5 Relacije

Naloga 5.1. Dani sta relaciji R in S na množici $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$:

$$R = \{(1, 2), (1, 4), (1, 6), (2, 1), (3, 4), (3, 6), (5, 6)\}$$

in

$$S = \{(2, 4), (2, 6), (4, 4), (6, 6)\}\,.$$

(a) Narišite relaciji R in S.

(b) Določite relacije R^T, $R \circ S$ in $S \circ R$.

(c) Katere od naslednjih lastnosti ima relacija R: refleksivnost, irefleksivnost, simetričnost, asimetričnost, antisimetričnost, tranzitivnost, sovisnost, strogo sovisnost?

(d) Določite tranzitivni in refleksivno-tranzitivni ovojnici relacij R in S.

Naloga 5.2.

(a) Naj $a \; D \; b$ pomeni „a je delitelj b“, kjer sta a in b naravni števili, večji ali enaki 2. Izračunajte kompozituma $D \circ D^\mathsf{T}$ in $D^\mathsf{T} \circ D$.

(b) Naj $a \; M \; b$ pomeni „a je mati od b“, kjer sta a in b človeka. Izračunajte kompozituma $M^\mathsf{T} \circ M$ in $M \circ M^\mathsf{T}$.

(c) Naj $a \; R \; b$ pomeni $|a - b| = 1$, definirana za $a, b \in \mathbb{R}$. Izračunajte $R \circ R$ in $R \circ R \circ R$.

Naloga 5.3. Na množici vseh ravnin v $\mathbb{R}^3$ vpeljemo relacijo $\perp$:

$$r_1 \perp r_2 \iff \text{ravnini } r_1 \text{ in } r_2 \text{ sta pravokotni.}$$

Katere od naslednjih lastnosti ima relacija $\perp$: refleksivnost, irefleksivnost, simetričnost, asimetričnost, antisimetričnost, tranzitivnost, sovisnost, strogo sovisnost?

Naloga 5.4. Naj bosta ab in cd dvomestni števili s števkami a, b, c in d. Pravimo, da sta ab in cd v relaciji Q, ko velja $a \geq c$ ali $b > d$. Na primer, $32 \; Q \; 15$ velja in prav tako $28 \; Q \; 93$. Ne velja pa $13 \; Q \; 23$.

(a) Katera izmed števil 72, 75, 82 in 85 so v relaciji Q?

(b) Katere od naslednjih lastnosti ima relacija Q: refleksivnost, irefleksivnost, simetričnost, asimetričnost, antisimetričnost, tranzitivnost, sovisnost, strogo sovisnost?

Naloga 5.5. Naj bo $A = \{a, b, c, d\}$ in $R = \{(a, b), (b, c), (c, d), (c, a)\}$. Narišite relacijo R in izračunajte R^3, R^{2023}, R^+ in R^*.

Naloga 5.6. Polji šahovnice sta v relaciji R_F, če lahko figura F pride s prvega polja na drugo v eni potezi. Za vse šahovske figure F ugotovite, katere lastnosti (refleksivnost, irefleksivnost, simetričnost, asimetričnost, antisimetričnost, tranzitivnost, sovisnost, strogo sovisnost) imajo relacije R_F.

Naloga 5.7. Na neskončni šahovnici $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definiramo naslednjo relacijo:

$$(x, y)\ R\ (z, w) \iff \text{šahovski konjiček lahko skoči z } (x, y) \text{ na } (z, w).$$

(a) Za vsak $n \in \mathbb{N}$ opišite relacijo R^n. (Kdaj sta polji v relaciji R^n?)

(b) Za katere $n \in \mathbb{N}$ je R^n refleksivna?

(c) Ali je R tranzitivna? Za katere $n \in \mathbb{N}$ je R^n tranzitivna?

(d) Poiščite tranzitivno ovojnico relacije R.

Naloga 5.8.

(a) Dokažite za vse relacije R na množici A: če je $R^\mathsf{T} \subseteq R$, potem je $R = R^\mathsf{T}$.

(b) Poiščite relacijo R, za katero velja $R^\mathsf{T} = R$.

(c) Poiščite relacijo R, za katero velja $R^\mathsf{T} = R^\complement$.

Naloga 5.9. Naj bodo A, B, C množice. Ali obstaja taka relacija I na množici B, da velja $I \circ R = R$ za vse relacije $R \subseteq A \times B$ in $S \circ I = S$ za vse relacije $S \subseteq B \times C$?

Naloga 5.10. Naj bo $R \subseteq A \times A$ relacija na množici A. Pokažite:

(a) R je refleksivna natanko tedaj, ko velja $\Delta_A \subseteq R$,

(b) R je tranzitivna natanko tedaj, ko velja $R^2 \subseteq R$,

(c) R je simetrična natanko tedaj, ko velja $R^\mathsf{T} \subseteq R$,

(d) R je simetrična natanko tedaj, ko velja $R^{\mathsf{T}} = R$,

(e) R je antisimetrična natanko tedaj, ko velja $R \cap R^{\mathsf{T}} \subseteq \Delta_A$,

(f) R je irefleksivna natanko tedaj, ko velja $R \cap \Delta_A = \emptyset$,

(g) R je asimetrična natanko tedaj, ko velja $R \cap R^{\mathsf{T}} = \emptyset$,

(h) R je sovisna natanko tedaj, ko velja $\Delta_A \cup R \cup R^{\mathsf{T}} = A \times A$.

(i) R je strogo sovisna natanko tedaj, ko velja $R \cup R^{\mathsf{T}} = A \times A$.

Naloga 5.11. Naj bo R tranzitivna relacija na množici A. Dokažite: če je R antisimetrična, je tudi R^2 antisimetrična. Ali velja implikacija v obratno smer?

Naloga 5.12. Naj bodo R, S in V relacije na množici A. Pokažite, da velja

(a) $R \subseteq S \iff R^{\mathsf{T}} \subseteq S^{\mathsf{T}} \iff S^{\complement} \subseteq R^{\complement}$,

(b) $(R \circ S)^{\mathsf{T}} = S^{\mathsf{T}} \circ R^{\mathsf{T}}$,

(c) $(R \cup S)^{\mathsf{T}} = R^{\mathsf{T}} \cup S^{\mathsf{T}}$,

(d) $R \circ (S \cup V) = (R \circ S) \cup (R \circ V)$,

(e) $R \circ (S \cap V) \subseteq (R \circ S) \cap (R \circ V)$.

Poiščite še protiprimer za $R \circ (S \cap V) = (R \circ S) \cap (R \circ V)$.

Naloga 5.13. Naj bosta R is S simetrični relaciji na A. Pokažite, da je relacija $R \circ S$ simetrična natanko tedaj, ko je $R \circ S = S \circ R$. Namig: Uporabite nalogo 5.10 (d) in nalogo 5.12 (b).

Naloga 5.14. Relacija $R \subseteq A \times B$ je ***funkcijska***, če velja

$$\forall x \in A.\, \exists! y \in B.\, (x, y) \in R.$$

Vsaka funkcija $f\colon A \to B$ določa funkcijsko relacijo $\Gamma_f \subseteq A \times B$,

$$\Gamma_f := \{(x, y) \in A \times B \mid f(x) = y\},$$

ki ji pravimo ***graf*** funkcije f. Obratno vsaka funkcijska relacija $R \subseteq A \times B$ določa funkcijo $f_R\colon A \to B$, definirano s predpisom

$$f_R(x) := \text{tisti } y \in B \text{, za katerega velja } (x, y) \in R.$$

Za naslednje relacije ugotovite, ali so funkcijske. Če so, katero funkcijo določajo?

(a) $K := \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = y^2\}$.

(b) $K := \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = y^3\}$.

(c) $K := \{(x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \mid x = y^2\}$, pri čemer je $\mathbb{R}_+$ množica pozitivnih realnih števil.

(d) $I := \{(x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \mid xy = 1\}$, pri čemer je $\mathbb{R}_+$ množica pozitivnih realnih števil.

(e) $R := \{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid (n = 0 \lor n = 1) \land \exists k \in \mathbb{N}.\, m = 2k + n\}$.

(f) Za dani $a \in A$ definiramo relacijo $R_a := \{(x, y) \in A \times B \mid x = a\}$.

(g) Za dani $b \in B$ definiramo relacijo $R_b := \{(x, y) \in A \times B \mid y = b\}$.

Naloga 5.15.

(a) Dokažite: če sta R in S funkcijski relaciji, je tudi $S \circ R$ funkcijska relacija.

(b) Ali se lahko zgodi, da je $S \circ R$ funkcijska relacija, če R in S nista funkcijski relaciji?

Naloga 5.16. Na množici *neničelnih* naravnih števil definiramo relacijo R s predpisom

$$m \mathrel{R} n \iff m \cdot n \text{ je kvadrat naravnega števila.}$$

(a) Pokažite, da je R ekvivalenčna relacija.
(b) Kaj je $[30]_R$? Kaj je $[12]_R$?
(c) Poiščite izbor predstavnikov za R.

Naloga 5.17. Čevljar gospod Šuštar že leta izdeluje čevlje ob Šuštarskem mostu v Ljubljani. Zaradi izjemno kvalitetne obrti ima že dolg spisek rednih strank. Trenutno oblikuje nov model čevlja, ki bi ga želel ponuditi prav vsem rednim strankam.

Naj bo $\mathcal{S}$ množica vseh strank in $\mathcal{C}$ množica številk čevljev. Dana naj bo tudi funkcija $f\colon \mathcal{S} \to \mathcal{C}$, ki osebi priredi številko stopala. Na množici $\mathcal{S}$ definiramo relacijo R takole:

$$x \, R \, y \iff f(x) = f(y).$$

(a) Razložite pomen relacije in ugotovite, kaj so njeni ekvivalenčni razredi.

(b) Naj bo $\mathcal{I}$ množica vseh imen in naj bo $g\colon \mathcal{S}/_R \to \mathcal{I}$ preslikava, definirana s predpisom $g([x]) :=$ „ime stranke x“. Ali je preslikava dobro definirana?

(c) Naj bo $c\colon \mathcal{S}/_R \to \{\text{majho}, \text{srednje}, \text{veliko}\}$ preslikava, ki opisno opredeli velikost stopala, torej je dana s predpisom

$$c([x]) := \begin{cases} \text{majhno} & \text{če } f(x) \leq 37, \\ \text{srednje} & \text{če } 37 < f(x) \leq 45, \\ \text{veliko} & \text{če } 45 < f(x). \end{cases}$$

Ali je preslikava dobro definirana?

Naloga 5.18. Naj bo $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ preslikava, definirana s predpisom $f(x, y) := \sqrt{x^2 + y^2}$, in $\sim_f$ ekvivalenčna relacija na $\mathbb{R}^2$, ki jo porodi f. Podajte geometrijski opis ekvivalenčnih razredov relacije $\sim_f$. Premislite, da velja $\mathbb{R}^2/_{\sim_f} \cong [0, \infty)$.

Naloga 5.19. Definirajmo relacijo $\sim$ na $\mathbb{R}$ s predpisom

$$x \sim y \iff \exists k \in \mathbb{Z}.\, x - y = 2\pi k.$$

(a) Poiščite dve preslikavi $\mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, ki inducirata $\sim$.

(b) Ali je preslikava $\oplus\colon \mathbb{R}/_\sim \times \mathbb{R}/_\sim \to \mathbb{R}/_\sim$ s predpisom $[x]_\sim \oplus [y]_\sim := [x + 2y]_\sim$ dobro definirana?

Naloga 5.20. Naj bo $f\colon A \to B$ preslikava in $\sim_f$ ekvivalenčna relacija, porojena s f, se pravi: $x \sim_f y \iff f(x) = f(y)$.

(a) Dokažite: če je f surjektivna, potem velja $A/_{\sim_f} \cong B$.

(b) Ali smemo sklepati: če je $A/_{\sim_f} \cong B$, potem je f surjektivna?

(c) Naj bo $\overline{f}\colon A/_{\sim_f} \to B$ preslikava, definirana s predpisom $\overline{f}\colon [x]_{\sim_f} \mapsto f(x)$. Ali smemo sklepati: če je $\overline{f}$ izomorfizem, je f surjektivna?

Naloga 5.21. Na $\mathbb{N}$ definiramo naslednjo relacijo:

$$a \, R \, b \iff 7 \mid 5a + 2b.$$

(a) Pokažite, da je R ekvivalenčna relacija.

(b) Določite ekvivalenčne razrede relacije R.

Naloga 5.22. Naj bo $2\mathbb{Z}$ množica sodih celih števil, tj.

$$2\mathbb{Z} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ je sodo število}\} = \{\ldots, -4, -2, 0, 2, 4, \ldots\}.$$

Na množici $\mathbb{Z}$ definiramo relacijo $\sim$ s predpisom

$$x \sim y \iff x - y \in 2\mathbb{Z}.$$

Označimo z $\mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}}$ kvocientno množico[1] $\mathbb{Z}/_{\sim}$ in z $\mathbb{Z}_2$ množico $\{0, 1\}$. Dokažite, da velja $\mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}_2$. Pojasnite algebrajski pomen izomorfizma, ki ste ga podali.

Naloga 5.23. Na množici $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definiramo relacijo $\sim$ s predpisom

$$(a, b) \sim (c, d) \iff a + d = b + c.$$

(a) Preverite, da je $\sim$ ekvivalenčna relacija.

(b) Naj bo $Z = (\mathbb{N} \times \mathbb{N})/_{\sim}$ kvocientna množica. Andrej je želel na Z definirati operaciji seštevanja in množenja s predpisoma

$$\begin{aligned} [a, b] \oplus [c, d] &:= [a + c, b + d], \\ [a, b] \otimes [c, d] &:= [a\,c, b\,d], \end{aligned}$$

kjer smo zapisali ekvivalenčni razred $[(a, b)]_{\sim}$ krajše kot $[a, b]$. Ali sta $\oplus$ in $\otimes$ dobro definirani preslikavi $Z \times Z \to Z$? Če ne, kako bi ju popravili, da bi dobili na Z strukturo kolobarja? Kateri kolobar smo dobili?

Naloga 5.24. Obravnavajmo množico $P := \{1, 2, 3, \ldots, 12\}$, delno urejeno z relacijo deljivosti $|$.

(a) Narišite Hassejev diagram delne ureditve $(P, |)$.

(b) Poiščite čim večjo verigo, čim večjo antiverigo in kakšno podmnožico, ki ni niti veriga niti antiveriga.

(c) Ali obstajajo minimalni, maksimalni, prvi ali zadnji elementi podmnožice $\{1, 2, 3, 4\}$?

(d) Ali obstajajo minimalni, maksimalni, prvi ali zadnji elementi P? Kako se odgovor spremeni, če ureditvi P odvzamemo 1, in kako, če dodamo 0?

Naloga 5.25. Množico vseh nepraznih zaprtih podintervalov intervala $[0, 1]$, torej $\mathbb{I} := \big\{[a, b] \bigm| 0 \le a \le b \le 1\big\}$, delno uredimo z relacijo vsebovanosti $\subseteq$. Ali obstajajo minimalni, maksimalni, prvi ali zadnji elementi množice $\mathbb{I}$?

[1] Pri algebri boste spoznali, da je ta oznaka standardna, kadar je relacija definirana z dejstvom, da je razlika elementov v dani množici.

Naloga 5.26. Na množici kompleksnih števil $\mathbb{C}$ definiramo

$$z \preccurlyeq w \iff z \text{ in } w \text{ ležita na istem zaprtem poltraku iz izhodišča in } |z| \leq |w|.$$

Dokažite, da je $\preccurlyeq$ relacija delne urejenosti.

Naloga 5.27. Poiščite delno urejeno množico, ki ima natanko en minimalni element, vendar nima prvega elementa.

Naloga 5.28. Poiščite podmnožico $S \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$, ki nima niti najmanjšega niti največjega elementa glede na relacijo $\subseteq$.

Naloga 5.29. Za vsako od naslednjih množic S ugotovite, ali je navzgor in navzdol omejena, ali ima največji in najmanjši element ter supremum in infimum.

(a) Odprti interval $S = (a, b)$ kot podmnožica $(\mathbb{R}, \leq)$.

(b) Zaprti interval $S = [a, b]$ kot podmnožica $(\mathbb{R}, \leq)$.

(c) Družina $S = \big\{\{n\} \bigm| n \in \mathbb{N}\big\}$ kot podmnožica $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq)$.

(d) $S = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid 0 \in A\}$ kot podmnožica $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq)$.

Naloga 5.30. Na $\mathbb{R}^2$ definiramo:

$$(x, y) \sqsubseteq (z, w) \iff y \leq w \text{ in } x - y \leq z - w.$$

(a) Pokažite, da je $\sqsubseteq$ delna urejenost.

(b) Ali je $\sqsubseteq$ linearna urejenost?

(c) Poiščite neskončno množico $A \subseteq \mathbb{R}^2$, ki ima prvi element.

(d) Dokažite, da je $(\mathbb{R}^2, \sqsubseteq)$ mreža.

(e) Ali je $[0, \infty) \times \mathbb{R}$ z zožitvijo relacije $\sqsubseteq$ mreža?

Naloga 5.31. Za vsako od podanih preslikav ugotovite, ali je monotona, pri čemer številske množice uredimo z običajno relacijo $\leq$ in potenčne z običajno relacijo $\subseteq$.

(a) $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto n^2$

(b) $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $n \mapsto n^2$

(c) $\mathbb{N} \setminus \{0\} \to \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $n \mapsto$ število deliteljev n v $\mathbb{N} \setminus \{0\}$

(d) $\mathbb{R} \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$, $x \mapsto \{x\}$

(e) $\mathbb{R} \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$, $x \mapsto (-\infty, x)$

Naloga 5.32. Naj bo A množica in $S \subseteq A$. Za vsako od podanih preslikav ugotovite, ali je monotona, pri čemer potenčne množice uredimo z običajno relacijo $\subseteq$.

(a) $\mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$, $X \mapsto X^{\complement}$

(b) $\mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$, $X \mapsto X \cup S$

(c) $\mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$, $X \mapsto X \cap S$

(d) $\mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$, $X \mapsto X \setminus S$

(e) $\mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$, $X \mapsto S \setminus X$

(f) $\mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}\big(\mathcal{P}(A)\big)$, $X \mapsto \mathcal{P}(X)$

Naloga 5.33. Katere od spodnjih preslikav $\mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$ so monotone glede na relacijo $\subseteq$ za *vse* množice A, preslikave $f\colon A \to A$ in podmnožice $S, T \subseteq A$?

(a) $X \mapsto f_*\big(X \setminus f^*(S \setminus T)\big)$

(b) $X \mapsto f^*\big(X \setminus f_*(S \setminus T)\big)$

(c) $X \mapsto f_*\big(S \setminus f_*(X \setminus T)\big)$

(d) $X \mapsto f^*\big(S \setminus f^*(X \setminus T)\big)$

(e) $X \mapsto f^*\big(S \setminus f^*(T \setminus X)\big)$

(f) $X \mapsto f^*\big(S \setminus f_*(T \setminus X)\big)$

Naloga 5.34. Utemeljite sledeče trditve.

(a) Kompozitum dveh monotonih preslikav je monotona preslikava.

(b) Kompozitum dveh nemonotonih preslikav ni nujno nemonotona preslikava.

(c) Ali je kompozitum monotone in nemonotone preslikave (v takem ali drugačnem vrstnem redu) nujno (ne)monotona preslikava?

Naloga 5.35. Za delno urejeni množici $(P, \leq_P)$ in $(Q \leq_Q)$ lahko na kartezičnem produktu $P \times Q$ definiramo delno urejenost $\leq$ s predpisom

$$(p_1, q_1) \leq (p_2, q_2) \iff p_1 \leq_P p_2 \wedge q_1 \leq_Q q_2.$$

(a) Preverite, da je $\leq$ res delna urejenost.

(b) Če sta $\leq_P$ in $\leq_Q$ linearni urejenosti, ali je to tudi $\leq$?

(c) Kako lahko na kartezičnem produktu dveh linearno urejenih množic definiramo linearno urejenost?

Naloga 5.36. Naj bo $(P, \leq)$ delna ureditev in A poljubna množica. Na eksponentni množici P^A definiramo ureditev

$$f \preceq g \iff \forall x \in A.\, f(x) \leq g(x).$$

Denimo, da je $\leq$ linearna ureditev. V kakšnem primeru je tudi $\preceq$ linearna ureditev? (Obravnavajte primere, ko imata P in A nič, en in več kot en element.)

Naloga 5.37. Naj bosta $(P, \leq_P)$ in $(Q, \leq_Q)$ delni ureditvi ter $f \colon P \to Q$ monotona preslikava.

(a) Dokažite, da f slika omejene množice v omejene množice.

(b) Denimo, da ima množica $S \subseteq P$ supremum v P in množica $f_*(S)$ supremum v Q. Dokažite, da velja $\bigvee_{x \in S} f(x) \leq f(\bigvee_{x \in S} x)$. Ali velja tudi enakost, tj. ali monotone preslikave v splošnem ohranjajo supremume?

Naloga 5.38. Označimo z $\leq$ običajno urejenost na $\mathbb{R}^2$ (tj. po komponentah) in z $\leq_{\text{lex}}$ leksikografsko urejenost. Naj bo dan $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ in naj bo (x, y) tak element, da velja $(0, 0) \leq (nx, ny) \leq (u, v)$ za vsak $n \in \mathbb{N}$. Pokažite, da je $(x, y) = (0, 0)$. Ali to velja tudi v primeru, ko $\leq$ zamenjamo z $\leq_{\text{lex}}$? Če velja, dokažite, sicer pa poiščite protiprimer.

Naloga 5.39. Naj bo $(A_n, \leq_n)_{n \in \mathbb{N}}$ družina delno urejenih množic. Za $f, g \in \prod_{n \in \mathbb{N}} A_n$ definiramo relacijo $\leq$:

$$f \leq g \iff \big(f \neq g \Rightarrow f(x_0) \leq g(x_0)\big),$$

pri čemer je z x_0 označen $\min \{x \in \mathbb{N} \mid f(x) \neq g(x)\}$. Pokažite:

(a) $\leq$ je delna urejenost,

(b) če so $\leq_n$ linearne urejenosti, je tudi $\leq$ linearna urejenost.

Naloga 5.40. Naj bo $(A, \preceq)$ šibka ureditev. Relacijo $\sim$ na A definiramo takole:

$$x \sim y \iff x \preceq y \land y \preceq x.$$

(a) Pokažite, da je $\sim$ ekvivalenčna relacija.

(b) Na množici ekvivalenčnih razredov $A/\sim$ definiramo relacijo $\leq$ takole:

$$[x] \leq [y] \iff x \preceq y.$$

Pokažite, da je $\leq$ dobro definirana in je delna urejenost.

Naloga 5.41. Naj bo $f\colon A \to B$ preslikava in $\leq$ relacija na B. Na A definiramo relacijo $\preceq$:

$$x \preceq y \iff f(x) \leq f(y).$$

Dokažite sledeče.

(a) Če je $\leq$ šibka urejenost na B, je $\preceq$ šibka urejenost na A.

(b) Če je $\leq$ delna urejenost na B, ni nujno, da je $\preceq$ delna urejenost na A.

(c) Poiščite potreben in zadosten pogoj na preslikavo f, da iz delne urejenosti $\leq$ sledi delna urejenost $\preceq$.

(d) Pokažite: za vsako šibko ureditev $(A, \preceq)$ obstaja delna ureditev $(B, \leq)$ in preslikava $f\colon A \to B$, da je $\preceq$ porojena iz $\leq$ na zgoraj podani način.

Naloga 5.42. Naj bo dana družina funkcij $(f_i\colon A \to \mathbb{R})_{i \in I}$. Na A definiramo relacijo R s predpisom

$$x \mathrel{R} y \iff \forall i \in I.\, f_i(x) \leq f_i(y).$$

Ali je R nujno delna urejenost? Kaj je potreben in zadosten pogoj za to, da bo R antisimetrična?