Analiza 1

Funkcijska zaporedja in vrste

(1) Dano je zaporedje funkcij $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s predpisi $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$. Določi limitno funkcijo in ugotovi, ali zaporedje konvergira enakomerno.

Rešitev: Pri študiju zaporedij realnih oziroma kompleksnih števil imamo na razpolago bolj ali manj eno samo smiselno definicijo pojma konvergence zaporedja. Pri funkcijah pa lahko, odvisno od uporabe, definiramo več med sabo neekvivalentnih načinov konvergence. Tukaj bomo podrobneje obravnavali enakomerno konvergenco.

Za razdaljo med funkcijama $f, g : I \to \mathbb{R}$, kjer je $I \subset \mathbb{R}$ nek interval, bomo vzeli število

$$d_\infty(f, g) = \sup_{x \in I} |f(x) - g(x)|.$$

Če je I končen zaprt interval in sta funkciji f in g zvezni, je razdalja med njima končna.

Naj bo sedaj (f_n) zaporedje funkcij, ki so definirane na intervalu I. Limitna funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ je potem definirana s predpisom

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

za vsak $x \in I$. Limitna funkcija seveda ne obstaja vedno. Če limitna funkcija obstaja, rečemo, da zaporedje f_n konvergira po točkah k funkciji f. Če dodatno še zaporedje $c_n = d_\infty(f, f_n)$ konvergira k 0, rečemo, da zaporedje (f_n) na intervalu I enakomerno konvergira k funkciji f.

Enakomerna konvergenca torej pomeni, da pri izbrani natančnosti funkcijo f dovolj dobro aproksimirajo vse funkcije f_n od nekod dalje na celem intervalu I. Torej za vsak $\epsilon > 0$ obstaja tak N, da za vsak $n \geq N$ in za vsak $x \in I$ velja $|f(x) - f_n(x)| < \epsilon$.

Najprej bomo izračunali limitno funkcijo. Za poljuben $x \in \mathbb{R}$ velja

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{nx}{1+n^2x^2} = 0.$$

Zaporedje (f_n) torej po točkah konvergira k funkciji

$$f(x) = 0.$$

Da bi ugotovili, ali je konvergenca enakomerna, moramo pogledati razliko med funkcijami in limitno funkcijo. Velja

$$|f(x) - f_n(x)| = |f_n(x)| = \left|\frac{nx}{1+n^2x^2}\right|.$$

Za vsak $n \in \mathbb{N}$ moramo torej izračunati vrednosti

$$c_n = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\frac{nx}{1+n^2x^2}\right|.$$

Ker so funkcije f_n zvezne in imajo vodoravno asimptoto $y = 0$, v bistvu iščemo maksimum in minimum funkcije f_n. Računajmo

$$f_n'(x) = \frac{n(1 + n^2x^2 - 2n^2x^2)}{(1 + n^2x^2)^2} = \frac{n(1 - nx)(1 + nx)}{(1 + n^2x^2)^2}.$$

Ničle odvodov so v točkah $\pm\frac{1}{n}$, kjer imajo funkcije f_n lokalne ekstreme. Vse funkcije so lihe, zato se lahko pri iskanju maksimuma funkcije $|f_n|$ omejimo na $x \geq 0$. Maksimum bo dosežen v točki $x_n = \frac{1}{n}$. Sledi

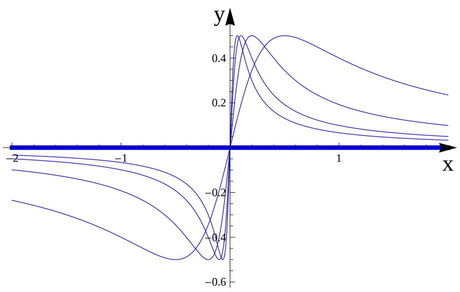
$$c_n = f_n(x_n) = \frac{1}{2}.$$

Ker je

$$\lim_{n\to\infty} (c_n) = \frac{1}{2},$$

konvergenca ni enakomerna.

Na sliki vidimo, da gredo za vsak x vrednosti $f_n(x)$ proti 0 pri $n \to \infty$, vendar pa se grafi funkcij f_n po obliki bistveno razlikujejo od grafa funkcije f. Prav tako grafi funkcij f_n niso blizu grafa funkcije f.



$\square$

(2) Dano je zaporedje funkcij $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kjer je $f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}$.

(a) Določi limitno funkcijo in pokaži, da zaporedje konvergira enakomerno.

(b) Ali velja $f'(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x)$ za vsak $x \in \mathbb{R}$?

Rešitev: (a) Podobno kot pri prejšnji nalogi lahko izračunamo, da zaporedje po točkah konvergira k funkciji $f(x) = 0$. Vrednosti c_n so sedaj enake

$$c_n = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \frac{x}{1 + n^2x^2} \right|.$$

Odvod funkcije f_n je

$$f_n'(x) = \frac{1 + n^2x^2 - 2n^2x^2}{(1 + n^2x^2)^2} = \frac{(1 - nx)(1 + nx)}{(1 + n^2x^2)^2}$$

in ima ničli v točkah $\pm\frac{1}{n}$. Vrednosti funkcije f_n v teh točkah so

$$c_n = f_n(x_n) = \frac{1}{2n}.$$

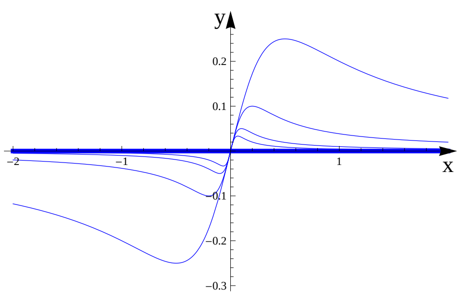
V tem primeru je
$$\lim_{n\to\infty} (c_n) = 0,$$
zato je konvergenca enakomerna.

(b) Izračunali smo že, da velja $f_n'(x) = \frac{1-n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2}$. Od tod sledi
$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = \begin{cases} 1 & ; x = 0, \\ 0 & ; x \neq 0. \end{cases}$$
Po drugi strani pa je $f'(x) = 0$ za vsak x. Od tod sklepamo, da enakost
$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$$
ne velja za vsak $x \in \mathbb{R}$, ampak le za $x \neq 0$.

Opomba 1: Videli smo, da kljub temu, da zaporedje (f_n) konvergira enakomerno na intervalu $\mathbb{R}$ k funkciji f, ne smemo zamenjati vrstnega reda odvajanja in pa računanja limite. Pogoji, kdaj to lahko naredimo, so v tem primeru malce ostrejši.

Izrek: Naj zaporedje (f_n) konvergira po točkah k funkciji f na intervalu $I \subset \mathbb{R}$. Če so vse funkcije f_n zvezno odvedljive in če zaporedje f_n' konvergira enakomerno na I, je funkcija f odvedljiva in velja
$$f'(x) = \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)' = \lim_{n\to\infty} f_n'(x).$$

Opomba 2: Poglejmo si še grafe funkcij f_n za $n \in \{2, 5, 10, 15\}$.



Ker zaporedje (f_n) konvergira enakomerno na $\mathbb{R}$ k ničelni funkciji, bodo grafi funkcij f_n poljubno blizu grafa funkcije f pri dovolj velikih n-jih. Vendar pa grafi vseh funkcij f_n sekajo abscisno os pod kotom 45°, kar pomeni, da se po obliki precej razlikujejo od grafa ničelne funkcije.

Na splošno enakomerna konvergenca funkcij zagotavlja, da bomo lahko limitno funkcijo poljubno dobro aproksimirali. Če pa dodatno želimo še, da se bodo tudi oblike grafov funkcij prilegale grafu limitne funkcije, moramo zahtevati še enakomerno konvergenco prvih nekaj odvodov funkcij f_n. $\square$

(3) Dano je zaporedje funkcij $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$, kjer je $f_n(x) = 2nxe^{-nx^2}$.

(a) Določi limitno funkcijo in ugotovi, ali je konvergenca enakomerna.

(b) Ali velja $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx$?

Rešitev: (a) Izberimo $x \in [0,1]$.

$\cdot\ x = 0 \Rightarrow f_n(x) = 0$ za vsak $n \Rightarrow f(x) = 0$,

$\cdot\ x \in (0,1] \Rightarrow f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} 2nxe^{-nx^2} = 2x \lim\limits_{n\to\infty} ne^{-nx^2} = 0.$

Zaporedje (f_n) tudi tokrat po točkah konvergira k funkciji $f(x) = 0$. Vse funkcije f_n so na $[0,1]$ zvezne in pozitivne, zato je

$$c_n = \max_{x\in[0,1]} 2nxe^{-nx^2}.$$

Odvod funkcije f_n je enak

$$f_n'(x) = 2ne^{-nx^2} + 2nx(-2nx)e^{-nx^2} = 2n(1-2nx^2)e^{-nx^2}.$$

Funkcija f_n ima maksimum v točki $x_n = \frac{1}{\sqrt{2n}}$, v kateri je $f(x_n) = \sqrt{2n}e^{-\frac{1}{2}}$. Vidimo, da je v tem primeru zaporedje (c_n) neomejeno, kar pomeni, da konvergenca ni enakomerna.

(b) Računajmo

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 2nxe^{-nx^2}\,dx \stackrel{nx^2=t}{=} \int_0^n e^{-t}\,dt = -e^{-t}\Big|_0^n = 1 - e^{-n}.$$

Torej je

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} (1-e^{-n}) = 1.$$

Po drugi strani pa je $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$, od koder sledi

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx \neq \int_0^1 f(x)\,dx.$$

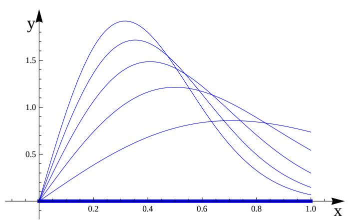
Opomba: Implicitno smo z izračunom integrala pokazali, da zaporedje (f_n) ne konvergira enakomerno na $[0,1]$ k funkciji f saj za enakomerno konvergentna zaporedja velja:

Izrek: Če zaporedje (f_n) enakomerno konvergira k funkciji f na intervalu $[a,b]$, je

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)\,dx.$$

V praksi to pomeni, da lahko pri enakomerno konvergentnih zaporedjih zamenjamo vrstni red integriranja in pa računanja limite.

Prepričajmo se še grafično, da konvergenca ni enakomerna. Narisani so grafi prvih petih funkcij iz danega zaporedja. Maksimumi funkcij rastejo v tem primeru čez vse meje.



□

(4) Naj funkcijsko zaporedje $f_n : [a,b] \to [c,d]$ enakomerno konvergira na $[a,b]$ k funkciji f in naj bo $g : [c,d] \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija. Dokaži, da potem funkcijsko zaporedje $g \circ f_n$ enakomerno konvergira na $[a,b]$.

Rešitev: Najprej izračunajmo limitno funkcijo. Ker je funkcija g zvezna, za vsak $x \in [a,b]$ velja

$$\lim_{n\to\infty} g(f_n(x)) = g\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) = g(f(x)).$$

To pomeni, da zaporedje $g \circ f_n$ po točkah konvergira k funkciji $g \circ f$. Pokažimo sedaj, da je konvergenca enakomerna. Za vsak $\epsilon > 0$ moramo torej najti tak $N \in \mathbb{N}$, da bo za vsak $n \geq N$ in vsak $x \in [a,b]$ veljalo

$$|g(f(x)) - g(f_n(x))| < \epsilon.$$

Tak N bomo našli v dveh korakih. Ker je funkcija g zvezna na $[c,d]$, je na $[c,d]$ enakomerno zvezna, zato lahko najdemo tak $\delta > 0$, da bo iz $|u - t| < \delta$ sledilo $|g(u) - g(t)| < \epsilon$. Če si mislimo, da je $u = f(x)$ in $t = f_n(x)$, moramo torej poskrbeti, da bo $|f(x) - f_n(x)| < \delta$. Ker zaporedje f_n konvergira k funkciji f enakomerno, lahko najdemo tak $N \in \mathbb{N}$, da bo za vsak $n \geq N$ in vsak $x \in [a,b]$ veljalo

$$|f(x) - f_n(x)| < \delta.$$

Pri tem N bo za vsak $n \geq N$ in vsak $x \in [a,b]$ veljalo

$$|g(f(x)) - g(f_n(x))| < \epsilon.$$

$\square$

(5) Pokaži, da vrsta $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt{n}x}$ konvergira enakomerno na $[a,\infty)$ za vsak $a > 0$. Ali vrsta konvergira enakomerno na $(0,\infty)$?

Rešitev: Funkcijska vrsta $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ po definiciji konvergira enakomerno na intervalu $I \subset \mathbb{R}$ k vsoti f, če zaporedje delnih vsot

$$s_k = \sum_{n=1}^{k} f_n = f_1 + f_2 + \ldots + f_k$$

konvergira enakomerno k funkciji f na intervalu I. Če so vsi členi vrste zvezne funkcije in je konvergenca enakomerna, je tudi vsota vrste zvezna funkcija. Osnovni kriterij za testiranje enakomerne konvergence vrst je

<u>Weierstrassov kriterij za enakomerno konvergenco vrst</u>:

Če za vsak n obstaja konstanta c_n, da je $\sup\limits_{x\in I} |f_n(x)| \leq c_n$ in vrsta $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergira, potem vrsta $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ konvergira enakomerno na I.

V praksi ponavadi poskušamo absolutne vrednosti funkcij navzgor omejiti s pozitivnimi konstantami, ki se seštejejo v neko končno število.

V prejšnjem poglavju smo že dokazali z uporabo integralskega kriterija, da vrsta konvergira za $x \in (0, \infty)$. Za dokaz enakomerne konvergence na intervalu $[a, \infty)$ lahko uporabimo enakost

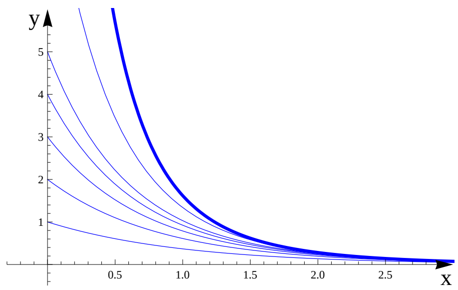
$$\sup_{x \in [a,\infty)} |f_n(x)| = \sup_{x \in [a,\infty)} \frac{1}{e^{\sqrt{nx}}} = \frac{1}{e^{\sqrt{na}}}.$$

Za vrsto na desni pa smo že prej z integralskim kriterijem pokazali, da konvergira. Od tod sledi, da je vsota vrste zvezna funkcija na intervalu $[a, \infty)$ za vsak $a > 0$, kar pa pomeni, da je zvezna na $(0, \infty)$.

Ker je

$$\sup_{x \in (0,\infty)} |f_n(x)| = \sup_{x \in (0,\infty)} \frac{1}{e^{\sqrt{nx}}} = 1$$

za dokaz enakomerne konvergence na $(0, \infty)$ ne moremo uporabiti Weierstrassovega kriterija. Izkaže se celo, da vrsta na intervalu $(0, \infty)$ ne konvergira enakomerno. To sledi iz dejstva, da je vsota dane vrste zvezna funkcija, ki je neomejena v okolici točke $x = 0$. Ker so vse delne vsote omejene funkcije na $(0, \infty)$, konvergenca ni enakomerna na $(0, \infty)$.



□

(6) Dana je vrsta $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{x^2+n}$. Dokaži, da vrsta konvergira enakomerno na $\mathbb{R}$.

Rešitev: Vrsta

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{x^2+n} = \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+2} + \frac{1}{x^2+3} - \frac{1}{x^2+4} + \dots$$

konvergira za vsako realno število x po Leibnizovem kriteriju. Pokazali bomo, da je ta konvergenca enakomerna. Ker je

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x)| = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| (-1)^{n-1} \frac{1}{x^2+n} \right| = \frac{1}{n},$$

za dokaz enakomerne konvergence ne moremo uporabiti Weierstrassovega kriterija. Zato bomo uporabili drugačno metodo. Pišimo

$$f(x) = s_k(x) + R_k(x),$$

kjer je $R_k(x) = \sum\limits_{n=k+1}^{\infty} f_n(x)$ ostanek vrste. Potem je dovolj pokazati, da ostanek vrste enakomerno konvergira k nič. V našem primeru je

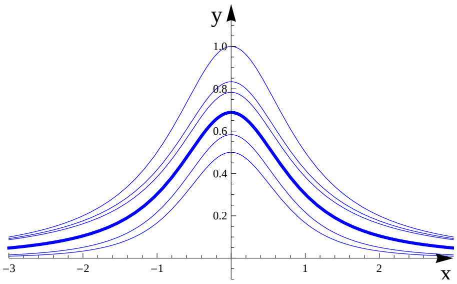
$$R_k(x) = \sum_{n=k+1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{x^2+n} = (-1)^k \frac{1}{x^2+k+1} + (-1)^{k+1} \frac{1}{x^2+k+2} + \dots$$

Za alternirajoče vrste vemo, da je ostanek $R_k(x)$ po absolutni vrednosti manjši od $|f_k(x)|$, od koder dobimo oceno

$$|R_k(x)| < \frac{1}{x^2 + k}.$$

Sedaj moramo še preveriti, da zaporedje na desni enakomerno konvergira k nič, ko gre $k \to \infty$. To sledi iz dejstva, da je v tem primeru $c_k = \frac{1}{k}$.

Ker je konvergenca enakomerna in so vsi sumandi zvezni, je tudi vsota zvezna funkcija. Poglejmo grafe vsote in pa delnih vsot za $k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.



Vidimo, da delne vsote alternirajo okoli vsote. $\square$

(7) Določi definicijski območji danih funkcij in nato pokaži, da sta zvezni:

(a) $W(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2^n x)}{2^n}$,

(b) $\zeta(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$.

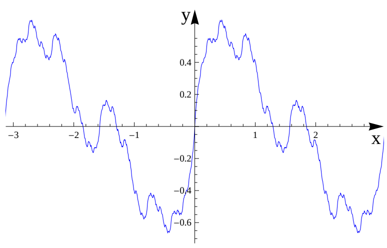
Rešitev: (a) Vrsta $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2^n x)}{2^n}$ absolutno konvergira za vsak $x \in \mathbb{R}$, zato njena vsota določa funkcijo $W : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s predpisom

$$W(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2^n x)}{2^n}.$$

Imenujemo jo Weierstrassova funkcija. Za dokaz zveznosti vsote funkcijske vrste bomo uporabili Weierstrassov kriterij.

V našem primeru je $I = \mathbb{R}$ in $f_n(x) = \frac{\sin(2^n x)}{2^n}$, zato lahko izberemo $c_n = \frac{1}{2^n}$. Tako smo funkcijsko vrsto majorizirali s konvergentno geometrijsko vrsto, od koder sledi, da je W zvezna funkcija.

Poglejmo še graf Weierstrassove funkcije.



Zanimiva je zato, ker je primer funkcije, ki je povsod zvezna in nikjer odvedljiva. Če bi gledali graf pod čedalje večjo povečavo, bi videli, da graf v okolici vsake točke močno oscilira, kar povzroči, da nikjer nima tangente. Hkrati na tem primeru tudi vidimo, da neskončna vsota gladkih funkcij ni nujno gladka.

(b) Sedaj bomo pokazali, da je Riemannova zeta funkcija

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

zvezna. Iz poglavja o vrstah že vemo, da je definirana na intervalu $(1, \infty)$. Ker je

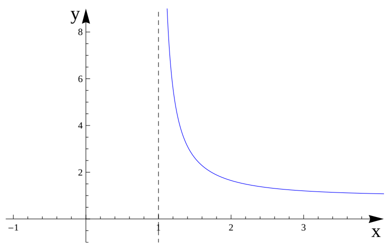
$$\sup_{x \in (1,\infty)} |f_n(x)| = \sup_{x \in (1,\infty)} \frac{1}{n^x} = \frac{1}{n},$$

za dokaz enakomerne konvergence ne moremo uporabiti Weierstrassovega kriterija, saj harmonična vrsta ne konvergira. Pokazati se da, da vrsta na intervalu $(1, \infty)$ ne konvergira enakomerno. Kljub temu pa je njena vsota zvezna funkcija, saj je konvergenca enakomerna na vsakem intervalu oblike $[a, \infty) \subset (1, \infty)$.

Za dokaz enakomerne konvergence na intervalu $[a, \infty)$ lahko uporabimo Weierstrassov kriterij, saj je

$$\sup_{x \in [a,\infty)} |f_n(x)| = \sup_{x \in [a,\infty)} \frac{1}{n^x} = \frac{1}{n^a}.$$

Ker je $a > 1$, tokrat dobimo konvergentno številsko vrsto. Od tod sledi, da je Riemannova funkcija zvezna na intervalu $(1, \infty)$.



Opomba: Dana vrsta konvergira za vsa kompleksna števila $z = x + iy$, za katere je $x > 1$. Lahko pa Riemannovo zeta funkcijo z drugačnimi metodami razširimo do analitične funkcije $\zeta : \mathbb{C} \setminus \{1\} \to \mathbb{C}$, ki ima v točki $z = 1$ pol prve stopnje. Tako dobljena funkcija ima ničle v vseh negativnih sodih številih, velja pa tudi

$$\zeta(-1) = -\frac{1}{12}.$$

□

(8) Določi konvergenčna območja naslednjih potenčnih vrst:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n 2^n}$,

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n! x^{n!}$,

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{2^{n-1} n!}$.

Rešitev: Potenčna vrsta je funkcijska vrsta oblike

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n.$$

Številu a rečemo središče potenčne vrste, številom a_n pa koeficienti potenčne vrste. Za vsako potenčno vrsto obstaja konvergenčni polmer vrste $R \in [0, \infty]$, da velja:

(a) Vrsta konvergira za $x \in (a-R, a+R)$, divergira za $|x-a| > R$, v točkah $|x-a| = R$ pa lahko ali konvergira ali pa divergira.

(b) Vrsta konvergira absolutno in enakomerno na $[a-r, a+r]$ za vsak $r < R$.

(c) Vsota vrste je analitična funkcija na $(a-R, a+R)$. Če vrsta konvergira v kakšnem izmed krajišč, je tudi tam zvezna po Abelovem izreku.

Konvergenčni polmer potenčne vrste lahko izračunamo s pomočjo naslednjih formul:

$$\begin{aligned} R &= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|, \\ \frac{1}{R} &= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}, \\ \frac{1}{R} &= \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}. \end{aligned}$$

V nekaterih primerih pa je najlažje uporabiti kar katerega od kriterijev za številske vrste.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n2^n}$:

Imamo potenčno vrsto s središčem v točki $a = -1$ in s koeficienti $a_n = \frac{1}{n2^n}$. Sledi

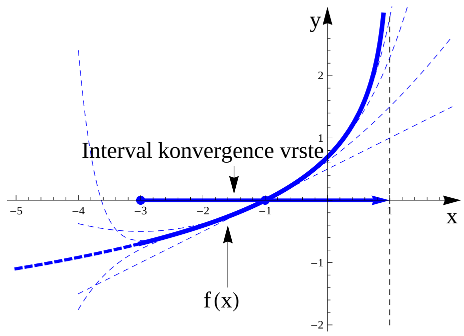
$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)2^{n+1}}{n2^n} = 2.$$

Vrsta torej zagotovo konvergira na intervalu $I = (-3, 1)$. Poglejmo še robni točki:

$\cdot\ x = -3 \rightsquigarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} \Rightarrow$ vrsta konvergira pri $x = -3$,

$\cdot\ x = 1 \rightsquigarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty \Rightarrow$ vrsta divergira pri $x = 1$.

<u>Opomba</u>: Od tod sklepamo, da vsota vrste določa zvezno funkcijo na intervalu $[-3, 1)$, ki je analitična na $(-3, 1)$. Na intervalu $[-3, 1)$ vrsta konvergira k funkciji $f(x) = \ln\left(\frac{2}{1-x}\right)$. To pomeni, da je dana potenčna vrsta Taylorjeva vrsta funkcije f v okolici točke $a = -1$.



(b)$\sum_{n=1}^{\infty} n! x^{n!}$:

V tem primeru imamo opravka s potenčno vrsto, ki ima neskončno ničelnih koeficientov. Velja namreč $a_k = k$, če je k oblike $k = n!$ in $a_k = 0$ sicer. V takšnih primerih moramo ponavadi za izračun konvergenčnega polmera uporabiti bolj splošno formulo

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Poiskati moramo torej največje stekališče zaporedja $\sqrt[n]{|a_n|}$. V praksi to praviloma pomeni, da zaporedje razdelimo na nekaj konvergentnih podzaporedij in poiščemo največjo limito. V našem primeru lahko zaporedje (a_n) razdelimo na dve podzaporedji glede na predpis. Eno zaporedje bo konvergiralo proti nič, za drugo, katerega členi so $a_k = k$ za $k = n!$, pa velja

$$\lim_{k \to \infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \lim_{k \to \infty} \sqrt[k]{k} = 1.$$

Večje od obeh stekališč je torej 1, od koder sledi, da je $R = 1$. Ker je središče vrste $a = 0$, bo vrsta torej zagotovo konvergirala na intervalu $(-1, 1)$. V robnih točkah $x = \pm 1$, pa velja:

$$x = \pm 1 \rightsquigarrow \sum_{n=1}^{\infty} n! (\pm 1)^{n!} = \pm 1 + 2 + 6 + 24 + 120 + \ldots \Rightarrow \text{vrsta divergira pri } x = \pm 1.$$

(c)$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{2^{n-1} n!}$:

Tudi tokrat imamo potenčno vrsto s središčem v točki $a = 0$, ki ima neskončno ničelnih koeficientov. Če bi hoteli uporabiti isti kriterij kot prej, bi morali izračunati limito

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt[n^2]{2^{n-1} n!}},$$

ki pa jo je težko izračunati. Zato bomo raje uporabili kvocientni kriterij kar na členih vrste. Naj bo

$$c_n = \frac{x^{n^2}}{2^{n-1} n!}.$$

Potem je

$$D = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{|x|^{(n+1)^2}}{2^n(n+1)!}}{\frac{|x|^{n^2}}{2^{n-1}n!}} = \lim_{n\to\infty}\frac{|x|^{2n+1}}{2(n+1)}.$$

Vemo, da vrsta konvergira, če je $D < 1$. V našem primeru bo to res natanko takrat, ko bo $|x| \le 1$, kar pomeni, da potenčna vrsta konvergira na intervalu $[-1, 1]$. Posredno smo s tem tudi izračunali, da je konvergenčni polmer vrste enak $R = 1$. □

(9) Določi konvergenčni območji danih potenčnih vrst in ju seštej:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$,

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

Rešitev: Pri izračunu vsote potenčne vrste lahko uporabimo izrek, ki pravi, da lahko potenčne vrste členoma odvajamo in integriramo:

Naj bo R konvergenčni polmer potenčne vrste $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ in $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ njena vsota na $(a-R, a+R)$. Potem za $x \in (a-R, a+R)$ velja:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-a)^{n-1},$$

$$\int_a^x f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}(x-a)^{n+1}.$$

(a) Potenčna vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$ ima središče v $a = 0$ in koeficiente $a_n = n+1$. Konvergenčni polmer vrste je enak

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+2} = 1.$$

Vrsta torej konvergira na intervalu $I = (-1, 1)$. Poglejmo še robni točki:

$\cdot\ x = -1 \rightsquigarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n(-1)^{n-1} \Rightarrow$ vrsta divergira pri $x = -1$,

$\cdot\ x = 1 \rightsquigarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n = \infty \Rightarrow$ vrsta divergira pri $x = 1$.

Od tod sledi, da vsota vrste določa analitično funkcijo na intervalu $(-1, 1)$, ki je definirana s predpisom

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots$$

Z integriranjem zgornje vrste dobimo

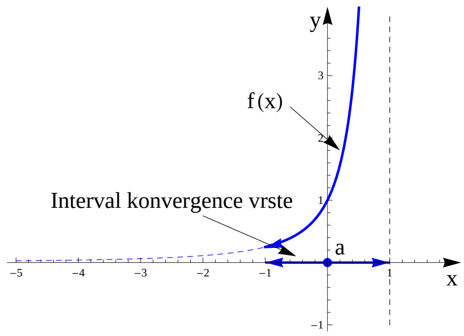
$$\int f(x)\,dx = 1 + x + x + x^2 + \dots = \frac{1}{1-x}.$$

Nedoločeni integral je določen do konstante natančno. V našem primeru smo vzeli kar konstanto $C = 1$, da smo lahko tako dobljeno vrsto sešteli. Funkcijo f sedaj dobimo z odvajanjem zgornjega predpisa.

Tako dobimo, da za vsak $x \in (-1, 1)$ velja

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots$$

Funkcija f je definirana za vse $x \neq 1$, dana vrsta pa k njej konvergira samo na $(-1, 1)$.



(b) Imamo vrsto

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots$$

Središče ima v točki $a = 0$, koeficienti pa so $a_{2n+2} = 0$ in $a_{2n+1} = \frac{1}{2n+1}$. Ker velja $\lim_{n\to\infty} \sqrt[2n+1]{\frac{1}{2n+1}} = 1$, je

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1.$$

Od tod sklepamo, da vrsta konvergira na intervalu $I = (-1, 1)$, v robnih točkah pa velja

$$x = \pm 1 \rightsquigarrow \pm \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} = \pm\infty,$$

kar pomeni, da vrsta konvergira na intervalu $(-1, 1)$.

Označimo

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Za izračun vsote bomo vrsto najprej odvajali, da dobimo

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \dots$$

V tem izrazu prepoznamo geometrijsko vrsto s koeficientom $q = x^2$, zato je

$$f'(x) = \frac{1}{1-x^2}.$$

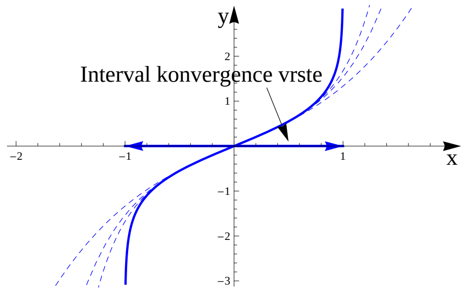
Z integriranjem dobimo

$$f(x) = \int f'(x)\,dx = \int \frac{1}{1-x^2}\,dx = \operatorname{arth} x + C = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + C.$$

Vrednost konstante C dobimo tako, da v zgornjo enakost vstavimo središče potenčne vrste. Pri $x = 0$ dobimo enakost $0 = C$. Izpeljali smo torej, da za vsak $x \in (-1, 1)$ velja

$$\operatorname{arth} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots$$

Poglejmo še skico.



$\square$

(10) Seštej naslednji številski vrsti:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{(n+1)!}$,

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)}$.

Rešitev: (a) Imamo številsko vrsto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{(n+1)!} = \frac{-2}{2!} + \frac{(-2)^2}{3!} + \frac{(-2)^3}{4!} + \ldots,$$

ki po obliki precej spominja na eksponentno vrsto. Velja namreč

$$e^{-2} = 1 + \frac{-2}{1!} + \frac{(-2)^2}{2!} + \frac{(-2)^3}{3!} + \ldots$$

Če našo vrsto pomnožimo z -2, dobimo ravno eksponentno vrsto brez prvih dveh členov. Od tod dobimo rezultat

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{(n+1)!} = -\tfrac{1}{2}(e^{-2} - 1 + 2) = -\tfrac{1}{2}(e^{-2} + 1).$$

(b) Sedaj imamo vrsto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)}.$$

Da bi izračunali njeno vsoto, jo bomo najprej razširili do ustrezne potenčne vrste. Glavno idejo lahko strnemo v naslednjih nekaj korakov:

· Poišči potenčno vrsto, katere izračun v neki točki sovpada z dano številsko vrsto.
· Izračunaj vsoto potenčne vrste v poljubni točki.
· Vstavi v izraz za vsoto potenčne vrste ustrezno vrednost.

V našem primeru bomo člene pomnožili s potenco x^{n+1}, da se bodo nato po odvajanju pokrajšali koeficienti v imenovalcu. Definirajmo

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)} x^{n+1}.$$

Dobljena potenčna vrsta ima središče v točki $a = 0$, konvergenčni polmer $R = 1$ in konvergira na intervalu $[-1, 1]$. To pomeni, da je $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija, ki je analitična na $(-1, 1)$. Njena vrednost pri $x = 1$ je enaka vsoti naše številske vrste. Če torej izračunamo predpis za funkcijo f, bomo hkrati izračunali vsoto naše vrste.

Z dvakratnim odvajanjem funkcije f dobimo:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n = -x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \ldots,$$
$$f''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^{n-1} = -1 + x - x^2 + x^3 - x^4 + \ldots = -\frac{1}{x+1}.$$

Direktno iz vrste za f' ali pa z integriranjem vsote f'' lahko izračunamo, da je

$$f'(x) = -\ln(1 + x).$$

Če ta logaritem še enkrat integriramo po delih, dobimo

$$f(x) = -(1 + x)\ln(1 + x) + x + C.$$

Ker je $f(0) = 0$, je $C = 0$. Ko v predpis za f vstavimo $x = 1$, dobimo vsoto naše številske vrste

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)} = f(1) = -2\ln 2 + 1.$$

□

(11) Izračunaj Taylorjeva polinoma:

(a) reda 2 funkcije $f(x) = x \ln^2 x$ okoli točke $a = 1$,
(b) reda 3 funkcije $f(x) = xe^{-x^2}$ okoli točke $a = 0$.

Rešitev: Pogosto znamo natančno izračunati vrednosti funkcije f in njenih odvodov v neki točki $x = a$, v točkah blizu a pa ne. Za približen izračun vrednosti funkcije v okolici točke a si pomagamo s Taylorjevimi polinomi. Poljubno n-krat odvedljivo funkcijo f lahko v okolici točke $x = a$ aproksimiramo s Taylorjevim polinomom reda n

$$T_n(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n.$$

Red Taylorjevega polinoma izberemo tako, da dobimo željeno natančnost aproksimacije. Pri višanju reda dobimo čedalje boljše aproksimacije $f(x) \approx T_n(x)$ za x blizu a. V posebnem primeru, ko je f polinom stopnje n, Taylorjev polinom T_n sovpada z f.

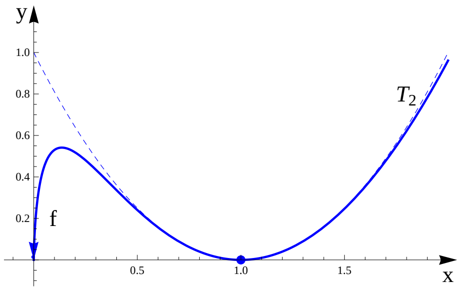
(a) Za funkcijo $f(x) = x \ln^2 x$ velja:

$$f'(x) = \ln^2 x + 2 \ln x,$$
$$f''(x) = \frac{2 \ln x}{x} + \frac{2}{x}.$$

Od tod dobimo $f(1) = f'(1) = 0$ in $f''(1) = 2$, kar nam da

$$T_2(x) = (x-1)^2.$$

Kot vidimo na sliki, Taylorjev polinom T_2 precej dobro aproksimira funkcijo f v okolici stacionarne točke $x = 1$.



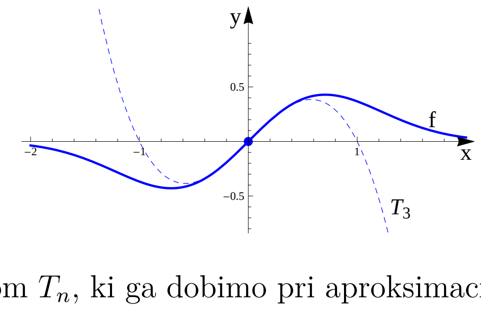
(b) Izračunajmo sedaj Taylorjev polinom reda 3 funkcije $f(x) = xe^{-x^2}$ v okolici točke $a = 0$. Odvodi funkcije f so:

$$f'(x) = (1 - 2x^2)e^{-x^2},$$
$$f''(x) = (-6x + 4x^3)e^{-x^2},$$
$$f'''(x) = (-6 + 24x^2 - 8x^4)e^{-x^2}.$$

Torej je $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$ in $f'''(0) = -6$, kar nam da

$$T_3(x) = x - x^3.$$

Poglejmo še skico. Vidimo, da je aproksimacija dobra za $|x| < \frac{1}{2}$, nato pa čedalje slabša.



Opomba: Taylorjev polinom T_n, ki ga dobimo pri aproksimaciji funkcije f v okolici točke $x = a$, ima lastnost, da je

$$(T_n)^{(k)}(a) = f^{(k)}(a) \quad \text{za vse } 0 \leq k \leq n.$$

V posebnem primeru je T_1 linearna funkcija, katere graf je tangenta na graf funkcije f v točki $x = a$. Polinomi T_n so torej posplošitev pojma tangente. Opomniti velja, da Taylorjev polinoma reda n nima nujno stopnje n, ampak največ n. □

(12) Z uporabo Taylorjevega izreka oceni napaki naslednjih aproksimacij:

(a) $\operatorname{arc\,tg} x \approx x$ za $|x| < \frac{1}{2}$,

(b) $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$ za $|x| < \frac{1}{2}$.

Rešitev: Poljubno n-krat odvedljivo funkcijo f lahko zapišemo kot vsoto

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x).$$

Pri tem smo z R_n označili ostanek oziroma napako pri aproksimaciji funkcije f v okolici točke $x = a$ s Taylorjevim polinomom reda n. Taylorjev izrek nam pove, da lahko ostanek $R_n(x)$ zapišemo v obliki

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

za nek t na intervalu med a in x. Na intervalu $|x - a| < \delta$ lahko torej velikost napake pri aproksimaciji $f(x) \approx T_n(x)$ ocenimo z izrazom

$$|R_n| \leq \max_{|t-a|<\delta} |f^{(n+1)}(t)| \cdot \frac{\delta^{n+1}}{(n+1)!}.$$

(a) Definirajmo $f(x) = \operatorname{arc\,tg} x$. Potem je $T_1(x) = x$, zato nas zanima ocena velikosti napake aproksimacije

$$\operatorname{arc\,tg} x \approx T_1(x).$$

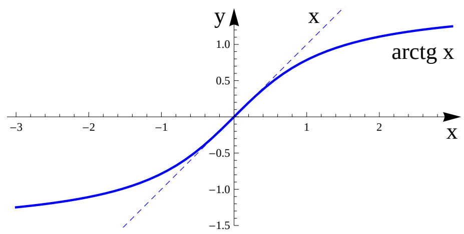
Velja:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+x^2}, \\ f''(x) &= -\frac{2x}{(1+x^2)^2}. \end{aligned}$$

Po Taylorjevem izreku imamo oceno

$$|R_1| \leq \max_{|t|<\frac{1}{2}} \left| -\frac{2t}{(1+t^2)^2} \right| \cdot \frac{(\frac{1}{2})^2}{2!} < \tfrac{1}{8}.$$

Dejanska napaka je še precej manjša kot naša ocena. Izkaže se, da je ta napaka manjša od 0.05. Boljšo oceno bi dobili, če bi upoštevali, da je v bistvu tudi Taylorjev polinom reda 2 enak $T_2(x) = x$.



Rezultat te naloge lahko uporabimo na naslednji način. Funkcija arc tg nam pretvarja naklon klanca v radiane. To pomeni, da na primer 1-odstotni klanec ustreza kotu 0.01 radiana, kar je približno 0.57°. Podobno ima 10-odstotni klanec kot, ki je približno 5.7°.

Po tej aproksimaciji bi 50-odstotni klanec ustrezal kotu $28.5°$, dejansko pa ustreza kotu $26.5°$. Vidimo, da napaka še ni prevelika.

(b) Vzemimo sedaj $f(x) = \cos x$. Potem je

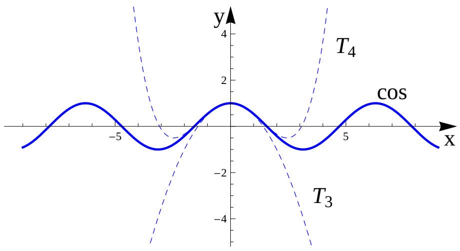
$$T_3(x) = 1 - \frac{x^2}{2}.$$

Velja še $f'(x) = -\sin x$, $f''(x) = -\cos x$, $f'''(x) = \sin x$ in $f^{(4)}(x) = \cos x$, zato lahko na intervalu $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ napako aproksimacije ocenimo z izrazom

$$|R_3| < \max_{|t|<\frac{1}{2}} |\cos t| \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^4}{4!} \leq 0.0026.$$

Pri tem smo uporabili oceno $|\cos t| \leq 1$.

Poglejmo še skico, kjer je poleg T_3 še polinom T_4. Vidimo, da funkcij cos, T_3 in T_4 praktično ne moremo razločiti na intervalu $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Sta pa ti aproksimaciji pri večjih vrednostih čedalje slabši, saj sta polinoma neomejena, kosinus pa omejen.



□

(13) Razvij naslednje funkcije v Taylorjevo vrsto:

(a) $f(x) = \sin x$ okoli točke $a = \frac{\pi}{4}$,

(b) $f(x) = \frac{1}{x^5}$ okoli točke $a = 1$.

Rešitev: Naj bo f gladka funkcija na neki okolici točke a. *Taylorjeva vrsta* funkcije f okoli točke a je vrsta

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(a) \frac{(x-a)^n}{n!} = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots$$

Spoznali bomo dve metodi za računanje Taylorjevih vrst:

(1) izračun vseh odvodov in uporaba formule za Taylorjevo vrsto,

(2) prevedba na znane Taylorjeve vrste in uporaba konvolucijskega produkta.

Pri tej nalogi bomo Taylorjeve vrste izračunali z uporabo formule.

(a) Izračunali bomo Taylorjevo vrsto funkcije $f(x) = \sin x$ okoli točke $a = \frac{\pi}{4}$. Odvodi sinusa se ponavljajo s periodo 4 in velja $f^{(4k+1)}(x) = \cos x$, $f^{(4k+2)}(x) = -\sin x$, $f^{(4k+3)}(x) = -\cos x$ ter $f^{(4k)}(x) = \sin x$. V točki $a = \frac{\pi}{4}$ so vsi odvodi enaki $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, zato je

$$T(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 + (x - \tfrac{\pi}{4}) - \frac{(x-\frac{\pi}{4})^2}{2} - \frac{(x-\frac{\pi}{4})^3}{3!} + \frac{(x-\frac{\pi}{4})^4}{4!} + \ldots\right).$$

Ta vrsta konvergira k sinusni funkciji za vsak $x \in \mathbb{R}$.

(b) Sedaj razvijamo funkcijo $f(x) = \frac{1}{x^5}$ okoli točke $a = 1$. Odvodi so enaki $f'(x) = -\frac{5}{x^6}$, $f''(x) = \frac{30}{x^7}$, za splošen n pa velja

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{(n+4)!}{4! x^{n+5}}.$$

Torej je $f^{(n)}(1) = (-1)^n \frac{(n+4)!}{4!}$ in

$$T(x) = 1 - 5(x-1) + 15(x-1)^2 + \ldots + (-1)^n \binom{n+4}{4} (x-1)^n + \ldots$$

Ta vrsta konvergira na intervalu $(0, 2)$ k funkciji f, sicer pa divergira. $\square$

(14) Razvij naslednji funkciji v Taylorjevo vrsto:

(a) $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{1+x}$ okoli točke $a = 0$,

(b) $f(x) = \frac{1}{x^2-5x+6}$ okoli točke $a = 1$.

Rešitev: Za razvoj funkcije v Taylorjevo vrsto v okolici dane točke moramo izračunati vrednosti vseh odvodov funkcije v tej točki. Včasih pa si lahko delo olajšamo, če znamo dano funkcijo zapisati kot vsoto ali produkt funkcij, katerih Taylorjeve vrste že poznamo. Osnovni primeri Taylorjevih vrst so:

$$\begin{aligned}
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots, && x \in \mathbb{R}, \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots, && x \in \mathbb{R}, \\
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots, && x \in \mathbb{R}, \\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots, && |x| < 1, \\
\frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots, && |x| < 1, \\
(1+x)^\alpha &= 1 + \binom{\alpha}{1} x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \binom{\alpha}{3} x^3 + \cdots, && |x| < 1,\ \alpha \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

(a) Velja:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\ln(1+x)}{1+x}, \\
&= \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots\right)\left(1 - x + x^2 - x^3 + \cdots\right), \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.
\end{aligned}$$

Števila a_n dobimo s konvolucijskim produktom obeh vrst:

$$\begin{aligned} a_0 &= 0, \\ a_1 &= 1, \\ a_2 &= -\left(1 + \frac{1}{2}\right), \\ a_3 &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}, \end{aligned}$$

za splošni člen pa velja

$$a_n = (-1)^{n+1}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right).$$

Torej je

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right)x^n = x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{11}{6}x^3 + \cdots$$

(b) Sedaj izračunajmo še razvoj funkcije $f(x) = \frac{1}{x^2-5x+6}$ okoli točke $a = 1$. Uporabili bomo formulo za geometrijsko vrsto. Najprej opazimo, da velja

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 5x + 6} = \frac{1}{(x-3)(x-2)} = \frac{1}{((x-1)-2)((x-1)-1)} = \frac{1}{2}\frac{1}{(1 - \frac{x-1}{2})(1-(x-1))}.$$

Da si malce olajšamo pisavo, označimo $t = x - 1$. Potem je:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{1}{(1-(x-1))(1-\frac{x-1}{2})} &= \frac{1}{2}\frac{1}{(1-\frac{t}{2})(1-t)}, \\ &= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{t}{2} + \frac{t^2}{4} + \frac{t^3}{8} + \cdots\right)\left(1 + t + t^2 + t^3 + \cdots\right), \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n. \end{aligned}$$

Števila a_n dobimo s konvolucijskim produktom obeh vrst:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2}, \\ a_1 &= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\right), \\ a_2 &= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right), \\ a_3 &= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right), \end{aligned}$$

za splošni člen pa velja

$$a_n = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) = \frac{1}{2}\frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Od tod dobimo

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)(x-1)^n = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}(x-1) + \frac{7}{8}(x-1)^2 + \frac{15}{16}(x-1)^3 + \cdots$$

Taylorjeva vrsta konvergira k funkciji f na intervalu $(0,2)$, sicer pa divergira. □

(15) Izračunaj limite s pomočjo razvoja v Taylorjevo vrsto:

(a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x^2} - 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}x^4}{x^6}$,

(b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2} - 1}{1 - \cos x}$.

Rešitev: Limite kvocienta načeloma računamo z uporabo L'Hospitalovega pravila, vendar pa včasih pridemo do rezultata hitreje z uporabo razvoja v Taylorjevo vrsto. Še posebej to pride do izraza, ko imamo opravka s kompliciranimi funkcijami, katerih odvodi imajo čedalje več členov.

Pri metodi razvoja v Taylorjevo vrsto vsak člen nadomestimo s prvimi dvemi ali tremi členi v razvoju in pogledamo, kaj vse se pokrajša. Če se slučajno pokrajša vse, moramo pogledati še nadaljnje člene.

(a) Uporabili bomo binomsko formulo $\sqrt{1+x^2} = 1 + \binom{\frac{1}{2}}{1}x^2 + \binom{\frac{1}{2}}{2}x^4 + \binom{\frac{1}{2}}{3}x^6 + \ldots$. Ker je $\binom{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$, $\binom{\frac{1}{2}}{2} = -\frac{1}{8}$ in $\binom{\frac{1}{2}}{3} = \frac{1}{16}$, je:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}x^4}{x^6} &= \lim_{x\to 0} \frac{(1 + \binom{\frac{1}{2}}{1}x^2 + \binom{\frac{1}{2}}{2}x^4 + \binom{\frac{1}{2}}{3}x^6 + \ldots) - 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}x^4}{x^6}, \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{16}x^6 + \ldots}{x^6} = \frac{1}{16}.
\end{aligned}$$

(b) Pri tej limiti bomo uporabili Taylorjeva razvoja:

$$\begin{aligned}
e^{x^2} &= 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \ldots, \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \ldots.
\end{aligned}$$

Tako dobimo

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - 1}{1 - \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{(1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \ldots) - 1}{1 - (1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \ldots)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 + \frac{x^4}{2} + \ldots}{\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!} + \ldots} = 2.$$

□