# Analiza 1

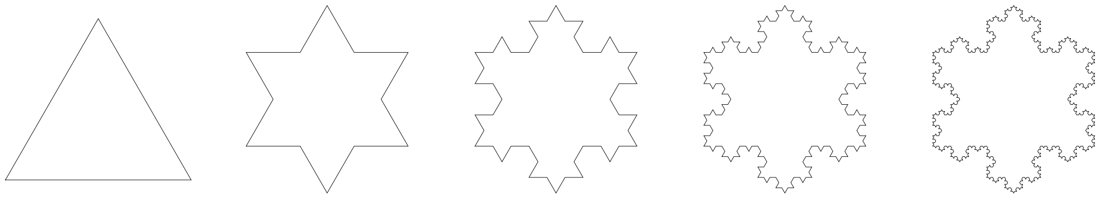
## Vrste

(1) Izračunaj obseg in ploščino Kochove snežinke.

*Rešitev:* Kochova snežinka je ravninska množica, ki jo dobimo po naslednjem postopku:

· začnemo z enakostraničnim trikotnikom,
· v vsakem koraku na srednjo tretjino vsake stranice dodamo enakostranični trikotnik.

Prvih nekaj iteracij tega postopka je narisanih na spodnji sliki.



Pokazali bomo, da v limiti dobimo lik z neskončnim obsegom in s končno ploščino.

Označimo z $a_1$ dolžino stranice prvotnega enakostraničnega trikotnika. Lik, ki ga dobimo v $n$-ti iteraciji, ima potem dolžino stranice enako $a_n = \frac{a_1}{3^{n-1}}$, vseh stranic pa je $3 \cdot 4^{n-1}$. Obseg tega lika je potem enak

$$o_n = 3 \cdot 4^{n-1} \cdot \frac{a_1}{3^{n-1}} = 3a_1 \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}.$$

Dobimo geometrijsko zaporedje, ki narašča čez vse meje.

Poglejmo si še ploščino Kochove snežinke. Označimo z $S_1$ ploščino začetnega trikotnika. Trikotniki, ki jih dodamo v $n$-ti iteraciji, imajo potem ploščino enako $\frac{S_1}{9^{n-1}}$ in jih je $3 \cdot 4^{n-2}$. V $n$-tem koraku se torej ploščina poveča za $S_n = 3 \cdot 4^{n-2} \cdot \frac{S_1}{9^{n-1}}$, ploščina Kochove snežinke pa je enaka

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} S_n = S_1 + \tfrac{S_1}{3}\left(1 + \tfrac{4}{9} + \left(\tfrac{4}{9}\right)^2 + \dots\right) = S_1 + \tfrac{S_1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{4}{9}} = \tfrac{8}{5} S_1.$$

<u>Opomba</u>: Za izračun vsote poljubne geometrijske vrste lahko uporabimo formulo

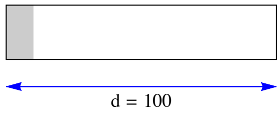
$$a + aq + aq^2 + aq^3 + \dots = \tfrac{a}{1-q},$$

ki velja za vse $|q| < 1$. $\square$

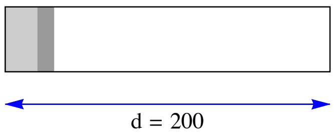
(2) Mravljica se s hitrostjo 1 cm/s premika po elastični vrvi, ki je na začetku dolga 1 m, vsako sekundo pa se raztegne za dodaten meter. Ali mravljica kdaj doseže nasprotni konec vrvi?

*Rešitev:* Privzeli bomo, da se vsako sekundo vrv najprej raztegne za en meter, mravljica pa se nato premakne za en centimeter. Vse količine bomo izrazili v centimetrih.

Po 1 sekundi je vrv torej dolga $d_1 = 100$, mravljica pa se je premaknila za $s_1 = 1$.



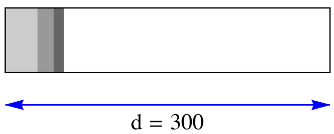

Po 2 sekundah je vrv dolga $d_2 = 200$, mravljica pa se premakne za dodaten centimeter.




Upoštevati pa moramo, da se je prehojena pot iz prvega koraka raztegnila na dva centimetra, kar pomeni, da je

$$s_2 = 2 + 1 = 2(1 + \tfrac{1}{2}).$$

Po treh sekundah, je vrv dolga $d_3 = 300$, mravljica pa se spet premakne za dodaten centimeter.




Pot iz prvega koraka se tokrat raztegne za faktor 3, pot iz drugega koraka pa za faktor $\frac{3}{2}$. Tako dobimo

$$s_3 = 3 + \tfrac{3}{2} + 1 = 3(1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3}).$$

Poglejmo sedaj, kaj se zgodi po $n$-sekundah. Vrv je takrat dolga $d_n = 100n$. Prehojene poti v prvih $n-1$ sekundah pa se raztegnejo za faktorje $n, \frac{n}{2}, \frac{n}{3}, \ldots, \frac{n}{n-1}$. Tako dobimo

$$s_n = n + \tfrac{n}{2} + \tfrac{n}{3} + \ldots + \tfrac{n}{n-1} + 1 = n(1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \ldots + \tfrac{1}{n}).$$

Mravljica doseže desni rob vrvi, če za nek $n \in \mathbb{N}$ velja $s_n > d_n$ oziroma

$$n(1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \ldots + \tfrac{1}{n}) > 100n.$$

S predavanj vemo, da harmonična vrsta divergira, zato za dovolj velik $n$ velja

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \ldots + \tfrac{1}{n} > 100,$$

kar pomeni, da je odgovor na vprašanje pritrdilen. $\square$

(3) Z izračunom delnih vsot ugotovi, ali dani vrsti konvergirata:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+k)(n+k+1)}$, $k \geq 0$,

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+\tfrac{1}{n})$.

*Rešitev:* Številska vrsta je zaporedje števil $(a_n)$, ki ga zapišemo kot formalno vsoto

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

Za poljubno vrsto lahko definiramo zaporedje delnih vsot

$$s_n := a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

in rečemo, da vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira, če konvergira zaporedje njenih delnih vsot. Vsota vrste je definirana s predpisom

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} (s_n).$$

(a) Ulomek $\frac{1}{(n+k)(n+k+1)}$ lahko poenostavimo na naslednji način. Izkaže se, da je

$$\frac{1}{(n+k)(n+k+1)} = \frac{A}{n+k} + \frac{B}{n+k+1}$$

za neki konstanti $A$ in $B$ (ulomkom na desni rečemo parcialni ulomki). Ti konstanti izračunamo tako, da damo desno stran na skupni imenovalec in primerjamo koeficiente:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(n+k)(n+k+1)} &= \frac{A}{n+k} + \frac{B}{n+k+1}, \\
&= \frac{A(n+k+1) + B(n+k)}{(n+k)(n+k+1)}, \\
&= \frac{An + Ak + A + Bn + Bk}{(n+k)(n+k+1)}, \\
&= \frac{(A+B)n + (Ak + A + Bk)}{(n+k)(n+k+1)}.
\end{aligned}$$

S primerjavo koeficientov polinomov v števcu pridemo do sistema dveh enačb za dve neznanki:

$$\begin{aligned}
A + B &= 0, \\
Ak + B + Bk &= 1,
\end{aligned}$$

ki ima rešitev $A = 1$ in $B = -1$. Za vsak $n \in \mathbb{N}$ torej velja enakost

$$\frac{1}{(n+k)(n+k+1)} = \frac{1}{n+k} - \frac{1}{n+k+1}.$$

Torej je

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \left(\tfrac{1}{1+k} - \tfrac{1}{2+k}\right) + \left(\tfrac{1}{2+k} - \tfrac{1}{3+k}\right) + \cdots + \left(\tfrac{1}{n+k} - \tfrac{1}{n+k+1}\right) = \tfrac{1}{1+k} - \tfrac{1}{n+k+1}.$$

Sledi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+k)(n+k+1)} = \lim_{n\to\infty}(s_n) = \frac{1}{1+k}.$$

(b) Najprej opazimo, da je $a_n = \ln(1+\frac{1}{n}) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$. To nam omogoča, da natančno izračunamo delne vsote

$$s_n = a_1 + \ldots + a_n = \ln\left(\tfrac{2}{1}\right) + \ln\left(\tfrac{3}{2}\right) + \ln\left(\tfrac{4}{3}\right) + \ldots + \ln\left(\tfrac{n+1}{n}\right) = \ln\left(\tfrac{2}{1}\cdot\tfrac{3}{2}\cdot\ldots\cdot\tfrac{n+1}{n}\right) = \ln(n+1).$$

Zaporedje delnih vsot narašča čez vse meje, kar pomeni, da vrsta $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln(1+\frac{1}{n})$ divergira.

$\square$

Vsoto vrste je praviloma težko natančno izračunati. Zato se moramo pogosto zadovoljiti s tem, da ugotovimo, ali dana vrsta sploh konvergira. Če vemo, da konvergira, lahko njeno vsoto aproksimiramo s končnimi vsotami.

Za testiranje vrst s pozitivnimi členi (oziroma absolutne konvergence v splošnem) imamo na razpolago naslednje kriterije:

· primerjalni kriterij,
· kvocientni kriterij,
· korenski kriterij,
· Raabejev kriterij.

(4) Obravnavaj konvergenco vrst:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}}$,

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+3n}$,

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\tfrac{1}{3^n}$.

*Rešitev:* Pri tej nalogi bomo uporabili:

Primerjalni kriterij: Naj bosta $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ in $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ vrsti s pozitivnimi členi in naj velja $a_n \leq b_n$ za vse $n$ od nekod dalje. Potem velja:

· če je vrsta $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergentna, je tudi vrsta $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentna,

· če je vrsta $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentna, je tudi vrsta $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergentna.

Tipično bomo vrste primerjali z:

· vrstami oblike $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ za $s > 0$,

· geometrijskimi vrstami oblike $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ za $q > 0$.

Pri tem bomo uporabili dejstvo, da vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ konvergira natanko tedaj, ko je $s > 1$, geometrijska vrsta pa natanko tedaj, ko je $q < 1$.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}}$ :

Uporabimo oceno

$$\frac{1}{n\sqrt{n+1}} < \frac{1}{n\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n^3}}.$$

Torej je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}.$$

Ker je $\frac{3}{2} > 1$, vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ konvergira, zato po primerjalnem kriteriju sledi, da tudi vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}}$ konvergira.

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+3n}$ :

Sedaj lahko ocenimo

$$\frac{n+1}{n^2+3n} > \frac{n}{n^2+3n} = \frac{1}{n+3}.$$

Torej je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+3n} > \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+3}.$$

Ker vrsta na desni divergira, je tudi vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+3n}$ divergentna.

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{1}{3^n}$ :

Uporabili bomo neenakost $\sin x < x$, ki velja za vse $x > 0$. Sledi

$$2^n \sin \frac{1}{3^n} < \frac{2^n}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

Velja torej $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{1}{3^n} < \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$. Geometrijska vrsta na desni konvergira, zato je tudi vrsta $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{1}{3^n}$ konvergentna. $\square$

(5) Obravnavaj konvergenco vrst:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$, $a > 0$,

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n^s}$, $a > 0$, $s \in \mathbb{R}$,

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(an)^n}$, $a > 0$,

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}$.

*Rešitev:* Pri tej nalogi bomo uporabili:

Kvocientni kriterij: Naj bo $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ vrsta s pozitivnimi členi in naj obstaja $D = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Potem velja:

· če je $D < 1$, je vrsta konvergentna,
· če je $D > 1$, je vrsta divergentna,
· če je $D = 1$, je vrsta ali konvergentna ali divergentna.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$ :

V tem primeru je $a_n = \frac{a^n}{n!}$. Od tod sledi

$$D = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{a^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{n+1} = 0.$$

Ker je $D < 1$, vrsta $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$ konvergira za vsak $a > 0$.

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n^s}$ :

Sedaj je $a_n = \frac{a^n}{n^s}$. Torej je

$$D = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{a^{n+1}}{(n+1)^s}}{\frac{a^n}{n^s}} = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{(1+\frac{1}{n})^s} = a.$$

Z uporabo kvocientnega kriterija tako dobimo:

· če je $a < 1$, vrsta konvergira za vsak $s$,
· če je $a > 1$, vrsta divergira za vsak $s$.

V primeru, ko je $a = 1$, imamo opravka z vrsto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Za to vrsto pa vemo, da konvergira natanko takrat, ko je $s > 1$.

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(an)^n}$ :

Tokrat imamo $a_n = \frac{n!}{(an)^n}$. Sledi

$$D = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)!}{(a(n+1))^{n+1}}}{\frac{n!}{(an)^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!a^n n^n}{n!a^{n+1}(n+1)^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{1}{ae}.$$

Velja torej naslednje:

· če je $a > \frac{1}{e}$, vrsta konvergira,
· če je $a < \frac{1}{e}$, vrsta divergira.

Posebej moramo obravnavati še primer, ko je $a = \frac{1}{e}$. Tedaj je

$$a_n = \frac{e^n n!}{n^n}.$$

Če primerjamo dva zaporedna člena, dobimo

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{e^{n+1}(n+1)!n^n}{e^n n!(n+1)^{n+1}} = \frac{e}{(1+\frac{1}{n})^n}.$$

Za zaporedje $(1+\frac{1}{n})^n$ vemo, da je naraščajoče in da ima limito $e$. Ker so vsi členi tega zaporedja strogo manjši od $e$, je

$$a_{n+1} > a_n,$$

kar pomeni, da členi vrste naraščajo. Vrsta torej divergira, saj je potreben pogoj za konvergenco vrste, da členi limitirajo proti nič.

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}$ :

Najprej opomnimo, da je dvojna fakulteta oznaka za naslednji števili:

$$(2n)!! = 2n(2n-2)(2n-4)\cdot\ldots\cdot 4\cdot 2,$$
$$(2n+1)!! = (2n+1)(2n-1)(2n-3)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 1.$$

Namesto produkta vseh števil torej vzamemo samo vsako drugo število. Računajmo

$$D = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!(2n+3)}}{\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)!!(2n)!!(2n+1)}{(2n+2)!!(2n-1)!!(2n+3)} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)(2n+1)}{(2n+2)(2n+3)} = 1.$$

Pri računanju limite smo uporabili naslednji enakosti:

$$\frac{(2n+1)!!}{(2n-1)!!} = \frac{(2n+1)(2n-1)(2n-3)\cdots 7\cdot 5\cdot 3\cdot 1}{(2n-1)(2n-3)\cdots 7\cdot 5\cdot 3\cdot 1} = 2n+1,$$

$$\frac{(2n)!!}{(2n+2)!!} = \frac{2n(2n-2)\cdots 8\cdot 6\cdot 4\cdot 2}{(2n+2)2n(2n-2)\cdots 8\cdot 6\cdot 4\cdot 2} = \frac{1}{2n+2}.$$

Ker pride limita enaka $D = 1$, nam kvocientni kriterij nič ne pove o konvergenci vrste. V takšnih primerih nam včasih pomaga:

Raabejev kriterij: Naj bo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ vrsta s pozitivnimi členi in naj obstaja

$$R = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right).$$

Potem velja:

- če je $R > 1$, je vrsta konvergentna,
- če je $R < 1$, je vrsta divergentna,
- če je $R = 1$, je vrsta ali konvergentna ali divergentna.

V našem primeru je

$$R = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{(2n+2)(2n+3)}{(2n+1)(2n+1)} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{4n^2+10n+6-(4n^2+4n+1)}{4n^2+4n+1}\right) = \frac{3}{2}.$$

Ker je $R = \frac{3}{2} > 1$, vrsta konvergira. □

(6) Obravnavaj konvergenco vrst:

(a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^n n}$,

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{n}\right)^n$, $a > 0$,

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$,

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} na^n$, $a > 0$.

*Rešitev:* Tokrat imamo vrste, ki jih lahko obravnavamo z uporabo korenskega kriterija.

Korenski kriterij: Naj bo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ vrsta s pozitivnimi členi in naj obstaja $C = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$. Potem velja:

· če je $C < 1$, je vrsta konvergentna,
· če je $C > 1$, je vrsta divergentna,
· če je $C = 1$, je vrsta ali konvergentna ali divergentna.

(a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^n n}$ :

Splošni člen je $a_n = \frac{1}{\ln^n n}$. Torej je

$$C = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{\ln^n n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n} = 0.$$

Ker je $C = 0 < 1$, vrsta $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^n n}$ konvergira.

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{n}\right)^n$ :

Tokrat je $a_n = \left(\frac{a}{n}\right)^n$. Sledi

$$C = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{a}{n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{n} = 0.$$

Vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{n}\right)^n$ torej konvergira za vsak $a > 0$.

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$ :

Sedaj je $a_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$, od koder dobimo $C = 1$. To pomeni, da korenski kriterij nič ne pove o konvergenci vrste. Opazimo pa lahko, da je

$$\lim_{n\to\infty} (a_n) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = e,$$

kar pomeni, da vrsta divergira.

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} na^n$ :

Imamo $a_n = na^n$. Torej je

$$C = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{na^n} = \lim_{n\to\infty} a\sqrt[n]{n} = a.$$

Z uporabo korenskega kriterija tako dobimo:

· če je $a < 1$, vrsta konvergira,
· če je $a > 1$, vrsta divergira.

Če je $a = 1$, imamo vrsto $\sum_{n=1}^{\infty} n$, ki pa divergira. □

(7) Naj bo $(x_n)$ padajoče zaporedje pozitivnih realnih števil. Dokaži, da vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konvergira natanko takrat, ko konvergira vrsta $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k x_{2^k}$.

*Rešitev:* Opravka imamo z vrstama:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + \dots,$$
$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k x_{2^k} = 2x_2 + 4x_4 + 8x_8 + 16x_{16} + 32x_{32} + \dots.$$

Denimo najprej, da vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konvergira. Ker je zaporedje $(x_n)$ padajoče, imamo ocene:

$$\begin{aligned} 2x_4 &\le x_3 + x_4, \\ 4x_8 &\le x_5 + x_6 + x_7 + x_8, \end{aligned}$$

oziroma v splošnem

$$2^{k-1} x_{2^k} \le x_{2^{k-1}+1} + x_{2^{k-1}+2} + \dots + x_{2^k}.$$

Sedaj velja:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} 2^k x_{2^k} &= 2\sum_{k=1}^{\infty} 2^{k-1} x_{2^k}, \\ &= 2(x_2 + 2x_4 + 4x_8 + 8x_{16} + 16x_{32} + \dots), \\ &\le 2(x_2 + (x_3 + x_4) + (x_5 + x_6 + x_7 + x_8) + \dots), \\ &= 2\sum_{n=2}^{\infty} x_n. \end{aligned}$$

Po primerjalnem kriteriju torej konvergira tudi vrsta $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k x_{2^k}$.

V obratno smer je dokaz podoben. Denimo torej, da vrsta $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k x_{2^k}$ konvergira. Da potem konvergira tudi vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, sledi iz ocene

$$x_1 + (x_2 + x_3) + (x_4 + x_5 + x_6 + x_7) + \ldots \leq x_1 + 2x_2 + 4x_4 + \ldots .$$

Poglejmo si uporabo tega kriterija na dveh konkretnih primerih.

Najprej poglejmo vrsto $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$. Ta vrsta konvergira natanko takrat, ko konvergira vrsta

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \cdot \frac{1}{2^k \ln 2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \ln 2}.$$

Ker vrsta na desni divergira, torej tudi vrsta $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ divergira.

Po drugi strani pa vrsta $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$ konvergira natanko takrat, ko konvergira vrsta

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \cdot \frac{1}{2^k \ln^2 2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 \ln^2 2}.$$

Tokrat pa vrsta na desni konvergira. $\square$

Do sedaj smo se ukvarjali z vrstami s pozitivnimi členi in spoznali definicijo vsote takšne vrste. Ta vsota je bodisi neko pozitivno realno število, ali pa je neskončna. Če vsi členi v vrsti niso pozitivni, pa se stvari malce zakomplicirajo. Za vrsto $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ z ne nujno pozitivnimi členi rečemo, da:

· konvergira absolutno, če konvergira vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$,

· konvergira pogojno, če konvergira, a ne konvergira absolutno.

Absolutno konvergentne vrste imajo lastnosti, na katere smo navajeni pri seštevanju števil. Tako je na primer vsota absolutno konvergentne vrste neodvisna od vrstnega reda členov. Vsota pogojno konvergentne vrste pa je po drugi strani odvisna od vrstnega reda členov. Če primerno zamenjamo vrstni red, lahko dobimo celo poljubno vsoto.

Če ima vrsta pozitivne člene, je konvergenca ekvivalentna absolutni konvergenci.

(8) Obravnavaj absolutno in pogojno konvergenco naslednjih vrst:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{2^n}$,

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{1 - a^n}$, $|a| \neq 1$.

*Rešitev:*

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{2^n}$ :

Členi vrste $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{2^n}$ niso nujno pozitivni. Zato najprej poskusimo ugotoviti, če konvergira absolutno. Iz ocene $|\sin x| \leq 1$, dobimo oceno

$$\left|\frac{\sin n}{2^n}\right| \leq \frac{1}{2^n}.$$

Od tod sledi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\sin n}{2^n}\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \infty.$$

Po primerjalnem kriteriju tako dobimo, da je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{2^n}$ absolutno konvergentna.

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{1-a^n}$ :

Imamo vrsto s splošnim členom $a_n = \frac{a^n}{1-a^n}$, ki v splošnem nima samo pozitivnih členov. Če je $|a| > 1$, je

$$\lim_{n\to\infty} (a_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{1-a^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{a^n} - 1} = -1,$$

od koder sledi, da vrsta divergira.

Če je $|a| < 1$, pa je vrsta absolutno konvergentna. To lahko na primer dokažemo z uporabo korenskega kriterija, saj je

$$C = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{a^n}{1-a^n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|a|}{\sqrt[n]{|1-a^n|}} = |a|.$$

□

(9) Obravnavaj absolutno in pogojno konvergenco naslednjih vrst:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^{\alpha}}$, $\alpha > 0$,

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{tg} \tfrac{1}{n}$,

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (1 + \tfrac{1}{n})^{-n} \operatorname{tg} \tfrac{1}{n}$,

(d) $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \ldots$.

*Rešitev:* Med vrstami z ne nujno pozitivnimi členi so najbolj pogoste alternirajoče vrste, pri katerih se predznaki členov izmenjujejo. To pomeni, da je $a_n a_{n+1} < 0$ za vsak $n \in \mathbb{N}$. Za alternirajoče vrste lahko pogosto uporabimo:

<u>Leibnizev kriterij:</u> Če absolutne vrednosti

$$|a_1| > |a_2| > |a_3| > \cdots$$

členov alternirajoče vrste monotono padajo proti nič, je vrsta konvergentna.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^\alpha}$ :

Vemo že, da je vrsta $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^\alpha}$ absolutno konvergentna natanko tedaj, ko je $\alpha > 1$.
Za dokaz konvergence vrste bomo uporabili Leibnizev kriterij. Vrsta je alternirajoča, zaporedje absolutnih vrednosti členov vrste

$$1, \frac{1}{2^\alpha}, \frac{1}{3^\alpha}, \frac{1}{4^\alpha}, \ldots$$

pa monotono pada proti nič, saj je funkcija $f(x) = x^\alpha$ za $\alpha > 0$ naraščajoča, zvezna na $[0, \infty)$ in $f(0) = 0$. Od tod sklepamo, da je vrsta $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^\alpha}$ konvergentna za vsak $\alpha > 0$, kar pa pomeni, da je za $0 < \alpha \leq 1$ vrsta pogojno konvergentna.

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{tg} \tfrac{1}{n}$ :

Pokažimo najprej, da vrsta ne konvergira absolutno. Za $x \in [0, 1]$ velja ocena $\operatorname{tg} x \geq x$, od koder sledi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \tfrac{1}{n} > \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{1}{n} = \infty.$$

Z uporabo Leibnizevega kriterija bomo spet pokazali, da vrsta konvergira. Je alternirajoča, zaporedje absolutnih vrednosti členov vrste

$$\operatorname{tg} 1, \operatorname{tg} \frac{1}{2}, \operatorname{tg} \frac{1}{3}, \operatorname{tg} \frac{1}{4}, \ldots$$

pa monotono pada proti nič, saj je funkcija tg naraščajoča in zvezna na $[0, 1]$ ter $\operatorname{tg}(0) = 0$. Torej je vrsta $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{tg} \frac{1}{n}$ pogojno konvergentna.

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (1 + \tfrac{1}{n})^{-n} \operatorname{tg} \tfrac{1}{n}$ :

Ker je $(1 + \frac{1}{n})^n < 3$ za vsak $n \in \mathbb{N}$, imamo oceno

$$|a_n| = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{n}}{(1 + \frac{1}{n})^n} > \tfrac{1}{3} \operatorname{tg} \tfrac{1}{n}.$$

Torej je

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| > \tfrac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \tfrac{1}{n}.$$

Pri prejšnji nalogi smo že pokazali, da vrsta na desni divergira, od koder sledi, da vrsta $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n (1+\frac{1}{n})^{-n} \operatorname{tg} \frac{1}{n}$ ni absolutno konvergentna.

Ta vrsta je alternirajoča, absolutne vrednosti členov pa so

$$|a_n| = (1+\tfrac{1}{n})^{-n} \operatorname{tg} \tfrac{1}{n} = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{n}}{(1+\frac{1}{n})^n}.$$

Zaporedje $\operatorname{tg} \frac{1}{n}$ je padajoče z limito 0, zaporedje $(1+\frac{1}{n})^n$ pa naraščajoče z limito $e$. Od tod sledi, da je zaporedje $|a_n|$ padajoče z limito 0. Po Leibnizevem kriteriju je torej dana vrsta konvergentna. Ker ni absolutno konvergentna, je pogojno konvergentna.

(d) $\dfrac{1}{\sqrt{2}-1} - \dfrac{1}{\sqrt{2}+1} + \dfrac{1}{\sqrt{3}-1} - \dfrac{1}{\sqrt{3}+1} + \ldots$ :

Vrsta je alternirajoča, vendar pa absolutne vrednosti njenih členov ne padajo monotono proti nič, zato Leibnizevega kriterija ne moremo uporabiti. Pokazali bomo celo, da vrsta divergira.

Razdelimo vrsto tako, da vzamemo skupaj po dva zaporedna člena. Za vsak $n > 1$ tako dobimo

$$\frac{1}{\sqrt{n}-1} - \frac{1}{\sqrt{n}+1} = \frac{\sqrt{n}+1-(\sqrt{n}-1)}{(\sqrt{n}-1)(\sqrt{n}+1)} = \frac{2}{n-1}.$$

Od tod sledi, da za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja

$$s_{2n} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n+1}-1} - \frac{1}{\sqrt{n+1}+1} = \sum_{n=2}^{n+1} \frac{2}{n-1}.$$

Vemo, da harmonična vrsta divergira, zato sode delne vsote naraščajo proti neskončnosti. To pa pomeni, da je dana vrsta divergentna. □

(10) Z upoštevanjem rezultata

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$$

poišči vsoto spodnje vrste, ki jo dobimo z zamenjavo vrstnega reda členov dane vrste:

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n} + \cdots$$

*Rešitev:* Vsoto prvih treh členov in naslednjih treh členov lahko zapišemo v obliki:

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right),$$
$$\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} = \frac{1}{6} - \frac{1}{8} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right).$$

Vsoto $n$-te trojice členov pa lahko izrazimo v obliki

$$\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n}=\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right).$$

Z upoštevanjem vsote

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\ldots=\ln 2$$

od tod sledi

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\cdots=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots=\frac{1}{2}\ln 2.$$

Vidimo, da smo z zamenjavo vrstnega reda seštevanja dobili drugačno vsoto. S primerno izbiro vrstnega reda bi lahko celo dosegli, da je vsota vrste poljubno realno število. $\square$