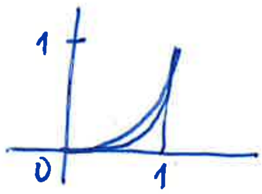
FUNKCIJSKA ZAPOREDJA IN VRSTE

Def. Naj bo $D \subset \mathbb{R}$ in $f_n : D \to \mathbb{R}$ funkcije za vsak $n \in \mathbb{N}$. Pravimo, da je $\{f_n\}$ funkcijsko zaporedje. Če za vsak $x \in D$ številsko zaporedje $\{f_n(x)\}$ konvergira, pravimo, da funkcijsko zaporedje f_n konvergira na D. V tem primeru lahko definiramo funk. $f : D \to \mathbb{R}$ s predpisom $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ in jo imenujemo limitna funkcija.

Opomba. Upor. tudi izraz f_n konvergira po točkah.

Zgled. (1) $f_n(x) = x^n$, $D = [0,1]$.

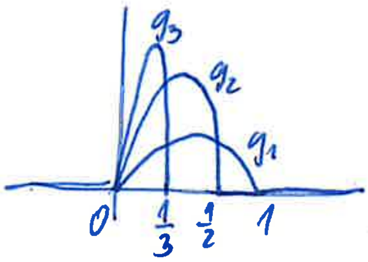
$$\lim f_n(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$



(2) Naj bo g zvezna funkcija na $[0,1]$, $g(0)=g(1)=0$, zunaj $[0,1]$ naj bo $\equiv 0$ in $\int_0^1 g(x)\,dx = A \neq 0$.

Definiramo $g_n(x) = n\,g(nx)$, $n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = \lim_{n\to\infty} n\,g(nx) = 0.$$



$g_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \equiv g$ po točkah.

Toda: $$\int_0^1 g_n(x)\,dx = \int_0^{1/n} n\,g(nx)\,dx \underset{\substack{t = nx \\ dt = n\,dx}}{=} \int_0^1 g(t)\,dt = A.$$

$$\int_0^1 g(x)\,dx = 0; \qquad \text{Torej } \int_0^1 g_n(x)\,dx \underset{n\to\infty}{\not\to} \int_0^1 g(x)\,dx$$

Naj bo $D \subset \mathbb{R}$.

Definicija. Funkcijsko zaporedje $\{f_n : D \to \mathbb{R}\}$ konvergira k funkciji $f : D \to \mathbb{R}$ enakomerno na D, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja n_0, da za vsak $n \geq n_0$ velja:

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \text{ za vse } x \in D.$$

Opomba. 1) Če $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f$ enakomerno na D, potem $f_n \to f$ po točkah na D, obratno pa ni nujno res.

2) Primer: $f_n(x) = \frac{x}{n}$ na $\mathbb{R}$.

x fiksen: $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$.

Pokažimo, da $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ ne konvergira enakomerno.

Naj bo $\varepsilon = 1$ in n_0 poljuben.

Velja: $\left|\frac{x}{n_0}\right| > 1$ čim je $|x| > n_0$.

Torej za $x = 2n_0$ pogoj ne velja.

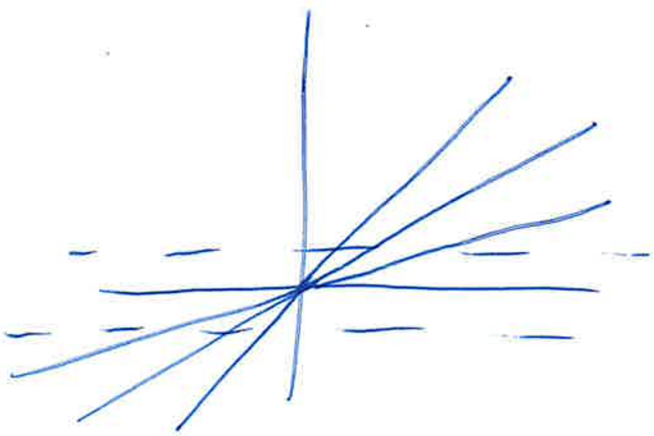
2a) Naj bo $I \subset \mathbb{R}$ omejen interval in f_n kot v 2).

Potem $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ enakomerno na I.

Izb. $\varepsilon > 0$. $\qquad \left|\frac{x}{n}\right| < \varepsilon$

$\exists M : x \in I \Rightarrow |x| < M$

$$\left|\frac{x}{n}\right| < \frac{M}{n} < \varepsilon \text{ velja za } n > \frac{M}{\varepsilon}.$$



FZ2

Ekvivalenten pogoj za enakomerno konvergenco $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f$ na D:

$$M_n = \sup_{x\in D} |f_n(x)-f(x)| \text{ in } \lim_{n\to\infty} M_n = 0.$$

Geometrijska interpretacija: grafi f_n od nekega n_0 dalje ležijo v ε traku okrog grafa funkcije f.

geom. interpretacija konv. po točkah.

<u>Primer od prej</u>: 1) $f_n(x) = \frac{x}{n}$, $f(x)=0$

$$M_n = \sup_{x\in D} \left|\frac{x}{n}\right| = \frac{1}{n}\sup_{x\in D}|x|$$

konv. je enakomerna $\iff$ D omejena.

2) $f_n(x) = x^n$, $x\in[0,1]$

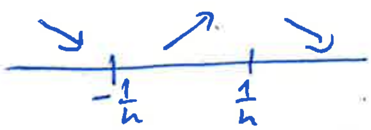
$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & ; x\in[0,1) \\ 1 & ; x=1 \end{cases}$$

$$|f_n(x)-f(x)| = \begin{cases} |x^n| & , x\in[0,1) \\ 0 & , x=1 \end{cases}$$

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)-f(x)| = \sup_{x\in[0,1)} |x|^n = 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} \not{0}$$

3) $f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}$ na $\mathbb{R}$. $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 =: f(x)$

$$M_n = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\frac{x}{1+n^2x^2}\right|$$

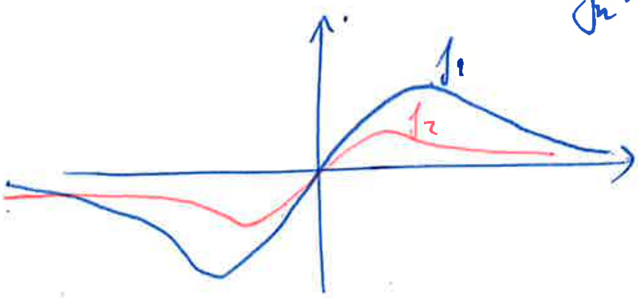


$$f_n'(x) = \frac{1+n^2x^2-2n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2} = \frac{1-n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2}$$

$x = \pm\frac{1}{n}$ ekstr.

$f_n(\frac{1}{n}) = \frac{1}{2n}$

$$M_n = \frac{1}{2n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$



FZ3

Definicija. Naj bo $D \subset \mathbb{R}$ in $\{f_n : D \to \mathbb{R}\}$ funkcijsko zaporedje. $\{f_n\}$ je enakomerno Cauchyjevo na D, če

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \ \forall m, n \geq n_0 : \sup_{x \in D} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon .$$

Izrek. Naj bo $D \subset \mathbb{R}$ in $\{f_n : D \to \mathbb{R}\}$ funkcijsko zaporedje. Tedaj je $\{f_n\}$ enakom. konv. na D $\iff$ $\{f_n\}$ je enakom. Cauchy na D.

Dokaz kot za zaporedja.

Izrek. Naj bo $D \subset \mathbb{R}$ in $\{f_n : D \to \mathbb{R}\}$ funkcijsko zaporedje. Če so f_n zvezne na D in f_n konvergira proti f enakom. na D, potem je f zvezna na D.

Opomba. Če f_n konvergira proti f po točkah, f_n zvezne, ni nujno, da bi bila limitna funkcija zvezna. (npr x^n).

Dokaz. Izb. $a \in D$, $x \in D$

$$|f(x) - f(a)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(a)| + |f_n(a) - f(a)|$$

Izb. $\varepsilon > 0$. Obstaja n_0: $|f_{n_0}(y) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$ $\forall y \in D$.

Ker je f_{n_0} zvezna $\exists \delta$: $|x - a| < \delta, x \in D \Rightarrow |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(a)| < \varepsilon/3$.

Če je torej $|x - a| < \delta$ in $x \in D$:

$$|f(x) - f(a)| \leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(a)| + |f_{n_0}(a) - f(a)| < \varepsilon .$$

$\boxtimes$

Definicija. Naj bo $D \subset \mathbb{R}$ in $u_n : D \to \mathbb{R}$ funkcije. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ imenujemo funkcijska vrsta. Funkcijska vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ konvergira (po točkah / na D), če zaporedje delnih vsot $s_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ konvergira po točkah na D. Označimo $s : D \to \mathbb{R}$ limitno funkcijo zapor. $\{s_n\}$.

Funkcijska vrsta $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ konvergira k $s: D \to \mathbb{R}$ enakomerno na D, če zaporedje delnih vsot $\{s_n: D \to \mathbb{R}\}$ konvergira enakomerno na D.

Posledica. Če je $\{u_n : D \to \mathbb{R}\}$ zaporedje zveznih funkcij na D in $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ konvergira k s enakomerno na D, potem je s zvezna na D.

Posledica. Naj bo $\{u_k : D \to \mathbb{R}\}$ funkcijsko zaporedje. Potem $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ enakom. konv. na D $\Longleftrightarrow$ vrsta $\sum u_k$ je enakom. Cauchyjeva, tj. $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 : \forall n \geq m \geq n_0 : \left|\sum_{k=m}^{n} u_k(x)\right| < \varepsilon$ za $\forall x \in D$.

Primer. $\sum_{n=1}^{\infty} x^n(1-x^n) =: f(x)$

(a) Vrsta konvergira za vse $x \in [0,1]$ in s tem definira $f: [0,1] \to \mathbb{R}$

(b) Določi f!

(c) Ali je konvergenca enakomerna na $[0,1]$?

(a) $d_n = \dfrac{x^{n+1}(1-x^{n+1})}{x^n(1-x^n)} = x\,\dfrac{1-x^{n+1}}{1-x^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} x$, če je $x \in [0,1)$

ker je $x<1$, vrsta konv. za $x \in [0,1)$.

Za $x=1$: $f(x) = 0$.

(b) $x<1$: $\sum_{n=1}^{\infty} x^n(1-x^n) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n} = \dfrac{x}{1-x} - \dfrac{x^2}{1-x^2} =$

$$= \frac{x + x^2 - x^2}{1-x^2} = \frac{x}{1-x^2}$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1-x^2}; & x \in [0,1) \\ 0, & x = 1 \end{cases}$$

(c) Ker f ni zvezna, konv. ni enakom. na $[0,1]$.

M-test

Izrek (Weierstrassov kriterij za enakom. konv. funkc. vrst).

Naj bo $\{u_n : D \to \mathbb{R}\}$ funkcijsko zaporedje. Denimo, da obstaja tako zaporedje pozitivnih števil $\{c_n\}$, da velja

$$(*) \qquad |u_n(x)| \le c_n \quad \text{za } \forall x \in D.$$

Če je številska vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergentna, potem funkcijska vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ konvergira enakomerno in absolutno na D. Če so u_n zvezne funkcije, potem je tudi vsota vrste zvezna funkcija.

Dokaz. Iz $(*)$ sledi, da $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$ konv. za $\forall x$, zato je $\sum u_n$ konvergira po točkah v D. ~~Označimo s $s: D \to \mathbb{R}$ njeno vsoto.~~ Ocenimo:

$$\forall x \in D,\ m>k: \quad \left|\cancel{\sum_{n=1}^{m} u_n(x)} - \sum_{n=1}^{k} u_n(x)\right| = \left|\sum_{n=k+1}^{m} u_n(x)\right| \le \sum_{n=k+1}^{m} |u_n(x)| \le \sum_{n=k+1}^{m} c_n$$

Ker je $\sum c_n$ konvergentna, je Cauchyjeva, za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja k_0: $\sum_{n=k+1}^{m} c_n < \infty$ $\forall m,k \ge k_0$.

Torej je $\sum u_n$ enakom. Cauchy, zato je enakom. konv. ∎

Primer. Naj bo številska vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutno konvergentna. Potem sta vrsti $\sum a_n \sin(nx)$ in $\sum a_n \cos(nx)$ enakom. konv. na $\mathbb{R}$.

INTEGRIRANJE IN ODVAJANJE FUNKCIJSKIH ZAPOREDIJ IN VRST

Izrek. Naj bo $\{f_n:[a,b]\to\mathbb{R}\}$ zaporedje zveznih funkcij in denimo, da f_n konvergira proti f enakomerno na $[a,b]$.
Potem velja $\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$.

Opomba. Če zaporedje f_n proti f konvergira samo po točkah, ni nujno res, da $\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx$, kar pokaže primer  $g_n(x)=n\,g(nx)$.

(int. lok.

Posledica. Naj bo $\{f_n:[a,b]\to\mathbb{R}\}$ funkc. zaporedje zv. funkcij in denimo, da $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konvergira enakomerno na $[a,b]$.
Potem velja:
$$\int_a^x \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\,dt=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^x f_n(t)\,dt. \quad \text{za } x\in(a,b].$$

Dokaz izreka. $\forall \varepsilon>0\ \exists n_0\ \forall n\geq n_0\ |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon \ \forall x\in[a,b]$.
$$\left|\int_a^b f(x)\,dx-\int_a^b f_n(x)\,dx\right|\leq\int_a^b |f(x)-f_n(x)|\,dx \underset{\forall n\geq n_0}{\leq} \varepsilon(b-a).$$
∎

Izrek. Naj bo $\{f_n:[a,b]\to\mathbb{R}\}$ funkc. zaporedje zvezno odvedljivih funkcij na $[a,b]$. Denimo, da $f_n'\to g$ enakomerno na $[a,b]$ in $\{f_n(c)\}$ konvergira za nek $c\in[a,b]$.
Potem f_n konvergira enakomerno na $[a,b]$ k neki odvedljivi funkciji f in velja: $f'(x)=\lim_{n\to\infty} f_n'(x)$.

Dokaz. Ker je f_n' zvezna, velja:

$$f_n(x) = f_n(c) + \int_c^x f_n'(t)\,dt \quad \text{na } [c,x]$$

Ker f_n' enakom. konvergira, desna stran konvergira proti $\lim_{n\to\infty} f_n(c) + \int_c^x g(t)\,dt$. Konv. je enakom., ker.-

Torej f_n enakom. konv. proti $\lim_{n\to\infty} f_n(c) + \int_c^x g(t)\,dt$.

Defin.: $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(c) + \int_c^x g(t)\,dt$.

f je odvedljiva in velja $f'(x) = g(x)$. $\boxtimes$

Posledica. Naj bo $\{u_n : [a,b] \to \mathbb{R}\}$ funkc. zapor. zv. odv. funkcij na $[a,b]$. Denimo, da $\sum u_n'$ konverg. enakom. na $[a,b]$ in da $\sum u_n(c)$ konvergira za nek $c \in [a,b]$. Potem $\sum u_n$ konvergira enakomerno na $[a,b]$ in velja:

$$\Big(\sum u_n(x)\Big)' = \sum u_n'(x).$$

$$|f(x) - f_n(x)| = \Big|\lim_{n\to\infty} f_n(c) - f_n(c) + \int_c^x g(t)\,dt - \int_c^x f_n'(t)\,dt\Big| \le$$

$$\le \underbrace{\Big|\lim_{n\to\infty} f_n(c) - f_n(c)\Big|}_{< \varepsilon/2 \ \forall n \ge n_0} + \Big|\int_c^x \underbrace{|g(t) - f_n'(t)|}_{\le \varepsilon/(b-a) \ \forall n \ge m_0}\,dt\Big|$$

POTENČNE VRSTE

Potenčna vrsta je funkcijska vrsta oblike $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$, kjer je $\{a_n\}$ številsko zaporedje in $c\in\mathbb{R}$.

Primer. $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ konv. $\iff |x|<1$

$\sum_{n=0}^{\infty} n!\,x^n$ konv $\iff x=0$.

Izrek 1. Dana je potenčna vrsta $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$. Obstaja $R\in[0,\infty]$ z lastnostjo: za x, $|x-c|<R$ je vrsta konv. in abs. konv. in za x, $|x-c|>R$ je vrsta divergentna. Če je $0<r<R$, tedaj vrsta enakom. konv. na $[c-r,c+r]$.

R imenujemo konv. polmer.

Posledica. Vsota potenčne vrste s konv. polmerom $R>0$ je zvezna funkcija na $(-R,R)$.

~~Izrek 2. Naj bo $R>0$ konv. polmer potenčne vrste $\sum a_n(x-c)^n=f(x)$. Tedaj na $(c-R,c+R)$ vrsto lahko členoma integriramo in členoma odvajamo. Konv. polmer se ohrani: $f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n(x-c)^{n-1}$, $\int_c^x f(t)\,dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}(x-c)^{n+1}$ za vsa $x\in(-R,R)$.~~

~~Posledica. Naj bo $R>0$ konv. polmer potenčne vrste $\sum a_n(x-c)^n$. Tedaj je njena vsota neskončno mnogokrat odvedljiva na $(-R,R)$ $(\mathcal{C}^\infty((-R,R)))$.~~

Dokaz 1. $c=0$. Recimo, da vrsta konv. pri $x=x_0$. Dokažimo, da vrsta abs. konv. in enakom. konv. na $[-r,r]$. Naj bo $0<r<|x_0|$. Vemo $\lim_{n\to\infty}|a_n x_0^n|=0$. Torej $\exists M:\ |a_n|\cdot|x_0|^n\le M\ \forall n$.

Zato za $x\in[-r,r]$: $|a_n x^n|\le |a_n| r^n\le |a_n|\left(\frac{r}{|x_0|}\right)^n|x_0|^n\le M\cdot\left(\frac{r}{|x_0|}\right)^n$.

Ker je geom. vrsta $\sum M\left(\frac{r}{|x_0|}\right)^n$ konv., je po Weierstr. krit. $\sum a_n x^n$ enakom. konv. na $[-r,r]$. Ker je r, $0<r<|x_0|$ poljuben, vrsta konv. na $(-|x_0|,|x_0|)$.

Naj bo $R = \sup\{|x_0|;$ vrsta konv. pri $x = x_0\}$.
R ima vse iskane lastnosti. $\boxed{\square}$

Izrek. Naj bo $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$ potenčna vrsta. Za konv. polmer R velja:

(1) $\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$, če ta limita obstaja.

(2) $\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ — " " — .

Dokaz. (1) Up. kvocientni kriterij za abs. konv. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|\,|x-c|^{n+1}}{|a_n|\,|x-c|^n} = |x-c| \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = |x-c| \cdot L$$

če limita obstaja.

Krit. pov.: $|x-c| \cdot L < 1 \Leftarrow$ vrsta konv.
$|x-c| \cdot L > 1 \Leftarrow$ vrsta div.
Sledi $L = \frac{1}{R}$. $\boxed{\square}$

↓ 3.5.2018

(2) podobno s korenskim.

Primer. Določi konv. območje:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$: $\quad \frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \Rightarrow R = 1$.

$x = 1$: div; $x = -1$ konv: $\quad [-1, 1)$.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n \quad \frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^n} = \infty \Rightarrow R = 0 \quad \{0\}$.

Izrek (Cauchy-Hadamard). Za konv. polmer R potenčne vrste $\sum_{n=0} a_n (x-c)^n$ velja:

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Dokaz. $a := \limsup \sqrt[n]{|a_n|} \in [0,\infty]$. BŠS $\sum a_n x^n$.

(1) $a=\infty$: izb. $x \neq 0$. Ker je ∞ stekališče $(\sqrt[n]{|a_n|})_n$, obstajajo polj. veliki indeksi n, da je $\sqrt[n]{|a_n|} > \frac{1}{|x|}$. Za te indekse velja $|a_n||x|^n > 1$. Ker členi vrste ne konv. proti 0, vrsta divergira. Ker x polj., $x\neq 0$, sledi $R=0$.

(2). $a \in [0,\infty)$. • Izb. polj. x, $|x| < \frac{1}{a}$. Izb. si $q>0$, $|x| < \frac{1}{q} < \frac{1}{a}$ tj. $a<q$. Ker je a najv. stekališče $(\sqrt[n]{|a_n|})_n$, obstaja tak n_0, da za vsak $n \geq n_0$ velja: $\sqrt[n]{|a_n|} < q$ tj. $|a_n| \leq q^n$.

Potem velja: $|a_n x^n| \leq |q^n x^n|$.

Ker je $|qx|<1$, ima $\sum |a_n x^n|$ konv. majoranto, zato konv.

• Izb. polj. x, $|x| > \frac{1}{a}$, tj. $a > \frac{1}{|x|}$. Ker je a stekališče $(\sqrt[n]{|a_n|})_n$ obstajajo polj. veliki indeksi n, da je $\sqrt[n]{|a_n|} > \frac{1}{|x|}$, tj. $|a_n x^n| > 1$. Ker členi ne gredo proti 0, vrsta divergira. $\boxed{Z}$

Primer $\sum n! x^{n!}$

Izrek (Abel). Naj bo R konv. polmer potenčne vrste $\sum a_n x^n$. Če vrsta konv. pri $x=R$ $(-R)$, potem je njena vsota zvezna pri $x=R$ $(-R)$.

Izrek (odvajanje in integriranje potenčnih vrst)
Naj bo $R>0$ konv. polmer potenčne vrste $f(x)=\sum a_n x^n$.
Potem imata vrsti, ki ju dobimo s členskim odv.
$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ in čl. intg. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ tudi konv. polmer R
in za vse $x \in (-R,R)$ velja:

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad \text{in} \quad \int_0^x f(t)\,dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}.$$

Dokaz. Dovolj je dokazati, da se konv. polmer ne spremeni (drugo sledi iz izrekov o odv. in intg. funkc. vrst).
Up. upr. Cauchy-Hadamard:

$$\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|n a_n|}=\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}\,\sqrt[n]{|a_n|}=\limsup\sqrt[n]{|a_n|}$$

Torej imata $\sum a_n x^n$ in $\sum n a_n x^{n-1}$ enaka konv polmer.
Podobno za intg.

$\square$

Posledica. Naj bo $R>0$ konv. polmer $\sum a_n x^n$. Tedaj je njena vsota neskončno mnogokrat odv. na $(-R,R)$.

Primer. (1) Seštej $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$.

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x}, \quad |x|<1 \Rightarrow f(x)=\int\frac{1}{1-x}dx=\log(1-x)+C$$

$$f(0)=0=C \Rightarrow C=0.$$

(2) $$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} n(x-1)^n = x\underbrace{\sum_{n=\cancel{0}} n(x-1)^{n-1}}_{g(x)}$$

$$\int g(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}x^n=\frac{x}{1-x} \qquad g(x)=\left(\frac{x}{1-x}\right)'$$

TAYLORJEVA FORMULA IN TAYLORJEVA VRSTA

Vemo že: če je P polinom stopnje n velja:

$$P(a+h) = P(a) + \frac{P'(A)}{1!}h + \dots + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}h^n,$$

kar dokažemo z odvajanjem polinoma $h \mapsto P(a+h)$.

$h = x-a$: $\quad P(x) = P(a) + P'(a)(x-a) + \dots + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$

Definicija. Naj bo f n-krat odvedljiva funkcija v okolici t. a.
Polinom $\quad T_{n,a}(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$
imenujemo n-ti Taylorjev polinom funkcije f pri a.

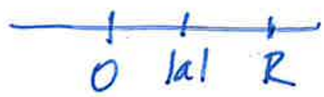
Za uporabo je pomembno oceniti ostanek R_n:

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x).$$

Če je f neskončnokrat odvedljiva v okolici t. $a \in \mathbb{R}$, ji lahko priredimo Taylorjevo vrsto $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = \lim_{n\to\infty} T_{n,a}(x)$,
če ta limita obstaja.
Taylorjeva vrsta je potenčna vrsta, zato ima konvergenčni polmer in vemo, kako konvergira. Velja:

Izrek. Denimo, da je f vsota konvergentne potenčne vrste $f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 \dots$ za $|x|<R$, $R>0$. Potem za vsak a, $|a|<R$
velja: $\quad f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ na $|x-a| < R-|a|$

(tj. f je vsota pripadajoče Tayl. vrste v t. a).



Dokaz. pri $a=0$: Potenčno vrsto lahko členoma odvajamo:

$$f^{(k)}(x) = k!c_k + \dots$$

$$f^{(k)}(0) = k!c_k \Rightarrow c_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$$

Taylorjev izrek. Naj bo f $(n+1)$-odvedljiva funkcija na odprtem intervalu I, ki vsebuje a. Za vsak $x \in I$ obstaja c med a in x, da velja
$$R_{n,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Dokaz. Po definiciji je $R_{n,a}(x) = f(x) - T_{n,a}(x)$ in zato je
$$R_{n,a}^{(k)}(a) = 0 \text{ za } 0 \le k \le n.$$

Fiksiramo x in izberemo $s \in \mathbb{R}$:
$$R_n(x) = s(x-a)^{n+1}.$$

Definirajmo $G(y) = R_{n,a}(y) - s(y-a)^{n+1}$.

Velja: $G(x) = 0$ in $G^{(k)}(a) = 0$ za $0 \le k \le n$.

Z n-kratno uporabo Rollovega izreka dobimo

c: $G^{(n+1)}(c) = 0$ tj. $\therefore f^{(n+1)}(c) = s(n+1)!$,

tj. $R_{n,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \cdot (x-a)^{n+1}$. ∎

Primer. Izračunaj $\sqrt{1'1}$ približno vrednost in oceni napako s T_1! (Razvoj okrog 1).

$f(x) = \sqrt{1+x}$

$f(1) = 1$

$f'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(1) = \frac{1}{2}$

$f''(x) = -\frac{1}{4}(1+x)^{-\frac{3}{2}} \Rightarrow f''(1) = -\frac{1}{4}$

$T_2(x) = f(1) + xf'(1) + \frac{x^2}{2}f''(1) =$

$= 1 + x\frac{1}{2} - \frac{1}{4}x^2$

$T_1(0'1) = 1 + 0'05$ $\quad |R_1(0'1)| = \left|-\frac{1}{4}(1+c)^{-\frac{3}{2}}\right| \frac{1}{2!} (0'1)^2 \le \frac{1}{800} = 0'00125$

$T_2(0'1) = 1 + 0'05 - 0'0025$

$f'''(x) = +\frac{3}{8}(1+x)^{-\frac{5}{2}}$

$|R_2(0'1)| \le \left|\frac{3}{8} \cdot \underset{1}{\underbrace{(1+c)^{-\frac{5}{2}}}}\right| \cdot \frac{1}{3!}(0'1)^3 = \frac{1}{16} \cdot (0'1)^3$

$$x = a + (x-a)$$

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} (x-a)^k$$

ker abs konv., lahko zam. vrstni red

c_0
$c_1 a^1 \quad c_1(x-a)$
$c_2 a^2 \quad 2c_2 a(x-a) \quad c_2(x-a)^2$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} c_n \binom{n}{k} a^{n-k} (x-a)^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{n=k}^{\infty} c_n \binom{n}{k} a^{n-k} \right) (x-a)^k$$

konv. potenčna vrsta za $|x-a| < R - |a|$.

Razmislek iz 1. dela dokaza pokaže, da so koef. odvodi. $\boxed{}$

<u>Primer</u>. $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$.

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^{-\frac{1}{h}}}{h} = \lim_{x \to \infty} x e^{-x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{e^{+x}} = 0$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} & , x > 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases}$$

Ker je $\lim_{h \to 0} \frac{e^{-\frac{1}{h}}}{h} = 0$, je $f'(0) = 0$.

Podobno nadaljujemo in sledi, da je $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ in $f^{(n)}(0) = 0 \ \forall n$. Zato je pripadajoča Tayl. vrsta v 0 enaka ničelni. Ta ni konvergira povsod, njena vsota pa ni f. Torej f ni enak vsoti pripadajoče Tayl. vrste.

Zato definiramo nov razred funkcij:

<u>Definicija</u>. Funkcija $f: I \to \mathbb{R}$ je <u>realno analitična</u> $\boxed{\text{oznaka: } C^\omega(I)}$ na intervalu I, če za vsak $a \in I$ obstaja $r_a > 0$, da je $(a - r_a, a + r_a) \subset I$ in je f na $(a - r_a, a + r_a)$ vsota konv. pot. vrste:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n \quad , x \in (a - r_a, a + r_a).$$

Opomba. 1) Od prej vemo, da je $c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$, torej je potenčna vrsta ravno Taylorjeva vrsta za f v točki a.

2) $C^{\omega}(I) \subsetneq C^{\infty}(I)$, kar pokaže primer in izrek o odvajanju potenčnih vrst.

Taylorjev izrek (splošna oblika ostanka).
Naj bo I odprt interval, ki vsebuje a in $f \in C^{n+1}(I)$. Za vsak $x \in I$ in $p \in \mathbb{N}$ obstaja c med a in x, da je

$$f(x) = T_{n,a}(x) + R_{n,a}(x),$$

kjer je $R_{n,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{p \cdot n!}(x-a)^p (x-c)^{n-p+1}$

Posebej: $p = n+1$: $R_{n,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$

$p = 1$ $R_{n,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-a)(x-c)^n$

Dokaz. Izb. $x, b \in I$, $p \in \mathbb{N}$ in definirajmo:

$F(x) = T_{n,x}(b) + \left(\frac{b-x}{b-a}\right)^p R_{n,a}(b)$ je zvezno odvedljiva na I.

$F(a) = T_{n,a}(b) + R_{n,a}(b) = f(b)$

$F(b) = T_{n,b}(b) = f(b)$

Torej po Rollovem izreku obstaja c med a in b: $F'(c) = 0$.

$F'(x) = \left(f(x) + (b-x)f'(x) + \frac{(b-x)^2}{2} f''(x) + \dots + \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n)}(x)\right)' + \left(\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^p R_{n,a}\right)'$

$= f'(x) - f'(x) + (b-x)f''(x) - (b-x)f''(x) + \dots + \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x)$

$+ (-p)\frac{(b-x)^{p-1}}{(b-a)^p} R_{n,a}(b) \Rightarrow R_{n,a}(b) = \frac{(b-c)^{n-p+1}(b-a)^p}{n! \cdot p} f^{(n+1)}(c)$

TAYLORJEVE VRSTE OSNOVNIH FUNKCIJ

- EKSPONENTNA FUNKCIJA

$f(x) = e^x$:

Taylorjeva formula:

$$f(x) = T_{n,0}(x) + R_{n,0}(x) =$$
$$= f(0) + f'(0)x + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}$$
$$= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1}$$

x fiksen: $|R_{n,0}(x)| = \left|\frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1}\right| \leq \max\{1, e^x\} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Torej $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ $\forall x$.

- SINUS

$f(x) = \sin x$

$f'(x) = \cos x$

$f''(x) = -\sin x$

$f'''(x) = -\cos x$

okrog 0: $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + R_{n,0}(x)$

$$|R_{n,0}(x)| = \frac{|f^{(n+1)}(c)|}{(n+1)!}|x|^{n+1} \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Sledi $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}(-1)^n}{(2n+1)!}$ $\forall x \in \mathbb{R}$

Podobno izpeljemo:

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

LOGARITEMSKA FUNKCIJA

$$f(x) = \ln(x+1), \quad x \in (-1, \infty).$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} \underset{\uparrow}{=} 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \quad \text{za } |x| < 1.$$

vsota konv. geom. vrste

Potenčno vrsto lahko členoma integriramo in dobimo:

$$f(x) - \underset{0}{\underset{\shortparallel}{f(0)}} = \int_0^x f'(t)\,dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n\,dt =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^n\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \qquad x \in (-1, 1).$$

BINOMSKA VRSTA

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k, \quad x \in (-1, 1),\ \alpha \in \mathbb{R}, \text{ kjer je}$$

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$$

posplošeni binomski koeficient.

<u>Dokaz.</u>

$$f(x) = (1+x)^\alpha$$

$$f^{(k)}(x) = \alpha \cdot (\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$$

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \binom{\alpha}{k} \qquad \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} = \binom{\alpha}{n+1} \cdot (1+c)^{\alpha-n-1}$$

Ocena za ostanek:

$$x \in (0,1): \quad c \in (0, x) \Rightarrow 1 + c \in (1, x+1)$$

$$|R_{n,0}(x)| \leq \left|\binom{\alpha}{n+1}\right| \cdot \underset{\leq \max\{2^\alpha, 1\} = M}{(1+c)^\alpha} \cdot \underset{\leq 1}{(1+c)^{-(n+1)}} \cdot x^{n+1} \leq$$

$$\leq \left|\binom{\alpha}{n+1}\right| \cancel{2^\alpha} M \cdot x^{n+1}$$

$$b_n(x) := \binom{\alpha}{n+1} \cdot x^{n+1}$$

$$\frac{b_n(x)}{b_{n-1}(x)} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)\, n!\, x}{(n+1)!\, \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)} = \frac{\alpha-n}{n+1} \cdot x \xrightarrow[n\to\infty]{} -x$$

Torej: $\sum |b_n(x)|$ po kvocientnem kriteriju konvergira,
zato gre $b_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Če je $x \in (-1, 0)$, potem je $c \in (x, 0)$

$-1 \quad x \quad c \quad 0$

Uporabimo oceno za ostanek pri $p=1$:

$$R_{n,0}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!} x (x-c)^n = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!} (1+c)^{\alpha-n-1} x (x-c)^n$$

$$|R_{n,0}(x)| \le \left|\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!}\right| (1+c)^{\alpha} \left|\frac{x}{1+c}\right| \left|\frac{x-c}{1+c}\right|^n$$

$$\wedge \qquad\qquad \wedge \qquad\qquad \wedge$$

$$M \qquad \left|\frac{x}{1+x}\right| \qquad |x|^n$$

$\frac{x-c}{1+c}$ je padaj… ča…

$\left(\frac{x-c}{1+c}\right)' = \frac{-(1+c)-x+c}{(1+c)^2}$

za $\alpha \ge 0$: $0 < 1+c < 1 \Rightarrow (1+c)^{\alpha} \le 1$

$\alpha < 0$: $0 < 1+x \le 1+c \Rightarrow (1+c)^{\alpha} \le (1+x)^{\alpha}$

$$M := \max\{1, (1+x)^{\alpha}\}$$

$$|R_{n,0}(x)| \le \left|\frac{\alpha\cdots(\alpha-n)}{n!}\right| \cdot M \cdot \left|\frac{x}{1+x}\right| |x|^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

odtod s pomočjo kvocientnega kriterija
podobno kot zgoraj zaključimo

<u>Primer.</u> logaritem okrog a, $a > 0$:

$$\log x = \log(a + x - a) = \log\left(a\left(1 + \frac{x-a}{a}\right)\right) =$$

$$= \log a + \log\left(1 + \frac{x-a}{a}\right) = \log a + \frac{x-a}{a} - \frac{1}{2}\left(\frac{x-a}{a}\right)^2 + \cdots$$

konvergira za $\left|\frac{x-a}{a}\right| < 1$, tj. $0 < x < 2a$