞. Тем самым получилась модель *расширенного множества действительных чисел* $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$: концы прямой загибаются и соединяются в точке ∞.

Параметризуем окружность величиной φ угла HOM'. Очевидно, угол HNM равен $\varphi/2$. Отсюда получаем выражение координаты x точки M через параметр φ окружности:

$$\boxed{x = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}.}$$

Косвенно мы выяснили геометрический смысл универсальной тригонометрической подстановки.

Аналогичная конструкция полезна и для комплексной плоскости. *Расширенной комплексной плоскостью* называют множество $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. *Окрестностью бесконечности* размера $r \in (0, \infty)$ называют множество

$$U(\infty, r) = \{\, z \in \mathbb{C} : \, |z| > r \,\}.$$

Очевидно, преобразование $w = \frac{1}{z}$ осуществляет биективное отображение r-окрестностей бесконечности на $\frac{1}{r}$-окрестности нуля. Наличие окрестностей точки ∞ позволяет придать смысл словам “предел при $n \to \infty$” и “предел равен ∞”.

Поместим комплексную плоскость в пространство $\mathbb{R}^3$, отождествив ее с плоскостью XY. Положим на плоскость сферу радиуса $1/2$ так, чтобы она касалась точки 0, см. рис. 1.3.

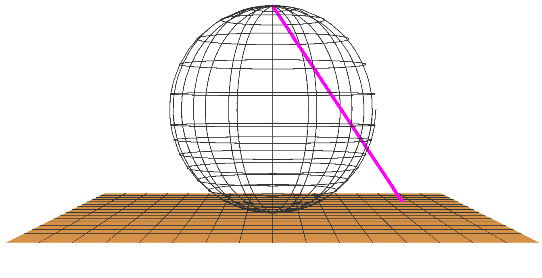

Рис. 1.3: Стереографическая проекция

Поместим в северный полюс N лампочку. Лучи, выходящие из N, устанавливают биективное соответствие между точками сферы и комплексной плоскости. Удобно считать, что точке N соответствует точка

∞. Получилась модель расширенной комплексной плоскости. Ее называют *сферой Римана*, а описанное соответствие сферы Римана с $\overline{\mathbb{C}}$ — *стереографической проекцией*.

На сфере Римана окрестность бесконечности представляет собой “круг” на сфере с центром в N. Поэтому сходимость последовательности $z_n \in \mathbb{C}$ к бесконечности означает сходимость ее образа на сфере к N.

Глава 2

Элементарные функции

Функция комплексного переменного — это функция

$$f : U \to \mathbb{C},$$

где $U \subset \mathbb{C}$ — область определения. Принципиально, что, как правило, $U \neq \mathbb{C}$.

2.1 Геометрическое представление

Полноценный график функции $f : U \to \mathbb{C}$ находится в $\mathbb{R}^4$. Нарисовать его невозможно. Имеется 2 удобных способа графического представления. Первый (можно руками): рисуют образ прямоугольной или полярной сетки. Второй (на компьютере): рисуют график модуля (как наиболее информативную часть) и раскрашивают его в соответствии с модулем.

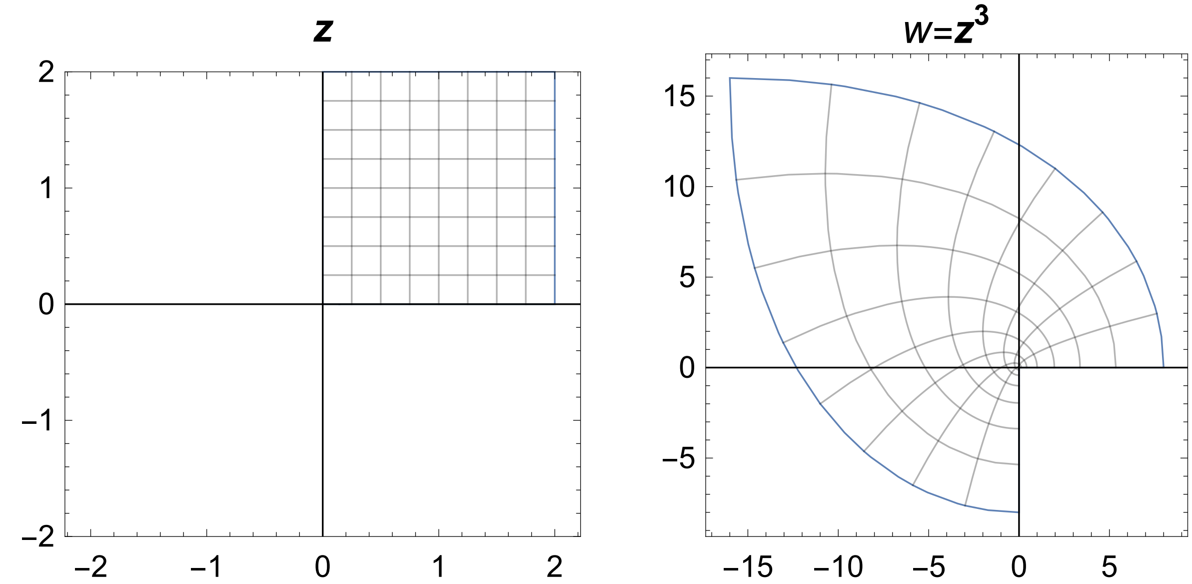

Рис. 2.1: Образ прямоугольной сетки

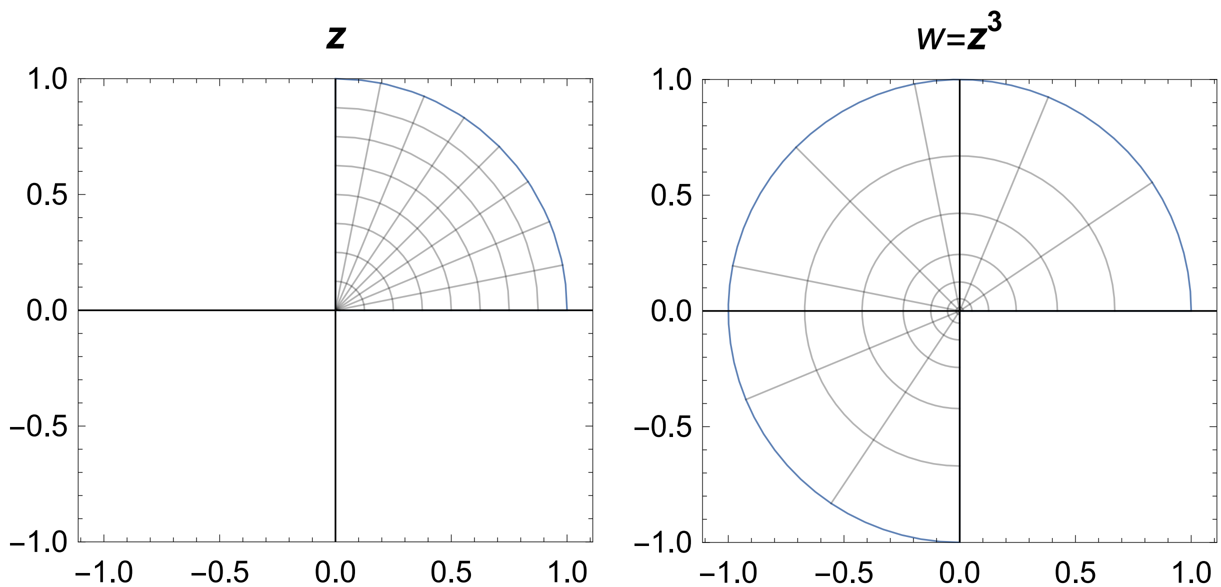

Рис. 2.2: Образ полярной сетки

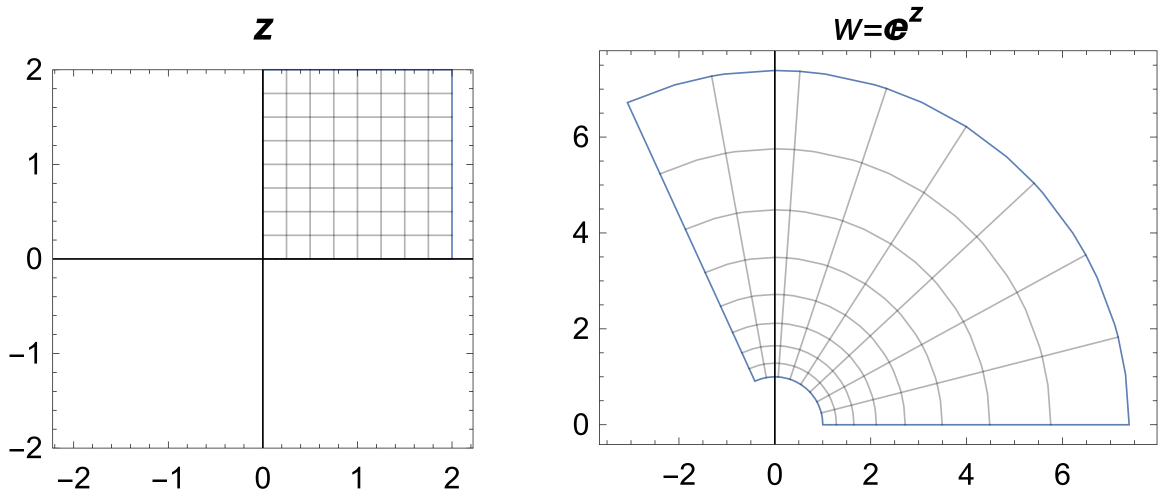

Рис. 2.3: Образ прямоугольной сетки

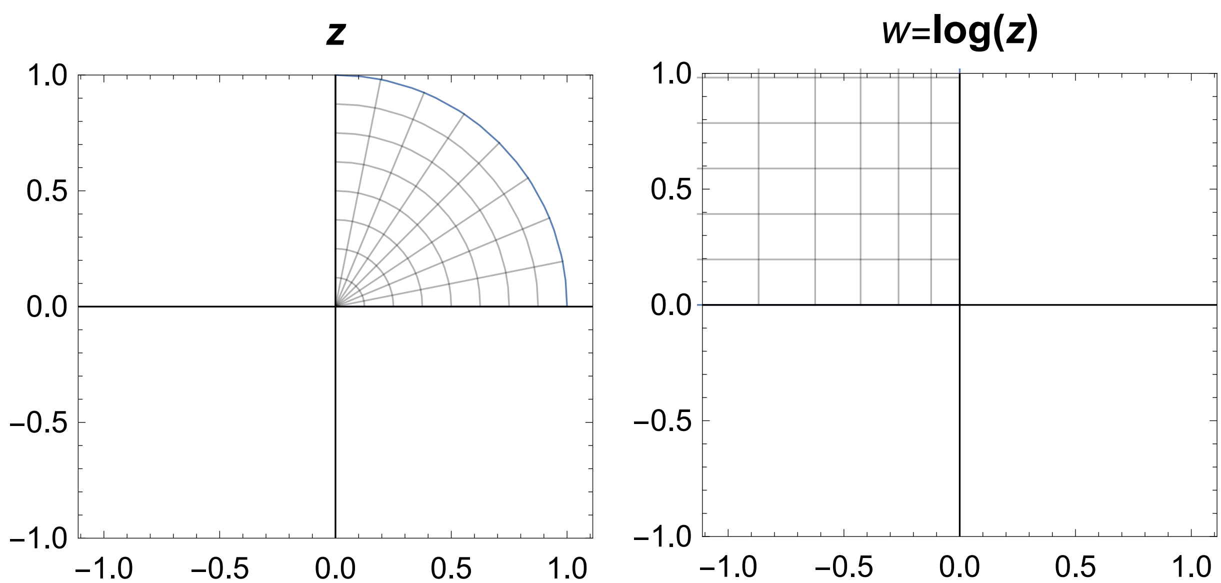

Рис. 2.4: Образ полярной сетки

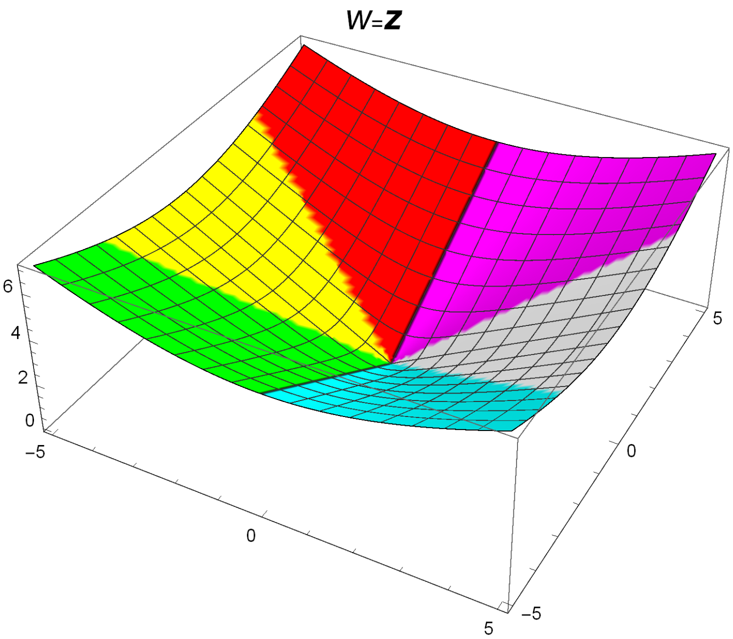

Рис. 2.5: Раскрашенный график модуля

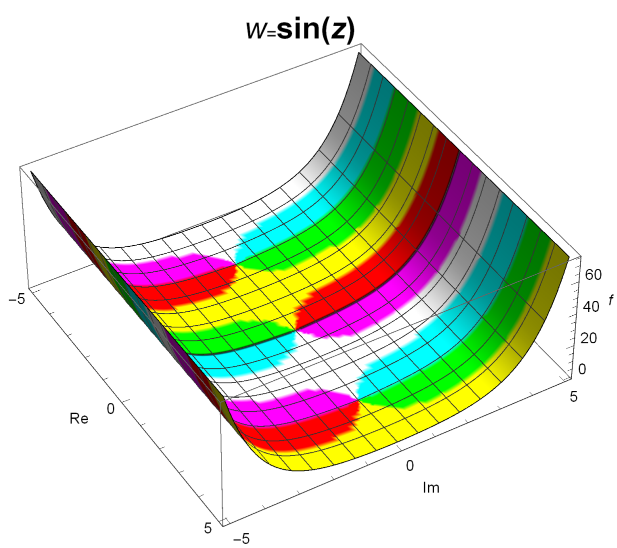

Рис. 2.6: Раскрашенный график модуля

2.2 Линейная функция

Линейной называют функцию

$$w = kz + b.$$

Здесь k и b — комплексные числа. Очевидно, прибавление b приводит к сдвигу, а (согласно геометрическому смыслу умножения) умножение на k приводит к растяжению в $|k|$ раз и повороту на угол $\arg z$.

Линейная функция важна потому, что дифференциал любой функции является линейной функцией.

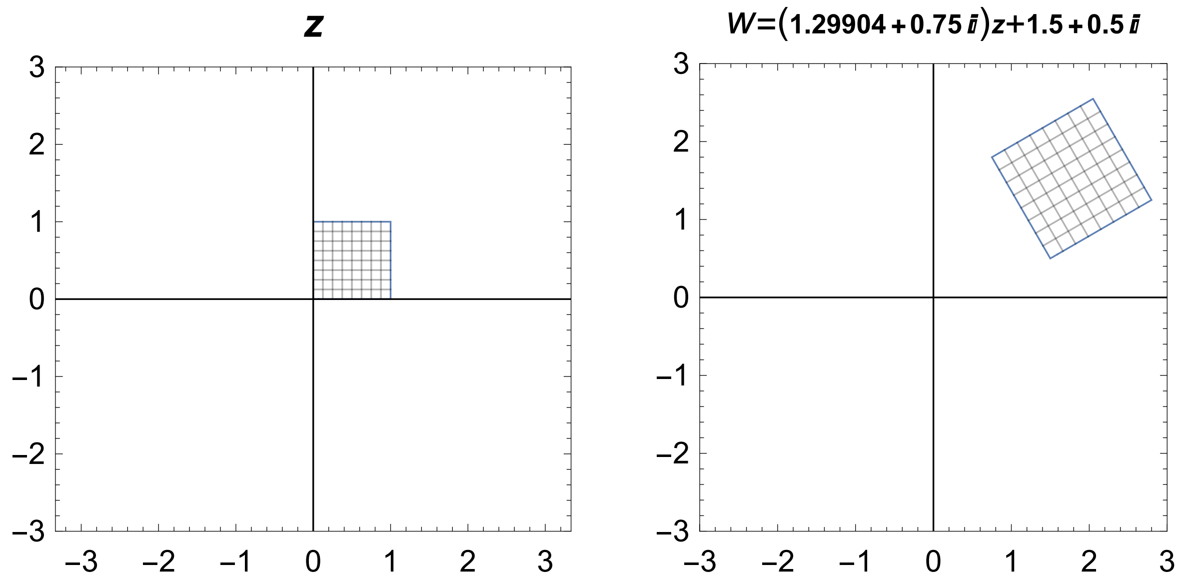

Рис. 2.7: Линейная функция

2.3 Дробно-линейная функция

Дробно-линейной называют функцию

$$w = \frac{az + b}{cz + d}$$

в предположении, что $ad - bc =\neq 0$.

Расширенной комплексной плоскостью называют множество $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cap \{\infty\}$. R-окрестностью точки ∞ считают множество $U_R = \{\, z : |z| > R \,\}$.

Теорема 8. *Суперпозиция двух дробно-линейных функций является дробно-линейной.*

Дробно-линейная функция имеет обратную; обратная функция также является дробно-линейной.

Теорема 9. *Дробно-линейная функция отображает любую окружность или прямую в окружность или прямую.*

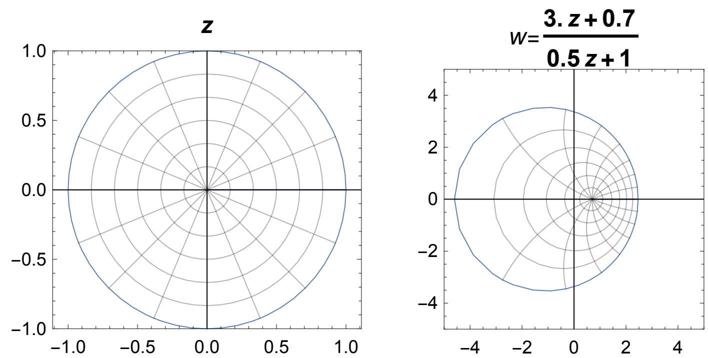

Рис. 2.8: Дробно-линейная функция

Теорема 10. *Для любых трех различных точек $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ и трех различных точек $w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{C}$ существует единственная дробно-линейная функция $w = f(z)$, обладающая свойством*

$$f(z_i) = w_i, \qquad i = 1, 2, 3.$$

Доказательство. Эта функция неявно задается формулой

$$\frac{z - z_1}{z - z_2} \cdot \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} = \frac{w - w_1}{w - w_2} \cdot \frac{w_3 - w_1}{w_3 - w_2}. \quad \square$$

2.4 Экспонента

В качестве определения e^z для $z \in \mathbb{C}$ примем формулу

$$e^z = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n.$$

Теорема 11. *Пусть $z = x + iy$. Тогда*

$$|e^z| = e^x, \qquad \arg e^z = y.$$

Или (записывая e^z в тригонометрической форме)

$$\boxed{e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y).} \tag{2.1}$$

Доказательство. Вычислим этот предел, пользуясь формулой Муавра (1.1):

$$\left|1+\frac{z}{n}\right| = \left|1+\frac{x}{n}+i\frac{y}{n}\right| = \sqrt{\left(1+\frac{x}{n}\right)^2+\frac{y^2}{n^2}},$$
$$\arg\left(1+\frac{z}{n}\right) = \arg\left(1+\frac{x}{n}+i\frac{y}{n}\right) = \operatorname{arctg}\frac{\frac{y}{n}}{1+\frac{x}{n}}.$$

Отсюда

$$\left|\left(1+\frac{z}{n}\right)^n\right| = \left(\left(1+\frac{x}{n}\right)^2+\frac{y^2}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}} =$$
$$= \left(1+\frac{2x}{n}+\frac{x^2+y^2}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}} \to e^x,$$
$$\arg\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = n\operatorname{arctg}\frac{\frac{y}{n}}{1+\frac{x}{n}} \to y.$$

Вывод: $|e^z| = e^x$, $\arg z = y$. □

Теорема 12. *Для любых* $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}.$$

Доказательство. Вытекает из теоремы 4 и формулы (2.1).

$$e^{z_1}e^{z_2} = e^{x_1+iy_1}e^{x_2+iy_2} =$$
$$= (e^{x_1}e^{iy_1})(e^{x_2}e^{iy_2}) = e^{x_1+x_2}e^{i(y_1+y_2)} = e^{z_1+z_2}.$$

□

2.5 Логарифм

По определению $\ln z$ есть решение w уравнения $z = e^w$. Решим это уравнение.

Пусть $w = x + iy$. Тогда имеем

$$|z| = |e^w| = e^x,$$
$$\arg z = \arg e^w = y.$$

Отсюда

$$x = \ln|z|,$$
$$y = \arg z + 2k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Получаем множество решений:

$$\ln|z| + i(\arg z + 2k\pi), \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Решение, в котором $\arg z \in (-\pi, \pi]$, называют *главной ветвью логарифма*:

$$\boxed{\ln z = \ln|z| + i\arg z,}$$

а множество всех решений — *большим логарифмом*:

$$\boxed{\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi), \qquad k \in \mathbb{Z}.}$$

Экспонента переводит декартову сетку в полярную, см. рис. 2.3, а логарифм — полярную в декартову, см. рис. 2.4.

2.6 Тригонометрические функции

Тригонометрические функции определяют по формулам

$$\boxed{\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2},}$$

$$\boxed{\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2}.}$$

2.7 Степенная функция

Для $\alpha \in \mathbb{Z}$ положим

$$\boxed{z^\alpha = e^{\alpha \operatorname{Ln} z}.}$$

Глава 3

Комплексная производная

3.1 Производная, дифференциал и аналитичность

Пусть $U \subseteq \mathbb{C}$ — открытое множество, и $f : U \to \mathbb{C}$ — функция. (*Комплексной*) *производной* функции f в точке $z \in U$ называют комплексное число

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}.$$

Функцию f называют *дифференцируемой* (в комплексном смысле) в точке $z \in U$, если ее *приращение*

$$\Delta f(\Delta z) = f(z + \Delta z) - f(z),$$

где $\Delta z = \Delta x + i\Delta y \in \mathbb{C}$, можно представить в виде

$$\Delta f(\Delta z) = H\Delta z + \gamma(\Delta z), \tag{3.1}$$

где $H \in \mathbb{C}$, а функция $\gamma : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ обладает свойством

$$\gamma(\Delta z) = o(\Delta z) \text{ при } \Delta z \to 0,$$

означающим, что

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\gamma(\Delta z)}{|\Delta z|} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\gamma(\Delta z)}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = 0.$$

Функцию $f : U \to \mathbb{C}$ называют *аналитической*, если она дифференцируема в каждой точке $z \in U$.

Предложение 13. *Для того чтобы функция f была дифференцируема в точке z, необходимо и достаточно, чтобы она имела производную в точке z. При этом $H = f'(z)$.*

Доказательство. Повторяет доказательство аналогичного утверждения из курса матанализа. □

Предложение 14. *Комплексная производная суммы, произведения и частного вычисляется по обычным правилам из матанализа.*

Доказательство. Повторяет доказательство аналогичного утверждения из курса матанализа. □

3.2 Дифференцируемость в матанализе

Очевидно, функцию $f : U \to \mathbb{C}$ можно представить в виде

$$f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y),$$

где $u, v : U \to \mathbb{R}$.

Напомним, что функцию $u : U \to \mathbb{R}$ называют *дифференцируемой* в точке (x,y), если ее *приращение*

$$\Delta u(\Delta x, \Delta y) = u(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x,y)$$

можно представить в виде

$$\Delta u(\Delta x, \Delta y) = A\Delta x + B\Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y), \tag{3.2}$$

где

$$\alpha(\Delta x, \Delta y) = o(\Delta x, \Delta y) \text{ при } \Delta x, \Delta y \to 0,$$

т. е.

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\alpha(\Delta x, \Delta y)}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = 0.$$

И аналогично функция $v : U \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке (x,y), если ее приращение

$$\Delta v(\Delta x, \Delta y) = v(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x,y)$$

можно представить в виде

$$\Delta v(\Delta x, \Delta y) = C\Delta x + D\Delta y + \beta(\Delta x, \Delta y), \tag{3.3}$$

где

$$\beta(\Delta x, \Delta y) = o(\Delta x, \Delta y) \text{ при } \Delta x, \Delta y \to 0,$$

т. е.

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\beta(\Delta x, \Delta y)}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = 0.$$

Предложение 15. *Если функция $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке (x, y), то она имеет частные производные в точке (x, y).*

Если функция $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ имеет непрерывные производные в окрестности точки (x, y), то она дифференцируема в этой точке.

В обоих случаях в представлении (3.2)

$$A = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y), \qquad B = \frac{\partial u}{\partial y}(x, y).$$

Предложение 16. *Для того чтобы комплекснозначная функция*

$$\gamma(\Delta z) = \alpha(\Delta x, \Delta y) + i\beta(\Delta x, \Delta y)$$

обладала свойством $o(\Delta z)$ при $\Delta z \to 0$, необходимо и достаточно, чтобы ее действительная и мнимая части α и β обладали свойством $o(\Delta x, \Delta y)$ при $\Delta x, \Delta y \to 0$. Здесь $\gamma : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\alpha, \beta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$.

Доказательство. Вытекает из правил покоординатного вычисления предела. □

3.3 Условия Коши–Римана

Теорема 17. *Для того чтобы $f : U \to \mathbb{C}$ была дифференцируема (в комплексном смысле) в $z = x + iy$, необходимо и достаточно, чтобы u и v были дифференцируемы в точке (x, y) и в этой точке выполнялись равенства*

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},} \tag{3.4}$$

называемые условиями Коши–Римана. При этом

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{3.5}$$

Доказательство. Представим приращение Δf в виде

$$\Delta f(\Delta x + i\Delta y) = \Delta u(\Delta x, \Delta y) + i\Delta v(\Delta x, \Delta y). \tag{3.6}$$

Пусть функция f является дифференцируемой в точке $z = x + iy$, т. е. имеет место представление (3.1). Представим H и $\gamma(\Delta z)$ в виде

$$H = A + iB,$$
$$\gamma(\Delta z) = \alpha(\Delta x, \Delta y) + i\beta(\Delta x, \Delta y).$$

Тогда формулу (3.1) можно переписать в виде

$$\begin{aligned}\Delta f(\Delta x + i\Delta y) = (A+iB)(\Delta x + i\Delta y) &+ \\ + \alpha(\Delta x, \Delta y) + i\beta(\Delta x, \Delta y) &= \\ = (A\Delta x - B\Delta y) + i(B\Delta x + A\Delta y) &+ \\ + \alpha(\Delta x, \Delta y) + i\beta(\Delta x, \Delta y)&.\end{aligned} \tag{3.7}$$

Приравнивая действительные и мнимые части представлений (3.6) и (3.7), получаем

$$\begin{aligned}\Delta u(\Delta x, \Delta y) &= A\Delta x - B\Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y), \\ \Delta v(\Delta x, \Delta y) &= B\Delta x + A\Delta y + \beta(\Delta x, \Delta y).\end{aligned} \tag{3.8}$$

В силу предложения 16 это означает, что u и v дифференцируемы, причем выполнены равенства Коши – Римана (3.4).

Обратно, пусть функции u и v дифференцируемы, и выполнены условия Коши – Римана (3.4). Тогда равенства (3.2) и (3.3) (с учетом условий Коши – Римана) можно переписать в виде (3.8). Складывая эти равенства (с коэффициентами 1 и i), получаем (3.7). Полагая $H = A + iB$ и $\gamma(\Delta z) = \alpha(\Delta x, \Delta y) + i\beta(\Delta x, \Delta y)$, перепишем (3.7) в виде (3.1). В силу предложения 16 представление (3.1) означает, что f дифференцируема.

Чтобы доказать (3.5), достаточно напомнить, что $f'(z) = H = A + iB$ и что в силу (3.8) и предложения 15 имеем $A = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, а $B = -\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$. □

Следствие 18. *Для того чтобы функция $f : U \to \mathbb{C}$ была дифференцируема в точке $z = x + iy$, необходимо и достаточно, чтобы векторфункция $\binom{u}{v} : U \to \mathbb{R}^2$ была дифференцируема в точке (x, y) и ее матрица Якоби имела вид*

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}. \tag{3.9}$$

Доказательство. Это переформулировка теоремы 17. □

Предложение 19. *Суммы, произведения и обратные к матрицам вида (3.9) также являются матрицами такого вида*[1].

Доказательство. Сводится к прямым вычислениям. □

[1] Справедливо большее: множество матриц вида (3.9) изоморфно полю комплексных чисел.

Следствие 20. *Суперпозиция аналитических функций является аналитической функцией.*

Доказательство. Матрица Якоби суперпозиции двух функций является произведением матриц Якоби сомножителей. □

Следствие 21. *Обратная к аналитической функции также является аналитической функцией.*

Доказательство. Матрица Якоби обратной функции является обратной к матрице Якоби прямой функции. □

Теорема 22. *Элементарные функции являются аналитическими.*

Доказательство. Для функции $w = e^z$ имеем

$$w = e^x(\cos y + i \sin y),$$

откуда

$$u(x, y) = e^x \cos y, \qquad v(x, y) = e^x \sin y.$$

Условия Коши–Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

из теоремы 17 проверяются непосредственно. Дифференцируемость cos, sin, tg, ch и т.п. вытекает из предложения 14. Дифференцируемость логарифма и корней — из следствия 21. Дифференцируемость $w = z^\alpha$ вытекает из следствия 20. □

Доказательство II (не использующее условия Коши–Римана). Из теоремы 12 имеем

$$\begin{aligned}
(e^z)' &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{e^{z+\Delta z} - e^z}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} e^z \frac{e^{\Delta z} - 1}{\Delta z} = \\
&= e^z \lim_{\Delta x, \Delta y \to 0} \frac{e^{\Delta x}(\cos \Delta y + i \sin \Delta y) - 1}{\Delta x + i\Delta y} = \\
&= e^z \lim_{\Delta x, \Delta y \to 0} \frac{(1 + \Delta x + o(\Delta x))(1 + o(\Delta y^2) + i(\Delta y + o(\Delta y^2)) - 1}{\Delta x + i\Delta y} = \\
&= e^z \lim_{\Delta x, \Delta y \to 0} \frac{1 + \Delta x + o(\Delta x) + o(\Delta y^2) + \Delta x o(\Delta y^2) + o(\Delta x) o(\Delta y^2) + i(\Delta y + o(\Delta y^2)) - 1}{\Delta x + i\Delta y} = \\
&= e^z \lim_{\Delta x, \Delta y \to 0} \frac{\Delta x + i\Delta y + o(\Delta x) + o(\Delta y)}{\Delta x + i\Delta y} = e^z.
\end{aligned}$$

□

Глава 4

Комплексный интеграл

4.1 Кривые на комплексной плоскости

Путем на $\mathbb{C}$ называют всякую функцию $z : [a, b] \to \mathbb{C}$. Ее можно представить в виде

$$z(t) = x(t) + iy(t),$$

где

$$x, y : [a, b] \to \mathbb{R}.$$

Путь непрерывный (непрерывно дифференцируемый), если функция z обладает соответствующим свойством. Путь *гладкий*, если z непрерывно дифференцируема и $z'(t) \neq 0$. *Кусочно-гладкий* путь — состоящий из конечного числа гладких кусков.

Пример 1. Рассмотрим путь

$$z(t) = e^{it} = \cos t + i \sin t, \qquad t \in [0, 2\pi].$$

Образом этой функции является единичная окружность.

Задача 2. Какую кривую определяет путь

$$z(t) = 3 + 2i + e^{it} = 3 + \cos t + i(2 + \sin t), \qquad t \in [0, 2\pi]?$$

Два гладких пути $z : [a, b] \to \mathbb{C}$ и $z_1 : [a_1, b_1] \to \mathbb{C}$ называют *эквивалентными*, если существует такая непрерывно дифференцируемая функция $\varphi : [a_1, b_1] \to [a, b]$, что $\varphi(a_1) = a$, $\varphi(b_1) = b$, $\varphi(s) > 0$ и $z_1(s) = z\big(\varphi(s)\big)$ для всех s.

Эквивалентные пути имеют одинаковые образы.

Класс Γ эквивалентных между собой гладких путей называют *гладкой кривой*, а любой представляющий ее путь — параметризацией кривой.

Предложение 23. *Пусть $z : [a,b] \to \mathbb{C}$ — параметризация гладкой кривой Γ. Тогда*

$$L(\Gamma) = \int_a^b |z'(t)|\,dt. \tag{4.1}$$

Доказательство. Это следствие теоремы из матанализа: пусть $\mathbf{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ — гладкая параметризация кривой Γ. Тогда

$$L(\Gamma) = \int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\|\,dt.$$

□

4.2 Определение комплексного интеграла

Рассмотрим кривую Γ, заданную посредством гладкой параметризации $z : [a,b] \to \mathbb{C}$. Предположим, что в точках кривой (т.е. на образе z) задана функция $f : \Gamma \to \mathbb{C}$. *Комплексным интегралом* от функции f по кривой Γ назовем

$$\boxed{\int_\Gamma f(z)\,dz = \int_a^b f\big(z(t)\big)z'(t)\,dt.} \tag{4.2}$$

Если кривая состоит из нескольких частей, интеграл по ней есть сумма интегралов по всем ее частям.

Как понимать интеграл справа? Пусть $Z : [a,b] \to \mathbb{C}$ имеет действительную часть X и мнимую часть Y, т.е.

$$Z(t) = X(t) + iY(t).$$

Тогда

$$\begin{aligned}\int_a^b Z(t)\,dt = \int_a^b \big(X(t) + iY(t)\big)\,dt = \\ = \int_a^b X(t)\,dt + i\int_a^b Y(t)\,dt.\end{aligned}$$

Последние интегралы — обычные действительные интегралы Римана (изучаемого в матанализе).

Пример 2. Пусть

$$Z(t) = t + ie^t, \qquad t \in [0,1].$$

Тогда

$$\begin{aligned}\int_0^1 Z(t)\,dt = \int_0^1 \bigl(t + ie^t\bigr)\,dt &= \\ = \int_0^1 t\,dt + i\int_0^1 e^t\,dt &= \\ = \frac{t^2}{2}\Big|_0^1 + ie^t\Big|_0^1 = \frac{1}{2} + ie^1 - ie^0.\end{aligned}$$

Пусть $f : \Gamma \to \mathbb{C}$ имеет действительную часть u и мнимую часть v, т.е.

$$f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y).$$

Тогда $f\bigl(z(t)\bigr) = u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t))$. Отсюда

$$\begin{aligned}\int_a^b f\bigl(z(t)\bigr)z'(t)\,dt = \int_a^b \bigl(u(x(t),y(t)) + iv(x(t),y(t))\bigr)\bigl(x'(t) + iy'(t)\bigr)\,dt = \\ = \int_a^b \bigl(u(x(t),y(t))x'(t) - v(x(t),y(t))y'(t)\bigr)\,dt + \\ + i\int_a^b \bigl(u(x(t),y(t))y'(t) + v(x(t),y(t))x'(t)\bigr)\,dt. \quad (4.3)\end{aligned}$$

Получилось два обычных действительных интеграла Римана (изучаемого в матанализе).

По определению интегралы Римана являются пределами интегральных сумм. Возвращаясь назад, получаем, что и исходный интеграл есть предел интегральных сумм:

$$\int_a^b f\bigl(z(t)\bigr)z'(t)\,dt = \lim_{|\tau|\to 0}\sum_{k=1}^n f\bigl(z(\xi_i)\bigr)z'(\xi_i)\,\Delta t_i. \qquad (4.4)$$

Интегралы в формуле (4.3) можно интерпретировать как криволинейные интегралы 2-го рода. Действительно, как известно из матанализа,

$$\begin{aligned}\int_\Gamma P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int_a^b \bigl(P(x(t),y(t))x'(t) + \\ + Q(x(t),y(t))y'(t)\bigr)\,dt,\end{aligned}$$

где

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \qquad t \in [a,b],$$

— параметризация кривой Γ.

Тем самым приходим к следующему предложению.

Предложение 24. *Для любой гладкой кривой Γ и непрерывной функции $f : \Gamma \to \mathbb{C}$*

$$\begin{aligned}\int_\Gamma f(z)\,dz = \int_\Gamma u(x,y)\,dx - v(x,y)\,dy + \\ + i\int_\Gamma u(x,y)\,dy + v(x,y)\,dx.\end{aligned} \tag{4.5}$$

4.3 Свойства комплексного интеграла

Теорема 25 (существование)**.** *Пусть кривая Γ является гладкой, а функция $f : \Gamma \to \mathbb{C}$ непрерывна. Тогда интеграл*

$$\int_\Gamma f(z)\,dz$$

существует.

Доказательство. Действительно, интеграл только что был сведен к двум интегралам Римана от непрерывных функций, см. (4.3). □

Теорема 26 (независимость от параметризации)**.** *Значение комплексного интеграла не меняется при замене параметризации кривой на эквивалентную.*

Доказательство. Рассмотрим две эквивалентные параметризации $z : [a,b] \to \mathbb{C}$ и $z_1 : [a_1,b_1] \to \mathbb{C}$. Это значит, что существует такая непрерывно дифференцируемая функция $\varphi : [a_1,b_1] \to [a,b]$, что $\varphi(a_1) = a$, $\varphi(b_1) = b$ и $\varphi'(s) > 0$ и $z_1(s) = z\big(\varphi(s)\big)$.

Сделаем замену $t = \varphi(s)$ (в частности, $dt = \varphi'(s)\,ds$)

$$\begin{aligned}&\int_a^b f\big(z(t)\big)z'(t)\,dt = \\ &\qquad = \int_{a_1}^{b_1} f\big(z(\varphi(s))\big)z'\big(\varphi(s)\big)\,\varphi'(s)\,ds = \\ &\qquad\qquad = \int_{a_1}^{b_1} f\big(z_1(s)\big)z_1'(s)\,ds.\end{aligned}$$

(Строго говоря, надо ссылаться на (4.3), поскольку правил замены переменных в комплексном интеграле мы не доказывали.) □

Теорема 27 (неравенство треугольника)**.** *Пусть* Γ *— гладкая кривая, а* $f : \Gamma \to \mathbb{C}$ *— непрерывная функция. Тогда*

$$\boxed{\left|\int_\Gamma f(z)\,dz\right| \le M(f)\cdot L(\Gamma),}$$

где $M(f) = \max\{\,|f(z)| : z \in \Gamma\,\}$, *а* $L(\Gamma)$ *— длина кривой* Γ.

Доказательство. Воспользуемся формулой (4.4):

$$\int_a^b f\big(z(t)\big)z'(t)\,dt = \lim_{|\tau|\to 0}\sum_{k=1}^n f\big(z(\xi_i)\big)z'(\xi_i)\,\Delta t_i.$$

Имеем

$$\left|\int_a^b f\big(z(t)\big)z'(t)\,dt\right| \le \lim_{|\tau|\to 0}\sum_{k=1}^n \left|f\big(z(\xi_i)\big)\right|\cdot|z'(\xi_i)|\,\Delta t_i \le$$
$$\le M(f)\lim_{|\tau|\to 0}\sum_{k=1}^n |z'(\xi_i)|\,\Delta t_i.$$

Получилась интегральная сумма для интеграла (4.1). Поэтому, переходя к пределу в последнем неравенстве, получаем утверждение теоремы. $\square$

Замечание 1. Аналогично доказывается более точный вариант неравенства треугольника

$$\left|\int_\Gamma f(z)\,dz\right| \le \int_\Gamma |f(z)|\cdot|dz|,$$

где справа стоит криволинейный интеграл первого рода.

Теорема 28 (аддитивность по отрезку)**.** *Пусть* Γ *— гладкая кривая, а функция* $z : \Gamma \to \mathbb{C}$ *непрерывна. Пусть кривая* Γ *разрезана на две части:* Γ_1 *и* Γ_2. *Последнее означает, что если* Γ *задана параметризацией* $z : [a, b] \to \mathbb{R}^2$, *то* Γ_1 *и* Γ_2 *задаются соответственно параметризациями* $z : [a, c] \to \mathbb{C}$ *и* $z : [c, b] \to \mathbb{C}$ *при некотором* $c \in [a, b]$. *Тогда*

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \int_{\Gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\Gamma_2} f(z)\,dz.$$

Доказательство. Вытекает из аналогичной теоремы из матанализа. $\square$

4.4 Предельный переход под знаком интеграла

Теорема 29. *Пусть* Γ *— гладкая кривая. Пусть последовательность непрерывных функций* $f_n : \Gamma \to \mathbb{C}$ *равномерно сходится к функции* $f : \Gamma \to \mathbb{C}$*. Тогда функция* f *непрерывна, и последовательность* $\int_\Gamma f_n(z)\, dz$ *сходится к* $\int_\Gamma f(z)\, dz$*.*

Равномерная сходимость последовательности функций f_n к функции f означает, что

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad \forall z \in \Gamma \qquad |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon.$$

Или

$$\lim_{n\to\infty} \max_{z\in\Gamma} |f_n(z) - f(z)| = 0.$$

Доказательство. Пусть $f = u + iv$, $f_n = u_n + iv_n$. Из равномерной сходимости f_n к f вытекает равномерная сходимость u_n к u и v_n к v, поскольку

$$|u_n - u|,\ |v_n - v| \leq |f_n - f|.$$

Для функций, принимающих действительные значения, из матанализа известно, что равномерный предел последовательности непрерывных функций — непрерывная функция. Значит, u и v непрерывны. А отсюда следует непрерывность f.

Положим

$$M_n = \max_{z\in\Gamma} |f_n(z) - f(z)|.$$

По условию

$$\lim_{n\to\infty} M_n = 0.$$

Из неравенства треугольника (теорема 27) имеем

$$\Big|\int_\Gamma f_n(z)\, dz - \int_\Gamma f(z)\, dz\Big| =$$

$$= \Big|\int_\Gamma \big(f_n(z) - f(z)\big)\, dz\Big| \leq M_n \cdot L(\Gamma) \to 0.$$

$\square$

Следствие 30. *Пусть* Γ — *гладкая кривая, а* $f_n : \Gamma \to \mathbb{C}$ — *последовательность непрерывных функций. Пусть ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *равномерно сходится*[1]. *Тогда*

$$\int_\Gamma \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) \right) dz = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_\Gamma f_n(z)\, dz \right),$$

причем как левая, так и правая части этого равенства существуют.

Доказательство. Вытекает из теоремы 29. □

[1]Напомним, что равномерная сходимость функционального ряда означает равномерную сходимость последовательности его частичных сумм.

Глава 5

Теорема Коши

5.1 Теорема Коши

Кривую Γ называют *замкнутой*, если для ее параметризации z имеем $z(a) = z(b)$. Кривую называют *жордановой*, если она не имеет самопересечений, кроме, возможно, концевых точек. *Контуром* называют конечное множество замкнутых жордановых кривых, являющихся границей ограниченного открытого множества D и ориентированных по отношению к этому множеству положительным образом. В частности, контур не может иметь самопересечений. Говорят, что *контур* Γ *окружает точку* λ, если λ принадлежит множеству D, границей которого является Γ.

Из курса математического анализа известна следующая теорема.

Теорема 31 (формула Грина)**.** *Пусть U — открытое подмножество $\mathbb{R}^2$, а функции $P, Q : U \to \mathbb{R}$ непрерывны вместе с частными производными $\frac{\partial Q}{\partial x}$ и $\frac{\partial P}{\partial y}$. Пусть гладкий контур Γ лежит в U вместе с ограничиваемым им множеством D. Тогда*

$$\int_\Gamma P\,dx + Q\,dy = \iint_D \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big)\,dx\,dy.$$

Теорема 32 (теорема Коши I)**.** *Пусть $U \subseteq \mathbb{C}$ — открытое множество, $f : U \to \mathbb{C}$ — аналитическая функция, и гладкий контур Γ лежит в U вместе с ограничиваемым им множеством D. Тогда*

$$\boxed{\int_\Gamma f(z)\,dz = 0.}$$

Доказательство. Предположим дополнительно, что производная функции f непрерывна. Представим функцию f в виде

$$f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y).$$

В силу предложения 24

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \int_\Gamma u\,dx - v\,dy + i\int_\Gamma v\,dx + u\,dy.$$

Применяя к интегралам справа формулу Грина (теорема 31) и используя условия Коши–Римана, получаем:

$$\int_\Gamma u\,dx - v\,dy = \iint_D \Big(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\Big)\,dx\,dy = 0,$$
$$\int_\Gamma v\,dx + u\,dy = \iint_D \Big(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\Big)\,dx\,dy = 0.$$

Следовательно,

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = 0. \quad \square$$

Два пути с закрепленными концами называют *гомотопными* в множестве $U \subseteq \mathbb{C}$, если их можно непрерывно деформировать друг в друга, не выходя из множества U и оставляя концы неподвижными. Два замкнутых пути называют *гомотопными* в множестве $U \subseteq \mathbb{C}$, если их можно непрерывно деформировать друг в друга, не выходя из множества U. Кривые называют *гомотопными*, если существуют представляющие их гомотопные пути.

Теорема 33 (теорема Коши II)**.** *Пусть $U \subseteq \mathbb{C}$ — открытое множество, $f : U \to \mathbb{C}$ — аналитическая функция, а Γ_0 и Γ_1 — две гладкие кривые, гомотопные друг другу в U как кривые с одинаковыми концами, либо как замкнутые кривые. Тогда*

$$\int_{\Gamma_0} f(z)\,dz = \int_{\Gamma_1} f(z)\,dz.$$

Доказательство. Без доказательства. $\square$

5.2 Интегральная формула Коши

Лемма 34. *Для любой точки $\lambda \in \mathbb{C}$, любого контура Γ, окружающего λ, и любого целого n*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{dz}{(z-\lambda)^n} = \begin{cases} 1, & \text{если } n = 1,\\ 0, & \text{если } n \neq 1. \end{cases}$$

Доказательство. В силу теоремы Коши в форме теоремы 33 в качестве Γ можно взять окружность радиуса r с центром в λ. Параметризируем ее так:

$$z(t) = \lambda + r\, e^{it}, \qquad t \in [0, 2\pi].$$

Вычислим интеграл по правилу (4.2). Сделаем заготовку:

$$z'(t) = (\lambda + r\, e^{it})' = r\, i\, e^{it}.$$

Воспользуемся формулой (4.2):

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{d\zeta}{(\zeta - \lambda)^n} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{r\, i\, e^{it}\, dt}{r^n\, e^{int}} =$$
$$= \frac{r^{-(n-1)}\, i}{2\pi i} \int_0^{2\pi} e^{-i(n-1)t}\, dt \boxed{=}$$

Если $n = 1$, имеем

$$\boxed{=} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 1\, dt = \frac{1}{2\pi} 2\pi = 1.$$

Если же $n \neq 1$, то

$$\boxed{=} \frac{r^{-(n-1)}\, i}{2\pi i}\, \frac{1}{-i(n-1)} e^{-i(n-1)t} \Big|_{t \to 0}^{t \to 2\pi} = 0,$$

поскольку

$$e^{-i(n-1)t} \Big|_{t \to 0}^{t \to 2\pi} = e^{-i(n-1)2\pi} - e^{-i(n-1)0} = 1 - 1 = 0.$$

$\square$

Теорема 35 (интегральная формула Коши)**.** *Пусть $U \subseteq \mathbb{C}$ — открытое множество, $f : U \to \mathbb{C}$ — аналитическая функция, и пусть гладкий контур Γ лежит в U вместе с ограничиваемым им множеством D. Тогда для любой точки $z \in D$*

$$\boxed{f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta.}$$

Доказательство. Добавим к Γ окружность γ маленького радиуса r с центром в z, ориентированную *по* часовой стрелке. Контур $\Gamma + \gamma$ ограничивает множество D_1, представляющее собой D с выброшенным кругом с центром в z радиуса r. На множестве D_1 функция $\zeta \mapsto \dfrac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ является аналитической. По теореме Коши

$$\int_{\Gamma+\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = 0.$$

Отсюда

$$\int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta + \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = 0.$$

Или

$$\int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \int_{-\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta =$$

что в силу леммы 34 равно

$$= f(z).$$

Здесь важно обратить внимание на ориентации γ и $-\gamma$. □

5.3 Интегралы, зависящие от параметра

Теорема 36. *Пусть $U \subseteq \mathbb{C}$ — открытое множество, $\Gamma \subset \mathbb{C}$ — гладкая кривая, $K : \Gamma \times U \to \mathbb{C}$, и*

$$I(z) = \int_{\Gamma} K(\zeta, z)\, d\zeta.$$

Пусть функции K и $\frac{\partial K}{\partial z}$ непрерывны. Тогда функция I непрерывно дифференцируема, причем

$$I'(z) = \int_{\Gamma} \frac{\partial K}{\partial z}(\zeta, z)\, d\zeta.$$

Доказательство. Без доказательства. □

5.4 Интеграл типа Коши

Теорема 37 (интеграл типа Коши)**.** *Пусть Γ — гладкая кривая, а $\varphi : \Gamma \to \mathbb{C}$ — непрерывная функция. Тогда функция*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \tag{5.1}$$

является аналитической в $\mathbb{C} \setminus \Gamma$. При этом

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta.$$

Доказательство. Воспользуемся теоремой 36. Достаточно заметить, что

$$\frac{\partial}{\partial z}\Big(\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z}\Big) = \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)^2},$$

$$\frac{\partial^n}{\partial z^n}\Big(\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z}\Big) = \frac{n!\,\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}.$$

□

Теорема 38 (обращение интегральной формулы Коши)**.** *Пусть $U \subseteq \mathbb{C}$ — открытое множество, а $f : U \to \mathbb{C}$ — непрерывная функция. Пусть для любого гладкого контура Γ, лежащего в U вместе с ограничиваемым им множеством D, и для любой точки $z \in D$*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta. \tag{5.2}$$

Тогда функция f является аналитической. При этом

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta.$$

Доказательство. Вытекает из теоремы 37. □

Следствие 39. *Аналитическая функция бесконечное число раз дифференцируема. А точнее, если $f : U \to \mathbb{C}$, где $U \subseteq \mathbb{C}$ — открытое множество, имеет комплексную производную в каждой точке, то f бесконечное число раз дифференцируема; при этом все производные непрерывны.*

Доказательство. Пусть f — аналитическая функция. В силу интегральной формулы Коши (теорема 35) равенство (5.2) выполняется для любой точки z и окружности Γ достаточно малого радиуса, ее окружающей. Остается сослаться на теорему 38. □

Теорема 40. *Пусть $U \subseteq \mathbb{C}$ — открытое множество, $f : U \to \mathbb{C}$ — аналитическая функция, и контур Γ лежит в U вместе с ограничиваемым им множеством D. Тогда для любой точки $z \in D$ имеем*

$$\boxed{f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta.} \tag{5.3}$$

Доказательство. Вытекает из теоремы 38: из интегральной формулы Коши (теорема 35) следует, что для f выполнены предположения теоремы 38. □

5.5 Предел аналитических функций

Следствие 41. *Пусть $U \subseteq \mathbb{C}$ — открытое множество, и последовательность аналитических функций $f_m : U \to \mathbb{C}$ равномерно сходится к функции $f : U \to \mathbb{C}$. Тогда функция f является аналитической, и для любого n последовательность $f_m^{(n)}$ поточечно сходится к $f^{(n)}$.*

Равномерная сходимость последовательности функций f_m к функции f означает, что

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall m > N \quad \forall z \in \Gamma \qquad |f_m(z) - f(z)| < \varepsilon.$$

Доказательство. В силу теоремы 35 имеем

$$f_m(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f_m(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

Переходя в этом равенстве к пределу по m, получаем равенство

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

Переходить к пределу можно в силу равномерной сходимости, см. теорему 29[1]. Из последнего равенства и из теоремы 38 вытекает аналитичность f.

Чтобы получить сходимость производных, надо воспользоваться представлением (5.3):

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta$$

для производной аналитической функции и теоремой 38:

$$f_m^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f_m(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta \to \frac{n!}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta = f^{(n)}(z). \quad \square$$

Следствие 42. *Пусть $U \subseteq \mathbb{C}$ — открытое множество, и пусть ряд $\sum_{k=1}^\infty f_k(z)$, состоящий из аналитических функций $f_k : U \to \mathbb{C}$, сходится равномерно. Тогда сумма ряда является аналитической функцией, и ряд можно дифференцировать почленно любое число раз.*

Доказательство. Вытекает из следствия 41. $\square$

[1]Строго говоря, нужна равномерная сходимость $\frac{f_m(\zeta)}{\zeta - z} \to \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$.

5.6 Теорема Морера

Следующая теорема, с одной стороны, является обратной к теореме Коши 33, а с другой, — описывает условие, эквивалентное аналитичности.

Теорема 43 (теорема Морера)**.** *Пусть $U \subseteq \mathbb{C}$ — открытое множество, $f : U \to \mathbb{C}$ — непрерывная функция, обладающая свойством: интеграл по границе любого треугольника, лежащего в U, равен нулю. Тогда функция f является аналитической.*

Доказательство. Будем доказывать существование производной f в точке z_0. Без ограничения общности можно считать, что U — круг с центром в z_0. Рассмотрим функцию

$$F(z) = \int_{[z_0,z]} f(\zeta)\, d\zeta,$$

где интегрирование проводится по отрезку, идущему из z_0 в z.

В силу условия теоремы

$$F(z+\Delta z) - F(z) = \int_{[z_0,z+\Delta z]} f(\zeta)\, d\zeta - \int_{[z_0,z]} f(\zeta)\, d\zeta = \\ = \int_{[z,z+\Delta z]} f(\zeta)\, d\zeta.$$

Взяв для отрезка $[z, z+\Delta z]$ параметризацию $\zeta(t) = z + t\Delta z$, $t \in [0,1]$, преобразуем последний интеграл к виду

$$\int_{[z,z+\Delta z]} f(\zeta)\, d\zeta = \int_0^1 f(z+t\Delta z)\Delta z\, dt.$$

Отсюда

$$\frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} = \frac{1}{\Delta z}\int_0^1 f(z+t\Delta z)\Delta z\, dt = \\ = \int_0^1 f(z+t\Delta z)\, dt.$$

В силу непрерывности f этот интеграл стремится к $f(z)$. Следовательно, F — дифференцируема в комплексном смысле в окрестности точки z_0 и $F'(z) = f(z)$.

Но тогда в силу следствия 39 F и f бесконечное число раз дифференцируемы. □

Глава 6

Степенные ряды

Степенным рядом (с центром в точке z_0) называют функциональный ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n.$$

6.1 Ряд Тейлора

Лемма 44 (лемма Абеля). *Предположим, что степенной ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$$

сходится в некоторой точке $z_* \neq z_0$. Тогда в любом круге радиуса $r < |z_* - z_0|$ с центром в точке z_0 этот ряд сходится равномерно и, следовательно (в силу следствия 42), определяет аналитическую функцию.

Доказательство. Доказательство повторяет соответствующее рассуждение из курса матанализа. □

Следствие 45. *Областью поточечной сходимости степенного ряда является некоторый открытый круг с центром в z_0, к которому добавлены некоторые точки граничной окружности. В любом строго меньшем круге с тем же центром сходимость является равномерной.*

Доказательство. Вытекает из леммы 52. □

Этот круг называют *кругом сходимости.*

Следствие 46 (единственность разложения в степенной ряд)**.** *Пусть в окрестности U точки z_0 функция $f : U \to \mathbb{C}$ представима в виде*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n. \tag{6.1}$$

Тогда коэффициенты c_n ряда (6.1) *определены однозначно, а именно*

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz,$$

где Γ — контур, окружающий z_0.

Доказательство. Дифференцируя ряд (6.1) почленно (см. следствие 42), получаем формулу

$$\boxed{c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}} \tag{6.2}$$

Равенство

$$\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz,$$

вытекает из теоремы 38. □

Степенной ряд с коэффициентами (6.2) называют *рядом Тейлора функции f.*

Следствие 47. *Пусть представление* (6.1) *имеет место в окрестности замкнутого круга $\{\, z : |z - z_0| \le r \,\}$. Тогда справедлива оценка*

$$|c_n| \le \frac{1}{r^n} \max\{\, |f(z)| : |z - z_0| = r \,\}.$$

Доказательство. Вытекает из формулы

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz$$

и неравенства треугольника (теорема 27)

$$\left| \int_\Gamma f(z)\, dz \right| \le M(f) \cdot L(\Gamma). \quad \square$$

Следствие 48 (теорема Лиувилля)**.** *Если $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ является аналитической и ограниченной, то f является константой.*

Доказательство. Из следствия 47 имеем

$$|c_n| \le \frac{1}{r^n} \, \sup\{\, |f(z)| : z \in \mathbb{C} \,\}.$$

Переходя к пределу при $r \to \infty$, получаем $c_n = 0$, $n = 1, 2, \ldots$. □

6.2 Существование ряда Тейлора

Теорема 49 (существование разложения в ряд Тейлора)**.** *Пусть $U \subseteq \mathbb{C}$ — открытое подмножество и $f : U \to X$ аналитическая функция. Тогда в окрестности любой точки $z_0 \in U$ имеет место представление*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

причем ряд сходится к f в любом круге

$$\{\, z : |z - z_0| < r \,\},$$

целиком лежащем в U.

Доказательство. Обозначим через K замкнутый круг $\{\, z : |z-z_0| \leq r \,\}$, целиком лежащий в U, а через Γ — ограничивающую его окружность $|\zeta - z_0| = r$. Тогда для любой точки z, лежащей внутри круга, в силу интегральной формулы Коши имеем

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta, \qquad |z - z_0| < r.$$

Представим подынтегральную функцию $1/(\zeta - z)$ в виде суммы ряда

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} =$$

$$= \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \Bigl(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \Bigr)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}.$$

Использование формулы для суммы геометрической прогрессии допустимо, поскольку $|z - z_0| < |\zeta - z_0|$. Более того, по той же причине рассматриваемый ряд сходится равномерно по $\zeta \in \Gamma$.

Поэтому после подстановки его в интегральную формулу Коши можно (следствие 30) почленно проинтегрировать:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(\zeta) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta.$$

Вводя обозначение

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\,d\zeta,$$

получаем нужную формулу

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(z - z_0)^n c_n. \quad \square$$

6.3 Теорема единственности

Областью в $\mathbb{C}$ называют любое открытое связное множество. Открытое множество называют *связным*, если любые его две точки можно соединить непрерывной кривой, не выходя за пределы множества.

Теорема 50. *Пусть $U \subseteq \mathbb{C}$ — область и $f, g : U \to \mathbb{C}$ аналитические функции. Пусть имеется последовательность $z_n \in U$, сходящаяся к точке $z_* \in U$, причем*

$$f(z_n) = g(z_n).$$

Тогда f и g совпадают всюду на U.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$h(z) = f(z) - g(z).$$

Достаточно показать, что h тождественно равна нулю. Разложим h в окрестности z_* в ряд Тейлора:

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_*)^n. \tag{6.3}$$

Пусть c_m — первый отличный от нуля коэффициент. Тогда

$$h(z) = (z - z_*)^m \varphi(z),$$

где

$$\varphi(z) = \sum_{n=m}^{\infty} c_n(z - z_*)^{n-m} = \sum_{k=0}^{\infty} c_{k+m}(z - z_*)^k.$$

Очевидно, $\varphi(z_*) = c_m \neq 0$. Поэтому и в некоторой окрестности точки z_* функция φ не обращается в ноль. Но это противоречит условию $h(z_n) = 0$. Противоречие показывает, что все c_n равны нулю.

В силу теоремы 49 равенство (6.3) справедливо в круге максимального радиуса, умещающемся в U. Значит, в этом круге функция h тождественно равна нулю.

Возьмем на границе круга новую точку z_*. По доказанному в круге с центром в этой точке максимального радиуса, умещающемся в U, функция h тождественно равна нулю. И т.д. В результате получим, что h всюду равна нулю. □

Следствие 51. *Функции* exp*,* cos *и* sin *имеют единственное аналитическое продолжение с* $\mathbb{R}$ *на* $\mathbb{C}$*. Функции* ln *и* $x \mapsto x^\alpha$ *имеют единственное единственное аналитическое продолжение с* $(0, +\infty)$ *на* $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.

6.4 Ряд Лорана

Двойным степенным рядом называют функциональный ряд вида

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n. \tag{6.4}$$

Под его *суммой* понимают сумму двух рядов

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z - z_0)^n + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n.$$

Лемма 52 (лемма Абеля для ряда по обратным степеням)**.** *Предположим, что ряд*

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z - z_0)^n$$

по обратным степеням $z - z_0$ *сходится в точке* z^**. Тогда он сходится поточечно в открытой внешности круга* $|z - z_0| > |z^* - z_0|$*. При этом для любого* $r > |z^* - z_0|$ *в замкнутой внешности круга* $|z - z_0| \geq r$ *сходимость является равномерной и, следовательно (в силу следствия 42), определяет аналитическую функцию.*

Доказательство. Надо сделать замену $\lambda = \frac{1}{z - z_0}$ и сослаться на лемму Абеля 44 для обычных степенных рядов. □

Следствие 53. *Областью поточечной сходимости двойного степенного ряда является некоторое открытое кольцо с центром в* z_0*, к которому добавлены некоторые точки граничных окружностей. В любом* *строго меньшем замкнутом кольце с тем же центром сходимость является равномерной.*

Доказательство. Вытекает из леммы 52. □

Это кольцо называют *кольцом сходимости.*

Следствие 54. *Сумма двойного степенного ряда является аналитической функцией в открытом кольце сходимости.*

Доказательство. Вытекает из следствий 53 и 45. □

Теорема 55 (единственность разложения в двойной степенной ряд)**.** *Если двойной степенной ряд* (6.4) *сходится к функции f, то его коэффициенты совпадают с числами*

$$\boxed{c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz,} \tag{6.5}$$

где Γ — произвольная окружность с центром в точке z_0, ориентированная против часовой стрелки и лежащая в открытом кольце сходимости.

Доказательство. Умножим равенство

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n$$

на $\frac{1}{(z-z_0)^{m+1}}$ и проинтегрируем по Γ. В силу равномерной сходимости (следствие 53) можно интегрировать почленно (следствие 30):

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(z)\frac{1}{(z-z_0)^{m+1}}\,dz &= \\
= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n\frac{1}{(z-z_0)^{m+1}}\,dz &= \\
= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma c_n(z-z_0)^n\frac{1}{(z-z_0)^{m+1}}\,dz &= \\
= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n\,\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{1}{(z-z_0)^{m-n+1}}\,dz&.
\end{aligned}$$

В соответствии с леммой 34 только один интеграл (при $n=m$) является ненулевым. В результате получается формула (6.5). □

Рядом Лорана функции f в заданном кольце[1] называют двойной степенной ряд, коэффициенты которого вычисляют по формуле (6.5).

6.5 Существование ряда Лорана

Теорема 56 (существование разложения в ряд Лорана)**.** *Если функция* f *является аналитической в кольце* $R_1 < |z - z_0| < R_2$*, то она раскладывается в этом кольце в двойной степенной ряд.*

Доказательство. Обозначим через A замкнутое кольцо $A = \{ z : r_1 \le |z - z_0| \le r_2 \}$, целиком лежащее в кольце $R_1 < |z - z_0| < R_2$, а через Γ_1 и Γ_2 — ограничивающие его контуры $|z - z_0| = r_1$ и $|z - z_0| = r_2$. Возьмем z, лежащее внутри A, и в соответствии с интегральной формулой Коши представим $f(z)$ в виде

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

Второй интеграл преобразуем так же, как в доказательстве теоремы 49:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta.$$

Вводя обозначение

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta, \qquad n = 0, 1, \ldots,$$

получаем формулу

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n.$$

Преобразуем теперь первый интеграл (Γ_1 ориентирована *по часовой стрелке*!)

$$I_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

[1]Отметим, что одна и та же функция может иметь разные ряды Лорана в разных кольцах с одним и тем же центром. Таким образом, чтобы задать ряд Лорана необходимо указать не только функцию и центр кольца, но и само кольцо, в котором она рассматривается.

Представим подынтегральную функцию $1/(\zeta - z)$ в виде суммы ряда

$$\frac{1}{\zeta - z} = -\frac{1}{(z - z_0) - (\zeta - z_0)} = -\frac{1}{z - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\zeta - z_0}{z - z_0}} =$$

$$= -\frac{1}{z - z_0} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\frac{\zeta - z_0}{z - z_0} \Big)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\zeta - z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}}.$$

Использование формулы для суммы геометрической прогрессии допустимо, поскольку $|\zeta - z_0| < |z - z_0|$. Более того, по той же причине рассматриваемый ряд сходится равномерно по $\zeta \in \Gamma_1$.

Поэтому после подстановки его в интегральную формулу Коши можно (следствие 30) почленно проинтегрировать:

$$I_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} f(\zeta) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\zeta - z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}} \, d\zeta =$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z - z_0)^{n+1}} \; \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{-n}} \, d\zeta.$$

Сделаем в последней формуле замену $n = -k - 1$:

$$I_1 = -\sum_{k=-\infty}^{-1} \frac{1}{(z - z_0)^{-k}} \; \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} \, d\zeta =$$

$$= -\sum_{k=-\infty}^{-1} (z - z_0)^k \; \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} \, d\zeta =$$

Поменяем ориентацию Γ_1 на противоположную:

$$= \sum_{k=-\infty}^{-1} (z - z_0)^k \; \frac{1}{2\pi i} \int_{-\Gamma_1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} \, d\zeta.$$

Вводя обозначение

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\Gamma_1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} \, d\zeta, \qquad k = -1, -2, \ldots,$$

получаем формулу

$$I_1 = \sum_{n=-\infty}^{-1} (z - z_0)^n c_n.$$

Отсюда

$$f(z) = I_1 + I_2 = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n(z - z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n.$$

Осталось заметить, что $-\Gamma_1$ и Γ_2 — гомотопные контуры. $\square$

Следствие 57 (неравенство Коши)**.** *Пусть f является аналитической в кольце $R_1 < |z - z_0| < R_2$ и $R_1 < r < R_2$. Тогда для коэффициентов c_n ряда Лорана функции f в этом кольце справедлива оценка*

$$|c_n| \leq \frac{M(f)}{r^n},$$

где $M(f) = \max\{\, |f(z)| : |z - z_0| = r \,\}$.

Доказательство. Вытекает из теоремы 55:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz$$

и неравенства треугольника (теорема 27)

$$\left| \int_\Gamma f(z)\, dz \right| \leq M(f) \cdot L(\Gamma).$$

$\square$

Глава 7

Вычеты

7.1 Вычеты

Пусть f — функция, аналитическая в *проколотой* окрестности U точки $z_0 \in \mathbb{C}$. *Вычетом* функции f *в точке* z_0 называют число, обозначаемое символом

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) \qquad \text{или} \qquad \operatorname*{Res}_{z_0} f$$

и равное интегралу

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(z)\,dz,$$

где Γ — окружность, лежащая в окрестности U точки z_0 и ориентированная против часовой стрелки.

Теорема 58 (теорема Коши о вычетах)**.** *Пусть $U \subseteq \mathbb{C}$ — открытое множество, $f : U \to \mathbb{C}$ — аналитическая функция, и пусть кусочно-непрерывно дифференцируемый контур Γ содержится в U вместе с ограничиваемым им множеством D за исключением конечного числа точек $z_1, z_2, \ldots, z_n \in D$. Тогда*

$$\boxed{\int_\Gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z_k} f.}$$

Доказательство. Легко выводится из теоремы Коши (32 или 33). □

Пусть f — функция, аналитическая в проколотой окрестности бесконечности. *Вычетом* функции f *в бесконечно удаленной точке* называют число, обозначаемое символом

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) \qquad \text{или} \qquad \operatorname*{Res}_{\infty} f$$

и равное интегралу

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(z)\,dz,$$

где Γ — окружность достаточно большого радиуса с центром в нуле, ориентированная *по* часовой стрелке.

Следствие 59 (о полной сумме вычетов)**.** *Пусть функция f является аналитической во всей комплексной плоскости за исключением конечного числа точек $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$. Тогда*

$$\operatorname*{Res}_\infty f + \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z_k} f = 0.$$

Доказательство. В силу определения вычета в $z=\infty$ и теоремы 58 интеграл $\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(z)\,dz$ по окружности Γ большого радиуса с центром в нуле с одной стороны равен $-\operatorname*{Res}_\infty f$, а с другой — $\sum_{k=1}^n \operatorname*{Res}_{z_k} f$. $\square$

Вычеты обычно вычисляют с помощью приводимой ниже теоремы 60 и ее следствия 62.

Теорема 60 (связь вычета с коэффициентом c_{-1})**.**

(a) *Пусть f — функция, аналитическая в проколотой окрестности точки z_0. Тогда*

$$\operatorname*{Res}_{z_0} f = c_{-1},$$

где c_{-1} — коэффициент разложения функции f в ряд Лорана в проколотой окрестности точки z_0.

(b) *Пусть f — функция, аналитическая в проколотой окрестности бесконечности. Тогда*

$$\operatorname*{Res}_\infty f = -c_{-1},$$

где c_{-1} — коэффициент разложения функции f в ряд Лорана в проколотой окрестности бесконечности.

Доказательство. Проколотая окрестность — частный случай кольца. Поэтому по теореме 56 функция f раскладывается в ней в двойной степенной ряд:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n.$$

В силу следствия 53 на окружностях Γ достаточно малого радиуса с центром в z_0 (для случая (b) — достаточно большого радиуса с центром в $z_0 = 0$) этот ряд сходится равномерно. Поэтому по следствию 30 его можно интегрировать почленно. Остается сослаться на лемму 34. □

7.2 Изолированные особые точки

Если функция f является аналитической в проколотой окрестности точки z_0, то z_0 называют *изолированной* особой точкой функции f.

Изолированную особую точку называют:

(a) *устранимой*, если существует конечный предел

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = A;$$

(b) *полюсом*, если существует бесконечный предел

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty;$$

(c) *существенно особой точкой*, если предел

$$\lim_{z \to z_0} f(z)$$

не существует.

Теорема 61 (о характере особой точки)**.** *Изолированная особая точка z_0 функции f является:*

(a) устранимой *ТиТТ, когда ее разложение в ряд Лорана в проколотой окрестности z_0 не содержит отрицательных степеней $z - z_0$ (и тем самым является рядом Тейлора):*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n;$$

(b) полюсом *ТиТТ, когда ее разложение в ряд Лорана в проколотой окрестности z_0 содержит лишь конечное число отрицательных степеней $z - z_0$:*

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n;$$

Старшую отрицательную степень m в этом разложении называют порядком полюса.

(c) существенно особой точкой *ТиТТ, когда ее разложение в ряд Лорана в проколотой окрестности* z_0 *содержит бесконечное число отрицательных степеней* $z - z_0$*:*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n.$$

Доказательство. (a) Пусть z_0 — устранимая особая точка. Поскольку существует предел $\lim_{z \to z_0} f(z)$, функция f в окрестности точки z_0 ограничена. В силу следствия 57

$$|c_n| \le \frac{M(f)}{r^n},$$

где $M(f) = \max\{\, |f(z)| : |z - z_0| = r \,\} \le \max\{\, |f(z)| : |z - z_0| \le r \,\}$. Заметим, что при $n < 0$

$$\lim_{r \to 0} \frac{M(f)}{r^n} = 0.$$

Поэтому

$$c_n = 0, \qquad n < 0.$$

Обратно. Пусть в окрестности z_0

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n.$$

Тогда, поскольку сумма степенного ряда является аналитической (в частности, непрерывной) функцией,

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \lim_{z \to z_0} \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n \Big|_{z = z_0} = c_0.$$

(b) Пусть z_0 — полюс, т.е. $\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$. Тогда в проколотой окрестности z_0 функция f не обращается в ноль. Поэтому в этой окрестности функция

$$\psi(z) = \frac{1}{f(z)}$$

определена и аналитична. Более того,

$$\lim_{z \to z_0} \psi(z) = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{f(z)} = 0.$$

Поэтому согласно (а)

$$\psi(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z - z_0)^n,$$

причем сумма этого ряда не обращается в ноль в проколотой окрестности z_0. Пусть c_m — первый ненулевой коэффициент. Тогда

$$\psi(z) = \sum_{n=m}^{+\infty} c_n(z - z_0)^n = (z - z_0)^m \sum_{n=m}^{+\infty} c_n(z - z_0)^{n-m}.$$

Обозначим через φ сумму последнего ряда

$$\varphi(z) = \sum_{n=m}^{+\infty} c_n(z - z_0)^{n-m}.$$

Этот ряд сходится в той же проколотой окрестности, что и ряд $\psi(z) = \sum_{n=m}^{+\infty} c_n(z - z_0)^n$. При этом

$$\varphi(z_0) = c_m \neq 0.$$

Следовательно, функция

$$g(z) = \frac{1}{\varphi(z)}$$

определена и является аналитической в окрестности z_0 и поэтому раскладывается в ней в ряд Тейлора:

$$g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} d_n(z - z_0)^n.$$

Соединим теперь все вместе:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{\psi(z)} = \frac{1}{(z - z_0)^m \varphi(z)} = \frac{1}{(z - z_0)^m} g(z) = \\ &= \frac{1}{(z - z_0)^m} \sum_{n=0}^{+\infty} d_n(z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} d_n(z - z_0)^{n-m}. \end{aligned}$$

Обратно. Пусть

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{+\infty} c_n(z - z_0)^n,$$

причем $c_{-m} \neq 0$. Представим f в виде

$$f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^m} g(z),$$

где

$$g(z) = \sum_{n=-m}^{+\infty} c_n (z-z_0)^{n-m}.$$

Очевидно,

$$\lim_{z\to z_0} g(z) = c_{-m} \neq 0.$$

Поэтому

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0} \frac{1}{(z-z_0)^m} \lim_{z\to z_0} g(z) = \infty.$$

(c) Пусть z_0 — существенно особая точка, т.е. не существует $\lim_{z\to z_0} f(z)$. Покажем, что ряд Лорана содержит бесконечное число отрицательных степеней $z-z_0$. ПП: ряд Лорана содержит конечное число отрицательных степеней $z-z_0$. Тогда по доказанному z_0 — либо полюс, либо устранимая особая точка.

Обратно, пусть ряд Лорана содержит бесконечное число отрицательных степеней $z-z_0$. Покажем, что не существует $\lim_{z\to z_0} f(z)$. ПП: предел существует (конечный или бесконечный). Тогда по доказанному z_0 — либо устранимая особая точка, либо полюс. □

7.3 Способы нахождения вычетов

Следствие 62 (способы вычисления вычетов)**.**

(a) *Пусть z_0 является полюсом первого порядка функции f. Тогда*

$$\mathrm{Res}_{z_0} f = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z).$$

(b) *Пусть $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, причем φ и ψ являются аналитическими в окрестности точки z_0, и точка z_0 является нулем первого порядка функции ψ. Тогда*

$$\operatorname*{Res}_{z_0} f = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}.$$

(c) *Пусть z_0 является полюсом порядка m функции f. Тогда*

$$\operatorname*{Res}_{z_0} f = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z\to z_0} \big((z-z_0)^m f(z)\big)^{(m-1)}.$$

(d) *Пусть существует предел* $f(\infty) = \lim_{z\to\infty} f(z)$. *Тогда*

$$\operatorname*{Res}_{\infty} f = -\lim_{z\to\infty} z\big(f(z) - f(\infty)\big) = \lim_{z\to\infty} z\big(f(\infty) - f(z)\big).$$

Доказательство. Вытекает из теоремы 60.

(a) В силу теоремы 61 для полюса 1-го порядка

$$f(z) = \sum_{n=-1}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n.$$

Отсюда

$$(z - z_0) f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_{n-1} (z - z_0)^n.$$

Из этой формулы видно, что

$$\lim_{z\to z_0} (z - z_0) f(z) = \lim_{z\to z_0} \sum_{n=0}^{+\infty} c_{n-1} (z - z_0)^n = c_{-1}.$$

(b) По определению нуля первого порядка

$$\psi(z) = (z - z_0)\psi_1(z), \qquad \text{где } \psi_1(z_0) \neq 0.$$

В этом случае функция $z \mapsto \frac{\varphi(z)}{\psi_1(z)}$ является аналитической в окрестности точки z_0 и поэтому по теореме 49 в окрестности точки z_0 она раскладывается в степенной ряд:

$$\frac{\varphi(z)}{\psi_1(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

где $c_0 = \frac{\varphi(z_0)}{\psi_1(z_0)}$, $c_1 = \ldots$.

Отсюда

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^{n-1}.$$

Таким образом, z_0 является полюсом первого порядка для функции f, и можно применить утверждение (a):

$$\operatorname*{Res}_{z_0} f = \lim_{z\to z_0} (z - z_0) f(z) = \lim_{z\to z_0} (z - z_0) \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} =$$

$$= \lim_{z\to z_0} \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = c_0 = \frac{\varphi(z_0)}{\psi_1(z_0)}.$$

Из формулы
$$\psi(z) = (z - z_0)\psi_1(z)$$
имеем
$$\psi'(z) = (z - z_0)'\psi_1(z) + (z - z_0)\psi_1'(z).$$
Отсюда
$$\psi'(z_0) = \psi_1(z_0).$$
Следовательно,
$$\operatorname*{Res}_{z_0} f = \frac{\varphi(z_0)}{\psi_1(z_0)} = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}.$$

(c) Пусть z_0 является полюсом порядка m функции f. В силу теоремы 61 это значит, что
$$f(z) = \sum_{n=-m}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n.$$
Имеем
$$\lim_{z\to z_0} \Big((z - z_0)^m f(z)\Big)^{(m-1)} = \lim_{z\to z_0} \Big(\sum_{n=-m}^{+\infty} c_n (z - z_0)^{n+m}\Big)^{(m-1)} =$$
Сделаем замену $k = n + m$:
$$= \lim_{z\to z_0} \Big(\sum_{k=0}^{+\infty} c_{k-m} (z - z_0)^k\Big)^{(m-1)} = \Big(\sum_{k=0}^{+\infty} c_{k-m} (z - z_0)^k\Big)^{(m-1)}\Big|_{z=z_0}.$$
Посчитаем производную $(m-1)$-го порядка и подставим $z = z_0$. После подстановки останется только слагаемое, соответствующее $z - z_0$ в нулевой степени.

После дифференцирования в нулевую степень превратится $(z-z_0)^{m-1}$, а именно,
$$\Big(c_{-1}(z - z_0)^{m-1}\Big)^{(m-1)} = c_{-1}(m-1)!.$$
Отсюда
$$\operatorname*{Res}_{z_0} f = c_{-1} = \frac{1}{(m-1)!}\Big(c_{-1}(z - z_0)^{m-1}\Big)^{(m-1)} =$$
$$= \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z\to z_0} \Big((z - z_0)^m f(z)\Big)^{(m-1)}.$$

(d) Пусть существует предел $f(\infty) = \lim_{z\to\infty} f(z)$. Разложим функцию f в окрестности бесконечности в ряд Лорана:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n.$$

Рассмотрим функцию $g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$. Очевидно,

$$g(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \frac{1}{z^n},$$

$$\lim_{z\to 0} g(z) = \lim_{z\to 0} f\left(\frac{1}{z}\right) = \lim_{z\to\infty} f(z) \in \mathbb{C}.$$

Таким образом, ноль — устранимая особая точка для g. Поэтому по теореме 61 $c_n = 0$ при $n > 0$. Значит,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{0} c_n z^n.$$

Очевидно, $f(\infty) = c_0$. Поэтому

$$z\big(f(z) - f(\infty)\big) = z \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n z^n = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n z^{n+1}.$$

Отсюда

$$\lim_{z\to\infty} z\big(f(z) - f(\infty)\big) = c_{-1} = -\operatorname*{Res}_{\infty} f. \quad \square$$

7.4 Лемма Жордана

Теорема 63 (лемма Жордана)**.** *Пусть F — функция комплексной переменной. Если F определена и равномерно стремится к нулю на дугах окружностей C_R радиуса $R \to \infty$, лежащих в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda \le \sigma$ ($\sigma \in \mathbb{R}$ фиксировано), см. левый рис. 7.1, то при любом $\boxed{t > 0}$*

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} e^{\lambda t} F(\lambda)\, d\lambda = 0.$$

Если F определена и равномерно стремится к нулю на дугах окружностей C_R радиуса $R \to \infty$, лежащих в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda \ge \sigma$ ($\sigma \in \mathbb{R}$ фиксировано), см. правый рис. 7.1, то при любом $\boxed{t < 0}$

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} e^{\lambda t} F(\lambda)\, d\lambda = 0.$$

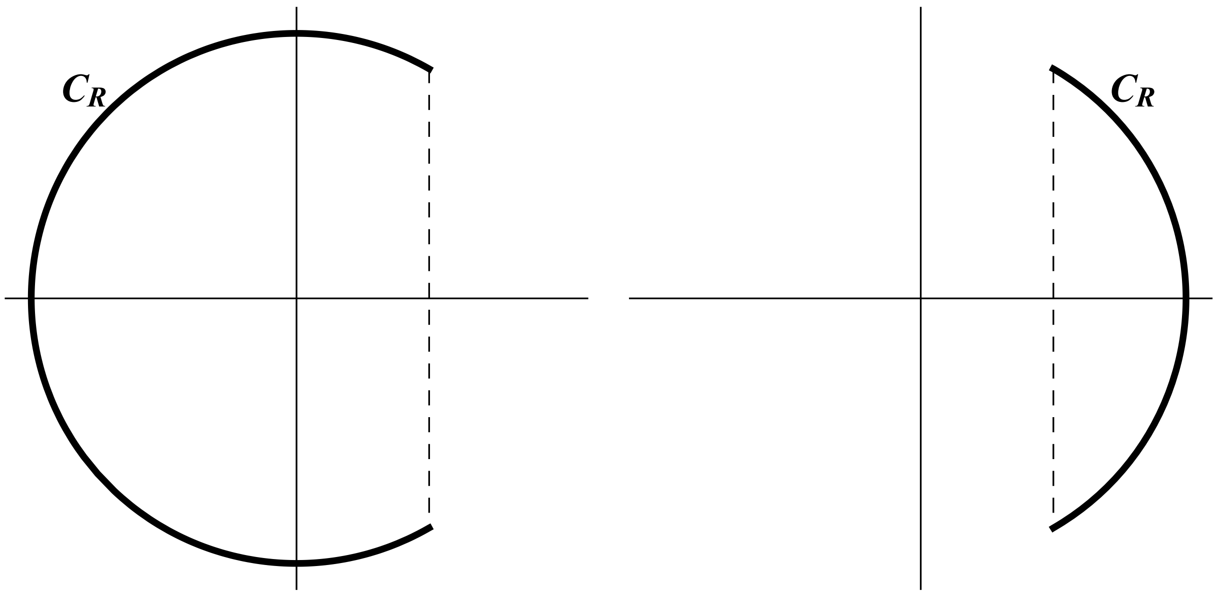

Рис. 7.1: Контуры Жордана из теоремы 63

Доказательство. Ограничимся доказательством первого утверждения, см. рис 7.2.

Введем обозначения: $M_R = \max_{\lambda \in C_R} |F(\lambda)|$ и $\alpha_R = \arcsin \frac{\sigma}{R}$. В условиях леммы если R стремится к бесконечности, то M_R и α_R стремятся к нулю, а длина $\alpha_R R$ дуг AB и CD стремится к σ. На дугах AB и CD имеем $|e^{\lambda t}| = e^{\mathrm{Re}\,\lambda t} \leq e^{\sigma t}$. Следовательно,

$$\Big|\int_{AB} e^{\lambda t} F(\lambda)\, d\lambda\Big|, \quad \Big|\int_{CD} e^{\lambda t} F(\lambda)\, d\lambda\Big| \leq M_R e^{\sigma t} \alpha_R R.$$

Здесь $e^{\sigma t}$ является константой, $\alpha_R R$ ограничено, а M_R стремится к нулю. Поэтому интеграл по этим дугам стремится к нулю, когда R стремится к бесконечности.

В интеграле $\int_{BE} e^{\lambda t} F(\lambda)\, d\lambda$ выполним параметризацию (замену переменной) $\lambda = Re^{i\varphi}$. В результате получим

$$\int_{BE} e^{\lambda t} F(\lambda)\, d\lambda = \int_{\pi/2}^{\pi} e^{tRe^{i\varphi}} F(Re^{i\varphi}) iRe^{i\varphi}\, d\varphi.$$

Отсюда

$$\Big|\int_{BE} e^{\lambda t} F(\lambda)\, d\lambda\Big| \leq R\, M_R \int_{\pi/2}^{\pi} e^{tR\cos\varphi}\, d\varphi.$$

Из графика косинуса вытекает очевидное неравенство $\cos\varphi \leq -\frac{2}{\pi}(\varphi-$

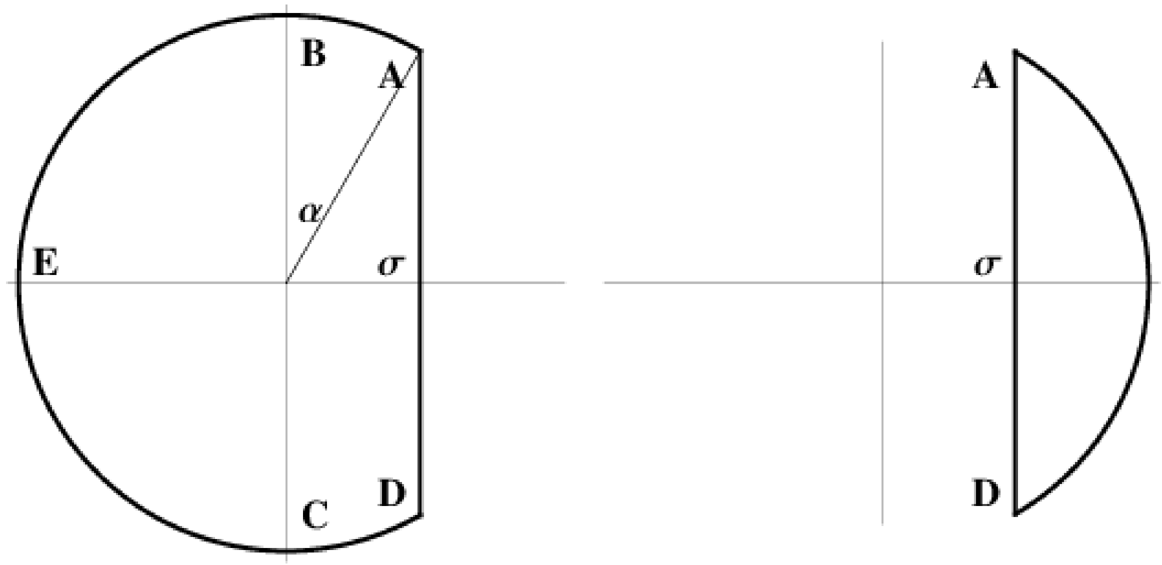

Рис. 7.2: Контуры Жордана из доказательства теоремы 63

$\frac{\pi}{2}$) для $\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \pi$. Поэтому

$$e^{tR\cos\varphi} \leq e^{-\frac{2tR}{\pi}(\varphi-\frac{\pi}{2})}.$$

Следовательно,

$$\Big|\int_{BE} e^{\lambda t} F(\lambda)\, d\lambda\Big| \leq R\, M_R \int_{\pi/2}^{\pi} e^{-\frac{2tR}{\pi}(\varphi-\frac{\pi}{2})}\, d\varphi =$$

$$= R\, M_R \frac{\pi}{2tR}(1-e^{-tR}) = M_R \frac{\pi}{2t}(1-e^{-tR}),$$

что стремится к нулю.

Аналогично проверяется что $\int_{CE} F(\lambda)e^{\lambda t}\, d\lambda$ стремится к нулю. □

Следствие 64. *Пусть F — функция комплексной переменной. Если F определена и равномерно стремится к нулю на дугах окружностей C_R радиуса $R \to \infty$, лежащих в полуплоскости $\operatorname{Im}\lambda \geq \sigma$ ($\sigma \in \mathbb{R}$ фиксировано), см. левый рис. 7.3, то при любом $t > 0$*

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} e^{i\lambda t} F(\lambda)\, d\lambda = 0.$$

Если F определена и равномерно стремится к нулю на дугах окружностей C_R радиуса $R \to \infty$, лежащих в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda \leq \sigma$ ($\sigma \in \mathbb{R}$ фиксировано), см. правый рис. 7.3, то при любом $t < 0$

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} e^{i\lambda t} F(\lambda)\, d\lambda = 0.$$

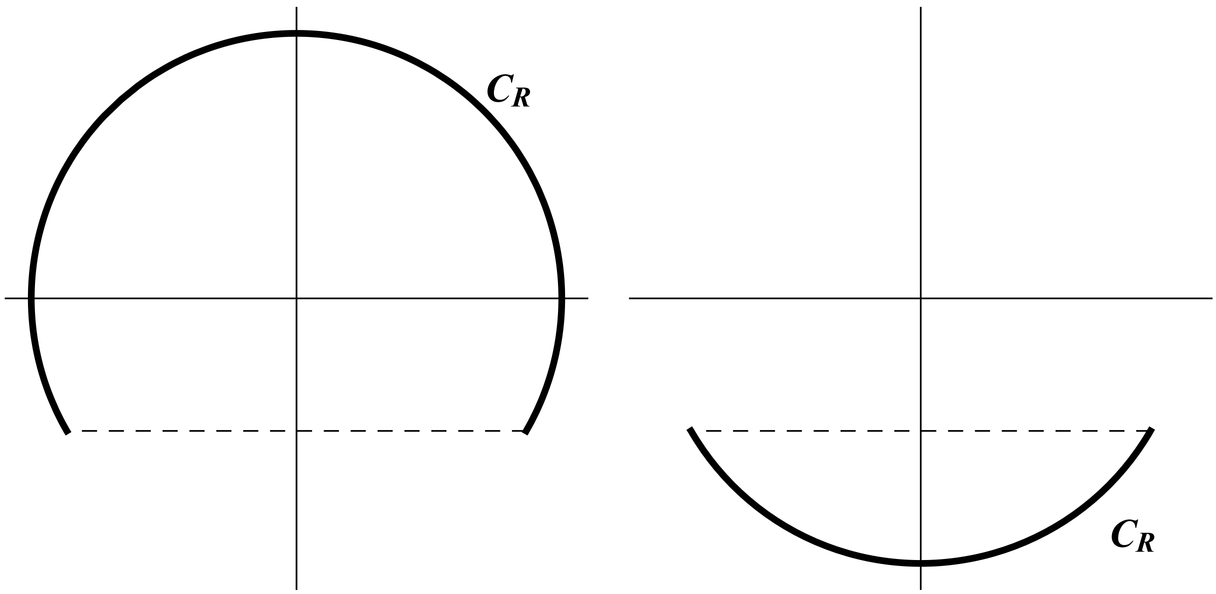

Рис. 7.3: Контуры Жордана из следствия 64

Доказательство. Аналогично доказательству теоремы 63, либо получается из нее заменой переменной. $\square$

Глава 8

Преобразование Лапласа

8.1 Определение преобразования Лапласа

Функцию $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ называют *оригиналом*, если:

(a) функция f равна нулю на $(-\infty, 0)$;

(b) функция f интегрируема на любом конечном отрезке $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$;

(c) интеграл $\int_0^{+\infty} e^{-\gamma t} f(t)\,dt$ абсолютно сходится при $\gamma > \gamma_f$ для некоторого $\gamma_f \in \mathbb{R}$ (для каждой f число γ_f свое).

Число γ_f называют *показателем* (*экспоненциального*) *роста* функции f.

Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ является оригиналом. *Преобразованием Лапласа* функции f или *изображением* (*по Лапласу*) функции f называют функцию

$$\boxed{F(p) = \tilde{f}(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-pt} f(t)\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\,dt.}$$

Тот факт, что f и F связаны друг с другом преобразованием Лапласа, записывают в виде

$$f(t) \risingdotseq F(\lambda) \qquad \text{или} \qquad F(\lambda) \fallingdotseq f(t).$$

8.2 Дифференцирование изображения

Лемма 65 (ср. с теоремой 36). *Пусть $U \subseteq \mathbb{C}$ — произвольное открытое множество, функция $K : \mathbb{R} \times E \to \mathbb{C}$ непрерывна и ограничена вместе с $\frac{\partial K}{\partial z}$, а функция $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ абсолютно интегрируема. Тогда функция*

$$I(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(t, z) g(t)\,dt$$

непрерывно дифференцируема, (в комплексном смысле), причем

$$\frac{dI}{dz}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial K}{\partial z}(t, z) g(t)\, dt.$$

Доказательство. Без доказательства. □

Теорема 66 (дифференцирование изображения)**.** *Пусть f — оригинал, а γ_f — показатель его роста. Тогда изображение F определено в полуплоскости $\operatorname{Re} p > \gamma_f$ и является в ней аналитической функцией, причем*

$$\frac{dF}{dp}(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt}(-t) f(t)\, dt.$$

Иными словами,

$$\boxed{-t f(t) \risingdotseq F'(p).}$$

Доказательство. Надо применить лемму 65 во всех полуплоскостях $\operatorname{Re} p > \gamma$ с $\gamma > \gamma_f$ и заметить, что если интеграл

$$\int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\, dt$$

абсолютно сходится при $\operatorname{Re} p > \gamma$, то интеграл

$$\int_0^{+\infty} e^{-pt}(-t) f(t)\, dt$$

абсолютно сходится при $\operatorname{Re} p > \delta$ с любым $\delta > \gamma$. □

8.3 Изображение свертки

Лемма 67 (теорема Фубини)**.** *Пусть $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ измерима, и пусть хотя бы один из повторных интегралов*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t, s)|\, dt\, ds, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t, s)|\, ds\, dt$$

конечен. Тогда повторные интегралы

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t, s)\, dt\, ds, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t, s)\, ds\, dt$$

существуют и совпадают.

Теорема 68 (изображение свертки)**.** *Пусть функции f и g являются оригиналами, и пусть F и G — их изображения. Тогда функция*

$$\big(f*g\big)(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(s)g(t-s)\,ds = \\ =\begin{cases} 0 & \text{при } t\le 0,\\ \int_0^t f(s)g(t-s)\,ds & \text{при } t\ge 0,\end{cases}$$

называемая сверткой f и g, также является оригиналом и

$$\boxed{\big(f*g\big)(t)\risingdotseq F(p)G(p).}$$

Доказательство. По определению имеем

$$\big(f*g\big)(t)\risingdotseq \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-pt}\Big(\int_{-\infty}^{+\infty} f(s)g(t-s)\,ds\Big)\,dt$$

при условии, что этот повторный интеграл существует. Поменяем порядок интегрирования (в предположении, что это можно делать):

$$\big(f*g\big)(t)\risingdotseq \int_{-\infty}^{+\infty} f(s)\Big(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-pt}g(t-s)\,dt\Big)\,ds.$$

Сделаем во внутреннем интеграле замену $t-s=\tau$:

$$\begin{aligned}\big(f*g\big)(t)\risingdotseq &\int_{-\infty}^{+\infty} f(s)\Big(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-p(s+\tau)}g(\tau)\,d\tau\Big)\,ds = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ps}f(s)\Big(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-p\tau}g(\tau)\,d\tau\Big)\,ds = \\ &= \Big(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ps}f(s)\,ds\Big)\times \\ &\times\Big(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-p\tau}g(\tau)\,d\tau\Big) = F(p)G(p).\end{aligned}$$

Из этих выкладок видно, что несобственный интеграл, получившийся после замены порядка интегрирования, абсолютно сходится при $\operatorname{Re} p > \gamma_0$, где γ_0 — максимум из показателей роста γ_f и γ_g функций f и g.

Значит, по теореме 67 менять порядок интегрирования можно и исходный несобственный интеграл сходится абсолютно. □

8.4 Дифференцирование оригинала

Теорема 69 (дифференцирование оригинала I). *Пусть оригинал f является непрерывно дифференцируемой функцией, причем f' также является оригиналом. Тогда*

$$\boxed{f'(t) \risingdotseq pF(p).}$$

Доказательство. Надо применить формулу интегрирования по частям к определению

$$\widetilde{f'}\,(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-pt} f'(t)\, dt. \quad \square$$

Очень часто теорема 69 используется в следующем варианте.

Теорема 70 (дифференцирование оригинала II). *Пусть оригинал f является непрерывно дифференцируемой функцией всюду, кроме точки 0, в которой f' имеет разрыв первого рода. Пусть функция*[1]

$$f^{[1]}(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t < 0, \\ f'(t), & \text{если } t \geq 0, \end{cases}$$

также является оригиналом. Тогда

$$f^{[1]}(t) \risingdotseq pF(p) - f(+0).$$

Доказательство I. Надо применить формулу интегрирования по частям к определению

$$f^{[1]}(t) \risingdotseq \int_{0}^{+\infty} e^{-pt} f'(t)\, dt. \quad \square$$

Аналогично теореме 70 доказывается следующее утверждение.

Следствие 71. *Пусть оригинал f является n раз непрерывно дифференцируемой функцией всюду, кроме точки 0, в которой $f^{(n)}$ имеет разрыв первого рода. Пусть функция*

$$f^{[n]}(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t < 0, \\ f^{(n)}(t), & \text{если } t \geq 0, \end{cases}$$

также является оригиналом. Тогда

$$f^{[n]}(t) \risingdotseq p^n F(p) - p^{n-1} f(+0) - \cdots - f^{(n-1)}(+0).$$

[1] Функция $f^{[1]}$ не является производной функции f, хотя и совпадает с ней всюду, кроме точки 0, см. формулу (8.1) ниже.

Использование обобщенных функций позволяет доказать следующий вариант теоремы 69, в котором существенно меньше предположений.

Теорема 72 (дифференцирование оригинала III)**.** *Пусть f является произвольным оригиналом. Тогда*

$$f'(t) \risingdotseq pF(p),$$

где f' понимается в смысле обобщенных функций.

Доказательство II теоремы 70. Напомним, что *функцией Хевисайда* называют функцию

$$\eta(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t \leq 0, \\ 1, & \text{если } t > 0. \end{cases}$$

Непосредственно из определения преобразования Лапласа следует, что

$$\eta \risingdotseq \frac{1}{p}.$$

Будем считать известным определение δ-функции Дирака и формулу

$$\eta'(t) = \delta(t) \risingdotseq 1.$$

Из правила дифференцирования обобщенных функций в условиях теоремы 70 имеем

$$f'(t) = f(+0)\delta(t) + f^{[1]}(t)\eta(t) = f(0)\delta(t) + f^{[1]}(t). \tag{8.1}$$

Отсюда в силу теоремы 72 получаем

$$f'(t) = f(0)\delta(t) + f^{[1]}(t) \risingdotseq pF(p)$$

или, что эквивалентно,

$$f^{[1]}(t) = f'(t) - f(0)\delta(t) \risingdotseq pF(p) - f(0). \quad \square$$

8.5 Свойства преобразования Лапласа

Ниже перечисляются основные факты теории преобразования Лапласа, которые нужны для решения вычислительных задач. Часть из них была доказана выше. Доказательство остальных сводится к непосредственным вычислениям. Более подробные таблицы см. в [8, 11].

Определение

$$F(p)=\tilde{f}(p)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-pt} f(t)\,dt=\int_{0}^{+\infty} e^{-pt} f(t)\,dt.$$

Основные правила

$$f(\alpha t) \risingdotseq \frac{1}{\alpha} F\Big(\frac{p}{\alpha}\Big), \qquad \big(f*g\big)(t) \risingdotseq F(p)G(p),$$

$$e^{p_0 t} f(t) \risingdotseq F(p-p_0), \qquad f(t-t_0) \risingdotseq e^{-pt_0} F(p),$$

$$(-1)^n t^n f(t) \risingdotseq F^{(n)}(p), \qquad f^{(n)}(t) \risingdotseq p^n F(p),$$

$$\frac{f(t)}{t} \risingdotseq \int_p^{+\infty} F(p)\,dp, \qquad \int_{-\infty}^{t} f(s)\,ds \risingdotseq \frac{F(p)}{p}.$$

8.6 Таблица преобразований Лапласа

Ниже перечисляются преобразования Лапласа часто встречающихся функций. Ими удобно пользоваться при решении задач. Доказательства сводятся к непосредственным вычислениям.

$$\delta(t) \risingdotseq 1, \qquad \eta(t) \risingdotseq \frac{1}{p},$$

$$\delta(t-t_0) \risingdotseq e^{-pt_0}, \qquad \eta(t-t_0) \risingdotseq \frac{e^{-pt_0}}{p},$$

$$\eta(t) e^{p_0 t} \risingdotseq \frac{1}{p-p_0}, \qquad \eta(t)\, t^n e^{p_0 t} \risingdotseq \frac{n!}{(p-p_0)^{n+1}},$$

$$\eta(t) \cos\omega t \risingdotseq \frac{p}{p^2+\omega^2}, \qquad \eta(t) \sin\omega t \risingdotseq \frac{\omega}{p^2+\omega^2},$$

$$\eta(t) \operatorname{ch}\omega t \risingdotseq \frac{p}{p^2-\omega^2}, \qquad \eta(t) \operatorname{sh}\omega t \risingdotseq \frac{\omega}{p^2-\omega^2},$$

$$\eta(t)\, t\cos\omega t \risingdotseq \frac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}, \qquad \eta(t)\, t\sin\omega t \risingdotseq \frac{2\omega p}{(p^2+\omega^2)^2},$$

$$\eta(t)\, t\operatorname{ch}\omega t \risingdotseq \frac{p^2+\omega^2}{(p^2-\omega^2)^2}, \qquad \eta(t)\, t\operatorname{sh}\omega t \risingdotseq \frac{2\omega p}{(p^2-\omega^2)^2},$$

$$\eta(t) e^{p_0 t} \cos\omega t \risingdotseq \frac{p-p_0}{(p-p_0)^2+\omega^2}, \qquad \eta(t) e^{p_0 t} \sin\omega t \risingdotseq \frac{\omega}{(p-p_0)^2+\omega^2},$$

$$\eta(t) e^{p_0 t} \operatorname{ch}\omega t \risingdotseq \frac{p-p_0}{(p-p_0)^2-\omega^2}, \qquad \eta(t) e^{p_0 t} \operatorname{sh}\omega t \risingdotseq \frac{\omega}{(p-p_0)^2-\omega^2}.$$

8.7 Решение дифференциальных уравнений

Теоремы 69, 70 и 72 описывают наиболее важное свойство преобразования Лапласа — превращение операции дифференцирования оригинала в операцию умножения изображения на p. Обсудим применение этого свойства на примере решения начальной задачи

$$\begin{cases} x'(t) + ax(t) = f(t), \qquad t > 0, \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

Здесь по смыслу функции x и f заданы на $[0, +\infty)$. Продолжим x, x' и f на $(-\infty, 0)$ нулями. Подчеркнем, что при этом из x' получится функция $x^{[1]}$ из теоремы 70, а не производная продолжения x на всю ось. Предположим, что все продолжения являются оригиналами. Перейдем в уравнении $x'(t) + ax(t) = f(t)$ (продолженном нулями на $(-\infty, 0)$) к преобразованию Лапласа:

$$pX(p) - e^{-p\,0}x(+0) + aX(p) = F(p).$$

Или

$$pX(p) - x_0 + aX(p) = F(p).$$

Откуда

$$X(p) = \frac{F(p) + x_0}{p + a} = \frac{x_0}{p + a} + \frac{F(p)}{p + a}.$$

Восстанавливая по X оригинал x, получаем решение:

$$\begin{aligned} x(t) &\risingdotseq \frac{x_0}{p + a} + \frac{F(p)}{p + a} \fallingdotseq \\ &\fallingdotseq x_0\eta(t)e^{-at} + \int_{-\infty}^{+\infty} \eta(s)e^{-as}f(t - s)\,ds = \\ &= x_0e^{-at} + \int_0^{+\infty} e^{-as}f(t - s)\,ds, \qquad t \geq 0. \end{aligned}$$

Замечание 2. В этом рассуждении упоминание о продолжении на $(-\infty, 0)$ можно исключить. Для этого надо внести изменение в определение оригинала: оригиналом следует считать функцию $f : [0, +\infty) \to \mathbb{C}$ с областью определения $[0, +\infty)$ вместо $\mathbb{R}$. Все свойства преобразования Лапласа переносятся на этот случай. При этом утверждение теоремы 70 приобретает вид

$$\boxed{f'(t) \risingdotseq pF(p) - f(+0),}$$

где f' — настоящая производная на полуоси. Для такого варианта преобразования Лапласа рассуждения при решении начальной задачи несколько сокращаются.

8.8 Решение интегральных уравнений

Интегральным уравнением свертки (это частный случай интегрального уравнения Вольтерра 2-го рода) называют уравнение вида

$$y(t) = \int_0^t k(t-s)\, y(s)\, ds + f(t),$$

в котором k и f — известные функция, называемые *ядром* и *свободным членом* соответственно.

Положим

$$y(t) \risingdotseq Y(p), \qquad f(t) \risingdotseq F(p), \qquad k(t) \risingdotseq K(p).$$

Перейдем в уравнении к преобразованию Лапласа (см. теорему 68):

$$Y(p) = K(p)Y(p) + F(p).$$

Решая это уравнение, получаем

$$\boxed{Y(p) = \frac{F(p)}{1 - K(p)}.}$$

Решение y интегрального уравнения находится как оригинал Y (по таблице).

Замечание 3. Решим уравнение

$$y(t) = -\int_0^t e^{2(t-s)}\, y(s)\, ds + te^{2t}.$$

Здесь $k(x) = e^{2x}$. Переходя к преобразованию Лапласа, получаем

$$Y(p) = -\frac{1}{p-2}Y(p) + \frac{1}{(p-2)^2}.$$

Решая это уравнение, находим

$$Y(p) = \frac{1}{(p-1)(p-2)} = \frac{1}{p-2} - \frac{1}{p-1}.$$

Отсюда

$$y(t) = e^{2t} - e^t.$$

8.9 Обращение преобразования Лапласа

Функцию $f[a,b] \to \mathbb{C}$ называют [1, с. 459] *кусочно-гладкой*, если ее производная существует и непрерывна всюду, кроме конечного числа точек, а в этих точках производная имеет конечные односторонние пределы. Разрывной, но все же кусочно-непрерывной является функция Хевисайда η и, следовательно, большинство функций из таблицы преобразований Лапласа.

Теорема 73 (теорема обращения преобразования Лапласа)**.** *Пусть оригинал f является кусочно-гладким, и пусть γ_f — показатель его роста. Тогда для любого $\gamma > \gamma_f$ во всех точках $t \in \mathbb{R}$, где f непрерывна, имеет место равенство*

$$\boxed{f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - iN}^{\gamma + iN} e^{pt} F(p)\, dp.} \tag{8.2}$$

Доказательство. Без доказательства. □

Замечание 4. Использование формулы (8.2) для реального нахождения обратного преобразования Лапласа довольно проблематично, поскольку в большинстве случаев этот несобственный интеграл сходится медленно. Основная ценность теоремы 73 заключается в ее следствии: *всякий кусочно-гладкий оригинал однозначно* (*с точностью до значений в точках разрыва*) *восстанавливается по своему изображению.* Это следствие остается справедливым для очень широкого класса оригиналов, в частности, для всех оригиналов, рассматриваемых нами, и для обобщенных оригиналов, хотя формула (8.2) уже не всегда имеет смысл.

Глава 9

Понятие о римановой поверхности

Пусть $U_0 \subseteq U$ — два открытых подмножества $\mathbb{C}$, а $f : U \to \mathbb{C}$ и $f_0 : U_0 \to \mathbb{C}$ — аналитические функции. Говорят, что f является *расширением* f_0, если на U_0 функции f и f_0 совпадают.

9.1 Определение аналитического продолжения

(Аналитическим) элементом называют пару (G, f), где $G \subseteq \mathbb{C}$ — область , а $f : G \to \mathbb{C}$ — аналитическая функция.

Рассмотрим два аналитических элемента (G_1, f_1) и (G_2, f_2). Пересечение $G_1 \cap G_2$ состоит из нескольких связных частей D_1, D_2,... . Предположим, что в некоторых из этих частей f_1 и f_2 совпадают. Тогда говорят, что элементы (G_1, f_1) и (G_2, f_2) являются *непосредственным продолжением* друг друга через эти части.

Рассмотрим два аналитических элемента (F, f) и (H, h). Говорят, что они являются *продолжениями* друг друга, если существует последовательность

$$(F, f) = (G_1, f_1),\ (G_2, f_2), \dots, (G_n, f_n) = (H, h),$$

в которой каждые два соседних элемента являются непосредственными продолжениями друг друга.

Удобно, когда взаимные пересечения областей состоят из одной компоненты. Так заведомо бывает, когда все области определения элементов являются кругами.

Элемент (U, f) называют *каноническим*, если U является кругом сходимости ряда Тейлора функции f в центре этого круга.

Например, для функции $y = \ln z$ областью определения канонического элемента с центром в точке 1 является круг $U = \{\, z : |z - 1| < 1 \,\}$,

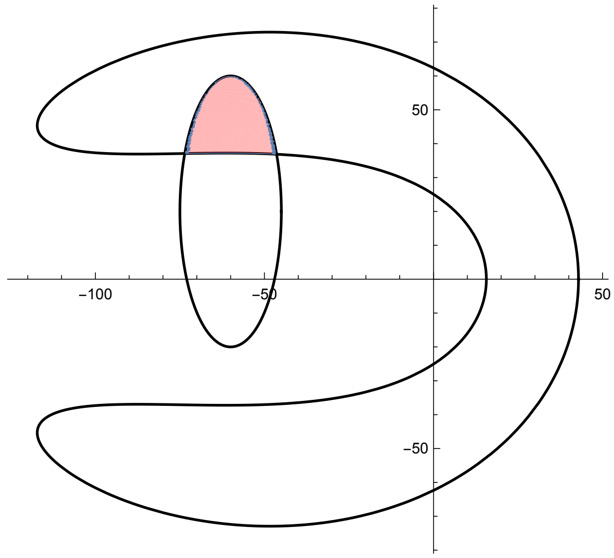

Рис. 9.1: Непосредственное аналитическое продолжение

поскольку радиус сходимости ряда Тейлора

$$\ln z = (z-1) - \frac{(z-1)^2}{2} + \frac{(z-1)^3}{3} - \frac{(z-1)^4}{4} + - \dots$$

для ln с центром в 1 равен 1.

9.2 Понятие римановой поверхности аналитической функции

Возьмем какой-то элемент (G, f) и рассмотрим совокупность всех элементов, являющихся его аналитическими продолжениями. Вырежем из бумаги области, соответствующие всем элементам продолжений. Склеим получившиеся куски по тем местам, где заданные на них функции совпадают. То, что получится, называют *римановой поверхностью* аналитической функции f. В каждой точки римановой поверхности определим значение функции f как значение соответствующего элемента. Получится *полная аналитическая функция*.

9.3 Понятие о продолжении через границу

Часто бывает удобно склеивать аналитические элементы не внахлест, а встык.

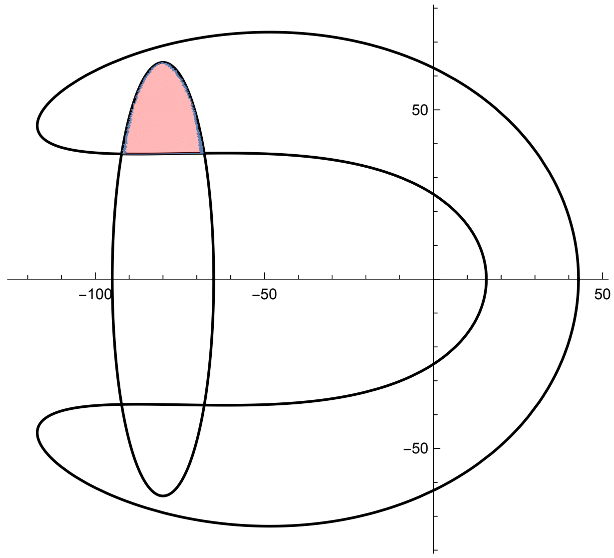

Рис. 9.2: Непосредственное аналитическое продолжение через одну компоненту связности

Рассмотрим два аналитических элемента (G_1, f_1) и (G_2, f_2). Предположим, что области G_1 и G_2 ограничены кусочно-гладкими кривыми Γ_1 и Γ_2, имеющими общий кусок γ. Предположим, что f_1 и f_2 допускают продолжение по непрерывности на γ, причем эти продолжения на γ совпадают. В этом случае существует непрерывная функция f, определенная на $\Gamma_1 \cup \gamma \cup \Gamma_2$ и являющаяся продолжением как f_1, так и f_2.

Теорема 74. *Так построенная функция f на $\Gamma_1 \cup \gamma \cup \Gamma_2$ является аналитической.*

Доказательство. Без доказательства. □

На практике области G_1 и G_2 стараются сделать максимально большими. Часто проходит следующая последовательность действий. Берут многозначную аналитическую функцию (например, $\sqrt[n]{\cdot}$, Ln, Arcsin). Как правило, она определена на всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$ за исключением конечного числа особых точек.

Особые точки соединяют разрезами. Получается односвязная область G_0. Берут столько экземпляров G_0, сколько значений у функции. Эти экземпляры называют *листами*. В каждом листе определяют *ветвь* многозначной функции так, чтобы она была аналитической. Затем листы склеивают по линиям разреза так, чтобы получилась полная аналитическая функция. Линии склейки называют *берегами*.

Область G называют *односвязной*, если в ней любые два пути, соединяющие две заданные точки, гомотопны.

9.4 Риманова поверхность функции $w = \sqrt{z}$

Функция $w = \sqrt{z}$ является двузначной. Ее особая точка — ноль. Выбросим из комплексной плоскости $\mathbb{C}$ луч $(-\infty, 0]$ (это называют разрезанием). Получится односвязная область $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. В ней рассмотрим две однозначные ветви функции $w = \sqrt{z}$:

$$\begin{aligned} w_1 &= \sqrt{|z|}e^{i\frac{\arg z}{2}}, && z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0], \\ w_2 &= -\sqrt{|z|}e^{i\frac{\arg z}{2}}, && z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]. \end{aligned}$$

Эти функции аналитические (по теореме Коши–Римана или как обратные к аналитической функции $z = w^2$).

Нарисуем (вырежем из бумаги) их области определения $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ и отметим стыковку берегов:

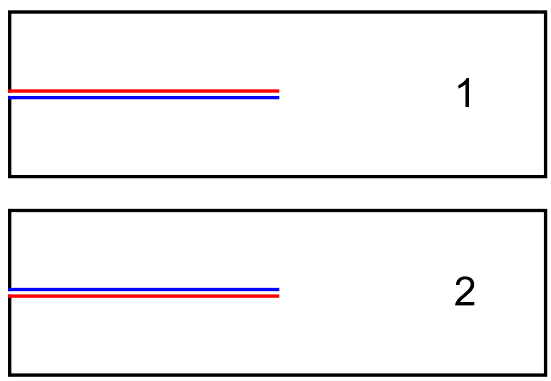

Рис. 9.3: Листы функции $w = \sqrt{z}$

Склеим берега в правильном порядке. Видно, что в трехмерное пространство полученная поверхность вкладывается с самопересечениями.

9.5 Риманова поверхность функции $w = \sqrt[n]{z}$

Функция $w = \sqrt[n]{z}$ является n-значной. Ее особая точка — ноль. Выбросим из комплексной плоскости $\mathbb{C}$ луч $(-\infty, 0]$. Получится односвязная область $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. В ней рассмотрим n однозначных ветвей

$$w_k = \sqrt[n]{|z|}e^{i(\frac{\arg z}{n} + \frac{2\pi k}{n})}, \qquad k = 0, \ldots, n-1.$$

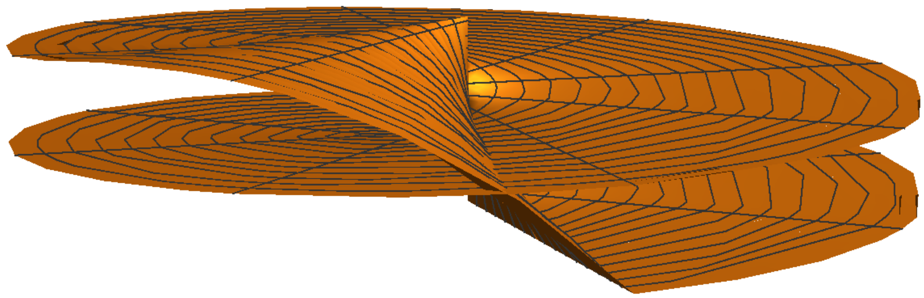

Рис. 9.4: Риманова поверхность функции $w = \sqrt{z}$

Для каждой из этих функций нарисуем (вырежем из бумаги) ее область определения $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. Склеим берега листов так, чтобы получилась непрерывная функция. Получится аналитическая функция (теорема 74).

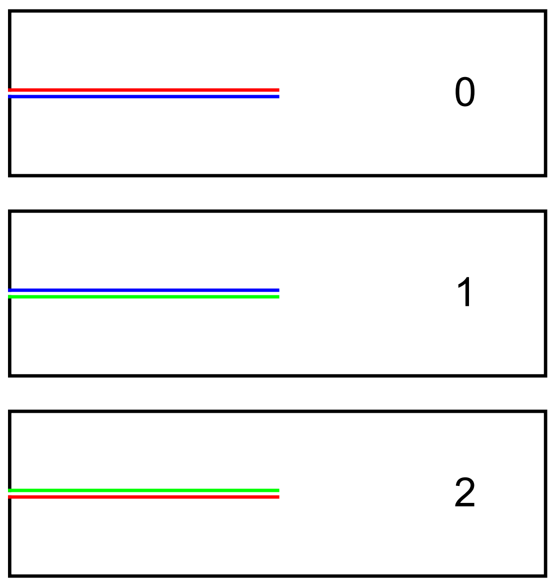

Рис. 9.5: Листы функции $w = \sqrt[3]{z}$

9.6 Риманова поверхность функции $w = \operatorname{Ln} z$

Функция $w = \operatorname{Ln} z$ является $\mathbb{Z}$-значной. Ее особая точка — ноль. Выбросим из комплексной плоскости $\mathbb{C}$ луч $(-\infty, 0]$. Получится односвязная область $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. В ней рассмотрим бесконечное число однозначных

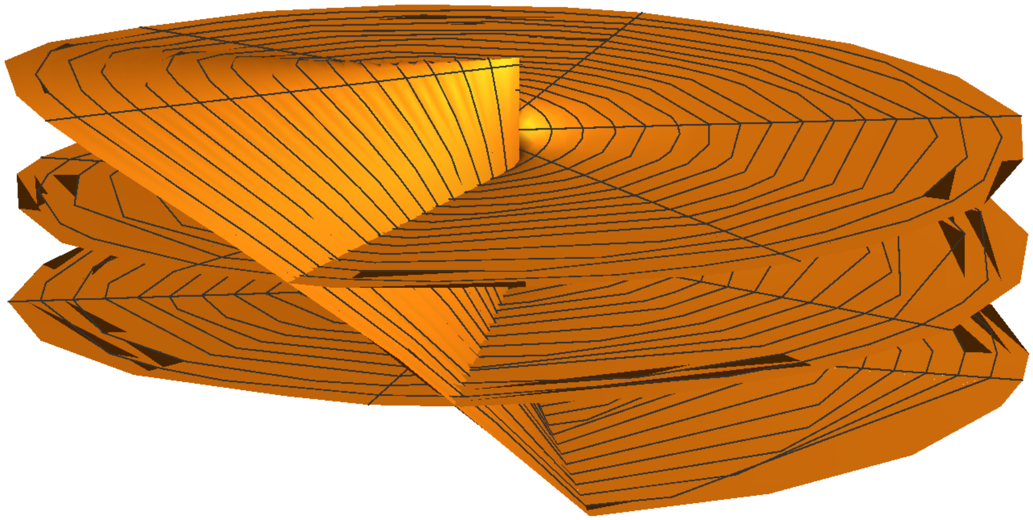

Рис. 9.6: Риманова поверхность функции $w = \sqrt[3]{z}$

ветвей

$$w_k = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi k), \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Для каждой из этих функций нарисуем (вырежем из бумаги) ее область определения $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. Склеим берега так, чтобы получилась непрерывная функция.

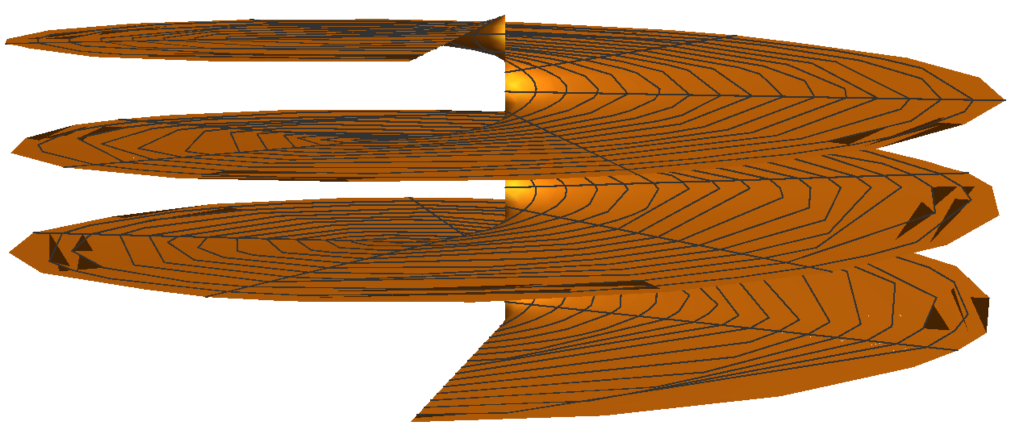

Рис. 9.7: Риманова поверхность функции $w = \operatorname{Ln} z$

Литература

[1] Будак Б. М. Кратные интегралы и ряды / Б. М. Будак, С. В. Фомин. — М. : Наука, 1967.

[2] Владимиров В. С. Уравнения математической физики / В. С. Владимиров. — М. : Наука, 1976.

[3] Волковыский Л. И. Сборник задач по теории функций комплексного переменного / Л. И. Волковыский, Г.Л. Лунц, И.Г. Араманович. — М. : Наука, 1970.

[4] Евграфов М. А. Аналитические функции / М. А. Евграфов. — М. : Наука, 1968.

[5] Евграфов М. А. Сборник задач по теории аналитических функций / М. А. Евграфов, Ю.В. Сидоров, М.В. Федорюк, М.И. Шабунин, К.А. Бежанов. — М. : Наука, 1969.

[6] Сборник задач по теории аналитических функций / М. А. Евграфов и др. — М. : Наука, 1969.

[7] Кудрявцев Л. Д. Краткий курс математического анализа / Л. Д. Кудрявцев. — М. : Наука, 1989.

[8] Лаврентьев М. А. Методы теории функций комплексного переменного / М. А. Лаверентьев, Б. В. Шабат. — М. : Наука, 1965.

[9] Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ / Б. В. Шабат. — М. : Наука, 1969.

[10] Greene R. E. Function theory of one complex variable / R. E. Greene, S. G. Krantz. — Providence, Rhode Island : AMS, 2006.

[11] Корн Г. Справочник по математике для научных работников и инжеренов / Г. Корн, Т. Корн. — М. : Мир, 1970.