Linearni funkcionali

Klemen Šivic

16. junij 2022

1 Dualna baza

Spomnimo se: Če je V končnorazsežen vektorski prostor nad obsegom $\mathcal{O}$, potem je linearen funkcional na V linearna preslikava iz V v $\mathcal{O}$. Množico $\mathcal{L}(V,\mathcal{O})$, ki jo sestavljajo vsi linearni funkcionali na V, običajno označimo z V^*. Imenujemo jo *dualni prostor* prostora V. Vemo že, da je V^* vektorski prostor nad $\mathcal{O}$ in da v matrični predstavitvi linearnih preslikav linearnim funkcionalom ustrezajo vrstice. Če je $\dim V = n$, je torej $V^* \cong \mathcal{O}^{1\times n}$, zato je

$$\dim V^* = \dim \mathcal{O}^{1\times n} = n = \dim \mathcal{O}^n = \dim V,$$

torej sta prostora V in V^* izomorfna.

Če v V izberemo neko bazo, potem v V^* obstaja odlikovana baza, ki jo imenujemo dualna baza.

Definicija 1.1. Naj bo $\mathcal{B}_V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ baza prostora V. Množica funkcionalov $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \subseteq V^*$ je *dualna baza* za bazo $\mathcal{B}_V$, kadar velja $\varphi_i(v_j) = \delta_{ij} := \begin{cases} 1; & i = j \\ 0; & i \neq j \end{cases}$ za vsaka $i, j = 1, \ldots, n$. δ_{ij} se imenuje *Kroneckerjev delta.*

Iz definicije ne sledi niti obstoj niti enoličnost dualne baze. Da dualna baza obstaja in je z bazo $\mathcal{B}_V$ enolično določena, bomo dokazali v naslednji trditvi. Prav tako bomo v tej trditvi upravičili ime dualne baze, t.j. dokazali bomo, da je (v primeru, ko je V končnorazsežen) dualna baza res baza dualnega prostora.

Trditev 1.2. *Dualna baza za bazo $\mathcal{B}_V$ vedno obstaja, je z bazo $\mathcal{B}_V$ enolično določena in je res baza prostora V^*.*

Dokaz. Linearen funkcional je enolično določen s svojimi vrednostmi na bazi. Če torej za linearen funkcional φ_i velja $\varphi_i(v_j) = \delta_{ij}$ za $j = 1, \ldots, n$ in je $x = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$ razvoj poljubnega elementa $x \in V$ po bazi, potem je

$$\varphi_i(x) = \varphi_i(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 \varphi_i(v_1) + \cdots + \alpha_n \varphi_i(v_n) = \alpha_i.$$

Ker je razvoj po bazi enoličen, sledi, da je vrednost preslikave φ_i v vsakem vektorju prostora V enolično določena, kar pomeni, da je φ_i enolično določen.

Za dokaz obstoja pa za vsak $i = 1, \ldots, n$ definirajmo $\varphi_i(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n) = \alpha_i$. Ker vsak element prostora V lahko enolično razvijemo po bazi, je s tem predpisom dobro definirana preslikava $\varphi_i \colon V \to \mathcal{O}$. Z računom hitro lahko preverimo, da je to linearen funkcional. Očitno tudi velja $\varphi_i(v_j) = \delta_{ij}$ za $i = 1, \ldots, n$. S tem je dokaz obstoja dualne baze končan.

Dokažimo še, da je množica $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ res baza prostora V^*. Ker je $\dim V^* = \dim V = n$, zadošča dokazati, da so funkcionali $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ linearno neodvisni. Pa naj bo $\alpha_1\varphi_1 + \cdots + \alpha_n\varphi_n = 0$ za neke $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathcal{O}$. Po definiciji to pomeni, da je $\alpha_1\varphi_1(x) + \cdots + \alpha_n\varphi_n(x) = 0$ za vsak $x \in V$. Če namesto x vstavimo v_i, vidimo, da za vsak $i = 1, \ldots, n$ velja

$$0 = \alpha_1\varphi_1(v_i) + \cdots + \alpha_n\varphi_n(v_i) = \alpha_1\delta_{1i} + \cdots + \alpha_n\delta_{ni} = \alpha_i.$$

S tem je linearna neodvisnost množice $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ dokazana. $\square$

Opomba 1.3. V zgornjem dokazu smo upoštevali, da že vemo, da je $\dim V^* = \dim V$ in je za dokaz, da je $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ baza prostora V^*, dovolj dokazati linearno neodvisnost. Da je ta množica ogrodje prostora V^*, pa ni težko dokazati. Če je namreč $f \in V^*$ poljuben funkcional in $x = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n \in V$ poljuben vektor, potem je

$$\begin{aligned} f(x) &= f\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i f(v_i) = \sum_{i,j=1}^n f(v_i)\alpha_j \varphi_i(v_j) = \sum_{i=1}^n f(v_i)\varphi_i\left(\sum_{j=1}^n \alpha_j v_j\right) \\ &= \sum_{i=1}^n f(v_i)\varphi_i(x) = \left(\sum_{i=1}^n f(v_i)\varphi_i\right) x, \end{aligned}$$

kjer smo upoštevali, da je $\varphi_i(v_j) = \delta_{ij}$ za vsaka i in j. Dokazali smo torej, da je $f = \sum_{i=1}^n f(v_i)\varphi_i$. Pri tem je seveda $f(v_i) \in \mathcal{O}$ za vsak i. Ker je bil $f \in V^*$ poljuben funkcional, od tod sledi, da je $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ ogrodje prostora V^*. Na ta način lahko alternativno dokažemo, da je $\dim V^* = \dim V$ in posledično $V^* \cong V$.

Naslednja trditev nam pove, da se dualna baza lepo obnaša pri matričnih operacijah.

Trditev 1.4. *Naj bo $\mathcal{B}_V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ baza prostora V in $\mathcal{B}_{V^*} = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ njej dualna baza. Naj bo $x \in V$ in $f \in V^*$. Vektor x in funkcional f razvijmo po bazah: $x = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$, $f = \beta_1\varphi_1 + \cdots + \beta_n\varphi_n$. Označimo $a = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$ in $b = [\beta_1 \cdots \beta_n]$. Potem je $f(x) = ba$.*

Povedano z besedami, vednost $f(x)$ je enaka "skalarnemu produktu"vrstice, ki pripada funkcionalu f (glede na dualno bazo), in stolpca, ki pripada vektorju x.

Dokaz. Trditev sledi iz naslednjega računa, kjer upoštevamo, da je $\varphi_i(v_j) = \delta_{ij}$.

$$f(x) = \left(\sum_{i=1}^n \beta_i\varphi_i\right)\left(\sum_{j=1}^n \alpha_j v_j\right) = \sum_{i,j=1}^n \beta_i\alpha_j\varphi_i(v_j) = \sum_{i=1}^n \beta_i\alpha_i = [\beta_1 \cdots \beta_n]\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = ba.$$

□

Primer 1.5. Na primeru si oglejmo, kako dualno bazo poiščemo v praksi. Naj bo $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ in $v_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$. Poiščimo dualno bazo k bazi $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ prostora $\mathbb{R}^3$.

Naj bo dualna baza množica $\mathcal{B}^* = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$, kjer je $\varphi_i = [a_{i1}\, a_{i2}\, a_{i3}]$ za $i = 1, 2, 3$. Pogoji $\varphi_i(v_j) = \delta_{ij}$ so ekvivalentni naslednjim enačbam.

$$\begin{aligned} a_{11} - a_{13} &= 1 \\ a_{21} - a_{23} &= 0 \\ a_{31} - a_{33} &= 0 \\ 2a_{12} + a_{13} &= 0 \\ 2a_{22} + a_{23} &= 1 \\ 2a_{32} + a_{33} &= 0 \\ 2a_{11} + 3a_{12} &= 0 \\ 2a_{21} + 3a_{22} &= 0 \\ 2a_{31} + 3a_{32} &= 1. \end{aligned}$$

Dobimo sistem 9 linearnih enačb z 9 neznankami, ki pa je sestavljen iz 3 sistemov s po 3 enačbami, vsi trije sistemi pa imajo isto matriko sistema. Še več, če označimo $A = [a_{ij}]$ in $B = [v_1, v_2, v_3]$, je zgornji sistem ekvivalenten matrični enačbi $B^T A^T = I$. Sledi $A = B^{-1}$, kar izračunamo po običajnem postopku za računanje inverza:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & -2 \end{array}\right]$$
$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right].$$

Torej je $A = B^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -4 \\ -3 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, od koder sledi $\varphi_1 = [-3\ 2\ -4]$, $\varphi_2 = [-3\ 2\ -3]$ in $\varphi_3 = [2\ -1\ 2]$.

Pokažimo primer uporabe dualne baze.

Primer 1.6. Naj bodo $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ paroma različni in $b_0, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ poljubni. Vemo, da obstaja natanko en polinom $p \in \mathbb{R}[X]$ stopnje največ n, za katerega je $p(a_0) = b_0, p(a_1) = b_1, \ldots, p(a_n) = b_n$. Kako bi tak polinom poiskali?

Način, ki se ga najprej spomnimo, je naslednji: Polinom $p(X)$ razpišemo po koeficientih kot $p(X) = c_0 + c_1X + \cdots + c_nX^n$. Potem enačbe $p(a_0) = b_0, \ldots, p(a_n) = b_n$ podajajo sistem $n+1$ enačb v $n+1$ neznanih koeficientih $c_0, \ldots, c_n$. Z reševanjem sistema dobimo neznane koeficiente c_i in s tem polinom $p(X)$.

Način, opisan v prejšnjem odstavku, zna biti precej zamuden. V tem primeru bomo poiskali rešitev brez pretiranega računanja. Pomagali si bomo z dualno bazo.

Naj bo V vektorski prostor realnih polinomov stopnje največ n. Spomnimo se, da je ta prostor $(n+1)$-razsežen. Če je $a \in \mathbb{R}$ poljubno število, je s predpisom $p \mapsto p(a)$ definiran linearen funkcional na V (kar preverite sami!). Za vsak $i = 0, 1, \ldots, n$ je torej s predpisom $\varphi_i(p) = p(a_i)$ definiran linearen funkcional $\varphi\colon V \to \mathbb{R}$. Iščemo torej tak polinom $p \in V$, za katerega bo $\varphi_i(p) = b_i$ za vsak $i = 0, 1, \ldots, n$. Predpostavimo zdaj, da znamo poiskati bazo $\{p_0, p_1, \ldots, p_n\}$ prostora V, da bo za vsaka $i, j = 0, 1, \ldots, n$ veljalo $\varphi_i(p_j) = \delta_{ij}$ in naj bo $p = \alpha_0p_0 + \alpha_1p_1 + \cdots + \alpha_np_n$ razvoj polinoma p po tej bazi. Potem za vsak $i = 0, 1, \ldots, n$ velja

$$b_i = \varphi_i(p) = \varphi_i(\alpha_0p_0 + \cdots + \alpha_np_n) = \alpha_0\varphi_i(p_0) + \cdots + \alpha_n\varphi_i(p_n) = \alpha_i.$$

Sledi $p(X) = b_0p_0(X) + \cdots + b_np_n(X)$ (in v posebnem primeru je polinom p enolično določen).

Preostane nam torej le še, da poiščemo tako bazo $\mathcal{B} = \{p_0, p_1, \ldots, p_n\}$ prostora V, da bo $\varphi_i(p_j) = \delta_{ij}$ za vsaka $i, j = 0, 1, \ldots, n$, torej da bo $\mathcal{B}^* = \{\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ dualna baza k bazi $\mathcal{B}$ (čeprav zaenkrat še ne vemo niti, da je $\mathcal{B}^*$ res baza prostora V^*). Če je $i \neq j$, je $0 = \varphi_i(p_j) = p_j(a_i)$. Z besedami povedano: števila $a_0, \ldots, a_{j-1}, a_{j+1}, \ldots, a_n$ so ničle polinoma $p_j(X)$. Ker so te ničle vse različne, stopnja polinoma $p_j(X)$ pa je največ n, sledi, da je vsak polinom p_j oblike

$$p_j(X) = C_j(X - a_0) \cdots (X - a_{j-1})(X - a_{j+1}) \cdots (X - a_n),$$

kjer je $C_j \in \mathbb{R}$ neka konstanta. Zdaj pa upoštevajmo še, da je $\varphi_j(p_j) = 1$. Sledi

$$1 = \varphi_j(p_j) = p_j(a_j) = C_1(a_j - a_0) \cdots (a_j - a_{j-1})(a_j - a_{j+1}) \cdots (a_j - a_n),$$

od koder dobimo

$$C_j = \frac{1}{(a_j - a_0) \cdots (a_j - a_{j-1})(a_j - a_{j+1}) \cdots (a_j - a_n)}$$

in

$$p_j(X) = \frac{(X-a_0)\cdots(X-a_{j-1})(X-a_{j+1})\cdots(X-a_n)}{(a_j-a_0)\cdots(a_j-a_{j-1})(a_j-a_{j+1})\cdots(a_j-a_n)} \tag{1}$$

za vsak $j = 0, 1, \ldots, n$.

Dokazali smo že, da je $\varphi_i(p_j) = \delta_{ij}$ za $i, j = 0, 1, \ldots, n$, če so polinomi p_j definirani s predpisi (1). Dokazati moramo še, da je $\mathcal{B} = \{p_0, p_1, \ldots, p_n\}$ baza prostora V. Ker ima množica $\mathcal{B}$ $n+1$ elementov, zadošča dokazati, da je linearno neodvisna. Pa naj bo $\alpha_0 p_0 + \cdots + \alpha_n p_n = 0$ za neke $\alpha_0, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. To pomeni, da za vsak $x \in \mathbb{R}$ velja

$$\alpha_0 p_0(x) + \alpha_1 p_1(x) + \cdots + \alpha_n p_n(x) = 0.$$

Naj bo zdaj $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ poljuben in v zgornjo enakost namesto x vstavimo a_i. Dobimo

$$0 = \alpha_0 p_0(a_i) + \alpha_1 p_1(a_i) + \cdots + \alpha_n p_n(a_i) = \alpha_0 \varphi_i(p_0) + \alpha_1 \varphi_i(p_1) + \cdots + \alpha_n \varphi_i(p_n) = \alpha_i.$$

Ker to velja za vsak i, je množica $\mathcal{B}$ linearno neodvisna, torej baza prostora V. Vemo že, da je $\varphi_i(p_j) = \delta_{ij}$ za vsaka i in j, zato je po Trditvi 1.2 množica $\mathcal{B}^* = \{\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ res baza prostora V^*, in je dualna baza bazi $\mathcal{B}$. Kot smo pokazali zgoraj, je iskani polinom enak

$$p(X) = \sum_{i=0}^{n} b_j p_j(X) = \sum_{i=0}^{n} b_j \frac{(X-a_0)\cdots(X-a_{j-1})(X-a_{j+1})\cdots(X-a_n)}{(a_j-a_0)\cdots(a_j-a_{j-1})(a_j-a_{j+1})\cdots(a_j-a_n)}.$$

Tej formuli pravimo *Lagrangeva interpolacija*.

2 Dualna preslikava

Definicija 2.1. Naj bosta V, W končnorazsežna vektorska prostora nad $\mathcal{O}$ in $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$. Če je $\varphi \in W^*$, potem kompozitum $\varphi \circ \mathcal{A}$ slika iz V v $\mathcal{O}$. Poleg tega je kompozitum linearnih preslikav linearen, torej je $\varphi \circ \mathcal{A}$ linearen funkcional na V. Preslikava $\mathcal{A}^d \colon W^* \to V^*$, definirana s predpisom $\mathcal{A}^d(\varphi) = \varphi \circ \mathcal{A}$, se imenuje *dualna preslikava* preslikave $\mathcal{A}$.

Trditev 2.2. *$\mathcal{A}^d$ je linearna preslikava, torej $\mathcal{A}^d \in \mathcal{L}(W^*, V^*)$.*

Dokaz. Z upoštevanjem znanih lastnosti kompozituma linearnih preslikav hitro vidimo, da za vsaka $\alpha, \beta \in \mathcal{O}$ in vsaka $\varphi, \psi \in W^*$ velja

$$\mathcal{A}^d(\alpha\varphi + \beta\psi) = (\alpha\varphi + \beta\psi) \circ \mathcal{A} = \alpha\varphi \circ \mathcal{A} + \beta\psi \circ \mathcal{A} = \alpha\mathcal{A}^d(\varphi) + \beta\mathcal{A}^d(\psi).$$

□

Trditev 2.3. *Naj bodo U, V, W vektorski prostori nad $\mathcal{O}$, $\lambda \in \mathcal{O}$, $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{L}(U, V)$ in $\mathcal{C} \in \mathcal{L}(V, W)$. Potem velja $(\mathcal{A} + \mathcal{B})^d = \mathcal{A}^d + \mathcal{B}^d$, $(\lambda\mathcal{A})^d = \lambda\mathcal{A}^d$ in $(\mathcal{C}\mathcal{A})^d = \mathcal{A}^d\mathcal{C}^d$.*

Dokaz. Spet upoštevamo znane lastnosti kompozituma linearnih preslikav in za poljuben $\varphi \in V^*$ izračunajmo

$$(\mathcal{A} + \mathcal{B})^d\varphi = \varphi \circ (\mathcal{A} + \mathcal{B}) = \varphi \circ \mathcal{A} + \varphi \circ \mathcal{B} = \mathcal{A}^d(\varphi) + \mathcal{B}^d(\varphi)$$

in

$$(\lambda\mathcal{A})^d\varphi = \varphi \circ (\lambda\mathcal{A}) = \lambda\varphi \circ \mathcal{A} = \lambda\mathcal{A}^d(\varphi),$$

za poljuben $\varphi \in W^*$ pa

$$(\mathcal{C}\mathcal{A})^d\varphi = \varphi \circ \mathcal{C}\mathcal{A} = (\varphi \circ \mathcal{C}) \circ \mathcal{A} = \mathcal{C}^d(\varphi) \circ \mathcal{A} = \mathcal{A}^d(\mathcal{C}^d(\varphi)).$$

Od tod sledijo enakosti v trditvi. □

Izrek 2.4. *Če preslikavi $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$ glede na bazi $\mathcal{B}_V$ in $\mathcal{B}_W$ prostorov V in W pripada matrika A, potem preslikavi $\mathcal{A}^d \in \mathcal{L}(W^*, V^*)$ glede na dualni bazi baz $\mathcal{B}_W$ in $\mathcal{B}_V$ pripada matrika A^T.*

Dokaz. Naj bo $\mathcal{B}_V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ baza prostora V, $\mathcal{B}_W = \{w_1, \ldots, w_m\}$ baza prostora W, $\mathcal{B}_{V^*} = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ dualna baza k bazi $\mathcal{B}_V$ in $\mathcal{B}_{W^*} = \{\psi_1, \ldots, \psi_m\}$ dualna baza k bazi $\mathcal{B}_W$. Naj bo $A = [a_{ij}] = \mathcal{A}_{\mathcal{B}_W}^{\mathcal{B}_V}$ in $B = [b_{ij}] = (\mathcal{A}^d)_{\mathcal{B}_{V^*}}^{\mathcal{B}_{W^*}}$. Po definiciji to pomeni, da je $\mathcal{A}v_j = \sum_{i=1}^m a_{ij} w_i$ za vsak $j = 1, \ldots, n$ in

$$\psi_j \circ \mathcal{A} = \mathcal{A}^d \psi_j = \sum_{i=1}^n b_{ij} \varphi_i \, \text{za vsak} \, j = 1, \ldots, m.$$

Če uporabimo to enakost za poljuben vektor v_k, dobimo

$$\psi_j(\mathcal{A}v_k) = (\psi_j \circ \mathcal{A})v_k = \sum_{i=1}^n b_{ij} \varphi_i(v_k) = \sum_{i=1}^n b_{ij} \delta_{ik} = b_{kj} \tag{2}$$

za vsak $j = 1, \ldots, m$ in vsak $k = 1, \ldots, n$, kjer smo upoštevali, da je $\mathcal{B}_{V^*}$ dualna baza k bazi $\mathcal{B}_V$. Zdaj pa upoštevamo še, da je $\mathcal{B}_{W^*}$ dualna baza k bazi $\mathcal{B}_W$, ter enakost (2), in dobimo

$$b_{kj} = \psi_j(\mathcal{A}v_k) = \psi_j\left(\sum_{i=1}^m a_{ik} w_i\right) = \sum_{i=1}^m a_{ik} \psi_j(w_i) = \sum_{i=1}^m a_{ik} \delta_{ji} = a_{jk}$$

za vsaka $j = 1, \ldots, m$ in $k = 1, \ldots, n$. Torej je $B = A^T$. □

Iz izreka in zadnje trditve med drugim sledijo znane enakosti za transponiranje matrik $(A + B)^T = A^T + B^T$, $(\lambda A)^T = \lambda A^T$ in $(CA)^T = A^T C^T$.

3 Reprezentacija linearnih funkcionalov na vektorskih prostorih s skalarnim produktom

Naj bo V končnorazsežen vektorski prostor. Vemo, da sta prostora V in V^* izomorfna. To smo dokazali tako, da smo ugotovili, da imata bazi enakih moči. Izomorfizem med V in V^*, ki smo ga poiskali, je bil odvisen od izbire baz. V primeru, ko je V evklidski prostor, bomo poiskali izomorfizem med V in V^*, ki ne bo odvisen od izbire baz. Enako bo veljalo v primeru unitarnega prostora, le da v tem primeru ne bomo dobili izomorfizma, ampak poševni izomorfizem. Poleg tega bomo videli, da vsak linearen funkcional na prostoru s skalarnim produktom lahko predstavimo kot skalarni produkt s fiksnim vektorjem.

V celem poglavju naj bo $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ in V končnorazsežen vektorski prostor nad $\mathbb{F}$.

Za $z \in V$ definirajmo preslikavo $\varphi_z \colon V \to \mathbb{F}$ s predpisom $\varphi_z(x) = \langle x, z \rangle$.

Lema 3.1. *φ_z je linearen funkcional.*

Dokaz.

$$\varphi_z(\alpha x + \beta y) = \langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle = \alpha \varphi_z(x) + \beta \varphi_z(y).$$

□

Kot je bilo že zgoraj omenjeno, bo naš cilj dokazati, da je vsak linearen funkcional na V oblike φ_z za nek $z \in V$. Zaradi zgornje leme lahko definiramo preslikavo $\Phi \colon V \to V^*$ s predpisom $\Phi(z) = \varphi_z$.

Izrek 3.2. *Preslikava $\Phi \colon V \to V^*$, definirana s predpisom $\Phi(z) = \varphi_z \colon x \mapsto \langle x, z \rangle$, je* poševni izomorfizem *(t.j. aditivna in poševno homogena bijekcija).*

V posebnem primeru, če je V evklidski prostor, je Φ izomorfizem.

Dokaz. Za vsaka $z, w \in V$, vsak $\lambda \in \mathbb{F}$ in poljuben $x \in V$ velja

$$\Phi(z+w)x = \varphi_{z+w}(x) = \langle x, z+w \rangle = \langle x, z \rangle + \langle x, w \rangle = \varphi_z(x) + \varphi_w(x) = \Phi(z)x + \Phi(w)x$$

in

$$\Phi(\lambda z)x = \varphi_{\lambda z}(x) = \langle x, \lambda z \rangle = \overline{\lambda}\langle x, z \rangle = \overline{\lambda}\varphi_z(x) = \overline{\lambda}\Phi(z)x.$$

To pomeni, da je Φ aditiven (t.j. $\Phi(z+w) = \Phi(z) + \Phi(w)$) in poševno homogen (t.j. $\Phi(\lambda z) = \overline{\lambda}\Phi(z)$).

Dokažimo, da je Φ injektivna preslikava. Recimo, da je $\Phi(z) = \Phi(w)$ za neka $z, w \in V$. To pomeni, da je $\varphi_z = \varphi_w$, oziroma $\langle x, z \rangle = \langle x, w \rangle$ za vsak $x \in V$. Ekvivalentno, $\langle x, z - w \rangle = 0$ za vsak $x \in V$. Vektor $z - w$ je torej pravokoten na vse vektorje prostora V, kar vemo, da je možno le, če je $z - w = 0$. Torej je $w = z$.

Dokažimo še surjektivnost. Naj bo $\varphi \in V^*$. Iščemo vektor $z \in V$, da bo $\varphi = \varphi_z$. Če je $\varphi = 0$, očitno lahko vzamemo kar $z = 0$. V nadaljevanju naj bo torej φ neničelni funkcional. Označimo $n = \dim V$. Ker je funkcional φ neničeln in slika v enorazsežen prostor $\mathbb{F}$, je surjektiven. Torej je $\dim \operatorname{im} \varphi = 1$ in dimenzijska enačba nam da $\dim \ker \varphi = n - 1$. Označimo $U = \ker \varphi$. Ker je $\dim U = n - 1$, je $\dim U^\perp = 1$. To pomeni, da obstaja neničeln vektor $v \in V$, da je $U^\perp = \mathbb{F} \cdot v = \{\lambda v; \lambda \in \mathbb{F}\}$. Predpostavimo lahko, da je $||v|| = 1$.

Naj bo zdaj $x \in V$ poljuben. Ker je $V = U \oplus U^\perp$, obstajata enolično določena $y \in U = \ker \varphi$ in $\lambda \in \mathbb{F}$, da je

$$x = y + \lambda v. \tag{3}$$

Enačbo (3) skalarni pomnožimo z v ter pri tem upoštevajmo, da je $v \in U^\perp$ in zato $\langle y, v \rangle = 0$. Dobimo

$$\langle x, v \rangle = \langle y + \lambda v, v \rangle = \langle y, v \rangle + \lambda ||v||^2 = \lambda. \tag{4}$$

Zdaj pa na enakosti (3) uporabimo še funkcional φ. Pri tem upoštevajmo, da je $y \in \ker \varphi$, in enakost (4). Dobimo

$$\varphi(x) = \varphi(y + \lambda v) = \varphi(y) + \lambda\varphi(v) = \langle x, v \rangle \varphi(v) = \langle x, \overline{\varphi(v)} v \rangle, \tag{5}$$

kjer smo na koncu upoštevali poševno homogenost skalarnega produkta v drugem faktorju, saj je $\varphi(v) \in \mathbb{F}$. Iz enakosti (5) zdaj vidimo, da je $\varphi(x)$ enak skalarnemu produktu vektorja x s fiksnim vektorjem $\overline{\varphi(v)}v$ (ki ni odvisen od x, ampak samo od funkcionala φ). Če torej definiramo $z = \overline{\varphi(v)}v$, bo $\varphi(x) = \langle x, z \rangle$ za vsak $x \in V$, torej bo $\varphi = \varphi_z = \Phi(z)$. To dokazuje še surjektivnost preslikave Φ.

□

Iz zgoraj definirane bijektivnosti preslikave Φ očitno sledi naslednja posledica.

Posledica 3.3 (Rieszov izrek o reprezentaciji linearnih funkcionalov na prostoru s skalarnim produktom)**.** *Naj bo V končnorazsežen vektorski prostor s skalarnim produktom. Potem za vsak $\varphi \in V^*$ obstaja natanko en $z \in V$, da je $\varphi(x) = \langle x, z \rangle$ za vsak $x \in V$.*

Primeri bodo na vajah.