Analiza 1

Funkcije

(1) Za naslednja predpisa določi maksimalni definicijski območji:

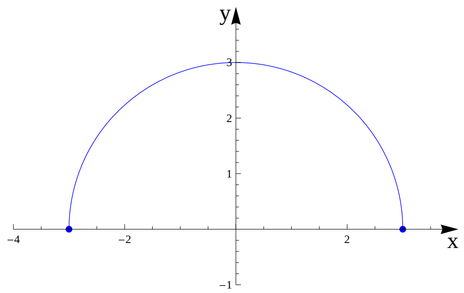
(a) $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$,

(b) $f(x) = \ln\left(\frac{x+2}{5-x}\right)$.

Rešitev: (a) Če hočemo, da bo funkcija f definirana, mora biti izraz pod korenom večji ali enak kot nič. Tako pridemo do neenačbe

$$9 - x^2 \geq 0,$$

ki ima rešitev $x \in [-3, 3]$. Torej je $D_f = [-3, 3]$. Graf funkcije f je zgornji del krožnice $x^2 + y^2 = 9$.



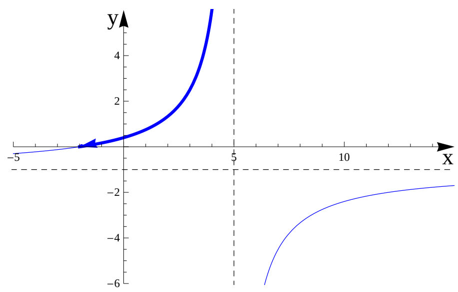
(b) Spomnimo se najprej, da velja $D_{\ln} = (0, \infty)$. Če torej hočemo, da bo funkcija f definirana, mora veljati

$$\frac{x+2}{5-x} \in (0, \infty).$$

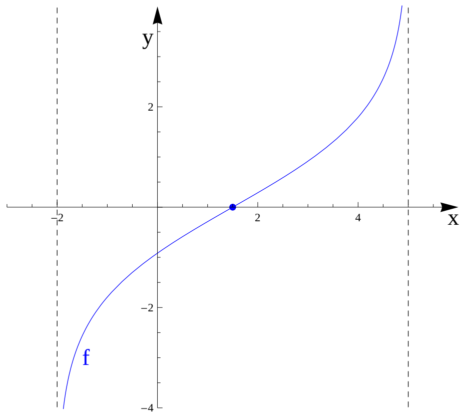
Vidimo, da tvorijo definicijsko območje funkcije f tista števila, ki rešijo neenačbo

$$0 < \frac{x+2}{5-x}.$$

Grafično ali pa računsko lahko pokažemo, da je $D_f = (-2, 5)$.



Za konec poglejmo še graf funkcije f.



$\square$

(2) Za dana para funkcij f in g izračunaj predpisa in definicijski območji funkcij $f \circ g$ in $g \circ f$:

(a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ in $g(x) = \sqrt{x}$,

(b) $f(x) = e^x$ in $g(x) = \ln x$.

Rešitev: (a) Predpisa obeh kompozitumov sta:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = \frac{1}{x+1},$$
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{1}{x^2+1}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Pri določanju definicijskega območja kompozituma dveh funkcij moramo biti pazljivi. Ni namreč dovolj, da pogledamo, kje je definiran predpis kompozituma. Če hočemo, da je kompozitum $f \circ g$ definiran v točki x, mora biti v x definirana funkcija g, hkrati pa mora biti funkcija f definirana v točki $g(x)$:

$$D_{f\circ g} = \{x \in \mathbb{R} \,|\, g \text{ je definirana v } x \text{ in } f \text{ je definirana v } g(x)\} = D_g \cap g^{-1}(D_f).$$

V našem primeru je:

· funkcija f definirana povsod,
· funkcija g definirana na $[0, \infty)$.

Za funkcijo $f \circ g$ je torej $D_{f\circ g} = \{x \in \mathbb{R} \,|\, g \text{ je definirana v } x\}$ oziroma

$$D_{f\circ g} = [0, \infty).$$

V tem primeru vidimo, da se definicijsko območje funkcije $f \circ g$ razlikuje od maksimalnega definicijskega območja predpisa za funkcijo $f \circ g$.

Za funkcijo $g \circ f$ pa je $D_{g\circ f} = \{x \in \mathbb{R} \,|\, f(x) \geq 0\}$. Ker je $x^2 + 1 > 0$ za vsak $x \in \mathbb{R}$, je

$$D_{g\circ f} = \mathbb{R}.$$

(b) V tej nalogi imamo primera dveh kompozicij inverznih funkcij. Eksponentna funkcija določa bijekcijo

$$\exp : \mathbb{R} \to (0, \infty)$$

logaritemska funkcija pa bijekcijo

$$\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}.$$

Sicer sta res ti dve funkciji inverzni ena drugi, vendar pa to ne pomeni nujno, da je njun kompozitum enak identiteti za vsako realno število x. Moramo namreč biti pozorni, kje sta ta dva kompozituma definirana. Kompozitum

$$g(x) = (\ln \circ \exp)(x) = \ln e^x$$

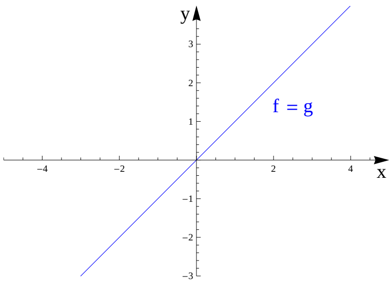
je definiran za vsak $x \in \mathbb{R}$ in zato velja $g(x) = x = f(x)$. Kompozitum

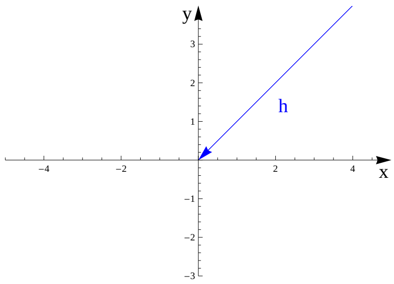
$$h(x) = (\exp \circ \ln)(x) = e^{\ln x}$$

pa je po drugi strani definiran samo za $x > 0$. Torej funkcija h ni identična funkciji f, čeprav za vsak $x > 0$ velja

$$f(x) = h(x).$$

Poglejmo še grafe vseh treh funkcij.





$\square$

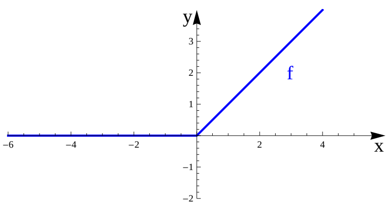
(3) Naj bo:

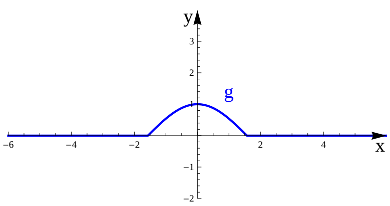
$$f(x) = \begin{cases} 0 & ; x < 0, \\ x & ; x \geq 0, \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 0 & ; |x| > \frac{\pi}{2}, \\ \cos x & ; |x| \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Določi $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$ in $g \circ g$ in nariši grafe.

Rešitev: Najprej si poglejmo grafa funkcij f in g.



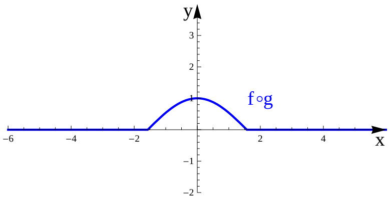


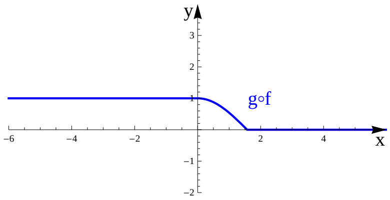
Kompoziciji teh dveh funkcij sta:

$$(f \circ g)(x) = \begin{cases} 0 & ; g(x) < 0, \\ g(x) & ; g(x) \geq 0, \end{cases} = \begin{cases} 0 & ; |x| > \frac{\pi}{2}, \\ \cos x & ; |x| \leq \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

$$(g \circ f)(x) = \begin{cases} 0 & ; |f(x)| > \frac{\pi}{2}, \\ \cos(f(x)) & ; |f(x)| \leq \frac{\pi}{2}, \end{cases} = \begin{cases} 0 & ; x > \frac{\pi}{2}, \\ 1 & ; x < 0, \\ \cos x & ; x \in [0, \frac{\pi}{2}]. \end{cases}$$

Opazimo lahko, da je $f \circ g = g$.

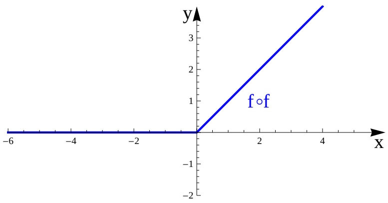


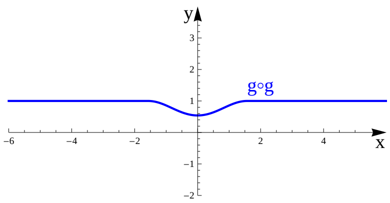


Če pa komponiramo funkciji sami s sabo, pa dobimo:

$$(f \circ f)(x) = \begin{cases} 0 & ; f(x) < 0, \\ f(x) & ; f(x) \geq 0, \end{cases} = \begin{cases} 0 & ; x < 0, \\ x & ; x \geq 0, \end{cases}$$
$$(g \circ g)(x) = \begin{cases} 0 & ; |g(x)| > \frac{\pi}{2}, \\ \cos(g(x)) & ; |g(x)| \leq \frac{\pi}{2}, \end{cases} = \begin{cases} 1 & ; |x| > \frac{\pi}{2}, \\ \cos(\cos x) & ; |x| \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Tokrat je $f \circ f = f$.

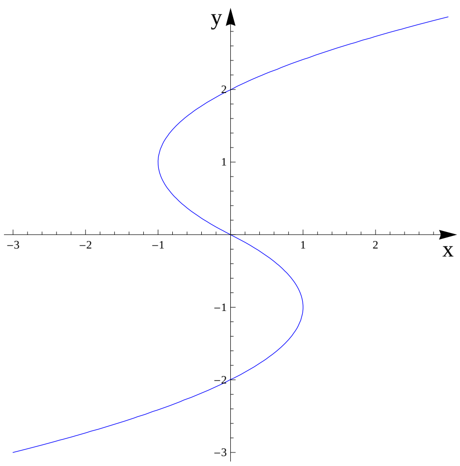




$\square$

(4) Dana je ravninska krivulja z enačbo $y|y| - 2y = x$. Ali je ta krivulja graf neke funkcije $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$? Kaj pa, če zožimo njeno definicijsko območje in zalogo vrednosti?

Rešitev: Imamo ravninsko krivuljo, ki je podana z implicitno enačbo $y|y| - 2y = x$. Za $y \geq 0$ je torej krivulja podana z enačbo $y^2 - 2y = x$, za $y < 0$ pa z enačbo $-y^2 - 2y = x$. Gre torej za unijo lokov dveh parabol.



Cela krivulja ni graf neke funkcije $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Jo pa lahko izrazimo kot unijo treh grafov, ki ustrezajo vrednostim $y \in [1, \infty)$, $y \in [-1, 1]$ in $y \in (-\infty, -1]$. Del krivulje, ki ustreza vrednostim $y \in [1, \infty)$, lahko na primer izrazimo s predpisom

$$y = 1 + \sqrt{x + 1}.$$

$\square$

(5) Naj bo $f(x) = \frac{3x-2}{x+1}$. Določi definicijsko območje funkcije f in pokaži, da je injektivna. Nato določi inverzno funkcijo. Podobno obravnavaj še funkcijo $g(x) = \ln\left(\frac{x-3}{2}\right)$.

Rešitev: Racionalna funkcija $f(x) = \frac{3x-2}{x+1}$ je definirana povsod razen v polu. Torej je $D_f = \mathbb{R}\setminus\{-1\}$. Pokažimo sedaj, da je funkcija f injektivna. Vzemimo poljubna $x, y \in D_f$ in denimo, da velja $f(x) = f(y)$. Potem moramo pokazati, da od tod sledi $x = y$. Računajmo:

$$\begin{aligned} \frac{3x-2}{x+1} &= \frac{3y-2}{y+1}, \\ (3x-2)(y+1) &= (3y-2)(x+1), \\ 3xy - 2y + 3x - 2 &= 3xy + 3y - 2x - 2, \\ 5x &= 5y. \end{aligned}$$

Od tod sledi, da je funkcija injektivna. Sedaj poskusimo izračunati njen inverz. To storimo tako, da v zvezi $y = f(x)$ zamenjamo x in y in nato poskusimo y izraziti eksplicitno.

$$\begin{aligned} x &= \frac{3y-2}{y+1}, \\ xy + x &= 3y - 2, \\ y(x-3) &= -x - 2, \\ y &= \frac{-x-2}{x-3}. \end{aligned}$$

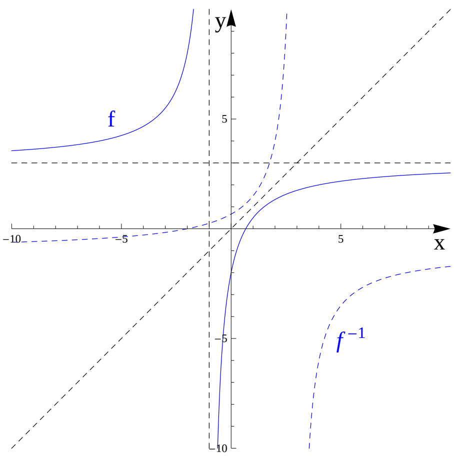
Predpis za inverzno funkcijo je tako enak

$$f^{-1}(x) = \frac{-x-2}{x-3}.$$

Inverz je definiran povsod razen v točki $x = 3$. To pomeni, da funkcija f določa bijekcijo

$$f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R} \setminus \{3\}.$$

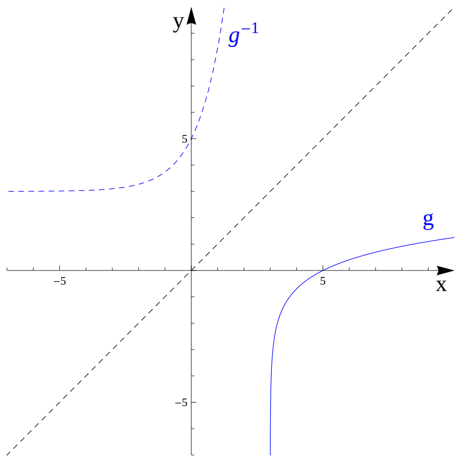
Grafa funkcij f in f^{-1} sta zrcalna glede na simetralo lihih kvadrantov.



Obravnavajmo sedaj še funkcijo $g(x) = \ln\left(\frac{x-3}{2}\right)$. Če hočemo, da bo definirana, mora ulomek ležati na intervalu $(0, \infty)$. To pomeni, da mora x zadoščati neenačbi

$$\frac{x-3}{2} > 0,$$

kar pomeni, da je
$$D_g = (3, \infty).$$
Pokažimo sedaj, da je funkcija g injektivna. V ta namen denimo, da je $g(x) = g(y)$ oziroma
$$\ln\left(\tfrac{x-3}{2}\right) = \ln\left(\tfrac{y-3}{2}\right).$$
Ker je ln injektivna funkcija, ga lahko pokrajšamo na obeh straneh zgornje enačbe, da dobimo
$$\tfrac{x-3}{2} = \tfrac{y-3}{2}.$$
Od tod pa sedaj zlahka izpeljemo, da je $x = y$. Funkcija g torej določa bijekcijo
$$g : (3, \infty) \to \mathbb{R}.$$
Izračunajmo še njen inverz:
$$\begin{aligned} x &= \ln\left(\tfrac{y-3}{2}\right), \\ e^x &= \tfrac{y-3}{2}, \\ y &= 2e^x + 3. \end{aligned}$$
Predpis za inverzno funkcijo je torej
$$g^{-1}(x) = 2e^x + 3.$$
Poglejmo še grafa.



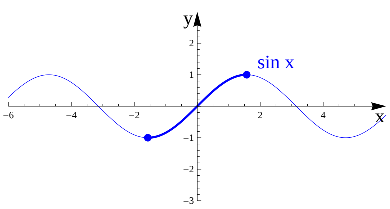
□

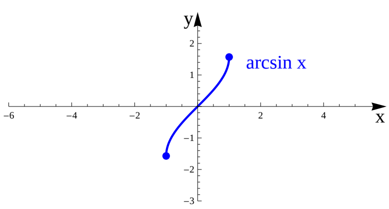
(6) Nariši grafe funkcij:

(a) $\sin(\arcsin x)$ in $\arcsin(\sin x)$.

(b) $\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} x)$ in $\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg} x)$.

Rešitev: (a) Poglejmo najprej grafa funkcij $\sin x$ in $\arcsin x$.





Funkcija $\sin x$ je liha in periodična s periodo 2π. Če hočemo definirati njen inverz, jo moramo najprej zožiti na interval, kjer je injektivna. Ponavadi vzamemo interval $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Tako zožena funkcija definira bijekcijo

$$\sin : [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}] \to [-1, 1].$$

Njen inverz je potem funkcija arkus sinus, ki je bijekcija

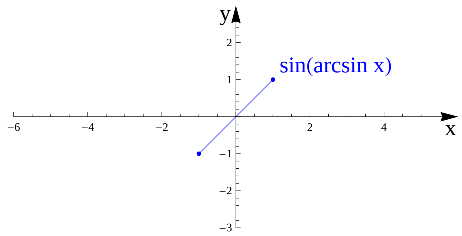
$$\arcsin : [-1, 1] \to [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}].$$

Označimo sedaj $f(x) = \sin(\arcsin x)$ in $g(x) = \arcsin(\sin x)$.

Funkcija f je definirana na $D_f = [-1, 1]$. Za vsak $x \in D_f$ pa velja

$$\sin(\arcsin x) = x.$$

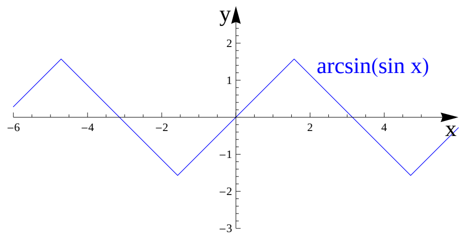
Graf funkcije f je torej kar zožitev identitete na interval $[-1, 1]$.



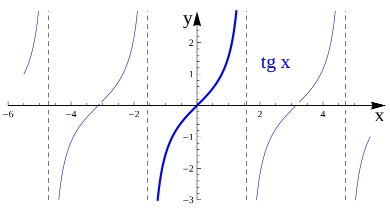
Funkcija g je po drugi strani definirana na $D_g = \mathbb{R}$, vendar pa enakost

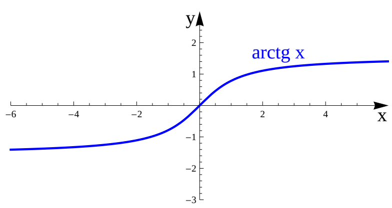
$$\arcsin(\sin x) = x$$

velja le za $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Graf funkcije g ima obliko trikotnega vala.



(b) Poglejmo sedaj še grafa funkcij $\operatorname{tg} x$ in $\operatorname{arc\,tg} x$.





Funkcija $\operatorname{tg} x$ je liha in periodična s periodo π, v točkah oblike $\frac{\pi}{2} + k\pi$ pa ima pole. Injektivna je na intervalu $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Tako zožena funkcija definira bijekcijo

$$\operatorname{tg} : (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}.$$

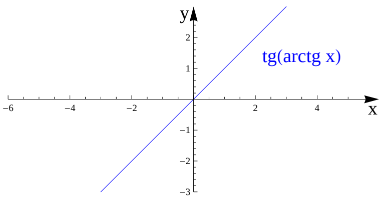
Njen inverz je funkcija arkus tangens, ki je bijekcija

$$\operatorname{arc\,tg} : \mathbb{R} \to (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}).$$

Označimo sedaj $f(x) = \operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} x)$ in $g(x) = \operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg} x)$.
Funkcija $\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} x)$ je definirana na celem $\mathbb{R}$, kjer velja

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} x) = x.$$

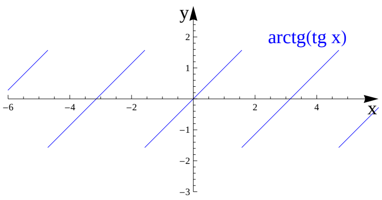
Graf funkcije $\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} x)$ je torej simetrala lihih kvadrantov



Funkcija $\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg} x)$ pa je definirana povsod, kjer je definiran tangens, enakost

$$\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg} x) = x$$

pa velja le za $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Graf funkcije $\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg} x)$ ima obliko žagastega vala.

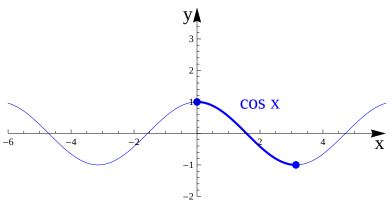


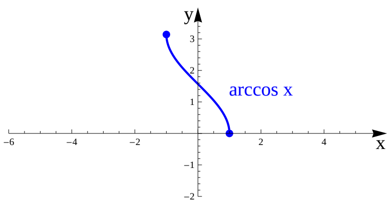
$\square$

(7) Dokaži enakost

$$\arccos x = \begin{cases} \arcsin\sqrt{1-x^2} & ; \ x \in [0,1], \\ \pi - \arcsin\sqrt{1-x^2} & ; \ x \in [-1,0]. \end{cases}$$

Rešitev: Tokrat poglejmo grafa funkcij $\cos x$ in $\arccos x$.





Funkcija $\cos x$ je soda in periodična s periodo 2π, injektivna pa je na intervalu $[0, \pi]$. Tako zožena funkcija definira bijekcijo

$$\cos : [0, \pi] \to [-1, 1].$$

Njen inverz je funkcija arkus kosinus

$$\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi].$$

To pomeni, da za vsak $\phi \in [0, \pi]$ velja

$$\arccos(\cos \phi) = \phi.$$

Vzemimo sedaj poljuben $x \in [0, 1]$. Potem ga lahko zapišemo v obliki $x = \cos \phi$ za enoličen $\phi \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Torej velja

$$\arccos x = \arccos(\cos \phi) = \phi.$$

Po drugi strani pa z uporabo forumule $\cos^2 \phi + \sin^2 \phi = 1$ dobimo

$$\sin \phi = \sqrt{1 - x^2}.$$

Ker je $\phi \in [0, \frac{\pi}{2}]$, pa od tod sledi, da je $\phi = \arcsin \sqrt{1 - x^2}$. Za $x \in [0, 1]$ torej velja

$$\arccos x = \arcsin \sqrt{1 - x^2}.$$

Poglejmo sedaj še primer, ko je $x \in [-1, 0]$. Potem je $x = \cos \phi$ za enoličen $\phi \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ in velja

$$\arccos x = \arccos(\cos \phi) = \phi.$$

Podobno kot prej velja tudi

$$\sin \phi = \sqrt{1 - x^2}.$$

Do razlike pa pride, ko na obeh straneh zgornje enačbe izračunamo arkus sinus. Pri prejšnji nalogi smo namreč spoznali, da za $\phi \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ velja

$$\arcsin(\sin \phi) = \pi - \phi.$$

Torej je $\pi - \phi = \arcsin \sqrt{1 - x^2}$ oziroma

$$\arccos x = \pi - \arcsin \sqrt{1 - x^2}.$$

□

(8) Za $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ naj bo $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$.

(a) Izračunaj definicijska območja D_{T_n}.

(b) Dokaži, da je T_n polinom stopnje n.

Rešitev: (a) Funkcija $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ je definirana povsod, kjer je definiran $\arccos$. Torej je

$$D_{T_n} = [-1, 1].$$

(b) Pri vrednostih $n = 0$ in $n = 1$ dobimo funkciji:

$$T_0(x) = \cos 0 = 1,$$
$$T_1(x) = \cos(\arccos x) = x.$$

Vidimo, da je T_0 konstantna funkcija, T_1 pa linearna funkcija. Z uporabo adicijske formule $\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$ lahko izpeljemo še, da je

$$T_2(x) = \cos(2 \arccos x) = 2\cos^2(\arccos x) - 1 = 2x^2 - 1.$$

Iz eksplicitnih izražav funkcij T_0, T_1 in T_2 bi že lahko postavili domnevo, da je T_n polinom stopnje n. Preden to domnevo dokažemo z indukcijo, bomo izpeljali rekurzivno zvezo

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x).$$

Z uporabo adicijskega izreka za kosinus dobimo:

$$\begin{aligned} T_{n+1}(x) &= \cos\left((n+1)\arccos x\right), \\ &= \cos(n\arccos x)\cos(\arccos x) - \sin(n\arccos x)\sin(\arccos x), \\ &= T_n(x)x - \sin(n\arccos x)\sin(\arccos x). \end{aligned}$$

Podobno dobimo:

$$\begin{aligned} T_{n-1}(x) &= \cos\left((n-1)\arccos x\right), \\ &= \cos(n\arccos x)\cos(\arccos x) + \sin(n\arccos x)\sin(\arccos x), \\ &= T_n(x)x + \sin(n\arccos x)\sin(\arccos x). \end{aligned}$$

Če ti dve enakosti seštejemo, dobimo rekurzivno zvezo

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x).$$

Denimo sedaj, da je T_n polinom stopnje n in T_{n-1} polinom stopnje $n-1$. Iz zgornje zveze potem takoj sledi, da je T_{n+1} polinom stopnje $n+1$. Izkaže se, da so funkcije T_{2k} sode, funkcije T_{2k+1} pa lihe. To lahko induktivno dokažemo z uporabo rekurzivne zveze. Kar se tiče vodilnega koeficienta, pa lahko opazimo, da se za vsakič, ko povečamo n za ena, pomnoži z 2. Vodilni koeficient polinoma T_n je torej 2^{n-1}.

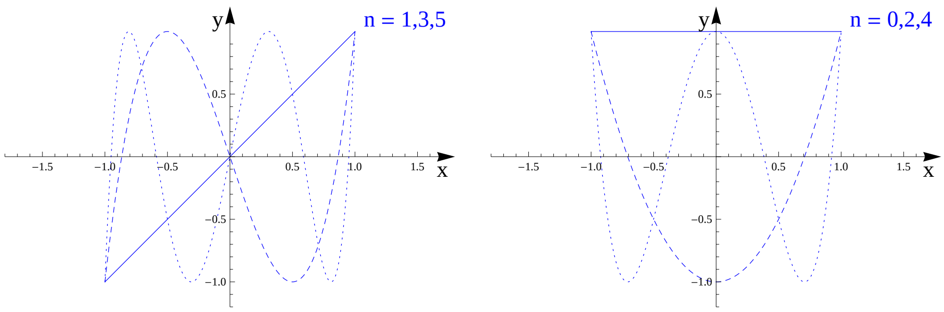
Opomba: Funkcijam T_n rečemo polinomi Čebiševa prve vrste. Pogosto se uporabljajo za raznorazne aproksimacije v numerični matematiki, imajo pa naslednji lastnosti:

- polinom T_n ima zalogo vrednosti na intervalu $[-1,1]$,
- vse ničle polinoma T_n so realne in ležijo na intervalu $[-1,1]$. Eksplicitno so to števila

  $$x_k = \cos\left(\frac{\pi(2k-1)}{2n}\right)$$

  za $k = 1, \ldots, n$.

Poglejmo še grafe nekaterih Čebiševih polinomov majhnih stopenj.



$\square$

(9) Hiperbolični sinus in kosinus sta definirana s predpisoma $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ in $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

(a) Dokaži, da je sh injektivna na $\mathbb{R}$ in izračunaj njeno inverzno funkcijo.

(b) Dokaži, da je ch injektivna na $[0, \infty)$ in izračunaj inverzno funkcijo te zožitve.

(c) Izpelji adicijske izreke za funkciji sh in ch.

Rešitev: (a) Hiperbolični sinus je liha funkcija. Najprej bomo pokazali, da je injektivna, nato pa izračunali njen inverz.

Pa denimo, da je $\operatorname{sh} x = \operatorname{sh} y$. Pokazati moramo, da od tod sledi $x = y$. Računajmo:

$$\begin{aligned}
\frac{e^x - e^{-x}}{2} &= \frac{e^y - e^{-y}}{2}, \\
e^x - e^y &= e^{-x} - e^{-y}, \\
e^x - e^y &= e^{-x-y}(e^y - e^x), \\
(e^x - e^y)(1 + e^{-x-y}) &= 0.
\end{aligned}$$

Desni oklepaj je pozitiven, zato mora veljati $e^x = e^y$. Iz injektivnosti eksponentne funkcije pa od tod sledi $x = y$. Hiperbolični sinus je torej injektivna funkcija. Ker je neomejena, liha in zvezna, od tod že sledi, da je bijekcija. Za izračun inverza pa najprej dobimo:

$$\begin{aligned}
x &= \frac{e^y - e^{-y}}{2}, \\
2x &= e^y - e^{-y}, \\
e^{2y} - 2xe^y - 1 &= 0.
\end{aligned}$$

Uvedimo novo spremenljivko $t = e^y$. Potem t zadošča kvadratni enačbi $t^2 - 2xt - 1 = 0$, ki ima rešitvi

$$t_{1,2} = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 + 4}}{2} = x \pm \sqrt{x^2 + 1}.$$

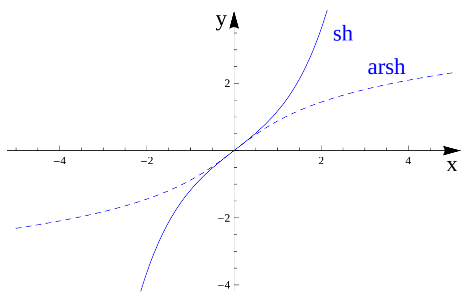
Ker mora biti $t = e^y$ pozitivno število, moramo izbrati rešitev s plusom, da dobimo

$$e^y = x + \sqrt{x^2 + 1}.$$

Od tod dobimo predpis za inverzno funkcijo hiperboličnega sinusa

$$\operatorname{arsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}),$$

ki ji rečemo area sinus hiperbolikus. Razlog za takšno ime bomo obrazložili kasneje, zaenkrat pa si poglejmo grafa funkcij sh in arsh. Obe sta lihi, zvezni bijekciji iz $\mathbb{R}$ v $\mathbb{R}$.



(b) Sedaj bomo obravnavali hiperbolični kosinus. Ker je ch soda funkcija, avtomatično ne more biti injektivna na celi realni osi. Je pa injektivna, če jo zožimo na interval $[0, \infty)$. To sledi iz enakosti:

$$
\begin{aligned}
\frac{e^x + e^{-x}}{2} &= \frac{e^y + e^{-y}}{2}, \\
e^x - e^y &= e^{-y} - e^{-x}, \\
e^x - e^y &= e^{-x-y}(e^x - e^y), \\
(e^x - e^y)(1 - e^{-x-y}) &= 0.
\end{aligned}
$$

Iz zadnje enakosti sledi, da je bodisi $x = y$ ali pa $x = -y$. Če se omejimo na nenegativna števila, je torej funkcija ch injektivna. Za izračun inverza podobno kot prej dobimo:

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{e^y + e^{-y}}{2}, \\
2x &= e^y + e^{-y}, \\
e^{2y} - 2xe^y + 1 &= 0.
\end{aligned}
$$

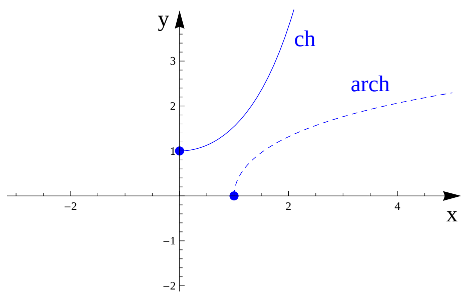
Z uvedbo nove spremenljivke $t = e^y$ pridemo do rešitev

$$
t_{1,2} = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 - 4}}{2} = x \pm \sqrt{x^2 - 1}.
$$

V tem primeru sta v principu možni obe izbiri predznakov. Če pa iščemo inverz zožitve hiperboličnega kosinusa na pozitivna števila, moramo izbrati plus. Tako dobimo predpis za inverzno funkcijo hiperboličnega kosinusa

$$
\operatorname{arch} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}),
$$

ki ji rečemo area kosinus hiperbolikus. Funkcija ch definira bijekcijo $\operatorname{ch} : [0, \infty) \to [1, \infty)$, njen inverz pa bijekcijo $\operatorname{arch} : [1, \infty) \to [0, \infty)$. Poglejmo še oba grafa.



(c) Za hiperbolične funkcije veljajo podobne formule kot za kotne funkcije. Podrobneje si bomo pogledali tri izmed njih:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x &= 1, \\
\operatorname{sh}(x + y) &= \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} y \operatorname{ch} x, \\
\operatorname{ch}(x + y) &= \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y - \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y.
\end{aligned}
$$

Najprej vzemimo poljuben $x \in \mathbb{R}$. Potem velja

$$
\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} = 1.
$$

Za poljubna $x, y \in \mathbb{R}$ velja:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} y \operatorname{ch} x &= \frac{1}{4}\left(e^x - e^{-x}\right)\left(e^y + e^{-y}\right) + \frac{1}{4}\left(e^y - e^{-y}\right)\left(e^x + e^{-x}\right), \\
&= \frac{1}{4}\left(e^{x+y} + e^{x-y} - e^{y-x} - e^{-x-y}\right) + \frac{1}{4}\left(e^{x+y} + e^{y-x} - e^{x-y} - e^{-x-y}\right), \\
&= \frac{1}{4}\left(2e^{x+y} - 2e^{-x-y}\right), \\
&= \operatorname{sh}(x+y).
\end{aligned}$$

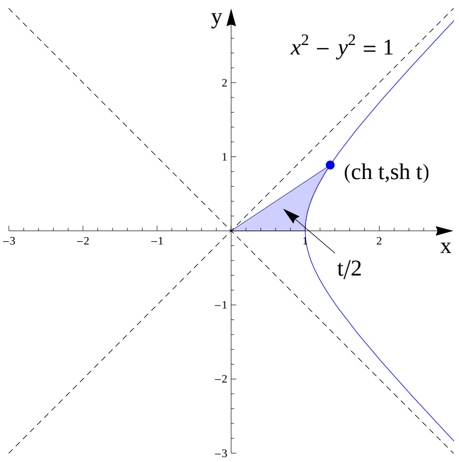
Podobno dobimo:

$$\begin{aligned}
\operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y &= \frac{1}{4}\left(e^x + e^{-x}\right)\left(e^y + e^{-y}\right) + \frac{1}{4}\left(e^x - e^{-x}\right)\left(e^y - e^{-y}\right), \\
&= \frac{1}{4}\left(e^{x+y} + e^{x-y} + e^{y-x} + e^{-x-y}\right) + \frac{1}{4}\left(e^{x+y} - e^{x-y} - e^{y-x} + e^{-x-y}\right), \\
&= \operatorname{ch}(x+y).
\end{aligned}$$

Če vzamemo $x = y$, dobimo formuli za dvojne kote:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sh} 2x &= 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x, \\
\operatorname{ch} 2x &= \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x.
\end{aligned}$$

Opomba: Za konec omenimo še razlog, zakaj te funkcije imenujemo hiperbolične funkcije. Iz enakosti $\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1$ sledi, da lahko s predpisom $\vec{r}(t) = (\operatorname{ch} t, \operatorname{sh} t)$ parametriziramo desni krak hiperbole $x^2 - y^2 = 1$. Parameter t pri tem ustreza dvakratniku predznačene ploščine lika, ki ga opišejo zveznice hiperbole s koordinatnim izhodiščem pri parametrih med 0 in t.



Od tod tudi izvira beseda 'area' v imenu inverznih hiperboličnih funkcij.

Razloga, zakaj so hiperbolične funkcije tako podobne kotnim funkcijam, zaenkrat še ne moremo razložiti. Pri študiju kompleksnih funkcij pa bomo videli, da te podobnosti niso zgolj naključne. □

(10) Dokaži, da obstaja natanko ena neničelna funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, za katero velja:

$$\begin{aligned}
f(x+y) &= f(x) + f(y), \\
f(xy) &= f(x)f(y)
\end{aligned}$$

za vse $x, y \in \mathbb{R}$.

Rešitev: Pogojema:

$$f(x+y) = f(x) + f(y),$$
$$f(xy) = f(x)f(y)$$

rečemo aditivnost in multiplikativnost. Hitro lahko uganemo, da je poleg ničelne funkcije tudi funkcija s predpisom $f(x) = x$ aditivna in multiplikativna. V nadaljevanju bomo pokazali, da je to edina funkcija, ki zadošča pogojem naloge.

Za začetek vstavimo nekaj vrednosti v funkcijski zvezi. Če vstavimo $x = y = 0$ v prvo zvezo, dobimo $f(0) = 2f(0)$, od koder sledi, da je

$$f(0) = 0.$$

Podobno lahko vstavimo $x = y = 1$ v drugo zvezo, da dobimo $f(1) = f(1)^2$. Sedaj imamo dve možnosti. Lahko je $f(1) = 1$ ali pa $f(1) = 0$. Če bi bilo $f(1) = 0$, bi od tod sledilo, da je $f(x) = f(x \cdot 1) = f(x)f(1) = 0$ za vsak $x \in \mathbb{R}$. Ker nas ta možnost ne zanima, mora biti $f(1) = 1$. Za poljubno naravno število n mora nadalje veljati

$$f(n+1) = f(n) + f(1) = f(n) + 1.$$

Z upoštevanjem, da je $f(1) = 1$, lahko sedaj z indukcijo pokažemo, da za vsako naravno število n velja

$$f(n) = n.$$

V naslednjem koraku bomo analogno enakost dokazali za ulomke. Če namreč vzamemo $x = n$ in $y = \frac{1}{n}$, nam druga zveza da pogoj

$$1 = f(1) = f(n \cdot \tfrac{1}{n}) = f(n)f(\tfrac{1}{n}) = nf(\tfrac{1}{n}).$$

Torej je

$$f(\tfrac{1}{n}) = \tfrac{1}{n}$$

za vsako naravno število n. Če je tudi m naravno število, pa velja

$$f(\tfrac{m}{n}) = f(m \cdot \tfrac{1}{n}) = f(m)f(\tfrac{1}{n}) = \tfrac{m}{n}.$$

Naj bo sedaj $y = -x$. Potem velja $f(0) = f(x) + f(-x)$ oziroma

$$f(-x) = -f(x),$$

kar pomeni, da je f liha funkcija. Skupaj s prejšnjo enakostjo lahko na tem mestu sklepamo, da velja

$$f(q) = q$$

za vsako racionalno število q.

Možnosti, ki jih lahko pokrijemo z direktnim vstavljanjem vrednosti v zvezi smo sedaj bolj ali manj izčrpali. Če bi vedeli, da je f zvezna funkcija, bi že lahko sklepali, da je $f(x) = x$ za vsak $x \in \mathbb{R}$. Vendar pa tega nismo predpostavili, ker lahko do rezultata pridemo po drugi poti. Pokazali bomo namreč, da je f naraščajoča funkcija in od tod sklepali, da je identiteta.

Vzemimo poljuben $x \geq 0$. Ker ga lahko zapišemo v obliki $x = y^2$, od tod sledi

$$f(x) = f(y^2) = f(y)^2 \geq 0.$$

Naj bo sedaj $x \geq y$. Potem je $x - y \geq 0$ in posledično $f(x-y) \geq 0$. Če uporabimo aditivnost in lihost preslikave f, dobimo implikacijo

$$x \geq y \implies f(x) \geq f(y),$$

ki pove, da je f naraščajoča funkcija.

Iz dejstva, da je f naraščajoča funkcija in da je $f(q) = q$ za vsak $q \in \mathbb{Q}$, bomo sedaj izpeljali, da je $f(x) = x$ za vsak $x \in \mathbb{R}$. Pa denimo, da za nek x velja $x < f(x)$. Potem lahko najdemo neko racionalno število q, da velja

$$x < q < f(x).$$

Torej je $x < q$ in $q < f(x)$. Če na prvi neenakosti uporabimo f, dobimo $f(x) < f(q) = q$, kar pa je v nasprotju z drugo neenakostjo. Torej ne more biti $x < f(x)$. Podobno lahko pokažemo, da ne more biti $x > f(x)$, kar pa pomeni, da je

$$f(x) = x$$

edina možnost. $\square$