Vektorski prostori s skalarnim produktom

Klemen Šivic

8. maj 2020

1 Definicija in osnovne lastnosti skalarnega produkta

V tem poglavju bomo posplošili skalarni produkt, ki ga poznamo na $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^3$, na poljuben (končnorazsežen) realen ali kompleksen vektorski prostor. Odslej naj $\mathbb{F}$ vedno označuje obseg realnih ali kompleksnih števil.

Definicija 1.1. Naj bo V (ne nujno končnorazsežen) vektorski prostor nad $\mathbb{F}$. *Skalarni produkt* na V je vsaka funkcija $V \times V \to \mathbb{F}$, $(x, y) \mapsto \langle x, y\rangle$, za katero velja:

1. *aditivnost v prvem faktorju*: $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$ za vse $x, y, z \in V$,
2. *homogenost v prvem faktorju*: $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$ za vse $x, y \in V$ in $\alpha \in \mathbb{F}$,
3. *poševna simetričnost*: $\langle y, x\rangle = \overline{\langle x, y\rangle}$ za vse $x, y \in V$,
4. *pozitivna definitnost*: $\langle x, x\rangle \geq 0$ za vse $x \in V$, pri čemer velja $\langle x, x\rangle = 0$ natanko takrat, ko je $x = 0$.

Prostoru V v tem primeru pravimo *vektorski prostor s skalarnim produktom*. Realni vektorski prostor s skalarnim produktom se imenuje *evklidski prostor*, kompleksen vektorski prostor s skalarnim produktom pa *unitaren prostor*.

Lema 1.2. *V prostoru s skalarnim produktom velja:*

1. *aditivnost v drugem faktorju: $\langle z, x + y\rangle = \langle z, x\rangle + \langle z, y\rangle$ za vse $x, y, z \in V$,*
2. poševna homogenost *v drugem faktorju: $\langle x, \alpha y\rangle = \overline{\alpha}\langle x, y\rangle$ za vse $x, y \in V$ in $\alpha \in \mathbb{F}$,*
3. *$\langle x, 0\rangle = \langle 0, x\rangle = 0$ za vsak $x \in V$.*

Dokaz.

1. $\langle z, x + y\rangle = \overline{\langle x + y, z\rangle} = \overline{\langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle} = \overline{\langle x, z\rangle} + \overline{\langle y, z\rangle} = \langle z, x\rangle + \langle z, y\rangle$.
2. $\langle x, \alpha y\rangle = \overline{\langle \alpha y, x\rangle} = \overline{\alpha\langle y, x\rangle} = \overline{\alpha}\,\overline{\langle y, x\rangle} = \overline{\alpha}\langle x, y\rangle$.
3. $\langle x, 0\rangle = \langle x, 0 \cdot x\rangle = 0 \cdot \langle x, x\rangle = 0$, $\langle 0, x\rangle = \overline{\langle x, 0\rangle} = 0$.

□

Posledica 1.3. *V evklidskem prostoru je skalarni produkt bilinearen funkcional. V unitarnem prostoru je skalarni produkt linearen v prvem faktorju ter aditiven in poševno homogen v drugem faktorju. Pravimo, da je* seskvilinearen funkcional.

Primeri 1.4.

1. V realnem vektorskem prostoru $\mathbb{R}^n$ za $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ in $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$ definirajmo $\langle x, y\rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j$. Kratek račun pokaže, da je s tem predpison definiran skalarni produkt, ki je očitno posplošitev znanega skalarnega produkta v $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^3$. Pravimo mu *standardni skalarni produkt na* $\mathbb{R}^n$.

2. Podobno v kompleksnem vektorskem produktu $\mathbb{C}^n$ za $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ in $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$ definiramo $\langle x, y\rangle = \sum_{j=1}^n x_j \overline{y_j}$. Spet je s tem predpisom definiran skalarni produkt, ki mu pravimo *standardni skalarni produkt na* $\mathbb{C}^n$.

3. Množica $\mathcal{C}[a,b]$ vseh zveznih funkcij na $[a,b]$ je realen vektorski prostor za seštevanje in množenje s skalarji po točkah. Definirajmo

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\, dx.$$

Vsak naj sam preveri, da je s tem predpisom definiran skalarni produkt na $\mathcal{C}[a,b]$. Zveznost je pri tem potrebna, in sicer v dokazu drugega dela 4. aksioma.

Ker je $\langle x, x\rangle \geq 0$ za vsak $x \in V$, je smiselna naslednja definicija.

Definicija 1.5. *Norma* vektorja $x \in V$ je število $||x|| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.

Norma je torej posplošitev dolžine iz $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^3$.

Trditev 1.6. *Norma ima naslednje lastnosti:*

1. $||x|| \geq 0$ *za vsak* $x \in V$*, pri čemer je* $||x|| = 0$ *natanko takrat, ko je* $x = 0$*,*

2. $||\alpha x|| = |\alpha| \cdot ||x||$ *za vsak* $x \in V$ *in* $\alpha \in \mathbb{F}$*,*

3. trikotniška neenakost*:* $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ *za vse* $x, y \in V$*.*

Dokaz. Prva lastnost sledi direktno iz 4. aksioma za skalarni produkt. Druga lastnost sledi iz enakosti

$$||\alpha x|| = \sqrt{\langle \alpha x, \alpha x\rangle} = \sqrt{\alpha\overline{\alpha}\langle x, x\rangle} = |\alpha| \cdot ||x||.$$

Tretjo neenakost bomo dokazali kasneje. □

Lastnosti 1, 2, 3 iz trditve so aksiomi *normiranega prostora.* Prostor s skalarnim produktom je torej normiran prostor, če definiramo normo s predpisom $||x|| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.

Trditev 1.7. *V prostoru s skalarnim produktom velja:*

1. Pitagorov izrek*: Če je* $\langle x, y\rangle = 0$ *(kasneje bomo videli, da to pomeni, da sta* x *in* y *pravokotna), potem je* $||x + y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2$*.*

2. Paralelogramska enakost*:* $||x - y||^2 + ||x + y||^2 = 2\left(||x||^2 + ||y||^2\right)$ *za vsaka* $x, y \in V$*.*

Dokaz.

1. $||x + y||^2 = \langle x + y, x + y\rangle = \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \overline{\langle x, y\rangle} + \langle y, y\rangle = ||x||^2 + ||y||^2$.

2.

$$\begin{aligned} & ||x - y||^2 + ||x + y||^2 = \langle x - y, x - y\rangle + \langle x + y, x + y\rangle \\ = \; & \langle x, x\rangle - \langle x, y\rangle - \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle + \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle = 2\left(||x||^2 + ||y||^2\right). \end{aligned}$$

□

Da se pokazati, da je paralelogramska enakost karakteristična za skalarni produkt v naslednjem smislu: V normiran prostor lahko definiramo skalarni produkt, tako da bo $||x|| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ za vsak $x \in V$, natanko takrat, ko za normo velja paralelogramska enakost.

Definicija 1.8. Na vektorskem prostoru V s skalarnim produktom definiramo *razdaljo* s predpisom $d(x,y) = ||x-y||$.

Trditev 1.9. *Za razdaljo veljajo naslednje lastnosti:*

1. $d(x,y) \geq 0$ *za vsak* $x \in V$*, pri čemer je* $d(x,y) = 0$ *natanko takrat, ko je* $x = y$*,*
2. $d(x,y) = d(y,x)$ *za vsaka* $x, y \in V$*,*
3. $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ *za vse* $x, y, z \in V$*.*

Dokaz. Prva točka je očitna posledica prve lastnosti norme. Druga in tretja točka pa sledita iz naslednjih računov:

$$d(x,y) = ||x-y|| = \sqrt{\langle x-y, x-y\rangle} = \sqrt{\langle y-x, y-x\rangle} = ||y-x|| = d(y,x),$$

$$d(x,z) = ||x-z|| = ||x-y+y-z|| \leq ||x-y|| + ||y-z|| = d(x,y) + d(y,z),$$

pri čemer smo v zgornji neenakosti upoštevali (sicer še nedokazano) trikotniško neenakost za normo. □

Lastnosti 1, 2, 3 iz zgornje trditve so aksiomi *metričnega prostora.* (V,d) je torej metrični prostor.

Izrek 1.10 (Cauchy, Schwarz, Bunjakowski)**.** *V vektorskem prostoru* V *s skalarnim produktom velja* $|\langle x,y\rangle| \leq ||x|| \cdot ||y||$ *za vse* $x, y \in V$*. Enakost velja natanko takrat, ko sta vektorja* x *in* y *linearno odvisna.*

Dokaz. Za vsaka $x, y \in V$ in vsaka $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ velja

$$0 \leq \langle \alpha x + \beta y, \alpha x + \beta y\rangle = |\alpha|^2 ||x||^2 + \alpha\overline{\beta}\langle x,y\rangle + \beta\overline{\alpha}\overline{\langle x,y\rangle} + |\beta|^2 ||y||^2.$$

V zgornjo neenakost zdaj vstavimo $\alpha = ||y||^2$ in $\beta = -\langle x,y\rangle$. Pri tem se zadnja dva člena pokrajšata in dobimo

$$0 \leq ||x||^2||y||^4 - ||y||^2|\langle x,y\rangle|^2 = ||y||^2\left(||x||^2||y||^2 - |\langle x,y\rangle|^2\right).$$

Če je $||y|| \neq 0$, iz zgornje neenakosti sledi $|\langle x,y\rangle|^2 \leq ||x||^2||y||^2$, kar je bilo treba dokazati. Če je $||y|| = 0$, pa ta neenakost tudi velja, saj je v tem primeru $y = 0$ in sta leva in desna stran obe enaki 0.

Ugotovimo še, kdaj velja enakost. Predpostavimo najprej, da enakost velja. Če je $y = 0$, potem sta x in y očitno linearno odvisna. Če je $y \neq 0$, pa iz zgornjega dokaza sledi, da je $||\alpha x + \beta y|| = 0$, kjer je $\alpha = ||y||^2 \neq 0$ in $\beta = -\langle x,y\rangle$. Torej je $\alpha x + \beta y = 0$ in $\alpha \neq 0$, kar spet pomeni, da sta vektorja x in y linearno odvisna.

Za dokaz obratne smeri predpostavimo, da sta x in y linearno odvisna. Potem je $y = \lambda x$ za nek $\lambda \in \mathbb{F}$ ali $x = \mu y$ za nek $\mu \in \mathbb{F}$. Zaradi simetrije lahko predpostavimo, da velja prvo. Potem pa je

$$|\langle x,y\rangle| = |\langle x, \lambda x\rangle| = |\overline{\lambda}||x||^2| = |\lambda| \cdot ||x||^2 = ||x|| \cdot ||\lambda x|| = ||x|| \cdot ||y||.$$

□

Neenakost Cauchyja, Schwarza in Bunjakowskega bomo na kratko označevali kar s CSB.

Primer 1.11. CSB v prostoru $\mathbb{F}^n$ s standardnim skalarnim produktom se glasi

$$\left|\sum_{j=1}^n x_j\overline{y_j}\right|^2 \leq \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^2\right)\left(\sum_{j=1}^n |y_j|^2\right).$$

To neenakost je dokazal Cauchy. Schwarz in Bunjakowski sta dokazala CSB v prostoru $\mathcal{C}[a,b]$, ki se glasi

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right|^2 \leq \left(\int_a^b f(x)^2 dx\right)\left(\int_a^b g(x)^2 dx\right).$$

Zdaj lahko dokažemo trikotniško neenakost za normo:

Posledica 1.12. *Za normo velja* trikotniška neenakost $||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$ *za vse* $x, y \in V$.

Dokaz. Izračunajmo

$$\begin{aligned} ||x+y||^2 &= \langle x+y, x+y\rangle = ||x||^2 + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + ||y||^2 = ||x||^2 + 2\,\mathrm{Re}\langle x,y\rangle + ||y||^2 \\ &\leq ||x||^2 + 2|\langle x,y\rangle| + ||y||^2 \leq ||x||^2 + 2||x||\cdot||y|| + ||y||^2 = (||x|| + ||y||)^2, \end{aligned}$$

pri čemer smo v prvi neenakosti uporabili, da je realni del vsakega kompleksnega števila manjši ali enak absolutni vrednosti tega kompleksnega števila, v drugi neenakosti pa CSB. Trikotniška neenakost je s tem dokazana. □

Naj bo V evklidski prostor in $x, y \in V$ neničelna vektorja. Potem iz CSB sledi $\frac{|\langle x,y\rangle|}{||x||\cdot||y||} \leq 1$, torej $-1 \leq \frac{\langle x,y\rangle}{||x||\cdot||y||} \leq 1$. Zato obstaja enoličen $\varphi \in [0,\pi]$, da je $\frac{\langle x,y\rangle}{||x||\cdot||y||} = \cos\varphi$. Zato definiramo, da je *kot med vektorjema* x in y enak $\arccos\frac{\langle x,y\rangle}{||x||\cdot||y||}$.

Definicija 1.13. Naj bo V vektorski prostor s skalarnim produktom in $x, y \in V$ poljubna vektorja. Pravimo, da sta x in y *pravokotna (ali ortogonalna)*, kadar je $\langle x,y\rangle = 0$. Oznaka: $x \perp y$.

V primeru evklidskih prostorov se ta definicija ujema z definicijo kota med vektorjema, pri čemer dovolimo, da je kateri od vektorjev enak 0.

Trditev 1.14. *Vektor* $x \in V$ *je ničeln natanko takrat, ko je* $\langle x,y\rangle = 0$ *za vsak* $y \in V$ *(torej natanko takrat, ko je* x *pravokoten na vsak vektor iz* V*).*

Dokaz. Vemo že, da je $\langle 0,y\rangle = 0$ za vsak $y \in V$. Dokazati je torej treba le drugo smer trditve. Če je $\langle x,y\rangle = 0$ za vsak $y \in V$, potem je tudi $\langle x,x\rangle = 0$ in po 4. aksiomu za skalarni produkt sledi, da je $x = 0$. □

Definicija 1.15. Množica $M \subseteq V$ je *ortogonalna*, kadar za vsaka dva različna $x, y \in M$ velja $\langle x,y\rangle = 0$.

Trditev 1.16. *Podmnožica* $M \subseteq V$*, ki ne vsebuje 0 in je ortogonalna, je linearno neodvisna.*

Dokaz. Naj bo $\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_m x_m = 0$ za neke $\alpha_j \in \mathbb{F}$ in $x_j \in M$. To enakost skalarno pomnožimo z x_j, kjer je $j \in \{1,\ldots,m\}$ poljuben. Ker je $\langle x_k, x_j\rangle = 0$ za $k \neq j$, dobimo

$$0 = \langle 0, x_j\rangle = \left\langle \sum_{k=1}^m \alpha_k x_k, x_j \right\rangle = \sum_{k=1}^m \alpha_k \langle x_k, x_j\rangle = \alpha_j ||x_j||^2.$$

Ker je $x_j \neq 0$, sledi $\alpha_j = 0$. Ker je to res za vsak j, sledi, da je M linearno neodvisna množica. □

Posledica 1.17. *V* n*-razsežnem vektorskem prostoru s skalarnim produktom ima ortogonalna podmnožica največ* $n+1$ *elementov.*

Definicija 1.18. Podmnožica $M \subseteq V$ je *ortonormirana*, kadar je ortogonalna in za vsak $x \in M$ velja $||x|| = 1$.

Trditev 1.19. *Če je* M *ortogonalna množica, ki ne vsebuje 0, potem je množica* $\{\frac{x}{||x||}; x \in M\}$ *ortonormirana.*

Dokaz. Za različna elementa $x, y \in M$ je

$$\left\langle \frac{x}{||x||}, \frac{y}{||y||} \right\rangle = \frac{1}{||x|| \cdot ||y||} \langle x, y \rangle = 0,$$

torej je množica $\{\frac{x}{||x||}; x \in M\}$ ortogonalna. Ker pa za vsak x velja

$$\left|\left| \frac{x}{||x||} \right|\right| = \frac{1}{||x||} ||x|| = 1,$$

je ta množica tudi ortonormirana. □

Posledica 1.20. *V n-razsežnem vektorskem prostoru s skalarnim produktom ima ortonormirana podmnožica največ n elementov.*

2 Ortogonalizacija

Pokazali bomo, da v prostoru s skalarnim produktom iz vsake baze $\{x_1, \ldots, x_n\}$ lahko dobimo ortogonalno bazo $\{y_1, \ldots, y_n\}$, tako da velja $\text{Lin}\{x_1, \ldots, x_k\} = \text{Lin}\{y_1, \ldots, y_k\}$ za vse $k = 1, \ldots, n$. To bo koristno v nadaljevanju, saj je mnogo lažje računati z ortogonalno bazo kot z bazo, ki ni ortogonalna. Oglejmo si, kako bazo $\{y_1, \ldots, y_n\}$ dobimo v primeru $n = 2$. Ker je $\text{Lin}(y_1) = \text{Lin}(x_1)$, moramo za y_1 vzeti večkratnik vektorja x_1. Vzamemo lahko kar $y_1 = x_1$. Vektor y_2 mora biti linearna kombinacija x_2 in y_1, a ne sme biti vzporeden y_1, torej ga lahko iščemo v obliki $y_2 = x_2 - \alpha y_1$. Ker je $y_1 \perp y_2$, je

$$0 = \langle y_1, y_2 \rangle = \langle y_1, x_2 - \alpha y_1 \rangle = \langle y_1, x_2 \rangle - \overline{\alpha} ||y_1||^2,$$

in ker $y_1 \neq 0$, sledi $\alpha = \frac{\overline{\langle y_1, x_2 \rangle}}{||y_1||^2}$. Vektor $\frac{\overline{\langle y_1, x_2 \rangle}}{||y_1||^2} y_1 = \frac{\langle x_2, y_1 \rangle}{||y_1||^2} y_1$ se imenuje *pravokotna projekcija vektorja x_2 na y_1*. Kot bomo videli, zgornji razmislek lahko posplošimo na končne baze poljubne moči.

Izrek 2.1 (Gram-Schmidtova ortogonalizacija)**.** *Naj bo V vektorski prostor s skalarnim produktom in $x_1, \ldots, x_m \in V$ linearno neodvisni vektorji. Potem obstajajo linearno neodvisni in paroma pravokotni vektorji $y_1, \ldots, y_m \in V$, da je $\text{Lin}\{x_1, \ldots, x_k\} = \text{Lin}\{y_1, \ldots, y_k\}$ za vsak $k = 1, \ldots, m$.*

Dokaz. Izrek dokažemo z indukcijo na k. Za y_1 lahko očitno izberemo kar x_1.

Denimo, da smo že izbrali linearno neodvisne in paroma pravokotne vektorje $y_1, \ldots, y_k$, da je $\text{Lin}\{x_1, \ldots, x_k\} = \text{Lin}\{y_1, \ldots, y_k\}$. Vektor y_{k+1} iščemo v obliki $y_{k+1} = x_{k+1} - \alpha_1 y_1 - \cdots - \alpha_k y_k$, kjer so $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{F}$. Za vsak $j = 1, \ldots, k$ mora veljati $y_{k+1} \perp y_j$, kar je ekvivalentno $\langle y_{k+1}, y_j \rangle = 0$. Vemo že, da je $\langle y_i, y_j \rangle = 0$, če je $i \neq j$ in $1 \leq i, j \leq k$, zato lahko za vsak $j = 1, \ldots, k$ izračunamo

$$\begin{aligned} \langle y_{k+1}, y_j \rangle &= \langle x_{k+1} - \alpha_1 y_1 - \cdots - \alpha_k y_k, y_j \rangle = \langle x_{k+1}, y_j \rangle - \alpha_1 \langle y_1, y_j \rangle - \cdots - \alpha_k \langle y_k, y_j \rangle \\ &= \langle x_{k+1}, y_j \rangle - \alpha_j ||y_j||^2. \end{aligned}$$

Torej je $\langle y_{k+1}, y_j \rangle = 0$ natanko takrat, ko je $\alpha_j = \frac{\langle x_{k+1}, y_j \rangle}{||y_j||^2}$. Če definiramo $\alpha_j = \frac{\langle x_{k+1}, y_j \rangle}{||y_j||^2}$ za vsak $j = 1, \ldots, k$, bo torej $\{y_1, \ldots, y_{k+1}\}$ ortogonalna množica.

Dokažimo, da za zgoraj definiran y_{k+1} velja $\text{Lin}\{x_1, \ldots, x_{k+1}\} = \text{Lin}\{y_1, \ldots, y_{k+1}\}$. Po indukcijski predpostavki je $\text{Lin}\{x_1, \ldots, x_k\} = \text{Lin}\{y_1, \ldots, y_k\}$, zato zadošča pokazati, da je $x_{k+1} \in \text{Lin}\{y_1, \ldots, y_{k+1}\}$ in $y_{k+1} \in \text{Lin}\{x_1, \ldots, x_{k+1}\}$. Po indukcijski predpostavki za zgoraj definirane $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ obstajajo $\beta_1, \ldots, \beta_k \in \mathbb{F}$, da je $\alpha_1 y_1 + \cdots + \alpha_k y_k = \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_k x_k$. Od tod sledi

$$x_{k+1} = y_{k+1} + \alpha_1 y_1 + \cdots + \alpha_k y_k \in \text{Lin}\{y_1, \ldots, y_{k+1}\}$$

in

$$y_{k+1} = x_{k+1} - \alpha_1 y_1 - \cdots - \alpha_k y_k = x_{k+1} - \beta_1 x_1 - \cdots - \beta_k x_k \in \operatorname{Lin}\{x_1, \ldots, x_{k+1}\}.$$

Dokazati je treba še, da so vektorji $y_1, \ldots, y_{k+1}$ linearno neodvisni. Ker so $x_1, \ldots, x_{k+1}$ linearno neodvisni in je $\operatorname{Lin}\{x_1, \ldots, x_{k+1}\} = \operatorname{Lin}\{y_1, \ldots, y_{k+1}\}$, je

$$k + 1 = \dim \operatorname{Lin}\{x_1, \ldots, x_{k+1}\} = \dim \operatorname{Lin}\{y_1, \ldots, y_{k+1}\},$$

kar že pomeni, da so $y_1, \ldots, y_{k+1}$ linearno neodvisni. $\square$

Posledica 2.2. *Za linearno neodvisne vektorje $x_1, \ldots, x_m \in V$ obstaja ortonormirana množica $\{y_1, \ldots, y_m\} \subseteq V$, da je $\operatorname{Lin}\{x_1, \ldots, x_k\} = \operatorname{Lin}\{y_1, \ldots, y_k\}$ za vsak $k = 1, \ldots, m$.*

Dokaz. Množico $\{y_1, \ldots, y_m\}$ iz prejšnjega izreka normiramo in dobimo ortonormirano množico. Pri tem se linearne ogrinjače ohranjajo. $\square$

Posledica 2.3. *Vsak netrivialen končnorazsežen vektorski prostor s skalarnim produktom ima ortonormirano bazo.*

Dokaz. V prejšnji posledici za $\{x_1, \ldots, x_m\}$ vzamemo bazo prostora V. Množica $\{y_1, \ldots, y_m\}$, ki jo dobimo v prejšnji posledici, je ortonormirana, torej linearno neodvisna, poleg tega pa velja tudi $\operatorname{Lin}\{y_1, \ldots, y_m\} = \operatorname{Lin}\{x_1, \ldots, x_m\}$. Ker je $\{x_1, \ldots, x_m\}$ baza za V, je njena linearna ogrinjača enaka V. Torej je $\operatorname{Lin}\{y_1, \ldots, y_m\} = V$ in je $\{y_1, \ldots, y_m\}$ tudi ogrodje prostora V. $\square$

Primer 2.4. Naj bo $u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $u_3 = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ in $U = \operatorname{Lin}\{u_1, u_2, u_3\} \subseteq \mathbb{R}^4$. Poiščimo ortonormirano bazo prostora U.

Ortonormirano bazo bomo poiskali z Gram-Schmidtovim postopkom, pri čemer bomo vektorje kar sproti normirali.

Ker je $||u_1|| = \sqrt{1+1+1+1} = 2$, vzamemo $y_1 = \frac{u_1}{||u_1||} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

V naslednjem koraku poiščemo linearno kombinacijo u_1 in u_2, ki je pravokotna na y_1. Ker je $||y_1|| = 1$, jo poiščemo po formuli

$$\begin{aligned} z_2 &= u_2 - \frac{\langle u_2, y_1 \rangle}{||y_1||^2} y_1 = u_2 - \langle u_2, y_1 \rangle y_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \right\rangle \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Vidimo, da je vektor z_2 že normiran, saj je $||z_2|| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = 1$. Za drugi vektor ortonormirane baze torej vzamemo kar $y_2 = z_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

Zdaj poiščemo linearno kombinacijo u_1, u_2, u_3, ki je pravokotna na y_1 in y_2. Ker je $||y_1|| = ||y_2|| = 1$, jo poiščemo po formuli

$$\begin{aligned}
z_3 &= u_3 - \frac{\langle u_3, y_1\rangle}{||y_1||^2} y_1 - \frac{\langle u_3, y_2\rangle}{||y_2||^2} y_2 = u_3 - \langle u_3, y_1\rangle y_1 - \langle u_3, y_2\rangle y_2 \\
&= \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \left\langle \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \right\rangle \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} - \left\langle \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \right\rangle \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - 4 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{7}{2} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Norma vektorja z_3 je enaka $||z_3|| = \sqrt{\frac{49}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{49}{4}} = 5$. Za zadnji vektor ortonormirane baze tako vzamemo $y_3 = \frac{z_3}{||z_3||} = \frac{z_3}{5} = \begin{bmatrix} \frac{7}{10} \\ \frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} \\ -\frac{7}{10} \end{bmatrix}$.

Za prostor U smo torej dobili ortonormirano bazo

$$\{y_1, y_2, y_3\} = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{7}{10} \\ \frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} \\ -\frac{7}{10} \end{bmatrix} \right\}.$$

Posledica 2.5. *Vsako ortonormirano podmnožico končnorazsežnega vektorskega prostora s skalarnim produktom lahko dopolnimo do ortonormirane baze.*

Dokaz. Naj bo $\{x_1, \ldots, x_k\}$ ortonormirana množica v prostoru V. Potem je ta množica linearno neodvisna in jo lahko dopolnimo do baze $\{x_1, \ldots, x_m\}$ prostora V. Na tej bazi izvedemo Gram-Schmidtov postopek in normiranje. Dobimo ortonormirano bazo $\{y_1, \ldots, y_m\}$ prostora V. Ker so vektorji $x_1, \ldots, x_k$ že normirani in paroma pravokotni, se pri Gram-Schmidtovem postopku ne spremenijo. Torej je $y_j = x_j$ za $j = 1, \ldots, k$. □

Primer 2.6. Ortonormirano množico $\{y_1, y_2, y_3\}$, ki smo jo dobili v prejšnjem primeru, dopolnimo do ortonormirane baze prostora $\mathbb{R}^4$.

Množico $\{y_1, y_2, y_3\}$ najprej dopolnimo do neke baze prostora $\mathbb{R}^4$. Izberimo si na primer bazo $\{y_1, y_2, y_3, e_1\}$. Zdaj izvedemo Gram-Schmidtov postopek. Ker je $\{y_1, y_2, y_3\}$ ortonormirana množica, se pri Gram-Schmidtovem postopku ne premeni. Gram-Schmidtov postopek je torej treba izvesti le na vektorju e_1. Najprej izračunamo vektor, ki je pravokoten na y_1, y_2, y_3. Ker so y_1, y_2, y_3 paroma pravokotni in normirani, ta vektor izračunamo po formuli

$$\begin{aligned}
z_4 &= e_1 - \langle e_1, y_1\rangle y_1 - \langle e_1, y_2\rangle y_2 - \langle e_1, y_3\rangle y_3 \\
&= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} - \frac{7}{10} \begin{bmatrix} \frac{7}{10} \\ \frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} \\ -\frac{7}{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{100} \\ -\frac{7}{100} \\ -\frac{7}{100} \\ -\frac{1}{100} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Norma vektorja z_4 je enaka $||z_4|| = \frac{1}{100}\sqrt{1 + 49 + 49 + 1} = \frac{1}{10}$. Vektor, s katerim moramo dopolniti množico $\{y_1, y_2, y_3\}$, da dobimo ortonormirano bazo prostora $\mathbb{R}^4$, je torej

$$y_4 = \frac{z_4}{||z_4||} = 10z_4 = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} \\ -\frac{7}{10} \\ -\frac{7}{10} \\ -\frac{1}{10} \end{bmatrix}.$$

Naslednja lema nam bo povedala, zakaj je ortonormirana baza koristna: če želimo poljuben vektor razviti po ortonormirani bazi, za koeficiente ni treba rešiti sistema enačb, ampak jih lahko preprosto izračunamo.

Lema 2.7. *Naj bo $\{v_1, \ldots, v_n\}$ ortonormirana baza prostora V in $x, y \in V$ poljubna vektorja. Potem velja:*

1. $x = \sum_{j=1}^{n} \langle x, v_j \rangle v_j$,
2. $\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^{n} \langle x, v_j \rangle \overline{\langle y, v_j \rangle}$.

Dokaz.

1. Ker je $\{v_1, \ldots, v_n\}$ baza prostora V, obstajajo $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{F}$, da je $x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j$. To enačbo zdaj skalarno pomnožimo z v_i, kjer je $i \in \{1, \ldots, n\}$ poljuben, in upoštevajmo, da so vektorji $v_1, \ldots, v_n$ normirani in paroma pravokotni. Dobimo

$$\langle x, v_i \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j, v_i \right\rangle = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \langle v_j, v_i \rangle = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \delta_{ji} = \alpha_i,$$

kar je bilo treba dokazati.

2. Po prvi točki vemo, da je $x = \sum_{j=1}^{n} \langle x, v_j \rangle v_j$ in $y = \sum_{i=1}^{n} \langle y, v_i \rangle v_i$. Zato je

$$\langle x, y \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^{n} \langle x, v_j \rangle v_j, \sum_{i=1}^{n} \langle y, v_i \rangle v_i \right\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} \langle x, v_j \rangle \overline{\langle y, v_i \rangle} \langle v_j, v_i \rangle = \sum_{j=1}^{n} \langle x, v_j \rangle \overline{\langle y, v_j \rangle}.$$

□

Definicija 2.8. Vektorski prostor V_1 nad $\mathbb{F}$ s skalarnim produktom $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ je *izomorfen* vektorskemu prostoru V_2 nad $\mathbb{F}$ s skalarnim produktom $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$, kadar obstaja tak izomorfizem vektorskih prostorov $F \colon V_1 \to V_2$, da velja $\langle F(x), F(y) \rangle_2 = \langle x, y \rangle_1$ za vsaka $x, y \in V_1$.

Poleg tega, da je F izomorfizem vektorskih prostorov, mora torej tudi "ohranjati" skalarni produkt.

Izrek 2.9. *Vsak n-razsežen vektorski prostor V nad $\mathbb{F}$ s skalarnim produktom je izomorfen prostoru $\mathbb{F}^n$ s standardnim skalarnim produktom.*

Dokaz. V prostoru V izberimo ortonormirano bazo $\{v_1, \ldots, v_n\}$. Ker je to baza, že vemo, da je preslikava $F \colon V \to \mathbb{F}^n$, definirana s predpisom $F\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j\right) = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$, (dobro definiran) izomorfizem vektorskih prostorov. Dokazati je treba le še, da ohranja skalarni produkt. To nam pove naslednji račun, kjer bomo upoštevali definicijo standardnega skalarnega produkta in prejšnjo lemo. Za vsak $x, y \in V$ namreč izračunamo

$$\begin{aligned} \langle F(x), F(y) \rangle &= \left\langle F\left(\sum_{j=1}^{n} \langle x, v_j \rangle v_j\right), F\left(\sum_{j=1}^{n} \langle y, v_j \rangle v_j\right) \right\rangle = \left\langle \begin{bmatrix} \langle x, v_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle x, v_n \rangle \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \langle y, v_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle y, v_n \rangle \end{bmatrix} \right\rangle \\ &= \sum_{j=1}^{n} \langle x, v_j \rangle \overline{\langle y, v_j \rangle} = \langle x, y \rangle. \end{aligned}$$

□

Izomorfnost vektorskih prostorov s skalarnim produktom je očitno ekvivalenčna relacija, zato velja:

Posledica 2.10. *Vektorska prostora V_1 in V_2 nad istim obsegom $\mathbb{F}$ s skalarnima produktoma $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ in $\langle\cdot,\cdot\rangle_2$ sta izomorfna (kot vektorska prostora s skalarnima produktoma) natanko takrat, ko je* $\dim V_1 = \dim V_2$.

Definicija 2.11. Naj bo V vektorski prostor s skalarnim produktom.

1. Podmnožici $M, N \subseteq V$ sta *pravokotni*, kadar je $\langle x, y\rangle = 0$ za vsak $x \in M$ in vsak $y \in N$. Oznaka $M \perp N$.

2. Naj bo $V = V_1 + \cdots + V_k$, kjer so $V_1, \ldots, V_k$ podprostori prostora V. Vsota $V = V_1 + \cdots + V_k$ je *pravokotna*, kadar je $V_i \perp V_j$ za vsaka $i \neq j$.

Trditev 2.12. *Pravokotna vsota je direktna.*

Dokaz. Dokazati je treba, da se vsak vektor $x \in V$ na enoličen način da zapisati v obliki $x = x_1 + \cdots + x_k$, kjer je $x_j \in V_j$ za vsak $j = 1, \ldots, k$. Da tak zapis obstaja, sledi iz dejstva, da je V vsota podprostorov $V_1, \ldots, V_k$, torej je treba dokazati le enoličnost. Naj bo še $x = y_1 + \cdots + y_k$. Potem je $(x_1 - y_1) + \cdots + (x_k - y_k) = 0$, kjer je $x_j - y_j \in V_j$ za vsak $j = 1, \ldots, k$. To enakost skalarno pomnožimo z $x_j - y_j$, kjer je j poljuben, in upoštevamo, da je $V_i \perp V_j$ in posledično $x_i - y_i \perp x_j - y_j$, če je $i \neq j$. Dobimo

$$0 = \langle 0, x_j - y_j\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i), x_j - y_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n}\langle x_i - y_i, x_j - y_j\rangle = ||x_j - y_j||^2.$$

Torej je $x_j - y_j = 0$ za vsak $j = 1, \ldots, k$, kar je bilo treba dokazati. $\square$

Zaradi zgornje trditve pravokotno vsoto pogosto označimo kar z $V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$. Pri tem je treba paziti, ali ta oznaka pomeni pravokotno vsoto ali le direktno vsoto, ki ni pravokotna. To mora biti razvidno iz konteksta.

Definicija 2.13. Naj bo $M \subseteq V$ poljubna podmnožica prostora V s skalarnim produktom. Množica

$$M^{\perp} = \{x \in V; \langle x, y\rangle = 0 \,\text{za}\,\text{vsak}\, y \in M\}$$

se imenuje *pravokotni (oz. ortogonalni) komplement* množice M. Če je $x \in V$, namesto $\{x\}^{\perp}$ pišemo kar $x^{\perp}$. Prav tako namesto $(M^{\perp})^{\perp}$ pišemo kar $M^{\perp\perp}$.

Lema 2.14. *Naj bo V vektorski prostor s skalarnim produktom. Potem velja:*

1. $0^{\perp} = V$

2. $V^{\perp} = \{0\}$

3. *Če je $M \subseteq N \subseteq V$, je $N^{\perp} \subseteq M^{\perp}$.*

Dokaz. Prva točka je očitna. Druga točka pravi, da je edini vektor, ki je pravokoten na vse vektorje, ničelni vektor, kar tudi že vemo. Dokažimo torej tretjo točko. Naj bo $x \in N^{\perp}$. Potem je $\langle x, y\rangle = 0$ za vsak $y \in N$, in ker je $M \subseteq N$, v je posebnem to res za vsak $y \in M$. Torej je $x \in M^{\perp}$. $\square$

Trditev 2.15. *$M^{\perp}$ je vedno vektorski podprostor prostora V.*

Dokaz. Naj bosta $x, y \in M^{\perp}$ in $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$. Po definiciji ortogonalnega komplementa je $\langle x, z\rangle = \langle y, z\rangle = 0$ za vsak $z \in M$. Potem pa za vsak $z \in M$ velja tudi $\langle \alpha x + \beta y, z\rangle = \alpha\langle x, z\rangle + \beta\langle y, z\rangle = 0$, torej je $\alpha x + \beta y \in M^{\perp}$. $M^{\perp}$ je torej vektorski podprostor. $\square$

Trditev 2.16. *Naj bo* $\{v_1, \ldots, v_n\}$ *ortonormirana baza prostora* V *in* $1 \leq m < n$. *Za podprostora* $V_1 = \operatorname{Lin}\{v_1, \ldots, v_m\}$ *in* $V_2 = \operatorname{Lin}\{v_{m+1}, \ldots, v_n\}$ *potem velja* $V = V_1 \oplus V_2$ *(pravokotna vsota) ter* $V_1^\perp = V_2$ *in* $V_2^\perp = V_1$.

Dokaz. Očitno je $V = V_1 + V_2$. Dokažimo najprej, da je ta vsota pravokotna. Naj bosta $x \in V_1$ in $y \in V_2$ poljubna. Potem je $x = \sum_{i=1}^m \alpha_i v_i$ in $y = \sum_{j=m+1}^n \beta_j v_j$ za neke α_i in β_j. Ker je $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ za vse $i \leq m$ in $j \geq m+1$, sledi

$$\langle x, y \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^m \alpha_i v_i, \sum_{j=m+1}^n \beta_j v_j \right\rangle = \sum_{i=1}^m \sum_{m+1}^n \alpha_i \overline{\beta_j} \langle v_i, v_j \rangle = 0,$$

torej je $x \perp y$. Ker sta bila $x \in V_1$ in $y \in V_2$ poljubna, sledi $V_1 \perp V_2$. Vsota $V = V_1 + V_2$ je torej pravokotna.

Zgoraj smo dokazali, da je $V_1 \perp V_2$, kar pomeni, da je $V_1 \subseteq V_2^\perp$ in $V_2 \subseteq V_1^\perp$. Dokazati moramo še obratni vsebovanosti. Zaradi simetrije zadošča dokazati, da je $V_1^\perp \subseteq V_2$. Naj bo $z \in V_1^\perp$. Ker je $\{v_1, \ldots, v_n\}$ ortonormirana baza, je $z = \sum_{j=1}^n \langle z, v_j \rangle v_j$. Ker je $z \in V_1^\perp$, v posebnem primeru velja $\langle z, v_j \rangle = 0$ za vsak $j = 1, \ldots, m$. To pomeni, da je $z = \sum_{j=m+1}^n \langle z, v_j \rangle v_j \in \operatorname{Lin}\{v_{m+1}, \ldots, v_n\} = V_2$. Trditev je s tem dokazana. □

Posledica 2.17. *Naj bo* W *vektorski podprostor končnorazsežnega vektorskega prostora* V *s skalarnim produktom. Potem je* $V = W \oplus W^\perp$ *in* $W^{\perp\perp} = W$.

Dokaz. Če je $W = \{0\}$ ali $W = V$, je posledica očitna. Sicer si izberimo ortonormirano bazo $\{v_1, \ldots, v_m\}$ za W in jo dopolnimo do ortonormirane baze $\{v_1, \ldots, v_n\}$ prostora V. Po prejšnji trditvi potem velja $W^\perp = \operatorname{Lin}\{v_{m+1}, \ldots, v_n\}$, $V = W \oplus W^\perp$ in $W^{\perp\perp} = W$. □

Posledica 2.18. $\dim W + \dim W^\perp = \dim V$.

Definicija 2.19. Naj bo W vektorski podprostor končnorazsežnega vektorskega prostora V s skalarnim produktom in $x \in V$ poljuben. Potem vemo, da x lahko na enoličen način zapišemo v obliki $x = x_1 + x_2$, kjer je $x_1 \in W$ in $x_2 \in W^\perp$. Vektor x_1 imenujemo *pravokotna projekcija* vektorja x na podprostor W.

Če je $\{v_1, \ldots, v_n\}$ ortonormirana baza prostora V, pri čemer je $\operatorname{Lin}\{v_1, \ldots, v_m\} = W$, potem pravokotno projekcijo vsakega vektorja na podprostor W lahko enostavno izračunamo. Iz dokaza zadnje trditve namreč sledi, da je ta pravokotna projekcija enaka $\sum_{j=1}^m \langle x, v_j \rangle v_j$. Za preslikavo $P \colon V \to V$, definirano s predpisom $P(x) = \sum_{j=1}^m \langle x, v_j \rangle v_j$, torej velja $\ker P = W^\perp$, $\operatorname{im} P = W$ in $P|_W = \mathrm{id}_W$. To pomeni, da je P projektor na podprostor W vzdolž podprostora $W^\perp$. Pravimo mu *pravokotni projektor na podprostor* W.