Analiza 1

Zaporedja

(1) Ugotovi, ali sta zaporedji z danima splošnima členoma monotoni oziroma omejeni:

(a) $a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}$,
(b) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{2n}}$.

Rešitev: (a) Poglejmo prvih nekaj členov zaporedja:

$$\begin{aligned} a_1 &= \tfrac{1}{2}, \\ a_2 &= \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} = \tfrac{7}{12}, \\ a_3 &= \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} = \tfrac{37}{60}. \end{aligned}$$

Na podlagi prvih nekaj členov lahko domnevamo, da je zaporedje (a_n) naraščajoče.
Zaporedje (a_n) je naraščajoče:
Pokazati želimo, da za vsako naravno število n velja $a_{n+1} > a_n$, oziroma:

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{n+2} + \tfrac{1}{n+3} + \ldots + \tfrac{1}{2n} + \tfrac{1}{2n+1} + \tfrac{1}{2n+2} &> \tfrac{1}{n+1} + \tfrac{1}{n+2} + \ldots + \tfrac{1}{2n}, \\ \tfrac{1}{2n+1} + \tfrac{1}{2n+2} &> \tfrac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Če obe strani neenačbe pomnožimo z $(2n+1)(2n+2)$, pridemo do:

$$\begin{aligned} (2n+2) + (2n+1) &> 2(2n+1), \\ 4n+3 &> 4n+2. \end{aligned}$$

Zadnja neenakost drži za vsak $n \in \mathbb{N}$, kar pomeni, da je zaporedje (a_n) naraščajoče.
Zaporedje (a_n) je omejeno:
Iz ocene

$$a_n = \tfrac{1}{n+1} + \tfrac{1}{n+2} + \ldots + \tfrac{1}{2n} < n \cdot \tfrac{1}{n+1} < 1$$

sledi, da je zaporedje navzgor omejeno z 1. Ker so vsi členi pozitivni je seveda tudi navzdol omejeno z 0.

(b) Poglejmo prvih nekaj členov zaporedja:

$$\begin{aligned} a_1 &= \tfrac{1}{\sqrt{1}} + \tfrac{1}{\sqrt{2}}, \\ a_2 &= \tfrac{1}{\sqrt{2}} + \tfrac{1}{\sqrt{3}} + \tfrac{1}{\sqrt{4}}, \\ a_3 &= \tfrac{1}{\sqrt{3}} + \tfrac{1}{\sqrt{4}} + \tfrac{1}{\sqrt{5}} + \tfrac{1}{\sqrt{6}}. \end{aligned}$$

Vidimo, da imamo čedalje večje vsote čedalje manjših členov, zato ni jasno na prvi pogled, kaj se dogaja s členi zaporedja. Pokazali bomo, da zaporedje narašča čez vse meje.
Zaporedje (a_n) je naraščajoče:
Dokazati moramo, da za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja $a_{n+1} \geq a_n$ oziroma:

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{\sqrt{n+1}} + \tfrac{1}{\sqrt{n+2}} + \ldots + \tfrac{1}{\sqrt{2n}} + \tfrac{1}{\sqrt{2n+1}} + \tfrac{1}{\sqrt{2n+2}} &\geq \tfrac{1}{\sqrt{n}} + \tfrac{1}{\sqrt{n+1}} + \ldots + \tfrac{1}{\sqrt{2n}}, \\ \tfrac{1}{\sqrt{2n+1}} + \tfrac{1}{\sqrt{2n+2}} &\geq \tfrac{1}{\sqrt{n}}. \end{aligned}$$

Da si malce poenostavimo računanje, lahko najprej opazimo, da velja

$$\tfrac{1}{\sqrt{2n+1}} + \tfrac{1}{\sqrt{2n+2}} > \tfrac{1}{\sqrt{2n+2}} + \tfrac{1}{\sqrt{2n+2}} = \tfrac{2}{\sqrt{2n+2}},$$

zato je dovolj pokazati neenakost

$$\tfrac{2}{\sqrt{2n+2}} \geq \tfrac{1}{\sqrt{n}}.$$

Z odpravo ulomkov in kvadriranjem dobimo:

$$\begin{aligned} 2\sqrt{n} &\geq \sqrt{2n+2}, \\ 4n &\geq 2n+2, \\ n &\geq 1. \end{aligned}$$

Torej je zaporedje (a_n) naraščajoče.

Zaporedje (a_n) je neomejeno:

Sedaj hočemo pokazati, da za vsako naravno število N obstaja tak n, da je $a_n \geq N$ oziroma

$$\tfrac{1}{\sqrt{n}} + \tfrac{1}{\sqrt{n+1}} + \ldots + \tfrac{1}{\sqrt{2n}} \geq N.$$

Da bi si stvari poenostavili, bomo najprej ocenili levo stran. Vsi členi v vsoti so večji od zadnjega, zato velja

$$\tfrac{1}{\sqrt{n}} + \tfrac{1}{\sqrt{n+1}} + \ldots + \tfrac{1}{\sqrt{2n}} > \tfrac{n+1}{\sqrt{2n}}.$$

Desno stran pa lahko sedaj ocenimo še takole

$$\tfrac{n+1}{\sqrt{2n}} > \tfrac{n}{\sqrt{2n}} = \sqrt{\tfrac{n}{2}}.$$

Dovolj je torej najti tak n, da bo veljalo

$$\sqrt{\tfrac{n}{2}} \geq N,$$

kar pa ni problem, saj so dobra vsa naravna števila, ki so večja od $2N^2$. $\square$

(2) Fibonaccijevo zaporedje je podano z začetnima členoma $a_0 = 0$ in $a_1 = 1$ ter rekurzivno zvezo

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$$

za $n \in \mathbb{N}_0$. Določi splošni člen zaporedja.

Rešitev: Pri Fibonaccijevemu zaporedju je vsak člen vsota prejšnjih dveh členov. Prvih nekaj členov je tako

$$a_0 = 0,\ a_1 = 1,\ a_2 = 1,\ a_3 = 2,\ a_4 = 3,\ a_5 = 5,\ a_6 = 8,\ a_7 = 13,\ a_8 = 21, \ldots$$

V nadaljevanju bomo izračunali eksplicitno formulo za splošni člen zaporedja.

Rekurzivni zvezi oblike

$$a_{n+2} = aa_{n+1} + ba_n,$$

kjer sta a in b realni števili, rečemo linearna diferenčna enačba drugega reda s konstantnimi koeficienti. Zaporedja, ki zadoščajo takšni enačbi, lahko izrazimo v eksplicitni obliki. Za začetek poskusimo z nastavkom $a_n = q^n$ in ga vstavimo v rekurzivno zvezo

$$q^{n+2} = aq^{n+1} + bq^n.$$

Po krajšanju s q^n tako pridemo do karakteristične enačbe

$$q^2 = aq + b,$$

ki ima dve rešitvi $q_{1,2}$. Rekurzivni zvezi tako zadoščata zaporedji $a_n = q_1^n$ in $a_n = q_2^n$, ker je zveza linearna, pa tudi vsaka linearna kombinacija teh dveh zaporedij. Izkaže se, da je poljubno zaporedje, ki zadošča dani rekurzivni zvezi, oblike:

(1) $a_n = C_1 q_1^n + C_2 q_2^n$, če je $q_1 \neq q_2$,
(2) $a_n = (C_1 + C_2 n) q^n$, če je $q_1 = q_2 = q$.

Vrednosti konstant C_1 in C_2 izračunamo z upoštevanjem začetnih členov zaporedja.

V primeru Fibonaccijevega zaporedja je karakteristična enačba enaka

$$q^2 = q + 1$$

in ima rešitvi:

$$q_1 = \tfrac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad q_2 = \tfrac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Splošni člen Fibonaccijevega zaporedja je tako oblike

$$a_n = C_1 \left(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2 \left(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Z upoštevanjem začetnih vrednosti $a_0 = 0$ in $a_1 = 1$ dobimo sistem enačb:

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 &= 0, \\ C_1 \left(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + C_2 \left(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right) &= 1, \end{aligned}$$

ki ima rešitev $C_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$ in $C_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$. Od tod dobimo eksplicitno formulo za člene Fibonaccijevega zaporedja

$$a_n = \tfrac{1}{\sqrt{5}} \left(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \tfrac{1}{\sqrt{5}} \left(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

□

(3) Zaporedje je podano z začetnima členoma $a_0 = a_1 = 1$ in rekurzivno zvezo

$$a_{n+2} = a_{n+1} - \tfrac{1}{4} a_n$$

za $n \in \mathbb{N}_0$. Določi splošni člen zaporedja.

Rešitev: Karakteristična enačba je tokrat

$$q^2 = q - \tfrac{1}{4}.$$

Ta enačba ima eno dvojno rešitev

$$q = \tfrac{1}{2},$$

zato je splošna rešitev diferenčne enačbe enaka

$$a_n = (C_1 + C_2 n)\tfrac{1}{2^n}.$$

Z upoštevanjem začetnih vrednosti $a_0 = a_1 = 1$ dobimo sistem enačb:

$$\begin{aligned} C_1 &= 1, \\ \tfrac{C_1+C_2}{2} &= 1, \end{aligned}$$

ki ima rešitev $C_1 = C_2 = 1$. Zaporedje (a_n) lahko torej podamo z eksplicitnim predpisom

$$a_n = \tfrac{n+1}{2^n}.$$

□

(4) Hodnik dimenzije $n \times 1$ bi radi pokrili s ploščami 9 različnih barv, pri čemer so 4 plošče dimenzije 1×1, 5 plošč pa je dimenzije 2×1. Na koliko različnih načinov lahko pokrijemo hodnik?

Rešitev: Recimo najprej, da imamo hodnik dolžine 1×1. Ker imamo na voljo 4 različne barve plošč dimenzije 1×1, ga lahko torej pokrijemo na 4 različne načine.

V naslednjem koraku obravnavajmo hodnik dolžine 2×1. Pokrijemo ga lahko z dvema ploščama dimenzije 1×1 ali pa z eno ploščo dimenzije 2×1. Z dvema ploščama ga lahko pokrijemo na $4 \cdot 4 = 16$ načinov, z eno ploščo pa na 5 načinov. Skupno imamo torej možnih 21 različnih načinov.

Poglejmo sedaj primer hodnika dimenzije $n \times 1$ za $n > 2$ in označimo z a_n število različnih pokritij tega hodnika. Glede na dimenzijo zadnje ploščice ločimo dva primera. Če je zadnja ploščica dimenzije 1×1, imamo zanjo na razpolago 4 možnosti, pred njo pa imamo neko pokritje hodnika dimenzije $(n-1) \times 1$. V tem primeru torej obstaja $4a_{n-1}$ različnih pokritij. V kolikor pa je zadnja ploščica dimenzije 2×1, pa imamo zanjo 5 možnih izbir, pred njo pa imamo pokritje hodnika dimenzije $(n-2) \times 1$. Tukaj dobimo $5a_{n-2}$ različnih pokritij. Tako smo prišli do rekurzivne zveze

$$a_n = 4a_{n-1} + 5a_{n-2},$$

pri začetnih pogojih $a_1 = 4$ in $a_2 = 21$. Pridružena karakteristična enačba

$$q^2 = 4q + 5,$$

ima rešitvi $q_1 = -1$ in $q_2 = 5$, kar pomeni, da je

$$a_n = C_1(-1)^n + C_2 5^n.$$

Z upoštevanjem začetnih členov dobimo, da je $C_1 = \frac{1}{6}$ in $C_2 = \frac{5}{6}$, iskano število različnih pokritij hodnika dimenzije $n \times 1$ pa je

$$a_n = \tfrac{(-1)^n}{6} + \tfrac{5^{n+1}}{6}.$$

□

(5) Po definiciji dokaži, da je limita zaporedja podanega s splošnim členom

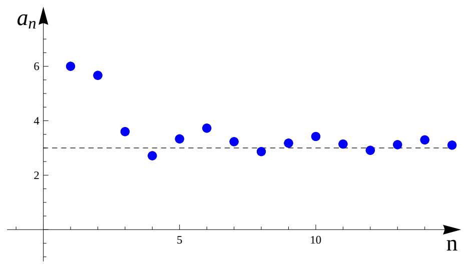
$$a_n = \frac{6n - 5\cos\frac{n\pi}{2}}{2n-1}$$

enaka 3.

Rešitev: Prvih nekaj členov zaporedja (a_n) je

$$a_1 = 6,\ a_2 = \tfrac{17}{3},\ a_3 = \tfrac{18}{5},\ a_4 = \tfrac{19}{7},\ a_5 = \tfrac{30}{9}, \ldots$$

njegov graf pa je na spodnji sliki.



Vidimo, da členi zaporedja oscilirajo in se čedalje bolj približujejo limitni vrednosti $L = 3$. Število L je limita zaporedja (a_n), če lahko za poljuben $\epsilon > 0$ najdemo tako naravno število N, da za vse $n \geq N$ velja

$$|a_n - L| < \epsilon.$$

Grafično to pomeni, da so vsi členi od N-tega dalje v pasu širine 2ϵ okoli premice $y = L$. Izberimo torej poljuben $\epsilon > 0$ in si poglejmo neenačbo:

$$\begin{aligned} \left|a_n - L\right| &< \epsilon, \\ \left|\frac{6n - 5\cos\frac{n\pi}{2}}{2n-1} - 3\right| &< \epsilon. \end{aligned}$$

Pokazati moramo, da to neenačbo rešijo vsa naravna števila od nekod dalje. Računajmo:

$$\begin{aligned} \left|\frac{6n - 5\cos\frac{n\pi}{2}}{2n-1} - 3\right| &< \epsilon, \\ \left|\frac{6n - 5\cos\frac{n\pi}{2} - 6n + 3}{2n-1}\right| &< \epsilon, \\ \left|\frac{3 - 5\cos\frac{n\pi}{2}}{2n-1}\right| &< \epsilon, \\ \frac{\left|3 - 5\cos\frac{n\pi}{2}\right|}{\epsilon} &< 2n - 1, \\ \frac{\left|3 - 5\cos\frac{n\pi}{2}\right|}{2\epsilon} + \tfrac{1}{2} &< n. \end{aligned}$$

Izraz $\left|3 - 5\cos\frac{n\pi}{2}\right|$ na levi strani zaenkrat še vsebuje n, hitro pa opazimo, da velja

$$\left|3 - 5\cos\tfrac{n\pi}{2}\right| \leq 8.$$

Če to vstavimo v prejšnjo neenakost, dobimo

$$n > \tfrac{4}{\epsilon} + \tfrac{1}{2}.$$

Naj bo sedaj N najmanjše naravno število, ki je večje od $\frac{4}{\epsilon} + \frac{1}{2}$. Potem vsak $n \geq N$ reši zgornjo neenačbo, kar pomeni, da je limita zaporedja (a_n) enaka $L = 3$. Ko vrednost števila ϵ manjšamo, dobivamo čedalje boljše aproksimacije limite, zato se vrednost števila N povečuje. $\square$

(6) Izračunaj limite zaporedij:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^3 + 6n - 3}{7n - 3n^3 + 2}$,

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$,

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} (n^2\sqrt{n^2+1} - n^3)$,

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{2n+3}$,

(e) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n}$,

(f) $\lim\limits_{n\to\infty} n(\log_2(2n-1) - \log_2 n - 1)$.

Rešitev: Računanje limit po definiciji ni praktično, zato si raje stvari malce olajšamo. Če je zaporedje dano z eksplicitnim predpisom, lahko uporabimo osnovna računska pravila:

$$\begin{aligned}
&(1)\ \lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty}(a_n) \pm \lim_{n\to\infty}(b_n),\\
&(2)\ \lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty}(a_n) \cdot \lim_{n\to\infty}(b_n),\\
&(3)\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim_{n\to\infty}(a_n)}{\lim_{n\to\infty}(b_n)},\\
&(4)\ \lim_{n\to\infty}(c \cdot a_n) = c \cdot \lim_{n\to\infty}(a_n) \text{ za vsak } c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

ter znane limite:

$$\begin{aligned}
&(1)\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^\alpha} = 0 \text{ za vsak } \alpha > 0,\\
&(2)\ \lim_{n\to\infty}\left(1 + \tfrac{r}{n}\right)^n = e^r \text{ za vsak } r \in \mathbb{R},\\
&(3)\ \lim_{n\to\infty} q^n = 0 \text{ za vsak } |q| < 1.
\end{aligned}$$

Pogosto prideta prav tudi naslednji formuli:

$$\begin{aligned}
&(1)\ \lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(\lim_{n\to\infty}(a_n)),\\
&(2)\ \lim_{n\to\infty}(a_n^{b_n}) = e^{\lim_{n\to\infty}(a_n-1)b_n}.
\end{aligned}$$

Prva formula velja za poljubno zvezno funkcijo in nam pove, da je limita vrednosti zvezne funkcije na nekem zaporedju enaka vrednosti funkcije v limiti zaporedja. V praksi to pomeni, da lahko zamenjamo vrstni red limite in funkcije. Druga formula pa velja v primeru, ko je $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n) = 1$ in $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n) = \pm\infty$.

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^3+6n-3}{7n-3n^3+2} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2+\frac{6}{n^2}-\frac{3}{n^3}}{\frac{7}{n^2}-3+\frac{2}{n^3}} = -\frac{2}{3}.$

$$\begin{aligned}
\text{(b) } \lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) &= \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}{1}\cdot\frac{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})},\\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}},\\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}},\\
&= 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{(c) } \lim_{n\to\infty}(n^2\sqrt{n^2+1}-n^3) &= \lim_{n\to\infty} n^2(\sqrt{n^2+1}-n),\\
&= \lim_{n\to\infty} n^2\cdot\frac{(\sqrt{n^2+1}-n)}{1}\cdot\frac{(\sqrt{n^2+1}+n)}{(\sqrt{n^2+1}+n)},\\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n^2+1}+n},\\
&= \infty.
\end{aligned}$$

(d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{2n+3} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}-1\right)(2n+3)} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n+6}{n}} = e^4.$

Ta limita je oblike 1^∞, zato smo uporabili formulo (2). Lahko pa bi jo izračunali tudi s prevedbo na limito, ki definira število e.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\tfrac{2}{n}\right)^{2n+3} = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\tfrac{2}{n}\right)^n\right)^{\frac{2n+3}{n}} = \left(e^2\right)^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+3}{n}} = (e^2)^2 = e^4.$$

Pri preprostih primerih, kot je bil ta, je vseeno, ali izračunamo limito na roke, ali pa uporabimo formulo. Pri bolj kompliciranih primerih pa je pogosto limito lažje izračunati z uporabo formule.

(e) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}-1\right)n} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}-\frac{n}{n+1}} = e^{-1}.$

(f) $\lim\limits_{n\to\infty} n(\log_2(2n-1)-\log_2 n - 1) = \lim\limits_{n\to\infty} n(\log_2\left(\frac{2n-1}{2n}\right)) = \lim\limits_{n\to\infty}\log_2\left(\frac{2n-1}{2n}\right)^n.$

Ker je logaritemska funkcija zvezna, lahko po formuli (1) zamenjamo vrstni red limite in logaritma. Tako pridemo do limite

$$\lim_{n\to\infty}\left(\tfrac{2n-1}{2n}\right)^n = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n-1}{2n}-1\right)n} = e^{-\frac{1}{2}}.$$

Rezultat pa je

$$\lim_{n\to\infty} n(\log_2(2n-1) - \log_2 n - 1) = \log_2\left(\lim_{n\to\infty}\left(\tfrac{2n-1}{2n}\right)^n\right) = \log_2 e^{-\frac{1}{2}} = -\tfrac{1}{2}\log_2 e.$$

□

(7) Zaporedje je podano z začetnim členom $a_1 = 1$ in rekurzivno zvezo

$$a_{n+1} = 1 + \tfrac{1}{4}a_n^2.$$

za $n \in \mathbb{N}$. Dokaži, da je zaporedje (a_n) konvergentno in izračunaj njegovo limito. Kaj pa, če vzamemo drug začetni člen a_1?

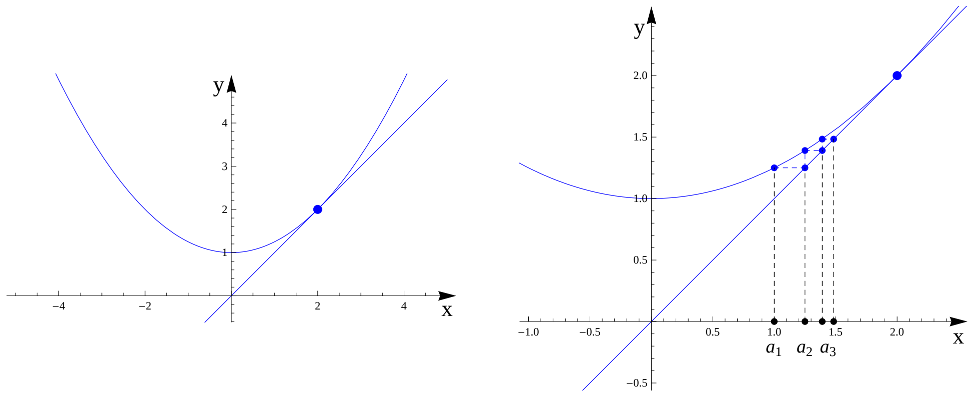
Rešitev: Sedaj je zaporedje podano z nelinearno diferenčno enačbo. V takšnih primerih praviloma splošnega člena ne znamo izračunati eksplicitno, lahko pa pogosto obravnavamo monotonost in konvergenco takšnih zaporedij.

Za začetek izračunajmo prvih nekaj členov

$$a_1 = 1,\ a_2 = 1.25,\ a_3 = 1.39,\ a_4 = 1.48,\ a_5 = 1.54,\ a_6 = 1.59, \ldots$$

Videti je, da zaporedje narašča, a zaenkrat ni jasno, ali je omejeno ali ne.

Da dobimo občutek, kaj se dogaja s členi zaporedja, si pomagajmo s cik-cak diagramom:



Označimo funkciji $f(x) = x$ in $g(x) = 1 + \frac{1}{4}x^2$. Začnemo s točko na abscisni osi, ki ustreza začetni vrednosti a_1 in poiščemo pripadajočo točko na grafu funkcije g. Nato izmenično vlečemo vodoravno črto do grafa funkcije f ali pa navpično do grafa funkcije g. Projekcije oglišč te lomljene črte na abscisno os so vrednosti zaporedja (a_n).

Risanje cik-cak črt je v bistvu grafična predstavitev računanja zaporednih členov. Točka na premici $y = x$ nam predstavlja vrednost člena a_n. Ko se dvignemo ali spustimo na ustrezno točko na grafu funkcije g, smo prišli v točko (a_n, a_{n+1}). Če želimo najti točko z absciso a_{n+1}, se moramo torej premakniti levo (desno) do premice $y = x$.

Z grafa sklepamo, da bo pri začetni vrednosti $a_1 = 1$ zaporedje konvergiralo k limiti 2. Da bi to dokazali, bomo pokazali, da je zaporedje naraščajoče in navzgor omejeno z 2.

Naš cilj je torej pokazati, da za vsak n velja:

$$\begin{aligned} a_n &\le 2, \\ a_{n+1} &\ge a_n. \end{aligned}$$

Da je zaporedje navzgor omejeno z 2, bomo pokazali z indukcijo. Za začetni člen velja $a_1 = 1 < 2$, zato predpostavimo, da je $a_n \leq 2$. Potem je

$$a_{n+1} = 1 + \tfrac{1}{4}a_n^2 \leq 1 + \tfrac{1}{4} \cdot 4 = 2,$$

kar pomeni, da je zaporedje navzgor omejeno z 2.

Dokažimo sedaj še, da je zaporedje monotono. Pokazati hočemo, da velja:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &\geq a_n, \\ 1 + \tfrac{1}{4}a_n^2 &\geq a_n, \\ a_n^2 - 4a_n + 4 &\geq 0, \\ (a_n - 2)^2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Zadnja neenakost zmeraj drži.

Dokazali smo torej, da je zaporedje (a_n) naraščajoče in navzgor omejeno z 2, od koder sledi, da je konvergentno. Označimo njegovo limito z a. Če na obeh straneh rekurzivne zveze izračunamo limito, dobimo:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 1 + \tfrac{1}{4}a_n^2 / \lim_{n\to\infty}, \\ a &= 1 + \tfrac{1}{4}a^2, \\ a^2 - 4a + 4 &= 0. \end{aligned}$$

Edina rešitev te enačbe je $a = 2$, kar pomeni, da je

$$\lim_{n\to\infty}(a_n) = 2.$$

Če izberemo drug začetni člen, dobimo neko drugo zaporedje. Dokazati pa se da naslednji trditvi:

· Če je $a_1 \in [-2, 2]$, je $\lim_{n\to\infty}(a_n) = 2$.

· Če je $|a_1| > 2$, je zaporedje (a_n) divergentno.

$\square$

(8) Izračunaj limiti danih zaporedij:

(a) $a_n = \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}}_{n \text{ korenov}}$,

(b) $b_n = \underbrace{\sin(\sin(\ldots(\sin(1)))}_{n \text{ sinusov}}$.

Rešitev: (a) Pri tej nalogi imamo zaporedje (a_n) sicer podano eksplicitno, a na težko izračunljiv način. Če izračunamo prvih nekaj členov, bi dobili vrednosti (zaokrožene na tri decimalke):

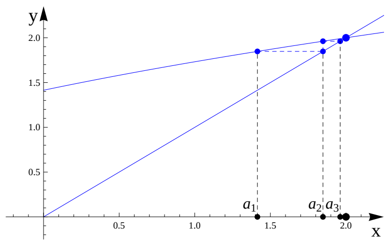
$$\begin{aligned} a_1 &= 1.414, \\ a_2 &= 1.848, \\ a_3 &= 1.962, \\ a_4 &= 1.990, \\ a_5 &= 1.998. \end{aligned}$$

Začetni členi nam dajejo slutiti, da zaporedje (a_n) narašča, vendar še ne vemo točno, ali kam konvergira, ali pa raste v nedogled. Ko računamo člene, lahko opazimo, da jih pravzaprav računamo rekurzivno enega za drugim. To pomeni, da lahko zaporedje (a_n) podamo z rekurzivnim predpisom $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$ in z začetnim členom $a_1 = \sqrt{2}$.

Recimo najprej, da je zaporedje (a_n) konvergentno z limito a. Če na rekurzivni zvezi uporabimo limito, dobimo:

$$
\begin{aligned}
a_{n+1} &= \sqrt{2 + a_n} / \lim_{n\to\infty}, \\
a &= \sqrt{2 + a}, \\
a^2 &= 2 + a.
\end{aligned}
$$

Rešitvi te enačbe sta $a \in \{-1, 2\}$. Ker so členi zaporedja (a_n) pozitivni, je $\lim_{n\to\infty}(a_n) = 2$, če seveda ta limita obstaja. Da dobimo občutek, kaj se dogaja s členi zaporedja, si pomagajmo s cik-cak diagramom:



Označimo funkciji $f(x) = x$ in $g(x) = \sqrt{2 + x}$. Slika nam da slutiti, da je zaporedje (a_n) naraščajoče in navzgor omejeno z 2. Formalno bomo to domnevo dokazali s pomočjo indukcije. Najprej opazimo, da za $x \in (0, 2)$ velja

$$
x < \sqrt{2 + x} < 2.
$$

Pokažimo najprej, da je zaporedje navzgor omejeno z 2. Po definiciji je $a_1 = \sqrt{2} < 2$. Denimo sedaj, da je $a_n < 2$ za nek $n \in \mathbb{N}$. Če v neenakost $\sqrt{2 + x} < 2$ vstavimo $x = a_n$, dobimo $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} < 2$.

Pokazati moramo še, da je zaporedje naraščajoče. Ker vsi členi zaporedja (a_n) ležijo na intervalu $(0, 2)$, iz enakosti $x < \sqrt{2 + x}$ sledi $a_n < \sqrt{2 + a_n} = a_{n+1}$.

Zaporedje (a_n) je torej naraščajoče in navzgor omejeno z 2, torej je konvergentno, na začetku pa smo že pokazali, da od tod sledi

$$
\lim_{n\to\infty} \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}}_{n \text{ korenov}} = 2.
$$

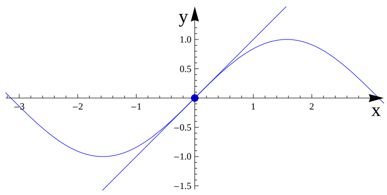
(b) Sedaj je prvih nekaj členov enakih:

$$
\begin{aligned}
b_1 &= 0.841, \\
b_2 &= 0.745, \\
b_3 &= 0.678, \\
b_4 &= 0.627, \\
b_5 &= 0.587.
\end{aligned}
$$

Kot kaže, zaporedje pada, a precej počasi. Opišemo ga lahko z rekurzivno zvezo

$$b_{n+1} = \sin b_n.$$

Z diagrama lahko sklepamo, da bo zaporedje konvergiralo proti nič.



Formalno bomo z indukcijo dokazali, da je zaporedje (b_n) padajoče in omejeno na intervalu $(0,1)$. Začetni člen $b_1 = \sin 1$ leži na intervalu $(0,1)$, zato denimo, da je nek $b_n \in (0,1)$. Ker za $x > 0$ velja neenakost

$$\sin x < x,$$

je

$$b_{n+1} = \sin b_n < b_n.$$

Hkrati pa iz pogoja $b_n \in (0,1)$ sledi tudi $b_{n+1} = \sin b_n \in (0,1)$. Limita b zaporedja (b_n) mora zadoščati enačbi

$$b = \sin b,$$

ki ima edino rešitev $b = 0$. Od tod dobimo

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{\sin(\sin(\ldots(\sin(1)))}_{n \text{ sinusov}} = 0.$$

□

(9) Izračunaj limito zaporedja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ki je dano s predpisom $a_n = \frac{1000^n}{n!}$.

Rešitev: Gledamo zaporedje kvocientov eksponentne funkcije z osnovo 1000 in fakultete. Na začetku bo nekaj časa eksponentna funkcija nad fakulteto, nato pa bo fakulteta večja, kar pomeni, da bo dano zaporedje nekaj časa naraščalo, nato pa bo začelo padati.

Poglejmo torej, kdaj začne zaporedje (a_n) padati:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &\leq a_n, \\ \tfrac{1000^{n+1}}{(n+1)!} &\leq \tfrac{1000^n}{n!}, \\ 1000 &\leq n+1, \\ n &\geq 999. \end{aligned}$$

Od tod sledi, da zaporedje (a_n) pada od 999-tega člena dalje. Imamo torej zaporedje, ki je padajoče od nekod dalje in navzdol omejeno z nič. Po izreku s predavanj je takšno zaporedje konvergentno.

Označimo limito zaporedja (a_n) z a. Sedaj bi lahko po definiciji pokazali, da je $a = 0$, a bi s tem imeli nekaj dela. Zato bomo raje uporabili naslednji trik. Zaporedje (a_n) lahko podamo tudi v rekurzivni obliki s predpisom

$$a_{n+1} = \frac{1000}{n+1} a_n.$$

Na obeh straneh te enakosti sedaj izračunajmo limito. Ker je $a = \lim_{n\to\infty}(a_n) = \lim_{n\to\infty}(a_{n+1})$, mora veljati

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}) = \lim_{n\to\infty}\tfrac{1000}{n+1} &\cdot \lim_{n\to\infty}(a_n),\\ a &= 0\cdot a,\\ a &= 0.\end{aligned}$$

Torej je

$$\lim_{n\to\infty}\tfrac{1000^n}{n!} = 0.$$

$\square$

(10) (a) Naj bo zaporedje (x_n) konvergentno z limito x. Dokaži, da potem tudi zaporedje $\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right)$ konvergira proti x.

(b) Naj bo zaporedje (x_n), $x_n > 0$, konvergentno z limito $x > 0$. Dokaži, da potem tudi zaporedje $(\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n})$ konvergira proti x.

Rešitev: Pokazali bomo, da aritmetične in geometrične sredine členov konvergentnega zaporedja konvergirajo k isti limiti kot zaporedje samo.

(a) Naj bo x limita zaporedja (x_n). Pokazati želimo, da za vsak $\epsilon > 0$ obstaja tak N, da za $n \geq N$ velja

$$\left|\tfrac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n} - x\right| < \epsilon.$$

Najprej lahko z uporabo trikotniške neenakosti ocenimo

$$\left|\tfrac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n} - x\right| = \left|\tfrac{x_1+x_2+\ldots+x_n-nx}{n}\right| = \left|\tfrac{(x_1-x)+(x_2-x)+\ldots+(x_n-x)}{n}\right| \leq \tfrac{|x_1-x|}{n}+\tfrac{|x_2-x|}{n}+\ldots+\tfrac{|x_n-x|}{n}.$$

Ker zaporedje (x_n) konvergira k x, za vsak $\epsilon > 0$ obstaja tak N, da za vse $n \geq N$ velja

$$|x_n - x| < \epsilon.$$

Za $n > N$ torej velja:

$$\begin{aligned}\left|\tfrac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n} - x\right| &\leq \tfrac{|x_1-x|}{n} + \tfrac{|x_2-x|}{n} + \ldots + \tfrac{|x_N-x|}{n} + \tfrac{|x_{N+1}-x|}{n} + \ldots + \tfrac{|x_n-x|}{n},\\ &\leq \tfrac{|x_1-x|}{n} + \tfrac{|x_2-x|}{n} + \ldots + \tfrac{|x_N-x|}{n} + \tfrac{(n-N)\epsilon}{n},\\ &< \tfrac{|x_1-x|}{n} + \tfrac{|x_2-x|}{n} + \ldots + \tfrac{|x_N-x|}{n} + \epsilon,\\ &= \tfrac{|x_1-x|+|x_2-x|+\ldots+|x_N-x|}{n} + \epsilon.\end{aligned}$$

Izraz v števcu zgornjega ulomka je neka konstanta, ki je neodvisna od n, zato bo pri $n \to \infty$ ta ulomek konvergiral proti 0. Torej lahko najdemo nek N', da bo za vse $n \geq N'$ veljalo

$$\tfrac{|x_1-x|+|x_2-x|+\ldots+|x_N-x|}{n} < \epsilon.$$

Če je n sedaj večji od N in N', bo veljalo

$$\left|\tfrac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n} - x\right| < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon.$$

Vidimo, da smo prišli do željene neenakosti, le da imamo namesto ϵ na desni 2ϵ. A to v resnici ni problem. Če bi namreč v izpeljavi vse ϵ-e nadomestili z $\frac{\epsilon}{2}$, bi na koncu dobili ϵ.

V obratno smer trditev ne velja. Protiprimer je npr. zaporedje s splošnim členom

$$a_n = (-1)^n.$$

To zaporedje ima dve stekališči 1 in -1, kar pomeni, da ni konvergentno. Zaporedje povprečnih vrednosti pa po drugi strani konvergira k 0.

(b) Sedaj želimo pokazati, da zaporedje geometričnih sredin $\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$ konvergira k isti limiti kot zaporedje samo. Tega bi se lahko lotili podobno kot prej, raje pa bomo uporabili naslednji trik. Ker so števila x_i pozitivna, lahko definiramo zaporedje (y_i) implicitno s predpisom

$$x_i = e^{y_i}$$

oziroma

$$y_i = \ln x_i.$$

Ker je logaritemska funkcija zvezna, je tudi zaporedje (y_i) konvergentno in velja

$$y = \lim_{n\to\infty}(y_i) = \lim_{n\to\infty}(\ln x_i) = \ln\left(\lim_{n\to\infty}(x_i)\right) = \ln x.$$

Od tod z uporabo naloge (a) dobimo

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{y_1+y_2+\ldots+y_n}{n}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{y_1+y_2+\ldots+y_n}{n}} = e^y = x.$$

Podobno kot v primeru aritmetičnih sredin tudi tokrat trditev ne velja v nasprotno smer. Protiprimer je na primer zaporedje:

$$a_{2k} = 2,$$
$$a_{2k-1} = \tfrac{1}{2}.$$

To zaporedje ima stekališči 2 in $\frac{1}{2}$, medtem ko zaporedje geometričnih sredin konvergira proti 1. □

(11) Naj za zaporedje (a_n), $a_n > 0$, obstaja limita $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = a > 0$. Pokaži, da potem velja $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = a$. S primerom pokaži, da obratno ne velja. Nato izračunaj limite:

(a) $a_n = \sqrt[n]{n}$,

(b) $a_n = \dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}$,

(c) $a_n = \dfrac{\ln n}{n}$.

Rešitev: Denimo, da za zaporedje (a_n) pozitivnih števil velja $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = a > 0$. Sedaj definirajmo novo zaporedje (x_n) s predpisom $x_1 = a_1$ in

$$x_n = \tfrac{a_n}{a_{n-1}},\ n > 1.$$

Po predpostavki je $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n) = a$. Po drugi strani pa z uporabo prejšnje naloge dobimo

$$a = \lim_{n\to\infty}(x_n) = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1 \cdot \tfrac{a_2}{a_1}\cdot\tfrac{a_3}{a_2}\cdots\tfrac{a_n}{a_{n-1}}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}.$$

V obratno smer ne moremo sklepati nič. To nam pove isti primer kot prej:

$$\begin{aligned} a_{2k} &= 2, \\ a_{2k-1} &= \tfrac{1}{2}. \end{aligned}$$

Zaporedje $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ ima stekališči 4 in $\frac{1}{4}$, medtem ko zaporedje $\sqrt[n]{a_n}$ konvergira proti 1.
S pomočjo tega rezultata lahko izračunamo nekatere limite, kjer nastopajo n-ti koreni. Velja namreč

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \tfrac{a_{n+1}}{a_n},$$

če limita na desni obstaja.
(a) Poglejmo si najprej limito $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$. Izberimo $b_n = n$. Potem je $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{n+1}{n}$ in

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1.$$

(b) Izberimo $b_n = \frac{n^n}{n!}$. Potem velja

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1} \cdot n!}{(n+1)! \cdot n^n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

(c) Če pišemo

$$a_n = \frac{\ln n}{n} = \ln \sqrt[n]{n},$$

lahko z uporabo zveznosti logaritemske funkcije in primera (a) izpeljemo, da je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = \lim_{n\to\infty} \ln \sqrt[n]{n} = \ln\left(\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}\right) = \ln 1 = 0.$$

Opomba 1: Na podoben način lahko izračunamo tudi:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^k} = 1,$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{p(n)} = 1,$$

kjer je k poljubno naravno število in p poljuben polinom s pozitivnimi koeficienti.

Opomba 2: Podobna zaporedja bomo srečali pri uporabi kvocientnega in pa korenskega kriterija za konvergenco vrst. Ta trditev pove, da nam da korenski kriterij isto limito kot kvocientni kriterij. □

(12) Izračunaj limito zaporedja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s splošnim členom

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}.$$

Rešitev: Poglejmo prvih nekaj členov:

$$\begin{aligned} a_1 &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}, \\ a_2 &= \tfrac{1}{\sqrt{5}} + \tfrac{1}{\sqrt{6}}, \\ a_3 &= \tfrac{1}{\sqrt{10}} + \tfrac{1}{\sqrt{11}} + \tfrac{1}{\sqrt{12}}. \end{aligned}$$

Spet imamo opravka s čedalje večjimi vsotami čedalje manjših členov. V primerih, ko imamo opravka z zaporedji, katerih členi so komplicirani izrazi, se pogosto splača te člene poenostaviti s pomočjo kakšnih ocen.

Vsak člen v vsoti

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$

je manjši od $\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$. Torej je $a_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$ za vsak n. Po drugi strani pa je vsak člen v zgornji vsoti večji od $\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$, kar pomeni, da je $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq a_n$. Oboje skupaj nam da oceni

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq a_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}.$$

Leva in desna stran zgornje neenakosti konvergirata k 1, zato bo tudi zaporedje (a_n) konvergiralo k 1. Formalno to dokažemo z uporabo izreka o sendviču, ki pravi naslednje:

Izrek (Izrek o sendviču)**.** *Če sta zaporedji (b_n) in (c_n) konvergentni in imata enaki limiti ter velja še $b_n \leq a_n \leq c_n$ za vsak $n \in \mathbb{N}$ od nekod dalje, je tudi zaporedje (a_n) konvergentno in velja*

$$\lim_{n\to\infty}(a_n) = \lim_{n\to\infty}(b_n) = \lim_{n\to\infty}(c_n).$$

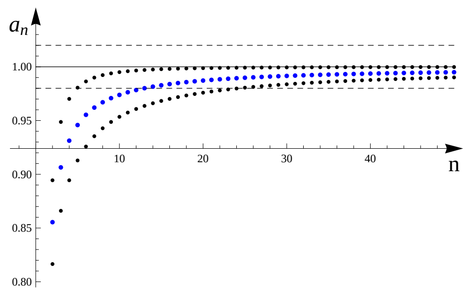
Če definiramo:

$$b_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}},$$
$$c_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}},$$

za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja $b_n \leq a_n \leq c_n$ in $\lim_{n\to\infty}(b_n) = \lim_{n\to\infty}(c_n) = 1$. Z uporabo izreka o sendviču torej dobimo

$$\lim_{n\to\infty}(a_n) = 1.$$

Poglejmo še skico.



□

(13) Pokaži, da je zaporedje $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s splošnim členom

$$a_n = \frac{\sin 1}{2} + \frac{\sin 2}{4} + \ldots + \frac{\sin n}{2^n}$$

konvergentno.

Rešitev: Pri tej nalogi bomo spoznali Cauchyjev pogoj, ki je ekvivalenten konvergenci zaporedja. Zaporedje (a_n) je Cauchyjevo, če za vsak $\epsilon > 0$ obstaja tako naravno število N, da za vsaka $m, n \geq N$ velja

$$|a_n - a_m| < \epsilon.$$

Namesto, da bi primerjali člene zaporedja od nekod dalje z limito, tu primerjamo člene od nekod dalje med sabo. Včasih je namreč lažje dokazati, da so členi od nekod dalje poljubno blizu eden drugemu kot pa neki fiksni vrednosti.

Denimo torej, da je $n > m$ in ocenimo:

$$\begin{aligned}
|a_n - a_m| &= \left|\tfrac{\sin(m+1)}{2^{m+1}} + \tfrac{\sin(m+2)}{2^{m+2}} + \ldots + \tfrac{\sin n}{2^n}\right|, \\
&\leq \left|\tfrac{\sin(m+1)}{2^{m+1}}\right| + \left|\tfrac{\sin(m+2)}{2^{m+2}}\right| + \ldots + \left|\tfrac{\sin n}{2^n}\right|, \\
&\leq \tfrac{1}{2^{m+1}} + \tfrac{1}{2^{m+2}} + \ldots + \tfrac{1}{2^n}, \\
&\leq \tfrac{1}{2^{m+1}}\left(1 + \tfrac{1}{2} + \ldots + \tfrac{1}{2^{n-m-1}}\right), \\
&\leq \tfrac{1}{2^{m+1}} \tfrac{1-\frac{1}{2^{n-m}}}{1-\frac{1}{2}}, \\
&= \tfrac{1-\frac{1}{2^{n-m}}}{2^m}.
\end{aligned}$$

Ker je $1 - \frac{1}{2^{n-m}} < 1$, od tod sledi

$$|a_n - a_m| < \tfrac{1}{2^m}.$$

Če torej izberemo N tako velik, da bo $\frac{1}{2^N} < \epsilon$, bo za vse $m, n \geq N$ veljalo

$$|a_n - a_m| < \tfrac{1}{2^m} \leq \tfrac{1}{2^N} < \epsilon,$$

kar smo želeli pokazati.

<u>Opomba:</u> Zaporedje (a_n) je torej Cauchyjevo, kar pomeni, da je konvergentno. Pokazati se da, da je njegova limita enaka

$$\lim_{n\to\infty}(a_n) = \frac{2\sin 1}{5 - 4\cos 1}.$$

□

(14) Določi vsa stekališča danega zaporedja in za vsako stekališče poišči podzaporedje, ki k temu stekališču konvergira:

(a) $a_n = (-1)^n - 1$,

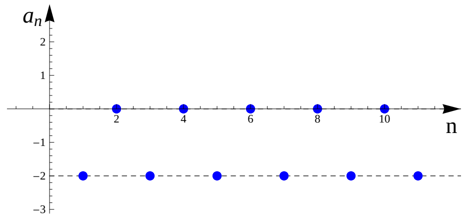
(b) $b_n = 1 + \frac{n}{n+1}\cos\frac{n\pi}{2}$.

Rešitev: Spomnimo se, da je število a stekališče zaporedja (a_n), če poljubna okolica števila a vsebuje neskončno členov zaporedja. Geometrično to pomeni, da seka graf zaporedja poljuben pas okoli vrednosti a v neskončno točkah.

(a) Prvih nekaj členov zaporedja (a_n) je enakih

$$a_1 = -2,\ a_2 = 0,\ a_3 = -2,\ a_4 = 0,\ a_5 = -2, \ldots$$

Vidimo, da zaporedje zavzame samo dve vrednosti, zato je graf zaporedja dokaj preprost.

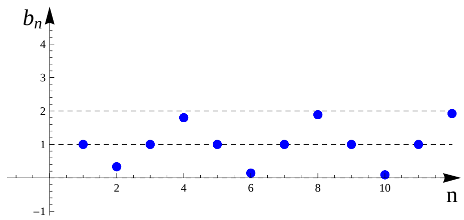


Zaporedje (a_n) ima stekališči $S_1 = 0$ in $S_2 = -2$. K stekališču S_1 konvergira podzaporedje (a_{2k}), k stekališču S_2 pa podzaporedje (a_{2k+1}).

(b) Prvih nekaj členov zaporedja (b_n) je enakih

$$b_1 = 1,\ b_2 = \tfrac{1}{3},\ b_3 = 1,\ b_4 = \tfrac{9}{5},\ b_5 = 1, \ldots$$

Graf zaporedja ima obliko diskretnega kosinusa.



Zaporedje (b_n) ima stekališča $S_1 = 0$, $S_2 = 1$ in $S_3 = 2$. K S_1 konvergira podzaporedje (b_{4k+2}), k S_2 podzaporedje (b_{2k+1}), k S_3 pa podzaporedje (b_{4k}). □

(15) Določi $\limsup(a_n)$ in $\liminf(a_n)$ za zaporedje s splošnim členom

$$a_n = \tfrac{1}{n} - \tfrac{2}{n} + \tfrac{3}{n} - \tfrac{4}{n} + \ldots + (-1)^{n-1}\tfrac{n}{n}.$$

Rešitev: Najprej poglejmo prvih nekaj členov zaporedja

$$a_1 = 1,\ a_2 = -\tfrac{1}{2},\ a_3 = \tfrac{2}{3},\ a_4 = -\tfrac{1}{2},\ a_5 = \tfrac{3}{5},\ a_6 = -\tfrac{1}{2}, \ldots$$

Vidimo, da velja:

$$a_{2k+1} = \tfrac{k+1}{2k+1},$$
$$a_{2k} = -\tfrac{1}{2}.$$

Zaporedje (a_n) ima dve stekališči $\pm\frac{1}{2}$. Števili $\limsup(a_n)$ in $\liminf(a_n)$ sta po definiciji največje in najmanjše stekališče zaporedja (a_n) (lahko dobimo tudi neskončni vrednosti). Torej je:

$$\limsup(a_n) = \tfrac{1}{2},$$
$$\liminf(a_n) = -\tfrac{1}{2}.$$

□