Vektorski prostori

1 Rešitve nalog: Vektorski prostori in linearne preslikave

1.1. Ne. 1.2. Da. 1.3. Da.

2 Vektorski podprostori

2.1. (a) Ne. (b) Da. (c) Ne. (d) Da. (e) Da. (f) Ne. (g) Da.

2.2. (a) Da. (b) Ne. (c) Da. (d) Da. (e) Da. (f) Ne.

3 Ogrodje in baza

3.1. $a = -6b + 3c + 2d$

3.2. $t^2 + 4t - 3 = -3\left(t^2 - 2t + 5\right) + 2\left(2t^2 - 3t\right) + 4\left(t + 3\right)$

3.3.

3.4. $2x - 4y - 3z = 0$

3.5. (a) Ne. Baza je npr. $\{v_1, v_2\}$. (b) Da.

3.6.

3.7. Baza je npr. $\{(1,0,0,1,0,0),(0,1,1,0,0,0),(0,0,0,0,1,0),(0,0,0,0,0,1)\}$ in $\dim V = 4$.

3.8. $\dim U = \dim V = 2$, $\dim(U+V) = 3$, $\dim(U \cap V) = 1$. Baza U je npr. $\{(1,2,1),(1,1,-1)\}$, baza V je npr. $\{(2,3,-1),(1,2,2)\}$, baza $U+V$ je npr. $\{(1,2,1),(1,1,-1),(2,3,-1)\}$, baza $U \cap V$ je npr. $\{(3,5,1)\}$.

3.9. $\dim U = \dim V = 2$, $\dim(U+V) = 3$, $\dim(U \cap V) = 1$. Baza U je npr.

$$\{(1,1,1,1,1), (1,0,0,0,-1)\},$$

baza V je npr.

$$\{(-1,-1,0,0,1), (3,2,2,2,1)\},$$

baza $U+V$ je npr.

$$\{(1,1,1,1,1), (1,0,0,0,-1), (-1,-1,0,0,1)\},$$

baza $U \cap V$ je npr.

$$\{(3,2,2,2,1)\}.$$

3.10. $\dim U = \dim V = 3$, $\dim(U+V) = 4$, $\dim(U \cap V) = 2$. Baza U je npr.

$$\left\{x^4 + x^2 + 1, -x^4 + x^3 + x^2 - x, -x^4 + 2x^3\right\},$$

baza V je npr.

$$\left\{x^4 - 4x + 3, x^3 - 3x + 2, x^2 - 2x + 1\right\},$$

baza $U+V$ je npr.

$$\left\{x^4 + x^2 + 1, -x^4 + x^3 + x^2 - x, -x^4 + 2x^3, x^4 - 4x + 3\right\},$$

baza $U \cap V$ je npr.

$$\left\{x^4 - \frac{7}{2}x^2 + 3x - \frac{1}{2}, x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 2x - \frac{1}{2}\right\}.$$

4 Linearne preslikave

4.1. (a) Zrcaljenje čez simetralo lihih kvadrantov.

(b) Pravokotna projekcija na x-os.

(c) $a = 0$**:** Pravokotna projekcija na x-os.
$a > 0$**:** Razteg v smeri y-osi.
$a < 0$**:** Kompozicija zrcaljenja čez y-os in raztega v smeri y-osi.

(d) Projekcija na simetralo lihih kvadrantov vzdolž y-osi.

4.2.

4.3.

4.4. Npr. $V = \mathbb{R}^2$, $U = \{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\}$, $V = \{(x,x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ in $A(x,y) = (x,0)$ za $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

4.5.

4.6. Če je $\vec{a} = (1,0,1)$, je $\ker \mathcal{A} = \operatorname{Lin}\{\vec{a}\}$.

4.7. (a)

(b) **Če** $\vec{a} \perp \vec{b}$**:** $\ker A = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{x} \perp \vec{a}\}$ in $\operatorname{rang} A = 1$.

Če $\vec{a} \not\perp \vec{b}$**:** $\ker A = \operatorname{Lin}\left\{\vec{b}\right\}$ in $\operatorname{rang} A = 2$.

(c) $\vec{a} \cdot \vec{b} \in \{-1, 1\}$

4.8. Nasvet: Potrebno je dokazati, da je linearna preslikava $\mathcal{A}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ s predpisom $\mathcal{A}\vec{x} = (\vec{x} \cdot \vec{a})\,\vec{a} + \vec{x} \times \vec{a}$ je injektivna in posledično bijektivna.

4.9. $\ker A = \operatorname{Lin}\{1\}$, $\operatorname{im} A = \operatorname{Lin}\{1, x, \ldots, x^{n-1}\} = \mathbb{R}_{n-1}[x]$

4.10. **Če** $\lambda = 0$**:** $\ker A = \{p \in \mathbb{R}_2[x] \mid p(1) = 0\} = \operatorname{Lin}\{x^2 - 1, x - 1\}$.

Če $\lambda = -3$**:** $\ker A = \operatorname{Lin}\{x^2 + x + 1\}$.

Če $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0, -3\}$**:** $\ker A = \{0\}$.

4.11. Edina, ki je linearna, je B in je bijektivna.