Rešitve nalog: Matrike

1 Matrika linearne preslikave

1.1. $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$,
$\mathcal{A}(1,2) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$

1.2. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & -\vec{a}\cdot\vec{b} \\ \|\vec{a}\|^2 & \vec{a}\cdot\vec{b} & \|\vec{a}\|^2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

1.3. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -2 & 0 \\ 6 & 1 & -3 \end{bmatrix}$

2 Vektorski prostor $\mathbb{F}^{m\times n}$

2.1. Baza je npr. $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$.

2.2. Razsežnost je $\frac{n(n+1)}{2}$.

3 Množenje matrik

3.1. (a) $\begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & n & \binom{n}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

3.2. $\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

3.3. $X = \begin{bmatrix} -\frac{5}{2} & \frac{49}{4} \\ -1 & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$

3.4. Množica rotacij okoli izhodišča.

3.5. Vsota vsake vrstice v AB je enaka ab.

3.6.

3.7.

3.8. Bločno diagonalna matrika $\begin{bmatrix} A & & & \\ & A & & \\ & & \ddots & \\ & & & A \end{bmatrix}$.

3.9. Baza $\mathcal{A}$ je npr. $\{I, A\}$, baza $\mathcal{B}$ je npr. $\{I, B\}$, baza $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ je npr. $\{I\}$, baza $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ pa npr. $\{I, A, B\}$.

3.10.
- Če so vsi $a_2, \ldots, a_n$ enaki 0, je baza npr. $\{E_{ij} \mid i, j \in \{1, \ldots, n\}\}$.
- Če obstaja tak $i_0 \in \{2, \ldots, n\}$, da $a_{i_0} \neq 0$, je baza npr. $\{E_{1j} \mid j \in \{2, \ldots, n\}\} \cup \left\{a_{i_0} E_{11} + \sum_{j=2}^{n} a_j E_{i_0 j}\right\} \cup \{a_i E_{i_0 j} - a_{i_0} E_{ij} \mid i \in \{2, \ldots, n\} \setminus \{i_0\}, j \in \{2, \ldots, n\}\}$.

4 Slika, jedro in rang

4.1. Matrika preslikave v standardnih bazah je $\begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 6 & -4 & -2 \\ -3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$. Baza $\ker \mathcal{A}$ je npr. $\{(2, 3, 0)\}$, baza $\operatorname{im} \mathcal{A}$ pa npr. $\{(1, 2, -1), (0, 0, 1)\}$. $\mathcal{A}(1, -1, 1) = (4, 8, -6)$

4.2. Baza jedra je npr. $\{(1, 0, -1, 0), (0, 1, 1, -1)\}$, baza slike pa npr. $\{(1, 1, 2), (3, 2, 2)\}$. $\mathcal{A}(1, -1, 1, 1) = (3, 3, 6)$

4.3. $\operatorname{rang} A = 2$, $\operatorname{rang} B = \begin{cases} 3 & : \quad t \neq 1 \\ 2 & : \quad t = 1 \end{cases}$

4.4.

4.5. Npr. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ in $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

5 Inverz matrike

5.1. $A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$, $B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + 1 & -\frac{1}{a} & -\frac{1}{b} & -\frac{1}{c} \\ -\frac{1}{a} & \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{b} & 0 & \frac{1}{b} & 0 \\ -\frac{1}{c} & 0 & 0 & \frac{1}{c} \end{bmatrix}$ za $a, b, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

5.2.

5.3. $\begin{bmatrix} 3^n I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

5.4. (a) Če je $A = uv^T$, je $\alpha = v^T u$. (b) $\beta = -\frac{1}{1+\alpha}$

6 Prehod na novo bazo

6.1. $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$; $(-1, 1, 3)$

6.2. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 \\ -3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

6.3. $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ -\frac{8}{5} & \frac{4}{5} \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

6.4. $\begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} & 0 \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{9}{25} & \frac{12}{25} & \frac{4}{5} \\ \frac{12}{25} & \frac{16}{25} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 \end{bmatrix}$, $R\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \\ 2 \end{bmatrix}$

6.5. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$