UPORABA INTEGRALA V GEOMETRIJI

DOLŽINA LOKA

Definicija. Naj bo $F:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}^2$ pot, ~~ki določa krivuljo K~~ $F=(\alpha,\beta)$. Izberimo delitev $D: a_0=t_0<t_1<\dots<t_n=$ intervala $[a,b]$. Pot F na i-tem podintervalu $[t_{i-1},t_i]$ zamenjamo z daljico od $F(t_{i-1})$ do $F(t_i)$. Dolžina poligonalne krivulje, ki aproksimira F, je

$$\ell(D)=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{(\alpha(t_i)-\alpha(t_{i-1}))^2+(\beta(t_i)-\beta(t_{i-1}))^2}.$$

Dolžina poti F je

$$\ell(F)=\sup\{\ell(D);\ D \text{ delitev } [a,b]\}.$$

Pravimo, da je pot F izmerljiva, če je $\ell(F)<\infty$.

Izrek. Naj bo $F=(x,y):[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}^2$ zvezno odvedljiva pot. Potem je dolžina $\ell(F)$ poti F enaka $\ell(F)=\int_a\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)}\,dt$.

Dokaz. Naj bo $D: t_0<t_1<\dots<t_n$ delitev intervala $[a,b]$.

Po definiciji $\ell(D)=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{(x(t_i)-x(t_{i-1}))^2+(y(t_i)-y(t_{i-1}))^2}$.

Po Lagr. izreku obstajata $s_i\in(t_{i-1},t_i)$ in $v_i\in(t_{i-1},t_i)$:

$$x(t_i)-x(t_{i-1})=\dot{x}(s_i)(t_i-t_{i-1}),$$
$$y(t_i)-y(t_{i-1})=\dot{y}(v_i)(t_i-t_{i-1}).$$

Dobimo: $\ell(D)=\sum_{i=1}^{m}\sqrt{\dot{x}(s_i)^2+\dot{y}(v_i)^2}\,(t_i-t_{i-1})$, kar je

podobno R. vsoti: $R(\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}, D, \underset{\downarrow}{T_D})$.
c_i

Izračunajmo $R(\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}, D, \xi) - \ell(D) =$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\sqrt{\dot{x}^2(c_i)+\dot{y}^2(c_i)} - \sqrt{\dot{x}^2(s_i)+\dot{y}^2(v_i)} \right) \delta_i$$

Ocenimo s pomočjo $A^2-B^2=(A-B)(A+B)$:

$$\left| \sqrt{\dot{x}^2(c_i)+\dot{y}^2(c_i)} - \sqrt{\dot{x}^2(s_i)+\dot{y}^2(v_i)} \right| =$$

$$= \left| \frac{\dot{x}^2(c_i)-\dot{x}^2(s_i) + \dot{y}^2(c_i)-\dot{y}^2(v_i)}{\sqrt{} + \sqrt{}} \right| \leq$$

$$\leq \frac{|\dot{x}(c_i)-\dot{x}(s_i)|\,(|\dot{x}(c_i)|+|\dot{x}(s_i)|)}{\sqrt{}+\sqrt{}} + \frac{|\dot{y}(c_i)-\dot{y}(v_i)|\,(|\dot{y}(c_i)|+|\dot{y}(v_i)|)}{\sqrt{}+\sqrt{}}$$

≤ 1 $\qquad\qquad$ ≤ 1

$$\leq |\dot{x}(c_i)-\dot{x}(s_i)| + |\dot{y}(c_i)-\dot{y}(v_i)|$$

Ker sta $\dot{x}$ in $\dot{y}$ enakom. zvezni na $[a,b]$, lahko za dani $\varepsilon>0$ izberemo $\delta_0>0$,

$\delta(D)<\delta_0$: $\quad |R(\ \ )-\ell(D)| \leq \sum \varepsilon\cdot\delta_i = \varepsilon(b-a)$

Ker je $\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}$ integrabilna (saj je zvezna), za dovolj drobno delitev D velja $\delta(D)<\delta_1$

$$|I - R(\ )| < \varepsilon.$$

Torej za vsako dovolj drobno delitev D $\rightarrow \delta(D)<\min\{\delta_0,\delta_1\}$ velja:

$$|I-\ell(D)| < \varepsilon(b-a)+\varepsilon. \Rightarrow \sup \ell(D) \geq I-\varepsilon(b-a)-\varepsilon$$

Dokazujemo: $\sup\{\ell(D);\ D \text{ delitev}\} = I$. (*)

Naj bo D poljubna delitev. Potem obstaja finejša delitev D', da je $\delta(D')<\min\{\delta_0,\delta_1\}$. Iz trikotniške neenakosti sledi:

$\ell(D') \geq \ell(D)$, $\quad$ torej (*) sledi.

$\Rightarrow \ell(D) \leq \ell(D') \leq I+\varepsilon(b-a+1) \Rightarrow \sup \ell(D) \leq I+\varepsilon(b-a+1)$ $\boxtimes$

DZ7

Primer. Cikloida; dolžina enega $\frown$. ← iz geom. izpeljave param.

$$F(t)=(a(t-\sin t), a(1-\cos t)),\ t\in[0,2\pi]$$

$$F'(t)=a(1-\cos t, \sin t)$$

$$|\dot F(t)|=a\sqrt{(1-\cos t)^2+\sin^2 t}\, dt = a\sqrt{2-2\cos t}=2\left|\sin \tfrac{t}{2}\right|a$$

$$\int_0^{2\pi}|\dot F(t)|\,dt = 2a\int_0^{2\pi}\sin\tfrac{t}{2}\,dt = 4a\int_0^{\pi}\sin s\,ds = 4a(-\cos s)\Big|_0^{\pi}=\underline{\underline{8a}}$$

$$\tfrac{t}{2}=s$$
$$\tfrac{1}{2}dt=ds$$

Če je krivulja graf funkcije f:

$$\Gamma_f=\{(x,f(x));\ x\in[a,b]\}$$

$$\ell(\Gamma_f)=\int_a^b\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$$

Če je krivulja podana v polarnih:

K: $r=r(\varphi)$.

Potem $x=r(\varphi)\cos\varphi$, $y=r(\varphi)\sin\varphi$ parametrizacija

$$\sqrt{\dot x^2+\dot y^2}=\sqrt{(r'\cos\varphi-r(\varphi)\sin\varphi)^2+(r'(\varphi)\sin\varphi+r(\varphi)\cos\varphi)^2}=$$
$$=\sqrt{r'^2+r^2}$$

$$\ell(K)=\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\sqrt{r'^2+r^2}\,d\varphi.$$

Primer. $r=a$ $\qquad 0\le\varphi\le 2\pi$

Obseg kroga

$$\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2+0}\,d\varphi=2\pi a.$$

Trditev. Naj bosta F in G regularni parametrizaciji istega gld. loka K.
tj. $F: I \to \mathbb{R}^2$, $G: J \to \mathbb{R}^2$ in $F(I)=G(J)$.

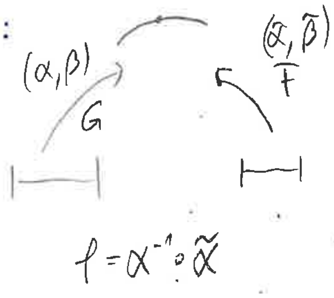
Potem je $\ell(F)=\ell(G)$.

Opomba. Zato lahko definiramo dolžino gld. loka: $\ell(K)$.

Dokaz. Vemo, da obstaja zv. odvedljiva funkcija $f: \underset{[a,b]}{\underset{\parallel}{I}} \to \underset{[c,d]}{\underset{\parallel}{J}}$, $f'(x)\neq 0 \ \forall x\in I$, za katero velja:

$$G\circ f = F.$$

Če je $G=(\alpha,\beta)$, je $F=(\overset{\tilde{\alpha}}{\overset{\parallel}{\alpha\circ f}}, \beta\circ f)$ in dobimo:



$$\ell(G)=\int_c^d \sqrt{\dot{\alpha}^2(t)+\dot{\beta}^2(t)}\,dt$$

$$\ell(F)=\int_a^b \sqrt{(\alpha\circ f)^{\cdot 2}(t)+(\beta\circ f)^{\cdot 2}(t)}\,dt =$$

$$=\int_a^b \sqrt{\dot{\alpha}(f(t))^2\cdot \dot{f}(t)^2+\dot{\beta}(f(t))^2\dot{f}^2(t)}\,dt=$$

$$=\int_a^b \sqrt{\dot{\alpha}(f(t))^2+\dot{\beta}(f(t))^2}\,|\dot{f}(t)|\,dt=$$

če je $\dot{f}(t)>0$: $a\leadsto c$, $b\to d$

če je $\dot{f}(t)<0$: $a\leadsto d$, $b\leadsto c$

$$=\int_c^d \sqrt{\dot{\alpha}(s)^2+\dot{\beta}(s)^2}\,ds=\ell(G) \ \blacksquare$$

Gladka pot: param. s katero regularno parametrizacijo. **Gladek lok:** param. s katero injektivno gld. param.

NARAVNI PARAMETER

Naj bo $F=(\alpha,\beta):[a,b]\to\mathbb{R}^2$ regularna parametrizacija gladkega loka K. Potem

$$f(t)=\int_a^t \sqrt{\dot{\alpha}^2(t)+\dot{\beta}^2(t)}\,dt$$

meri dolžino loka K med $F(a)$ in $F(t)$. Ker je

$$\dot{f}(t)=\sqrt{\dot{\alpha}^2(t)+\dot{\beta}^2(t)}>0$$

je f zvezno odvedljiva, strogo naraščajoča funkcija, ki slika $[a,b]\to[0,\ell(K)]$. Označimo s $f^{-1}: s\mapsto f^{-1}(s)$ njen inverz.

ℓ^{-1} je zvezno odvedljiva; defin. $G = F\circ \ell^{-1} : [0, \ell(K)] \to K$

$G = (\tilde\alpha, \tilde\beta)$ in velja:

$$\tilde\alpha'(s)^2 + \tilde\beta'(s)^2 = \left((\alpha\circ\ell^{-1})'(s)\right)^2 + \left((\beta\circ\ell^{-1})'(s)\right)^2 =$$

$$= \underbrace{\left(\dot\alpha(\ell^{-1}(s))^2 + \dot\beta(\ell^{-1}(s))^2\right)}_{=\,\dot\ell(\ell^{-1}(s))^2}\cdot \frac{1}{\dot\ell(\ell^{-1}(s))^2} \equiv 1.$$

Torej je G regularna param. gld. loka K, za katero velja

$$\int_0^{s_0}\sqrt{\tilde\alpha'(s)^2+\tilde\beta'(s)^2}\,ds = \int_0^{s_0} 1\,ds = s_0,$$

tj. dolžina loka K od $G(0)=F(0)$ do $G(s_0)$ je s_0, parameter meri dolžino loka, zato ga imenujemo <u>naravni parameter</u>, parametrizacijo pa <u>naravna parametrizacija</u>. Po krivulji se premikamo s hitrostjo 1.

<u>Primer</u>. Določi naravno parametrizacijo krožnice s polmerom a.

$$F(t) = (a\cos t, a\sin t), \quad t\in[0,2\pi].$$

$$s = \ell(t) = \int_0^t a\,d\tau = at \Rightarrow t = \frac{s}{a}$$

$$G(s) = F\left(\frac{s}{a}\right) = \left(a\cos\frac{s}{a}, a\sin\frac{s}{a}\right)$$ naravna param. krožnice.

<u>Definicija</u>. Diferencial dolžine loka gladke krivulje označimo z ds in ga imenujemo <u>ločna dolžina</u>.

Velja: $ds^2 = dx^2 + dy^2$.

$$ds = d\ell(t) = \dot\ell(t)\,dt = \sqrt{\dot\alpha^2(t)+\dot\beta^2(t)}\,dt = \sqrt{\dot\alpha^2(t)dt^2+\dot\beta^2(t)dt^2} = \sqrt{dx^2+dy^2}$$

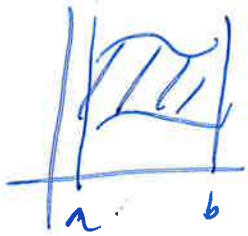
D3o

PLOŠČINE LIKOV V RAVNINI

1) PLOŠČINA LIKA MED GRAFOMA ZV. FUNKCIJ

a) Naj bosta $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ zvezni funkciji in denimo, da je $f(x) \leq g(x)$ za vsak $x \in [a,b]$. Naj bo

$$D = \{(x,y);\ f(x) \leq y \leq g(x),\ a \leq x \leq b\}$$



Tedaj je ploščina lika med grafoma Γ_f in Γ_g

$$pl(D) = \int_a^b (g(x) - f(x))\,dx.$$

b) Naj bosta $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ zvezni funkciji.

$$D = \{(x,y);\ a \leq x \leq b,\ y \text{ leži med } f(x) \text{ in } g(x)\} =$$
$$= \{(x,y);\ a \leq x \leq b;\ y \in [\min\{f(x), g(x)\}, \max\{f(x), g(x)\}]\}$$

Tedaj je ploščina D

$$pl(D) = \int_a^b |g(x) - f(x)|\,dx.$$

c) Naj bo $g : [c,d] \to \mathbb{R}$ zvezna in nenegativna. Ploščina

$$D = \{(x,y);\ y \in [c,d],\ x \in [0, g(y)]\}$$

je

$$pl(D) = \int_c^d g(y)\,dy$$

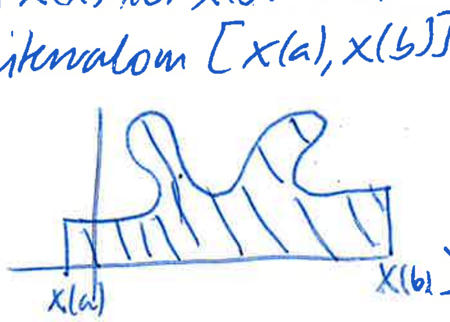
in podobno kot (a) in (b) za pl. med grafoma.

2) PLOŠČINA OBMOČJA, KI JE DANO S KRIVULJO

a) $F : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ zvezno odvedljiva pot, $F = (x,y)$.

(1) Če je $y(t) \geq 0$ $\forall t \in [a,b]$ in je $x(a) = \min x(t)$ ter $x(b) = \max x(t)$, potem ploščino med krivuljo in osjo x nad intervalom $[x(a), x(b)]$ izračunamo z

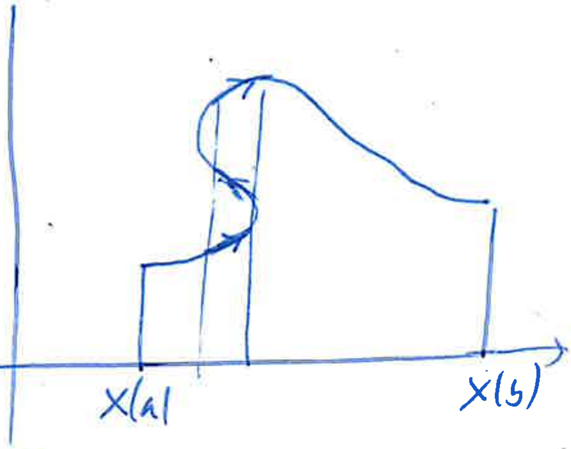
$$\int_a^b y(t)\,\dot{x}(t)\,dt$$



D31

(2) Če je $x(t)\geq 0$ $\forall t\in[a,b]$ in je $y(a)=\min y(t)$ ter $y(b)=\max y(t)$, potem je ploščina med krivuljo in osjo y enaka $\int_a^b x(t)\dot{y}(t)\,dt$.

Dokaz (ideja). Naj bo $D: a=t_0<t_1<\dots<t_n=b$ poljubna delitev intervala $[a,b]$ in S_D usklajen izbor testnih točk.



Del krivulje med tč. $F(t_{i-1})$ in $F(t_i)$ prispeva k ploščini $y(s_i)((x(t_i)-x(t_{i-1}))$.

Predznak prispevka je določen s predznakom razlike x koordinat. Za približek ploščine dobimo:

$$p(D,S_D)=\sum_{i=1}^{n} y(s_i)(x(t_i)-x(t_{i-1}))\underset{\uparrow}{=}\sum y(s_i)\dot{x}(v_i)\delta_i$$

Lagr. izrek $\quad v_i\in[x_{i-1},x_i]$.

Podobno kot prej, se $p(D,S_D)$ ne razlikuje veliko od R. vsote in v limiti dobimo $\int_a^b y(t)\dot{x}(t)\,dt$. ☒

Definicija. Naj bo $F:[a,b]\to\mathbb{R}^2$ regularna parametrizacija gld. loka K. Potem F določa usmerjenost (orientacijo K) določeno s smerjo, v kateri potuje točka $F(t)$ po K, ko gre t od a do b.

Gladka enostavna sklenjena krivulja je gladka pot K, ki ima regularno parametrizacijo $F:[a,b]\to\mathbb{R}^2$, za katero velja $F(a)=F(b)$, $\dot{F}(a)=\dot{F}(b)$ in $F|_{[a,b)}$ je injektivna.

Naj bo D območje, ki ga omejuje gld. enost. skl. kriv. K. Regularna parametrizacija F krivulje K določa pozitivno usmerjenost krivulje K, če je D na levi strani, ko se vzdolž K pomikamo v smeri, ki jo določa F.

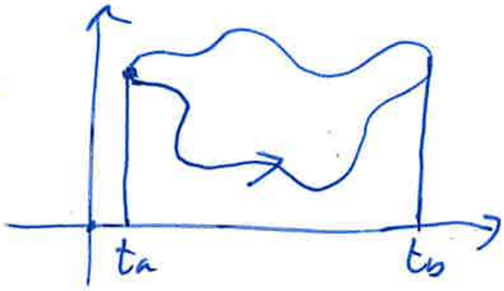
$F(a)=F(b)$

Trditev. Naj bo $F:[a,b]\to\mathbb{R}^2$, $F(t)=(x(t),y(t))$ regul. parametrizacija enost. skl. krivulje K, ki določa pozitivno usmerjenost K. Potem je ploščina območja D znotraj K enaka

$$\int_a^b x(t)\dot{y}(t)\,dt = -\int_a^b y(t)\dot{x}(t)\,dt = \frac{1}{2}\int_a^b \big(x(t)\dot{y}(t)-\dot{x}(t)y(t)\big)\,dt.$$

PRIMER

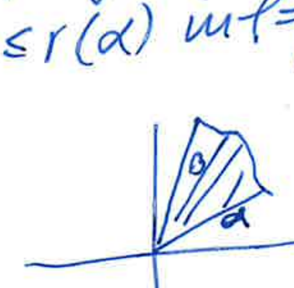
Dokaz (skica)



Naj bo t_a (t_b) vrednost parametra t, pri kateri je vrednost koordinate x na krivulji najmanjša (največja). Točki $F(t_a)$ in $F(t_b)$ razdelita K na dva loka. Del integrala $\int_a^b y(t)\dot{x}(t)\,dt$ po parametrih t, ki določajo sp. del krivulje, je pozitiven, del integrala, po parametrih t, ki določajo zg. lok, pa negativen. Prvi določa ploščino pod sp. lokom, drugi pa pod zgornjim. Sledi: $pl(D) = -\int_a^b y(t)\dot{x}(t)\,dt$. $\boxed{Z}$

(Podobno 1. formula; 3 sledi).

Trditev. Naj bo $r=r(\varphi)$ za $\varphi\in[\alpha,\beta]$ enačba polarno podana krivulja. Potem je ploščina območja, ki ga določa krivulja, skupaj z daljicama $\varphi=\alpha$, $0\le r\le r(\alpha)$ in $\varphi=\beta$, $0\le r\le r(\beta)$, enaka $\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)\,d\varphi$.



Dokaz. $F(\varphi)=(r(\varphi)\cos\varphi,\ r(\varphi)\sin\varphi)$ param. s polarnim kotom. (Da dobimo skl. krivuljo, dodamo še daljici: $d\varphi=0$)

$$x(\varphi)\dot{y}(\varphi)-\dot{x}(\varphi)y(\varphi)=r^2(\varphi)$$

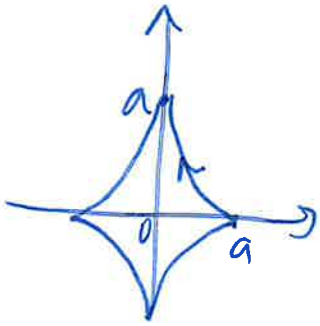
$$pl(D)=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)\,d\varphi. \quad \boxed{Z}$$

Primer. Arhimedova spirala

$r(\varphi)=a\varphi$, $a>0$, $0\le\varphi\le 2\pi$

$pl=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(a\varphi)^2\,d\varphi=\frac{4\pi^3 a}{3}$

Izračunaj ploščino astroide
$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, $a > 0$.



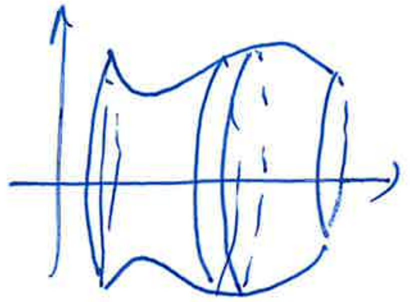
$x(t) = a\cos^3 t$
$y(t) = a\sin^3 t$ $\quad t \in [0, 2\pi]$

$\dot{x}(t) = 3a\cos^2 t\,(-\sin t)$
$\dot{y}(t) = 3a\sin^2 t\cos t$

$$x(t)\dot{y}(t) - \dot{x}(t)y(t) = 3a^2\cos^4 t\sin^2 t + 3a^2\cos^2 t\sin^4 t =$$
$$= 3a^2\cos^2 t\sin^2 t$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 3a^2\cos^2 t\sin^2 t\,dt = \frac{3}{2}a^2\int_0^{2\pi}\cos^2 t\sin^2 t\,dt =$$
$$= \frac{3}{2}a^2\cdot\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\sin^2 2t\,dt =$$
$$= \frac{3}{8}a^2\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1-\cos 4t)\,dt = \frac{3}{16}a^2\cdot 2\pi = \underline{\underline{\frac{3}{8}\pi a^2}}$$

PROSTORNINA IN POVRŠINA VRTENINE



Naj bo $f:[a,b]\to\mathbb{R}^+$ zvezna funkcija.

Približna prostornina $\sum_{i=1}^{n}\pi f^2(t_i)\delta_i = R(\pi f^2, D, T_D)$

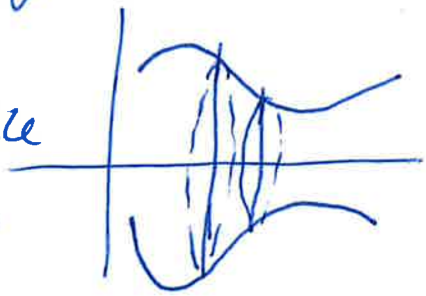
kjer je D delitev intervala $[a,b]$ in T_D ustrezajoča izbira testnih točk.

Sledi: $\boxed{V=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx}$. prostornina vrtenine.

Ploskev, ki jo dobimo z vrtenjem grafa f nad $[a,b]$ okoli osi x, imenujemo rotacijska ploskev, telo, ki ga omejuje, pa vrtenina.

Površina rotacijske ploskve:

izberimo delitev intervala $[a,b]$. Nad $[x_{i-1},x_i]$ graf funkcije f aproksimiramo z daljico od t. $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ do točke $(x_i, f(x_i))$. Ko jo zavrtimo okrog abscisne osi, dobimo plašč prisekanega stožca polmerov leve in desne mejne krožnice $f(x_{i-1})$ in $f(x_i)$ ter višino $\delta_i = x_i - x_{i-1}$.



Zato je približek površine:

$$\sum_{i=1}^{n}\pi\left(f(x_{i-1})+f(x_i)\right)\sqrt{\delta_i^2+\left(f(x_{i-1})-f(x_i)\right)^2}$$

Če je f zvezno odvedljiva, dobimo v limiti, ko $\delta(D)\to 0$,

$$\boxed{P=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx.}$$

Če je krivulja dana parametrično: $V=\pi\int_a^b y^2(t)\dot{x}(t)\,dt$, $P=2\pi\int_a^b y(t)\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)}\,dt$

polarno: $V=\pi\int_a^b r^3(\varphi)\sin^3(\varphi)\,d\varphi$

$P=2\pi\int_a^b r(\varphi)\sin\varphi\sqrt{r^2(\varphi)+r'^2(\varphi)}\,d\varphi$

D34