Determinante

Klemen Šivic

27. marec 2020

1 Podobnost matrik

V tem poglavju si bomo ogledali, kako se matrika endomorfizma prostora V spremeni, če spremenimo bazo prostora V. Poglavje nam bo hkrati služilo kot motivacija za uvedbo determinant.

Spomnimo se, da smo za linearno preslikavo $\mathcal{A}\colon V \to W$ in bazi $\mathcal{B}_V$ in $\mathcal{B}_W$ prostorov V in W definirali matriko $A = \mathcal{A}_{\mathcal{B}_W}^{\mathcal{B}_V}$ preslikave $\mathcal{A}$ na glede na bazi $\mathcal{B}_V$ in $\mathcal{B}_W$. Če je $\mathcal{A}$ endomorfizem prostora V (torej linearna preslikava iz V v V), potem je ugodno izbrati eno samo bazo $\mathcal{B}$ prostora V in definirati matriko $\mathcal{A}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$, ne pa matrike $\mathcal{A}_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_1}$ za dve različni bazi $\mathcal{B}_1$ in $\mathcal{B}_2$ prostora V. Samo v primeru, ko izberemo eno samo bazo, namreč kompozitum linearnih preslikav ustreza množenju matrik.

Še vedno naj bo $\mathcal{A}$ endomorfizem prostora V in naj bosta $\mathcal{B}$ in $\mathcal{B}'$ bazi prostora V. Označimo $A = \mathcal{A}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ in $A' = \mathcal{A}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}$. Naj bo $P = \mathrm{id}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ prehodna matrika med bazama $\mathcal{B}$ in $\mathcal{B}'$. Potem vemo, da je matrika P obrnljiva in velja

$$A' = \mathcal{A}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'} = \mathrm{id}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} \cdot \mathcal{A}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} \cdot \mathrm{id}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = P^{-1}AP.$$

Definicija 1.1. Naj bosta $A, B \in \mathcal{O}^{n\times n}$ kvadratni matriki. Matrika B je *podobna* matriki A, kadar obstaja obrnljiva matrika $P \in \mathcal{O}^{n\times n}$, da je $B = P^{-1}AP$.

Naslednji dve trditvi dokažemo na povsem enak način kot analogni trditvi za ekvivalentnost matrik.

Trditev 1.2. *Podobnost je ekvivalenčna relacija na $\mathcal{O}^{n\times n}$.*

Ker je relacija podobnosti simetrična, pogosto rečemo kar, da sta matriki podobni, namesto da je prva podobna drugi.

Trditev 1.3. *Matriki sta podobni natanko takrat, ko pripadata istemu endomorfizmu vektorskega prostora.*

Če je bila $\mathcal{A}\colon V \to W$ linearna preslikava, smo znali poiskati bazi prostorov V in W, da je matrika preslikave $\mathcal{A}$, zapisana glede na dani dve bazi, imela nekaj enic na diagonali, drugod pa ničle. Podobno bi radi naredili v primeru endomorfizmov. Za endomorfizem $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ bi radi poiskali tako bazo $\mathcal{B}$ za V, da bo matrika $\mathcal{A}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ čim enostavnejša, torej da bo imela čim več ničel. Seveda ne moremo pričakovati, da bo dobljena matrika imela na diagonali nekaj enic, drugod pa ničle. Še vedno pa bi bila matrika precej enostavna, če bi bila diagonalna. Zato definiramo:

Definicija 1.4. Endomorfizem $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ *se da diagonalizirati*, kadar obstaja taka baza prostora V, da je matrika, ki pripada endomorfizmu $\mathcal{A}$ glede na to bazo, diagonalna.

Naj bo $A = [a_{ij}]$ diagonalna matrika, ki pripada endomorfizmu $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ glede na bazo $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Potem za vsak $i = 1, \ldots, n$ velja $\mathcal{A}v_i = a_{ii}v_i$. Vsak bazni vektor v_i torej preslikava $\mathcal{A}$ preslika v nek njegov večkratnik. Tak vektor imenujemo lastni vektor endomorfizma $\mathcal{A}$.

Definicija 1.5. Vektor $v \in V$ je *lastni vektor* endomorfizma $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, kadar je $v \neq 0$ in obstaja $\lambda \in \mathcal{O}$, da je $\mathcal{A}v = \lambda v$. Število λ imenujemo *lastna vrednost* endomorfizma $\mathcal{A}$, ki pripada lastnemu vektorju v. Natančneje, $\alpha \in \mathcal{O}$ je *lastna vrednost* endomorfizma $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, kadar obstaja neničelni vektor $v \in V$, da je $\mathcal{A}v = \alpha v$.

Lahko je videti, da je lastna vrednost enolično določena z lastnim vektorjem. Namreč, če je $\mathcal{A}v = \alpha v$ in $\mathcal{A}v = \beta v$, potem je $(\alpha - \beta)v = 0$ in iz $v \neq 0$ sledi $\alpha = \beta$. Obratno pa ni res, saj obstaja več lastnih vektorjev za isto lastno vrednost. Če je v lastni vektor za lastno vrednost λ, potem je vsak večkratnik vektorja v seveda tudi lastni vektor, ki pripada lastni vrednosti λ. Velja še več:

Trditev 1.6. *Naj bo $\alpha \in \mathcal{O}$ lastna vrednost endomorfizma $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$. Potem je množica $\{v \in V; \mathcal{A}v = \alpha v\}$ (ki vsebuje natanko vse lastne vektorje, ki pripadajo lastni vrednosti α, in vektor 0), vektorski podprostor prostora V. Imenujemo ga* lastni podprostor *endomorfizma $\mathcal{A}$ za lastno vrednost α, njegovo razsežnost pa* geometrična večkratnost *lastne vrednosti α.*

Dokaz. Za vektor $v \in V$ velja $\mathcal{A}v = \alpha v$ natanko takrat, ko je $(\mathcal{A} - \alpha\,\mathrm{id}_V)v = 0$, torej ko je $v \in \ker(\mathcal{A} - \alpha\,\mathrm{id}_V)$. Torej je $\{v \in V; \mathcal{A}v = \alpha v\} = \ker(\mathcal{A} - \alpha\,\mathrm{id}_V)$, jedro linearne preslikave pa je vedno vektorski prostor. $\square$

Hkrati smo dokazali še:

Posledica 1.7. *Lastni podprostor endomorfizma $\mathcal{A}$, ki pripada lastni vrednosti α, je enak* $\ker(\mathcal{A} - \alpha\,\mathrm{id}_V)$.

Oglejmo si zdaj, kako je diagonalizacija endomorfizma povezana z njegovimi lastnimi vektorji.

Trditev 1.8. *Naj bo V n-razsežen vektorski prostor. Endomorfizem $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ se da diagonalizirati natanko takrat, ko obstaja baza prostora V, sestavljena iz lastnih vektorjev endomorfizma $\mathcal{A}$. Ekvivalentno, to je natanko takrat, ko ima $\mathcal{A}$ n linearno neodvisnih lastnih vektorjev.*

Dokaz. Zadošča dokazati prvo trditev, saj je v n-razsežnem prostoru n vektorjev linearno neodvisnih natanko takrat, ko tvorijo bazo prostora. Da ima endomorfizem, ki se da diagonalizirati, bazo, sestavljeno iz lastnih vektorjev, smo že dokazali, in sicer tik pred definicijo lastnih vektorjev. Obratno je tudi res: če je $\mathcal{B}$ baza prostora V, sestavljena iz lastnih vektorjev endomorfizma $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, potem je matrika $\mathcal{A}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ očitno diagonalna. $\square$

Trditev 1.9. *Naj bo $\mathcal{A}$ endomorfizem prostora V in $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ paroma razlilčne lastne vrednosti endomorfizma $\mathcal{A}$, $v_1, \ldots, v_m$ pa pripadajoči lastni vektorji. Potem so $v_1, \ldots, v_m$ linearno neodvisni.*

Dokaz. Recimo, da trditev ne velja. Ker je $v_1 \neq 0$ (po definiciji lastnega vektorja), obstaja tak $k \in \{1, \ldots, m-1\}$, da so $v_1, \ldots, v_k$ linearno neodvisni, $v_1, \ldots, v_{k+1}$ pa linearno odvisni. Torej je

$$v_{k+1} = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k \tag{1}$$

za neke $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathcal{O}$. Na zgornji enakosti uporabimo preslikavo $\mathcal{A}$ in upoštevajmo, da so $v_1, \ldots, v_{k+1}$ lastni vektorji. Dobimo

$$\lambda_{k+1} v_{k+1} = \mathcal{A}v_{k+1} = \alpha_1 \mathcal{A}v_1 + \cdots + \alpha_k \mathcal{A}v_k = \alpha_1 \lambda_1 v_1 + \cdots + \alpha_k \lambda_k v_k.$$

Po drugi strani pa enačbo (1) lahko pomnožimo z λ_{k+1} in dobimo

$$\lambda_{k+1} v_{k+1} = \alpha_1 \lambda_{k+1} v_1 + \cdots + \alpha_k \lambda_{k+1} v_k.$$

Če obe enačbi odštejemo, dobimo

$$\alpha_1(\lambda_{k+1} - \lambda_1)v_1 + \cdots + \alpha_k(\lambda_{k+1} - \lambda_k)v_k = 0.$$

Ker so vektorji $v_1, \ldots, v_k$ linearno neodvisni, od tod sledi $\alpha_i(\lambda_{k+1} - \lambda_i) = 0$ za vsak $i = 1, \ldots, k$. Lastne vrednosti $\lambda_1, \ldots, \lambda_{k+1}$ so po predpostavki paroma različne, zato je $\alpha_i = 0$ za vsak $i = 1, \ldots, k$. Toda potem je $v_{k+1} = 0$, kar je v protislovju z dejstvom, da je v_{k+1} lastni vektor endomorfizma $\mathcal{A}$. Torej morajo biti vektorji $v_1, \ldots, v_m$ linearno neodvisni.

□

Iz zadnjih dveh trditev očitno sledi:

Posledica 1.10. *Naj bo $\mathcal{A}$ endomorfizem n-razsežnega vektorskega prostora, ki ima n paroma različnih lastnih vrednosti. Potem se da $\mathcal{A}$ diagonalizirati.*

Obrat te posledice očitno ne velja, saj je npr. identiteta endomorfizem, ki mu pripada diagonalna matrika (glede na poljubno bazo), vsak neničelni vektor pa je lastni vektor tega endomorfizma za lastno vrednost 1 (in je 1 torej edina lastna vrednost identitete).

Za konec poglavja si oglejmo še, kako bi lastne vrednosti endomorfizma poiskali. Naj bo $\mathcal{A}$ endomorfizem prostora V in $A \in \mathcal{O}^{n\times n}$ pripadajoča kvadratna matrika glede na neko bazo. Vemo, da je α lastna vrednost endomorfizma $\mathcal{A}$ natanko takrat, ko obstaja neničelni vektor $v \in \ker(\mathcal{A} - \alpha\,\mathrm{id}_V)$, torej natanko takrat, ko je jedro $\ker(\mathcal{A} - \alpha\,\mathrm{id}_V)$ netrivialno. To pa je natanko takrat, ko endomorfizem $\mathcal{A} - \alpha\,\mathrm{id}_V$ ni injektiven, in ker je V končnorazsežen prostor, je to natanko takrat, ko endomorfizem $\mathcal{A} - \alpha\,\mathrm{id}_V$ ni obrnljiv. Vemo tudi, da obrnljivim endomorfizmom pripadajo obrnljive matrike, od koder sledi, da je α lastna vrednost endomorfizma $\mathcal{A}$ natanko takrat, ko matrika $A - \alpha I$ ni obrnljiva. Potrebujemo torej učinkovito orodje, ki nam pove, kdaj matrika ni obrnljiva. Tako orodje je determinanta.

2 n-linearne preslikave

Determinante bomo definirali preko n-linearnih preslikav. Na ta način bodo dokazi nekaterih rezultatov o determinanti (npr. formule za produkt determinant) konceptualni in ne računski.

V nekaterih obsegih velja, da je $1 + 1 = 0$. Tak obseg je npr. $\mathbb{Z}_2$. Če v obsegu $\mathcal{O}$ velja $1 + 1 = 0$, pravimo, da ima obseg $\mathcal{O}$ *karakteristiko 2*, sicer pa, da ima karakteristiko različno od 2. V drugem primeru karakteristike obsega ne bomo definirali, več o njej se boste naučili pri Algebri 2. Mi jo bomo potrebovali le toliko, da bomo pri vseh rezultatih o n-linearnih preslikavah in determinantah predpostavili, da je karakteristika obsega različna od 2. Vedno bo torej veljalo, da je 2 obrnljiv element obsega $\mathcal{O}$. Rezultati, ki jih bomo povedali o determinanti, sicer veljajo tudi v obsegih karakteristike 2, a so dokazi mnogo bolj računski. Študent, ki ga zanima več, si o tem lahko prebere v učbenikih o linearni algebri.

Definicija 2.1. Naj bodo $V_1, \ldots, V_n$ in W vektorski prostori nad $\mathcal{O}$ in naj bo $F\colon V_1 \times \cdots \times V_n \to W$ preslikava. Potem za vsak $i = 1, \ldots, n$ in vsake vektorje $v_1 \in V_1, \ldots, v_{i-1} \in V_{i-1}, v_{i+1} \in V_{i+1}, \ldots, v_n \in V_n$ definiramo preslikavo $F_i\colon V_i \to W$ s predpisom

$$F_i(x) = F(v_1, \ldots v_{i-1}, x, v_{i+1}, \ldots, v_n).$$

Preslikava F je *n-linearna*, kadar je preslikava F_i linearna za vsak $i = 1, \ldots, n$ in vsako izbiro vektorjev $v_j \in V_j$ za $j \neq i$. Če je $W = \mathcal{O}$, n-linearno preslikavo $F\colon V_1 \times \cdots \times V_n \to \mathcal{O}$ imenujemo *n-linearen funkcional.*

Primeri 2.2. 1. Naj bo $F(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{x} \cdot \vec{y}$ skalarni produkt $F\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Potem vemo, da za poljuben $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ ter poljubna $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$ in poljubna $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ velja

$$F(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}, \vec{v}) = (\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) \cdot \vec{v} = \alpha\vec{x} \cdot \vec{v} + \beta\vec{y} \cdot \vec{v} = \alpha F(\vec{x}, \vec{v}) + \beta F(\vec{y}, \vec{v}).$$

To pomeni, da je za poljuben fiksen vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ preslikava $F_1\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, definirana s predpisom $F_1(\vec{x}) = F(\vec{x}, \vec{v})$, linearna. Pravimo, da je preslikava F *linearna v prvem* *faktorju.* Podobno razmislimo, da je F *linearna v drugem faktorju*, torej da je za vsak vektor $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$ preslikava $F_2 \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, definirana s predpisom $F_2(\vec{y}) = F(\vec{u}, \vec{y})$, linearna. Preslikava F je torej 2-linearna, oziroma *bilinearna.* Ker slika v obseg $\mathbb{R}$, je bilinearen funkcional.

2. Podobno kot zgoraj dokažemo, da je vektorski produkt $F \colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definiran s predpisom $F(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{x} \times \vec{y}$, bilinearna preslikava. Ni pa funkcional, saj ne slika v obseg.

3. Mešani produkt $F(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = [\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}]$ je 3-linearen oz. *trilinearen* funkcional $F \colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.

4. Množenje matrik $M(A, B) = AB$ je bilinearna preslikava $M \colon \mathcal{O}^{m\times n} \times \mathcal{O}^{n\times p} \to \mathcal{O}^{m\times p}$ za poljubne m, n, p. V posebnem primeru je množenje matrike z vektorjem bilinearna preslikava.

V vseh primerih zgoraj je bila n-linearna preslikava neke vrste produkt. V splošnem velja, da za računanje z n-linearnimi preslikavami velja distributivnost v vsakem faktorju, kot pri množenju. Npr. če je $F \colon U \times V \to W$ bilinearna preslikava, je

$$F(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2) = \alpha_1\beta_1 F(u_1, v_1) + \alpha_1\beta_2 F(u_1, v_2) + \alpha_2\beta_1 F(u_2, v_1) + \alpha_2\beta_2 F(u_2, v_2)$$

za vse $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathcal{O}$, vse $u_1, u_2 \in U$ in vse $v_1, v_2 \in V$.

Opomba 2.3. Za študente, ki jih zanima več, omenimo, da, podobno kot linearne preslikave predstavimo z matrikami, n-linearne preslikave predstavimo s tenzorji. Na primer, naj bo $F \colon U \times V \to W$ bilinearna preslikava in naj bodo $\mathcal{B}_U = \{u_1, \ldots, u_m\}$, $\mathcal{B}_V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ in $\mathcal{B}_W = \{w_1, \ldots, w_p\}$ baze prostorov U, V in W. Potem za poljubne i, j, k obstaja skalar a_{ijk}, da je $F(u_i, v_j) = \sum_{k=1}^{p} a_{ijk} w_k$ za vse $i \in \{1, \ldots, m\}$ in $j \in \{1, \ldots, n\}$. Skalarje a_{ijk} lahko zapišemo v 3-razsežno tabelo velikosti $m \times n \times p$, ki ji rečemo *3-tenzor.*

Definicija 2.4. Naj bosta V, W vektorska prostora in $F \colon V^n \to W$ preslikava. Pravimo, da je preslikava F *simetrična*, kadar je

$$F(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_n) = F(v_1, \ldots, v_j \ldots, v_i, \ldots, v_n)$$

za vsaka i in j in vsake $v_1, \ldots, v_n \in V$, ter *antisimetrična*, kadar je

$$F(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_n) = -F(v_1, \ldots, v_j \ldots, v_i, \ldots, v_n)$$

za vsaka $i \neq j$ in vsake $v_1, \ldots, v_n \in V$.

Z besedami, preslikava je simetrična, če se ne spremeni, ko v predpisu med seboj zamenjamo dva vektorja, in antisimetrična, če se ji spremeni le predznak, ko v predpisu med seboj zamenjamo dva vektorja.

Primer 2.5. Preverimo simetričnost oziroma antisimetričnost n-linearnih preslikav iz prejšnjega primera. Skalarni produkt je simetričen, vektorski produkt pa antisimetričen, saj za poljubna $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$ velja $\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{y} \cdot \vec{x}$ in $\vec{x} \times \vec{y} = -\vec{y} \times \vec{x}$. Prav tako vemo, da za poljubne vektorje $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^3$ velja $[\vec{y}, \vec{x}, \vec{z}] = -[\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}]$, $[\vec{z}, \vec{y}, \vec{x}] = -[\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}]$ in $[\vec{x}, \vec{z}, \vec{y}] = -[\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}]$, torej je mešani produkt antisimetričen. Množenje matrik pa ni niti simetrično niti antisimetrično, niti v primeru $m = n = p$, saj v splošnem za matrike ne velja niti $AB = BA$ niti $AB = -BA$.

Naslednja trditev bo ključna za računanje z determinantami.

Trditev 2.6. *Naj bosta V, W vektorska prostora nad $\mathcal{O}$ in $F \colon V^n \to W$ antisimetrična preslikava. Potem velja:*

1. Če so $v_1, \ldots, v_n \in V$ poljubni vektorji in je $\pi \in S_n$ poljubna permutacija, je

$$F(v_{\pi(1)}, \ldots, v_{\pi(n)}) = s(\pi) F(v_1, \ldots, v_n),$$

kjer $s(\pi)$ označuje znak permutacije π.

2. Če so $v_1, \ldots, v_n \in V$ poljubni vektorji, kjer je $v_i = v_j$ za neka $i \neq j$, je $F(v_1, \ldots, v_n) = 0$.

3. Predpostavimo še, da je preslikava F n-linearna. Potem za poljubne vektorje $v_1, \ldots, v_n \in V$ in poljuben $\alpha \in \mathcal{O}$ za vsaka $i \neq j$ velja

$$F(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_i + \alpha v_j, v_{i+1}, \ldots, v_n) = F(v_1, \ldots, v_n).$$

Z besedami, $F(v_1, \ldots, v_n)$ se ne spremeni, če vektorju v_i prištejemo večkratnik nekega drugega vektorja v_j.

Dokaz. 1. Trditev dokažimo z indukcijo na število transpozicij v razcepu permutacije π. Če je π identiteta, ni kaj dokazovati, prav tako enakost velja po definiciji antisimetričnosti, če je π transpozicija. Naj bo zdaj $m \geq 2$ in indukcijsko predpostavimo, da enakost velja za vse permutacije ρ, ki se jih da zapisati kot produkt največ $m-1$ transpozicij. Naj bo $\pi = \tau_1 \cdots \tau_m$, kjer so τ_i transpozicije in naj bo $\rho = \tau_1 \pi = \tau_2 \cdots \tau_m$. Potem po indukcijski predpostavki velja

$$F(v_{\rho(1)}, \ldots, v_{\rho(n)}) = s(\rho) F(v_1, \ldots, v_n).$$

Prav tako velja

$$F(u_{\tau_1(1)}, \ldots, u_{\tau_1(n)}) = s(\tau_1) F(u_1, \ldots, u_n) = -F(u_1, \ldots, u_n)$$

za poljubne vektorje $u_1, \ldots, u_n \in V$. Zdaj pa lahko izračunamo

$$\begin{aligned} & F(v_{\pi(1)}, \ldots, v_{\pi(n)}) = F(v_{\tau_1(\rho(1))}, \ldots, v_{\tau_1(\rho(n))}) = s(\tau_1) F(v_{\rho(1)}, \ldots, v_{\rho(n)}) \\ = \; & s(\tau_1) s(\rho) F(v_1, \ldots, v_n) = s(\pi) F(v_1, \ldots, v_n), \end{aligned}$$

kjer smo na koncu upoštevali, da je $s(\tau_1)s(\rho) = s(\tau_1 \rho) = s(\pi)$.

2. Zaj bo $v_i = v_j$ za neka $i < j$. Po definiciji antisimetričnosti je

$$F(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_j, v_{i+1}, \ldots, v_{j-1}, v_i, v_{j+1}, \ldots, v_n) = -F(v_1, \ldots, v_n).$$

Ker je $v_i = v_j$, pa je seveda tudi

$$F(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_j, v_{i+1}, \ldots, v_{j-1}, v_i, v_{j+1}, \ldots, v_n) = F(v_1, \ldots, v_n).$$

Torej je $2F(v_1, \ldots, v_n) = 0$, in ker smo predpostavili, da je karakteristika obsega $\mathcal{O}$ različna od 2, sledi $F(v_1, \ldots, v_n) = 0$.

3. Z upoštevanjem n-linearnosti in prejšnje točke lahko izračunamo

$$\begin{aligned} F(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_i + \alpha v_j, v_{i+1}, \ldots, v_n) &= F(v_1, \ldots, v_n) + \alpha F(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_j, v_{i+1}, \ldots, v_n) \\ &= F(v_1, \ldots, v_n), \end{aligned}$$

saj je v izrazu $F(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_j, v_{i+1}, \ldots, v_n)$ vektor v_j pojavi tako na i-tem kot na j-tem mestu.

$\square$

3 Definicija, lastnosti in računanje determinante

3.1 Definicija determinante

Prostor $\mathcal{O}^{n\times n}$ vseh matrik velikosti $n\times n$ si mislimo kot prostor n-teric stolpcev, torej kot $(\mathcal{O}^n)^n$. Naj bo $F\colon \mathcal{O}^{n\times n}\to\mathcal{O}$ antisimetričen n-linearen funkcional. Dokažimo, da je F do množenja s skalarjem enolično določen. Naj bo $A=[a_{ij}]\in\mathcal{O}^{n\times n}$ poljubna matrika. Potem z uporabo n-linearnosti izračunamo

$$F(A)=F(A^{(1)},\dots,A^{(n)})=F\left(\sum_{i=1}^n a_{i1}e_i,\dots,\sum_{i=1}^n a_{in}e_i\right)=\sum_{i_1,\dots,i_n=1}^n a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}F(e_{i_1},\dots e_{i_n}). \tag{2}$$

Druga točka Trditve 2.6 nam pove, da je $F(e_{i_1},\dots,e_{i_n})=0$, če je $i_j=i_k$ za neka $j\neq k$. V vsoti na desni strani enakosti (2) so torej neničelni le tisti členi, kjer so števila $i_1,\dots,i_n$ paroma različna, torej ko je $(i_1,\dots,i_n)$ permutacija števil $(1,2,\dots,n)$. Sledi

$$F(A)=\sum_{\pi\in S_n}a_{\pi(1),1}\cdots a_{\pi(n),n}F(e_{\pi(1)},\dots,e_{\pi(n)}).$$

Z upoštevanjem prve točke Trditve 2.6 zdaj sledi

$$F(A)=\sum_{\pi\in S_n}s(\pi)a_{\pi(1),1}\cdots a_{\pi(n),n}F(e_1,\dots,e_n)=\sum_{\pi\in S_n}s(\pi)a_{\pi(1),1}\cdots a_{\pi(n),n}F(I). \tag{3}$$

Definicija 3.1. Preslikavo $\det\colon\mathcal{O}^{n\times n}\to\mathcal{O}$, definirano s predpisom

$$\det A=\sum_{\pi\in S_n}s(\pi)a_{\pi(1),1}\cdots a_{\pi(n),n},$$

kjer je $A=[a_{ij}]$, imenujemo *determinanta*. Determinanto matrike $\begin{bmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ a_{n1}&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix}$ označimo $\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ a_{n1}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$.

Enakost (3) nam torej pove:

Posledica 3.2. *Če je $F\colon\mathcal{O}^{n\times n}\to\mathcal{O}$ poljubna antisimetrična n-linearna preslikava, za vsako matriko $A\in\mathcal{O}^{n\times n}$ velja $F(A)=(\det A)\cdot F(I)$.*

Preverimo, da v primerih $n=2$ in $n=3$ definicija determinante sovpada z znanima definicijama. Za $n=2$ imamo dve permutaciji, identiteto in transpozicijo $(1\,2)$, zato je

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\ a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12},$$

kar je znana formula za 2×2 determinanto. V primeru $n=3$ imamo 6 permutacij, identiteto, $(1\,2)$, $(1\,3)$, $(2\,3)$, $(1\,2\,3)$ in $(1\,3\,2)$, zato je

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\ a_{21}&a_{22}&a_{23}\\ a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}-a_{21}a_{12}a_{33}-a_{31}a_{22}a_{13}-a_{11}a_{32}a_{23}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{31}a_{12}a_{23},$$

kar je znana formula za 3×3 determinanto.

Neposredno iz definicije determinante sledi tudi:

Posledica 3.3. *Za vsako kvadratno matriko $A \in \mathcal{O}^{n\times n}$ je $\det A^T = \det A$.*

Dokaz. Če je $\pi \in S_n$ poljubna permutacija, sta produkta $a_{\pi(1),1}\cdots a_{\pi(n),n}$ in $a_{1,\pi^{-1}(1)}\cdots a_{n,\pi^{-1}(n)}$ enaka, saj vsebujeta iste člene, le morda v drugem vrstnem redu. Če označimo $\rho = \pi^{-1}$, je torej

$$\begin{aligned}\det A &= \sum_{\pi\in S_n} s(\pi) a_{\pi(1),1}\cdots a_{\pi(n),n} = \sum_{\pi\in S_n} s(\pi) a_{1,\pi^{-1}(1)}\cdots a_{n,\pi^{-1}(n)} \\ &= \sum_{\rho\in S_n} s(\rho) a_{1,\rho(1)}\cdots a_{n,\rho(n)} = \det A^T,\end{aligned}$$

kjer smo v predzadnji enakosti upoštevali dejstvo, da je $s(\pi) = s(\pi^{-1})$ za vsako permutacijo π. □

Prav tako iz definicije očitno sledi:

Posledica 3.4. *Če je kakšen stolpec matrike ničeln, je determinanta matrike enaka 0.*

Preden bomo obravnavali lastnosti determinante, si oglejmo determinante nekaterih posebnih matrik. Najprej si oglejmo primer, ko je matrika $A = [a_{ij}] \in \mathcal{O}^{n\times n}$ diagonalna. V tem primeru je produkt $a_{\pi(1),1}\cdots a_{\pi(n),n}$ enak 0, razen v primeru, ko je $\pi(1) = 1, \ldots, \pi(n) = n$, torej ko je π identiteta. Torej je $\det A = a_{11}\cdots a_{nn}$. To lahko posplošimo tudi na zgornje in spodnje trikotne matrike.

Definicija 3.5. Matrika $A = [a_{ij}] \in \mathcal{O}^{n\times n}$ je *zgornje trikotna*, kadar je $a_{ij} = 0$, če je $i > j$, in *spodnje trikotna*, kadar je $a_{ij} = 0$, če je $i < j$.

Trditev 3.6. *Determinanta zgornje trikotne matrike je enaka produktu njenih diagonalnih členov. Enako velja za determinanto spodnje trikotne matrike.*

Dokaz. Ker se determinanta pri transponiranju ne spremeni, zadošča dokazati prvo trditev. Naj bo torej $A = [a_{ij}]$ zgornje trikotna. Podobno kot v primeru diagonalne matrike opazimo, da je produkt $a_{\pi(1),1}\cdots a_{\pi(n),n}$ enak 0, če je $\pi(i) > i$ za kakšen i. Da je $\pi(i) \leq i$ za vsak $i = 1, \ldots, n$, pa je mogoče le v primeru, ko je π identiteta, saj je π permutacija množice $\{1, \ldots, n\}$. Torej je $\det A = a_{11}\cdots a_{nn}$. □

Prejšnjo trditev je mogoče posplošiti na bločno zgornje trikotne matrike: Če so $A_1, \ldots, A_k$ kvadratne matrike, potem je $\det \begin{bmatrix} A_1 & * & \cdots & \cdots & * \\ 0 & A_2 & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & A_k \end{bmatrix} = (\det A_1)(\det A_2)\cdots(\det A_k)$. To boste dokazali na vajah.

3.2 n-linearnost in antisimetričnost determinante

Oglejmo si zdaj nekatere lastnosti determinant. Prvi dve od njih sta n-linearnost in antisimetričnost, kar bomo uporabili za učinkovit izračun determinante po Gaussovem postopku.

Trditev 3.7. *Determinanta $\det\colon \mathcal{O}^{n\times n} \to \mathcal{O}$ je n-linearen antisimetričen funkcional.*

Dokaz. Naj bo $A = [a_{ij}]$, naj bo $i \in \{1, \ldots, n\}$ poljuben in naj bo $a_{ji} = \alpha b_{ji} + \beta c_{ji}$ za vsak $j = 1, \ldots, n$. Potem je

$$\begin{aligned}
\det A &= \sum_{\pi \in S_n} s(\pi) a_{\pi(1),1} \cdots a_{\pi(i-1),i-1}, (\alpha b_{\pi(i),i} + \beta c_{\pi(i),i}) a_{\pi(i+1),i+1} \cdots a_{\pi(n),n} \\
&= \alpha \sum_{\pi \in S_n} s(\pi) a_{\pi(1),1} \cdots a_{\pi(i-1),i-1} b_{\pi(i),i} a_{\pi(i+1),i+1} \cdots a_{\pi(n),n} \\
&+ \beta \sum_{\pi \in S_n} s(\pi) a_{\pi(1),1} \cdots a_{\pi(i-1),i-1} c_{\pi(i),i} a_{\pi(i+1),i+1} \cdots a_{\pi(n),n} \\
&= \alpha \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,i-1} & b_{1i} & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,i-1} & b_{ni} & a_{n,i+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\
&+ \beta \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,i-1} & c_{1i} & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,i-1} & c_{ni} & a_{n,i+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},
\end{aligned}$$

kar dokazuje n-linearnost.

Za dokaz antisimetričnosti pa naj bo $A' = [a'_{ij}]$ matrika, ki jo dobimo tako, da v A zamenjamo i-ti in j-ti stolpec. Zaradi simetrije lahko predpostavimo, da je $i < j$. Transpozicijo $(i\,j) \in S_n$ označimo s τ. Potem je

$$\begin{aligned}
\det A' &= \sum_{\pi \in S_n} s(\pi) a'_{\pi(1),1} \cdots a'_{\pi(i-1),i-1} a'_{\pi(i),i} a'_{\pi(i+1),i+1} \cdots a'_{\pi(j-1),j-1} a'_{\pi(j),j} a'_{\pi(j+1),j+1} \cdots a'_{\pi(n),n} \\
&= \sum_{\pi \in S_n} s(\pi) a_{\pi(1),1} \cdots a_{\pi(i-1),i-1} a_{\pi(i),j} a_{\pi(i+1),i+1} \cdots a_{\pi(j-1),j-1} a_{\pi(j),i} a_{\pi(j+1),j+1} \cdots a_{\pi(n),n} \\
&= \sum_{\pi \in S_n} s(\pi) a_{\pi(1),\tau(1)} \cdots a_{\pi(n),\tau(n)} = - \sum_{\pi \in S_n} s(\pi\tau) a_{\pi\tau(1),1} \cdots a_{\pi\tau(n),n} = -\det A,
\end{aligned}$$

kjer smo v predzadnji enakosti upoštevali, da za transpozicijo τ velja $s(\pi\tau) = -s(\pi)$ in da sta produkta $a_{\pi(1),\tau(1)} \cdots a_{\pi(n),\tau(n)}$ in $a_{\pi\tau(1),1} \cdots a_{\pi\tau(n),n}$ enaka, saj vsebujeta iste člene, le v drugem vrstnem redu. □

Iz prejšnje trditve in Trditve 2.6 sledi:

Posledica 3.8. 1. *Če ima matrika dva stolpca enaka, je njena determinanta enaka 0. Enako velja za vrstice (saj je* $\det A^T = \det A$*).*

2. *Determinanta matrike se ne spremeni, če kakšnemu stolpcu matrike prištejemo večkratnik kakšnega drugega stolpca. Enako velja za vrstice.*

3. *Če so stolpci matrike linearno odvisni (torej, če matrika ni obrnljiva), je njena determinanta enaka 0. Enako velja za vrstice.*

Dokaz. Dokazati je treba le zadnjo točko. Če so stolpci matrike linearno odvisni, je nek stolpec, npr. i-ti, linearna kombinacija ostalih. Če to linearno kombinacijo od i-tega stolpca odštejemo, se po drugi točki determinanta matrike ne spremeni. Toda dobljena matrika ima i-ti stolpec ničeln, zato je njena determinanta po Posledici 3.4 enaka 0. Del trditve o obrnljivosti sledi iz znanega dejstva, da je za kvadratno matriko $A \in \mathcal{O}^{n \times n}$ linearna odvisnost stolpcev ekvivalentna pogoju, da endomorfizem $A\colon \mathcal{O}^n \to \mathcal{O}^n$ ni injektiven, kar je ekvivalentno temu, da ni obrnljiv. □

Zadnja trditev nam pove, da determinanto matrike $A = [a_{ij}]$ lahko računamo po *Gaussovem postopku*, podobno kot računamo rang. Če je prvi stolpec matrike enak 0, potem je $\det A = 0$, sicer pa zamenjamo ustrezni vrstici, da dosežemo, da je $a_{11} \neq 0$. Pri tem se determinanti matrike spremeni kvečjemu predznak. Nato od vseh ostalih vrstic odštejemo večkratnike prve vrstice, tako da dobimo v prvem stolpcu ničle povsod, razen na prvem mestu. Pri tem se determinanta ne spremeni. Če je potem $a_{k2} = 0$ za vsak $k > 1$, ima matrika linearno odvisna prva dva stolpca in je njena determinanta spet enaka 0. Sicer lahko z morebitno menjavo vrstic spet dosežemo, da je $a_{22} \neq 0$, pri čemer se determinanti spremeni kvečjemu predznak. Nato od vseh vrstic, razen prvih dveh, odštejemo primerne večkratnike druge vrstice, tako da dobimo ničle v drugem stolpcu povsod, razen na prvih dveh mestih. Pri tem se determinanta ne spremeni. Postopek ponavljamo in na koncu dobimo zgornje trikotno matriko, katere determinanta je enaka produktu diagonalnih elementov. Kar smo opisali za vrstice, lahko delamo tudi s stolpci.

Primer 3.9. Izračunajmo determinanto matrike $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 6 & -5 & 2 \\ 1 & 3 & -2 & 3 \\ -1 & -2 & 3 & -3 \end{bmatrix}$.

Najprej zamenjamo prvo in tretjo vrstico, pri čemer se determinanti spremeni predznak. Torej je

$$\det A = -\left| \begin{matrix} 1 & 3 & -2 & 3 \\ 2 & 6 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & -2 & 3 & -3 \end{matrix} \right].$$

Da dobimo ničle v prvem stolpcu, od druge vrstice odštejemo dvakratnik prve, zadnji vrstici pa prištejemo prvo. Pri tem se determinanta ne spremeni, torej je

$$\det A = -\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Zdaj zamenjamo drugo in tretjo vrstico. Pri tem se determinanti spremeni predznak, torej je

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Zdaj od zadnje vrstice odštejemo drugo, da dobimo ničle v drugem stolpcu. Pri tem se determinanta ne spremeni, torej je

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \end{vmatrix}.$$

Končno še zadnji vrstici prištejemo dvakratnik tretje, da dobimo ničlo na tretjem mestu zadnje vrstice. Determinanta se pri tem ne spremeni, zato je

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -11 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot (-1) \cdot (-11) = 11,$$

kjer smo na koncu upoštevali, da je determinanta zgornje trikotne matrike enaka produktu diagonalnih elementov.

3.3 Multiplikativnost determinante

Trditev 3.10. *Za vsaki dve kvadratni matriki* $A, B \in \mathcal{O}^{n\times n}$ *je* $\det(AB) = (\det A)(\det B)$. *Pravimo, da je determinanta* multiplikativen funkcional.

Dokaz. Definirajmo preslikavo $F\colon (\mathcal{O}^n)^n \to \mathcal{O}$ s predpisom

$$F(v_1, \dots, v_n) = \det[Av_1, Av_2, \dots, Av_n].$$

Ker je determinanta n-linearen antisimetričen funkcional, je lahko preveriti, da je tudi preslikava F n-linearen antisimetričen funkcional. Po Posledici 3.2 je zato

$$\det[Av_1, \dots, Av_n] = F(v_1, \dots, v_n) = F(e_1, \dots, e_n)\det[v_1, \dots, v_n] = (\det A)(\det[v_1, \dots, v_n])$$

za vsake vektorje $v_1, \dots, v_n \in \mathcal{O}^n$. Za vektorje v_i zdaj vzemimo stolpce matrike B, torej $v_i = B^{(i)}$ za vsak $i = 1, \dots, n$. Potem so $AB^{(1)}, \dots, AB^{(n)}$ ravno stolpci matrike AB, zato iz zgornje enakosti sledi $\det(AB) = (\det A)(\det B)$.

□

Posledica 3.11. *Če je matrika A obrnljiva, je* $\det A \neq 0$ *in* $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$.

Dokaz. Ker je matrika A obrnljiva, obstaja matrika B, da je $AB = BA = I$. Iz prejšnje trditve potem sledi $(\det A)(\det B) = \det(AB) = \det I = 1$. To pa pomeni, da je $\det A \neq 0$ in $\det B = (\det A)^{-1}$. Ker je $B = A^{-1}$, je posledica dokazana. □

Skupaj s tretjo točko Posledice 3.8 tako sledi:

Posledica 3.12. *Kvadratna matrika A je obrnljiva natanko takrat, ko je* $\det A \neq 0$.

Posledica 3.13. *Podobni matriki imata enako determinanto.*

Dokaz. Po Trditvi 3.10 in Posledici 3.11 ter upoštevanju komutativnosti obsega $\mathcal{O}$ za poljubno kvadratno matriko $A \in \mathcal{O}^{n\times n}$ in poljubno obrnljivo matriko $P \in \mathcal{O}^{n\times n}$ velja

$$\det(P^{-1}AP) = \det(P^{-1}) \cdot \det A \cdot \det P = (\det P)^{-1} \det A \cdot \det P = \det A,$$

kar je bilo treba dokazati. □

Zaradi prejšnje posledice je smiselna naslednja definicija.

Definicija 3.14. *Determinanta endomorfizma* $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ je $\det A$, kjer je A poljubna matrika, ki pripada endomorfizmu $\mathcal{A}$. Determinanto endomorfizma $\mathcal{A}$ označimo z $\det \mathcal{A}$. Torej je $\det \mathcal{A} = \det A$.

Naj bo $A \in \mathcal{O}^{n\times n}$ matrika endomorfizma $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ glede na neko bazo prostora V. Iz poglavja o podobnosti vemo, da je λ lastna vrednost endomorfizma $\mathcal{A}$ natanko takrat, ko matrika $A - \lambda I$ ni obrnljiva. Po Posledici 3.12 je to natanko takrat, ko je $\det(A - \lambda I) = 0$ oziroma $\det(\mathcal{A} - \lambda\, \mathrm{id}_V) = 0$. Dokazali smo:

Trditev 3.15. *Skalar $\lambda \in \mathcal{O}$ je lastna vrednost endomorfizma $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ natanko takrat, ko je* $\det(\mathcal{A} - \lambda\, \mathrm{id}_V) = 0$.

Več o tem bomo povedali v poglavju o karakterističnem polinomu, zdaj pa nadaljujmo z lastnostmi determinante. Posledico 3.12 je možno posplošiti, tako da z determinantami podmatrik matrike A določimo rang matrike A. V ta namen najprej definirajmo, kaj je minor matrike.

Definicija 3.16. Naj bo $A \in \mathcal{O}^{m\times n}$ in $1 \leq k \leq \min\{m,n\}$. *Minor reda* k matrike A je determinanta vsake podmatrike, ki jo dobimo tako, da v A izberemo k vrstic in k stolpcev, v podmatriki pa so elementi na križiščih teh vrstic in stolpcev. Minor je *glavni minor*, kadar izberemo istoležne vrstice in stolpce. Minor je *vodilni minor*, kadar izberemo prvih k vrstic in stolpcev.

Primer 3.17. Naj bo $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$. Edini minor reda 3 je determinanta matrike, ki je seveda glavni in vodilni minor. Minorji reda 1 so členi matrike. Od teh so glavni minorji diagonalni členi, vodilni minor pa je a_{11}. Minorji reda 2 so 2×2 determinante vseh marik, ki jih dobimo tako, da v A zbrišemo eno vrstico in en stolpec. Od tega so glavni minorji $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$, $a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}$ in $a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}$, vodilni minor reda 2 pa je le $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Izrek 3.18. *Rang neničelne matrike $A \in \mathcal{O}^{m\times n}$ je enak najvišjemu redu neničelnih minorjev matrike A.*

Dokaz. Naj bo $\operatorname{rang} A = r$. Potem v A obstaja r linearno neodvisnih stolpcev, ki tvorijo neko podmatriko $B \in \mathcal{O}^{m\times r}$ matrike A. Rang matrike B je seveda tudi r in enako velja za B^T. To pa pomeni, da v B obstaja r linearno neodvisnih vrstic. Te vrstice tvorijo podmatriko $C \in \mathcal{O}^{r\times r}$ matrike A, za katero je $\operatorname{rang} C = r$. Z drugimi besedami, C je obrnljiva $r\times r$ matrika. Posledica 3.12 nam zato pove, da je $\det C \neq 0$. Torej smo v matriki A našli neničelni minor reda r.

Treba je pokazati še, da so vsi minorji matrike A, ki so višjega reda kot r, ničelni. Recimo, da v A obstaja nek minor reda $s > r$, ki je neničeln. Potem v A obstaja podmatrika D velikosti $s \times s$, ki je obrnljiva, torej ranga s. Naj bo $E \in \mathcal{O}^{m\times s}$ podmatrika matrike A, sestavljena iz vseh tistih stolpcev matrike A, ki vsebujejo elemente matrike D. Potem matrika E ne more imeti manjšega ranga kot D, od koder sledi, da je $\operatorname{rang} E = s$. To pa pomeni, da smo v A našli s linearno neodvisnih stolpcev, kar je v protislovju s predpostavko, da je $s > r$. Vsi minorji matrike A, ki so reda več kot r, morajo biti torej ničelni.

□

3.4 Razvoj determinante

Za učinkovito računanje determinante smo doslej spoznali Gaussov postopek. Kadar ima matrika veliko ničel, je za računanje njene determinante uporaben tudi razvoj po vrstici oziroma stolpcu. Oglejmo si, kaj je ta razvoj. V ta namen najprej vpeljimo nekaj oznak. Za matriko $A \in \mathcal{O}^{n\times n}$ in indeksa i in j naj bo $A_{ij} \in \mathcal{O}^{(n-1)\times(n-1)}$ podmatrika, ki jo dobimo tako, da v A zbrišemo i-to vrstico in j-ti stolpec. Skalar $(-1)^{i+j}\det A_{ij}$ bomo imenovali *poddeterminanta* matrike A, ki jo bomo označili z $\widetilde{a_{ij}}$. Matriko poddeterminant $\widetilde{A} = [\widetilde{a_{ij}}]_{i,j=1}^n$ bomo imenovali *prirejenka* matrike A.

Primer 3.19. Naj bo $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. Izračunajmo poddeterminante matrike A in njeno prirejenko.

- $A_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $\widetilde{a_{11}} = \det A_{11} = 2$,
- $A_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\widetilde{a_{12}} = -\det A_{12} = -1$,
- $A_{13} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $\widetilde{a_{13}} = \det A_{13} = -1$,

- $A_{21} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $\widetilde{a_{21}} = -\det A_{21} = 1$,
- $A_{22} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\widetilde{a_{22}} = \det A_{22} = 1$,
- $A_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $\widetilde{a_{23}} = -\det A_{23} = 1$,
- $A_{31} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\widetilde{a_{31}} = \det A_{31} = 1$,
- $A_{32} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\widetilde{a_{32}} = -\det A_{32} = -2$,
- $A_{33} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\widetilde{a_{33}} = \det A_{33} = 1$.

Zdaj pa lahko izračunamo $\widetilde{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.

Trditev 3.20. *Naj bo $A \in \mathcal{O}^{n\times n}$ poljubna matrika in privzemimo zgornje oznake. Potem velja:*

1. *Za vsak $j = 1, \ldots, n$ velja*

$$\det A = a_{1j}\widetilde{a_{1j}} + a_{2j}\widetilde{a_{2j}} + \cdots + a_{nj}\widetilde{a_{nj}}.$$

   Tej enakosti pravimo razvoj determinante po j-tem stolpcu.

2. *Za vsak $i = 1, \ldots, n$ velja*

$$\det A = a_{i1}\widetilde{a_{i1}} + a_{i2}\widetilde{a_{i2}} + \cdots + a_{in}\widetilde{a_{in}}.$$

   Tej enakosti pravimo razvoj determinante po i-ti vrstici.

Dokaz. Ker je $\det A^T = \det A$, zadošča dokazati le prvo točko trditve.

Najprej izračunajmo $\det[A^{(1)}, \ldots, A^{(n-1)}, e_n]$. Po definiciji je

$$\det[A^{(1)}, \ldots, A^{(n-1)}, e_n] = \sum_{\pi \in S_n} s(\pi) a_{\pi(1),1} \cdots a_{\pi(n-1),n-1} a_{\pi(n),n}.$$

Produkt $a_{\pi(1),1} \cdots a_{\pi(n-1),n-1} a_{\pi(n),n}$ je neničeln le, ko je $\pi(n) = n$, saj je $a_{in} = \delta_{in}$. Permutacije števil $1, 2, \ldots, n$, ki fiksirajo število n, pa lahko identificiramo z njihovimi zožitvami na množico $\{1, 2, \ldots, n-1\}$, torej s permutacijami števil $1, 2, \ldots, n-1$. Znak permutacije se pri tej identifikaciji ne spremeni. Torej je

$$\begin{aligned} \det[A^{(1)}, \ldots, A^{(n-1)}, e_n] &= \sum_{\pi \in S_n, \pi(n)=n} s(\pi) a_{\pi(1),1} \cdots a_{\pi(n-1),n-1} \\ &= \sum_{\rho \in S_{n-1}} s(\rho) a_{\rho(1),1} \cdots a_{\rho(n-1),n-1} = \det A_{nn}. \end{aligned}$$

V naslednjem koraku naj bosta i in j poljubna indeksa ter izračunajmo determinanto $\det[A^{(1)}, \ldots, A^{(j-1)}, e_i, A^{(j+1)}, \ldots, A^{(n)}]$. S pomočjo zamenjave vrstic in stolpcev to determinanto prevedemo na prejšnji primer. Torej je

$$\det[A^{(1)}, \ldots, A^{(j-1)}, e_i, A^{(j+1)}, \ldots, A^{(n)}] = (-1)^{n-j} \det[A^{(1)}, \ldots, A^{(j-1)}, A^{(j+1)}, \ldots, A^{(n)}, e_i]$$
$$= (-1)^{n-j}(-1)^{n-i} \det \begin{bmatrix} A_{ij} & 0 \\ A_{(i)} & 1 \end{bmatrix} = (-1)^{i+j} \det A_{ij} = \widetilde{a_{ij}}.$$

(Spomnimo se, da smo z $A_{(i)}$ označili i-to vrstico matrike A.)

Končno naj bo j poljuben indeks. S pomočjo prejšnjega primera in n-linearnosti determinante izračunamo

$$\begin{aligned} \det A &= \det[A^{(1)}, \ldots, A^{(j-1)}, a_{1j}e_1 + \cdots + a_{nj}e_n, A^{(j+1)}, \ldots, A^{(n)}] \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{kj} \det[A^{(1)}, \ldots, A^{(j-1)}, e_k, A^{(j+1)}, \ldots, A^{(n)}] = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}\widetilde{a_{kj}}, \end{aligned}$$

kar je bilo treba dokazati.

□

Primer 3.21. V prejšnjem primeru je

$$\det A = a_{11}\widetilde{a_{11}} + a_{12}\widetilde{a_{12}} + a_{13}\widetilde{a_{13}} = 1 \cdot 2 + 0 \cdot (-1) - 1 \cdot (-1) = 3.$$

Primer 3.22. Izračunajmo determinanto matrike $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

Vidimo, da je v tretji vrstici le en člen neničeln, zato se splača determinanto razviti po tretji vrstici. Dobimo

$$\det A = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Zdaj pa se nam splača determinanto razviti po prvi vrstici, saj je v tej vrstici le en člen neničeln. Dobimo

$$\det A = -(-1)^{1+3} \cdot 2 \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2(-1 - 2 \cdot 3) = 14,$$

kjer smo na koncu uporabili znano formulo za determinanto 2×2 matrike.

Kot smo videli na primeru, se za izračun determinante splača uporabljati razvoj po vrstici ali stolpcu, kadar ima vrstica ali stolpec veliko ničel.

Izrek 3.23. $A\widetilde{A}^T = \widetilde{A}^T A = \begin{bmatrix} \det A & & \\ & \ddots & \\ & & \det A \end{bmatrix} = (\det A) \cdot I.$

Dokaz. Iz Trditve 3.20 že vemo, da velja

$$\det A = a_{1j}\widetilde{a_{1j}} + a_{2j}\widetilde{a_{2j}} + \cdots + a_{nj}\widetilde{a_{nj}} \tag{4}$$

za vsak j in

$$\det A = a_{i1}\widetilde{a_{i1}} + a_{i2}\widetilde{a_{i2}} + \cdots + a_{in}\widetilde{a_{in}} \tag{5}$$

za vsak i. Poleg tega za $j \neq k$ z razvojem po k-tem stolpcu dobimo

$$0 = \det[A^{(1)}, \ldots, A^{(k-1)}, A^{(j)}, A^{(k+1)}, \ldots, A^{(n)}] = a_{1j}\widetilde{a_{1k}} + \cdots + a_{nj}\widetilde{a_{nk}}. \tag{6}$$

Ker je $\det A^T = \det A$, pa iz zadnje enakosti dobimo tudi, da za $i \neq k$ velja

$$0 = a_{i1}\widetilde{a_{k1}} + \cdots + a_{in}\widetilde{a_{kn}}. \tag{7}$$

Zdaj pa je treba le še opaziti, da so enačbe (4) in (6) ekvivalentne $\widetilde{A}^T A = (\det A)I$, enačbe (5) in (7) pa $A\widetilde{A}^T = (\det A)I$. □

Posledica 3.24. *Če je* $\det A \neq 0$*, potem je* A *obrnljiva matrika (kar že vemo) in velja* $A^{-1} = (\det A)^{-1}\widetilde{A}^T$.

Primer 3.25. V Primeru 3.19 je $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\widetilde{A}^T = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

3.5 Uporaba determinante pri reševanju sistemov linearnih enačb

Za konec tega poglavja si oglejmo še, kako determinante uporabljamo pri reševanju sistemov linearnih enačb.

Izrek 3.26 (Cramérjeve formule)**.** *Naj bo $A \in \mathcal{C}^{n\times n}$ kvadratna matrika in $b \in \mathcal{C}^n$. Če je* $\det A \neq 0$*, potem je rešitev sistema linearnih enačb $Ax = b$ ena sama in je enaka* $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$*, kjer je*

$$x_j = \frac{\det\left[A^{(1)}, \ldots, A^{(j-1)}, b, A^{(j+1)}, \ldots, A^{(n)}\right]}{\det A}$$

za vsak $j = 1, \ldots, n$.

Dokaz. Ker je $\det A \neq 0$, je matrika A obrnljiva. Zato je rešitev sistema $Ax = b$ ena sama, in sicer $x = A^{-1}b$. Z upoštevanjem prejšnje posledice dobimo, da je rešitev enaka $x = \frac{1}{\det A}\widetilde{A}^T b$. j-ta komponenta vektorja $\widetilde{A}^T b$ je enaka $\widetilde{a_{1j}}b_1 + \cdots + \widetilde{a_{nj}}b_n$, kar je po razvoju po j-tem stolpcu ravno determinanta $\det[A^{(1)}, \ldots, A^{(j-1)}, b, A^{(j+1)}, \ldots, A^{(n)}]$. Cramérjeve formule so s tem dokazane. $\square$

Primer 3.27. Če je $ad - bc \neq 0$, je rešitev sistema

$$\begin{aligned} ax + by &= e \\ cx + dy &= f \end{aligned}$$

podana z

$$x = \frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}},$$

kar vemo že iz gimnazije.