Analiza 1

Integral

(1) Izračunaj naslednje integrale:

(a) $\displaystyle\int (1 - \tfrac{1}{x^2})\sqrt{x\sqrt{x}}\, dx$,

(b) $\displaystyle\int \frac{x^2}{1+x^2}\, dx$,

(c) $\displaystyle\int 2^x 3^{x-2}\, dx$.

Rešitev:

(a) $\displaystyle\int (1 - \tfrac{1}{x^2})\sqrt{x\sqrt{x}}\, dx = \int (x^{\frac{3}{4}} - x^{-\frac{5}{4}})\, dx = \underline{\underline{\tfrac{4}{7}x^{\frac{7}{4}} + 4x^{-\frac{1}{4}} + C}}.$

(b) $\displaystyle\int \frac{x^2}{1+x^2}\, dx = \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)\, dx = \underline{\underline{x - \operatorname{arc\,tg} x + C}}.$

(c) $\displaystyle\int 2^x 3^{x-2}\, dx = \tfrac{1}{9}\int 6^x\, dx = \underline{\underline{\frac{1}{9\ln 6}6^x + C}}.$

$\square$

(2) Izračunaj naslednje integrale z uvedbo nove spremenljivke:

(a) $\displaystyle\int \frac{x}{1+x^4}\, dx$,

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{9+4x^2}\, dx$,

(c) $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x-1)^{100}}\, dx$,

(d) $\displaystyle\int \frac{e^x - 1}{e^x + 1}\, dx$.

Rešitev:

(a) $\displaystyle\int \frac{x}{1+x^4}\, dx$:

Vzemimo novo spremenljivko $t = x^2$. Potem je $dt = 2x\, dx$ in

$$\int \frac{x}{1+x^4}\, dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+t^2}\, dt = \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} t + C = \underline{\underline{\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x^2 + C}}.$$

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{9+4x^2}\,dx$:

Vzemimo novo spremenljivko $t = \frac{2x}{3}$. Potem je $dt = \frac{2dx}{3}$ in

$$\int \frac{1}{9+4x^2}\,dx = \frac{1}{9}\int \frac{1}{1+\left(\frac{2x}{3}\right)^2}\,dx = \frac{1}{6}\int \frac{1}{1+t^2}\,dt = \underline{\underline{\frac{1}{6}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x}{3}+C}}.$$

Na podoben način lahko s substitucijo $t = \frac{ax}{b}$, kar nam da $dt = \frac{a\,dx}{b}$, pokažemo, da velja

$$\int \frac{1}{a^2x^2+b^2}\,dx = \frac{1}{b^2}\int \frac{1}{\left(\frac{ax}{b}\right)^2+1}\,dx = \frac{b}{b^2a}\int \frac{1}{t^2+1}\,dt = \underline{\underline{\frac{1}{ab}\operatorname{arc\,tg}\frac{ax}{b}+C}}.$$

(c) $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x-1)^{100}}\,dx$:

Integrand lahko najprej prepišemo v naslednjo obliko

$$\frac{x^2}{(x-1)^{100}} = \frac{(x-1)^2+2(x-1)+1}{(x-1)^{100}} = \frac{1}{(x-1)^{98}} + \frac{2}{(x-1)^{99}} + \frac{1}{(x-1)^{100}}.$$

Če sedaj vzamemo novo spremenljivko $t = x-1$, je $dt = dx$ in

$$\int \frac{x^2}{(x-1)^{100}}\,dx = \int \left(\frac{1}{t^{98}} + \frac{2}{t^{99}} + \frac{1}{t^{100}}\right)\,dt = \underline{\underline{-\frac{1}{97(x-1)^{97}} - \frac{1}{49(x-1)^{98}} - \frac{1}{99(x-1)^{99}} + C}}.$$

(d) $\displaystyle\int \frac{e^x-1}{e^x+1}\,dx$:

Vzemimo novo spremenljivko $t = e^x$. Potem je $dt = e^x\,dx$ in

$$\int \frac{e^x-1}{e^x+1}\,dx = \int \frac{t-1}{t(t+1)}\,dt.$$

Dobljeno racionalno funkcijo lahko razcepimo na parcialna ulomka

$$\frac{t-1}{t(t+1)} = \frac{2}{t+1} - \frac{1}{t}.$$

Torej je

$$\int \frac{e^x-1}{e^x+1}\,dx = \int \left(\frac{2}{t+1} - \frac{1}{t}\right)\,dt = 2\ln|t+1| - \ln|t| + C = \underline{\underline{2\ln(e^x+1) - x + C}}.$$

$\square$

(3) Izračunaj naslednje integrale z uvedbo nove spremenljivke:

(a) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}$,

(b) $\displaystyle\int \sqrt{16-x^2}\,dx$,

(c) $\displaystyle\int \sqrt{1+x^2}\,dx$.

Rešitev:

(a) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}$:

Vzemimo novo spremenljivko $t = \sqrt[6]{x}$ oziroma $x = t^6$. Sledi $dx = 6t^5\,dt$ in

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})} = \int \frac{6t^5}{t^3(1+t^2)}\,dt = \int \frac{6t^2}{1+t^2}\,dt = 6\int \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right)dt,$$
$$= 6t - 6\operatorname{arc\,tg} t + C = \underline{\underline{6\sqrt[6]{x} - 6\operatorname{arc\,tg}\sqrt[6]{x} + C}}.$$

(b) $\displaystyle\int \sqrt{16-x^2}\,dx$:

Sedaj naj bo $x = 4\sin t$. Tedaj je $dx = 4\cos t\,dt$ in

$$\int \sqrt{16-x^2}\,dx = \int \sqrt{16-16\sin^2 t}\,4\cos t\,dt = \int 16\cos^2 t\,dt.$$

Kvadrat kosinusne ali sinusne funkcije integriramo s prevedbo na dvojne kote. V našem primeru je

$$16\cos^2 t = 16\cdot\frac{1+\cos(2t)}{2} = 8 + 8\cos(2t).$$

Torej je

$$\int \sqrt{16-x^2}\,dx = \int (8+8\cos(2t))\,dt = 8t + 4\sin(2t) + C,$$
$$= 8\arcsin(\tfrac{x}{4}) + 4\sin(2\arcsin(\tfrac{x}{4})) + C.$$

Drugi člen lahko še malce poenostavimo v obliko

$$4\sin(2\arcsin(\tfrac{x}{4})) = 8\sin(\arcsin(\tfrac{x}{4}))\cos(\arcsin(\tfrac{x}{4})) = 2x\sqrt{1-(\tfrac{x}{4})^2}.$$

Tako pridemo do rezultata

$$\int \sqrt{16-x^2}\,dx = \underline{\underline{8\arcsin(\tfrac{x}{4}) + 2x\sqrt{1-(\tfrac{x}{4})^2} + C}}.$$

(c) $\displaystyle\int \sqrt{1+x^2}\,dx$:

Tokrat bomo vzeli $x = \operatorname{sh} t$. Potem je $dx = \operatorname{ch} t\,dt$ in

$$\int \sqrt{1+x^2}\,dx = \int \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 t}\ \operatorname{ch} t\,dt = \int \operatorname{ch}^2 t\,dt.$$

Z uporabo formule

$$\operatorname{ch}^2 t = \frac{1+\operatorname{ch}(2t)}{2}$$

pridemo do

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1+x^2}\,dx &= \int \frac{1+\operatorname{ch}(2t)}{2}\,dt = \frac{t}{2} + \frac{\operatorname{sh}(2t)}{4} + C,\\ &= \frac{\operatorname{arsh} x}{2} + \frac{\operatorname{sh}(2\operatorname{arsh} x)}{4} + C.\end{aligned}$$

Drugi člen lahko tokrat poenostavimo v

$$\frac{\operatorname{sh}(2\operatorname{arsh} x)}{4} = \frac{\operatorname{sh}(\operatorname{arsh} x)\operatorname{ch}(\operatorname{arsh} x)}{2} = \frac{x\sqrt{1+x^2}}{2}.$$

Sledi

$$\int \sqrt{1+x^2}\,dx = \underline{\underline{\frac{\operatorname{arsh} x}{2} + \frac{x\sqrt{1+x^2}}{2} + C}}.$$

□

(4) Izračunaj naslednje integrale z uvedbo nove spremenljivke:

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{1-\cos x}\,dx$,

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x}\,dx$,

(c) $\displaystyle\int \frac{1}{\operatorname{ch} x}\,dx$,

(d) $\displaystyle\int \operatorname{tg}^4 x\,dx$.

Rešitev:

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{1-\cos x}\,dx$:

Računajmo

$$\int \frac{1}{1-\cos x}\,dx = \int \frac{1+\cos x}{1-\cos^2 x}\,dx = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{\cos x}{\sin^2 x}\right)\,dx.$$

Za izračun drugega integrala na desni uvedimo novo spremenljivko $t = \sin x$. Tedaj je $dt = \cos x\, dx$ in
$$\int \frac{\cos x}{\sin^2 x}\, dx = \int \frac{1}{t^2}\, dt = -\frac{1}{t} + C = -\frac{1}{\sin x} + C.$$
Od tod dobimo
$$\int \frac{1}{1-\cos x}\, dx = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{\cos x}{\sin^2 x}\right) dx = \underline{\underline{-\operatorname{ctg} x - \frac{1}{\sin x} + C}}.$$

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x}\, dx$:

Sedaj bomo uvedli novo spremenljivko $t = \sin \frac{x}{2}$. Sledi $dt = \frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}\, dx$ in
$$\int \frac{1}{\sin x}\, dx = \int \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}\, dx = \int \frac{1}{t(1-t^2)}\, dt.$$
Dobljeno racionalno funkcijo lahko razcepimo na parcialna ulomka
$$\frac{1}{t(1-t^2)} = \frac{1}{t} + \frac{t}{1-t^2}$$
in dobimo
$$\int \frac{1}{\sin x}\, dx = \int \frac{1}{t(1-t^2)}\, dt = \int \left(\frac{1}{t} + \frac{t}{1-t^2}\right) dt = \ln|t| - \tfrac{1}{2}\ln|1-t^2| + C.$$
Drugi člen smo integrirali z uvedbo nove spremenljivke $u = 1 - t^2$. Če upoštevamo, da je $t = \sin\frac{x}{2}$, pridemo do rezultata
$$\int \frac{1}{\sin x}\, dx = \ln|t| - \tfrac{1}{2}\ln|1-t^2| + C = \underline{\underline{\ln|\operatorname{tg}\tfrac{x}{2}| + C}}.$$

(c) $\displaystyle\int \frac{1}{\operatorname{ch} x}\, dx$:

Med računanjem bomo uvedli novo spremenljivko $t = e^x$, ki nam da $dt = e^x\, dx$. Torej je
$$\int \frac{1}{\operatorname{ch} x}\, dx = \int \frac{2}{e^x + e^{-x}}\, dx = \int \frac{2}{(t + t^{-1})} \cdot \frac{dt}{t} = 2\int \frac{1}{t^2+1}\, dt = \underline{\underline{2\operatorname{arc\,tg}(e^x) + C}}.$$

(d) $\displaystyle\int \operatorname{tg}^4 x\, dx$:

Uvedimo novo spremenljivko $t = \operatorname{tg} x$. Potem je $dt = \frac{1}{\cos^2 x}\, dx$. Če upoštevamo zvezo $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$, dobimo $dx = \frac{1}{1+t^2}\, dt$ in
$$\int \operatorname{tg}^4 x\, dx = \int \frac{t^4}{1+t^2}\, dt = \int \left(t^2 - 1 + \frac{1}{1+t^2}\right) dt = \underline{\underline{\frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} - \operatorname{tg} x + \operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg} x) + C}}.$$

$\square$

(5) Izračunaj naslednje integrale z integracijo po delih:

(a) $\displaystyle\int x^n \ln x \, dx, \ n \in \mathbb{N},$

(b) $\displaystyle\int \operatorname{arc\,tg} \sqrt{x} \, dx,$

(c) $\displaystyle\int e^{ax} \cos bx \, dx, \ a, b \in \mathbb{R},$

(d) $\displaystyle\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}} \, dx,$

(e) $\displaystyle\int \sin x \ln(\operatorname{tg} x) \, dx.$

Rešitev: Pri integraciji po delih si pomagamo s formulo

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du.$$

Ponavadi se pri izbiri u in dv ravnamo po načelu:

· $u \ldots$ funkcija, ki se pri odvajanju poenostavi,
· $dv \ldots$ izraz, ki ga znamo integrirati.

(a) $\displaystyle\int x^n \ln x \, dx, \ n \in \mathbb{N}$:

Integriramo po delih z izbiro $u = \ln x$ in $dv = x^n \, dx$. Sledi $du = \frac{dx}{x}$, $v = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ in

$$\int x^n \ln x \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \int \frac{x^n}{n+1} \, dx = \underline{\underline{\frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + C}}.$$

(b) $\displaystyle\int \operatorname{arc\,tg} \sqrt{x} \, dx$:

Sedaj izberimo $u = \operatorname{arc\,tg} \sqrt{x}$ in $dv = dx$. Potem je $du = \frac{1}{1+x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \, dx$. Namesto $v = x$ pa raje izberimo $v = x + 1$, ker se nam tako stvari poenostavijo. Sledi

$$\int \operatorname{arc\,tg} \sqrt{x} \, dx = (x+1) \operatorname{arc\,tg} \sqrt{x} - \int \frac{1}{2\sqrt{x}} \, dx = \underline{\underline{(x+1) \operatorname{arc\,tg} \sqrt{x} - \sqrt{x} + C}}.$$

(c) $\int e^{ax} \cos bx \, dx$:

Pri tem integralu bomo eksponentno funkcijo dvakrat odvajali, trigonometrični funkciji pa dvakrat integrirali.

$$\begin{aligned}\int e^{ax} \cos bx \, dx &= \frac{1}{b} e^{ax} \sin bx - \frac{a}{b} \int e^{ax} \sin bx \, dx, \\ &= \frac{1}{b} e^{ax} \sin bx - \frac{a}{b} \left(-\frac{1}{b} e^{ax} \cos bx + \frac{a}{b} \int e^{ax} \cos bx \, dx \right), \\ &= \frac{1}{b} e^{ax} \sin bx + \frac{a}{b^2} e^{ax} \cos bx - \frac{a^2}{b^2} \int e^{ax} \cos bx \, dx.\end{aligned}$$

Iz te implicitne oblike lahko izrazimo

$$\int e^{ax} \cos bx \, dx = \underline{\underline{\frac{e^{ax}(a \cos bx + b \sin bx)}{a^2 + b^2} + C.}}$$

Na podoben način lahko izračunamo tudi

$$\int e^{ax} \sin bx \, dx = \underline{\underline{\frac{e^{ax}(a \sin bx - b \cos bx)}{a^2 + b^2} + C.}}$$

<u>Opomba</u>: Poleg integriranja realnih funkcij poznamo tudi integriranje kompleksnih funkcij. Poglejmo si, kako bi lahko na ta način izračunali zgornja dva integrala. Naj bo $\lambda = a + ib$ kompleksno število. Potem velja

$$e^{\lambda x} = e^{(a+ib)x} = e^{ax}(\cos bx + i \sin bx).$$

Če označimo

$$I_c = \int e^{ax} \cos bx \, dx \text{ in } I_s = \int e^{ax} \sin bx \, dx,$$

je torej

$$\int e^{\lambda x} \, dx = I_c + i I_s.$$

Po drugi strani pa je:

$$\begin{aligned}\int e^{\lambda x} \, dx &= \frac{1}{\lambda} e^{\lambda x} + C = \frac{e^{ax}(\cos bx + i \sin bx)}{a + ib} + C = \frac{e^{ax}(a - ib)(\cos bx + i \sin bx)}{a^2 + b^2} + C, \\ &= \frac{e^{ax}\left((b \sin bx + a \cos bx) + i(a \sin bx - b \cos bx)\right)}{a^2 + b^2} + C, \\ &= \frac{e^{ax}(b \sin bx + a \cos bx)}{a^2 + b^2} + i \frac{e^{ax}(a \sin bx - b \cos bx)}{a^2 + b^2} + C.\end{aligned}$$

Vidimo, da smo izračunali oba integrala hkrati, ne da bi uporabili metodo integriranja po delih. Cena, ki smo jo plačali, pa je, da operiramo s kompleksnimi namesto z realnimi funkcijami.

(d) $\displaystyle\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}}\, dx$:

Sedaj bomo vzeli $u = \arcsin x$ in $dv = \frac{1}{\sqrt{1+x}}\, dx$. Tedaj je $du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$, $v = 2\sqrt{1+x}$ in

$$\begin{aligned}\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}}\, dx &= 2\sqrt{1+x}\arcsin x - 2\int \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = 2\sqrt{1+x}\arcsin x - 2\int \frac{1}{\sqrt{1-x}}\, dx,\\ &= \underline{\underline{2\sqrt{1+x}\arcsin x + 4\sqrt{1-x} + C}}.\end{aligned}$$

(e) $\displaystyle\int \sin x \ln(\operatorname{tg} x)\, dx$:

Vzemimo $u = \ln(\operatorname{tg} x)$ in $dv = \sin x\, dx$. Sledi $du = \frac{1}{\sin x \cos x}\, dx$, $v = -\cos x$ in

$$\int \sin x \ln(\operatorname{tg} x)\, dx = -\cos x \ln(\operatorname{tg} x) + \int \frac{1}{\sin x}\, dx \qquad = \underline{\underline{-\cos x \ln(\operatorname{tg} x) + \ln|\operatorname{tg} \tfrac{x}{2}| + C}}.$$

Pri rezultatu smo upoštevali integral $\int \frac{1}{\sin x}\, dx = \ln|\operatorname{tg}\frac{x}{2}| + C$, ki smo ga že izračunali. $\square$

V nadaljevanju se bomo posvetili študiju algoritmov za integracijo nekaterih razredov funkcij. Začeli bomo z integracijo racionalnih funkcij. V ta namen bomo spoznali dve metodi za integracijo racionalnih funkcij:

(1) Z razcepom na parcialne ulomke.
(2) Z metodo nastavka.

Metoda nastavka deluje zmeraj, razcep na parcialne ulomke pa deluje optimalno, če imamo v imenovalcu same linearne faktorje.

(6) Izračunaj integrale racionalnih funkcij:

(a) $\displaystyle\int \frac{x^2+x+1}{x^3+2x^2+x}\, dx$,

(b) $\displaystyle\int \frac{-25+25x+4x^2+x^3}{25x^2+x^4}\, dx$,

(c) $\displaystyle\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}\, dx$,

(d) $\displaystyle\int \frac{21x^5}{x^6+9x^3+8}\, dx$.

Rešitev: Dane racionalne funkcije bomo integrirali z razcepom na parcialne ulomke. Pri tem bomo uporabili naslednji algoritem:

· S pomočjo deljenja zapišemo racionalno funkcijo v obliki $R(x) = p(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$, kjer je polinom r nižje stopnje kot polinom q.

· Polinom q razcepimo na produkt linearnih faktorjev in pa nerazcepnih kvadratnih faktorjev.

- Funkcijo $\frac{r(x)}{q(x)}$ zapišemo kot vsoto parcialnih ulomkov s pomočjo nastavkov:
  - $\frac{1}{(x-a)^k} \rightsquigarrow \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(x-a)^k}$,
  - $\frac{1}{(x^2+bx+c)^l} \rightsquigarrow \frac{B_1+C_1x}{x^2+bx+c} + \frac{B_2+C_2x}{(x^2+bx+c)^2} + \cdots + \frac{B_l+C_lx}{(x^2+bx+c)^l}$.
- Integriramo vsak parcialni ulomek posebej.

(a) $\displaystyle\int \frac{x^2+x+1}{x^3+2x^2+x}\, dx$:

Razcep na parcialne ulomke se glasi:

$$\begin{aligned}
\frac{x^2+x+1}{x^3+2x^2+x} &= \frac{x^2+x+1}{x(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2},\\
&= \frac{A(x+1)^2 + Bx(x+1) + Cx}{x(x+1)^2},\\
&= \frac{x^2(A+B) + x(2A+B+C) + A}{x(x+1)^2}.
\end{aligned}$$

Od tod dobimo sistem treh enačb za tri neznanke:

$$\begin{aligned}
A + B &= 1,\\
2A + B + C &= 1,\\
A &= 1,
\end{aligned}$$

ki ima rešitev $A = 1$, $B = 0$ in $C = -1$. Sledi

$$\int \frac{x^2+x+1}{x^3+2x^2+x}\, dx = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{(x+1)^2}\right) dx = \underline{\underline{\ln|x| + \frac{1}{x+1} + C}}.$$

(b) $\displaystyle\int \frac{-25+25x+4x^2+x^3}{25x^2+x^4}\, dx$:

Razcepimo najprej integrand na parcialne ulomke:

$$\begin{aligned}
\frac{-25+25x+4x^2+x^3}{25x^2+x^4} &= \frac{-25+25x+4x^2+x^3}{x^2(x^2+25)},\\
&= \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+25},\\
&= \frac{A(x^3+25x) + B(x^2+25) + Cx^3 + Dx^2}{x^2(x^2+25)},\\
&= \frac{25B + 25Ax + x^2(B+D) + x^3(A+C)}{x^2(x^2+25)}.
\end{aligned}$$

Tako pridemo do sistema enačb:

$$\begin{aligned}
A + C &= 1,\\
B + D &= 4,\\
25A &= 25,\\
25B &= -25,
\end{aligned}$$

ki ima rešitev $A = 1$, $B = -1$, $C = 0$, $D = 5$. Rezultat je torej

$$\int \frac{-25 + 25x + 4x^2 + x^3}{25x^2 + x^4}\, dx = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{5}{x^2+25}\right) dx = \underline{\underline{\ln|x| + \frac{1}{x} + \operatorname{arc\,tg}\frac{x}{5} + C}}.$$

(c) $\displaystyle\int \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x}\, dx$:

Sedaj imamo primer, ko ima polinom v števcu višjo stopnjo kot polinom v imenovalcu. Z deljenjem dobimo

$$\frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} = x^2 + x + 4 + \frac{4x^2 + 16x + 8}{x^3 - 4x}.$$

Racionalno funkcijo lahko razcepimo na naslednji način:

$$\frac{4x^2 + 16x + 8}{x^3 - 4x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+2} = \frac{A(x^2-4) + B(x^2+2x) + C(x^2-2x)}{x^3-4x}.$$

Tako pridemo do sistema enačb:

$$\begin{aligned} A + B + C &= 4, \\ 2B - 2C &= 16, \\ -4A &= -8, \end{aligned}$$

ki ima rešitev $A = 2$, $B = 5$ in $C = -3$. Sledi

$$\begin{aligned} \int \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x}\, dx &= \int \left(x^2 + x + 4 + \frac{2}{x} + \frac{5}{x-2} - \frac{3}{x+2}\right) dx. \\ &= \underline{\underline{\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + 2\ln|x| + 5\ln|x-2| - 3\ln|x+2| + C}}. \end{aligned}$$

(d) $\displaystyle\int \frac{21x^5}{x^6 + 9x^3 + 8}\, dx$:

V imenovalcu imamo tokrat polinom šeste stopnje, zato bi imeli z razcepom na parcialne ulomke kar nekaj dela. Včasih si stvari lahko poenostavimo, če s primerno substitucijo znižamo stopnje polinomov. V našem primeru lahko uvedemo novo spremenljivko $t = x^3$, ki nam integral prevede v

$$\int \frac{21x^5}{x^6 + 9x^3 + 8}\, dx = \int \frac{7t}{t^2 + 9t + 8}\, dt.$$

Racionalna funkcija na desni ima naslednji razcep na parcialna ulomka:

$$\begin{aligned} \frac{7t}{t^2 + 9t + 8} &= \frac{A}{t+1} + \frac{B}{t+8}, \\ &= \frac{(A+B)t + (8A+B)}{t^2 + 9t + 8}. \end{aligned}$$

Dobljeni sistem enačb:

$$\begin{aligned} A + B &= 7, \\ 8A + B &= 0, \end{aligned}$$

ima rešitev $A = -1$ in $B = 8$. Tako dobimo

$$\int \frac{7t}{t^2 + 9t + 8}\, dt = \int \left(-\frac{1}{t+1} + \frac{8}{t+8} \right) dt = -\ln|t+1| + 8\ln|t+8| + C$$

in

$$\int \frac{21x^5}{x^6 + 9x^3 + 8}\, dx = \underline{\underline{-\ln|x^3+1| + 8\ln|x^3+8| + C}}.$$

$\square$

(7) Izračunaj integrale racionalnih funkcij:

(a) $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2 - 2x + 2}\, dx$,

(b) $\displaystyle\int \frac{2}{(x^2+1)^2}\, dx$,

(c) $\displaystyle\int \frac{16x^2 + 16}{x^4 + 4}\, dx$.

Rešitev: Integracija s pomočjo razcepa racionalne funkcije na parcialne ulomke dobro deluje, če so vsi kvadratni faktorji v njenem števcu kvečjemu na prvo potenco. V primeru višjih potenc pa si pomagamo z nastavkom.

- Zapišemo $R(x) = p(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$ in faktoriziramo q.
- Uporabimo nastavek:
  - $\frac{1}{(x-a)^k} \rightsquigarrow A \ln|x-a|$,
  - $\frac{1}{(x^2+bx+c)^l} \rightsquigarrow B \ln(x^2+bx+c) + C \operatorname{arc\,tg} \frac{2x+b}{\sqrt{4c-b^2}}$,
  - $\frac{\tilde{r}(x)}{\tilde{q}(x)}$, kjer polinom $\tilde{q}$ dobimo iz polinoma q z znižanjem potence vsakega faktorja za ena, polinom $\tilde{r}$ pa ima stopnjo za eno nižjo kot $\tilde{q}$.
- Odvajamo obe strani in izračunamo koeficiente.

(a) $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2 - 2x + 2}\, dx$:

V imenovalcu imamo nerazcepen kvadraten faktor, zato bomo vzeli nastavek

$$\int \frac{2x+1}{x^2 - 2x + 2}\, dx = A \ln(x^2 - 2x + 2) + B \operatorname{arc\,tg}(x-1).$$

Ko obe strani enačbe odvajamo, pridemo do enakosti:

$$\frac{2x+1}{x^2-2x+2} = \frac{A(2x-2)}{x^2-2x+2} + \frac{B}{x^2-2x+2} = \frac{2Ax - 2A + B}{x^2-2x+2}.$$

Dobljeni sistem enačb:

$$\begin{aligned} 2A &= 2, \\ -2A + B &= 1, \end{aligned}$$

ima rešitev $A = 1$ in $B = 3$. Torej je

$$\int \frac{2x+1}{x^2-2x+2}\,dx = \underline{\underline{\ln(x^2-2x+2) + 3\operatorname{arc\,tg}(x-1) + C}}.$$

(b) $\int \frac{2}{(x^2+1)^2}\,dx$:

Vzemimo nastavek

$$\int \frac{2}{(x^2+1)^2}\,dx = A\ln(x^2+1) + B\operatorname{arc\,tg} x + \frac{C+Dx}{x^2+1}.$$

Z odvajanjem dobimo:

$$\begin{aligned} \frac{2}{(x^2+1)^2} &= \frac{2Ax+B}{x^2+1} + \frac{D(x^2+1)-(C+Dx)2x}{(x^2+1)^2}, \\ &= \frac{2A(x^3+x)+B(x^2+1)-2Cx+D(-x^2+1)}{(x^2+1)^2}, \\ &= \frac{2Ax^3+x^2(B-D)+x(2A-2C)+B+D}{(x^2+1)^2}. \end{aligned}$$

Dobimo sistem štirih enačb za štiri neznanke:

$$\begin{aligned} 2A &= 0, \\ B - D &= 0, \\ 2A - 2C &= 0, \\ B + D &= 2, \end{aligned}$$

ki ima rešitev $A = 0$, $B = 1$, $C = 0$, $D = 1$. Sledi

$$\int \frac{2}{(x^2+1)^2}\,dx = \underline{\underline{\operatorname{arc\,tg} x + \frac{x}{x^2+1} + C}}.$$

(c) $\int \frac{16x^2+16}{x^4+4}\,dx$:

Sedaj imamo v imenovalcu polinom četrte stopnje, ki nima realnih ničel. To pomeni, da ga lahko zapišemo v obliki produkta dveh nerazcepnih kvadratnih faktorjev. Do teh dveh faktorjev lahko pridemo na več načinov. Lahko na primer upoštevamo, da so ničle polinoma x^4+4 kompleksna števila $\{1+i, 1-i, -1+i, -1-i\}$. Konjugiran par kompleksnih ničel nam da en nerazcepni kvadratni faktor. V našem primeru tako dobimo

$$x^4+4 = (x-(1+i))(x-(1-i))(x-(-1+i))(x-(-1-i)) = (x^2-2x+2)(x^2+2x+2).$$

Vzeli bomo torej nastavek

$$\int \frac{16x^2+16}{x^4+4}\,dx = A\ln(x^2-2x+2) + B\operatorname{arc\,tg}(x-1) + C\ln(x^2+2x+2) + D\operatorname{arc\,tg}(x+1).$$

Ko nastavek odvajamo, dobimo:

$$\begin{aligned}
\frac{16x^2+16}{x^4+4} &= \frac{A(2x-2)}{x^2-2x+2} + \frac{B}{x^2-2x+2} + \frac{C(2x+2)}{x^2+2x+2} + \frac{D}{x^2+2x+2}, \\
&= \frac{A(2x^3+2x^2-4) + B(x^2+2x+2) + C(2x^3-2x^2+4) + D(x^2-2x+2)}{x^4+4}.
\end{aligned}$$

Dobimo sistem enačb:

$$\begin{aligned}
2A + 2C &= 0, \\
2A + B - 2C + D &= 16, \\
2B - 2D &= 0, \\
-4A + 2B + 4C + 2D &= 16,
\end{aligned}$$

ki ima rešitev $A = 1$, $B = 6$, $C = -1$ in $D = 6$. Torej je

$$\int \frac{16x^2+16}{x^4+4}\,dx = \underline{\underline{\ln(x^2-2x+2) + 6\operatorname{arc\,tg}(x-1) - \ln(x^2+2x+2) + 6\operatorname{arc\,tg}(x+1) + C}}.$$

$\square$

Naslednji tip funkcij, ki jih bomo integrirali, so korenske oziroma iracionalne funkcije. Spoznali bomo metode za integracijo naslednjih dveh tipov korenskih funkcij:

(1) Funkcij, v katerih nastopa koren ulomljene linearne funkcije oblike $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$.

(2) Funkcij, v katerih nastopa kvadratni koren kvadratne funkcije oblike $\sqrt{ax^2+bx+c}$.

S primerno substitucijo lahko takšne integrale prevedemo na integral racionalne funkcije. Nedoločeni integral funkcije, v kateri nastopa koren polinoma stopnje vsaj tri, ni več nujno elementarna funkcija.

(8) Izračunaj integrale korenskih funkcij:

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{(\sqrt[3]{x}-\sqrt[4]{x})^3}\,dx,$

(b) $\displaystyle\int \frac{2+\sqrt{x+1}}{x+1-\sqrt{x+1}}\,dx,$

(c) $\displaystyle\int \frac{1}{x+1}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,dx.$

Rešitev: Integrale tipa $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$ integriramo s pomočjo substitucije

$$t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} \quad \text{oziroma} \quad t^n = \frac{ax+b}{cx+d},$$

ki nam integral prevede na integriranje racionalnih funkcij.

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{(\sqrt[3]{x} - \sqrt[4]{x})^3}\, dx$:

Če definiramo $t^{12} = x$, je $dx = 12t^{11}\, dt$ in $\sqrt[12]{x} = t$. Sledi

$$\int \frac{1}{(\sqrt[3]{x} - \sqrt[4]{x})^3}\, dx = \int \frac{12t^{11}}{(t^4 - t^3)^3}\, dt = \int \frac{12t^2}{(t-1)^3}\, dt.$$

Sedaj naj bo $u = t - 1$. Potem je $du = dt$ in

$$\int \frac{12t^2}{(t-1)^3}\, dt = \int \frac{12(u+1)^2}{u^3}\, du = \int \left(\frac{12}{u} + \frac{24}{u^2} + \frac{12}{u^3}\right) du = 12\ln|u| - \frac{24}{u} - \frac{6}{u^2} + C.$$

Tako dobimo rezultat

$$\int \frac{1}{(\sqrt[3]{x} - \sqrt[4]{x})^3}\, dx = \underline{\underline{12\ln|\sqrt[12]{x} - 1| - \frac{24}{\sqrt[12]{x} - 1} - \frac{6}{(\sqrt[12]{x} - 1)^2} + C.}}$$

(b) $\displaystyle\int \frac{2 + \sqrt{x+1}}{x + 1 - \sqrt{x+1}}\, dx$:

Sedaj definirajmo $t^2 = x + 1$. Tedaj je $dx = 2t\, dt$, $t = \sqrt{x+1}$ in

$$\int \frac{2 + \sqrt{x+1}}{x + 1 - \sqrt{x+1}}\, dx = \int \frac{2t(2+t)}{t^2 - t}\, dt = \int \frac{4 + 2t}{t - 1}\, dt = \int \left(2 + \frac{6}{t-1}\right) dt,$$
$$= 2t + 6\ln|t - 1| + C = \underline{\underline{2\sqrt{x+1} + 6\ln|\sqrt{x+1} - 1| + C.}}$$

(c) $\displaystyle\int \frac{1}{x+1}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\, dx$:

Definirajmo $t^2 = \frac{x-1}{x+1}$. Potem lahko izrazimo $x = \frac{1+t^2}{1-t^2}$ in $x + 1 = \frac{2}{1-t^2}$. Z odvajanjem dobimo še, da je $dx = \frac{4t}{(1-t^2)^2}\, dt$. Ko vse te izraze vstavimo v integral, dobimo

$$\int \frac{1}{x+1}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\, dx = \int \frac{1-t^2}{2} \cdot t \cdot \frac{4t}{(1-t^2)^2}\, dt = \int \frac{2t^2}{1-t^2}\, dt = \int \left(-2 + \frac{2}{1-t^2}\right) dt.$$

Z razcepom na parcialna ulomka dobimo $\frac{2}{1-t^2} = \frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t}$. Sledi

$$\int \left(-2 + \frac{2}{1-t^2}\right) dt = \int \left(-2 + \frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t}\right) dt = -2t + \ln|1+t| - \ln|1-t| + C$$

in

$$\int \frac{1}{x+1}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\, dx = \underline{\underline{-2\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + \ln\left|\frac{1 + \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}{1 - \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}\right| + C.}}$$

Opomba: Rezultat bi lahko izrazili tudi z inverznimi hiperboličnimi funkcijami, saj velja

$$\int \frac{1}{1-t^2}\,dt = \begin{cases} \operatorname{arcth} t + C & ; |t| > 1, \\ \operatorname{arth} t + C & ; |t| < 1. \end{cases}$$

$\square$

(9) Izračunaj integrala korenskih funkcij:

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{-x^2+2x+3}}\,dx$,

(b) $\displaystyle\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2+4x}}\,dx$.

Rešitev: Integrale tipa $\int \frac{p(x)\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, kjer je p polinom, integriramo na naslednji način:

(1) Če je p konstanten, integral s substitucijo prevedemo na enega izmed integralov:

- $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C, \quad a > 0,$
- $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C, \quad a \neq 0.$

(2) Če je p poljuben polinom, uporabimo nastavek

$$\int \frac{p(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx = \tilde{p}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \int \frac{C}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx,$$

kjer je C konstanta, polinom $\tilde{p}$ pa ima stopnjo eno manjšo kot p.

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{-x^2+2x+3}}\,dx$:

Najprej kvadratno funkcijo pod korenom zapišimo v temenski obliki

$$-x^2+2x+3 = -(x-1)^2+4.$$

Če torej definiramo $t = x-1$, je $dx = dt$ in

$$\int \frac{1}{\sqrt{-x^2+2x+3}}\,dx = \int \frac{dt}{\sqrt{4-t^2}} = \arcsin(\tfrac{t}{2}) + C = \underline{\underline{\arcsin(\tfrac{x-1}{2}) + C}}.$$

(b) $\displaystyle\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2+4x}}\,dx$:

V tem primeru bomo uporabili nastavek

$$\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2+4x}}\,dx = A\sqrt{x^2+4x} + \int \frac{B}{\sqrt{x^2+4x}}\,dx.$$

Z odvajanjem te enakosti dobimo

$$\frac{x+3}{\sqrt{x^2+4x}} = \frac{A(x+2)}{\sqrt{x^2+4x}} + \frac{B}{\sqrt{x^2+4x}} = \frac{A(x+2)+B}{\sqrt{x^2+4x}}.$$

S primerjavo koeficientov polinomov v števcu pridemo do sistema dveh enačb za dve neznanki:

$$\begin{aligned} A &= 1, \\ 2A + B &= 3, \end{aligned}$$

ki ima rešitev $A = B = 1$. Tako dobimo:

$$\begin{aligned} \int \frac{x+3}{\sqrt{x^2+4x}}\,dx &= \sqrt{x^2+4x} + \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x}} = \sqrt{x^2+4x} + \int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2-4}}, \\ &= \underline{\underline{\sqrt{x^2+4x} + \ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x}\right| + C}}. \end{aligned}$$

Zadnji integral lahko izračunamo z uvedbo nove spremenljivke $t = x + 2$. □

(10) Izračunaj integrala korenskih funkcij:

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}\,dx$,

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

Rešitev: Integrale tipa $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$ lahko z univerzalno substitucijo vedno prevedemo na integral racionalne funkcije. Pri izbiri nove spremenljivke u ločimo dva primera:

(1) $\sqrt{a}(u-x) = \sqrt{ax^2+bx+c}$, če je $a > 0$,

(2) $\sqrt{-a}(x-x_1)u = \sqrt{ax^2+bx+c}$, če je $a < 0$ (pri tem je x_1 ničla kvadratne funkcije).

Ta metoda v principu vedno deluje, ni pa nujno najbolj optimalna.

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}\,dx$:

Definirajmo novo spremenljivko u implicitno z izrazom

$$u - x = \sqrt{x^2+1}.$$

Iz te zveze lahko eksplicitno izrazimo tako u kot x, da dobimo:

$$\begin{aligned} u &= x + \sqrt{x^2+1}, \\ x &= \frac{u^2-1}{2u}. \end{aligned}$$

Z odvajanjem dobimo zvezo med diferencialoma

$$dx = \frac{u^2+1}{2u^2}\,du.$$

Ker je $x^2+1=\frac{(u^2+1)^2}{4u^2}$, lahko dani integral prevedemo v

$$\int \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}\,dx = \int \frac{1}{\frac{(u^2+1)^2}{4u^2}\cdot\frac{u^2+1}{2u}}\cdot\frac{u^2+1}{2u^2}\,du = \int \frac{4u}{(u^2+1)^2}\,du.$$

Če sedaj uvedemo novo spremenljivko $t=u^2+1$, je $dt=2u\,du$ in

$$\int \frac{4u}{(u^2+1)^2}\,du = \int \frac{2}{t^2}\,dt = -\frac{2}{t}+C = -\frac{2}{u^2+1}+C.$$

Če to izrazimo z x, dobimo rezultat

$$\int \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}\,dx = \underline{\underline{-\frac{1}{x^2+x\sqrt{x^2+1}+1}}}+C.$$

(b) $\int \frac{1}{x^2\sqrt{1-x^2}}\,dx$:

Ta integral bi lahko z uvedbo nove spremenljivke

$$(x+1)u=\sqrt{1-x^2}$$

prevedli na integral

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{1-x^2}}\,dx = -2\int \frac{u^2+1}{(1-u^2)^2}\,du = \frac{2u}{u^2-1}+C.$$

Sama substitucija in pa integracija racionalne funkcije na desni bi nam vzela precej časa, zato bomo integral raje izračunali malce bolj spretno. Pri integralih oblike $\int \frac{1}{(x+\alpha)^k\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$ se namreč splača uvesti novo spremenljivko $t=\frac{1}{x+\alpha}$. Poglejmo si, kako to naredimo v našem primeru.

Z uvedbo $t=\frac{1}{x}$ dobimo $dt=-\frac{1}{x^2}\,dx$ in

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\int \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{t^2}}}\,dt = -\int \frac{t}{\sqrt{t^2-1}}\,dt.$$

Sedaj naj bo $u=t^2-1$. Sledi $du=2t\,dt$ in

$$-\int \frac{t}{\sqrt{t^2-1}}\,dt = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{u}}\,du = -\sqrt{u}+C = -\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}+C.$$

Tako pridemo do rezultata

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{1-x^2}}\,dx = \underline{\underline{-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}+C.}}$$

Vidimo, da je bila ta pot računsko manj zahtevna. □

(11) Izračunaj integrale trigonometričnih funkcij:

(a) $\displaystyle\int \cos^5 x\, dx$,

(b) $\displaystyle\int \sin^{10} x \cos^3 x\, dx$,

(c) $\displaystyle\int \cos^4 x \sin^2 x\, dx$.

Rešitev: Integrale oblike $\int \sin^p x \cos^q x\, dx$, kjer sta $p, q \in \mathbb{Z}$, računamo s substitucijo:

- Če je p lih, vzamemo novo spremenljivko $t = \cos x$.
- Če je q lih, vzamemo novo spremenljivko $t = \sin x$.
- Če sta p in q oba soda, z uporabo formul za dvojne kote znižamo red potenc, dokler ne pridemo do lihih potenc.

(a) $\displaystyle\int \cos^5 x\, dx$:

Vzemimo novo spremenljivko $t = \sin x$. Potem je $dt = \cos x\, dx$ in

$$\begin{aligned}\int \cos^5 x\, dx &= \int (1-t^2)^2\, dt = \int (1 - 2t^2 + t^4)\, dt = t - \frac{2t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + C,\\ &= \underline{\underline{\sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x + \frac{1}{5}\sin^5 x + C.}}\end{aligned}$$

(b) $\displaystyle\int \sin^{10} x \cos^3 x\, dx$:

Tudi tokrat naj bo $t = \sin x$. Sledi $dt = \cos x\, dx$ in

$$\begin{aligned}\int \sin^{10} x \cos^3 x\, dx &= \int t^{10}(1-t^2)\, dt = \int (t^{10} - t^{12})\, dt = \frac{t^{11}}{11} - \frac{t^{13}}{13} + C,\\ &= \underline{\underline{\frac{1}{11}\sin^{11} x - \frac{1}{13}\sin^{13} x + C.}}\end{aligned}$$

(c) $\displaystyle\int \cos^4 x \sin^2 x\, dx$:

Sedaj sta obe potenci sodi, zato bomo s prehodom na dvojne kote najprej znižali red potenc. Velja:

$$\begin{aligned}\cos^2 x \sin^2 x &= \frac{1}{4}\sin^2 2x,\\ \cos^2 x &= \frac{1 + \cos 2x}{2}.\end{aligned}$$

Funkcija, ki jo integriramo, je produkt teh dveh členov, zato je

$$\int \cos^4 x \sin^2 x \, dx = \frac{1}{8} \int (\sin^2 2x + \sin^2 2x \cos 2x) \, dx.$$

Prvi člen integriramo s še enkratno uporabo formul za dvojne kote, da dobimo

$$\int \sin^2 2x \, dx = \int \frac{1 - \cos 4x}{2} \, dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 4x}{8} + C.$$

Za izračun drugega integrala pa uvedemo novo spremenljivko $t = \sin 2x$, da dobimo

$$\int \sin^2 2x \cos 2x \, dx = \frac{1}{6} \sin^3 2x + C.$$

Rezultat je torej

$$\int \cos^4 x \sin^2 x \, dx = \underline{\underline{\frac{x}{16} - \frac{\sin 4x}{64} + \frac{1}{48} \sin^3 2x + C.}}$$

□

(12) Izračunaj integrala trigonometričnih funkcij:

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{5 + 4\cos x} \, dx$,

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{1 + \sin^2 x} \, dx$.

Rešitev: Pri integralih tipa $\int R(\cos x, \sin x) \, dx$ si pomagamo z univerzalno trigonometrično substitucijo

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t.$$

Z uporabo trigonometričnih enakosti lahko izrazimo:

$$\begin{aligned} dx &= \frac{2\,dt}{1 + t^2}, \\ \cos x &= \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \\ \sin x &= \frac{2t}{1 + t^2}, \end{aligned}$$

kar nam problem prevede na integriranje racionalnih funkcij.

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{5 + 4\cos x} \, dx$:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{5 + 4\cos x} \, dx &= \int \frac{1}{5 + 4\frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2\,dt}{1 + t^2} = \int \frac{2\,dt}{5(1 + t^2) + 4(1 - t^2)}, \\ &= \int \frac{2}{t^2 + 9} \, dt = \underline{\underline{\frac{2}{3} \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{1}{3} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) + C.}} \end{aligned}$$

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sin^2 x}\,dx$:

Univerzalna trigonometrična substitucija nas sicer vedno pripelje do rezultata, vendar pa v primeru, ko nastopata sin in cos v integrandu v višjih potencah, hitro pridemo do kompliciranih racionalnih funkcij. Zato se nam splača na začetku s pomočjo adicijskih izrekov čimbolj znižati potence v integrandu.

$$\int \frac{1}{1+\sin^2 x}\,dx = \int \frac{1}{1+\frac{1-\cos 2x}{2}}\,dx = \int \frac{2}{3-\cos 2x}\,dx.$$

Sedaj uvedimo novo spremenljivko $2x = u$ in nato še $\operatorname{tg}\frac{u}{2} = t$. Sledi

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1+\sin^2 x}\,dx &= \int \frac{2}{3-\cos 2x}\,dx = \int \frac{du}{3-\cos u} = \int \frac{1}{3-\frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2\,dt}{1+t^2},\\ &= \int \frac{dt}{1+2t^2} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{2}\operatorname{tg} x\right) + C.}}\end{aligned}$$

□

(13) Izračunaj integrale trigonometričnih funkcij:

(a) $\displaystyle\int \sin(6x)\cos(13x)\,dx$,

(b) $\displaystyle\int x^2\sin x\,dx$,

(c) $\displaystyle\int \arccos\sqrt{\frac{x}{x+1}}\,dx$.

Rešitev:

(a) $\displaystyle\int \sin(6x)\cos(13x)\,dx$:

Za izračun tega integrala bomo uporabili enakost $\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta))$.

$$\int \sin(6x)\cos(13x)\,dx = \frac{1}{2}\int(\sin(19x)-\sin(7x))\,dx = \underline{\underline{-\frac{1}{38}\cos(19x)+\frac{1}{14}\cos(7x)+C.}}$$

(b) $\displaystyle\int x^2\sin x\,dx$:

Ta integral bomo izračunali z dvakratno integracijo po delih. Polinom bomo dvakrat odvajali, kotno funkcijo pa dvakrat integrirali.

$$\begin{aligned}\int x^2\sin x\,dx &= -x^2\cos x + 2\int x\cos x\,dx = -x^2\cos x + 2(x\sin x - \int \sin x\,dx),\\ &= \underline{\underline{-x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C}}.\end{aligned}$$

(c) $\displaystyle\int \arccos\sqrt{\frac{x}{x+1}}\,dx$:

Poskusimo z integracijo po delih z izbiro $u = \arccos\sqrt{\frac{x}{x+1}}$ in $dv = dx$. Potem lahko izračunamo, da je $du = -\frac{1}{2\sqrt{x}(x+1)}$, $v = x$ in

$$\int \arccos\sqrt{\frac{x}{x+1}}\,dx = x\arccos\sqrt{\frac{x}{x+1}} + \int \frac{\sqrt{x}}{2(x+1)}\,dx.$$

Za izračun integrala na desni pa lahko uvedemo novo spremenljivko $t = \sqrt{x}$, kar nam da $dt = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$ in

$$\int \frac{\sqrt{x}}{2(x+1)}\,dx = \int \frac{t^2}{t^2+1}\,dt = \int \left(1 - \frac{1}{t^2+1}\right)dt = t - \operatorname{arc\,tg} t + C.$$

Rezultat je torej

$$\int \arccos\sqrt{\frac{x}{x+1}}\,dx = \underline{\underline{x\arccos\sqrt{\frac{x}{x+1}} + \sqrt{x} - \operatorname{arc\,tg}(\sqrt{x}) + C.}}$$

□

(14) Izračunaj integrale eksponentnih in logaritemskih funkcij:

(a) $\displaystyle\int x^2 e^{3x}\,dx$,

(b) $\displaystyle\int \ln^2 x\,dx$,

(c) $\displaystyle\int \frac{\ln(\ln x)}{x}\,dx$.

Rešitev:

(a) $\displaystyle\int x^2 e^{3x}\,dx$:

V tem primeru bomo uporabili integracijo po delih. Polinom bomo dvakrat odvajali, eksponentno funkcijo pa dvakrat integrirali.

$$\begin{aligned}\int x^2 e^{3x}\,dx &= \frac{1}{3}x^2e^{3x} - \frac{2}{3}\int xe^{3x}\,dx = \frac{1}{3}x^2e^{3x} - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{3}\int e^{3x}\,dx\right),\\ &= \underline{\underline{\frac{1}{3}x^2e^{3x} - \frac{2}{9}xe^{3x} + \frac{2}{27}e^{3x} + C.}}\end{aligned}$$

(b) $\int \ln^2 x\, dx$:

Dvakrat bomo integrirali po delih. Najprej vzemimo $u = \ln^2 x$ in $dv = dx$. To nam da $du = \frac{2\ln x}{x}\, dx$, $v = x$ in

$$\int \ln^2 x\, dx = x\ln^2 x - 2\int \ln x\, dx.$$

Integral na desni lahko izračunamo z integracijo po delih pri izbiri $u = \ln x$ in $dv = dx$. Tako dobimo

$$\int \ln^2 x\, dx = x\ln^2 x - 2\int \ln x\, dx = x\ln^2 x - 2(x\ln x - x) + C = \underline{\underline{x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x + C}}.$$

(c) $\int \frac{\ln(\ln x)}{x}\, dx$:

Vzemimo novo spremenljivko $t = \ln x$. Tedaj je $dt = \frac{dx}{x}$ in

$$\int \frac{\ln(\ln x)}{x}\, dx = \int \ln t\, dt = t\ln t - t + C = \underline{\underline{\ln x\ \ln(\ln x) - \ln x + C}}.$$

Pri tem smo upoštevali delni rezultat prejšnje naloge, da je $\int \ln t\, dt = t\ln t - t + C$. $\square$

(15) Izračunaj določena integrala s pomočjo prevedbe na Riemannovo vsoto:

(a) $\int_0^1 x^2\, dx$,

(b) $\int_1^2 2^x\, dx$.

Rešitev: Določeni integral $\int_a^b f(x)\, dx$ zvezne, pozitivne funkcije f na intervalu $[a, b]$ lahko geometrično interpretiramo kot ploščino lika med grafom funkcije in abscisno osjo.

S pomočjo Riemannovih vsot lahko določeni integral $\int_a^b f(x)\, dx$ izračunamo takole:

(1) Interval $[a, b]$ razdelimo s točkami $x_i = a + i \cdot \frac{b-a}{n}$ za $0 \leq i \leq n$ na n enakih delov.

(2) Lik pod grafom funkcije f aproksimiramo z unijo n pravokotnikov. Ploščina unije teh pravokotnikov je enaka

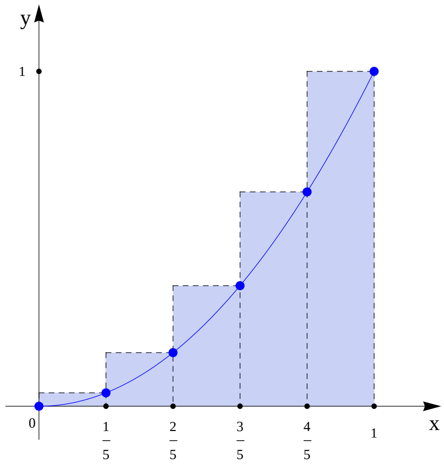
$$S_n = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i).$$

(3) V limiti, ko gre $n \to \infty$, dobimo ploščino lika pod grafom funkcije

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} S_n.$$

Lik torej aproksimiramo z unijami pravokotnikov, nato pa pogledamo limito aproksimacij, pri katerih so širine pravokotnikov čedalje manjše.

(a) Najprej bomo izračunali ploščino lika pod kvadratno parabolo na intervalu $[0,1]$.



Izračunajmo najprej približek za ploščino, ki ga dobimo, če interval $[0,1]$ razdelimo na n enakih delov. Delilne točke so v tem primeru $x_i = \frac{i}{n}$, zato je

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} f(x_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \left(\frac{i}{n}\right)^2 = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}.$$

Pri izračunu smo uporabili formulo za vsoto kvadratov prvih n naravnih števil

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

ki jo lahko dokažemo z indukcijo. Natančna vrednost ploščine lika je tako enaka

$$\int_0^1 x^2\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}.$$

(b) Izračunajmo sedaj še ploščino lika pod grafom eksponentne funkcije na intervalu $[1,2]$. Približek za ploščino je enak

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} f(x_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} 2^{1+\frac{i}{n}} = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} (\sqrt[n]{2})^i = \frac{2\sqrt[n]{2}}{n} \left(1 + \sqrt[n]{2} + \cdots + (\sqrt[n]{2})^{n-1}\right), \\ &= \frac{2\sqrt[n]{2}}{n} \cdot \frac{(\sqrt[n]{2})^n - 1}{\sqrt[n]{2} - 1} = \frac{2}{n} \cdot \frac{\sqrt[n]{2}}{\sqrt[n]{2} - 1}. \end{aligned}$$

Tokrat smo uporabili formulo za izračun vsote geometrijskega zaporedja

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}.$$

Pri izračunu limite si bomo pomagali z L'Hospitalovim pravilom in pa s substitucijo $x = \frac{1}{n}$.

$$\int_0^1 2^x\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n}\frac{\sqrt[n]{2}}{\sqrt[n]{2}-1} = 2\lim_{x\to 0}\frac{x2^x}{2^x-1} = 2\lim_{x\to 0}\frac{2^x + x(\ln 2)2^x}{(\ln 2)2^x} = \underline{\underline{\frac{2}{\ln 2}}}.$$

□

(16) Za $s > 0$ izračunaj limito

$$L = \lim_{n\to\infty}\frac{1^s + 2^s + \ldots + n^s}{n^{s+1}}.$$

Rešitev: Poskusimo dano vsoto interpretirati kot Riemannovo vsoto neke funkcije. Če pišemo

$$\frac{1^s + 2^s + \ldots + n^s}{n^{s+1}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^s,$$

vidimo, da gre za Riemannovo vsoto funkcije $f(x) = x^s$ na intervalu $[0,1]$. Torej je

$$L = \lim_{n\to\infty}\frac{1^s + 2^s + \ldots + n^s}{n^{s+1}} = \int_0^1 x^s\,ds = \frac{x^{s+1}}{s+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{s+1}.$$

□

(17) Naj bo $f : [0,1] \to (0,\infty)$ zvezna funkcija. Poenostavi izraz

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{f(\tfrac{1}{n})f(\tfrac{2}{n})\ldots f(\tfrac{n}{n})}.$$

Rešitev: Spet bomo poskusili dano limito izraziti kot limito Riemannovih vsot ustrezne funkcije. Pišemo lahko

$$\ln\left(\sqrt[n]{f(\tfrac{1}{n})f(\tfrac{2}{n})\ldots f(\tfrac{n}{n})}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln(f(\tfrac{i}{n}))$$

Na desni strani imamo Riemannovo vsoto funkcije $g = \ln\circ f$ na intervalu $[0,1]$. Ker je funkcija g zvezna, je integrabilna, zato v limiti dobimo

$$\lim_{n\to\infty}\ln\left(\sqrt[n]{f(\tfrac{1}{n})f(\tfrac{2}{n})\ldots f(\tfrac{n}{n})}\right) = \int_0^1 \ln(f(x))\,dx.$$

Zaradi zveznosti eksponentne funkcije od tod sledi

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{f(\tfrac{1}{n})f(\tfrac{2}{n})\ldots f(\tfrac{n}{n})} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left(\sqrt[n]{f(\frac{1}{n})f(\frac{2}{n})\ldots f(\frac{n}{n})}\right)} = e^{\int_0^1 \ln(f(x))\,dx}.$$

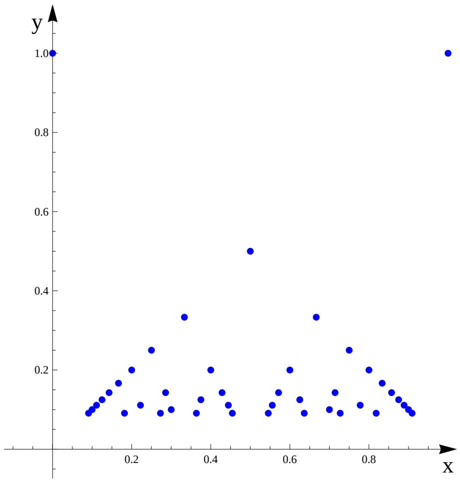
□

(18) Funkcija $f : [0,1] \to [0,1]$ je dana s predpisom

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ;\ x \text{ je iracionalen,} \\ 1 & ;\ x = 0, \\ \frac{1}{n} & ;\ x = \frac{m}{n},\ \text{kjer sta si } m,n\in\mathbb{N} \text{ tuji.} \end{cases}$$

Izračunaj integral $\int_0^1 f(x)\,dx$.

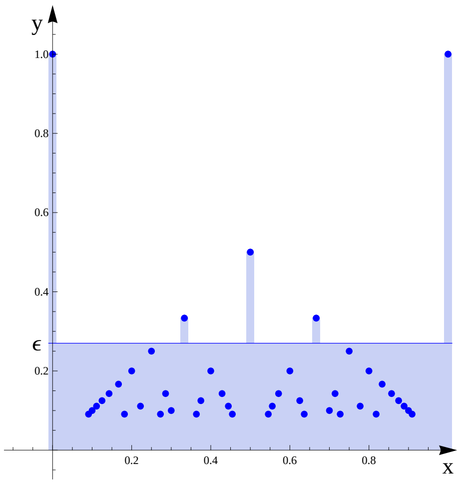
Rešitev: To funkcijo smo že obravnavali v poglavju o zveznosti in pokazali, da je zvezna v iracionalnih številih in nezvezna v racionalnih številih.



Pokazali bomo, da je

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 0.$$

Ker je $f(x) \geq 0$ za vsak $x \in [0,1]$, so vse Riemannove vsote večje ali enake nič. Zato moramo pokazati še, da gredo Riemannove vsote proti nič, ko so delilni intervali čedalje krajši. Vzemimo torej poljuben $\epsilon > 0$ in denimo, da so vsi delilni intervali krajši od δ. Funkcija f potem zavzame vrednost na intervalu $[\epsilon, 1]$ le v končno mnogo točkah, ki jih označimo z $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Ker je $f(x_i) \leq 1$, je prispevek intervala, ki vsebuje točko x_i, k Riemannovi vsoti manjši od δ. Skupni prispevek k vsoti od vseh intervalov, ki vsebujejo te točke, pa je manjši od $k\delta$. V vseh preostalih točkah je vrednost f manjša od ϵ, zato je vsota teh prispevkov manjša od ϵ.



Tako dobimo oceno, da je Riemannova vsota funkcije f navzgor omejena z $\epsilon + k\delta$. Če izberemo delilne intervale ožje od $\delta = \frac{\epsilon}{k}$, bo torej poljubna Riemannova vsota manjša od 2ϵ. Od tod sledi, da je funkcija f integrabilna in da je njen določeni integral enak 0.

Definirajmo sedaj še funkcijo

$$g(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & ;\ x = 0, \\ 1 & ;\ x \in (0,1]. \end{array} \right.$$

Tudi funkcija g je integrabilna in velja $\int_0^1 g(x)\,dx = 1$. Izkaže pa se, da je kompozitum $g \circ f$ funkcija

$$g(f(x)) = \begin{cases} 0 & ;\ x \text{ je iracionalen,} \\ 1 & ;\ x \text{ je racionalen,} \end{cases}$$

ki ni integrabilna. Ta primer nam pokaže, da kompozitum integrabilnih funkcij ni nujno integrabilen. □

(19) Izračunaj integrala:

(a) $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$, $n \in \mathbb{N}$,

(b) $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \cos(nx)\,dx$, $n \in \mathbb{N}$.

Rešitev: (a) Z univerzalno trigonometrično substitucijo lahko integral prevedemo na integral racionalne funkcije, ki pa bi ga težko izračunali za splošen n. Zato bomo raje izpeljali rekurzivno zvezo med števili I_n.

Poskusimo dani integral integrirati po delih z izbiro $u = \sin^{n-1} x$ in $dv = \sin x\,dx$. Potem je $du = (n-1)\sin^{n-2} x \cos x\,dx$, $v = -\cos x$ in

$$\begin{aligned} I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx &= -\cos x \sin^{n-1} x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin^{n-2} x\,dx, \\ &= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 x)\sin^{n-2} x\,dx, \\ &= (n-1)(I_{n-2} - I_n). \end{aligned}$$

Tako smo torej prišli do rekurzivne zveze

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

Da bi dobili vrednosti za poljuben n, moramo najprej izračunati vrednosti I_1 in I_2. Velja:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = -\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1, \\ I_2 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx = \left(\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Od tod dobimo rezultat:

$$\begin{aligned} I_{2n+1} &= \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}, \\ I_{2n} &= \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

<u>Opomba</u>: Pogosto naletimo na integral kvadrata sinusne ali kosinusne funkcije, zato se splača zapomniti rezultat

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 x\,dx = \int_0^{2\pi} \cos^2 x\,dx = \pi.$$

To sledi iz enakosti $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ in pa iz dejstva, da sta integrala obeh funkcij po celi periodi enaka. Podobna formula velja tudi, če integriramo po kakšnem drugem intervalu, kjer sta dana integrala enaka. V našem primeru je bil to interval $[0, \frac{\pi}{2}]$.

(b) Tudi tokrat bomo poskusili izpeljati rekurzivno zvezo med števili I_n. Najprej bomo integrirali po delih z izbiro $u = \cos^n x$, $dv = \cos(nx)\,dx$, kar nam da $v = \frac{\sin(nx)}{n}$ in $du = -n\cos^{n-1} x \sin x\,dx$. Tako dobimo:

$$\begin{aligned} I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \cos(nx)\,dx &= \cos^n x \frac{\sin(nx)}{n}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x \sin x \sin(nx)\,dx, \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x \sin x \sin(nx)\,dx. \end{aligned}$$

Za izračun tega integrala bomo sedaj uporabili formulo $\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right)$ in pa adicijski izrek za kosinusno funkcijo, da dobimo:

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x \sin x \sin(nx)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x \left(\cos(n-1)x - \cos(n+1)x\right)\,dx, \\ &= \frac{1}{2} I_{n-1} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x \cos(n+1)x\,dx, \\ &= \frac{1}{2} I_{n-1} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x \left(\cos(nx)\cos x - \sin(nx)\sin x\right)\,dx, \\ &= \frac{1}{2} I_{n-1} - \frac{1}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \cos(nx)\,dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x \sin x \sin(nx)\,dx\right). \end{aligned}$$

Ker sta oba integrala v oklepaju enaka I_n, tako dobimo rekurzivno zvezo

$$I_n = \frac{1}{2} I_{n-1}.$$

Z upoštevanjem začetne vrednosti $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,dx = \frac{\pi}{4}$ dobimo rezultat

$$I_n = \frac{\pi}{2^{n+1}}.$$

□

(20) (a) Naj bo $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija. Pokaži naslednje enakosti

$$\int_0^{\pi} x f(\sin x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\,dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx.$$

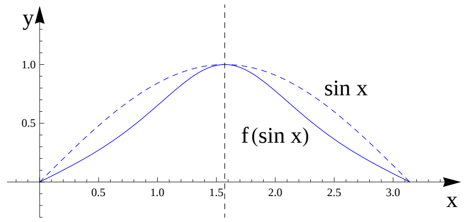
(b) Izračunaj integral

$$\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x}\,dx.$$

Rešitev: (a) Najprej bomo dokazali enakost

$$\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\,dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx.$$

Ta enakost sledi iz dejstva, da je graf sinusne funkcije na intervalu $[0, \pi]$ simetričen glede na os $x = \frac{\pi}{2}$. Posledično je tudi graf funkcije $f(\sin x)$ simetričen glede na to isto os.



Od tod dobimo enakost

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(\sin x)\,dx.$$

Če to kombiniramo z enakostjo

$$\int_0^{\pi} f(\sin x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(\sin x)\,dx,$$

smo dokazali željeno enakost. Dokažimo sedaj še, da velja

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\,dx.$$

Uvedimo v levi integral novo spremenljivko $x = \pi - t$. Potem je $dx = -dt$, pri $x = 0$ je $t = \pi$, pri $x = \pi$ pa $t = 0$. Tako dobimo:

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} xf(\sin x)\,dx &= -\int_{\pi}^{0}(\pi - t)f(\sin(\pi - t))\,dt = \int_0^{\pi}(\pi - t)f(\sin t)\,dt,\\ &= \pi\int_0^{\pi} f(\sin t)\,dt - \int_0^{\pi} tf(\sin t)\,dt.\end{aligned}$$

Če damo drugi integral na desni na levo stran in delimo z dve, dobimo iskano enakost.

(b) Sedaj bi radi izračunali integral

$$\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx.$$

Opazimo lahko, da je ta integral oblike $\int_0^{\pi} xf(\sin x)\,dx$, če izberemo funkcijo $f(t) = \frac{t}{2-t^2}$, ki je zvezna na intervalu $[0,1]$. Torej je

$$\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx = \frac{\pi}{2}\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+t^2}\,dt = \frac{\pi^2}{4}.$$

Pri integraciji smo uvedli novo spremenljivko $t = \cos x$.

Opomba: Pri tej nalogi smo izračunali določeni integral funkcije, katere nedoločeni integral ni elementarna funkcija. Z uporabo raznoraznih trikov lahko tudi pri kakšnih drugih primerih natančno izračunamo določeni integral, čeprav ne znamo izračunati nedoločenega integrala. $\square$

(21) Naj bo $0 < a < b$ in $f : [a, b] \to (0, \infty)$ zvezna funkcija. Definirajmo funkciji F in G s predpisoma:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt,$$
$$G(x) = \int_a^x t f(t)\, dt.$$

Dokaži, da je funkcija $\frac{F}{G}$ definirana in padajoča na intervalu (a, b).

Rešitev: Osnovni izrek analize nam pove, da je za poljubno zvezno funkcijo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ funkcija

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

odvedljiva funkcija na (a, b) in da na tem intervalu velja $F'(x) = f(x)$. To nam zagotavlja, da ima vsaka zvezna funkcija primitivno funkcijo. Če hočemo to primitivno funkcijo natančno izračunati, lahko naletimo na problem, saj določene integrale pogosto računamo prav z uporabo primitivnih funkcij. Lahko pa na ta način vedno vsaj približno izračunamo primitivno funkcijo dane funkcije.

Najprej bomo pokazali, da je funkcija $\frac{F}{G}$ dobro definirana. To sledi iz dejstva, da je za vsak $t \in [a, b]$ izraz $tf(t) > 0$ pozitiven. Posledično torej za vsak $x \in (a, b)$ velja

$$G(x) = \int_a^x t f(t)\, dt > 0,$$

od koder sledi, da je $\frac{F}{G}$ dobro definirana na (a, b).

Ker sta funkciji F in G odvedljivi, je tudi funkcija $\frac{F}{G}$ odvedljiva. Da dokažemo, da je padajoča, je torej dovolj pokazati, da je njen odvod negativen. Velja:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{F}{G}\right)'(x) &= \frac{F'(x)G(x) - F(x)G'(x)}{G(x)^2}, \\
&= \frac{f(x) \int_a^x t f(t)\, dt - x f(x) \int_a^x f(t)\, dt}{G(x)^2}, \\
&= \frac{f(x) \int_a^x (t - x) f(t)\, dt}{G(x)^2}.
\end{aligned}$$

Ker je $(t-x)f(t) < 0$ za vsak $t \in (a, x)$ in $f(x) > 0$ za vsak $x \in (a, b)$, je $\int_a^x (t-x) f(t)\, dt < 0$ in $f(x) \int_a^x (t-x) f(t)\, dt < 0$ za vsak $x \in (a, b)$. Od tod sledi, da je $\frac{F}{G}$ padajoča funkcija. $\square$

(22) Za vsakega od spodnjih integralov ugotovi, ali obstaja. Če obstaja, ga izračunaj.

(a) $\displaystyle\int_0^1 \ln x\, dx,$

(b) $\displaystyle\int_0^a \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\, dx, \quad a > 0,$

(c) $\displaystyle\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{|x - 1|}}\, dx.$

Rešitev: Določeni integral je v osnovni verziji definiran za zvezne funkcije na končnem zaprtem intervalu. Njegovim posplošitvam na funkcije, ki imajo pole, ali pa na neomejena območja, rečemo posplošeni integrali.

Če želimo izračunati takšen integral, integracijsko območje najprej razkosamo na intervale, tako da bomo na vsakem intervalu imeli singularnost v največ enem krajišču ali pa da bo interval neomejen le v eno smer.

Naj bo f zvezna funkcija na intervalu $(a, b]$, ki je neomejena v okolici točke a. V takšnih primerih lahko definiramo posplošeni integral

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t \downarrow a} \int_t^b f(x)\,dx,$$

če limita na desni obstaja. Geometrično to pomeni, da lahko ploščino lika, ki je sicer neomejen, poljubno dobro aproksimiramo s ploščinami omejenih likov.

Če je f zvezna funkcija na intervalu $[a, \infty)$, definiramo posplošeni integral s predpisom

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x)\,dx,$$

če ta limita obstaja. Analogno definiramo tudi ostale variante posplošenih integralov.

(a) $\int_0^1 \ln x\,dx$:

Vemo že, da je $\int \ln x\,dx = x\ln x - x + C$. Ker je logaritemska funkcija neomejena v okolici točke $x = 0$, nas zanima integral

$$\int_t^1 \ln x\,dx = (x\ln x - x)\Big|_t^1 = -1 - (t\ln t - t) = -1 + t - t\ln t.$$

V limiti tako dobimo:

$$\int_0^1 \ln x\,dx = \lim_{t\downarrow 0} \int_t^1 \ln x\,dx = \lim_{t\downarrow 0}(-1 + t - t\ln t) = -1.$$

(b) $\int_0^a \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx$:

Funkcija, ki jo integriramo, je neomejena v okolici desnega krajišča. Za izračun integrala se najprej spomnimo, da velja

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx = \arcsin\frac{x}{a} + C.$$

Od tod dobimo:

$$\begin{aligned}
\int_0^a \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx &= \lim_{t\uparrow a} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx = \lim_{t\uparrow a} \left(\arcsin\frac{x}{a}\right)\Big|_0^t, \\
&= \lim_{t\uparrow a} \left(\arcsin(\tfrac{t}{a}) - \arcsin 0\right), \\
&= \underline{\underline{\frac{\pi}{2}}}.
\end{aligned}$$

(c) $\displaystyle\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{|x-1|}}\,dx$:

Sedaj integriramo funkcijo, ki ima pol v točki $x = 1$, ki leži v notranjosti integracijskega intervala. V takem primeru je po definiciji

$$\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{|x-1|}}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{|x-1|}}\,dx + \int_1^3 \frac{1}{\sqrt{|x-1|}}\,dx,$$

če oba integrala na desni obstajata. Prvi integral je enak

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{|x-1|}}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx = \lim_{t\uparrow 1}\int_0^t \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx = \lim_{t\uparrow 1}(-2\sqrt{1-x}\Big|_0^t) = 2.$$

Podobno dobimo

$$\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{|x-1|}}\,dx = \int_1^3 \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,dx = \lim_{t\downarrow 1}\int_t^3 \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,dx = \lim_{t\downarrow 1}(2\sqrt{x-1}\Big|_t^3) = 2\sqrt{2}.$$

Ker oba integrala konvergirata, konvergira tudi prvotni integral in je enak

$$\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{|x-1|}}\,dx = 2 + 2\sqrt{2}.$$

□

(23) Za vsakega od spodnjih integralov ugotovi, ali obstaja. Če obstaja, ga izračunaj.

(a) $\displaystyle\int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx,\ n \in \mathbb{N},$

(b) $\displaystyle\int_e^\infty \frac{1}{x\ln^\alpha x}\,dx,\ \alpha > 0,$

(c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{9x}{x^3-3x+2}\,dx.$

Rešitev:

(a) $\displaystyle\int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx$:

Označimo

$$I_n = \int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx.$$

Z uporabo integracije po delih lahko izpeljemo rekurzivno zvezo

$$I_n = \int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx = -x^n e^{-x}\Big|_0^\infty + n\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}\,dx = nI_{n-1}.$$

Za izračun I_n moramo izračunati še začetno vrednost

$$I_1 = \int_0^\infty xe^{-x}\,dx = -xe^{-x}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-x}\,dx = -e^{-x}\Big|_0^\infty = 1.$$

Rekurzivna zveza in začetna vrednost nam skupaj povesta, da je

$$\int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx = n!.$$

(b) $\displaystyle\int_e^\infty \frac{1}{x\ln^\alpha x}\,dx$:

Uvedimo novo spremenljivko $u = \ln x$. Potem je $du = \frac{1}{x}\,dx$, pri $x = e$ je $u = 1$, pri $x \to \infty$ pa velja $u \to \infty$. Tako dobimo

$$\int_e^\infty \frac{1}{x\ln^\alpha x}\,dx = \int_1^\infty \frac{1}{u^\alpha}\,du.$$

Vemo že, da ta integral konvergira natanko takrat, ko je $\alpha > 1$ in velja

$$\int_e^\infty \frac{1}{x\ln^\alpha x}\,dx = \frac{1}{\alpha - 1}.$$

(c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{9x}{x^3 - 3x + 2}\,dx$:

S pomočjo nastavka ali pa razcepa na parcialne ulomke lahko izračunamo nedoločeni integral dane racionalne funkcije

$$\int \frac{9x}{x^3 - 3x + 2}\,dx = 2\ln|x-1| - 2\ln|x+2| - \frac{3}{x-1} + C.$$

Obravnavati moramo konvergenco integrala $\int_0^\infty \frac{9x}{x^3-3x+2}\,dx$ v okolici pola $x = 1$ in pa v neskončnosti. Poglejmo najprej torej integral:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{9x}{x^3 - 3x + 2}\,dx &= \lim_{t\uparrow 1}\int_0^t \frac{9x}{x^3 - 3x + 2}\,dx = \lim_{t\uparrow 1}\left(2\ln|x-1| - 2\ln|x+2| - \frac{3}{x-1}\right)\Big|_0^t,\\ &= \lim_{t\uparrow 1}\left(2\ln|t-1| - 2\ln|t+2| - \frac{3}{t-1} - (-2\ln 2 + 3)\right).\end{aligned}$$

Ta limita ne obstaja, kar pomeni, da integral $\int_0^\infty \frac{9x}{x^3-3x+2}\,dx$ ne konvergira. □

(24) Za vsakega od spodnjih integralov ugotovi, ali konvergira:

(a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx,$

(b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x}\,dx,$

(c) $\displaystyle\int_{-1}^\infty \frac{x\operatorname{arc\,tg} x}{\sqrt[3]{1+x^7}}\,dx,$

(d) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln x}{3+2x^2}\,dx.$

Rešitev: Posplošenih integralov ne znamo vedno natančno izračunati, zato je dobro vedeti, ali dani integral sploh konvergira. Pri tem si lahko pomagamo z naslednjimi kriteriji:

(1) Naj bo g zvezna funkcija na (a, b) z limito $L = \lim_{x \to a} g(x)$. Potem velja:

- $\displaystyle\int_a^b \frac{g(x)}{(x-a)^s}\,dx$ konvergira, če je $s < 1$.
- $\displaystyle\int_a^b \frac{g(x)}{(x-a)^s}\,dx$ divergira, če je $s \geq 1$ in $L \neq 0$.

(2) Naj bo g zvezna funkcija na (a, ∞) z limito $L = \lim_{x \to \infty} g(x)$. Potem velja:

- $\displaystyle\int_a^\infty \frac{g(x)}{x^s}\,dx$ konvergira, če je $s > 1$.
- $\displaystyle\int_a^\infty \frac{g(x)}{x^s}\,dx$ divergira, če je $s \leq 1$ in $L \neq 0$.

Pri določanju konvergence izlimitiranih integralov tako ponavadi najprej uganemo, katera izmed zgornjih možnosti nastopi, nato pa poskušamo integrand zapisati v ustrezni obliki.

(a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx$:

Pri tem integralu moramo obravnavati konvergenco v okolici točke $x = 1$ in pri $x \to \infty$.

$\underline{x \to 1}$: Pišimo

$$\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{x\sqrt{(x-1)(x+1)}} = \frac{\frac{1}{x\sqrt{x+1}}}{(x-1)^{\frac{1}{2}}}.$$

Funkcija $g(x) = \frac{1}{x\sqrt{x+1}}$ je zvezna na intervalu $[1, \infty)$. Ker je $s = \frac{1}{2} < 1$, integral konvergira v okolici točke $x = 1$.

$\underline{x \to \infty}$: Pišimo

$$\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} = \frac{\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{x^2}.$$

Funkcija $g(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ je zvezna na intervalu $(1, \infty)$ in ima limito $L = 1$. Ker je $s = 2 > 1$, integral konvergira pri $x \to \infty$.

Iz konvergence obeh integralov sledi, da integral $\int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx$ konvergira. Z nekaj truda bi lahko pokazali, da velja

$$\int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

(b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x}\,dx$:

Na prvi pogled se zdi, da bomo morali tudi tokrat obravnavati dva primera. Iz limite

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x^2}}{1} = 1$$

pa sledi, da točka $x = 0$ ni problematična. Torej moramo obravnavati samo konvergenco integrala v neskončnosti. Če pišemo $g(x) = \operatorname{arc\,tg} x$, je g zvezna na intervalu $(0,\infty)$ in velja $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \frac{\pi}{2}$. Ker je $s = 1$, integral $\int_0^\infty \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x}\,dx$ divergira.

(c) $\displaystyle\int_{-1}^\infty \frac{x\operatorname{arc\,tg} x}{\sqrt[3]{1+x^7}}\,dx$:

Tokrat moramo obravnavati konvergenco integrala pri $x \to -1$ in $x \to \infty$.

$\underline{x \to -1}$: Pišimo

$$\frac{x\operatorname{arc\,tg} x}{\sqrt[3]{1+x^7}} = \frac{x\operatorname{arc\,tg} x}{\sqrt[3]{(x+1)(1-x+x^2-x^3+x^4-x^5+x^6)}} = \frac{\frac{x\operatorname{arc\,tg} x}{\sqrt[3]{1-x+x^2-x^3+x^4-x^5+x^6}}}{\sqrt[3]{x+1}}.$$

Ker je funkcija $g(x) = \frac{x\operatorname{arc\,tg} x}{\sqrt[3]{1-x+x^2-x^3+x^4-x^5+x^6}}$ zvezna na intervalu $[-1,\infty)$ in je $s = \frac{1}{3} < 1$, integral konvergira v okolici točke $x = -1$.

$\underline{x \to \infty}$: Tokrat naj bo

$$\frac{x\operatorname{arc\,tg} x}{\sqrt[3]{1+x^7}} = \frac{\frac{x^{\frac{7}{3}}\operatorname{arc\,tg} x}{\sqrt[3]{1+x^7}}}{x^{\frac{4}{3}}}.$$

Funkcija $g(x) = \frac{x^{\frac{7}{3}}\operatorname{arc\,tg} x}{\sqrt[3]{1+x^7}}$ je zvezna na intervalu $(-1,\infty)$ in ima limito $L = \frac{\pi}{2}$. Ker je $s = \frac{4}{3} > 1$, integral konvergira tudi pri $x \to \infty$. Od tod sledi, da integral $\int_{-1}^\infty \frac{x\operatorname{arc\,tg} x}{\sqrt[3]{1+x^7}}\,dx$ konvergira.

(d) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln x}{3+2x^2}\,dx$:

Sedaj imamo funkcijo z logaritemskim polom pri $x = 0$, ki jo integriramo po neomejenem območju.

$\underline{x \to 0}$: Logaritemski pol je v smislu konvergence šibkejši od kateregakoli potenčnega pola, zato posplošeni integral v okolici logaritemskega pola vedno konvergira. Formalno lahko to dokažemo tako, da pišemo

$$\frac{\ln x}{3+2x^2} = \frac{\frac{x^{\frac{1}{2}}\ln x}{3+2x^2}}{x^{\frac{1}{2}}}.$$

Funkcija $g(x) = \frac{x^{\frac{1}{2}}\ln x}{3+2x^2}$ sicer ni definirana v točki $x = 0$, lahko pa jo zvezno razširimo čez to točko, saj je $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$. To lahko dokažemo z nekajkratno uporabo L'Hospitalovega pravila. Ker je $s = \frac{1}{2} < 1$, integral torej konvergira v okolici točke $x = 0$. Opomnimo še, da bi namesto $s = \frac{1}{2}$ lahko izbrali katerikoli $s \in (0, 1)$.

$\underline{x \to \infty}$: Če analiziramo obnašanje funkcije v neskončnosti, lahko ugotovimo, da gre funkcija proti nič približno tako hitro kot funkcija $\frac{1}{x^2}$. Člen $\ln x$ v števcu sicer malce upočasni konvergenco, vendar pa je konvergenca še vedno hitrejša kot poljubna potenca $\frac{1}{x^s}$, kjer je $s < 2$. Od tod sklepamo, da integral konvergira tudi v neskončnosti. Da bi to dokazali, pišimo

$$\frac{\ln x}{3 + 2x^2} = \frac{\frac{x^{\frac{3}{2}} \ln x}{3+2x^2}}{x^{\frac{3}{2}}}.$$

Funkcija $g(x) = \frac{x^{\frac{3}{2}} \ln x}{3+2x^2}$ je zvezna na intervalu $(0, \infty)$ in ima limito $L = 0$. Ker je $s = \frac{3}{2} > 1$, integral konvergira pri $x \to \infty$. Od tod sledi, da integral $\int_0^\infty \frac{\ln x}{3+2x^2}\, dx$ konvergira. Izkaže se, da je njegova vrednost enaka

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{3 + 2x^2}\, dx = \frac{\pi \ln \frac{3}{2}}{4\sqrt{6}}.$$

$\square$

(25) Za vsakega od spodnjih integralov ugotovi, ali konvergira:

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}}\, dx, \quad k \in [0, 1],$

(b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^a + x^b}\, dx, \quad 0 < a < b,$

(c) $\displaystyle\int_{\sqrt{a}}^\infty \frac{1}{(x^2 - a)^{2a}}\, dx, \quad a > 0.$

Rešitev:

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}}\, dx, \quad k \in [0, 1]$:

Ločili bomo več primerov v odvisnosti od vrednosti parametra k. Če je $k = 0$, imamo integral

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx = \arcsin x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}.$$

Če je $k \in (0, 1)$, ima funkcija na intervalu $[0, 1]$ en sam pol pri $x = 1$. Iz razcepa

$$\frac{1}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}} = \frac{1}{\sqrt{(1 - x)(1 + x)(1 - k^2 x^2)}}$$

lahko sklepamo, da je pol stopnje $s = \frac{1}{2} < 1$, od koder sledi, da integral konvergira. Ta integral imenujemo eliptični integral prve vrste.

V primeru, ko je $k = 1$, imamo integral

$$\int_0^1 \frac{1}{1 - x^2}\, dx,$$

ki pa divergira, saj ima funkcija sedaj v točki $x = 1$ pol stopnje $s = 1$.

(b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^a + x^b}\,dx, \quad 0 < a < b:$

Sedaj moramo obravnavati konvergenco integrala v okolici točke $x = 0$ in pri $x \to \infty$.

$\underline{x \to 0}$: Iz enakosti

$$\frac{1}{x^a + x^b} = \frac{1}{x^a(1 + x^{b-a})}$$

sledi, da ima funkcija pol stopnje $s = a$ v točki $x = 0$. Če hočemo, da integral konvergira, mora torej veljati $a < 1$.

$\underline{x \to \infty}$: Sedaj velja

$$\frac{1}{x^a + x^b} = \frac{1}{x^b(1 + x^{a-b})},$$

od koder sledi, da funkcija pada proti nič približno tako hitro kot potenca $\frac{1}{x^b}$. Integral bo torej konvergiral, če bo $b > 1$.

Če upoštevamo oba rezultata, pridemo do sklepa, da integral $\int_0^\infty \frac{1}{x^a+x^b}\,dx$ konvergira natanko takrat, ko je $a < 1 < b$.

(c) $\displaystyle\int_{\sqrt{a}}^\infty \frac{1}{(x^2 - a)^{2a}}\,dx, \quad a > 0:$

Obravnavati moramo konvergenco integrala v okolici točke $x = \sqrt{a}$ in pri $x \to \infty$.

$\underline{x \to \sqrt{a}}$: Iz razcepa

$$\frac{1}{(x^2 - a)^{2a}} = \frac{1}{(x - \sqrt{a})^{2a}(x + \sqrt{a})^{2a}}$$

sledi, da ima funkcija pol stopnje $s = 2a$ v točki $x = \sqrt{a}$. Integral bo konvergiral v okolici pola, če bo $a < \frac{1}{2}$.

$\underline{x \to \infty}$: V neskončnosti pada funkcija $\frac{1}{(x^2-a)^{2a}}$ proti nič približno tako hitro kot funkcija $\frac{1}{x^{4a}}$. Če hočemo, da integral konvergira, mora torej biti $a > \frac{1}{4}$.

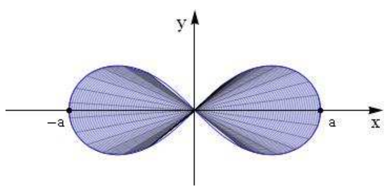
Oboje skupaj nam pove, da integral konvergira natanko takrat, ko je $a \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$. $\square$

(26) Izračunaj ploščino:

(a) lemniskate, ki je dana v polarnih koordinatah s predpisom $r(\phi) = a\sqrt{\cos(2\phi)}$ za nek $a > 0$,

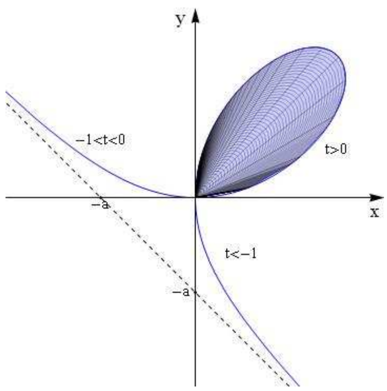
(b) zanke Descartovega lista, ki je podan v parametrični obliki s predpisom $x(t) = \frac{3at}{1+t^3}$, $y(t) = \frac{3at^2}{1+t^3}$ za nek $a > 0$.

Rešitev: (a) Poglejmo najprej skico lemniskate.



Ploščino lika, ki je omejen s krivuljo podano v polarnih koordinatah, izračunamo po formuli
$$S = \frac{1}{2}\int_{\phi_1}^{\phi_2} r^2\, d\phi.$$
Lemniskata pride v koordinatno izhodišče pod kotoma $\pm\frac{\pi}{4}$. Na desni strani je $\phi \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$, zato je
$$S = 2\cdot\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} r^2\, d\phi = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} a^2\cos(2\phi)\, d\phi = \frac{a^2}{2}\sin(2\phi)\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \underline{\underline{a^2}}.$$

(b) Če imamo krivuljo podano v parametrični obliki s predpisom $\vec{r} : [t_1, t_2] \to \mathbb{R}^2$, potem družina zveznic med krivuljo in pa koordinatnim izhodiščem opiše lik, katerega ploščina je enaka
$$S = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} (x\dot{y} - \dot{x}y)\, dt.$$
Pri tem je treba biti pozoren na predznak. Če se po krivulji premikamo v 'pozitivni' smeri glede na izhodišče, dobimo običajno ploščino, pri premikanju v 'negativni' smeri pa negativno predznačeno ploščino. Če se del poti premikamo v pozitivni smeri del poti pa v negativni smeri, je treba obravnavati vsak kos posebej. Če je krivulja sklenjena (to je $\vec{r}(t_1) = \vec{r}(t_2)$), pa lahko uporabimo katerokoli izmed formul
$$S = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} (x\dot{y} - \dot{x}y)\, dt = \int_{t_1}^{t_2} x\dot{y}\, dt = -\int_{t_1}^{t_2} \dot{x}y\, dt.$$
Zanka Descartovega lista ustreza parametrom $t \in [0, \infty)$.



Izračunajmo najprej oba odvoda:
$$\dot{x} = \frac{3a(1+t^3) - 9at^3}{(1+t^3)^2} = \frac{3a(1-2t^3)}{(1+t^3)^2},$$
$$\dot{y} = \frac{6at(1+t^3) - 9at^4}{(1+t^3)^2} = \frac{3at(2-t^3)}{(1+t^3)^2}.$$
Od tod dobimo
$$x\dot{y} - \dot{x}y = \frac{9a^2t^2(2-t^3) - 9a^2t^2(1-2t^3)}{(1+t^3)^3} = \frac{9a^2t^2(1+t^3)}{(1+t^3)^3} = \frac{9a^2t^2}{(1+t^3)^2}.$$

Ploščina zanke je torej enaka

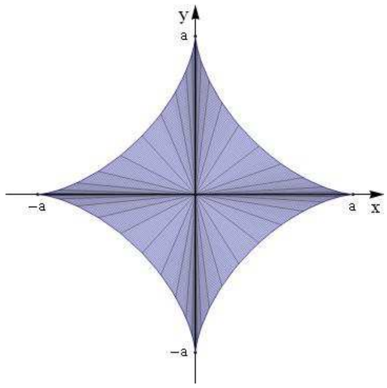
$$S = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{9a^2t^2}{(1+t^3)^2}\,dt = \frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{3a^2}{u^2}\,du = -\frac{3a^2}{2u}\Big|_1^\infty = \underline{\underline{\frac{3a^2}{2}}}.$$

Pri integriranju smo uvedli novo spremenljivko $u = 1 + t^3$. □

(27) Izračunaj:

(a) obseg astroide, ki je podana z enačbo $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ za nek $a > 0$,
(b) obseg kardioide, ki je podana v polarnih koordinatah s predpisom $r(\phi) = a(1+\cos\phi)$ za nek $a > 0$,
(c) dolžino grafa funkcije $f(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{\ln x}{2}$ nad intervalom $[1, e]$.

Rešitev: (a) Poglejmo najprej skico astroide.



Obseg astroide bomo izračunali z uporabo formule za dolžino krivulje v parametrični obliki

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,dt.$$

Astroido lahko zapišemo v parametrični obliki:

$$x(t) = a\cos^3 t,$$
$$y(t) = a\sin^3 t,$$

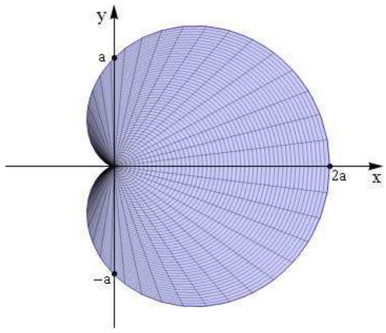
za parametre $t \in [0, 2\pi]$. Odvoda koordinat x in y sta:

$$\dot{x} = -3a\cos^2 t\sin t,$$
$$\dot{y} = 3a\sin^2 t\cos t.$$

Tako dobimo:

$$\begin{aligned}
o &= \int_0^{2\pi} \sqrt{9a^2\cos^4 t\sin^2 t + 9a^2\sin^4 t\cos^2 t}\,dt,\\
&= 3a\int_0^{2\pi} \sqrt{\cos^2 t\sin^2 t}\,dt = 12a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\sin t\,dt,\\
&= 6a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t\,dt = -3a\cos 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}},\\
&= \underline{\underline{6a}}.
\end{aligned}$$

(b) Poglejmo sedaj skico kardioide.



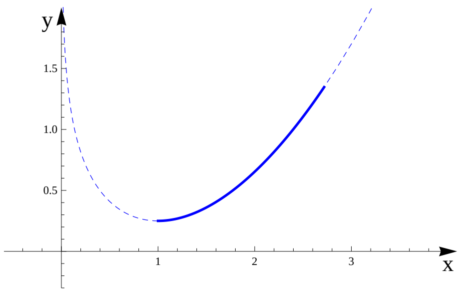
Obseg kardioide lahko izračunamo z uporabo formule za dolžino krivulje, ki je podana v polarnih koordinatah

$$l = \int_{\phi_1}^{\phi_2} \sqrt{r^2 + r'^2}\, d\phi.$$

V našem primeru je:

$$\begin{aligned} o &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1 + 2\cos\phi + \cos^2\phi) + a^2 \sin^2\phi}\, d\phi, \\ &= a \int_0^{2\pi} \sqrt{2 + 2\cos\phi}\, d\phi = a \int_0^{2\pi} \sqrt{4\cos^2\tfrac{\phi}{2}}\, d\phi = 2a \int_0^{\pi} \sqrt{4\cos^2\tfrac{\phi}{2}}\, d\phi = 4a \int_0^{\pi} \cos\tfrac{\phi}{2}\, d\phi, \\ &= 8a \sin\tfrac{\phi}{2}\Big|_0^{\pi} = \underline{\underline{8a}}. \end{aligned}$$

(c) Pri tem primeru bomo spoznali, kako se izračuna dolžino grafa funkcije. Izračunali bomo dolžino loka na spodnji sliki.



Dolžina grafa funkcije f na intervalu $[a, b]$ je enaka

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx.$$

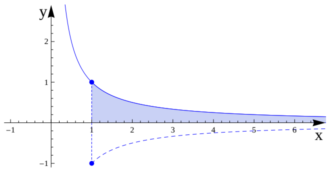
Odvod funkcije f je enak $f'(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{2x}$, zato je:

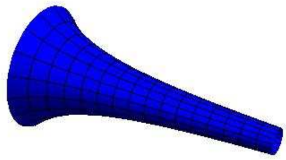
$$\begin{aligned} l &= \int_1^e \sqrt{1 + \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4x^2}}\, dx = \frac{1}{2}\int_1^e \sqrt{x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}}\, dx = \frac{1}{2}\int_1^e \left(x + \frac{1}{x}\right) dx \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} + \ln x\right)\Big|_1^e = \underline{\underline{\frac{1}{4}(e^2 + 1)}}. \end{aligned}$$

□

(28) Graf funkcije $f(x) = \frac{1}{x}$ nad intervalom $[1, \infty)$ zavrtimo okoli abscisne osi. Izračunaj prostornino in površino tako dobljene vrtenine.

Rešitev: Telo, ki ga študiramo pri tej nalogi, imenujemo Torricellijeva trobenta ali pa Gabrielov rog. Zanimivo je zato, ker ima končno prostornino in neskončno površino.





Prostornina vrtenine, ki jo dobimo, če zavrtimo graf funkcije f okoli osi x na intervalu $[a, b]$, je enaka

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 \, dx.$$

Prostornina Torricellijeve trobente je tako enaka

$$V = \pi \int_1^\infty \frac{1}{x^2} \, dx = -\pi \frac{1}{x} \Big|_1^\infty = \underline{\underline{\pi}}.$$

Površina vrtenine, ki jo dobimo, če zavrtimo graf funkcije f okoli osi x na intervalu $[a, b]$, pa je enaka

$$P = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} \, dx.$$

Ker je $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, moramo torej pokazati, da integral

$$\int_1^\infty \frac{1}{x} \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} \, dx$$

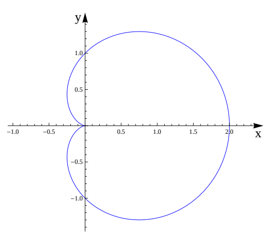
divergira. To lahko naredimo s preprosto oceno

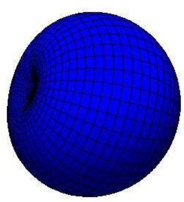
$$\int_1^\infty \frac{1}{x} \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} \, dx > \int_1^\infty \frac{dx}{x} = \infty.$$

Ker integral na desni divergira, divergira tudi integral na levi. □

(29) Izračunaj površino vrtenine, ki jo dobimo, če kardioido $r(\phi) = 1 + \cos \phi$ zavrtimo okoli abscisne osi.

Rešitev: Pri vrtenju kardioide okoli abscisne osi dobimo naslednjo vrtenino.





Površina vrtenine, ki jo dobimo, če okoli abscisne osi zavrtimo krivuljo, ki je podana v polarnih koordinatah $r = r(\phi)$ na intervalu $\phi \in [\phi_1, \phi_2]$, je enaka

$$P = 2\pi \int_{\phi_1}^{\phi_2} r \sin\phi \sqrt{r^2 + r'^2}\, d\phi.$$

V našem primeru je

$$\sqrt{r^2 + r'^2} = \sqrt{(1+\cos\phi)^2 + \sin^2\phi} = \sqrt{2(1+\cos\phi)},$$

zato je

$$P = 2\pi \int_0^{\pi} \sin\phi(1+\cos\phi)\sqrt{2(1+\cos\phi)}\, d\phi = 2\sqrt{2}\pi \int_0^{\pi} \sin\phi(1+\cos\phi)^{\frac{3}{2}}\, d\phi.$$

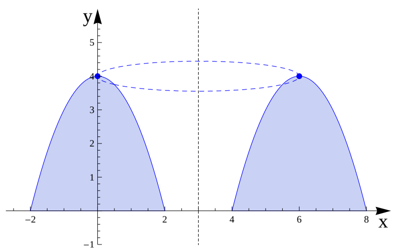
Uvedimo novo spremenljivko $t = 1 + \cos\phi$. Potem je $dt = -\sin\phi\, d\phi$, pri $\phi = 0$ je $t = 2$, pri $\phi = \pi$ pa $t = 0$. Površina vrtenine je tako enaka

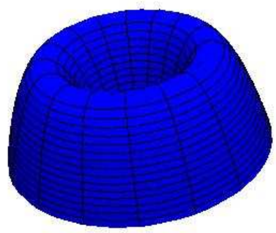
$$P = 2\sqrt{2}\pi \int_0^{\pi} \sin\phi(1+\cos\phi)^{\frac{3}{2}}\, d\phi = 2\sqrt{2}\pi \int_0^{2} t^{\frac{3}{2}}\, dt = \frac{4\sqrt{2}\pi}{5} t^{\frac{5}{2}}\Big|_0^2 = \frac{32\pi}{5}.$$

□

(30) Lik L omejujeta parabola $y = 4 - x^2$ in abscisna os. Izračunaj prostornino telesa, ki ga dobimo z vrtenjem lika L okrog osi $x = 3$.

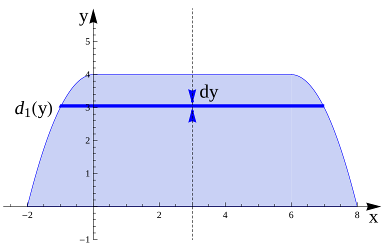
Rešitev: Sedaj računamo prostornino naslednje vrtenine, ki po obliki spominja na kolač.





To vrtenino lahko dobimo tako, da iz vrtenine, ki jo določa levi lok parabole, izrežemo vrtenino, ki jo določa desni lok parabole.

Volumen večje vrtenine bomo izračunali tako, da jo bomo najprej razdelili na vodoravne rezine v obliki kroga. Na višini y bomo dobili krog s polmerom $d_1(y) = 3 + \sqrt{4 - y}$.



Volumen takšne rezine je enak $dV = \pi d_1(y)^2\, dy$. Ko pošljemo višine rezin proti nič in seštejemo volumne, dobimo

$$V_1 = \pi \int_0^4 d_1(y)^2\, dy = \pi \int_0^4 (9 + 6\sqrt{4-y} + 4 - y)\, dy.$$

Podobno lahko izpeljemo formulo za prostornino dela, ki ga moramo izrezati. Sedaj imajo rezine polmer $d_2(y) = 3 - \sqrt{4-y}$, volumen tega dela pa je enak

$$V_2 = \pi \int_0^4 d_2(y)^2\, dy = \pi \int_0^4 (9 - 6\sqrt{4-y} + 4 - y)\, dy.$$

Volumen našega telesa je enak

$$V = V_1 - V_2 = \pi \int_0^4 12\sqrt{4-y}\, dy = -12\pi \frac{(4-y)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Big|_0^4 = \underline{\underline{64\pi}}.$$

Opomba 1: Kadar poznamo ploščino in pa geometrijsko središče lika, ki ga vrtimo, lahko izračunamo volumen vrtenine tudi s pomočjo Guldinovega pravila.

Guldinovo pravilo: Prostornina vrtenine je enaka produktu ploščine lika S in dolžine poti, ki jo pri enem vrtljaju opiše središče lika. To pomeni, da je

$$V = 2\pi\, S\, d,$$

kjer je d razdalja središča lika od osi vrtenja.

V našem primeru je ploščina prereza enaka $S = \int_{-2}^{2}(4 - x^2)\, dx = \frac{32}{3}$, središče lika pa je na razdalji $d = 3$ od osi vrtenja. Volumen je torej enak

$$V = 2\pi \cdot \frac{32}{3} \cdot 3 = 64\pi.$$

Opomba 2: Koordinati geometrijskega središča lika, ki je od zgoraj omejen z grafom funkcije f od spodaj pa z grafom funkcije g, na intervalu $[a, b]$, lahko izračunamo s pomočjo formul

$$x_* = \frac{\int_a^b x(f(x) - g(x))\, dx}{S},$$
$$y_* = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b \left(f(x)^2 - g(x)^2\right)\, dx}{S},$$

kjer je S ploščina lika. $\square$