Analiza 1

Kompleksna števila in množice

(1) Reši v obsegu kompleksnih števil dani enačbi:

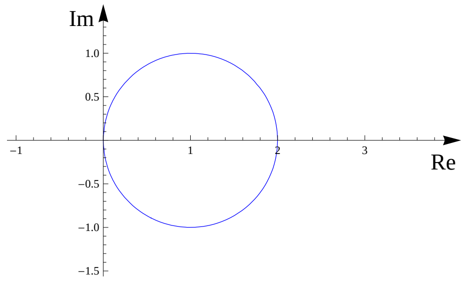
(a) $|z+1| = |2z-1|$,

(b) $z^2 + 2i\text{Re}z = |z|$.

Rešitev: (a) Pišimo $z = x + iy$ in računajmo:

$$\begin{aligned}
|z+1| &= |2z-1|, \\
|x+iy+1| &= |2x+2iy-1|, \\
\sqrt{(x+1)^2+y^2} &= \sqrt{(2x-1)^2+4y^2}, \\
x^2+2x+1+y^2 &= 4x^2-4x+1+4y^2, \\
0 &= 3x^2-6x+3y^2, \\
1 &= (x-1)^2+y^2.
\end{aligned}$$

Vidimo, da je to krožnica s središčem v točki $S(1,0)$ in s polmerom $R = 1$.



(b) Naj bo $z = x + iy$. Sledi:

$$\begin{aligned}
z^2 + 2i\text{Re}z &= |z|, \\
(x+iy)^2 + 2ix &= \sqrt{x^2+y^2}, \\
x^2 + 2ixy - y^2 + 2ix &= \sqrt{x^2+y^2}, \\
(x^2-y^2) + i(2xy+2x) &= \sqrt{x^2+y^2}.
\end{aligned}$$

Če primerjamo realni in imaginarni komponenti obeh strani enačbe, dobimo naslednji sistem realnih enačb:

$$\begin{aligned}
x^2 - y^2 &= \sqrt{x^2+y^2}, \\
2xy + 2x &= 0.
\end{aligned}$$

Druga enačba se prevede v enačbo

$$x(y+1) = 0.$$

Torej mora veljati bodisi $x = 0$ bodisi $y = -1$. Če je $x = 0$, iz prve enačbe sledi, da mora biti tudi $y = 0$. Če je $y = -1$, pa iz prve enačbe sledi:

$$\begin{aligned} x^2 - 1 &= \sqrt{x^2 + 1}, \\ x^4 - 2x^2 + 1 &= x^2 + 1, \\ x^4 - 3x^2 &= 0, \\ x^2(x^2 - 3) &= 0. \end{aligned}$$

Torej mora biti $x = 0$ ali $x = \pm\sqrt{3}$. Preverimo lahko, da rešitev $x = 0$ ne ustreza prvotni enačbi, zato so rešitve enačbe:

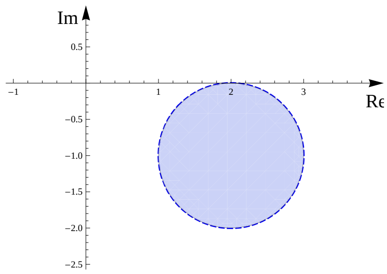
$$\begin{aligned} z_1 &= 0, \\ z_2 &= \sqrt{3} - i, \\ z_3 &= -\sqrt{3} - i. \end{aligned}$$

□

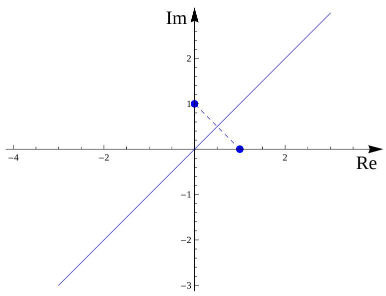
(2) Skiciraj naslednje podmnožice kompleksnih števil. Nalogo poskusi rešiti brez računanja.

(a) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - 2 + i| < 1\}$,
(b) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - 1| = |z - i|\}$,
(c) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| + |z - 3| = 4\}$.

Rešitev: (a) Neenačba $|z - 2 + i| < 1$ določa krog s središčem v točki $2 - i$ in s polmerom $R = 1$.



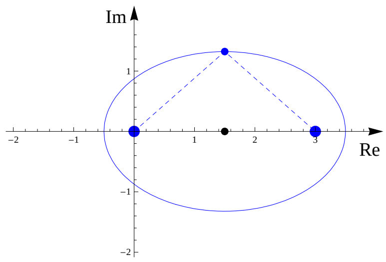
(b) Enačba $|z - 1| = |z - i|$ določa točke, ki so enako oddaljene od števil 1 in i. To so ravno točke na simetrali daljice med tema dvema točkama, ki pa se ujema s simetralo lihih kvadrantov.



Računsko bi lahko do rešitve prišli takole:

$$
\begin{aligned}
|z-1| &= |z-i|, \\
\sqrt{(x-1)^2+y^2} &= \sqrt{x^2+(y-1)^2}, \\
x^2-2x+1+y^2 &= x^2+y^2-2y+1, \\
y &= x.
\end{aligned}
$$

(c) Rešitev enačbe $|z|+|z-3|=4$ so vsa kompleksna števila, ki imajo konstantno vsoto oddaljenosti od števil 0 in 3. Če se spomnimo na geometrijsko definicijo elipse, lahko od tod sklepamo, da bomo dobili elipso z goriščema v točkah 0 oziroma 3. Razdalja med tema dvema točkama je enaka dvakratniku linearne ekscentričnosti, kar pomeni, da je $e=\frac{3}{2}$. Dvakratnik velike polosi pa je po drugi strani enak vsoti oddaljenosti od gorišč, kar pomeni, da je $a=2$. Od tod dobimo še $b^2=a^2-e^2=\frac{7}{4}$. Središče elipse je v razpolovišcu daljice med goriščema, ki je v točki $S(\frac{3}{2},0)$.



Računsko pa dobimo:

$$
\begin{aligned}
|z|+|z-3| &= 4, \\
\sqrt{(x-3)^2+y^2} &= 4-\sqrt{x^2+y^2}, \\
x^2-6x+9+y^2 &= 16+x^2+y^2-8\sqrt{x^2+y^2}, \\
6x+7 &= 8\sqrt{x^2+y^2}, \\
36x^2+84x+49 &= 64x^2+64y^2, \\
28(x-\tfrac{3}{2})^2+64y^2 &= 112, \\
\frac{(x-\frac{3}{2})^2}{4}+\frac{y^2}{\frac{7}{4}} &= 1.
\end{aligned}
$$

$\square$

(3) Naj bo z kompleksno število, $z \neq 1$ in $|z|=1$. Dokaži, da je število $i\frac{z+1}{z-1}$ realno.

Rešitev: Spomnimo se, da je kompleksno število w realno natanko takrat, ko je $w=\overline{w}$. Definirajmo

$$w = i\frac{z+1}{z-1}$$

in računajmo:

$$
\begin{aligned}
w &\stackrel{?}{=} \overline{w},\\
i\frac{z+1}{z-1} &\stackrel{?}{=} -i\frac{\overline{z}+1}{\overline{z}-1},\\
(z+1)(\overline{z}-1) &\stackrel{?}{=} -(\overline{z}+1)(z-1),\\
|z|^2+\overline{z}-z-1 &\stackrel{?}{=} -|z|^2-z+\overline{z}+1,\\
|z|^2-1 &\stackrel{?}{=} -|z|^2+1.
\end{aligned}
$$

Ker je $|z|=1$, zadnja enakost drži. Torej je število $i\frac{z+1}{z-1}$ realno. $\square$

(4) Z uporabo de Moivrove formule izračunaj naslednji kompleksni števili:

(a) $z=(1+i\sqrt{3})^{42}$,

(b) $z=\dfrac{1}{(1+i)^8}$.

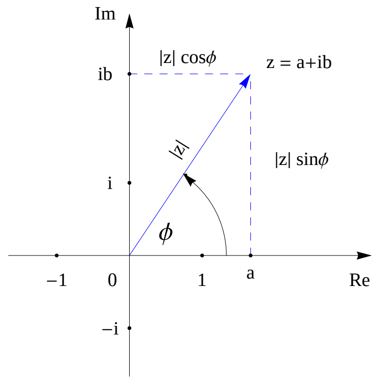
Rešitev: Poleg kartezičnega zapisa kompleksnega števila $z=a+ib$ nam pri računanju pogosto prideta prav polarni zapis

$$z=|z|(\cos\phi+i\sin\phi)$$

in pa Eulerjev zapis

$$z=|z|e^{i\phi},$$

kjer je $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$ absolutna vrednost, ϕ pa argument (polarni kot) števila z.



Za nas bo Eulerjev zapis zaenkrat le primeren pripomoček za računanje, ko se bomo naučili potencirati na kompleksne eksponente, pa bomo dokazali, da velja Eulerjeva formula

$$e^{i\phi}=\cos\phi+i\sin\phi.$$

S pomočjo de Moivrove formule lahko računamo potence kompleksnih števil. Če je namreč $z=|z|(\cos\phi+i\sin\phi)=|z|e^{i\phi}$, potem za vsak $n\in\mathbb{N}$ velja

$$z^n=|z|^n(\cos n\phi+i\sin n\phi)=|z|^ne^{in\phi}.$$

(a) Pišimo $w = 1 + i\sqrt{3}$. Potem je $|w| = 2$ in $\phi = \frac{\pi}{3}$. Po de Moivrovi formuli sledi

$$z = w^{42} = 2^{42}\left(\cos\frac{42\pi}{3} + i\sin\frac{42\pi}{3}\right) = 2^{42}.$$

(b) Naj bo sedaj $w = 1 + i$. Potem je $|w| = \sqrt{2}$, $\phi = \frac{\pi}{4}$ in

$$z = \frac{1}{w^8} = \frac{1}{16\left(\cos\frac{8\pi}{4} + i\sin\frac{8\pi}{4}\right)} = \frac{1}{16}.$$

□

(5) Reši v obsegu kompleksnih števil enačbi:

(a) $z^6 = 1$,

(b) $z^4 = -8 + 8\sqrt{3}i$.

Rešitev: V realnem ima enačba $x^n = a$ za poljuben $a > 0$ natanko eno pozitivno rešitev, ki ji rečemo n-ti koren števila a in jo označimo z $\sqrt[n]{a}$.

V kompleksnem pa ima enačba $z^n = a$ za poljubno neničelno kompleksno število a natanko n različnih rešitev. Posebej pomembne so rešitve enačbe

$$z^n = 1,$$

ki jim rečemo n-ti koreni enote.

(a) Iščemo rešitve enačbe $z^6 = 1$. Pišimo $z = |z|e^{i\phi}$. Sledi

$$|z|^6 e^{i6\phi} = 1 \cdot e^{i2k\pi}.$$

Vidimo, da je:

$$\begin{aligned} |z| &= 1, \\ \phi &= \frac{k\pi}{3}. \end{aligned}$$

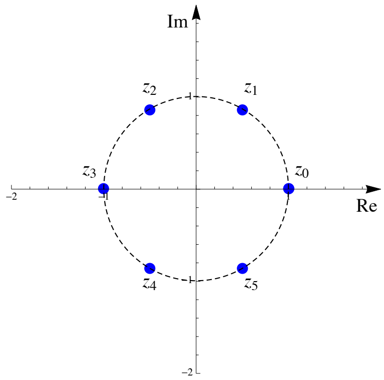
Ker nas zanimajo polarni koti $\phi \in [0, 2\pi)$, pridejo v poštev samo $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Rešitve enačbe so

$$z_k = e^{\frac{k\pi i}{3}}, \qquad k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}.$$

Eksplicitno so to števila:

$$\begin{aligned} z_0 &= 1, \\ z_1 &= \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \\ z_2 &= -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \\ z_3 &= -1, \\ z_4 &= -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, \\ z_5 &= \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Geometrijsko so rešitve enačbe $z^6 = 1$ oglišča enakostraničnega šestkotnika, ležijo pa na enotski krožnici.



Opomba: Za splošen n tvorijo n-ti koreni enote oglišča enakostraničnega n-kotnika. Eno izmed oglišč je zmeraj $z_0 = 1$. Če je n lih, je to hkrati tudi edini realni koren enačbe $z^n = 1$. Če je n sod, pa je realen še $z_{\frac{n}{2}} = -1$.

(b) Rešimo še enačbo $z^4 = -8 + 8\sqrt{3}i$. Najprej moramo desno stran zapisati v Eulerjevi obliki

$$-8 + 8\sqrt{3}i = 16e^{i\frac{2\pi}{3}}.$$

Če pišemo $z = |z|e^{i\phi}$, dobimo

$$|z|^4 e^{i4\phi} = 16 \cdot e^{i\left(\frac{2\pi}{3}+2k\pi\right)}.$$

Od tod dobimo:

$$\begin{aligned} |z| &= 2, \\ \phi &= \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2} \end{aligned}$$

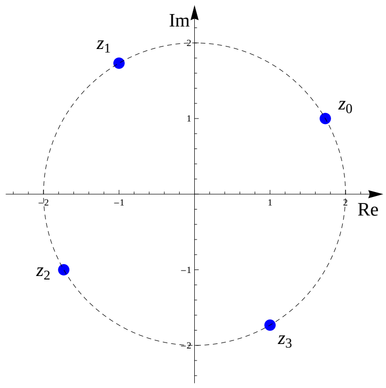
za $k \in \{0, 1, 2, 3\}$. Rešitve enačbe so torej

$$z_k = 2e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}\right)}, \quad k \in \{0, 1, 2, 3\}.$$

Eksplicitno so to števila:

$$\begin{aligned} z_0 &= \sqrt{3} + i, \\ z_1 &= -1 + i\sqrt{3}, \\ z_2 &= -\sqrt{3} - i, \\ z_3 &= 1 - i\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Rešitve enačbe tokrat tvorijo oglišča kvadrata in ležijo na krožnici s polmerom 2. Kvadrat je zavrten za kot $\frac{\pi}{6}$ glede na koordinatne osi.



Opomba: n-te korene kompleksnega števila a lahko dobimo tudi na naslednji način. Če pišemo $a = |a|e^{i\phi}$, je $z_0 = \sqrt[n]{|a|}e^{\frac{i\phi}{n}}$ eden izmed n-tih korenov števila a. Preostale n-te korene dobimo, če z_0 pomnožimo z n-timi koreni enote. Vidimo, da n-ti koreni števila a določajo oglišča enakostraničnega n-kotnika, ki leži na krožnici s središčem v 0 in s polmerom $\sqrt[n]{|a|}$. Glede na standardni n-kotnik korenov enote je ta n-kotnik zavrten za kot $\frac{\phi}{n}$. $\square$

(6) Reši enačbo $z^n = \overline{z}$ za $n \geq 2$.

Rešitev: Rešujemo enačbo $z^n = \overline{z}$. Ena rešitev je $z = 0$, zato v nadaljevanju privzemimo, da je $z \neq 0$. Če enačbo $z^n = \overline{z}$ pomnožimo z z, dobimo:

$$z^{n+1} = |z|^2,$$
$$|z|^{n+1}e^{i(n+1)\phi} = |z|^2 e^{i2k\pi}.$$

Od tod dobimo, da je $|z| = 1$ in $\phi = \frac{2k\pi}{n+1}$ za $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Rešitve enačbe so torej

$$z \in \left\{0, 1, e^{\frac{2\pi i}{n+1}}, e^{\frac{4\pi i}{n+1}}, \ldots, e^{\frac{2n\pi i}{n+1}}\right\}.$$

Geometrično so to poleg koordinatnega izhodišča oglišča pravilnega $(n+1)$-kotnika na enotski krožnici. $\square$

(7) Reši v obsegu kompleksnih števil enačbi:

(a) $z^3 + 3z^2 + z - 5 = 0$,
(b) $z^2 - (1 - 4i)z - 5 - 5i = 0$.

Rešitev: (a) Polinomska enačba stopnje n ima po osnovnem izreku algebre n kompleksnih ničel. Kakšna je lahko večkratna, najpogosteje pa so vse paroma različne. Če ima polinom realne koeficiente, nastopajo kompleksne ničle v konjugiranih parih.

Kubična enačba $z^3 + 3z^2 + z - 5 = 0$ ima tri ničle. Preverimo lahko, da je ena izmed njih $z_1 = 1$. Z uporabo Hornerjevega algoritma nato dobimo razcep

$$z^3 + 3z^2 + z - 5 = (z - 1)(z^2 + 4z + 5).$$

Kvadratni člen na desni ima dve kompleksni ničli:

$$z_2 = -2 + i,$$
$$z_3 = -2 - i,$$

ki sta paroma konjugirani.

(b) Rešujemo kompleksno kvadratno enačbo

$$z^2 - (1-4i)z - 5 - 5i = 0.$$

Njeni rešitvi sta

$$z_{1,2} = \frac{1-4i \pm \sqrt{(1-4i)^2 + 4(5+5i)}}{2} = \frac{1-4i \pm \sqrt{5+12i}}{2}.$$

Kvadratni koren $\sqrt{5+12i}$ moramo sedaj izračunati v kompleksnem. Recimo, da računamo koren kompleksnega števila $z = |z|(\cos\phi + i\sin\phi)$. Če je $z \neq 0$, ima z dva kvadratna korena, ki sta določena z izrazom

$$\sqrt{z} = \pm\sqrt{|z|}(\cos\tfrac{\phi}{2} + i\sin\tfrac{\phi}{2}).$$

To število lahko natančno izračunamo z uporabo trigonometričnih formul:

$$\cos\tfrac{\phi}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\phi}{2}},$$
$$\sin\tfrac{\phi}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\phi}{2}}.$$

Predznaka izberemo z upoštevanjem kvadranta, v katerem leži število z.

V našem primeru je $|z| = \sqrt{25+144} = 13$ in $\cos\phi = \frac{x}{|z|} = \frac{5}{13}$. Ker število z leži v prvem kvadrantu, bomo obakrat vzeli predznak plus, da dobimo:

$$\cos\tfrac{\phi}{2} = \sqrt{\frac{1+\frac{5}{13}}{2}} = \sqrt{\frac{9}{13}},$$
$$\sin\tfrac{\phi}{2} = \sqrt{\frac{1-\frac{5}{13}}{2}} = \sqrt{\frac{4}{13}}.$$

Od tod sledi, da je

$$\sqrt{5+12i} = \pm\sqrt{13}(\sqrt{\tfrac{9}{13}} + i\sqrt{\tfrac{4}{13}}) = \pm(3+2i).$$

Rešitvi kvadratne enačbe sta torej:

$$z_1 = 2 - i,$$
$$z_2 = -1 - 3i.$$

□

(8) Dokaži, da za vsa neničelna kompleksna števila z velja

$$\left|\frac{z}{|z|}-1\right| \leq \arg z.$$

Nalogo poskusi rešiti geometrijsko.

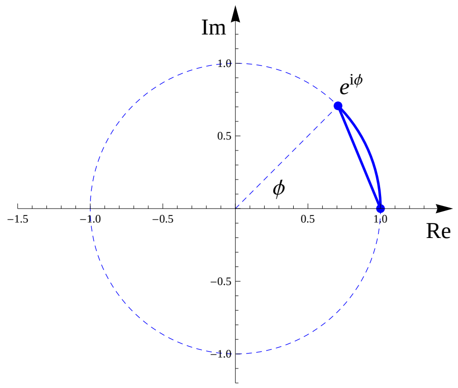
Rešitev: Tokrat si bomo pomagali z zapisom kompleksnega števila v Eulerjevi obliki. Naj bo $z=|z|e^{i\phi}$. Potem je

$$\left|\frac{z}{|z|}-1\right| = |e^{i\phi}-1|,$$

kar pomeni, da dokazujemo neenakost

$$|e^{i\phi}-1| \leq \phi.$$

Izraz na levi je enak dolžini daljice med točkama $e^{i\phi}$ in 1 v kompleksni ravnini. Ker ti dve točki ležita na enotski krožnici, pa je kot ϕ enak kar dolžini loka med njima. Ker je daljica najkrajša pot med dvema točkama, velja dana neenakost.



□

(9) Naj bosta $a \neq 0$ in b kompleksni števili. Dokaži, da ima enačba $z^2-2az+b=0$ obe rešitvi na enotski krožnici natanko tedaj, kadar je $|a| \leq 1$, $|b|=1$ in $e^{i\arg b}=e^{2i\arg a}$.

Rešitev: Kadar dokazujemo ekvivalenco dveh trditev, moramo dokazati implikaciji v obe smeri.

($\Longleftarrow$) Denimo najprej, da velja $|a| \leq 1$, $|b|=1$ in $e^{i\arg b}=e^{2i\arg a}$. Potem lahko zapišemo:

$$a = |a|e^{i\phi},$$
$$b = e^{2i\phi}$$

za nek $\phi = \arg a$. V tem primeru sta rešitvi kvadratne enačbe $z^2-2az+b=0$ števili

$$z_{1,2} = \frac{2a \pm \sqrt{4a^2-4b}}{2} = |a|e^{i\phi} \pm \sqrt{|a|^2e^{2i\phi}-e^{2i\phi}} = e^{i\phi}(|a| \pm \sqrt{|a|^2-1}).$$

Prvi faktor leži na enotski krožnici, zato moramo pokazati še, da leži tudi člen

$$|a| \pm \sqrt{|a|^2-1}$$

na enotski krožnici. Ker je $|a| \leq 1$, je $1 - |a|^2 \geq 0$, zato lahko to število zapišemo v kartezični obliki

$$|a| \pm \sqrt{|a|^2 - 1} = |a| \pm i\sqrt{1 - |a|^2}.$$

Od tod pa takoj sledi, da je absolutna vrednost tega števila enaka 1, kar smo želeli pokazati.

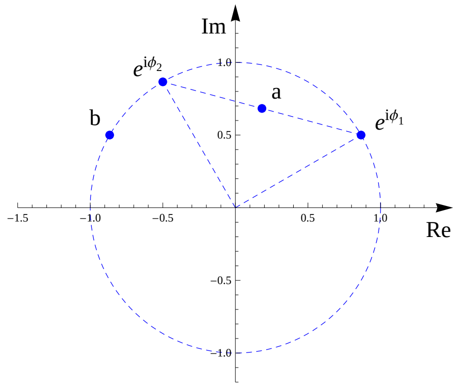
($\Longrightarrow$) Sedaj privzemimo, da ležita rešitvi enačbe $z^2 - 2az + b = 0$ na enotski krožnici. Potem ju lahko zapišemo v obliki:

$$\begin{aligned} z_1 &= e^{i\phi_1}, \\ z_2 &= e^{i\phi_2} \end{aligned}$$

za neka $\phi_1, \phi_2 \in [0, 2\pi)$. Privzamemo lahko, da je $\phi_1 \leq \phi_2$. Z uporabo Vietovih formul dobimo:

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= 2a, \\ z_1 z_2 &= b. \end{aligned}$$

Sedaj bomo poskusili ti dve enačbi interpretirati geometrično. Poglejmo si skico v primeru, ko je $\phi_2 - \phi_1 < \pi$.

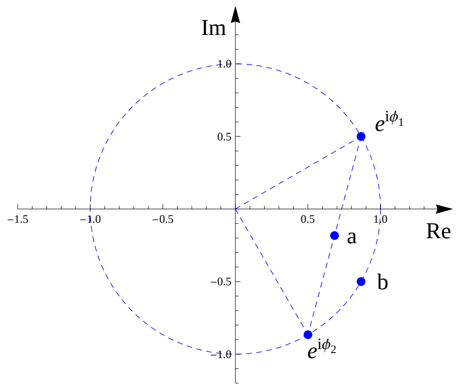


Vidimo, da je točka a razpolovišče daljice med z_1 in z_2. Od tod takoj sledi, da je $|a| \leq 1$ in da je $\arg a = \frac{1}{2}(\phi_1 + \phi_2)$. Po drugi strani pa je

$$b = z_1 z_2 = e^{i(\phi_1 + \phi_2)},$$

od koder sledi $\arg b = \phi_1 + \phi_2$ in $|b| = 1$. Torej je $\arg b = 2 \arg a$, kot smo želeli dokazati.

Malce drugače pa je treba ravnati v primeru, ko je $\phi_2 - \phi_1 > \pi$.



V tem primeru je:

$$\begin{aligned}\arg a &= \tfrac{1}{2}(\phi_1 + \phi_2) + \pi,\\ \arg b &= \phi_1 + \phi_2.\end{aligned}$$

V tem primeru je $\arg b = 2\arg a + 2\pi$, od koder sledi $e^{i\arg b} = e^{2i\arg a}$.

<u>Opomba:</u> Ker je $a \neq 0$, se ne more zgoditi, da bi bilo $\phi_2 - \phi_1 = \pi$. $\square$

(10) (a) Poišči oglišča kvadrata v $\mathbb{C}$, ki ima središče v točki $s = 1 + i$, eno izmed oglišč pa v točki $a = 4 + 3i$.

(b) Vzemimo poljuben štirikotnik v $\mathbb{C}$ in nad vsako njegovo stranico narišimo kvadrat. Središča dobljenih kvadratov označimo z A, B, C in D. Dokaži, da je daljica AC pravokotna na daljico BD in da sta obe daljici enako dolgi.

Rešitev: (a) Vsako orientacijo ohranjajočo podobnostno transformacijo evklidske ravnine lahko predstavimo s kompleksno linearno preslikavo oblike

$$f(z) = az + b,$$

kjer sta $a \neq 0$ in b kompleksni števili. Če pišemo $a = |a|e^{i\phi}$, lahko preslikavo f zapišemo kot kompozicijo:

(1) Središčnega raztega s središčem v 0 za faktor $|a|$,

(2) Rotacije okoli 0 za kot ϕ,

(3) Translacije za vektor b.

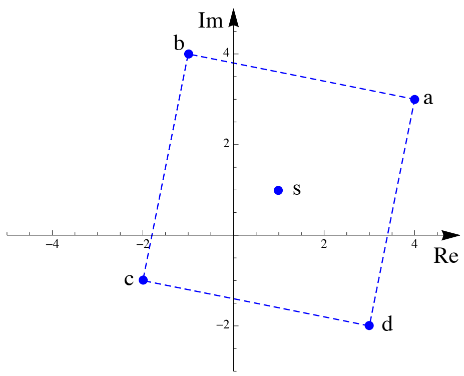
Rotacijo okoli točke s za kot ϕ pa lahko zapišemo s predpisom

$$f(z) = s + e^{i\phi}(z - s).$$

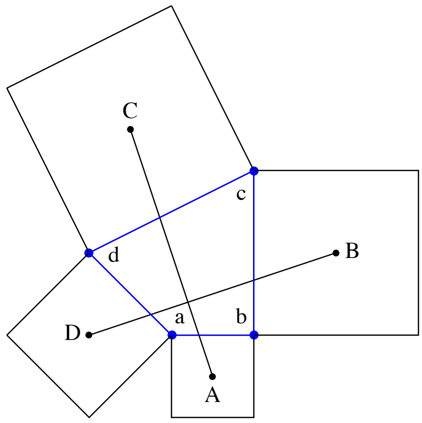
V našem primeru imamo kvadrat s središčem v točki $s = 1 + i$ in ogliščem $a = 4 + 3i$. Oglišča b, c in d dobimo tako, da vektor $a - s = 3 + 2i$ zavrtimo okoli središča s za kote $90°$, $180°$ in $270°$. Tako dobimo:

$$\begin{aligned}b &= s + e^{\frac{i\pi}{2}}(s - a) = 1 + i + i(3 + 2i) = -1 + 4i,\\ c &= s + e^{i\pi}(s - a) = 1 + i - (3 + 2i) = -2 - i,\\ d &= s + e^{\frac{3i\pi}{2}}(s - a) = 1 + i - i(3 + 2i) = 3 - 2i.\end{aligned}$$

Poglejmo še skico dobljenega kvadrata.



(b) Označimo oglišča štirikotnika z a, b, c in d. Nadalje naj bodo A, B, C in D središča kvadratov, ki jih dobimo nad stranicami štirikotnika.



Točko A dobimo tako, da točko b zavrtimo za kot $\phi = -\frac{\pi}{4}$ in hkrati še skrčimo za faktor $\frac{\sqrt{2}}{2}$ okoli točke a. Tako dobimo

$$A = a + \tfrac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{i\pi}{4}}(b-a) = a + \tfrac{1}{2}(1-i)(b-a) = \tfrac{1}{2}(a+b) + \tfrac{i}{2}(a-b).$$

Analogno lahko izračunamo še:

$$\begin{aligned} B &= \tfrac{1}{2}(b+c) + \tfrac{i}{2}(b-c), \\ C &= \tfrac{1}{2}(c+d) + \tfrac{i}{2}(c-d), \\ D &= \tfrac{1}{2}(d+a) + \tfrac{i}{2}(d-a). \end{aligned}$$

Daljici AC in BD lahko potem izrazimo s kompleksnima številoma:

$$\begin{aligned} AC &= \tfrac{1}{2}(c+d-a-b) + \tfrac{i}{2}(c+b-a-d), \\ BD &= \tfrac{1}{2}(a+d-b-c) + \tfrac{i}{2}(c+d-a-b). \end{aligned}$$

Od tod sledi

$$BD = iAC,$$

kar pa pomeni, da dobimo daljico BC z vrtenjem daljice AC za $90°$. Torej sta daljici pravokotni in enako dolgi. □

(11) Izpelji adicijska izreka za $\cos n\phi$ in $\sin n\phi$ za $n = 3$ in $n = 4$.

Rešitev: Poglejmo si za začetek adicijska izreka za $\cos 3\phi$ in $\sin 3\phi$. Iz de Moivrove formule sledi

$$(\cos\phi + i\sin\phi)^3 = \cos 3\phi + i\sin 3\phi.$$

Če z uporabo binomske formule razvijemo levo stran, dobimo:

$$\begin{aligned} (\cos\phi + i\sin\phi)^3 &= \cos^3\phi + 3i\cos^2\phi\sin\phi - 3\cos\phi\sin^2\phi - i\sin^3\phi, \\ &= \cos^3\phi + 3i(1-\sin^2\phi)\sin\phi - 3\cos\phi(1-\cos^2\phi) - i\sin^3\phi, \\ &= \cos^3\phi - 3\cos\phi\sin^2\phi + i(3\cos^2\phi\sin\phi - \sin^3\phi). \end{aligned}$$

Primerjava realnih in imaginarnih komponent v de Moivrovi formuli nam pove, da velja:

$$\begin{aligned}\cos 3\phi &= \cos^3\phi - 3\cos\phi\sin^2\phi,\\ \sin 3\phi &= 3\cos^2\phi\sin\phi - \sin^3\phi.\end{aligned}$$

Na podoben način dobimo:

$$\begin{aligned}\cos 4\phi &= \cos^4\phi - 6\cos^2\phi\sin^2\phi + \sin^4\phi,\\ \sin 4\phi &= 4\cos^3\phi\sin\phi - 4\cos\phi\sin^3\phi.\end{aligned}$$

V primeru poljubnega naravnega števila n pa velja

$$(\cos\phi + i\sin\phi)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} i^k \cos^{n-k}\phi\sin^k\phi$$

Izraz v vsoti bo realen, če je k sodo število in imaginaren, če je k liho število. Torej velja:

$$\begin{aligned}\cos n\phi &= \sum_{\substack{k=0\\ k \text{ sod}}}^{n}(-1)^{\frac{k}{2}}\binom{n}{k}\cos^{n-k}\phi\sin^k\phi,\\ \sin n\phi &= \sum_{\substack{k=1\\ k \text{ lih}}}^{n}(-1)^{\frac{k-1}{2}}\binom{n}{k}\cos^{n-k}\phi\sin^k\phi.\end{aligned}$$

$\square$

(12) Za poljuben $\phi \in (0, 2\pi)$ in poljuben $n \in \mathbb{N}$ izračunaj vsoti:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\cos k\phi &= 1 + \cos\phi + \cos 2\phi + \ldots + \cos n\phi,\\ \sum_{k=0}^{n}\sin k\phi &= \sin\phi + \sin 2\phi + \ldots + \sin n\phi.\end{aligned}$$

Rešitev: Pri izračunu danih vsot si bomo na zvit način pomagali z de Moivrovo formulo. Definirajmo:

$$\begin{aligned}x &= \sum_{k=0}^{n}\cos k\phi,\\ y &= \sum_{k=0}^{n}\sin k\phi.\end{aligned}$$

Potem velja

$$x + iy = \sum_{k=0}^{n}(\cos k\phi + i\sin k\phi) = \sum_{k=0}^{n} e^{ik\phi} = \sum_{k=0}^{n}\left(e^{i\phi}\right)^k.$$

Ker je $\phi \in (0, 2\pi)$, je $e^{i\phi} \neq 1$. Torej imamo opravka z vsoto geometrijskega zaporedja z začetnim členom 1 in s količnikom $e^{i\phi}$. Po znani formuli je ta vsota enaka

$$\sum_{k=0}^{n}\left(e^{i\phi}\right)^k = \frac{e^{i(n+1)\phi} - 1}{e^{i\phi} - 1}.$$

Prvotni vsoti bomo dobili tako, da bomo izračunali realno in imaginarno komponento kompleksnega števila na desni. Iz enakosti

$$\frac{e^{i(n+1)\phi}-1}{e^{i\phi}-1}=\frac{(e^{i(n+1)\phi}-1)(e^{-i\phi}-1)}{(e^{i\phi}-1)(e^{-i\phi}-1)}=\frac{-e^{i(n+1)\phi}+e^{in\phi}-e^{-i\phi}+1}{2-e^{i\phi}-e^{-i\phi}}$$

dobimo:

$$\begin{aligned} x &= \frac{-\cos(n+1)\phi+\cos n\phi-\cos\phi+1}{2-2\cos\phi}, \\ y &= \frac{-\sin(n+1)\phi+\sin n\phi+\sin\phi}{2-2\cos\phi}. \end{aligned}$$

Ta dva izraza lahko še malo poenostavimo z uporabo trigonometričnih identitet:

$$\begin{aligned} \sin\alpha-\sin\beta &= 2\sin\left(\tfrac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\left(\tfrac{\alpha+\beta}{2}\right), \\ \cos\alpha-\cos\beta &= -2\sin\left(\tfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\tfrac{\alpha-\beta}{2}\right) \end{aligned}$$

in pa enakostjo

$$2-2\cos\phi=4\sin^2\tfrac{\phi}{2}.$$

Sledi

$$x=\frac{1}{2}+\frac{-\cos(n+1)\phi+\cos n\phi}{4\sin^2\frac{\phi}{2}}=\frac{1}{2}+\frac{\sin(n+\frac{1}{2})\phi}{2\sin\frac{\phi}{2}}$$

in

$$y=\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\tfrac{\phi}{2}+\frac{-\sin(n+1)\phi+\sin n\phi}{4\sin^2\frac{\phi}{2}}=\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\tfrac{\phi}{2}-\frac{\cos(n+\frac{1}{2})\phi}{2\sin\frac{\phi}{2}}.$$

Tako smo izpeljali enakosti:

$$\begin{aligned} 1+\cos\phi+\cos 2\phi+\ldots+\cos n\phi &= \frac{1}{2}+\frac{\sin(n+\frac{1}{2})\phi}{2\sin\frac{\phi}{2}}, \\ \sin\phi+\sin 2\phi+\ldots+\sin n\phi &= \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\tfrac{\phi}{2}-\frac{\cos(n+\frac{1}{2})\phi}{2\sin\frac{\phi}{2}}, \end{aligned}$$

ki jima rečemo Lagrangeevi trigonometrični identiteti. □

V preostanku tega poglavja se bomo ukvarjali z močjo množic. Za množici A in B rečemo, da sta enako močni oziroma ekvipolentni (oznaka $|A|=|B|$), če obstaja bijekcija med njima. Pri predmetu Analiza 1 nas bodo zanimale predvsem:

· končne množice (te so ekvipolentne množici $\{1,2,\ldots,n\}$ za nek $n\in\mathbb{N}$),
· števno neskončne množice (te so ekvipolentne množici naravnih števil $\mathbb{N}$),
· množice z močjo kontinuuma (te so ekvipolentne množici realnih števil $\mathbb{R}$).

(13) Poišči bijekcije:

(a) $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}_0$,
(b) $f:\mathbb{N}\to(7\mathbb{N}_0+2)\cup(7\mathbb{N}_0+4)$,
(c) $f:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$.

Rešitev: Množica A je števno neskončna, če obstaja bijekcija $f : \mathbb{N} \to A$. To pomeni, da lahko elemente množice A razvrstimo v zaporedje, če definiramo $a_n := f(n)$. Od tod dobimo razpored

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

Če torej želimo pokazati, da je množica števno neskončna, najprej poskusimo elemente množice razvrstiti v zaporedje, formalno pa nato iz tega razporeda razberemo predpis za iskano bijekcijo.

(a) Množico nenegativnih celih števil $\mathbb{N}_0$ lahko razvrstimo v naslednje zaporedje

1	2	3	4	5	6	...
0	1	2	3	4	5	...

Od tod lahko preberemo, da sta iskani bijekciji $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_0$ in $f^{-1} : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}$ dani s predpisoma:

$$\begin{aligned} f(n) &= n - 1, & n &\in \mathbb{N}, \\ f^{-1}(k) &= k + 1, & k &\in \mathbb{N}_0. \end{aligned}$$

(b) Sedaj iščemo bijekcijo med množico naravnih števil in množico

$$(7\mathbb{N}_0 + 2) \cup (7\mathbb{N}_0 + 4) = \{2, 9, 16, 23, \ldots\} \cup \{4, 11, 18, 25, \ldots\}$$

Za izračun eksplicitne bijekcije lahko na primer elemente zgornje množice razporedimo v naslednje zaporedje

1	2	3	4	5	6	...
2	4	9	11	16	18	...

Ustrezni bijekciji $f : \mathbb{N} \to (7\mathbb{N}_0 + 2) \cup (7\mathbb{N}_0 + 4)$ in $f^{-1} : (7\mathbb{N}_0 + 2) \cup (7\mathbb{N}_0 + 4) \to \mathbb{N}$ sta dani s predpisoma:

$$f(n) = \begin{cases} \frac{7n-3}{2} & ; n \text{ lih}, \\ \frac{7n-6}{2} & ; n \text{ sod}, \end{cases}$$

$$f^{-1}(k) = \begin{cases} \frac{2k+3}{7} & ; k = 7l + 2, \\ \frac{2k+6}{7} & ; k = 7l + 4. \end{cases}$$

(c) Ustrezno bijekcijo bomo sedaj konstruirali tako, da bomo elemente množice $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ razvrstili v zaporedje po diagonalah, na katerih je vsota koordinat konstantna. Poglejmo si nekaj prvih členov.

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{ \underbrace{(1,1)}_{\text{vsota}=2}, \underbrace{(2,1), (1,2)}_{\text{vsota}=3}, \underbrace{(3,1), (2,2), (1,3)}_{\text{vsota}=4}, \underbrace{(4,1), (3,2), (2,3), (1,4)}_{\text{vsota}=5}, \ldots\}$$

Točka (m, n) je glede na ta dogovor n-ta točka v $(m+n-1)$-vi diagonali. Od tod dobimo predpis za iskano bijekcijo

$$f(m,n) = 1+2+3+\ldots+(m+n-2)+n = \frac{(m+n-2)(m+n-1)}{2}+n = \binom{m+n-1}{2}+n.$$

Inverz preslikave f je v tem primeru dokaj težko eksplicitno izračunati. Izkaže pa se, da lahko njen inverz opišemo na naslednji način. Za $k \in \mathbb{N}$ označimo

$$p = \left\lceil \frac{-1 + \sqrt{1 + 8k}}{2} \right\rceil - 1.$$

Potem ima inverz preslikave f predpis

$$f^{-1}(k) = \left(p + 2 - k + \binom{p+1}{2}, k - \binom{p+1}{2}\right).$$

$\square$

(14) Poišči bijekcije:

(a) $f : (0,1) \to (a,b)$,
(b) $f : (0,1) \to \mathbb{R}$,
(c) $f : (a,\infty) \to \mathbb{R}$.

Rešitev: Pri tej nalogi bomo pokazali, da so vsi odprti intervali enako močni.

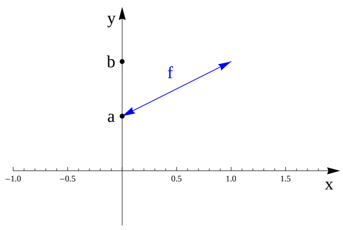
(a) Za bijekcijo $f : (0,1) \to (a,b)$ lahko vzamemo kar linearno funkcijo, za katero velja $f(0) = a$ in $f(1) = b$. Ta funkcija ima predpis

$$f(x) = (b-a)x + a,$$

njen inverz pa je

$$f^{-1}(y) = \frac{y-a}{b-a}.$$

Poglejmo še graf funkcije f.

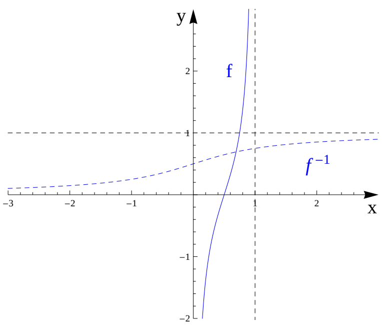


(b) V tem primeru iščemo bijekcijo med odprtim intervalom $(0,1)$ in pa množico realnih števil $\mathbb{R}$. Lahko bi našli racionalno funkcijo, ki bi imela pola v robnih točkah intervala $(0,1)$, lahko pa vzamemo tudi funkcijo $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ s predpisom

$$f(x) = \operatorname{tg}\left(\pi x - \frac{\pi}{2}\right)$$

Preslikava f je potem bijekcija z inverzom

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{\pi}\left(\operatorname{arc\,tg} x + \frac{\pi}{2}\right).$$

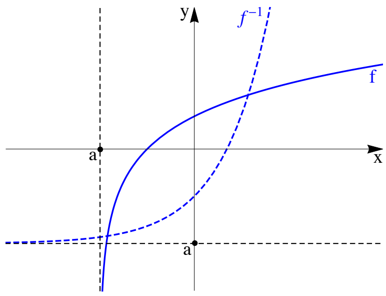


(c) Sedaj iščemo bijekcijo med polneskončnim intervalom (a, ∞) in množico realnih števil. Ustrezna je na primer ustrezno premaknjena logaritemska funkcija

$$f(x) = \ln(x - a)$$

z inverzom

$$f^{-1}(x) = e^x + a.$$



□

(15) Poišči bijekcijo $f : [0, 1) \to (0, 1)$.

Rešitev: V tem primeru ne bomo mogli najti zvezne bijekcije $f : [0, 1) \to (0, 1)$, ker takšne preslikave sploh ni. Zato se bomo morali malo bolj potruditi.

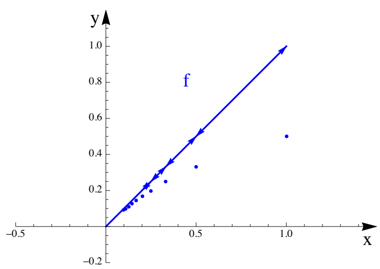
Najprej označimo z $A \subset [0, 1)$ in $A' \subset (0, 1)$ podmnožici:

$$A = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right\},$$
$$A' = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right\}.$$

Po eni strani sta množici A in A' ekvipolentni (eksplicitna bijekcija je $F : A \to A'$ s predpisom $F(0) = \frac{1}{2}$ ter $F(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n+1}$ za $n \geq 2$), po drugi strani pa je $[0, 1) \setminus A = (0, 1) \setminus A'$. Bijekcijo $f : [0, 1) \to (0, 1)$ bomo konstruirali tako, da bomo točke izven A pustili pri miru, točke v A pa preslikali s funkcijo F:

$$f(x) = \begin{cases} x & ; x \notin A, \\ F(x) & ; x \in A. \end{cases}$$

Tako definirana funkcija je bijekcija.



Opomba: Na podoben način lahko pokažemo, da so množice $[0, 1]$, $(0, 1)$, $[0, 1)$ in $(0, 1]$ vse paroma enako močne. □

(16) Dokaži, da imata množici $\mathbb{R}$ in $[0,1]\cup\mathbb{N}$ isto moč.

Rešitev: S podobno idejo kot pri prejšnji nalogi bi lahko tudi tokrat konstruirali bijekcijo med danima množicama. Dostikrat pa je ekvipolentnost dveh množic lažje dokazovati z uporabo Cantor-Bernstein-Schroederjevega izreka.

Za množico X rečemo, da ima moč manjšo ali enako kot množica Y (to označimo z $|X| \leq |Y|$), če obstaja injektivna preslikava $f : X \to Y$.

Izrek (Cantor-Bernstein-Schroeder)**.** *Naj za množici X in Y velja $|X| \leq |Y|$ in $|Y| \leq |X|$. Potem sta množici X in Y enako močni.*

Ta izrek bomo podrobneje spoznali pri predmetu Logika in množice. V praksi je uporaben, ker je pogosto lažje definirati dve injektivni preslikavi kot pa eno bijektivno.

Če želimo torej pokazati, da sta množici $\mathbb{R}$ in $[0,1]\cup\mathbb{N}$ enako močni, moramo konstruirati injektivni preslikavi:

$$\begin{aligned} i &: [0,1]\cup\mathbb{N} \to \mathbb{R}, \\ j &: \mathbb{R} \to [0,1]\cup\mathbb{N}. \end{aligned}$$

Ker je $[0,1]\cup\mathbb{N}$ podmnožica $\mathbb{R}$, je avtomatično $|[0,1]\cup\mathbb{N}| \leq |\mathbb{R}|$, saj lahko za i izberemo kar zožitev identitete s predpisom

$$i(x) = x.$$

Za konstrukcijo preslikave j pa se spomnimo, da imamo bijekcijo med $\mathbb{R}$ in $(0,1)$. Ker je $(0,1)$ podmnožica $[0,1]\cup\mathbb{N}$, smo tako našli iskano preslikavo. Ekspliciten predpis pa je

$$j(x) = \frac{1}{\pi}\left(\operatorname{arc\,tg} x + \frac{\pi}{2}\right).$$

$\square$

(17) Dokaži, da imata množici $[0,1)\times[0,1)$ in $[0,1)$ isto moč.

Rešitev: Preprosto lahko konstruiramo injektivno preslikavo $i : [0,1) \to [0,1)\times[0,1)$ s predpisom

$$i(x) = (x,x),$$

bolj komplicirana pa je konstrukcija injektivne preslikave $j : [0,1)\times[0,1) \to [0,1)$.

Vsako realno število $x \in [0,1)$ lahko enolično zapišemo v obliki

$$0.x_1x_2x_3\ldots,$$

kjer se cifra 9 ne ponavlja od nekod dalje. To pomeni, da npr. število 0.123 zapišemo v decimalni obliki $0.123000\ldots$ in ne v obliki $0.122999\ldots$.

Injektivno preslikavo $j : [0,1)\times[0,1) \to [0,1)$ lahko sedaj konstruiramo s predpisom

$$j\big(0.a_1a_2a_3\ldots,\, 0.b_1b_2b_3\ldots\big) = 0.a_1b_1a_2b_2a_3\ldots.$$

Zaradi enoličnosti decimalnega zapisa je ta preslikava injektivna, ni pa surjektivna, saj npr. število $0.292929292929\ldots$ ne leži v sliki.

<u>Opomba:</u> Lahko bi konstruirali tudi bijekcijo $f : [0,1)\times[0,1) \to [0,1)$. Ideja je v tem, da realno število $a \in [0,1)$ ne razdelimo na decimalke pač pa na bloke oblike $99\ldots9k$, kjer

je $k \neq 9$, ter z a_i označimo i-ti blok. Za $a = 0.929941$ je npr. $a_1 = 92$, $a_2 = 994$, $a_3 = 1$ ter $a_i = 0$ za $i \geq 4$. Sedaj definiramo $f : [0,1) \times [0,1) \to [0,1)$ s predpisom

$$f\big(0.a_1a_2a_3\ldots,\ 0.b_1b_2b_3\ldots\big) = 0.a_1b_1a_2b_2a_3\ldots.$$

Potem je f bijekcija z inverzom $f^{-1}(0.c_1c_2c_3\ldots) = (0.c_1c_3c_5\ldots, 0.c_2c_4c_6\ldots)$. □

(18) Določi moč naslednjih množic:

(a) $A = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \,|\, x_j \in \{0,1\} \text{ za vse } j \in \mathbb{N}\}$,

(b) $B = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \in A \,|\, x_j \leq x_{j+1} \text{ za vse } j \in \mathbb{N}\}$.

Rešitev: (a) Množica A sestoji iz vseh neskončnih zaporedij ničel in enic. Takšna zaporedja nas spominjajo na binarni decimalni zapis realnih števil, zato poskusimo dokazati, da ima množica A moč kontinuuma. Konstruirali bomo injektivni preslikavi:

$$\begin{aligned} f &: A \to [0,1), \\ g &: [0,1) \to A \end{aligned}$$

nato pa uporabili Cantor-Bernstein-Schroederjev izrek.

Preslikavo f bomo definirali tako, da bomo zaporedju priredili decimalno število, ki ima člene zaporedja za cifre. Eksplicitno je torej

$$f((x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)) = 0.x_1x_2x_3\ldots$$

Če bi izbrali na desni strani binarni zapis, bi imeli probleme, saj na primer zapisa:

$$\begin{aligned} &0.100000000000\ldots, \\ &0.011111111111\ldots \end{aligned}$$

določata isto realno število. Da se izognemo takšnim komplikacijam, na desni raje izberimo decimalni zapis. Potem je tako definirana preslikava injektivna.

Za definicijo preslikave $g : [0,1) \to A$ pa se spomnimo, da lahko vsako realno število $x \in [0,1)$ zapišemo v binarni obliki

$$x = 0.x_1x_2x_3\ldots,$$

kjer so $x_j \in \{0,1\}$ za vsak $j \in \mathbb{N}$. Takšen zapis je enoličen, če zahtevamo, da se enice ne ponavljajo od nekod dalje. Preslikava g je potem definirana s predpisom

$$g(x) = (x_1, x_2, x_3, \ldots).$$

Preslikavi f in g skupaj nam povesta, da ima množica A moč kontinuuma.

(b) V množici B so samo tista zaporedja, ki imajo na začetku nekaj ničel, nato pa same enice. Takšna so na primer:

$$\begin{aligned} &0,0,0,0,0,0\ldots, \\ &1,1,1,1,1,1\ldots, \\ &0,1,1,1,1,1,\ldots, \\ &0,0,1,1,1,1,\ldots \end{aligned}$$

Opazimo lahko, da je takšno zaporedje natanko določeno, če povemo, kdaj se pojavi prva enica. To nam da misliti, da je množica B števno neskončna.

Eksplicitno lahko konstruiramo bijekcijo $f : \mathbb{N}_0 \to B$ s predpisom

$$f(n) = \{\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n-1}, 1, 1, 1, \ldots\}$$

za $n \geq 1$ in

$$f(0) = \{0, 0, 0, \ldots\}.$$

$\square$

(19) Naj bo A neskončna množica odprtih, paroma disjunktnih intervalov v $\mathbb{R}$. Pokaži, da je A števno neskončna.

Rešitev: Recimo, da imamo množico intervalov

$$A = \{I_\alpha\},$$

ki so vsi paroma disjunktni. Nalogo bomo dokazali tako, da bomo konstruirali injektivno preslikavo

$$f : A \to \mathbb{Q}.$$

Od tod bo sledilo, da je $|A| \leq |\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}|$. Preslikavo f lahko konstruiramo takole. Najprej se spomnimo, da vsak interval vsebuje vsaj eno racionalno število. Izberimo torej za vsak interval I_α neko racionalno število r_α in definirajmo

$$f(I_\alpha) = r_\alpha.$$

Ker so intervali I_α paroma disjunktni, so števila r_α paroma različna, kar pa pomeni, da je preslikava f injektivna. Torej ima množica A kvečjemu števno neskončno elementov. $\square$

(20) Pokaži, da je množica vseh končnih podmnožic množice $\mathbb{N}$ števno neskončna.

Rešitev: Označimo z A množico končnih podmnožic množice $\mathbb{N}$. Definirali bomo injektivno preslikavo $f : A \to \mathbb{N}$ s predpisom

$$f(\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}) = 2^{a_1} + 2^{a_2} + \ldots + 2^{a_k}.$$

To je preslikava, ki priredi množici $B = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ naravno število, ki ima v dvojiškem zapisu enice natanko na mestih elementov množice B. Tako je na primer:

$$\begin{aligned} f(\emptyset) &= 0, \\ f(\{1\}) &= 2, \\ f(\{1, 2\}) &= 6, \\ f(\{1, 3, 4\}) &= 26. \end{aligned}$$

Vidimo, da dobimo v sliki preslikave f ravno vsa soda nenegativna števila. Če števila v sliki delimo z 2 in jim prištejemo 1, pa dobimo bijekcijo $F : A \to \mathbb{N}$ s predpisom

$$F(\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}) = 2^{a_1 - 1} + 2^{a_2 - 1} + \ldots + 2^{a_k - 1} + 1$$

$\square$