3 Družine

Naloga 3.1. Izračunajte dane unije in preseke, pri čemer je A množica, z (a, b) in $[a, b]$ pa označimo odprti in zaprti interval.

(a) $\displaystyle\bigcup_{S \subseteq A} S$

(b) $\displaystyle\bigcap_{t \in (0,1)} (0, t)$

(c) $\displaystyle\bigcap_{t \in (0,1)} [0, t]$

(d) $\displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (n, \infty)$

(e) $\displaystyle\bigcup_{t \in (0,1)} [-t, t]$

(f) $\displaystyle\bigcup_{k \in \{0,\ldots,n-1\}} \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$, kjer je $n \in \mathbb{N}$ in $n \geq 1$.

(g) Naj bo $L := \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 < 2\}$ in $D := \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x^3\}$. Določite

$$\bigcap_{\ell \in L} \bigcap_{d \in D} [\ell, d].$$

Naloga 3.2. Naj bo $S := \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid 0 < x < y\}$ in $I \colon S \to \mathsf{Set}$ družina vseh zaprtih intervalov s pozitivnima krajiščema:

$$I(x, y) := [x, y] = \{z \in \mathbb{R} \mid x \leq z \leq y\}\,.$$

(a) Zapišite kako funkcijo izbire za družino I.

(b) Zapišite kako funkcijo izbire za družino I, ki izbira *racionalna števila*.

(c) Zapišite kako funkcijo izbire za družino I, ki izbira *iracionalna števila*.

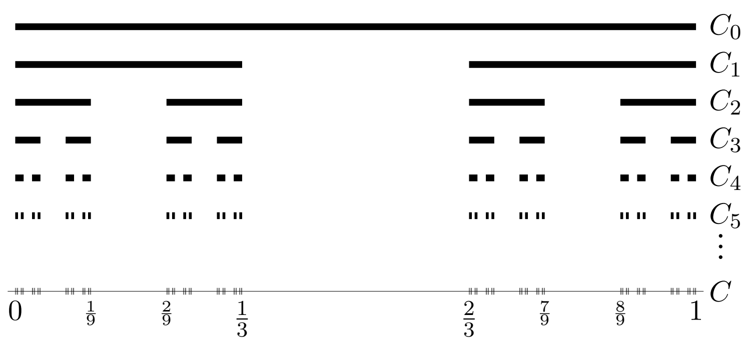
Naloga 3.3. Naj bosta I in J množici ter $A \colon I \times J \to \mathsf{Set}$ družina. Dokažite, da velja

$$\prod_{i \in I} \sum_{j \in J} A_{i,j} \;\cong\; \sum_{f \in J^I} \prod_{i \in I} A_{i,f(i)}.$$

Naloga 3.4. *Cantorjevo množico* $C \subseteq [0,1]$ dobimo kot presek $C := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n$ množic

$$\begin{aligned} &C_0 := [0,1] \\ &C_1 := [0,\tfrac{1}{3}] \cup [\tfrac{2}{3},1] \\ &C_2 := [0,\tfrac{1}{9}] \cup [\tfrac{2}{9},\tfrac{1}{3}] \cup [\tfrac{2}{3},\tfrac{7}{9}] \cup [\tfrac{8}{9},1] \\ &\quad \vdots \end{aligned}$$

Na sliki vidimo prvih šest stopenj konstrukcije:



Naslednjo stopnjo dobimo tako, da iz intervala prejšnje stopnje izrežemo srednje tretjine. Intervali, ki ostanejo, so vedno zaprti intervali.

(a) Kako iz trojiškega zapisa realnega števila ugotovimo, ali je element C_n?

(b) Kako iz trojiškega zapisa realnega števila ugotovimo, ali je element C?

(c) Zapišite množico C_n kot unijo 2^n zaprtih intervalov oblike

$$C_n = \bigcup_{r \in \{0,2\}^n} \big[\ell(n,r), d(n,r)\big].$$

Torej je treba določiti vrednosti $\ell(n,r)$ in $d(n,r)$. Tu je $r = (r_0, r_1, \ldots, r_{n-1})$ urejena n-terica ničel in dvojk.

(d) Dokažite, da je množica C izomorfna $2^{\mathbb{N}}$.