Analiza 1

Metrični prostori

(1) Na množico $M = (0, \infty) \times (0, \infty)$ vpeljemo metriko d s predpisom

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \left| \ln \frac{x_2}{x_1} \right| + \left| \ln \frac{y_2}{y_1} \right|.$$

Dokaži, da je d res metrika na množici M in nato skiciraj odprto kroglo $K((1,1), 1)$.

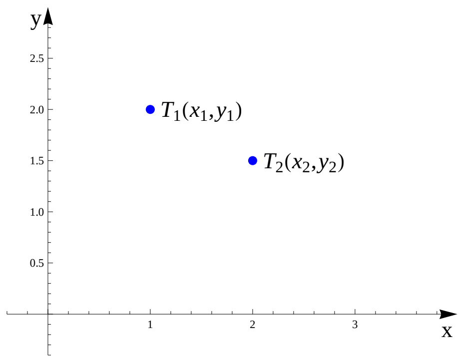
Rešitev: Metrika na neprazni množici M je preslikava $d : M \times M \to \mathbb{R}$, ki zadošča pogojem:

(1) Pozitivna definitnost: $d(x, y) \geq 0$ za vsaka $x, y \in M$ in $d(x, y) = 0 \iff x = y$.

(2) Simetričnost: $d(x, y) = d(y, x)$ za vsaka $x, y \in M$.

(3) Trikotniška neenakost: $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ za vsako trojico $x, y, z \in M$.

V našem primeru bomo pokazali, da preslikava d določa metriko na prvem kvadrantu ravnine. Označimo $T_1(x_1, y_1)$ in $T_2(x_2, y_2)$.



(a) Najprej bomo preverili, da preslikava d ustreza aksiomom metrike.

(1) Po definiciji je $d(T_1, T_2)$ nenegativno število, ki je enako nič natanko takrat, ko je

$$\left| \ln \frac{x_2}{x_1} \right| = \left| \ln \frac{y_2}{y_1} \right| = 0.$$

Od tod sledi, da je $x_1 = x_2$ in $y_1 = y_2$.

(2) Simetričnost preslikave d sledi iz enakosti

$$d(T_1, T_2) = \left| \ln \frac{x_2}{x_1} \right| + \left| \ln \frac{y_2}{y_1} \right| = \left| -\ln \frac{x_1}{x_2} \right| + \left| -\ln \frac{y_1}{y_2} \right| = \left| \ln \frac{x_1}{x_2} \right| + \left| \ln \frac{y_1}{y_2} \right| = d(T_2, T_1).$$

(3) Za dokaz trikotniške neenakosti pa najprej opazimo, da je

$$d(T_1, T_3) = \left| \ln \frac{x_3}{x_1} \right| + \left| \ln \frac{y_3}{y_1} \right| = \left| \ln \frac{x_3 x_2}{x_2 x_1} \right| + \left| \ln \frac{y_3 y_2}{y_2 y_1} \right| = \left| \ln \frac{x_3}{x_2} + \ln \frac{x_2}{x_1} \right| + \left| \ln \frac{y_3}{y_2} + \ln \frac{y_2}{y_1} \right|.$$

Če sedaj uporabimo trikotniško neenakost za absolutno vrednost, dobimo

$$\left| \ln \frac{x_3}{x_2} + \ln \frac{x_2}{x_1} \right| + \left| \ln \frac{y_3}{y_2} + \ln \frac{y_2}{y_1} \right| \leq \left| \ln \frac{x_3}{x_2} \right| + \left| \ln \frac{x_2}{x_1} \right| + \left| \ln \frac{y_3}{y_2} \right| + \left| \ln \frac{y_2}{y_1} \right|,$$

od koder sledi
$$d(T_1,T_3) \leq d(T_1,T_2) + d(T_2,T_3).$$

(b) Krogla v metričnem prostoru M je posplošitev pojma krogle v evklidskem prostoru. Odprta krogla s središčem v točki a in s polmerom r je podmnožica M, ki je definirana s predpisom
$$K(a,r) = \{x \in M \mid d(a,x) < r\}.$$
Podobno definiramo tudi zaprto kroglo
$$\overline{K}(a,r) = \{x \in M \mid d(a,x) \leq r\}.$$
V nadaljevanju bomo opisali kroglo $K((1,1),1)$. Ta krogla sestoji iz množice točk $T(x,y)$, ki zadoščajo pogoju
$$d((1,1),T) = |\ln x| + |\ln y| < 1.$$
Dobili smo neenačbo v ravnini, kar pomeni, da bo načeloma ta odprta krogla nek ravninski lik. Da bi rešili neenačbo, bomo obravnavali nekaj primerov.

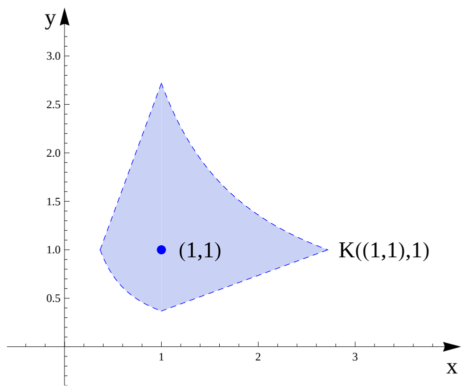
(1) Če je $x > 1$ in $y > 1$, imamo neenačbo:
$$\begin{aligned} \ln x + \ln y &< 1, \\ \ln xy &< 1, \\ xy &< e, \\ y &< \frac{e}{x}. \end{aligned}$$
Tako dobimo lik, ki leži pod krivuljo $y = \frac{e}{x}$ in ima obe koordinati večji od ena.

(2) Če je $x < 1$ in $y > 1$, dobimo neenačbo $-\ln x + \ln y < 1$, ki jo preoblikujemo v $y < ex$.

(3) V primeru, ko je $x < 1$ in $y < 1$, dobimo $-\ln x - \ln y < 1$ oziroma $y > \frac{1}{ex}$.

(4) Zadnja možnost je $x > 1$ in $y < 1$. Tedaj dobimo $\ln x - \ln y < 1$ oziroma $y > \frac{x}{e}$.

Odprta krogla $K((1,1),1)$ je torej lik, katerega rob sestoji iz dveh daljic in dveh lokov hiperbole. Robnih krivulj ne vsebuje. Če bi vzeli zaprto kroglo, bi le-ta vsebovala še robne krivulje.



Omenimo še, da je oblika krogle v splošnem odvisna od njenega središča, če metrika ni translacijsko invariantna. $\square$

(2) Na množico $\mathbb{R}$ vpeljemo metriko d s predpisom

$$d(x,y) = \begin{cases} |x-y| & ; (x,y \in \mathbb{Q}) \vee (x,y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}), \\ |x-y|+1 & ; \text{sicer.} \end{cases}$$

Dokaži, da je d res metrika na množici $\mathbb{R}$ in določi kroglo $K(0,2)$.

Rešitev: Najprej preverimo, da preslikava d zadošča aksiomom za metriko. Iz definicije sledi, da velja

$$d(x,y) \geq |x-y|,$$

kar pomeni, da je razdalja d kvečjemu večja od običajne razdalje na realni premici $\mathbb{R}$.

(1) Kot prvo je $d(x,y) \geq |x-y| \geq 0$ in $d(x,x) = 0$. Če je slučajno $d(x,y) = 0$, od tod sledi $|x-y| = 0$ oziroma $x = y$.

(2) Simetričnost preslikave d sledi iz simetričnosti absolutne vrednosti.

(3) Pokazati moramo še, da za poljubno trojico $x, y, z \in \mathbb{R}$ velja

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z).$$

V ta namen definirajmo pomožno funkcijo $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s predpisom $q(x) = \begin{cases} 1 & ; x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & ; x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$

V primeru, ko je $q(x) = q(z)$, je

$$d(x,z) = |x-z| = |x-y+y-z| \leq |x-y| + |y-z| \leq d(x,y) + d(y,z).$$

Če je $q(x) \neq q(z)$, pa mora veljati bodisi $q(y) = q(x)$ bodisi $q(y) = q(z)$. Zaradi simetričnosti lahko predpostavimo, da je na primer $q(y) = q(x)$. Potem velja

$$d(x,z) = |x-z| + 1 \leq |x-y| + |y-z| + 1 = d(x,y) + d(y,z).$$

Za konec opišimo še odprto kroglo $K(0,2)$. Racionalno število q leži v tej krogli natanko takrat, ko je $|q-0| < 2$ oziroma $|q| < 2$. Po drugi strani pa iracionalno število r leži v tej krogli, ko je $|r-0| + 1 < 2$ oziroma $|r| < 1$. Tako dobimo

$$K(0,2) = (\mathbb{Q} \cap (-2,2)) \cup (\mathbb{Q}^c \cap (-1,1)).$$

□

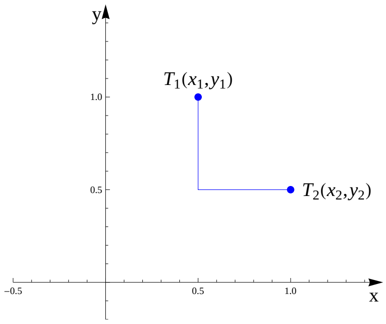
(3) Poišči točke na premici $y = 2x+1$, ki so najbližje izhodišču v metrikah d_1, d_2 in d_∞.

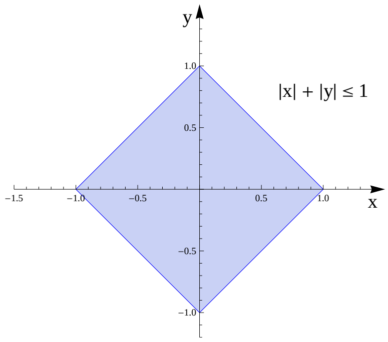
Rešitev: Na ravnini $\mathbb{R}^2$ definiramo družino metrik za vsak $p \in [1,\infty)$ s predpisi

$$d_p(T_1,T_2) = (|x_1-x_2|^p + |y_1-y_2|^p)^{\frac{1}{p}}.$$

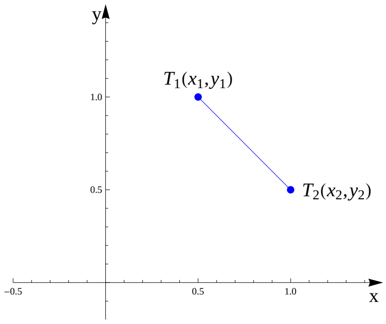
Najpomembnejše med njimi so naslednje metrike.

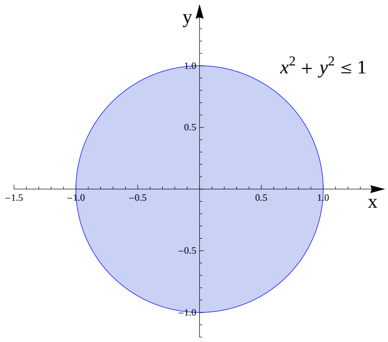
(1) Metrika $d_1(T_1,T_2) = |x_1-x_2| + |y_1-y_2|$, ki ji rečemo tudi taxi ali Manhattan metrika. Krogle v tej metriki imajo obliko poševno orientiranih kvadratov.



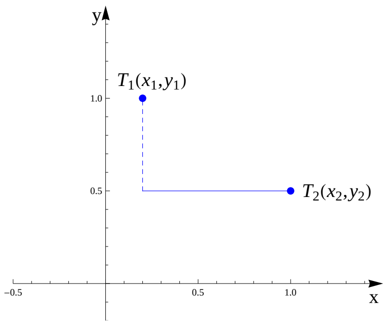


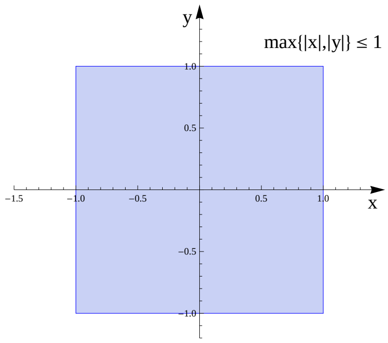
(2) Evklidska metrika $d_2(T_1, T_2) = \sqrt{|x_1 - x_2|^2 + |y_1 - y_2|^2}$.





(3) Max oziroma sup metrika $d_\infty = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$, ki je dobimo v limiti, ko gre $p \to \infty$. Krogle v tej metriki so spet kvadrati, ki so orientirani v smereh koordinatnih osi.



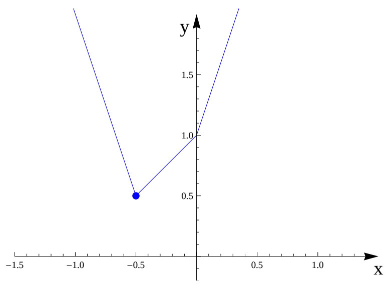


V nadaljevanju bomo poiskali točke na premici $y = 2x+1$, ki so najbližje izhodišču v danih metrikah. Iskanja teh točk se lahko lotimo na dva načina: računsko ali pa geometrično.

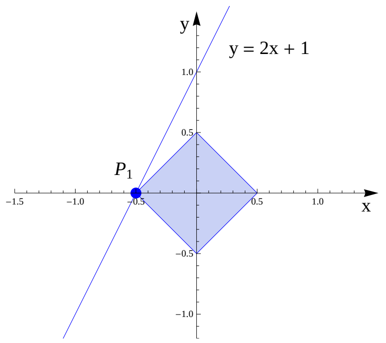
(1) Poglejmo najprej primer metrike d_1. Razdalja točke $T(x, y)$ na premici od izhodišča v metriki d_1 je enaka

$$d_1(T, O) = |x| + |y| = |x| + |2x + 1| = \begin{cases} 3x + 1 & ; \ x \geq 0, \\ x + 1 & ; \ -\frac{1}{2} \leq x < 0, \\ -3x - 1 & ; \ x < -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Ta funkcija ima minimum pri $x = -\frac{1}{2}$, kar pomeni, da je v tem primeru izhodišču najbližja točka $P_1(-\frac{1}{2}, 0)$.



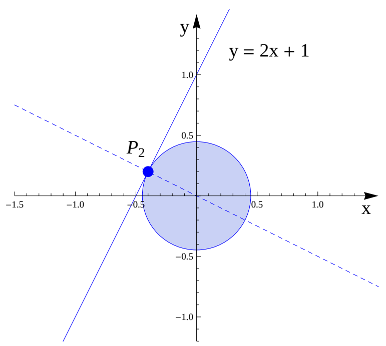
Geometrično bi lahko do tega rezultata prišli takole. Kroglo $K(O, r)$ v metriki d_1 napihujemo toliko časa, dokler se ne dotakne premice. Radij r, pri katerem se krogla prvič dotakne premice, je enak razdalji premice od izhodišča, točke v preseku pa so točke na premici, ki so najbližje izhodišču.



(2) V primeru evklidske metrike je iskana točka kar pravokotna projekcija izhodišča na premico. Dobimo jo lahko kot presek dane premice in pa normale nanjo, ki poteka skozi izhodišče. Ta normala ima enačbo $y = -\frac{x}{2}$. Enačba

$$2x + 1 = -\frac{x}{2}$$

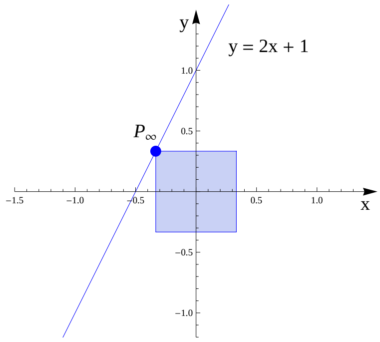
ima rešitev $x = -\frac{2}{5}$, zato je pravokotna projekcija izhodišča na premico točka $P_2(-\frac{2}{5}, \frac{1}{5})$.



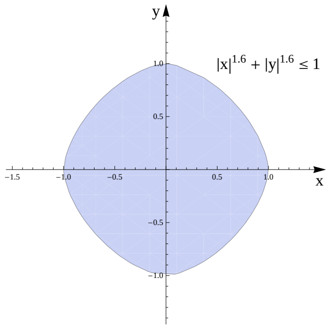
(3) V primeru max metrike bomo točko P_∞ poiskali geometrično. Enotska krogla je v tem primeru kvadrat, točka P_∞ pa bo v bistvu zgornje levo oglišče kvadrata pri primernem r. Zgornje levo oglišče leži na premici $y = -x$, zato moramo rešiti enačbo

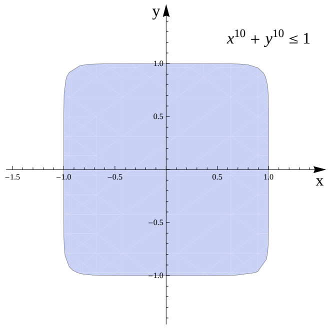
$$2x + 1 = -x.$$

Rešitev je $x = -\frac{1}{3}$, iskana točka pa $P_\infty(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.



<u>Opomba</u>: V ostalih p-metrikah imajo enotske krogle obliko, ki se pri $p \to \infty$ čedalje bolj prilega krogli v max-metriki, pri $p \to 1$ pa krogli v 1-metriki. Na sliki sta prikazani enotski krogli v primerih $p = 1.6$ in $p = 10$.





$\square$

(4) Ugotovi, ali je A odprta oziroma zaprta podmnožica danega metričnega prostora:

(a) $A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$,

(b) $A = \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$,

(c) $A = \mathbb{R} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$,

(d) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < |y|\} \subset \mathbb{R}^2$.

Rešitev: Naj bo A podmnožica metričnega prostora M. Elemente M lahko potem glede na množico A razdelimo na tri disjunktne podmnožice

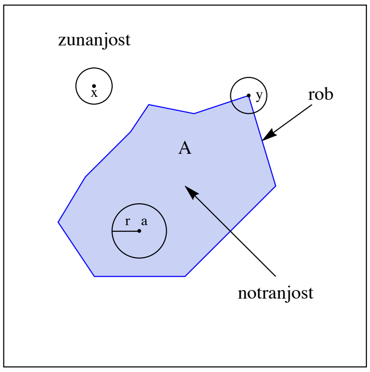
$$M = \{\text{notranje točke } A\} \cup \{\text{zunanje točke } A\} \cup \{\text{robne točke } A\}.$$

· Točka $a \in A$ je *notranja* točka množice A, če obstaja $r > 0$, da je $K(a, r) \subset A$.

· Točka $x \in A^c$ je *zunanja* točka množice A, če je notranja točka komplementa A^c.

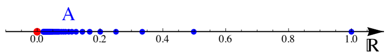
· Točka $y \in M$ je *robna* točka množice A, če vsaka krogla $K(y, r)$ seka tako A kot A^c.

Notranje točke so vedno vsebovane v A, zunanje točke so vedno v A^c, robne točke pa so lahko bodisi v A ali pa v A^c. Uniji notranjosti in roba množice A rečemo *zaprtje* množice A v M. Zaprtje množice A označimo z $\overline{A}$.

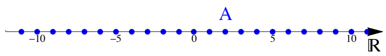


Množica A je *odprta* v M, če so vse njene točke notranje. Množica A je *zaprta* v M, če je množica A^c odprta. Množica A je zaprta natanko takrat, ko vsebuje vse svoje robne točke oziroma, ko je enaka svojemu zaprtju.

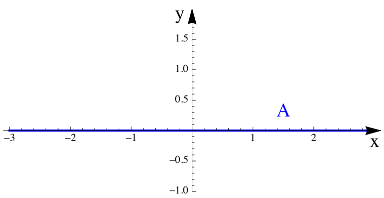
(a) Množica $A = \{\frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$ ni niti odprta niti zaprta. Vse njene točke so robne točke, vendar pa je robna točka tudi točka 0, ki pa ne leži v A.



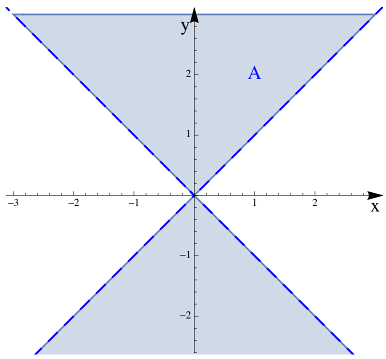
(b) Množica $A = \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ ni odprta, je pa zaprta, saj je njen komplement odprt. Vse njene točke so robne točke, notranjih točk pa nima.



(c) Množica $A = \mathbb{R} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$ predstavlja abscisno os v ravnini. Ni odprta, saj vsaka krogla s središčem na abscisni osi vsebuje točke izven abscisne osi. Je pa zaprta, saj je njen komplement odprt.



(d) Množica $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, |x| < |y|\} \subset \mathbb{R}^2$ je unija dveh območij, ki ju omejujeta premici $y = x$ in $y = -x$. Je odprta, ni pa zaprta.



□

(5) Ugotovi, ali je A odprta oziroma zaprta podmnožica danega metričnega prostora:

(a) $A = \{p \in \mathbb{R}_1[x] \mid p(1) = 0\} \subset (\mathbb{R}_1[x], d)$, kjer je $d(p,q) = \max\limits_{x\in[0,1]} |p(x) - q(x)|$,

(b) $A = \mathbb{R}[x] \subset (C[0,1], d_\infty)$.

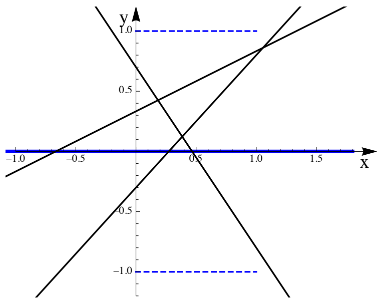
Rešitev: (a) Metriko

$$d(p,q) = \max_{x\in[0,1]} |p(x) - q(x)|.$$

lahko interpretiramo kot razdaljo med grafoma linearnih funkcij p in q na intervalu $[0,1]$. Da dobimo občutek, opišimo najprej kroglo $K(0,1)$. V njej so vse linearne funkcije p, ki zadoščajo pogoju

$$d(0,p) = \max_{x\in[0,1]} |p(x)| < 1.$$

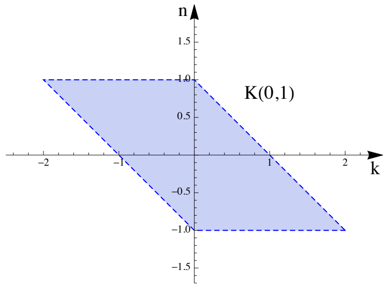
Ker je vsaka linearna funkcija monotona, so to natanko funkcije, za katere velja $|p(0)| < 1$ in $|p(1)| < 1$.



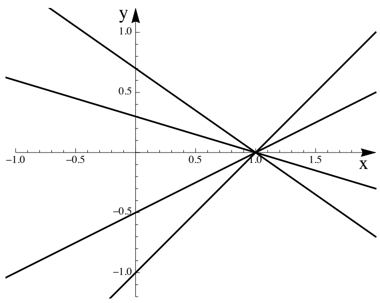
Pogosto si stvari lažje predstavljamo, če abstraktno množico parametriziramo s kakšno podmnožico evklidskega prostora. V našem primeru sta ustrezna parametra naklon k in začetna vrednost n. V prostoru parametrov lahko kroglo $K(0,1)$ opišemo z množico rešitev sistema neenačb:

$$\begin{aligned} |n| &< 1, \\ |k+n| &< 1. \end{aligned}$$

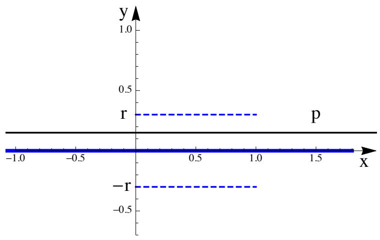
Tako dobimo lik na spodnji sliki.



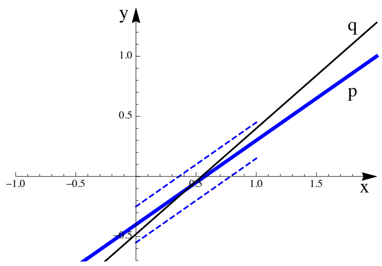
Podmnožica A je množica vseh linearnih funkcij, ki imajo ničlo v točki $x = 1$. Pokazali bomo, da ni odprta, je pa zaprta.



Najprej vzemimo funkcijo $0 \in A$ in poljuben $r > 0$. V krogli $K(0, r)$ je potem funkcija $p(x) = \frac{r}{2}$, ki pa ni v A. To pomeni, da nobena krogla s središčem v 0 ne leži cela v A, kar pa pomeni, da A ni odprta.



Sedaj bomo pokazali, da je A zaprta podmnožica v L. V ta namen vzemimo poljubno premico $p \in A^c$. Po definiciji to pomeni, da je $p(1) \neq 0$. Če definiramo $r = \frac{|p(1)|}{2}$, lahko preverimo, da potem cela krogla $K(p, r)$ leži v A^c, kar pa pomeni, da je A^c odprta množica, množica A pa je posledično zaprta.



(b) Na prostor $C[a, b]$ zveznih funkcij na omejenem zaprtem intervalu $[a, b]$ lahko uvedemo sup metriko s predpisom

$$d_\infty(f, g) = \max_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|.$$

Ta metrika je pomembna zato, ker konvergenca zaporedja funkcij v tej metriki ustreza enakomerni konvergenci.

Sedaj bomo pokazali, da prostor polinomov ni niti odprt niti zaprt v prostoru vseh zveznih funkcij na intervalu $[0, 1]$. Vzemimo poljuben polinom p in odprto kroglo $K(p, r)$. Radi bi našli zvezno funkcijo $f \in K(p, r)$, ki ni polinom. Takšna je na primer funkcija

$$f(x) = p(x) + \tfrac{r}{2} \sin x.$$

Od tod sledi, da množica polinomov ni odprta. Da pokažemo, da ni zaprta, pa moramo najti neko funkcijo, ki leži v robu, a ni polinom. Takšna je na primer eksponentna funkcija. Iz teorije Taylorjevih vrst vemo, da Taylorjevi polinomi

$$T_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$$

konvergirajo enakomerno na intervalu $[0,1]$ k eksponentni funkciji. To pomeni, da v vsaki krogli $K(\exp, r)$ ležijo vsi Taylorjevi polinomi T_n od nekega n dalje. Ker eksponentna funkcija ni polinom, množica polinomov ni zaprta.

Opomba: Množica polinomov je gosta v metričnem prostoru zveznih funkcij $C[0,1]$ z metriko d_∞. To pomeni, da lahko vsako zvezno funkcijo $f \in C[0,1]$ na intervalu $[0,1]$ poljubno dobro aproksimiramo s polinomi. Če je funkcija f analitična, lahko vzamemo kar Taylorjeve polinome, sicer pa nam to zagotavlja Weierstrassov izrek. $\square$

(6) Za $x = (x_1, x_2, \ldots)$ in $y = (y_1, y_2, \ldots)$ iz množice realnih zaporedij $M = \mathbb{R}^\infty$ definiramo razdaljo s pravilom

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & ; x = y, \\ \frac{1}{n} & ; x_1 = y_1,\, x_2 = y_2, \ldots, x_{n-1} = y_{n-1},\, x_n \neq y_n. \end{cases}$$

Obravnavaj odprtost oziroma zaprtost odprte krogle $K(0, \frac{1}{3})$, zaprte krogle $\overline{K}(0, \frac{1}{3})$ in zaprtja odprte krogle $K(0, \frac{1}{3})$.

Rešitev: Pri tej nalogi bomo obravnavali odprtost in zaprtost krogel v metričnih prostorih. V evklidskem prostoru $\mathbb{R}^n$ so tako na primer odprte krogle odprte, niso pa zaprte. Zaprte krogle pa so po drugi strani zaprte, niso pa odprte. Notranjost zaprte krogle v evklidskem prostoru je odprta krogla, zaprtje odprte krogle pa je zaprta krogla. V splošnih metričnih prostorih večina teh trditev ne velja več, zato moramo biti pozorni, da se ne zanašamo preveč na našo intuicijo in izkušnje iz evklidske geometrije. Edino, kar velja v splošnem, je, da so odprte krogle odprte množice, zaprte krogle pa zaprte množice.

Poglejmo si sedaj metrični prostor vseh realnih zaporedij, opremljen z metriko d. Da dobimo občutek, poskusimo najprej opisati nekaj krogel. Začnimo z odprto kroglo $K(0,1)$. V njej ležijo vsa zaporedja x, za katera je $d(0,x) < 1$. To so zaporedja, ki imajo prvi člen enak 0, ostali členi pa so poljubni. Torej je

$$K(0,1) = \{x \in M \mid x = (0, x_2, x_3, \ldots)\}.$$

Ker so možne razdalje med zaporedji manjše ali enake 1, pa je po drugi strani zaprta krogla $\overline{K}(0,1)$ kar enaka celemu prostoru M. To med drugim pomeni, da je metrični prostor M omejen.

Poglejmo sedaj kroglo $K(0, \frac{1}{2})$. V njej ležijo zaporedja, ki imajo prva dva člena enaka 0, oziroma

$$K(0, \tfrac{1}{2}) = \{x \in M \mid x = (0, 0, x_3, x_4, \ldots)\}.$$

Zaprta krogla $\overline{K}(0, \frac{1}{2})$ pa po drugi strani vsebuje vsa zaporedja, ki imajo prvi člen enak 0. Torej je

$$\overline{K}(0, \tfrac{1}{2}) = K(0,1).$$

Na podoben način bi sedaj dobili, da je:

$$K(0, \tfrac{1}{3}) = \{x \in M \mid x = (0, 0, 0, x_4, x_5, \ldots)\} = \overline{K}(0, \tfrac{1}{4}),$$
$$\overline{K}(0, \tfrac{1}{3}) = \{x \in M \mid x = (0, 0, x_3, x_4, \ldots)\} = K(0, \tfrac{1}{2}).$$

Od tod sledi, da sta obe krogli $K(0, \frac{1}{3})$ in $\overline{K}(0, \frac{1}{3})$ hkrati odprti in zaprti. Posledično je:

$$\overline{K(0, \tfrac{1}{3})} = K(0, \tfrac{1}{3}) \neq \overline{K}(0, \tfrac{1}{3}),$$
$$\mathrm{Int}(\overline{K}(0, \tfrac{1}{3})) = K(0, \tfrac{1}{2}) \neq K(0, \tfrac{1}{3}).$$

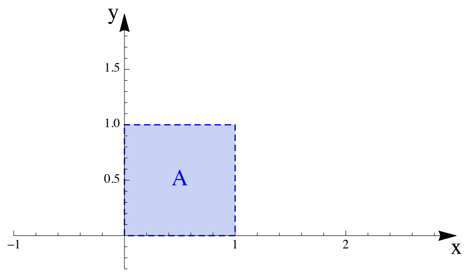
$\square$

(7) Ugotovi, ali je množica A kompaktna v evklidski metriki:

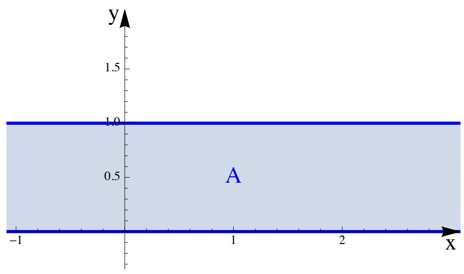
(a) $A = (0, 1) \times (0, 1) \subset \mathbb{R}^2$,
(b) $A = \mathbb{R} \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$,
(c) $A = \Gamma(f) = \{(x, f(x)) \,|\, x \in [0, 1]\} \subset \mathbb{R}^2$, kjer je $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ funkcija.

Rešitev: Podmnožica A metričnega prostora M je *kompaktna*, če za poljubno pokritje množice A z odprtimi množicami obstaja končno podpokritje. V praksi je za preverjanje kompaktnosti podmnožic evklidskih prostorov bolj priročno uporabiti Heine-Borelov izrek, ki pravi, da je podmnožica $A \subset \mathbb{R}^n$ kompaktna natanko takrat, ko je zaprta in omejena.

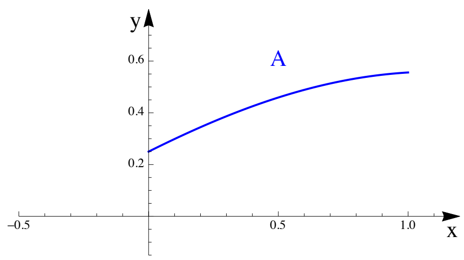
(a) Množica $A = (0, 1) \times (0, 1) \subset \mathbb{R}^2$ je odprt kvadrat s stranico $a = 1$. Je omejena, ni pa zaprta. Zato ni kompaktna.



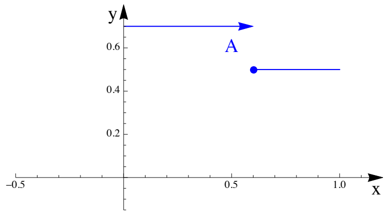
(b) Množica $A = \mathbb{R} \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$ predstavlja neskončen pas. Je zaprta, ni pa omejena. Zato ni kompaktna.



(c) Graf zvezne funkcije $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ je omejen in zaprt. Omejenost sledi iz omejenosti zvezne funkcije na končnem zaprtem intervalu, zaprtost pa iz zveznosti funkcije. V tem primeru je torej graf kompaktna množica.



Graf nezvezne funkcije v splošnem ni niti omejen niti zaprt.



Pokazati se da, da je graf funkcije $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ kompakten natanko takrat, ko je f zvezna funkcija. $\square$

(8) Dano je zaporedje funkcij $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ s predpisi $f_n(x) = x^n$. Ugotovi, ali je dano zaporedje konvergentno v prostoru $C[0, 1]$ glede na metriki d_∞ oziroma d_1.

Rešitev: Pri tej nalogi bomo obravnavali konvergenco zaporedij v metričnih prostorih. Naj bo (x_n) zaporedje v metričnem prostoru (M, d).

(1) Zaporedje (x_n) je *Cauchyjevo*, če za vsak $\epsilon > 0$ obstaja $N \in \mathbb{N}$, da za $m, n \geq N$ velja

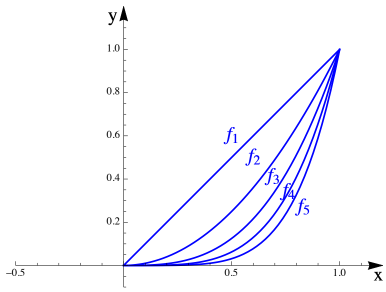
$$d(x_m, x_n) < \epsilon.$$

(2) Zaporedje (x_n) *konvergira* k x, če za vsak $\epsilon > 0$ obstaja $N \in \mathbb{N}$, da za $n \geq N$ velja

$$d(x_n, x) < \epsilon.$$

Vsako konvergentno zaporedje je zmeraj Cauchyjevo, obratno pa ni nujno res. Metričnim prostorom, v katerih so vsa Cauchyjeva zaporedja konvergentna, rečemo *polni* metrični prostori.

V našem primeru imamo zaporedje potenčnih funkcij $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ s predpisi $f_n(x) = x^n$.



Limitna funkcija tega zaporedja je funkcija s predpisom

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ; \ x \in [0, 1), \\ 1 & ; \ x = 1. \end{cases}$$

<u>Konvergenca v metriki d_∞:</u>

Konvergenca v metriki d_∞ na prostoru $C[0, 1]$ se ujema z enakomerno konvergenco funkcij na intervalu $[0, 1]$. S predavanj vemo, da enakomerno konvergentno zaporedje zveznih funkcij konvergira k zvezni funkciji. Ker v našem primeru limitna funkcija ni zvezna, torej zaporedje (f_n) ni konvergentno v d_∞ metriki.

Konvergenca v metriki d_1:

Sedaj bomo pokazali, da zaporedje konvergira v metriki d_1, ki je definirana s predpisom

$$d_1(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|\, dx.$$

Metrika d_1 nam pove, kakšna je ploščina lika med grafoma funkcij.

Pokažimo najprej, da je zaporedje (f_n) Cauchyjevo v metriki d_1. Za $n \leq m$ imamo oceno

$$d_1(f_n, f_m) = \int_0^1 (x^n - x^m)\, dx = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{m+1} < \frac{1}{n+1}.$$

Izberimo poljuben $\epsilon > 0$ in naj bo $N \in \mathbb{N}$ tak, da je $\frac{1}{N} < \epsilon$. Potem za $m \geq n \geq N$ velja

$$d_1(f_n, f_m) < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{N} < \epsilon.$$

Ker metrični prostor $(C[0,1], d_1)$ ni poln, iz dejstva, da je (f_n) Cauchyjevo še ne sledi nujno, da je konvergentno. Dodatno pa nas še lahko zbega podatek, da limitna funkcija ni zvezna. Izkaže pa se, da konvergenca v d_1 metriki ne implicira konvergence po točkah, kot je to v primeru enakomerne konvergence. V našem primeru namreč zaporedje f_n po točkah konvergira k funkciji f, v d_1 metriki pa proti funkciji $\tilde{f} = 0$. To sledi iz računa

$$d_1(f_n, \tilde{f}) = \int_0^1 x^n\, dx = \frac{1}{n+1}.$$

Ko gre $n \to \infty$, gre torej $d_1(f_n, \tilde{f}) \to 0$. □

(9) Naj bo $a \in [0,1]$. Evalvacijo $\mathrm{ev}_a : C[0,1] \to \mathbb{R}$ definiramo s predpisom

$$\mathrm{ev}_a(f) = f(a).$$

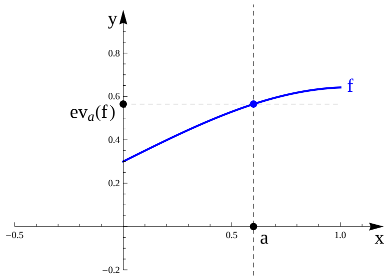
Obravnavaj zveznost evalvacije, če na prostoru $C[0,1]$ izberemo metriko d_∞ ali d_1.

Rešitev: Začnimo z definicijo zveznosti preslikave med metričnima prostoroma. Preslikava $F : M \to N$ med metričnima prostoroma (M, d_M) in (N, d_N) je *zvezna* v točki $a \in M$, če lahko za vsak $\epsilon > 0$ najdemo tak $\delta > 0$, da za vse $x \in M$ velja

$$d_M(x,a) < \delta \Longrightarrow d_N(f(x), f(a)) < \epsilon.$$

Preslikava F je zvezna, če je zvezna v vsaki točki iz M. To je direktna posplošitev pojma zveznosti funkcije iz $\mathbb{R}$ v $\mathbb{R}$, pri kateri absolutno vrednost nadomestimo z metrikama v domeni in kodomeni. Intuitivno to pomeni, da se bližnje točke preslikajo v bližnje točke. Če obstaja δ, ki je dober za vse $x \in M$, je f enakomerno zvezna.

Evalvacijo $\mathrm{ev}_a : C[0,1] \to \mathbb{R}$ lahko interpretiramo kot linearni funkcional na vektorskem prostoru zveznih funkcij. Pokazali bomo, da je ta funkcional zvezen v metriki d_∞, ni pa zvezen v metriki d_1. To je malce presenetljivo, saj smo iz končnih dimenzij navajeni, da je vsaka linearna preslikava avtomatično zvezna.



Pokažimo sedaj, da je evalvacija zvezna, če na prostoru funkcij vzamemo metriko d_∞. Če sta dve funkciji blizu skupaj v tej metriki, sta njuna grafa blizu skupaj, zato so tudi vse vrednosti blizu skupaj. Formalno to pomeni, da za vsak $a \in [0,1]$ velja

$$|f(a) - g(a)| \leq \max_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)|.$$

Izraz na levi je v bistvu razdalja med dvema slikama preslikave ev_a, izraz na desni pa razdalja med funkcijama f in g. Torej je

$$|\,\mathrm{ev}_a(f) - \mathrm{ev}_a(g)| \leq d_\infty(f,g).$$

Dokazali smo torej, da je razdalja med slikama točk kvečjemu manjša od razdalje med točkama, kar pa pomeni, da preslikava ev_a ni samo zvezna, ampak celo enakomerno zvezna.

Sedaj bomo pokazali, da evalvacija ni zvezna v metriki d_1, ki je definirana s predpisom

$$d_1(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|\, dx.$$

Metrika d_1 nam pove, kakšna je ploščina lika med grafoma funkcij. Izkazalo se bo, da je razdalja d_1 lahko zelo majhna, čeprav sta grafa funkcij daleč narazen. Da preslikava ev_a ni zvezna, bomo pokazali tako, da bomo našli zaporedje funkcij (f_n), ki konvergira k funkciji f v metriki d_1, zaporedje slik $\mathrm{ev}_a(f_n)$ pa ne konvergira k $\mathrm{ev}_a(f)$. Da si stvari malce poenostavimo, izberimo $a = 0$. Limitna funkcija naj bo $f(x) = 0$, funkcije f_n pa naj bodo definirane s predpisi

$$f_n(x) = \begin{cases} n - n^3 x & ;\ 0 \leq x \leq \frac{1}{n^2}, \\ 0 & ;\ \frac{1}{n^2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

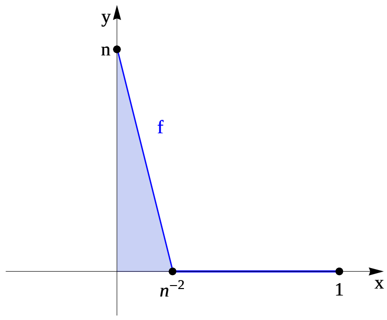
Potem velja

$$d_1(f_n, f) = \int_0^1 |f_n(x) - f(x)|\, dx = \int_0^1 f_n(x)\, dx = \frac{1}{2n},$$

od koder sledi, da zaporedje (f_n) konvergira k funkciji f v metriki d_1. Po drugi strani pa je

$$|\,\mathrm{ev}_0(f_n) - \mathrm{ev}_0(f)| = |f_n(0) - f(0)| = n,$$

kar pomeni, da zaporedje slik ne konvergira. Od tod lahko sklepamo, da preslikava ev_0 ni zvezna v točki f. S podobnim sklepom bi lahko pokazali, da ni zvezna tudi v nobeni drugi točki in da isto velja za ostale evalvacije.



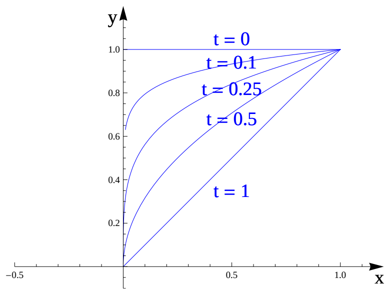
$\square$

(10) Preslikavo $F : [0,1] \to C[0,1]$ definiramo s predpisom

$$F(t)(x) = x^t.$$

Obravnavaj zveznost preslikave F, če na prostoru $C[0,1]$ izberemo metriko d_∞ ali d_1.

Rešitev: Imamo enoparametrično družino potenčnih funkcij $x \mapsto x^t$, zanima pa nas, ali so te funkcije zvezno odvisne od parametra t. Podobno kot pri prejšnji nalogi bo zveznost odvisna od izbire metrike na prostoru funkcij.



Poglejmo najprej primer, ko na $C[0,1]$ izberemo metriko d_∞. Pokazali bomo, da F pri tej izbiri metrike ni zvezna preslikava. V ta namen si poglejmo zaporedje n-tih korenov

$$F(\tfrac{1}{n})(x) = \sqrt[n]{x}.$$

Če bi bila preslikava F zvezna v točki $t = 0$, bi moralo zaporedje $F(\frac{1}{n})$ enakomerno konvergirati proti konstantni funkciji $F(0)(x) = 1$. Ker pa je $F(\frac{1}{n})(0) = 0$, to ni res, zato F ni zvezna v metriki d_∞.

Je pa preslikava F zvezna, če na $C[0,1]$ izberemo metriko d_1. Izberimo najprej poljubni števili $t < s$ z intervala $[0,1]$. Potem lahko ocenimo

$$d_1(F(t), F(s)) = \int_0^1 |x^t - x^s|\, dx = \int_0^1 (x^t - x^s)\, dx = \frac{1}{t+1} - \frac{1}{s+1} = \frac{s-t}{(t+1)(s+1)} < s-t.$$

Od tod sledi, da za poljubna $s, t \in [0,1]$ velja

$$d_1(F(t), F(s)) \leq |t-s|,$$

kar pa pomeni, da je F enakomerno zvezna, če na $C[0,1]$ izberemo metriko d_1. $\square$