POSPLOŠENI INTEGRAL

<u>Definicija</u> (a) Naj bo $f:(a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ funkcija, ki je integrabilna na intervalu $[t,b]$ za vsak $t\in(a,b)$. Potem je <u>posplošeni integral funkcije f na intervalu $(a,b]$</u>

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{t\downarrow a}\int_t^b f(x)\,dx,$$

če ta limita obstaja. (končna limita!)
Če ta limita obstaja, rečemo, da je f <u>posplošeno integrabilna</u> na $[a,b]$ in da je $\int_a^b f(x)\,dx$ <u>konvergenten</u>. Sicer pravimo, da je $\int_a^b f(x)\,dx$ <u>divergenten</u>.

(b) Podobno za $[a,b)$.

<u>Opomba</u> 1) Posplošeni integral se imenuje tudi izlimitirani ali nepravi integral.

2) Če je f integrabilna na $[a,b]$, je tudi posplošeno integrabilna na $[a,b]$, ker je integral kot funkcija zg. meje zvezen.

3) Smiselno se računa posplošeni integral v primeru zveznih funkcij na $(a,b]$, ki so v okolici a neomejene.

<u>Primer</u>. 1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$, $p\in\mathbb{R}$.

ni Riemannovo integrabilna!

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{t\downarrow 0}\int_t^1 \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{t\downarrow 0}\left.\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right|_t^1 = \lim_{t\downarrow 0}\left(\frac{1}{1-p}-\frac{t^{-p+1}}{-p+1}\right) =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{1-p} & ; p<1 \\ \nexists & ; p\geq 1 \end{cases}.$$

2) $$\int_0^1 \ln x\,dx = \lim_{t\downarrow 0}\left(x\ln x\Big|_t^1 - \int_t^1 dx\right) = \underline{\underline{1}}$$

$u=\ln x \quad dv = dx$

$du=\frac{1}{x}dx \quad v=x$

Izrek. Naj bo $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ taka funkcija, ki je integrabilna na intervalu $[a,t]$ za vsak $t \in [a,b)$. Če posplošeni integral $\int_a^b |f(x)|dx$ obstaja, potem obstaja tudi $\int_a^b f(x)dx$.

Opomba. Če je f absolutno integrabilna, je f integrabilna. (Spomnimo se na številske vrste).

Dokaz. $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ in $G(x) = \int_a^x |f(t)|dt$.

Po predpostavki sta F in G zvezni na $[a,b)$ in obstaja $\lim_{x \nearrow b} G(x)$. Po Cauchyjevem pogoju za obstoj limite: za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$, da za $x_1, x_2 \in (b-\delta, b)$ velja: $|G(x_1) - G(x_2)| < \varepsilon$.

Ker je $|F(x_1) - F(x_2)| = \left|\int_{x_1}^{x_2} f(t)dt\right| \leq \left|\int_{x_1}^{x_2} |f(t)|dt\right| = |G(x_2) - G(x_1)|$

lahko izpeljemo, da tudi F izpolnjuje Cauchyjev pogoj pri b, zato $\lim_{x \nearrow b} F(x)$ obstaja. $\blacksquare$

Izrek. Naj bo f integrabilna na $[a,b]$.

(a) Če je $s < 1$, potem $\int_a^b \frac{f(x)}{(x-a)^s}dx$ konvergira.

(b) Če je $s \geq 1$ in za nek $m > 0$ velja bodisi $f(x) \geq m$ za vse $x \in [a,b]$ ali $f(x) \leq -m$ za vse $x \in [a,b]$, potem $\int_a^b \frac{f(x)}{(x-a)^s}dx$ divergira.

Opomba. Če je $\lim_{x \searrow a} f(x) > 0$, potem je pogoj b) izpolnjen.

Dokaz. a) Dovolj je dokazati, da $\int_a^b \left|\frac{f(x)}{(x-a)^s}\right|dx$ obstaja.

Ker je $\int_t^b \left|\frac{f(x)}{(x-a)^s}\right|dx \leq \int_t^b \frac{M}{(x-a)^s}dx \xrightarrow[t \searrow a]{} \int_a^b \frac{M}{(x-a)^s}dx$ obstaja, če $s<1$.

Zato obstaja tudi limita manjše naraščajoče funkcije. DZ

(b) Če je $f(x) \geq m > 0$ blizu a:

$$\int_t^{a+\delta} \frac{f(x)}{(x-a)^s} dx \geq m \int_t^{a+\delta} \frac{dx}{(x-a)^s} \xrightarrow[t \downarrow a]{s \geq 1} \infty \quad . \blacksquare$$

Primer. $\int_0^1 \frac{e^x}{x} dx$ ne obstaja

Cauchyjeva glavna vrednost v c: $\lim\limits_{\delta \downarrow 0} \left(\int_a^{c-\delta} f(x)dx + \int_{c+\delta}^b f(x)dx \right)$.

$$\shortparallel$$

$$v.p. \int_a^b f(x)dx$$

Primer. 1) $v.p \int_{-1}^{1} \frac{dx}{x} = 0$

(čeprav pospl. integrala $\int_{-1}^{0} \frac{dx}{x}$ in $\int_0^1 \frac{dx}{x}$ ne obstajata).

$v.p. \int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2}$ ne obstaja.

Definicija. Naj bo $f: [a,c) \cup (c,b] \to \mathbb{R}$ integr. na $[a,s]$ za $\forall s \in (a,c)$ in integr. na $[t,b] \to$

POSPLOŠENI INTEGRAL NA NEOMEJENEM INTERVALU

Definicija (a) Naj bo $f: [a,\infty) \to \mathbb{R}$ (pospl.) integrabilna na $[a,s]$ za vsak $s > a$. Potem je posplošeni integral funkcije f na $[a,\infty)$

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{s \to \infty} \int_a^s f(x)dx,$$

če ta limita obstaja. Če limita obstaja, je pospl. int. konv., sicer div.

na $[t,b]$ za vsak $t < b$.

(b) Naj bo $f: (-\infty, b] \to \mathbb{R}$ integrabilna

Potem je pospl. integral funkcije f na $(-\infty, b)$

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{t \to -\infty} \int_t^b f(x)dx,$$

če ta limita obstaja.

Če lim. obstaja, je integ. konv., sicer div.

(c) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je pospl. integr. na $\mathbb{R}$, če sta za nek a zožitvi $f|_{[a,\infty)}$ in $f|_{(-\infty,a]}$ pospl. integr.

Definicija. Naj bo $f: [a,c) \cup (c,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ funkcija.
Če je f pospl. integrabilna na $[a,c]$ in $[c,b]$, potem pravimo, da je f posspl. integrabilna na $[a,b]$.
V tem primeru velja:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{s \uparrow c} \int_a^s f(x)dx + \lim_{t \downarrow c} \int_t^b f(x)dx$$

Opomba 1) Če je f posspl. integrabilna na $[a,b]$, potem obstaja tudi glavna vrednost, obratno pa ni nujno res.

2) Podobno definiramo posplošeno integrabilnost v primeru končno mnogo izjemnih točk.

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}dx = \lim_{a \to \infty} \int_1^a \frac{1}{x}dx = \lim_{a\to\infty} \ln x \Big|_1^a =$$

$$= \lim_{a\to\infty} (\ln a - \ln 1) = \infty$$

Primer. 1) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{a\to\infty}\int_1^a \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{a\to\infty} \frac{x^{-p+1}}{-p+1}\Big|_1^a =$

$$= \lim_{a\to\infty}\left(\frac{a^{-p+1}}{-p+1} - \frac{1}{-p+1}\right) = \begin{cases} \frac{1}{p-1}, & p>1 \\ \text{ne obstaja}, & \text{sicer} \end{cases}$$

Izrek. Naj bo $a\in\mathbb{R}$ in f integrabilna na vsakem intervalu $[a,b]$, $b>a$. Tedaj $\int_a^\infty f(x)\,dx$ obstaja $\iff$

$$\forall \varepsilon>0\ \exists B\in\mathbb{R}:\ \left|\int_b^{b'} f(x)\,dx\right| < \varepsilon \text{ za } \forall b,b'>B.$$

Dokaz. Def. $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$.

$\int_a^\infty f(x)\,dx$ obstaja $\iff \lim_{x\to\infty} F(x)$ obstaja $\iff$

$\iff F$ v ∞ izpolnjuje C. pogoj:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists B\in\mathbb{R}:\ \underbrace{|F(b)-F(b')|}_{=\left|\int_b^{b'} f(t)\,dt\right|}<\varepsilon \text{ za } \forall b,b'>B.$$

$\blacksquare$

Izrek. Naj bo $f:[a,\infty)\to\mathbb{R}$ integrabilna na $[a,b]$ za vsak $b>a$. Če $\int_a^\infty |f(x)|\,dx$ konvergira, potem tudi $\int_a^\infty f(x)\,dx$ konvergira. (Če je f abs. integrabilna na $[a,\infty)$, je f integrabilna na $[a,\infty)$).
popr.

Primer. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ obstaja.

Od prej vemo $\displaystyle\left|\int_b^{b'}\frac{\sin x}{x}\,dx\right| < \frac{2}{b} \xrightarrow[b\to\infty]{} 0$, torej po izreku konvergira.

$\displaystyle\left|\int_a^b \frac{\sin x}{x}\,dx\right| \le \frac{2}{a}\quad \forall a>0$

$\displaystyle\int_1^\infty \frac{|\sin x|}{x}\,dx$ divergira

$$\int_{2\pi}^{2\pi m}\frac{|\sin x|}{x}\,dx = \sum_{k=1}^{m-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{|\sin x|}{x}\,dx \ge \sum_{k=1}^{m-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{|\sin x|}{(k+1)\pi}\,dx = \sum_{k=1}^{m-1}\frac{2}{(k+1)\pi} \xrightarrow[m\to\infty]{}\infty$$

$\displaystyle\int_0^\pi \sin x\,dx = -\cos x\Big|_0^\pi = 1+1=2$

Izr. Naj bo $g: [a,\infty) \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija, $a>0$.

(1) Če je g omejena na $[a,\infty)$ in $p>1$, potem je $\int_a^\infty \frac{g(x)}{x^p}\,dx$ konv.

(2) Če $\exists m>0$, da $g(x) \geq m$ za $\forall x$ ali $g(x) \leq -m$ za $\forall x$ in $p \leq 1$, potem je $\int_a^\infty \frac{g(x)}{x^p}\,dx$ divergenten.

Dokaz. uvedemo $x=\frac{1}{t}$

$$\int_a^M \frac{g(x)}{x^p}\,dx = -\int_{\frac{1}{a}}^{\frac{1}{M}} \frac{g(\frac{1}{t})}{t^{-p+2}}\,dt = \int_{\frac{1}{M}}^{\frac{1}{a}} \frac{g(\frac{1}{t})}{t^{-p+2}}\,dt$$

: ko $M \to \infty$, $\frac{1}{M} \to 0$

$x=\frac{1}{t}$

$dx = -\frac{1}{t^2}dt$

po izreku: če g omejena in $p>1$, velja $-p+2<-1+2=1$, obstaja.

če gom. stran od 0 in $p \leq 1$, je $g(\frac{1}{t})$ om. stran od 0 in $-p+2 \geq 1$, zato divergira. ☒

Primer. ⋀⋀⋀ .. integrabilna, čeprav $\lim_{x\to\infty} f(x)$ ne obstaja.

Primer. Eulerjeva funkcija Γ:

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}\,dx, \quad s\in(0,\infty). \qquad \Gamma(n+1)=n\Gamma(n)=n!$$

- integrand je zvezen na $[0,\infty)$ za $s \geq 1$.
- $s<1$ pri 0 ni definiran; pišemo

$$\Gamma(s) = \int_0^1 x^{s-1}e^{-x}\,dx + \int_1^\infty x^{s-1}e^{-x}\,dx$$

integral $\frac{e^{-x}}{x^{1-s}}$ na $[0,1]$ obstaja $\iff 1-s<1$ tj. $s>0$.

- $\int_1^\infty x^{s-1}e^{-x}\,dx = \int_1^\infty \frac{x^{s+1}e^{-x}}{x^2}\,dx$

$g(x) = x^{s+1}e^{-x} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$ je zvezna in omejena, $p=2$, zato integral obstaja.

$$\int_0^A x^s e^{-x}\,dx = -x^s e^{-x}\Big|_0^A + s\int_0^A x^{s-1}e^{-x}\,dx$$

$$u = x^s \qquad dv = e^{-x}\,dx$$

$$du = s x^{s-1}\,dx \qquad v = -e^{-x}$$

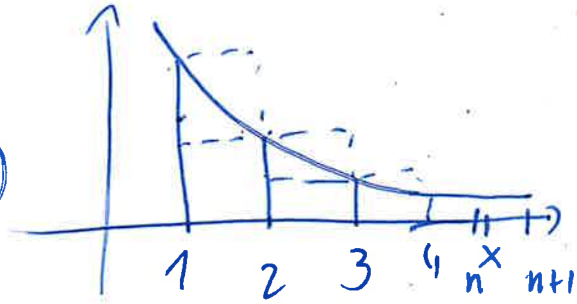
V limiti, $A \to \infty$, dobimo:

$$\Gamma(s+1) = s\,\Gamma(s), \quad s > 0.$$

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}\,dx = \lim_{A\to\infty}\int_0^A e^{-x}\,dx = \lim_{A\to\infty} -(e^{-A} - e^0) = 1$$

$$\Gamma(n+1) = n!$$

Izrek (integralski kriterij za konvergenco vrst).
Naj bo $f:[1,\infty) \to \mathbb{R}$ monotono padajoča in nenegativna.
Potem $\int_1^\infty f(x)\,dx$ konvergira $\iff \sum_{k=1}^\infty f(k)$ konvergira.



Dokaz. Za $n \le x < n+1$ velja:

$$f(2)+f(3)+\dots+f(n+1) \le \int_1^x f(t)\,dt \le f(1)+f(2)+\dots+f(n)$$

tj. $\quad s_{n+1} - f(1) \le \int_1^x f(t)\,dt \le s_n$.

Sledi: $\{s_n\}$ je omejena $\iff \int_1^x f(t)\,dt$ je omejena funkcija

$\Updownarrow$ ← ker $\{s_n\}$ narašča. $\qquad \Updownarrow$ ker je $\int_1^x f(t)\,dt$ narašča.

$\{s_n\}$ konverg. $\qquad \int_1^\infty f(t)\,dt$ konvergira

Primer. $\int_1^\infty \frac{dx}{x^p}$ konvergira $\iff p > 1$ sledi: $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^p}$ konverg $\iff p > 1$.