Rešitve nalog: Lastne vrednosti

1 Lastne vrednosti in lastni vektorji

1.1. Lastne vrednosti so 3, 2 in 1. Pripadajoči lastni vektorji so zaporedoma npr. $(0,-1,1)$, $(-2,1,0)$ in $(-1,0,1)$.

1.2. Edina lastna vrednost je 0 in pripadajoči lastni podprostor je $\mathrm{Lin}\{\vec{a}\}$.

1.3. Rotacija za kot $\frac{\pi}{2}$ v pozitivni smeri okoli premice s smernim vektorjem $(1,1,0)$.

1.4. Lastne vrednosti so 0, 2 in n z zaporednimi algebraičnimi večkratnostmi $n-2$, 1 in 1. Baze lastnih podprostorov so zaporedoma npr. $\{e_1+e_2-2e_3,\ldots,e_1+e_2-2e_n\}$, $\{e_1-e_2\}$ in $\left\{\sum_{j=1}^n e_j\right\}$.

1.5. $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ -6 & -7 & 0 \\ -1 & -7 & 1 \end{bmatrix}$. Lastne vrednosti so -3, -1 in 1 z zaporednimi lastnimi vektorji npr. $(-8,12,19)$, $(-1,1,3)$ in $(0,0,1)$.

1.6.

1.7. (a) Lastna vrednost je λ^k.

(b) i. Vse lastne vrsdnosti so enake 0.

ii. Vse lastne vrsdnosti so enake bodisi 0 bodisi 1.

2 Diagonalizacija

2.1. $A^{2010}(x,y,z,u) = (2^{1004}(x+y), 2^{1004}(x+y), 2^{1005}z, u)$

2.2. $A^{2009} = \begin{bmatrix} -6 & 0 & 2 \\ 2^{2009}-15 & 2^{2009} & 5-2^{2009} \\ -21 & 0 & 7 \end{bmatrix}$

2.3. $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

2.4. A se ne da diagonalizirati. Podobna je katerikoli matriki $\begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, kjer $a, c \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ in $b \in \mathbb{R}$.

2.5.

2.6. Prehodna matrika je npr. $\begin{bmatrix} P & P \\ -P & P \end{bmatrix}$, diagonalna matrika pa $\begin{bmatrix} 2D & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

3 Minimalni polinom

3.1. (a) $\Delta_A(\lambda) = (-1)^n \lambda^{n-1}(\lambda - n)$, $m_A(\lambda) = \lambda(\lambda - n)$

(b) $\Delta_A(\lambda) = (-1)^n \lambda^{n-1}(\lambda - \operatorname{tr} A)$, $m_A(\lambda) = \lambda(\lambda - \operatorname{tr} A)$

3.2. $\Delta_A(\lambda) = (\lambda + 1)^4$. Če $a \neq 0$, je $m_A(\lambda) = (\lambda + 1)^4$. Če $a = 0$, je $m_A(\lambda) = (\lambda + 1)^3$.

3.3. (a) $\Delta_A(\lambda) = \lambda^2 (\lambda + 1) (\lambda - 1)$

(b) $m_{A,v}(\lambda) = \lambda^2 (\lambda + 1)$

(c) $m_A(\lambda) = \lambda^2 (\lambda + 1) (\lambda - 1)$

3.4.

3.5. $\Delta_A(x) = (-1)^n p(x)$