Linearne preslikave na prostorih s skakarnim produktom

Klemen Šivic

22. maj 2020

Ogledali si bomo nekatere pomembne razrede linearnih preslikav med prostori s skalarnim produktom. Vsi vektorski prostori bodo končnorazsežni.

1 Hermitsko adjungirana preslikava

Spomnimo se: Če je $\mathcal{A}\colon U \to V$ linearna preslikava (med vektorskima prostoroma nad istim obsegom), potem lahko definiramo dualno preslikavo $\mathcal{A}^d\colon V^* \to U^*$ s predpisom $\mathcal{A}^d(\varphi) = \varphi \circ \mathcal{A}$. Naj bosta zdaj U in V vektorska prostora s skalarnima produktoma $\langle \cdot, \cdot \rangle_U$ in $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$. Potem vemo, da obstajata poševna izomorfizma $\Phi_U\colon U \to U^*$ in $\Phi_V\colon V \to V^*$, da je $\Phi_U(u) = (x \mapsto \langle x, u\rangle_U)$ za vsak $u \in U$ in $\Phi_V(v) = (x \mapsto \langle x, v\rangle_V)$ za vsak $v \in V$. Definirajmo $\mathcal{A}^* = \Phi_U^{-1} \circ \mathcal{A}^d \circ \Phi_V$. Preslikava $\mathcal{A}^*$ očitno slika iz V v U. Imenujemo jo *hermitsko adjungirana preslikava* preslikave $\mathcal{A}$. To je torej (enolična) preslikava, za katero komutira diagram

$$\begin{array}{ccccc} & V & \xrightarrow{\mathcal{A}^*} & U & \\ \Phi_V & \downarrow & & \downarrow & \Phi_U \\ & V^* & \xrightarrow{\mathcal{A}^d} & U^*. & \end{array}$$

Namesto $(\mathcal{A}^*)^*$ pišemo kar $\mathcal{A}^{**}$.

Lema 1.1. *Inverz poševnega izomorfizma je poševno homogen.*

Dokaz. Naj bo $F\colon U \to V$ poševni izomorfizem med vektorskima prostoroma U in V. Naj bosta $x \in V$ in $\alpha \in \mathbb{F}$ poljubna. Naj bo $y = F^{-1}(x)$ (ki je enolično določen, saj je F bijektiven). Potem zaradi poševne homogenosti preslikave F velja $F(\overline{\alpha}y) = \alpha F(y) = \alpha x$ in zato $\overline{\alpha}F^{-1}(x) = \overline{\alpha}y = F^{-1}(\alpha x)$. □

Trditev 1.2. *$\mathcal{A}^*$ je linearna preslikava.*

Dokaz. Aditivnost je očitna, saj je $\mathcal{A}^*$ kompozitum aditivnih preslikav. Homogenost pa izračunamo po enakosti

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^*(\lambda x) &= \Phi_U^{-1}(\mathcal{A}^d(\Phi_V(\lambda x))) = \Phi_U^{-1}(\mathcal{A}^d(\overline{\lambda}\Phi_V(x))) = \Phi_U^{-1}(\overline{\lambda}\mathcal{A}^d(\Phi_V(x))) \\ &= \lambda\Phi_U^{-1}(\mathcal{A}^d(\Phi_V(x))) = \lambda\mathcal{A}^* x, \end{aligned}$$

kjer smo upoštevali homogenost preslikave $\mathcal{A}^d$ in poševno homogenost preslikav Φ_U in Φ_V. □

Preslikavo $\mathcal{A}$ bomo karakterizirali s pomočjo skalarnega produkta. Pri tem bomo za dokaz enoličnosti potrebovali naslednjo lemo.

Lema 1.3. *Če za linearni preslikavi $\mathcal{B}, \mathcal{C} \in \mathcal{L}(V, U)$ velja $\langle x, \mathcal{B}y\rangle = \langle x, \mathcal{C}y\rangle$ za vsak $x \in U$ in vsak $y \in V$, potem je $\mathcal{B} = \mathcal{C}$.*

Dokaz. Naj bo $y \in V$ poljuben. Potem po predpostavki velja $\langle x, \mathcal{B}y - \mathcal{C}y \rangle = 0$ za vsak $x \in U$. Če vzamemo $x = \mathcal{B}y - \mathcal{C}y$, sledi $||\mathcal{B}y - \mathcal{C}y||^2 = 0$, torej $\mathcal{B}y = \mathcal{C}y$. Ker je bil $y \in V$ poljuben, je lema s tem dokazana. $\square$

Trditev 1.4. *Naj bo $\mathcal{A}\colon U \to V$ linearna preslikava. Potem je $\mathcal{A}^*$ edina linearna preslikava iz V v U, ki zadošča enakosti $\langle \mathcal{A}x, y \rangle_V = \langle x, \mathcal{A}^* y \rangle_U$ za vsaka $x \in U$ in $y \in V$.*

Dokaz. Dokazati je treba dvoje: da je $\langle \mathcal{A}x, y \rangle_V = \langle x, \mathcal{A}^* y \rangle_U$ za vsaka $x \in U$ in $y \in V$, in da je $\mathcal{A}^*$ edina linearna preslikava s to lastnostjo.

Najprej dokažimo, da je $\langle \mathcal{A}x, y \rangle_V = \langle x, \mathcal{A}^* y \rangle_U$ za vsaka $x \in U$ in $y \in V$. S pomočjo definicij preslikav Φ_U, Φ_V, $\mathcal{A}^d$ in $\mathcal{A}^*$ izračunamo

$$\begin{aligned}
\langle x, \mathcal{A}^* y \rangle_U &= (\Phi_U(\mathcal{A}^* y))x = \Big(\Phi_U(\Phi_U^{-1} \circ \mathcal{A}^d \circ \Phi_V(y))\Big)\, x = \Big(\mathcal{A}^d(\Phi_V(y)\Big)\, x = (\Phi_V(y) \circ \mathcal{A})\, x \\
&= (\Phi_V(y))(\mathcal{A}x) = \langle \mathcal{A}x, y \rangle_V.
\end{aligned}$$

Dokažimo še enoličnost. Recimo, da je $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(V, U)$ preslikava, za katero velja $\langle \mathcal{A}x, y \rangle_V = \langle x, \mathcal{B}y \rangle_U$ za vsaka $x \in U$ in $y \in V$. Potem je $\langle x, \mathcal{A}^* y \rangle_U = \langle x, \mathcal{B}y \rangle_U$ za vsak $x \in U$ in vsak $y \in V$. Po prejšnji lemi od tod sledi $\mathcal{B} = \mathcal{A}^*$. $\square$

Primer 1.5. Naj bo $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ neničeln vektor in naj bo linearna preslikava $\mathcal{A}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definirana s predpisom $\mathcal{A}\vec{x} = \vec{a} \times \vec{x}$. Poiščimo $\mathcal{A}^*$.

V tem primeru pišimo skalarni produkt s piko, kot smo bili navajeni v $\mathbb{R}^3$. Po prejšnji trditvi mora veljati

$$\vec{x} \cdot (\mathcal{A}^* \vec{y}) = (\mathcal{A}\vec{x}) \cdot \vec{y} = (\vec{a} \times \vec{x}) \cdot \vec{y}$$

za vsaka $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$. Preslikavo $\mathcal{A}^*$ poiščemo tako, da desno stran preoblikujemo tako, da bomo imeli skalarni produkt z vektorjem $\vec{x}$. To naredimo tako, da opazimo, da imamo opravka z mešanim produktom in nato upoštevamo cikličnost skalarnega produkta. Torej je

$$\vec{x} \cdot (\mathcal{A}^* \vec{y}) = [\vec{a}, \vec{x}, \vec{y}] = [\vec{y}, \vec{a}, \vec{x}] = (\vec{y} \times \vec{a}) \cdot \vec{x}$$

za vsaka $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$. Torej je $\mathcal{A}^* \vec{y} = \vec{y} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{y}$ za vsak $\vec{y} \in \mathbb{R}^3$. Sledi: $\mathcal{A}^* = -\mathcal{A}$.

Posledica 1.6. *Če sta $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{L}(U, V)$ in $\mathcal{C} \in \mathcal{L}(W, U)$, kjer so U, V, W vektorski prostori s skalarnimi produkti (nad istim obsegom $\mathbb{F}$), potem velja:*

1. $\langle \mathcal{A}^* x, y \rangle_U = \langle x, \mathcal{A}y \rangle_V$ *za vsaka $x \in V$ in $y \in U$.*
2. $(\mathcal{A}^*)^* = \mathcal{A}$. *Če je $U = V$, je torej preslikava $\mathcal{A} \mapsto \mathcal{A}^*$ involucija (preslikava, ki je sama sebi inverzna).*
3. $(\mathcal{A} + \mathcal{B})^* = \mathcal{A}^* + \mathcal{B}^*$.
4. $(\alpha\mathcal{A})^* = \overline{\alpha}\mathcal{A}^*$ *za vsak $\alpha \in \mathbb{F}$.*
5. $(\mathcal{A}\mathcal{C})^* = \mathcal{C}^* \mathcal{A}^*$.

Dokaz.

1. $\langle \mathcal{A}^* x, y \rangle_U = \overline{\langle y, \mathcal{A}^* x \rangle_U} = \overline{\langle \mathcal{A}y, x \rangle_V} = \langle x, \mathcal{A}y \rangle_V$.
2. Po prejšnji točki je $\langle \mathcal{A}^* x, y \rangle_U = \langle x, \mathcal{A}y \rangle_V$ za vsaka $x \in V$ in $y \in U$, po prejšnji trditvi pa $\langle \mathcal{A}^* x, y \rangle_U = \langle x, \mathcal{A}^{**} y \rangle_V$ za vsaka $x \in V$ in $y \in U$. Po zgornji lemi je zato $\mathcal{A}^{**} = \mathcal{A}$.
3. Za vsaka $x \in U$ in $y \in V$ velja

$$\begin{aligned}
\langle x, (\mathcal{A} + \mathcal{B})^* y \rangle_U &= \langle (\mathcal{A} + \mathcal{B})x, y \rangle_V = \langle \mathcal{A}x, y \rangle_V + \langle \mathcal{B}x, y \rangle_V = \langle x, \mathcal{A}^* y \rangle_U + \langle x, \mathcal{B}^* y \rangle_U \\
&= \langle x, (\mathcal{A}^* + \mathcal{B}^*)y \rangle_U,
\end{aligned}$$

zato po lemi velja $(\mathcal{A} + \mathcal{B})^* = \mathcal{A}^* + \mathcal{B}^*$.

4. Podobno kot v prejšnji točki za vsaka $x \in U$ in $y \in V$ velja

$$\langle x, (\alpha\mathcal{A})^* y\rangle_U = \langle(\alpha\mathcal{A})x, y\rangle_V = \alpha\langle\mathcal{A}x, y\rangle_V = \alpha\langle x, \mathcal{A}^* y\rangle_U = \langle x, \overline{\alpha}\mathcal{A}^* y\rangle_U,$$

   torej je $(\alpha\mathcal{A})^* = \overline{\alpha}\mathcal{A}^*$.

5. Kot zgoraj za vsaka $x \in W$ in $y \in V$ velja

$$\langle x, (\mathcal{A}\mathcal{C})^* y\rangle_W = \langle\mathcal{A}\mathcal{C}x, y\rangle_V = \langle\mathcal{C}x, \mathcal{A}^* y\rangle_U = \langle x, \mathcal{C}^*\mathcal{A}^* y\rangle_W,$$

   od koder sledi $(\mathcal{A}\mathcal{C})^* = \mathcal{C}^*\mathcal{A}^*$.

□

Naslednji izrek nam pove, kako določimo matriko preslikave $\mathcal{A}^*$, če poznamo matriko preslikave $\mathcal{A}$.

Izrek 1.7. *Naj bosta U in V oba evklidska ali oba unitarna prostora in naj bo $\mathcal{A} = \mathcal{L}(U, V)$. Naj bo $\mathcal{B}_U = \{u_1, \ldots, u_m\}$ ortonormirana baza prostora U, $\mathcal{B}_V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ pa ortonormirana baza prostora V, in naj bo $A = [a_{ij}]_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq m}$ matrika, ki pripada preslikavi $\mathcal{A}$ glede na bazi $\mathcal{B}_U$ in $\mathcal{B}_V$. Potem velja:*

1. *Za vsaka $i = 1, \ldots, n$ in $j = 1, \ldots, m$ velja $a_{ij} = \langle\mathcal{A}u_j, v_i\rangle_V$.*

2. *Preslikavi $\mathcal{A}^*$ glede na bazi $\mathcal{B}_V$ in $\mathcal{B}_U$ pripada matrika $A^H = [b_{ij}]_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n}$, kjer je $b_{ij} = \overline{a_{ji}}$ za vsaka i in j. Matriki $A^H = \overline{A^T}$ pravimo* hermitska transponiranka *matrike A.*

Dokaz. 1. Po definiciji matrike linearne preslikave za vsak j velja $\mathcal{A}u_j = \sum_{k=1}^m a_{kj}v_k$. To enakost skalarno pomnožimo z v_i, upoštevamo, da je baza $\mathcal{B}_V$ ortonormirana, in dobimo $\langle\mathcal{A}u_j, v_i\rangle_V = \sum_{k=1}^m \langle a_{kj}v_k, v_i\rangle_V = a_{ij}$.

2. S pomočjo 1. točke in Trditve 1.4 za vsaka i in j izračunamo

$$b_{ij} = \langle\mathcal{A}^* v_j, u_i\rangle_U = \langle v_j, \mathcal{A}u_i\rangle_V = \overline{\langle\mathcal{A}u_i, v_j\rangle_V} = \overline{a_{ji}}.$$

□

Opombe 1.8. 1. Če sta prostora U in V realna, matriko adjungirane preslikave torej dobimo tako, da matriko preslikave transponiramo.

2. Opozorimo, da v izreku predpostavimo, da sta bazi obeh prostorov ortonormirani. Če imamo bazi, ki nista ortonormirani, je treba najprej po Gram-Schmidtovem postopku poiskati novi bazi in uporabiti prehod na novi (ortonormirani) bazi, šele potem lahko uporabimo izrek.

3. Če matriko $A \in \mathbb{F}^{n\times m}$ identificiramo z linearno preslikavo $A\colon \mathbb{F}^m \to \mathbb{F}^n$, ki vektor x preslika v Ax, potem je A^H matrika preslikave A^* glede na standardni bazi prostorov $\mathbb{F}^n$ in $\mathbb{F}^m$, ki sta seveda ortonormirani.

Posledica 1.9. $\operatorname{rank}\mathcal{A}^* = \operatorname{rank}\mathcal{A}$.

Za konec tega poglavja dokažimo še nekaj lastnosti hermitsko adjungirane preslikave, ki jih bomo potrebovali v nadaljevanju.

Trditev 1.10. *Naj bo $\mathcal{A}\colon U \to V$ linearna preslikava med vektorskima prostoroma s skalarnima produktoma. Potem je $U = \ker\mathcal{A} \oplus \operatorname{im}\mathcal{A}^*$ (ortogonalna vsota) in $\operatorname{im}\mathcal{A}^* = (\ker\mathcal{A})^\perp$.*

Dokaz. Dovolj je dokazati zadnjo enakost, saj je $U = \ker \mathcal{A} \oplus (\ker \mathcal{A})^\perp$.

Naj bo $x \in \ker \mathcal{A}$ in $y \in \operatorname{im} \mathcal{A}^*$. Potem obstaja $z \in V$, da je $y = \mathcal{A}^* z$. Zato je

$$\langle x, y\rangle_U = \langle x, \mathcal{A}^* z\rangle_U = \langle \mathcal{A}x, z\rangle_U = 0,$$

kar pomeni, da je $\operatorname{im} \mathcal{A}^* \subseteq (\ker \mathcal{A})^\perp$.

Za dokaz obratne vsebovanosti pa naj bo $u \in (\operatorname{im} \mathcal{A}^*)^\perp$. To pomeni, da je $\langle u, \mathcal{A}^* v\rangle_U = 0$ za vsak $v \in V$, in zato $\langle \mathcal{A}u, v\rangle_V = 0$ za vsak $v \in V$. To pa pomeni, da je $\mathcal{A}u = 0$ oziroma $u \in \ker \mathcal{A}$. Dokazali smo torej, da je $(\operatorname{im} \mathcal{A}^*)^\perp \subseteq \ker \mathcal{A}$. Upoštevamo še, da se pri uporabi ortogonalnega komplementa vsebovanost obrne, in dobimo $(\ker \mathcal{A})^\perp \subseteq (\operatorname{im} \mathcal{A}^*)^{\perp\perp} = \operatorname{im} \mathcal{A}^*$, kar je bilo treba dokazati. $\square$

Primer 1.11. Naj bo $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Potem je $\ker A = \operatorname{Lin}(e_1)$ in $\operatorname{im} A = \operatorname{Lin}(e_1)$. Čeprav je $\dim \ker A + \dim \operatorname{im} A = 2$ (kar vemo tudi iz dimenzijske enačbe), ni $\mathbb{F}^2 = \ker A \oplus \operatorname{im} A$, saj jedro in slika nimata trivialnega preseka. Če na $\mathbb{F}^2$ vzamemo standardni skalarni produkt, je $A^* = A^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ in je $\ker A^* = \operatorname{im} A^* = \operatorname{Lin}(e_2)$. Potem pa je očitno $\operatorname{im} A^* = (\ker A)^\perp$ in $\mathbb{F}^2 = \ker A \oplus \operatorname{im} A^*$.

Posledica 1.12. $\ker \mathcal{A}^* = (\operatorname{im} \mathcal{A})^\perp$.

Dokaz. Prejšnjo trditev uporabimo za $\mathcal{A}^*$ namesto za $\mathcal{A}$. $\square$

Trditev 1.13. *Naj bo $\mathcal{A}$ endomorfizem prostora V in U podprostor prostora V. Potem je U invarianten za $\mathcal{A}$ natanko takrat, ko je $U^\perp$ invarianten za $\mathcal{A}^*$.*

Dokaz. Najprej predpostavimo, da je podprostor U invarianten za $\mathcal{A}$. Naj bo $x \in U^\perp$ poljuben. Za vsak $y \in U$ je $\mathcal{A}y \in U$, zato je $\langle \mathcal{A}y, x\rangle = 0$. Potem pa je tudi $\langle y, \mathcal{A}^* x\rangle = 0$. Ker je to res za vsak $y \in U$, je $\mathcal{A}^* x \in U^\perp$. Sledi, da je $U^\perp$ invarianten podprostor za $\mathcal{A}^*$.

Obratno, če je $U^\perp$ invarianten podprostor za $\mathcal{A}^*$, potem je po že dokazanem $U = U^{\perp\perp}$ invarianten podprostor za $\mathcal{A} = \mathcal{A}^{**}$. $\square$

Primer 1.14. Naj bo $A = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$. Potem vidimo, da je $U = \operatorname{Lin}(e_1)$ invarianten podprostor za A. Spet imejmo standardni skalarni produkt na $\mathbb{F}^3$. Potem je $U^\perp = \operatorname{Lin}(e_2, e_3)$ in $A^* = A^T = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$. Vidimo, da je $U^\perp$ invarianten podprostor za A^*.

2 Normalni endomorfizmi

Naj bo V evklidski ali unitaren prostor in $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$. Vemo, da se da $\mathcal{A}$ diagonalizirati natanko takrat, ko obstaja baza za V, sestavljena iz lastnih vektorjev endomorfizma $\mathcal{A}$. V prostorih s skalarnim produktom pa je pomembno tudi, kdaj se da endomorfizem $\mathcal{A}$ diagonalizirati v ortonormirani bazi, torej kdaj obstaja ortonormirana baza prostora V, sestavljena iz lastnih vektorjev endomorfizma $\mathcal{A}$. Recimo, da taka ortonormirana baza obstaja in naj bo A pripadajoča diagonalna matrika. Ker je bila baza, v kateri smo zapisali matriko, ortonormirana, je A^H matrika, ki pripada endomorfizmu $\mathcal{A}^*$ glede na isto bazo. Matrika A^H je seveda tudi diagonalna, in ker diagonalne matrike komutirajo, je $A^H A = AA^H$. Zato je tudi $\mathcal{A}^*\mathcal{A} = \mathcal{A}\mathcal{A}^*$.

Definicija 2.1. Endomorfizem $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ je *normalen*, kadar je $\mathcal{A}^*\mathcal{A} = \mathcal{A}\mathcal{A}^*$. Matrika $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ je *normalna*, kadar je $A^H A = AA^H$.

Normalnemu endomorfizmu glede na ortonormirano bazo seveda pripada normalna matrika. Če baza ni ortonormirana, pa to ni več res.

Iz razmisleka pred definicijo normalnosti sledi:

Posledica 2.2. *Vsak endomorfizem, ki se ga da diagonalizirati v ortonormirani bazi, je normalen.*

Cilj tega poglavja bo dokazati obrat te posledice. Še prej pa si oglejmo nekaj lastnosti normalnih endomorfizmov.

Trditev 2.3. *Endomorfizem $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ je normalen natanko takrat, ko je $\langle \mathcal{A}^*x, \mathcal{A}^*y\rangle = \langle \mathcal{A}x, \mathcal{A}y\rangle$ za vsaka $x, y \in V$.*

Dokaz. Vemo že, da je $\langle \mathcal{A}^*x, \mathcal{A}^*y\rangle = \langle x, \mathcal{A}\mathcal{A}^*y\rangle$ in $\langle \mathcal{A}x, \mathcal{A}y\rangle = \langle x, \mathcal{A}^*\mathcal{A}y\rangle$. Enakost $\langle \mathcal{A}^*x, \mathcal{A}^*y\rangle = \langle \mathcal{A}x, \mathcal{A}y\rangle$ je torej ekvivalentna enakosti $\langle x, \mathcal{A}\mathcal{A}^*y\rangle = \langle x, \mathcal{A}^*\mathcal{A}y\rangle$. Ta enakost za vse $x, y \in V$ pa je po Lemi 1.3 ekvivalentna $\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A}$. □

Posledica 2.4. *Naj bo $\mathcal{A}$ normalen endomorfizem prostora V. Potem velja:*

1. $||\mathcal{A}^*x|| = ||\mathcal{A}x||$ *za vsak* $x \in V$.
2. $\ker \mathcal{A}^* = \ker \mathcal{A}$.
3. *Endomorfizem* $\mathcal{A} - \alpha\,\mathrm{id}_V$ *je normalen za vsak* $\alpha \in \mathbb{F}$.
4. *Za* $\alpha \in \mathbb{F}$ *in* $x \in V$ *velja:* $\mathcal{A}x = \alpha x \Leftrightarrow \mathcal{A}^*x = \overline{\alpha}x$.
5. $\sigma(\mathcal{A}^*) = \overline{\sigma(\mathcal{A})} = \{\overline{\lambda}; \lambda \in \sigma(\mathcal{A})\}$.
6. *Lastna vektorja, ki pripadata različnima lastnima vrednostima endomorfizma $\mathcal{A}$, sta pravokotna.*

Dokaz.

1. Sledi iz zgornje trditve za $y = x$.
2. Sledi direktno iz prejšnje točke, ob upoštevanju pozitivne definitnosti skalarnega produkta.
3. Ob upoštevanju normalnosti endomorfizma $\mathcal{A}$ sledi

$$\begin{aligned}(\mathcal{A} - \alpha\,\mathrm{id}_V)^*(\mathcal{A} - \alpha\,\mathrm{id}_V) &= (\mathcal{A}^* - \overline{\alpha}\,\mathrm{id}_V)(\mathcal{A} - \alpha\,\mathrm{id}_V) = \mathcal{A}^*\mathcal{A} - \alpha\mathcal{A}^* - \overline{\alpha}\mathcal{A} + |\alpha|^2\mathrm{id}_V \\ &= \mathcal{A}\mathcal{A}^* - \alpha\mathcal{A}^* - \overline{\alpha}\mathcal{A} + |\alpha|^2\mathrm{id}_V = (\mathcal{A} - \alpha\,\mathrm{id}_V)(\mathcal{A} - \alpha\,\mathrm{id}_V)^*.\end{aligned}$$

4. Vemo, da je $\mathcal{A}x = \alpha x$ natanko takrat, ko je $x \in \ker(\mathcal{A} - \alpha\,\mathrm{id}_V)$. Po 3. točki je $\mathcal{A} - \alpha\,\mathrm{id}_V$ normalen endomorfizem, zato je po 2. točki vsebovanost $x \in \ker(\mathcal{A} - \alpha\,\mathrm{id}_V)$ ekvivalentna $x \in \ker(\mathcal{A} - \alpha\,\mathrm{id}_V)^* = \ker(\mathcal{A}^* - \overline{\alpha}\,\mathrm{id}_V)$. To pa je ekvivalentno enakosti $\mathcal{A}^*x = \overline{\alpha}x$.
5. Sledi neposredno iz prejšnje točke.
6. Naj bo $\mathcal{A}x_1 = \lambda_1 x_1$ in $\mathcal{A}x_2 = \lambda_2 x_2$, kjer je $\lambda_1 \neq \lambda_2$. S pomočjo 4. točke izračunamo

$$\lambda_1\langle x_1, x_2\rangle = \langle \lambda_1 x_1, x_2\rangle = \langle \mathcal{A}x_1, x_2\rangle = \langle x_1, \mathcal{A}^*x_2\rangle = \langle x_1, \overline{\lambda_2}x_2\rangle = \lambda_2\langle x_1, x_2\rangle.$$

Ker je po predpostavki $\lambda_1 \neq \lambda_2$, sledi $\langle x_1, x_2\rangle = 0$.

□

Izrek 2.5. *Naj bo $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ normalen endomorfizem. Potem velja:*

1. *Če je $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, potem se da $\mathcal{A}$ diagonalizirati v ortonormirani bazi.*

2. *Če je $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ in ima karakteristični polinom $\Delta_{\mathcal{A}}(\lambda)$ vse ničle realne, potem se da $\mathcal{A}$ diagonalizirati v ortonormirani bazi.*

Dokaz. Obe točki bomo dokazali naenkrat, in sicer z indukcijo na $\dim V$. Če je $\dim V = 1$, izrek očitno velja.

Naj bo zdaj $n \geq 1$, predpostavimo, da izrek velja za vse n-razsežne vektorske prostore s skalarnim produktom (in vse njihove normalne endomorfizme) in naj bo $\dim V = n+1$. Po predpostavki ima polinom $\Delta_{\mathcal{A}}(\lambda)$ vse ničle v obsegu $\mathbb{F}$, ne glede na to, ali imamo realni ali kompleksni primer. Torej ima endomorfizem $\mathcal{A}$ nek lastni vektor $v_1 \in V$. Predpostavimo lahko, da je $||v_1|| = 1$. Ortogonalni komplement $v_1^{\perp}$ tega vektorja je n-razsežen vektorski prostor s skalarnim produktom. Ker je lastni podprostor $\mathbb{F} \cdot v_1$ invarianten za $\mathcal{A}$, je njegov ortogonalni komplement $v_1^{\perp}$ po Trditvi 1.13 invarianten za $\mathcal{A}^*$.

Dokažimo, da je podprostor $v_1^{\perp}$ invarianten tudi za $\mathcal{A}$. Naj bo λ_1 lastna vrednost endomorfizma $\mathcal{A}$, ki pripada lastnemu vektorju v_1. Po 4. točki prejšnje posledice je $\mathcal{A}^* v_1 = \overline{\lambda_1} v_1$, kar pomeni, da je vektorski podprostor $\mathbb{F} \cdot v_1$ invarianten tudi za $\mathcal{A}^*$. Spet uporabimo Trditev 1.13 in ugotovimo, da je podprostor $v_1^{\perp}$ invarianten za $\mathcal{A}$.

Dokazali smo, da je podprostor $v_1^{\perp}$ invarianten za $\mathcal{A}$ in za $\mathcal{A}^*$. Zožitvi teh dveh endomorfizmov na $v_1^{\perp}$ sta zato endomorfizma podprostora $v_1^{\perp}$ (t.j. sta linearni preslikavi, ki slikata nazaj v $v_1^{\perp}$). Zožitev $\mathcal{A}|_{v_1^{\perp}}$ je seveda tudi normalen endomorfizem in njegov karakteristični polinom ima vse ničle v $\mathbb{F}$. Po indukcijski predpostavki zato obstaja ortonormirana baza $\{v_2, \ldots v_{n+1}\}$ prostora $v_1^{\perp}$, v kateri se da zožitev $\mathcal{A}|_{v_1^{\perp}}$ diagonalizirati. Potem pa je $\{v_1, v_2, \ldots, v_{n+1}\}$ ortonormirana baza prostora V, v kateri je matrika endomorfizma $\mathcal{A}$ diagonalna. □

Posledica 2.6. *Za matriko $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ velja $A^H A = A A^H$ natanko takrat, ko v $\mathbb{C}^n$ obstaja ortonormirana baza iz lastnih vektorjev matrike A.*

Izrek 2.7 (Schurov izrek)**.** *Naj bo V unitaren prostor in $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$. Potem obstaja ortonormirana baza prostora V, v kateri je matrika, ki pripada endomorfizmu $\mathcal{A}$, zgornje trikotna.*

Ideja dokaza. Jordanovo bazo za $\mathcal{A}$ ortogonaliziramo po Gram-Schmidtovem postopku in jo normiramo. Dobimo ortonormirano bazo, v kateri je matrika, ki pripada endomorfizmu $\mathcal{A}$, zgornje trikotna. □

3 Sebi adjungirani endomorfizmi

Definicija 3.1. Endomorfizem $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ je *sebi adjungiran*, kadar je $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$.

Očitno je vsak sebi adjungiran endomorfizem normalen.

Naj bo A matrika, ki pripada endomorfizmu $\mathcal{A}$ glede na neko ortonormirano bazo. Potem je $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$ natanko takrat, ko je $A^H = A$.

Definicija 3.2. Matrika $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ je *hermitska*, kadar je $A^H = A$. Matrika $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je *simetrična*, kadar je $A^T = A$.

Zgoraj smo torej dokazali, da glede na ortonormirano bazo sebi adjungiranim endomorfizmom pripadajo hermitske (nad $\mathbb{C}$) oziroma simetrične (nad $\mathbb{R}$) matrike.

Trditev 3.3. *Endomorfizem $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ je sebi adjungiran natanko takrat, ko velja $\langle \mathcal{A}x, y \rangle = \langle x, \mathcal{A}y \rangle$ za vse $x, y \in V$.*

Dokaz. Če je $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$, potem (po Trditvi 1.4) seveda za vsaka $x, y \in V$ velja

$$\langle \mathcal{A}x, y \rangle = \langle x, \mathcal{A}^* y \rangle = \langle x, \mathcal{A}y \rangle.$$

Obratno, če je $\langle \mathcal{A}x, y \rangle = \langle x, \mathcal{A}y \rangle$ za vsaka $x, y \in V$, potem je tudi $\langle x, \mathcal{A}^* y \rangle = \langle x, \mathcal{A}y \rangle$ za vsaka $x, y \in V$. Po Lemi 1.3 pa od tod sledi $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$. □

Trditev 3.4. *Naj bo endomorfizem $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ sebi adjungiran. Če velja $\langle \mathcal{A}x, x\rangle = 0$ za vsak $x \in V$, potem je $\mathcal{A} = 0$.*

Dokaz. Po predpostavki trditve za vsaka $x, y \in V$ velja

$$0 = \langle \mathcal{A}(x+y), x+y\rangle = \langle \mathcal{A}x, x\rangle + \langle \mathcal{A}x, y\rangle + \langle \mathcal{A}y, x\rangle + \langle \mathcal{A}y, y\rangle = \langle \mathcal{A}x, y\rangle + \langle y, \mathcal{A}x\rangle,$$

kjer smo v zadnji enakosti upoštevali še, da je $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$. Zdaj pa v zgornjo enakost vstavimo $y = \mathcal{A}x$. Za vsak $x \in V$ potem dobimo $0 = 2||\mathcal{A}x||^2$, torej $\mathcal{A}x = 0$. To pa pomeni, da je $\mathcal{A}$ ničelna preslikava. $\square$

Izrek 3.5. *Vse ničle karakterističnega polinoma sebi adjungiranega endomorfizma so realne.*

Dokaz. Naj bo najprej $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. Če je $\Delta_{\mathcal{A}}(\alpha) = 0$, potem je α lastna vrednost endomorfizma $\mathcal{A}$, torej obstaja neničelni vektor $v \in V$, da je $\mathcal{A}v = \alpha v$. Ker je $\mathcal{A}$ sebi adjungiran endomorfizem, je normalen, zato po 4. točki Posledice 2.4 velja $\overline{\alpha} v = \mathcal{A}^* v = \mathcal{A}v$. Ker je $v \neq 0$, sledi $\overline{\alpha} = \alpha$, torej je $\alpha \in \mathbb{R}$.

Oglejmo si še primer, ko je $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. Glede na neko ortonormirano bazo prostora V endomorfizmu $\mathcal{A}$ priredimo matriko $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Ker je $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$, je $A = A^T = A^H$. Matriko A lahko gledamo kot endomorfizem *kompleksnega* vektorskega prostora $\mathbb{C}^n$ s standardnim skalarnim produktom. Ta endomorfizem se sebi adjungiran in po že dokazanem za unitarne prostore so vse ničle polinoma $\Delta_A(\lambda)$ realne. Ker je $\Delta_A(\lambda) = \Delta_{\mathcal{A}}(\lambda)$, sledi, da ima tudi $\Delta_{\mathcal{A}}(\lambda)$ same realne ničle. $\square$

Posledica 3.6. *Če je $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$, potem je $\sigma(\mathcal{A}) \subseteq \mathbb{R}$.*

Naj bo V kompleksen vektorski prostor s skalarnim produktom in $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$. Potem obstajata enolično določena sebi adjungirana endomorfizma $\mathcal{B}, \mathcal{C} \in \mathcal{L}(V)$, za katera velja $\mathcal{A} = \mathcal{B} + i\mathcal{C}$. Definirana sta s predpisoma $\mathcal{B} = \frac{1}{2}(\mathcal{A} + \mathcal{A}^*)$ in $\mathcal{C} = \frac{1}{2i}(\mathcal{A} - \mathcal{A}^*)$. Endomorfizmu $\frac{1}{2}(\mathcal{A} + \mathcal{A}^*)$ pravimo *realni del*, endomorfizmu $\frac{1}{2i}(\mathcal{A} - \mathcal{A}^*)$ pa *imaginarni del* endomorfizma $\mathcal{A}$. Glede na prejšnji izrek si sebi adjungirane endomorfizme lahko predstavljamo kot posplošitve realnih števil, zato razcep endomorfizma na njegov realni in imaginarni del lahko razumemo kot posplošitev razcepa kompleksnega števila na realni in imaginarni del. Seveda pa NE sledi, da so lastne vrednosti endomorfizma $\mathcal{A}$ vsote lastnih vrednosti endomorfizmov $\mathcal{B}$ in $i\mathcal{C}$. (Razmislite, zakaj.)

Izrek 3.7. *Endomorfizem $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ je sebi adjungiran natanko takrat, ko se da diagonalizirati v ortonormirani bazi in je pripadajoča diagonalna matrika realna.*

Dokaz. Če je endomorfizem $\mathcal{A}$ sebi adjungiran, ima po Izreku 3.5 same realne lastne ničle karakterističnega polinoma (in torej same realne lastne vrednosti). Ker je normalen, po Izreku 2.5 sledi, da se da diagonalizirati v ortonormirani bazi. Ker so njegove lastne vrednosti realne, je pripadajoča diagonalna matrika seveda realna.

Za dokaz obratne implikacije naj bo $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ diagonalna matrika, ki pripada endomorfizmu $\mathcal{A}$ glede na neko ortonormirano bazo. Ker je matrika A diagonalna in realna, je seveda $A^H = A$. Ker je baza ortonormirana, pa od tod sledi $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$. $\square$

Kot smo videli v prejšnjem izreku, so sebi adjungirani endomorfizmi natanko tisti, ki se jih da diagonalizirati in imajo same realne lastne vrednosti. Med temi so posebno pomembni tisti, ki imajo vse lastne vrednosti pozitivne (oz. nenegativne) ali vse negativne. Take endomorfizme bomo obravnavali v naslednjem razdelku. Uporabljamo jih na primer za karakterizacijo lokalnih ekstremov funkcij več spremenljivk.

3.1 Pozitivno (semi)definitni endomorfizmi

Definicija 3.8. Sebi adjungiran endomorfizem $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ je:

- *pozitivno semidefiniten*, kadar je $\langle \mathcal{A}x, x\rangle \geq 0$ za vsak $x \in V$,
- *pozitivno definiten*, kadar je $\langle \mathcal{A}x, x\rangle > 0$ za vsak $x \in V \backslash \{0\}$,
- *negativno semidefiniten*, kadar je $\langle \mathcal{A}x, x\rangle \leq 0$ za vsak $x \in V$,
- *negativno definiten*, kadar je $\langle \mathcal{A}x, x\rangle < 0$ za vsak $x \in V \backslash \{0\}$.

Izrek 3.9. *Sebi adjungiran endomorfizem $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ je pozitivno semidefiniten (oz. pozitivno definiten) natanko takrat, ko so vse njegove lastne vrednosti nenegativne (oz. strogo pozitivne).*

Dokaz. Naj bo $\mathcal{A}x = \alpha x$ za nek $x \neq 0$. Ker je $\langle \mathcal{A}x, x\rangle = \alpha ||x||^2$ in $||x|| > 0$, sledi $\alpha \geq 0$, če je $\mathcal{A}$ pozitivno semidefiniten, in $\alpha > 0$, če je $\mathcal{A}$ pozitivno definiten.

Za dokaz obratne implikacije uporabimo Izrek 2.5. Ker je endomorfizem $\mathcal{A}$ sebi adjungiran, ga je namreč mogoče diagonalizirati v ortonormirani bazi. Obstaja torej ortonormirana baza $\{v_1, \ldots, v_n\}$ prostora V in števila $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, da je $\mathcal{A}v_j = \lambda_j v_j$ za vsak $j = 1, \ldots, n$. Po predpostavki izreka je $\lambda_j \geq 0$ za vsak j (in v drugem primeru $\lambda_j > 0$ za vsak j). Naj bo zdaj vektor $x \in V$ poljuben neničeln vektor. Razvijmo ga po bazi $\{v_1, \ldots, v_n\}$: $x = \sum_{j=1}^n \alpha_j v_j$. Ker je x neničeln, je $\alpha_j \neq 0$ vsaj za en indeks j. Z upoštevanjem dejstva, da je baza ortonormirana, zdaj lahko izračunamo

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}x, x\rangle &= \left\langle \mathcal{A}\left(\sum_{j=1}^n \alpha_j v_v\right), \sum_{j=1}^n \alpha_j v_j \right\rangle = \left\langle \sum_{j=1}^n \alpha_j \lambda_j v_j, \sum_{j=1}^n \alpha_j v_j \right\rangle = \sum_{i,j=1}^n \lambda_i \alpha_i \overline{\alpha_j} \langle v_i, v_j \rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^n \lambda_i \alpha_i \overline{\alpha_j} \delta_{ij} = \sum_{j=1}^n \lambda_j |\alpha_j|^2. \end{aligned}$$

Zadnja vsota pa je očitno nenegativna, če je $\lambda_j \geq 0$ za vsak j, in strogo pozitivna, če je $\lambda_j > 0$ za vsak j, saj je $|\alpha_j| > 0$ vsaj za en j.

□

Opomba 3.10. Analogna trditev velja za negativno (semi)definitne endomorfizme.

Izrek 3.11. *Sebi adjungiran endomorfizem $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ je pozitivno definiten natanko takrat, ko njegov karakteristični polinom $\Delta_{\mathcal{A}}(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + \cdots + a_n\lambda^n$ ustreza pogoju $(-1)^k a_k > 0$ za vsak $k = 0, \ldots, n$.*

Dokaz. Najprej naj bo endomorfizem $\mathcal{A}$ pozitivno definiten. Potem je $\Delta_{\mathcal{A}}(\lambda) = (-1)^n(\lambda - \lambda_1)\cdots(\lambda - \lambda_n)$, kjer je $\lambda_j > 0$ za vsak $j = 1, \ldots, n$. Odpravimo oklepaje in vsak koeficient a_k pomnožimo z $(-1)^k$. Dobimo

$$\begin{aligned} a_0 &= \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n > 0 \\ -a_1 &= \lambda_1\cdots\lambda_{n-1} + \lambda_1\cdots\lambda_{n-2}\lambda_n + \cdots + \lambda_2\cdots\lambda_n > 0 \\ &\vdots \\ (-1)^k a_k &= \lambda_1\cdots\lambda_{n-k} + \lambda_1\cdots\lambda_{n-k-1}\lambda_{n-k+1} + \cdots + \lambda_1\cdots\lambda_{n-k-1}\lambda_n + \cdots + \lambda_{k+1}\cdots\lambda_n > 0 \\ &\vdots \\ (-1)^{n-1}a_{n-1} &= \lambda_1 + \cdots + \lambda_n > 0 \\ (-1)^n a_n &= 1 > 0. \end{aligned}$$

Obratno, predpostavimo, da je $(-1)^k a_k > 0$ za vsak $k = 0, 1, \ldots, n$. Za pozitivno definitnost endomorfizma $\mathcal{A}$ po prejšnjem izreku zadošča dokazati, da ima $\mathcal{A}$ le strogo pozitivne lastne vrednosti. Denimo, da to ni res. Ker je $\mathcal{A}$ sebi adjungiran, ima vse lastne vrednosti realne, in je zato vsaj ena lastna vrednost α manjša ali enaka 0. Po predpostavki je potem $a_k\alpha^k \geq 0$ za vsak $k = 1, \ldots, n$, in $a_0 > 0$, od koder sledi

$$\Delta_{\mathcal{A}}(\alpha) = a_0 + a_1\alpha + \cdots + a_n\alpha^n > 0.$$

To pa pomeni, da α ne more biti lastna vrednost endomorfizma $\mathcal{A}$. □

Podobna karakterizacija, ki je ne bomo dokazali, velja za pozitivno semidefinitne matrike. Študenti jo lahko s posnemanjem dokaza prejšnjega izreka dokažejo sami.

Izrek 3.12. *Naj bo $\Delta_{\mathcal{A}}(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + \cdots + a_n\lambda^n$ karakteristični polinom sebi adjungiranega endomorfizma $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$. Potem je $\mathcal{A}$ pozitivno semidefiniten natanko takrat, ko obstaja $m \in \{0, 1, \ldots, n\}$, da je $a_k = 0$ za $k < m$ in $(-1)^k a_k > 0$ za $k = m, \ldots, n$.*

Analogna rezultata, ki ju ne bomo dokazali, veljata za negativno (semi)definitne endomorfizme.

Izrek 3.13. *Naj bo $\Delta_{\mathcal{A}}(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + \cdots + a_n\lambda^n$ karakteristični polinom sebi adjungiranega endomorfizma $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$. Potem velja:*

1. *$\mathcal{A}$ je negativno definiten natanko takrat, ko je $(-1)^n a_k > 0$ za vsak $k = 0, \ldots, n$.*
2. *$\mathcal{A}$ je negativno semidefiniten natanko takrat, ko obstaja $m \in \{0, 1, \ldots, n\}$, da je $a_k = 0$ za $k < m$ in $(-1)^n a_k > 0$ za $k = m, \ldots, n$.*

Pomembna karakterizacija pozitivne (semi)definitnosti matrike (ki se npr. uporablja pri karakterizaciji ekstremov funkcij več spremenljivk) je s pomočjo minorjev matrike. Spomnimo se, da je minor reda k matrike A determinanta $k \times k$ podmatrike, ki jo dobimo tako, da v A (poljubno) izberemo k vrstic in stolpcev. Minor je glavni, če izberemo istoležne vrstice in stolpce. Minor je vodilni, če izberemo prvih k vrstic in stolpcev.

Trditev 3.14. *Naj bo A pozitivno (semi)definitna matrika. Matrika, ki jo dobimo tako, da v A izbrišemo nekaj vrstic in istoležnih stolpcev, je tudi pozitivno (semi)definitna.*

Dokaz. Naj bo A' matrika, ki jo dobimo tako, da v A izbrišemo vse vrstice in stolpce, ki imajo indekse iz neke množice $I \subsetneq \{1, \ldots, n\}$. Dokažimo, da je A' pozitivno (semi)definitna. Ker smo izbrisali istoležne vrstice in stolpce in je bila matrika A hermitska (po definiciji pozitivne semidefinitnosti), je A' seveda tudi hermitska. Torej je treba dokazati le, da je $\langle A'x', x'\rangle > 0$ (oz. ≥ 0) za vsak neničeln vektor $x' \in \mathbb{F}^{n-|I|}$. Naj bo torej $x' \in \mathbb{F}^{n-|I|}$ poljuben neničeln vektor in naj bo $x \in \mathbb{F}^n$ tak vektor, ki ima ničelne tiste komponente, ki so indeksirane z elementi I, če pa te komponente izbrišemo, dobimo vektor x'. Očitno je $\langle Ax, x\rangle = \langle A'x', x'\rangle$. Če je A pozitivno definitna, torej sledi $\langle A'x', x'\rangle > 0$, če je A pozitivno semidefinitna, pa $\langle A'x', x'\rangle \geq 0$. Ker je bil $x' \in \mathbb{F}^{n-|I|}$ poljuben neničeln vektor, sledi pozitivna (semi)definitnost matrike A'. □

Trditev 3.15. *Determinanta poljubne matrike je enaka produktu njenih (kompleksnih) lastnih vrednosti.*

Dokaz. Naj bo $\Delta_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = a_0 + a_1\lambda + \cdots + a_n\lambda^n$ karakteristični polinom matrike A, in $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ njene lastne vrednosti. Potem je $\Delta_A(\lambda) = (-1)^n(\lambda - \lambda_1)\cdots(\lambda - \lambda_n)$, od koder sledi $a_0 = \lambda_1 \cdots \lambda_n$. Po drugi strani pa je $a_0 = \Delta_A(0) = \det A$. □

Izrek 3.16 (Sylvestrov kriterij)**.** *Matrika je pozitivno definitna natanko takrat, ko je hermitska in so vsi njeni vodilni minorji strogo pozitivni.*

Dokaz. Če je matrika A pozitivno definitna, je po Trditvi 3.14 tudi vsaka njena podmatrika A', ki jo dobimo tako, da izbrišemo istoležne vrstice in stolpce matrike A, pozitivno definitna. Po Izreku 3.9 ima vsaka taka podmatrika A' vse lastne vrednosti pozitivne, zato je njena determinanta po Trditvi 3.15 strogo pozitivna. Ena smer izreka je s tem dokazana. Pravzaprav smo dokazali še več, in sicer, da ima pozitivno definitna matrika vse *glavne* minorje pozitivne.

Drugo smer izreka bomo dokazali z indukcijo na velikost matrike. Za 1×1 matrike je trditev očitna. Naj bo torej $n \geq 2$ in predpostavimo, da trditev velja za vse $(n-1) \times (n-1)$ matrike. Naj bo $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ hermitska matrika, katere vodilni minorji so vsi strogo pozitivni. Naj bo $A' \in \mathbb{F}^{(n-1)\times(n-1)}$ matrika, ki jo dobimo tako, da v A izbrišemo zadnjo vrstico in stolpec. Vodilni minorji matrike A' so seveda pozitivni, zato je A' po indukcijski predpostavki pozitivno definitna.

Recimo, da A ni pozitivno definitna. Ker je hermitska, so vse njene lastne vrednosti realne po Izreku 3.5. Ker je $\det A > 0$, determinanta pa je produkt lastnih vrednosti, ima A *vsaj dve* negativni lastni vrednosti α in β. Ker je matrika A hermitska, jo je mogoče po Izreku 2.5 diagonalizirati v ortonormirani bazi, zato obstajata pravokotna vektorja $u, v \in \mathbb{F}^n$ dolžine 1, da je $Au = \alpha u$ in $Av = \beta v$. Očitno obstajata skalarja $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$, ne oba 0, da ima vektor $x = \lambda u + \mu v$ ničelno zadnjo komponento. Vektor x je seveda neničeln, saj sta u in v linearno neodvisna. Naj bo $x' \in \mathbb{F}^{n-1}$ vektor, ki ga dobimo tako, da vektorju x izbrišemo (ničelno) zadnjo komponento. Vektor x' je potem tudi neničeln in velja

$$\begin{aligned}
\langle A'x', x' \rangle &= \langle Ax, x \rangle = \langle A(\lambda u + \mu v), \lambda u + \mu v \rangle = \langle \lambda A u + \mu A v, \lambda u + \mu v \rangle \\
&= \langle \lambda \alpha u + \mu \beta v, \lambda u + \mu v \rangle = |\lambda|^2 \alpha ||u||^2 + \lambda \overline{\mu} \alpha \langle u, v \rangle + \mu \overline{\lambda} \beta \langle v, u \rangle + |\mu|^2 \beta ||v||^2 \\
&= |\lambda|^2 \alpha + |\mu|^2 \beta < 0.
\end{aligned}$$

To pa je v protislovju s pozitivno definitnostjo matrike A'. Matrika A mora biti torej pozitivno definitna.

□

Če bi v zgornjem izreku le zamenjali pozitivno definitnost s pozitivno demidefinitnostjo in strogo pozitivnost z nenegativnostjo, izrek ne bi več veljal, kar nam pokaže naslednji primer.

Primer 3.17. Matrika $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ima oba vodilna minorja enaka 0, torej nenegativna, vendar matrika A ni pozitivno semidefinitna, saj ima lastni vrednosti 0 in -1.

Za pozitivno semidefinitnost moramo namesto vodilnih minorjev obravnavati vse glavne minorje, kar nam pove naslednji izrek. Izreka ne bomo dokazali.

Izrek 3.18. *Matrika je pozitivno semidefinitna natanko takrat, ko je hermitska in so vsi njeni glavni minorji nenegativni.*

Za negativno definitne matrike pa imamo naslednjo karakterizacijo.

Izrek 3.19. *Matrika je negativno definitna natanko takrat, ko je hermitska in so vsi njeni vodilni minorji lihe velikosti negativni, vsi vodilni minorji sode velikosti pa pozitivni.*

4 Unitarni endomorfizmi

Definicija 4.1. Naj bo V vektorski prostor s skalarnim produktom . Endomorfizem $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ je *unitaren*, kadar velja $\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A} = \mathrm{id}_V$.

Definicija 4.2. Kompleksna matrika $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ je *unitarna*, kadar velja $AA^H = A^H A = I$. Realna matrika $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je *ortogonalna*, kadar velja $AA^T = A^T A = I$.

Neposredno iz definicij sledi, da v poljubni ortonormirani bazi prostora V unitarnemu endomorfizmu pripada unitarna (nad $\mathbb{C}$) ali ortogonalna (nad $\mathbb{R}$) matrika.

Unitarne endomorfizme je mogoče karakterizirati z več lastnostmi. Poglejmo si te karakterizacije.

Trditev 4.3. *Na endomorfizem $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ vektorskega prostora V s skalarnim produktom so ekvivalentne naslednje trditve.*

1. *$\mathcal{A}$ je unitaren.*
2. *$\mathcal{A}^*\mathcal{A} = \mathrm{id}_V$.*
3. *$\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathrm{id}_V$.*
4. *Za vsaka $x, y \in V$ velja $\langle \mathcal{A}x, \mathcal{A}y \rangle = \langle x, y \rangle$. To pomeni, da $\mathcal{A}$ ohranja skalarni produkt (torej dolžine in kote), oziroma z drugimi besedami, $\mathcal{A}$ je avtomorfizem prostora V s skalarnim produktom.*
5. *Za vsak $x \in V$ velja $||\mathcal{A}x|| = ||x||$. To pomeni, da je $\mathcal{A}$* izometrija*: preslikava, ki ohranja razdalje.*

Dokaz. Ker je prostor V končnorazsežen, že vemo, da je vsak levi inverz endomorfizma prostora V tudi desni inverz, in obratno, od koder sledi ekvivalentnost prvih treh trditev.

Da iz (1) sledi (4) je jasno, saj po Trditvi 1.4 velja $\langle \mathcal{A}x, \mathcal{A}y \rangle = \langle x, \mathcal{A}^*\mathcal{A}y \rangle = \langle x, y \rangle$.

Če v 4. točki vzamemo $y = x$, očitno dobimo 5. točko.

Dokazati moramo le še, da iz (5) sledi (2). Po predpostavki je $\langle x, x \rangle = \langle \mathcal{A}x, \mathcal{A}x \rangle = \langle x, \mathcal{A}^*\mathcal{A}x \rangle$, torej $\langle x, (\mathcal{A}^*\mathcal{A} - \mathrm{id}_V)x \rangle = 0$ za vsak $x \in V$. Označimo $\mathcal{B} = \mathcal{A}^*\mathcal{A} - \mathrm{id}_V$. Preprost račun pokaže, da je endomorfizem $\mathcal{B}$ sebi adjungiran. Ker za vsak $x \in V$ velja $\langle \mathcal{B}x, x \rangle = 0$, po Trditvi 3.4 sledi $\mathcal{B} = 0$, torej $\mathcal{A}^*\mathcal{A} = \mathrm{id}_V$. □

Trditev 4.4. *Za endomorfizem $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ so ekvivalentne naslednje trditve.*

1. *$\mathcal{A}$ je unitaren.*
2. *$\mathcal{A}$ vsako ortonormirano množico preslika v ortonormirano množico.*
3. *$\mathcal{A}$ vsako ortonormirano bazo preslika v ortonormirano bazo.*
4. *$\mathcal{A}$ vsaj eno ortonormirano bazo preslika v ortonormirano bazo.*

Dokaz. Pri dokazu bomo uporabljali 4. točko prejšnje trditve.

(1) $\Rightarrow$ (2): Naj bo $\{v_1, \ldots, v_k\}$ neka ortonormirana podmnožica prostora V. Potem za vsaka i in j velja $\langle \mathcal{A}v_i, \mathcal{A}v_j \rangle = \langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}$. To pa pomeni, da je $\{\mathcal{A}v_1, \ldots, \mathcal{A}v_k\}$ ortonormirana množica.

(2) $\Rightarrow$ (3): Naj bo $\{v_1, \ldots, v_n\}$ neka ortonormirana baza prostora V. Potem je seveda $\dim V = n$. Po predpostavki je množica $\{\mathcal{A}v_1, \ldots, \mathcal{A}v_n\}$ ortonormirana, zato je linearno neodvisna. Ker ima n elementov, prostor V pa je n-razsežen, sledi, da je $\{\mathcal{A}v_1, \ldots, \mathcal{A}v_n\}$ baza prostora V.

Da iz (3) sledi (4), je očitno.

(4) $\Rightarrow$ (1): Naj bo $\{v_1, \ldots, v_n\}$ taka ortonormirana baza prostora V, da je $\{\mathcal{A}v_1, \ldots, \mathcal{A}v_n\}$ tudi ortonormirana baza. Po predpostavki neka taka ortonormirana baza obstaja. Potem seveda za vsaka i in j velja $\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}$ in $\langle \mathcal{A}v_i, \mathcal{A}v_j \rangle = \delta_{ij}$. Dokazali bomo, da preslikava $\mathcal{A}$ ohranja skalarni produkt.

Naj bosta $x, y \in V$ poljubna vektorja. Razvijmo ju po bazi: $x = \sum_{j=1}^n \alpha_j v_j$, $y = \sum_{j=1}^n \beta_j v_j$. Potem je

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{A}x, \mathcal{A}y \rangle &= \left\langle \mathcal{A}\left(\sum_{j=1}^n \alpha_j v_j\right), \mathcal{A}\left(\sum_{j=1}^n \beta_j v_j\right)\right\rangle = \sum_{i,j=1}^n \alpha_i \overline{\beta_j} \langle \mathcal{A}v_i, \mathcal{A}v_j \rangle = \sum_{i,j=1}^n \alpha_i \overline{\beta_j} \delta_{ij} \\
&= \sum_{i,j=1}^n \alpha_i \overline{\beta_j} \langle v_i, v_j \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^n \alpha_j v_j, \sum_{j=1}^n \beta_j v_j \right\rangle = \langle x, y \rangle,
\end{aligned}$$

kar je bilo treba dokazati.

Posledica 4.5. *Matrika $\mathbb{F}^{n\times n}$ je unitarna (oz. ortogonalna) natanko takrat, ko njeni stolpci tvorijo ortonormirano bazo. Ista trditev velja za vrstice.*

Dokaz. Stolpci matrike so slike vektorjev standardne baze, ki je ortonormirana. Prvi del posledice tako sledi direktno iz prejšnje trditve.

Za drugi del pa opazimo, da je enakost $\mathcal{A}^*\mathcal{A} = \mathrm{id}_V$ ekvivalentna $\mathcal{A}^*\mathcal{A}^{**} = \mathrm{id}_V$, kar pomeni, da je $\mathcal{A}$ unitarna natanko takrat, ko je $\mathcal{A}^*$ unitarna. Trditev v posledici o vrsticah tako sledi iz trditve o stolpcih. □

□

Trditev 4.6. *Množica vseh unitarnih endomorfizmov prostora V je grupa za komponiranje.*

Dokaz. Najprej je treba preveriti, da je kompozitum unitarnih endomorfizem res unitaren. To sledi iz naslednjega razmisleka: če sta $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ unitarna, potem je

$$(\mathcal{A}\mathcal{B})^*(\mathcal{A}\mathcal{B}) = \mathcal{B}^*(\mathcal{A}^*\mathcal{A})\mathcal{B} = \mathcal{B}^*\mathcal{B} = \mathrm{id}_V.$$

Množica unitarnih endomorfizmov je torej res zaprta za kompozitum. Očitno je tudi polgrupa, saj vemo, da je komponiranje endomorfizmov vedno asociativno. Enota za kompozitum je id_V, ki je očitno unitaren endomorfizem. Treba je preveriti še, da ima vsak unitaren endomorfizem *unitaren* inverz. Iz definicije unitarnosti sledi, da je vsak unitaren endomorfizem obrnljiv. Natančneje, če je $\mathcal{A}$ unitaren, potem je $\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}^*$. Za $\mathcal{A}^*$ pa že iz dokaza prejšnje posledice vemo, da je unitaren. Trditev je s tem dokazana. □

Trditev 4.7. *Spekter unitarnega endomorfizma je vsebovan v enotski krožnici kompleksne ravnine.*

Dokaz. Naj bo λ lastna vrednost unitarnega endomorfizma $\mathcal{A}$. Potem je $\mathcal{A}x = \lambda x$ za nek $x \neq 0$. Ker unitarni endomorfizmi ohranjajo dolžine, sledi

$$||x||^2 = ||\mathcal{A}x||^2 = ||\lambda x||^2 = |\lambda|^2 ||x||^2.$$

Ker je $x \neq 0$, sledi $|\lambda| = 1$. □

Izrek 4.8. *Naj bo V unitaren prostor (torej prostor s skalarnim produktom nad $\mathbb{C}$) in $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$. Potem je $\mathcal{A}$ unitaren natanko takrat, ko se da diagonalizirati v ortonormirani bazi in ima pripadajoča diagonalna matrika na diagonali števila z enotske krožnice.*

Dokaz. Unitaren endomorfizem je normalen, zato ga je mogoče (nad $\mathbb{C}$) diagonalizirati v ortonormirani bazi. Da ima diagonalna matrika na diagonali števila z absolutno vrednostjo 1, sledi iz prejšnje trditve.

Obratno, predpostavimo, da se da $\mathcal{A}$ diagonalizirati v ortonormirani bazi in da ima pripadajoča diagonalna matrika na diagonali števila z absolutno vrednostjo 1. Naj bo A pripadajoča diagonalna matrika. Ker ima na diagonali števila z enotske krožnice, je $A^H A = AA^H = A\overline{A} = I$. Ker je baza ortonormirana, pa je A^H matrika preslikave $\mathcal{A}^*$ glede na to bazo. Iz enakosti $A^H A = AA^H = I$ tako sledi $\mathcal{A}^*\mathcal{A} = \mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathrm{id}_V$. □

Primer 4.9. Poiščimo vse ortogonalne (torej v posebnem primeru realne) 2×2 matrike.

Matrika $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ je ortogonalna natanko takrat, ko velja $a^2 + b^2 = 1$, $c^2 + d^2 = 1$ in $ac + bd = 0$. Rešiti moramo torej ta sistem 3 (nelinearnih) enačb v 4 spremenljivkah. Prvi dve enačbi sta ekvivalentni obstoju kotov φ in ψ, da je $a = \cos\varphi$, $b = \sin\varphi$, $c = \cos\psi$ in $d = \sin\psi$. Preostala enačba je ekvivalentna

$$0 = \cos\varphi\cos\psi + \sin\varphi\sin\psi = \cos(\varphi - \psi),$$

ki ima (do periode natančno) rešitvi $\varphi - \psi = \pm\frac{\pi}{2}$. Torej je $\psi = \varphi \pm \frac{\pi}{2}$, kar pomeni, da so vse ortogonalne 2×2 matrike oblike

$$\begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{bmatrix}, \quad \text{kjer je } \varphi \in [0, 2\pi).$$

Matrika prve oblike predstavlja rotacijo za kot $-\varphi$. Matrike druge vrste pa imajo determinanto -1. Spomnimo se, da je determinanta produkt lastnih vrednosti matrike. Produkt dveh kompleksnih konjugiranih števil je vedno nenegativen, zato imajo unitarne matrike druge oblike obe lastni vrednosti realni in zato eno enako 1 in drugo -1. To pa pomeni, da te matrike predstavljajo zrcaljenja.

Primer 4.10. Poiščimo še vse ortogonalne 3×3 matrike.

Naj bo $A \in \mathbb{R}^{3\times3}$ ortogonalna matrika. Ker je lihe velikosti, ima zagotovo vsaj eno lastno vrednost realno. Po Trditvi 4.7 je ta lastna vrednost enaka ± 1. Torej obstaja neničelni vektor $x \in \mathbb{R}^3$, da je $Ax = \pm x$. Predpostavimo lahko, da je $||x|| = 1$. Ker je x lastni vektor, je $\mathrm{Lin}\{x\}$ invarianten podprostor za A. Unitaren endomorfizem je normalen, zato je po dokazu Izreka 2.5 $x^\perp$ tudi invarianten podprostor za A. V neki ortonormirani bazi prostora $\mathbb{R}^3$, ki vsebuje vektor x, endomorfizmu $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ torej pripada matrika $\begin{bmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & A' \end{bmatrix}$, kjer je A' 2×2 matrika. Matrika A' je seveda tudi ortogonalna, ortogonalne 2×2 matrike pa so že bile klasificirane v prejšnjem primeru. Ortogonalne 3×3 matrike torej predstavljajo zrcaljenja, rotacije okrog poljubnih osi in njihove kompozitume.

Spomnimo se, da je bila diagonalizacija endomorfizmov na splošnem vektorskem prostoru tesno povezana s pojmom podobnosti matrik. V primeru prostorov s skalarnim produktom je bila ugodna diagonalizacija v ortonormirani bazi. Ta pa je povezana z unitarno oz. ortogonalno podobnostjo.

Definicija 4.11. Naj bosta $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ dve matriki.

1. Matrika B je *unitarno podobna* matriki A, kadar obstaja taka unitarna matrika $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$, da je $B = U^H A U$ $(= U^{-1} A U)$.

2. Realna matrika $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je *ortogonalno podobna* realni matriki A, kadar obstaja taka ortogonalna matrika $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$, da je $B = Q^T A Q$ $(= Q^{-1} A Q)$.

Neposredno iz definicije sledi, da iz unitarne oz. ortogonalne podobnosti sledi podobnost. Podobno kot pri ekvivalentnosti in podobnosti dokažemo tudi:

Trditev 4.12. *Unitarna in ortogonalna podobnost sta ekvivalenčni relaciji.*

Če je $B = U^H A U$, potem stolpci matrike U določajo ortonormirano bazo, v kateri endomorfizmu $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ pripada matrika B. Obratno, če endomorfizmu $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ glede na neko ortonormirano bazo pripada matrika B in če je U matrika, katere stolpci so elementi te ortonormirane baze, potem je matrika U unitarna (oz. ortogonalna) in velja $B = U^{-1} A U = U^H A U$. Matriki sta si torej unitarno (oz. ortogonalno) podobni natanko takrat, ko pripadata istemu endomorfizmu.

Iz izrekov o diagonalizaciji v ortonormirani bazi (Izrekov 2.7, 2.5, 3.7 in 4.8) sledi:

Izrek 4.13.

1. *Vsaka matrika* $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ *je unitarno podobna zgornje trikotni.*
2. *Matrika* $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ *je normalna natanko takrat, ko je unitarno podobna diagonalni matriki.*
3. *Matrika* $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ *je hermitska natanko takrat, ko je unitarno podobna realni diagonalni matriki.*
4. *Matrika* $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *je simetrična natanko takrat, ko je ortogonalno podobna (realni) diagonalni matriki.*
5. *Matrika* $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ *je unitarna natanko takrat, ko je unitarno podobna diagonalni matriki z lastnimi vrednostmi z enotske krožnice.*