6 Dobra osnovanost in indukcija

Naloga 6.1. Seštevanje na $\mathbb{N}$ rekurzivno definiramo kot

$$\begin{aligned} n + 0 &:= n, \\ n + m^+ &:= (n+m)^+. \end{aligned}$$

Dokažite naslednje trditve za vse $a, b, c \in \mathbb{N}$ (pri tem $1 := 0^+$).

(a) $a + 1 = a^+$

(b) $1 + a = a^+$

(c) $(a + b) + c = a + (b + c)$

(d) $a + b = b + a$

Naloga 6.2. Končne nize elementov iz množice S označimo z $a_0 a_1 \ldots a_{n-1}$, kjer je $n \in \mathbb{N}$ in $a_i \in S$ za $i \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$. ***Dolžina*** ℓ končnega niza je število elementov v nizu, tj. $\ell(a_0 a_1 \ldots a_{n-1}) = n$. Prazen niz označimo z ε in velja $\ell(\varepsilon) = 0$.

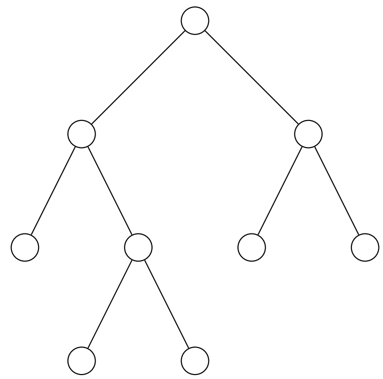
Stik ali ***spoj*** dveh končnih nizov dobimo tako, da za prvi niz pripnemo drugega. Stikanje označimo z @. Če sta torej $a_0 a_1 \ldots a_{n-1}$ in $b_0 b_1 \ldots b_{m-1}$ končna niza elementov iz množice S, potem je njun stik

$$(a_0 a_1 \ldots a_{n-1}) \mathbin{@} (b_0 b_1 \ldots b_{m-1}) = a_0 a_1 \ldots a_{n-1} b_0 b_1 \ldots b_{m-1}.$$

(a) Zgornje definicije niso povsem natančne, saj so podane s tropičji. Podajte induktivno definicijo končnih nizov ter rekurzivni definiciji stika in dolžine.

(b) Z indukcijo dokažite, da je dolžina staknjenega niza enaka vsoti dolžin ustreznih podnizov, tj. če sta a in b končna niza, velja:

$$\ell(a \mathbin{@} b) = \ell(a) + \ell(b).$$



Slika 1: Primer dvojiškega drevesa

Naloga 6.3. Spomnite se definicije dvojiških dreves s predavanj. Slika 1 podaja primer dvojiškega drevesa.

Globina drevesa je dolžina najdaljše poti od korena do (poljubnega) lista. Drevo na sliki ima globino 3 (obstajata dve različni poti, ki realizirata to globino). Globina praznega drevesa je 0. ***Obrnjeno drevo*** dobimo iz dvojiškega drevesa, če vsakemu vozlišču zamenjamo levega in desnega otroka.

(a) Narišite obrnjeno drevo drevesa na sliki.

(b) Zapišite globino drevesa in obračanje drevesa kot rekurzivni funkciji na dvojiških drevesih.

(c) Z indukcijo dokažite, da ima dvojiško drevo z n vozlišči globino vsaj $\lfloor \log_2(n) \rfloor$.

(d) Z indukcijo dokažite, da je globina obrnjenega drevesa enaka globini prvotnega drevesa.

Naloga 6.4. Za naslednje stroge linearne ureditve ugotovite, ali so dobro urejene.

(a) $(\mathbb{Q}, <)$ množica racionalnih števil z običajno urejenostjo $<$.

(b) Podmnožica $\{2^{-n} \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$ z običajno urejenostjo $<$ na realnih številih.

(c) Podmnožica $\{0\} \cup \{2^{-n} \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$ z običajno urejenostjo $<$ na realnih številih.

(d) Podmnožica $\{0\} \cup \{2^{-n} \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$ z običajno urejenostjo $>$ na realnih številih.

Naloga 6.5. Definirajmo množico $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \wedge \sin(\pi/x) = 0\}$.

(a) Ali je S z običajno relacijo $<$ na realnih številih dobro urejena?

(b) Ali je S z običajno relacijo $>$ na realnih številih dobro urejena?

Naloga 6.6. Množico $\mathbb{N}$ opremimo z relacijo stroge deljivosti (a strogo deli b, kadar a deli b in $a \neq b$). Ali dobimo dobro osnovano relacijo? Ali dobimo dobro ureditev?

Naloga 6.7. Konstruirajte dobro urejenost na množici racionalnih števil.

Naloga 6.8. Za podmnožico $S \subseteq \mathbb{N}$ rečemo, da je

- *dolnja*, kadar velja $\forall a \in S. \forall n \in \mathbb{N}. n \leq a \Rightarrow n \in S$, oz.
- *gornja*, kadar velja $\forall a \in S. \forall n \in \mathbb{N}. a \leq n \Rightarrow n \in S$.

(a) Ali je množica vseh dolnjih podmnožic $\mathbb{N}$, urejena s strogo vsebovanostjo $\subset$, dobra ureditev?

(b) Ali je množica vseh gornjih podmnožic $\mathbb{N}$, urejena s strogo vsebovanostjo $\subset$, dobra ureditev?