# Analiza 1

## Zveznost

(1) Po definiciji preveri, da je funkcija $f(x) = \frac{x}{x^2+2}$ zvezna v točkah $a = 0$ in $a = 2$.

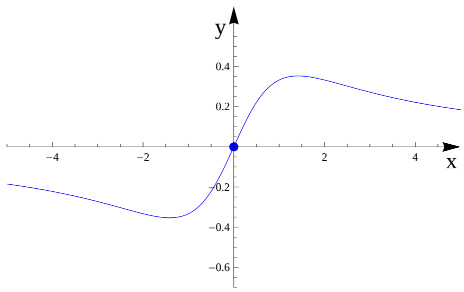
*Rešitev:* Pri tej nalogi se bomo spoznali z zveznostjo, ki je ena izmed ključnih pojmov matematične analize. Večina funkcij, ki jih podajamo s predpisi, je zveznih povsod, kjer so definirane. Naš cilj pri tej nalogi pa bo, da spoznamo, kaj to v resnici pomeni.

Funkcija $f$ je zvezna v točki $a$, če so za vrednosti $x$ blizu $a$ tudi vrednosti $f(x)$ blizu $f(a)$. Če hočemo to isto trditev povedati bolj precizno, lahko podamo naslednjo definicijo. Funkcija $f$ je zvezna v točki $a$, če za vsak $\epsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da za vse $x$, ki zadoščajo pogoju $|x - a| < \delta$, velja

$$|f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

Pri tem moramo biti pozorni na to, da jemljemo samo vrednosti iz definicijskega območja dane funkcije.

Poglejmo si najprej graf racionalne funkcije $f$.




Da bi dokazali, da je funkcija $f$ zvezna v točki $a = 0$, si najprej izberimo poljuben $\epsilon > 0$. Radi bi našli tak $\delta > 0$, da bo za vse $x$, ki zadoščajo pogoju $|x| < \delta$, veljalo

$$|f(x) - f(0)| < \epsilon.$$

Ker je $f(0) = 0$, lahko ta pogoj prepišemo v obliko

$$\left| \frac{x}{x^2+2} \right| < \epsilon.$$

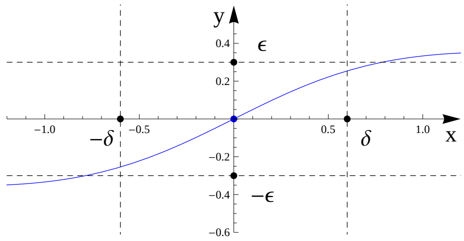
Strategija dokazovanja zveznosti po definiciji bo sedaj naslednja. S pomočjo ocen bomo poskusili levo stran navzgor oceniti z izrazom, ki bo vseboval konstante in pa izraz $|x|$. Iz konstant bomo na koncu lahko prebrali vrednost $\delta$. Ker je $x^2 + 2 \geq 2$, imamo oceno

$$\left| \frac{x}{x^2+2} \right| = \frac{|x|}{x^2+2} \leq \frac{|x|}{2}.$$

Če sedaj vzamemo $\delta = 2\epsilon$, bo iz neenakosti $|x| < \delta$ sledilo

$$\left| \frac{x}{x^2+2} \right| \leq \frac{|x|}{2} < \frac{\delta}{2} = \epsilon.$$

V točki $a = 0$ je torej za poljuben $\epsilon$ dober $\delta = 2\epsilon$. Poglejmo si na skici, kako lahko interpretiramo ta rezultat.




Če si izberemo poljuben vodoraven pas $(-\epsilon, \epsilon)$, bo graf funkcije $f$ na intervalu $(-\delta, \delta)$ ležal znotraj tega pasu. Na sliki je prikazan primer, ko je $\epsilon = 0.3$. Naš račun je pokazal, da je v tem primeru dober $\delta = 0.6$, čeprav vidimo, da bi dejansko lahko izbrali še malo večji $\delta$, če bi napravili boljšo oceno. Ko dokazujemo zveznost funkcije $f$, ni toliko pomembno, da $\delta$ najdemo čim bolj optimalno, važno je le, da za vsak $\epsilon > 0$ obstaja $\delta$, ki zadošča pogoju iz definicije zveznosti.

Pokažimo sedaj še, da je funkcija $f$ zvezna v točki $a = 2$. Izberimo torej poljuben $\epsilon > 0$. Najti moramo tak $\delta > 0$, da za vsak $x$, ki zadošča pogoju $|x-2| < \delta$, velja $|f(x)-f(2)| < \epsilon$ oziroma

$$\left|\frac{x}{x^2+2} - \frac{1}{3}\right| < \epsilon.$$

Izraz na levi lahko preoblikujemo v

$$\left|\frac{3x - x^2 - 2}{3(x^2+2)}\right| = \frac{|x^2 - 3x + 2|}{3(x^2+2)} = \frac{|(x-2)(x-1)|}{3(x^2+2)} \leq \frac{|(x-2)(x-1)|}{6}.$$

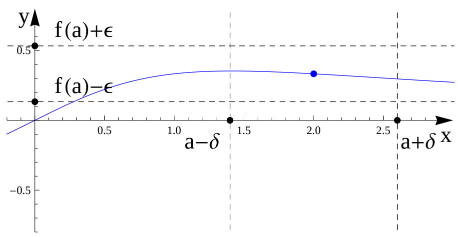
Člen $|x-2|$ bomo lahko ocenili navzgor z $\delta$, medtem ko je člen $|x-1|$ v principu lahko velik, če je $x$ velik. Ker nas pri obravnavi zveznosti zanimajo samo vrednosti blizu točke $a = 2$, se lahko omejimo na nek interval okoli te točke. Da ne bomo preveč komplicirali, vzemimo kar interval $(1, 3)$. Za $x \in (1, 3)$ imamo oceno $|x-1| \leq 2$, zato je

$$\frac{|(x-2)(x-1)|}{6} \leq \frac{|x-2|}{3}.$$

Če vzamemo $\delta = 3\epsilon$, bo torej iz neenakosti $|x-2| < \delta$ sledilo

$$\left|\frac{x}{x^2+2} - \frac{1}{3}\right| < \epsilon.$$

Vidimo, da je za razliko od točke $a = 0$, kjer smo vzeli $\delta = 2\epsilon$, sedaj dober $\delta = 3\epsilon$. Razlog je v tem, da je graf funkcije $f$ v okolici točke $a = 0$ bolj strm kot pa v okolici točke $a = 2$. Kot bomo videli v poglavju o odvodu, je kvocient $\frac{\epsilon}{\delta}$ povezan z vrednostjo odvoda v dani točki, če je funkcija odvedljiva. S slike je razvidno, da je bila naša ocena dokaj slaba, saj bi lahko vzeli še precej večji $\delta$.




Opomnimo še, da zaradi omejitve $x \in (1, 3)$ vsi računi veljajo le za $\delta < 1$. $\square$

(2) Določi konstanto $k$ tako, da bo funkcija

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{arc\,tg}(\frac{1}{x}) & ; \ x \neq 0, \\ k & ; \ x = 0 \end{cases}$$

zvezna na $\mathbb{R}$, če je mogoče.

*Rešitev:* Funkcija $f$ je definirana z dvema predpisoma. V točkah $x \neq 0$ je

$$f(x) = x \operatorname{arc\,tg}(\tfrac{1}{x}).$$

Ker je $f$ izražena z zveznimi funkcijami, je torej zvezna v vseh točkah $x \neq 0$. Zvezno jo bomo lahko razširili na cel $\mathbb{R}$, če bo obstajala limita funkcije $f$ v točki $a = 0$.

Limita funkcije $f$ v dani točki je vrednost, ki se ji približujejo vrednosti funkcije v točkah blizu točke $a$. Formalno pa je število $L$ limita funkcije $f$ v točki $a$, če za vsak $\epsilon > 0$ lahko najdemo tak $\delta > 0$, da iz pogoja $0 < |x - a| < \delta$ sledi

$$|f(x) - L| < \epsilon.$$

Definicija limite funkcije v dani točki je skoraj identična definiciji zveznosti funkcije v dani točki. Razlika je v tem, da vrednost $f(a)$ pri limiti zamenjamo z $L$. Pomembno je tudi, da pri limiti gledamo samo vrednosti $x \neq a$. Vrednost funkcije v dani točki torej ne vpliva na limito. Funkcija $f$ je zvezna v točki $a$ natanko takrat, ko ima limito $L$ v točki $a$ in velja $f(a) = L$. Obstoj limite je torej potreben, ne pa zadosten pogoj za zveznost funkcije v dani točki.

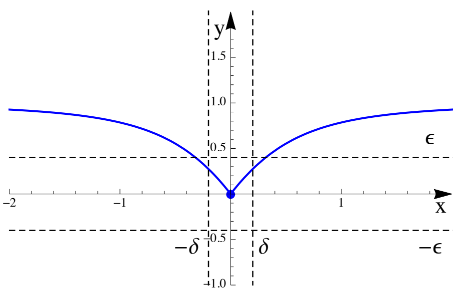
Poskusimo sedaj izračunati limito funkcije $f$ v točki $a = 0$. Na limito vplivajo samo vrednosti $x \neq 0$, zato moramo proučiti izraz

$$x \operatorname{arc\,tg}(\tfrac{1}{x}).$$

Ko se bo $x$ približeval k točki 0, se bo vrednost zgornjega izraza približevala k vrednosti $L = 0$. Da bi formalno dokazali, da je $L = 0$ limita funkcije $f$ v točki $a = 0$, najprej izberimo poljuben $\epsilon > 0$. Potem iščemo tak $\delta > 0$, da bo za vse $|x| < \delta$ veljalo $|f(x)| < \epsilon$. Iz ocene

$$|f(x)| = |x \operatorname{arc\,tg}(\tfrac{1}{x})| \leq \tfrac{\pi}{2}|x|$$

sledi, da lahko izberemo kar $\delta = \frac{2}{\pi}\epsilon$.




Če definiramo $f(0) = k = 0$, bo veljalo $f(0) = \lim_{x \to 0} f(x)$, od koder bo sledilo, da je funkcija $f$ zvezna na celi realni osi. $\square$

(3) Naj bo

$$f(x) = \begin{cases} -2\sin x & ; \ x \leq -\frac{\pi}{2}, \\ a\sin x + b & ; \ -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, \\ \cos x & ; \ x \geq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Določi realni števili $a$ in $b$ tako, da bo funkcija $f$ zvezna na $\mathbb{R}$.

*Rešitev:* Funkcija $f$ je definirana s tremi predpisi na intervalih $(-\infty, -\frac{\pi}{2}]$, $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ in $[\frac{\pi}{2}, \infty)$. V notranjosti vsakega izmed teh treh intervalov je funkcija $f$ zvezna, zato bomo konstanti $a$ in $b$ določili tako, da bo funkcija zvezna v točkah $\pm\frac{\pi}{2}$. Pogoj za to je, da sta leva in desna limita v teh dveh točkah enaki. V točki $x = -\frac{\pi}{2}$ tako dobimo pogoj:

$$\begin{aligned} \lim_{x \downarrow -\frac{\pi}{2}} f(x) &= \lim_{x \uparrow -\frac{\pi}{2}} f(x), \\ \lim_{x \downarrow -\frac{\pi}{2}} (a\sin x + b) &= \lim_{x \uparrow -\frac{\pi}{2}} -2\sin x, \\ -a + b &= 2, \end{aligned}$$

v točki $x = \frac{\pi}{2}$ pa pogoj:

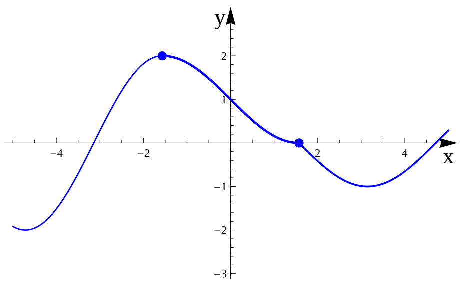
$$\begin{aligned} \lim_{x \downarrow \frac{\pi}{2}} f(x) &= \lim_{x \uparrow \frac{\pi}{2}} f(x), \\ \lim_{x \downarrow \frac{\pi}{2}} \cos x &= \lim_{x \uparrow \frac{\pi}{2}} (a\sin x + b), \\ 0 &= a + b. \end{aligned}$$

Od tod dobimo sistem enačb:

$$\begin{aligned} -a + b &= 2, \\ a + b &= 0, \end{aligned}$$

ki ima rešitev $a = -1$ in $b = 1$.

Graf funkcije $f$ je neprekinjena krivulja. Ker pa smo pravzaprav skupaj zlepili tri krivulje, ni presenetljivo, da v točki $x = \frac{\pi}{2}$ ne obstaja tangenta na graf funkcije.



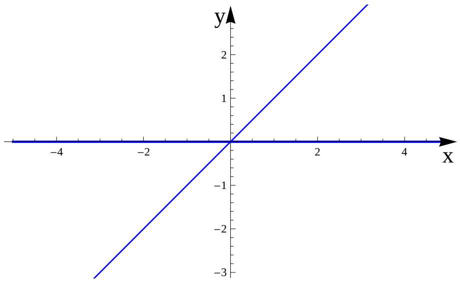

□

(4) Funkcija $f$ je dana s predpisom

$$f(x) = \begin{cases} x & ; \ x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ 0 & ; \ x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

Določi vse točke, v katerih je $f$ zvezna.

*Rešitev:* Funkcija $f$ je definirana z dvema predpisoma. V racionalnih točkah je enaka nič, v iracionalnih točkah pa se ujema z identiteto. Njen graf ima naslednjo obliko.




Na prvi pogled se zdi, kot da je graf funkcije $f$ sestavljen iz dveh neprekinjenih krivulj. V resnici pa je funkcija $f$ zelo nezvezna, saj ti dve krivulji nista neprekinjeni. Tako se nam samo zdi, ker sta množici racionalnih in iracionalnih števil gosti v množici realnih števil.

Pokazali bomo, da je funkcija $f$ zvezna samo v točki $a = 0$, v vseh ostalih točkah pa ne.

Izberimo torej poljuben $\epsilon > 0$. Za dokaz zveznosti v točki $a = 0$ moramo potem najti tak $\delta > 0$, da za vsak $|x| < \delta$ velja $|f(x) - f(0)| < \epsilon$ oziroma

$$|f(x)| < \epsilon.$$

Dober je kar $\delta = \epsilon$, saj za vsak $x \in \mathbb{R}$ velja $|f(x)| \leq |x|$.

Naj bo sedaj $a \neq 0$. Da funkcija $f$ ni zvezna v tej točki, bi lahko dokazali podobno kot prej. Pogosto pa je za dokazovanje nezveznosti bolj primerna naslednja ekvivalentna karakterizacija zveznosti. Vemo že, da je funkcija $f$ zvezna v točki $x = a$ natanko takrat, ko velja

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Izkaže pa se, da je funkcija $f$ zvezna v točki $x = a$ tudi natanko takrat, ko za vsako zaporedje $(a_n)$, ki konvergira k $a$, velja

$$\lim_{n \to \infty} f(a_n) = f(a).$$

Namesto, da bi gledali limito v funkcijskem smislu, se je torej dovolj omejiti na vsa zaporedja, ki konvergirajo k $a$. Za dokazovanje zveznosti je to pogosto nepraktično, saj je težko dani pogoj preveriti za vsa zaporedja. Je pa na ta način ponavadi preprosto dokazati, da funkcija v dani točki ni zvezna, saj je dovolj najti zaporedje $(a_n)$, ki konvergira k $a$ in za katero velja

$$\lim_{n \to \infty} f(a_n) \neq f(a).$$

Denimo najprej, da je $a$ iracionalno število, od koder sledi, da je $f(a) = a$. Potem lahko najdemo zaporedje racionalnih števil $(a_n)$, ki konvergira k $a$. Ker so števila $a_n$ racionalna, je $f(a_n) = 0$, zato je

$$\lim_{n \to \infty} f(a_n) = 0 \neq a.$$

Funkcija $f$ torej ni zvezna v točki $x = a$.

Če pa je $a$ racionalno število, pa je $f(a) = 0$. Podobno kot prej lahko najdemo zaporedje iracionalnih števil $(a_n)$, ki konvergira k $a$. Potem je $f(a_n) = a_n$ in

$$\lim_{n \to \infty} f(a_n) = \lim_{n \to \infty} (a_n) = a \neq 0.$$

Funkcija $f$ je torej zvezna samo v točki $a = 0$. $\square$

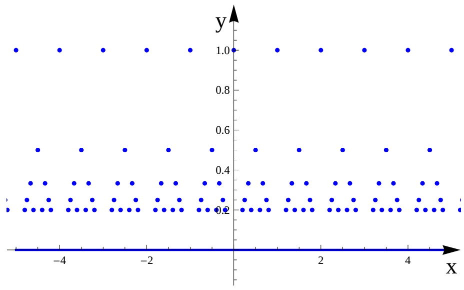
(5) Thomaejeva funkcija je definirana s predpisom

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ; x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ \frac{1}{n} & ; x \in \mathbb{Q},\ x = \frac{m}{n},\ \text{kjer sta si } m \in \mathbb{Z} \text{ in } n \in \mathbb{N} \text{ tuji.} \end{cases}$$

(a) Dokaži, da $f$ ni zvezna v točkah iz $\mathbb{Q}$.

(b) Dokaži, da je $f$ zvezna na $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

*Rešitev:* Poskusimo najprej dobiti občutek, kako izgleda graf funkcije $f$. Iz predpisa sledi, da je $f$ soda funkcija, ki je enaka 0 v vseh iracionalnih točkah. V celih številih funkcija $f$ zavzame vrednost 1, v točkah $x = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \ldots$ pa vrednost $\frac{1}{2}$. Preostale možne pozitivne vrednosti funkcije $f$ so vse oblike $\frac{1}{n}$. Vrednosti se torej približujejo k nič, na vsakem nadaljnjem nivoju pa so te točke čedalje gosteje razporejene.




Če pogledamo graf, se zdi, da funkcija $f$ ni zvezna v racionalnih točkah. Da pokažemo, da je zvezna v iracionalnih točkah, pa se bomo morali malce potruditi.

(a) Naj bo najprej $a = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ nek okrajšan ulomek. Potem je $f(a) = \frac{1}{n}$. Po drugi strani pa lahko najdemo zaporedje iracionalnih števil $(a_n)$, ki konvergira k $a$, od koder sledi

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = 0 \neq \frac{1}{n} = f(a).$$

Funkcija $f$ torej ni zvezna v točki $x = a$.

(b) Sedaj bomo dokazali, da je funkcija $f$ zvezna na $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Izberimo $a \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ in poljuben $\epsilon > 0$. Radi bi našli tak $\delta > 0$, da bo iz $|x - a| < \delta$ sledilo $|f(x) - f(a)| < \epsilon$. Ker je $f(a) = 0$, moramo torej pokazati, da za $x$ blizu $a$ velja

$$|f(x)| < \epsilon.$$

Ker je funkcija malce neobičajna, bo tudi dokaz drugačen kot ponavadi. Pokazati hočemo, da imajo racionalna števila, ki so blizu števila $a$, velike imenovalce.

Kot prvo lahko najdemo tak $N \in \mathbb{N}$, da bo veljalo $\frac{1}{N} < \epsilon$. Če nam uspe najti tak $\delta > 0$, da bodo vsa racionalna števila na intervalu $(a - \delta, a + \delta)$ imela imenovalec $n \geq N$, bo od tod sledilo, da za $x \in (a - \delta, a + \delta)$ velja $|f(x)| \leq \frac{1}{N} < \epsilon$. Problematični za dokaz zveznosti so torej ulomki, ki imajo imenovalec $n \leq N$. Takšnih ulomkov pa je na intervalu $x \in (a-\delta, a+\delta)$ samo končno mnogo, zato lahko najdemo takšnega izmed njih, označimo ga s $q$, ki je izmed vseh najbližji številu $a$. Če potem definiramo $\delta' = |a - q|$, bodo na intervalu $x \in (a-\delta', a+\delta')$ vsi ulomki imeli imenovalec $n \geq N$. Torej je funkcija $f$ zvezna v točki $x = a$. $\square$

V nadaljevanju poglavja se bomo ukvarjali z računanjem limit. V grobem lahko limite razdelimo na dva tipa. Pri obravnavi limite funkcije v dani točki nas zanima, če lahko funkcijo zvezno razširimo čez to točko. Če limita ne obstaja, ima funkcija v dani točki singularnost, kot je na primer pol. Drugi tip limit pa so limite v neskončnosti. Pri teh limitah gre v bistvu za iskanje horizontalne asimptote dane funkcije.

(6) Izračunaj limite:

(a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$,

(b) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^n-a^n}{x-a}$, $n \in \mathbb{N}$,

(c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$,

(d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$.

*Rešitev:* Začeli bomo z obravnavanjem limite funkcije v dani točki. Limito funkcije $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ računamo podobno kot limite zaporedij, upoštevamo pa naslednji dejstvi:

· če predpis za funkcijo $f$ ni definiran v točki $a$, poskušamo najti tak predpis $g$, ki je definiran in zvezen v $a$ in da za $x \neq a$ velja $f(x) = g(x)$,

· če nam uspe najti tak predpis $g$, je $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = g(a)$.

(a) $$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(2x+1)(x-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{x+1}{2x+1} = \frac{2}{3}.$$

(b) $$\begin{aligned}\lim_{x\to a} \frac{x^n-a^n}{x-a} &= \lim_{x\to a} \frac{(x-a)(x^{n-1}+x^{n-2}a+x^{n-3}a^2+\ldots+xa^{n-2}+a^{n-1})}{x-a},\\ &= \lim_{x\to a}(x^{n-1}+x^{n-2}a+x^{n-3}a^2+\ldots+xa^{n-2}+a^{n-1}),\\ &= na^{n-1}.\end{aligned}$$

V tej limiti smo pravzaprav izračunali odvod funkcije $f(x) = x^n$ v točki $x = a$.

(c) $$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1} &= \lim_{x\to 1} \frac{(\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt{x}+1)(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})},\\ &= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})} = \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}+1}{1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}},\\ &= \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

(d) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})},$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)-(1-x)}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} = \lim_{x\to 0}\frac{2x}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})},$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}},$$
$$= 1.$$

□

(7) Izračunaj limite:

(a) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{x}$, $a > 0$,

(b) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{|x|}$,

(c) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{(\frac{\pi}{2}-x)^2}$.

*Rešitev:* Dane limite bomo izračunali z uporabo limite

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$$

(a) Najprej velja

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{x} = \lim_{x\to 0} a\cdot\frac{\sin ax}{ax}.$$

Če uvedemo novo spremenljivko $t = ax$, bo pri $x \to 0$ veljalo tudi $t \to 0$. Torej je

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{x} = \lim_{x\to 0} a\cdot\frac{\sin ax}{ax} = a\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = a.$$

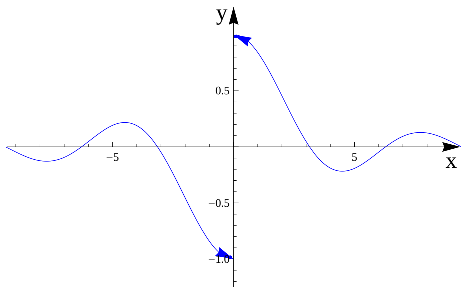
(b) Sedaj bomo upoštevali definicijo absolutne vrednosti in posebej izračunali levo in desno limito. Če je $x < 0$, je $|x| = -x$, zato je leva limita enaka

$$\lim_{x\uparrow 0}\frac{\sin x}{|x|} = \lim_{x\uparrow 0}\frac{\sin x}{-x} = -1.$$

Za $x > 0$ pa je $|x| = x$, zato je desna limita enaka

$$\lim_{x\downarrow 0}\frac{\sin x}{|x|} = \lim_{x\downarrow 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$$

Ker se leva in desna limita ne ujemata, limita dane funkcije ne obstaja. Poglejmo še graf funkcije v okolici točke $a = 0$.




(c) Dano limito bomo prevedli v standardno obliko z uvedbo nove spremenljivke $t = x - \frac{\pi}{2}$. Pri $x \to \frac{\pi}{2}$ potem velja $t \to 0$. Torej je

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{(\frac{\pi}{2} - x)^2} = \lim_{t \to 0} \frac{1 - \sin(t + \frac{\pi}{2})}{(-t)^2} = \lim_{t \to 0} \frac{1 - \cos t}{t^2} = \lim_{t \to 0} \frac{2 \sin^2 \frac{t}{2}}{t^2}.$$

Sedaj definirajmo $u = \frac{t}{2}$. Pri $t \to 0$ gre potem $u \to 0$ in velja

$$\lim_{t \to 0} \frac{2 \sin^2 \frac{t}{2}}{t^2} = \lim_{u \to 0} \frac{2 \sin^2 u}{4u^2} = \frac{1}{2}.$$

$\square$

(8) Izračunaj limite:

(a) $\lim_{x \to \infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$,

(b) $\lim_{x \to \infty} x^2(x + \sqrt[3]{1 - x^3})$,

(c) $\lim_{x \to \infty} (x - \ln \operatorname{ch} x)$,

(d) $\lim_{x \to \infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x})$.

*Rešitev:*

(a) $$\lim_{x \to \infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) = \lim_{x \to \infty} \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = 0.$$

(b) $$\begin{aligned} \lim_{x \to \infty} x^2(x + \sqrt[3]{1 - x^3}) &= \lim_{x \to \infty} x^2 \frac{(x + \sqrt[3]{1 - x^3})(x^2 - x\sqrt[3]{1 - x^3} + \sqrt[3]{(1 - x^3)^2})}{(x^2 - x\sqrt[3]{1 - x^3} + \sqrt[3]{(1 - x^3)^2})}, \\ &= \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{x^2 + x\sqrt[3]{x^3 - 1} + \sqrt[3]{(x^3 - 1)^2}}, \\ &= \lim_{x \to \infty} \frac{1}{1 + \sqrt[3]{1 - \frac{1}{x^3}} + \sqrt[3]{(1 - \frac{1}{x^3})^2}}, \\ &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

(c) $\lim\limits_{x\to\infty}(x-\ln \operatorname{ch} x) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\ln e^x - \ln\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\ln\frac{2e^x}{e^x+e^{-x}},$

$$= \ln\left(\lim_{x\to\infty}\frac{2e^x}{e^x+e^{-x}}\right) = \ln\left(\lim_{x\to\infty}\frac{2}{1+e^{-2x}}\right),$$

$$= \ln 2.$$

(d) Pri tej limiti bomo uporabili faktorizacijsko formulo

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right).$$

Najprej je:

$$\lim_{x\to\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}) = \lim_{x\to\infty}2\sin\left(\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\right)\cos\left(\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\right),$$

$$= 2\lim_{x\to\infty}\sin\left(\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}\right)\cos\left(\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\right).$$

Levi faktor gre v limiti proti nič, desni pa je omejen. Torej je

$$\lim_{x\to\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}) = 0.$$

$\square$

(9) Denimo, da obstajata limiti $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ in $\lim\limits_{x\to a} f(x) > 0$, kjer je $a\in\mathbb{R}$ ali $a=\pm\infty$. Dokaži, da potem velja

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \left(\lim_{x\to a} f(x)\right)^{\lim\limits_{x\to a} g(x)}.$$

*Rešitev:* Dana enakost sledi iz naslednjega računa

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to a} e^{g(x)\ln f(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a}(g(x)\ln f(x))} = e^{\lim\limits_{x\to a} g(x)\cdot\ln(\lim\limits_{x\to a} f(x))} = \left(\lim_{x\to a} f(x)\right)^{\lim\limits_{x\to a} g(x)}.$$

$\square$

(10) Izračunaj limite:

(a) $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{2}{\sin x}}$,

(b) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2e^x)^{\frac{1}{1-\cos x}}$,

(c) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}x}$,

(d) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{x^2+x+3}$.

*Rešitev:* Pri tej nalogi bomo računali limite tipa $1^{\pm\infty}$. Računamo jih lahko na dva načina.
(1) Na dolgo lahko takšne limite računamo s preoblikovanjem v limito oblike

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \left(\lim_{x\to a} f(x)\right)^{\lim\limits_{x\to a} g(x)}.$$

Pri tem moramo pogosto uporabiti limito

$$\lim_{x\to a}(1+f(x))^{\frac{1}{f(x)}} = e,$$

ki velja za vsako zvezno funkcijo $f$, ki ima v $a$ izolirano ničlo. To limito lahko izpeljemo iz limite

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

(2) Račun iz prejšnjega dela lahko pogosto strnemo v formulo

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a}(f(x)-1)g(x)},$$

kjer je $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 1$ in $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \pm\infty$.

(a) Limito $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{2}{\sin x}}$ bomo izračunali na oba načina. Po prvi poti tako dobimo

$$\lim_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{2}{\sin x}} = \lim_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{3x}\cdot\frac{6x}{\sin x}} = \lim_{x\to 0}\left((1+3x)^{\frac{1}{3x}}\right)^{\frac{6x}{\sin x}} = e^6.$$

Po drugi poti pa dobimo

$$\lim_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{2}{\sin x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0} 3x\cdot\frac{2}{\sin x}} = e^6.$$

Uporabnost formule je v tem, da avtomatično poskrbi za koščék, ki limitira proti $e$.

(b) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2e^x)^{\frac{1}{1-\cos x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2e^x}{1-\cos x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2e^x}{2\sin^2\frac{x}{2}}} = e^{\lim\limits_{x\to 0} 2e^x\frac{(\frac{x}{2})^2}{\sin^2\frac{x}{2}}} = e^2.$

(c) Pri tej limiti bomo med računom uvedli $t = x-1$. Ko gre $x\to 1$, gre $t\to 0$ in velja

$$\lim_{x\to 1} x^{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}x} = e^{\lim\limits_{x\to 1}(x-1)\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}x} = e^{\lim\limits_{t\to 0} t\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}(t+1)}.$$

Izračunajmo posebej to limito

$$\lim_{t\to 0} t\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}(t+1) = \lim_{t\to 0}\frac{t\sin\frac{\pi}{2}(t+1)}{\cos\frac{\pi}{2}(t+1)} = \lim_{t\to 0}\frac{t}{-\sin\frac{\pi}{2}t} = -\frac{2}{\pi}.$$

Od tod dobimo

$$\lim_{x\to 1} x^{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}x} = e^{-\frac{2}{\pi}}.$$

(d) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{x^2+x+3} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}-1\right)(x^2+x+3)} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-2(x^2+x+3)}{x^2+1}} = e^{-2}.$

□

(11) Dokaži, da je funkcija $f(x) = \sqrt{x}$ enakomerno zvezna na $[0, \infty)$.

*Rešitev:* Funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ je enakomerno zvezna na $I$, če za vsak $\epsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da za vsaka $x, y \in I$, ki zadoščata pogoju $|x - y| < \delta$, velja

$$|f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

Enakomerna zveznost je močnejši pogoj od zveznosti. Funkcija $f$ je namreč zvezna v točki $x$, če pri danem $\epsilon > 0$ lahko najdemo tak $\delta_x > 0$, da iz $|x - y| < \delta_x$ sledi

$$|f(x) - f(y)| < \delta_x.$$

Ta $\delta_x$ je načeloma lahko odvisen od $x$. Če nam uspe najti tak $\delta$, ki je dober za vse $x \in I$, je funkcija enakomerno zvezna na $I$. V praksi torej iščemo $\delta$, ki zadošča pogoju $0 < \delta \leq \delta_x$ za vsak $x \in I$. Če ti $\delta_x$ konvergirajo proti nič, funkcija ne bo enakomerno zvezna.

Primeri funkcij, ki so zvezne, a niso enakomerno zvezne, so $f(x) = \frac{1}{x}$, $f(x) = x^2$ in $f(x) = e^x$. Razlog, da niso enakomerno zvezne, je v tesni povezavi z neomejenostjo njihovih odvodov.

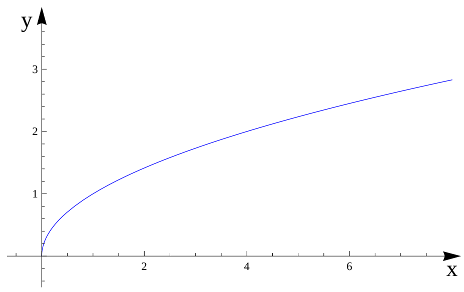
Primeri enakomerno zveznih funkcij pa so zvezne funkcije na končnem zaprtem intervalu in pa odvedljive funkcije z omejenim odvodom. Takšni sta na primer funkciji $f(x) = x$ in $f(x) = \operatorname{arc\,tg} x$.

Enakomerno zveznost funkcije $f$ pogosto dokazujemo na naslednja dva načina:

(1) Vsaka zvezna funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je enakomerno zvezna.

(2) Poskusimo najti konstanto $C$, da velja $|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|$ za vsaka $x, y \in D_f$.

Preden začnemo z dokazom, si poglejmo graf funkcije $f(x) = \sqrt{x}$.




Poskusimo sedaj navzgor oceniti izraz $|f(x) - f(y)|$ za $x, y \in [0, \infty)$. Najprej je

$$|f(x) - f(y)| = |\sqrt{x} - \sqrt{y}| = \left| \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \right| = \left| \frac{x - y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \right| = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} |x - y|$$

Sedaj pridemo do problema, saj je lahko izraz $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ poljubno velik, če sta $x$ in $y$ majhna. Zato tega izraza ne moremo omejiti na celem intervalu $[0, \infty)$. Lahko pa ga na primer omejimo na intervalu $[1, \infty)$. Za $x, y \in [1, \infty)$ namreč velja ocena

$$\frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \leq \frac{1}{2}$$

oziroma

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \frac{|x - y|}{2}.$$

Če sedaj izberemo $\delta = 2\epsilon$, bo iz pogoja $|x-y|<\delta$ sledilo

$$|\sqrt{x}-\sqrt{y}|<\epsilon.$$

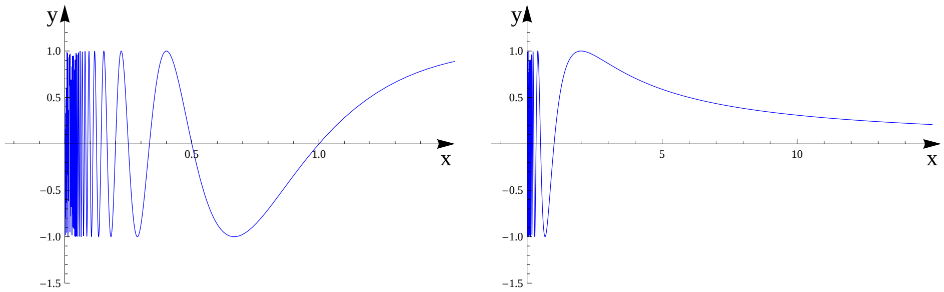
Tako smo dokazali enakomerno zveznost funkcije $f(x)=\sqrt{x}$ na intervalu $[1,\infty)$. Razlog, da smo lahko napravili to oceno, je v tem, da je odvod funkcije $f$ na tem intervalu navzgor omejen z $\frac{1}{2}$. Hkrati pa smo videli tudi, da takšne ocene ne moremo napraviti za majhne vrednosti $x$ in $y$. Lahko pa v tem primeru uporabimo izrek, ki pravi, da je zvezna funkcija enakomerno zvezna na vsakem končnem zaprtem intervalu. Konkretno to pomeni, da je funkcija $f(x)=\sqrt{x}$ enakomerno zvezna na intervalu $[0,2]$.

Oboje skupaj nam pove, da lahko za vsak $\epsilon>0$ najdemo tak $\delta>0$, da iz pogoja $|x-y|<\delta$ sledi $|\sqrt{x}-\sqrt{y}|<\epsilon$, če sta le $x,y\in[0,2]$ ali pa $x,y\in[1,\infty)$. V principu bi sedaj lahko zabredli v težave, če $x$ in $y$ ne bi bila elementa istega intervala. Da se izognemo tej komplikaciji, pa lahko dodatno zahtevamo še, da je $\delta<1$. V tem primeru bosta zagotovo $x$ in $y$ oba v $[0,2]$ ali pa v $[1,\infty)$.

Opomba: Omejenost odvoda je zadosten pogoj za enakomerno zveznost. Ni pa nujno, da funkcija, ki ima na danem intervalu neomejen odvod, na tem intervalu ni enakomerno zvezna. Funkcija $f(x)=\sqrt{x}$ je namreč primer take funkcije. $\square$

(12) Naj bo $a>0$. Obravnavaj enakomerno zveznost funkcije $f(x)=\sin\frac{\pi}{x}$ na intervalih $(0,\infty)$, $(0,a)$ in $(a,\infty)$.

*Rešitev:* Poglejmo najprej graf funkcije $f$.




Vidimo, da je pri velikih vrednostih graf položen, blizu izhodišča pa poljubno strm. Na podlagi tega lahko postavimo domnevo, da je funkcija $f$ enakomerno zvezna na $(a,\infty)$, ni pa enakomerno zvezna na $(0,a)$ in $(0,\infty)$.

Dokažimo najprej, da je $f$ enakomerno zvezna na $(a,\infty)$. Izberimo $\epsilon>0$. Potem bi radi našli tak $\delta>0$, da bo za vsaka $x,y\in(a,\infty)$, ki zadoščata pogoju $|x-y|<\delta$, veljalo

$$\left|\sin\tfrac{\pi}{x}-\sin\tfrac{\pi}{y}\right|<\epsilon.$$

Z uporabo faktorizacijske formule

$$\sin\alpha-\sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

dobimo

$$\left|\sin\tfrac{\pi}{x}-\sin\tfrac{\pi}{y}\right| = 2\left|\sin\tfrac{1}{2}(\tfrac{\pi}{x}-\tfrac{\pi}{y})\cos\tfrac{1}{2}(\tfrac{\pi}{x}-\tfrac{\pi}{y})\right|.$$

Z uporabo neenakosti $|\cos t| \leq 1$ in $|\sin t| \leq |t|$ lahko torej ocenimo

$$\left|\sin\tfrac{\pi}{x} - \sin\tfrac{\pi}{y}\right| \leq 2 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \left|\tfrac{\pi}{x} - \tfrac{\pi}{y}\right| = \pi\tfrac{|x-y|}{|xy|}.$$

Na tem mestu bomo sedaj upoštevali, da sta $x, y \in (a, \infty)$. V tem primeru lahko namreč ocenimo

$$\left|\sin\tfrac{\pi}{x} - \sin\tfrac{\pi}{y}\right| \leq \pi\tfrac{|x-y|}{|xy|} \leq \tfrac{\pi}{a^2}|x-y|.$$

Na intervalu $(a, \infty)$ je torej pri danem $\epsilon > 0$ dober

$$\delta = \frac{a^2\epsilon}{\pi}.$$

Vidimo, da gre pri $a \to 0$ tudi $\delta \to 0$. Od tod še ne sledi avtomatično, da funkcija ni enakomerno zvezna na intervalu $(0, \infty)$, je pa vsekakor namig v to smer.

Poskusimo torej dokazati, da funkcija $f$ ni enakomerno zvezna na intervalu $(0, \infty)$. Da dokažemo, da funkcija ni enakomerno zvezna, je dovolj poiskati zaporedji točk $(x_n)$ in $(y_n)$ iz $(0, \infty)$, ki bodo zadoščale pogoju

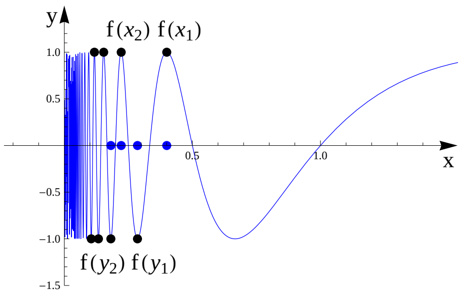
$$\lim_{n\to\infty} |x_n - y_n| = 0$$

in za katere je

$$|f(x_n) - f(y_n)| \geq C$$

za nek $C > 0$. To pomeni, da so te točke čedalje bliže skupaj, razlike njihove vrednosti pa ne konvergirajo proti 0.

V našem konkretnem primeru lahko ti dve zaporedji konstruiramo tako, da za $x_n$ izberemo lokalne maksimume, za $y_n$ pa lokalne minimume funkcije $f$.




Ker ima funkcija $\sin x$ lokalne maksimume v točkah oblike $x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$, bodo točke $x_n$ zadoščale pogojem:

$$\frac{\pi}{x_n} = \frac{\pi}{2} + 2n\pi,$$
$$x_n = \frac{2}{4n+1}.$$

Podobno lahko izpeljemo, da velja

$$y_n = \frac{2}{4n+3}.$$

Za ti dve zaporedji velja, da je

$$\lim_{n\to\infty} |x_n - y_n| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{2}{4n+1} - \frac{2}{4n+3} \right| = 0$$

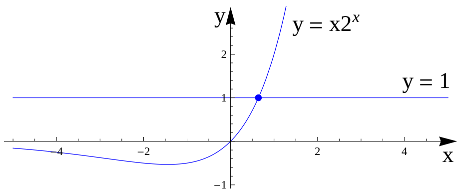
in

$$|f(x_n) - f(y_n)| = 2.$$

Našli smo torej točke, ki so poljubno blizu skupaj, razlike njihovih vrednosti pa ne konvergirajo proti nič. Od tod sledi, da funkcija $f$ ni enakomerno zvezna na $(0, \infty)$ in posledično tudi na $(0, \infty)$. Opomnimo še, da ta argument ne deluje na intervalu $(a, \infty)$, ker zaporedji $(x_n)$ in $(y_n)$ slej ko prej padeta izven intervala $(a, \infty)$. $\square$

(13) Dokaži, da ima enačba $x2^x = 1$ rešitev na intervalu $[0, 1]$. Določi jo na dve decimalki natančno.

*Rešitev:* Poskusimo najprej dano enačbo rešiti grafično.




Z grafov lahko razberemo, da ima dana enačba rešitev nekje na intervalu $[0, 1]$. Vendar pa te rešitve ne znamo natančno izračunati. V takšnem primeru lahko približno rešitev poiščemo s kakšno numerično metodo. Pri tej nalogi bomo spoznali metodo bisekcije, ki deluje, kadar v enačbi nastopajo same zvezne funkcije.

Metoda bisekcije temelji na naslednji ključni lastnosti zveznih funkcij:

Če imata vrednosti funkcije v krajiščih intervala različna predznaka, ima funkcija na tem intervalu ničlo.

Pri metodi bisekcije uporabljamo naslednji algoritem:

· izberemo željeno natančnost,
· enačbo zapišemo v obliki $f(x) = 0$,
· izberemo začetni interval, ki vsebuje ničlo funkcije $f$,
· na vsakem koraku razdelimo interval na dva dela in izberemo tistega, ki vsebuje ničlo,
· postopek ponavljamo, dokler ne dosežemo željene natančnosti.

V našem primeru lahko dano enačbo prevedemo v obliko $x2^x - 1 = 0$, zato definirajmo $f(x) = x2^x - 1$. Za začetni interval bomo izbrali interval $[0, 1]$. Potem je $f(0) = -1$ in $f(1) = 1$. Nadalje pa lahko izračunamo:

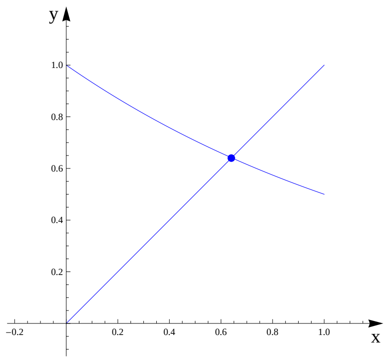
· $f(0.5) = -0.29,$ zato bo ničla na intervalu $[0.5, 1]$,
· $f(0.7) = 0.14,$ zato bo ničla na intervalu $[0.5, 0.7]$,
· $f(0.6) = -0.09,$ zato bo ničla na intervalu $[0.6, 0.7]$,
· $f(0.65) = 0.02,$ zato bo ničla na intervalu $[0.6, 0.65]$,
· $f(0.63) = -0.02,$ zato bo ničla na intervalu $[0.63, 0.65]$,
· $f(0.64) = -0.003,$ zato bo ničla na intervalu $[0.64, 0.65]$.

Velja še $f(0.645) = 0.009$, zato bomo za približek vzeli število $x = 0.64$. Bolj natančen približek za rešitev enačbe je $x = 0.641186$.

Metoda bisekcije je zelo robustna, saj jo lahko uporabimo pri vsaki enačbi, v kateri nastopajo zvezne funkcije. Je pa tudi relativno počasna, saj za vsako decimalko rešitve potrebujemo približno tri korake bisekcije. $\square$

(14) Naj bo $f : [0, 1] \to [0, 1]$ zvezna funkcija. Pokaži, da ima negibno točko.

*Rešitev:* Najprej opomnimo, da je točka $x \in A$ negibna točka preslikave $f : A \to A$, če velja $f(x) = x$. V našem primeru torej iščemo takšen $x \in [0, 1]$, da bo veljalo $f(x) = x$. Grafično to pomeni, da graf funkcije $f$ seka simetralo lihih kvadrantov.




Ker je funkcija $f$ zvezna, se nam zdi, da to mora biti res. Formalno pa lahko to dokažemo takole. Najprej definirajmo funkcijo

$$g(x) = f(x) - x.$$

Potem je funkcija $g$ zvezna, njeni vrednosti v krajiščih intervala $[0, 1]$ pa sta:

$$g(0) = f(0) - 0 \geq 0,$$
$$g(1) = f(1) - 1 \leq 0.$$

Zaradi zveznosti funkcije $g$ od tod sledi, da obstaja nek $x \in [0, 1]$, za katerega je $g(x) = 0$ oziroma

$$f(x) = x.$$

$\square$

(15) Dokaži, da na ekvatorju obstajata diametralno nasprotni točki z isto temperaturo. V nalogi privzemimo, da ima ekvator obliko krožnice in da je temperatura zvezna funkcija.

*Rešitev:* Pri tej nalogi imamo opravka s funkcijo, ki ni definirana na nekem intervalu, pač pa na krožnici. Ker lahko krožnico parametriziramo s parametri $\phi \in [-\pi, \pi]$, si lahko mislimo, da je temperatura zvezna funkcija

$$T = T(\phi) : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R},$$

ki zadošča pogoju $T(-\pi) = T(\pi)$.

Diametralno nasprotni točki lahko opišemo s parametroma $\phi$ in $\phi - \pi$ za nek $\phi \in [0, \pi]$. Torej hočemo dokazati, da obstaja tak $\phi \in [0, \pi]$, da velja

$$T(\phi) = T(\phi - \pi).$$

Obstoj takšnega $\phi$ bomo dokazali na podoben način kot pri prejšnji nalogi. Definirajmo torej zvezno funkcijo $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ s predpisom

$$f(\phi) = T(\phi) - T(\phi - \pi).$$

Potem velja:

$$\begin{aligned} f(0) &= T(0) - T(-\pi), \\ f(\pi) &= T(\pi) - T(0) = -(T(0) - T(\pi)). \end{aligned}$$

Iz zveznosti funkcije $T$ sledi, da je $T(\pi) = T(-\pi)$, kar pa pomeni, da je

$$f(0) = -f(\pi).$$

Funkcija $f$ je torej v krajiščih intervala $[0, \pi]$ različno predznačena, zato obstaja $\phi \in [0, \pi]$, da je $f(\phi) = 0$. Od tod pa sledi, da je

$$T(\phi) = T(\phi - \pi),$$

kar smo želeli pokazati. $\square$