2 Logika

Naloga 2.1. Naslednje izjave zapišite v simbolni obliki z uporabo $+$, $\cdot$, $=$ in potenciranja.

(a) Naravno število n je popoln kvadrat.

(b) Naravno število a deli naravno število b.

(c) Naravno število n je praštevilo.

(d) Naravno število n ni potenca naravnega števila.

(e) Naravno število c je največji skupni delitelj naravnih števil a in b.

Naloga 2.2. Dana naj bo množica oseb $\mathbb{O}$. Naj $a \heartsuit b$ pomeni, da ima oseba a rada osebo b. Razložite pomen naslednjih izjav.

(a) $\exists x \in \mathbb{O}.\, \forall y \in \mathbb{O}.\, x \heartsuit y$

(b) $\forall x \in \mathbb{O}.\, \exists y \in \mathbb{O}.\, x \heartsuit y$

(c) $\neg\forall a \in \mathbb{O}.\, \exists b \in \mathbb{O}.\, a \heartsuit b$

(d) $\exists a \in \mathbb{O}.\, \exists b \in \mathbb{O}.\, a \not\heartsuit b$

(e) $\exists a \in \mathbb{O}.\, \forall b \in \mathbb{O}.\, a \not\heartsuit b$

(f) $\neg\forall y \in \mathbb{O}.\, a \heartsuit y$

(g) $\exists y \in \mathbb{O}.\, a \not\heartsuit y$

(h) $\neg\exists a \in \mathbb{O}.\, \exists b \in \mathbb{O}.\, a \heartsuit b$

(i) $\neg\forall a \in \mathbb{O}.\, \forall b \in \mathbb{O}.\, a \heartsuit b$

(j) $\forall b \in \mathbb{O}.\, a \not\heartsuit b$

(k) $\exists a \in \mathbb{O}.\, \neg\forall b \in \mathbb{O}.\, a \heartsuit b$

(l) $\neg\exists a \in \mathbb{O}.\, \forall b \in \mathbb{O}.\, a \heartsuit b$

(m) $\neg\exists b \in \mathbb{O}.\, a \heartsuit b$

(n) $\forall a \in \mathbb{O}.\, \forall b \in \mathbb{O}.\, a \not\heartsuit b$

Naloga 2.3. Razložite pomen naslednjih matematičnih izjav.

(a) $\exists y \in \mathbb{R}.\, \forall x \in \mathbb{R}.\, f(x) \leq y$, kjer je $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ realna funkcija.

(b) $\forall x \in \mathbb{R}.\, \exists y \in \mathbb{R}.\, f(x) \leq y$, kjer je $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ realna funkcija.

Naloga 2.4. Zapišite v simbolni obliki:

(a) *"Naj bo $a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Za vsako še tako majhno pozitivno realno število ε obstaja dovolj veliko naravno število n, tako da za vse $k \geq n$ in $m \geq n$ velja $|a_k - a_m| < \varepsilon$."*

(b) *"Naj bo $a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ in ε pozitivno realno število. Obstaja dovolj veliko naravno število n, tako da za vse $k \geq n$ in $m \geq n$ velja $|a_k - a_m| < \varepsilon$."*

(c) *"Noben večkratnik števila 6 ni deljiv s 4."*

(d) *"Ni vsak večkratnik števila 6 deljiv s 4."*

(e) *"Naj bo $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Za vse dovolj velike $x \in \mathbb{R}$ velja $f(x) > 0$."*

(f) *"Naj bo $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Za vsak dovolj velik $x \in \mathbb{R}$ velja $f(x) > 0$."*

Naloga 2.5. Dokažite naslednje izjave:

(a) $p \wedge q \Rightarrow p \vee q$

(b) $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$

(c) $p \wedge q \Rightarrow \neg(\neg p \vee \neg q)$

(d) $(p \wedge q) \vee r \Leftrightarrow (p \vee r) \wedge (q \vee r)$

(e) $\big(\forall x \in A.\, p(x)\big) \vee \big(\forall y \in A.\, q(y)\big) \Rightarrow \forall z \in A.\, p(z) \vee q(z)$

(f) $\big(\exists x \in A.\, p(x)\big) \vee \big(\exists y \in A.\, q(y)\big) \Rightarrow \exists z \in A.\, p(z) \vee q(z)$

(g) $\big(\exists x \in A.\, \forall y \in B.\, p(x,y)\big) \Rightarrow \forall b \in B.\, \exists a \in A.\, p(a,b)$

Naloga 2.6. Dokažite naslednje izjave:

(a) $\big(\exists n \in \mathbb{N}.\, 24 \cdot n = a\big) \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}.\, 3 \cdot k = a.$

(b) V tej nalogi smemo brez dokaza uporabiti dejstvo

$$\forall n \in \mathbb{N}.\, \exists k \in \mathbb{N}.\, (n = 2k \vee n = 2k+1).$$

Dokažite:

$$\forall m \in \mathbb{N}.\, \exists \ell \in \mathbb{N}.\, (m^2 = 4\ell \vee m^2 = 4\ell + 1).$$

(c) Dana je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dokažite:

$$\forall x \in \mathbb{R}.\, \exists y \in \mathbb{R}.\, f(x) \leq y.$$

(d) Dana je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dokažite:

$$\big(\exists M \in \mathbb{R}.\, \forall x \in \mathbb{R}.\, f(x) \leq M\big) \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}.\, \exists y \in \mathbb{R}.\, f(x) \leq y.$$

(e) Dana je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dokažite:

$$\big(\exists M \in \mathbb{R}.\, \forall x \in \mathbb{R}.\, f(x) \leq M\big) \Rightarrow \exists N \in \mathbb{R}.\, \forall x \in \mathbb{R}.\, 2 \cdot f(x) + 7 \leq N.$$

(f) $\big(\exists M \in \mathbb{R}.\, \forall x \in \mathbb{R}.\, x^2 + 7 \leq M\big) \Rightarrow \exists M \in \mathbb{R}.\, \forall x \in \mathbb{R}.\, x^2 + 8 \leq M.$

Naloga 2.7.

(a) Dokažite ekvivalenco $\neg p \vee \neg q \Leftrightarrow \neg(p \wedge q)$. Nato jo preverite še z resničnostno tabelo.

(b) Preverite z resničnostno tabelo in s poenostavljanjem, da je $(p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow p)$ tavtologija.

Naloga 2.8. Zapišite predpis za Boolovo funkcijo $V\colon \mathbb{2}^3 \to \mathbb{2}$, dano s spodnjo resničnostno tabelo. Predpis naj vključuje samo izjavne spremenljivke p, q in r ter običajne izjavne veznike.

p	q	r	$V(p,q,r)$
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$
$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$

Dobljeni predpis čimbolj poenostavite.

Naloga 2.9. Dana je množica U in podmnožice $A, B, C \subseteq U$. Za vsakega od naslednjih sistemov enačb poiščite vse rešitve za neznano množico $X \subseteq U$:

(a) $X \cup A = B$,

(b) $A \setminus X = B$ in $X \setminus A = C$,

(c) $A \cap X = B$ in $A \cup X = C$,

(d) $A \cup X = B$ in $B \cap X = A$,

(e) $A \setminus X = X \setminus B$ in $X \setminus A = C \setminus X$.

Postopek za reševanje (sistemov) enačb z množicami:

i. *Enačbo $L = D$ pretvorimo v ekvivalentno obliko $L \oplus D = \emptyset$.*

ii. *Sistem več enačb oblike $L_i = \emptyset$ prevedemo na eno samo enačbo oblike $\bigcup_i L_i = \emptyset$.*

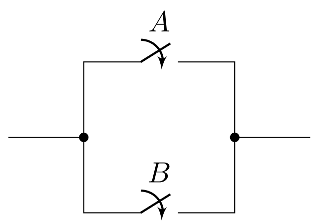
iii. *Levo stran enačbe zapišemo kot unijo presekov množic oz. njihovih komplementov.*

iv. *Enačbo prevedemo v obliko $(X \cap P) \cup (X^{\complement} \cap Q) = \emptyset$. Pri tem si pomagamo z enakostjo $A = (X \cap A) \cup (X^{\complement} \cap A)$.*

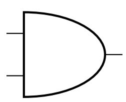
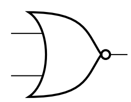
v. *Rešitve so natanko tiste množice X, ki zadoščajo pogoju $Q \subseteq X \subseteq P^{\complement}$. Sistem enačb je torej rešljiv natanko tedaj, ko velja $Q \subseteq P^{\complement}$, tj. $P \cap Q = \emptyset$.*

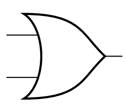
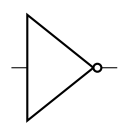
Naloga 2.10. Preklopna vezja so sestavljena iz stikal in žic. Stikala so lahko vklopljena ali izklopljena, glede na njihovo stanje pa je odvisno, ali bo tok tekel po žici ali ne. Denimo, da imamo dve stikali A in B. Če sta stikali vezani zaporedno, tj.

potem tok teče, kadar sta obe stikali vklopljeni. Če pa sta stikali vezani vzporedno, tj.

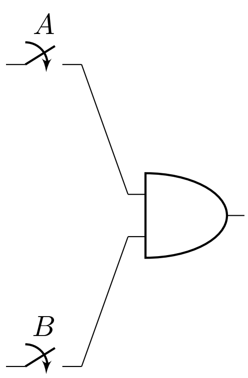


potem tok teče, če je vklopljeno stikalo A ali stikalo B. Tako lahko simuliramo logične veznike. Stikala so izjavne spremenljivke, takšni bloki pa predstavljajo vrata "in" ter "ali". Vrata za logične veznike predstavljamo z naslednjimi simboli:

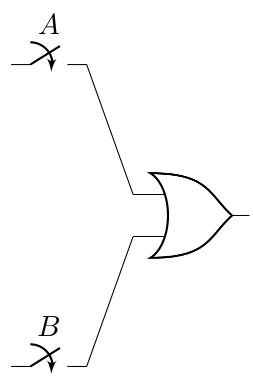
 in  niti

 ali  ne

Prvi dve vezji lahko torej z vrati zapišemo takole



ter



Andrej prenavlja stanovanje in načrtuje električno napeljavo. Ker se mu pred spanjem ne ljubi vstajati, da bi ugasnil luč, si želi v spalnici imeti dve stikali, eno ob postelji in eno pri vhodu. Seveda pa morata obe stikali delovati, torej ko pritisnemo na katero koli stikalo, se mora luč prižgati ali pa ugasniti, če je že prižgana. Pri izdelavi električnega omrežja sme Andrej uporabiti le vrata "in", "ali" ter "ne". Ker pa so vrata draga, si želi uporabiti čim manj vrat. Pomagajte Andreju načrtovati vezje za njegovo spalnico. Kaj pa če lahko uporabi samo vrata "in" ter "ali"? Ali lahko uporabi le vrata "niti" ($\downarrow$)?