Analiza 1

Odvod

(1) Izračunaj odvode funkcij:

(a) $f(x) = e^{-\cos x}$,

(b) $f(x) = x^n \ln\left(\dfrac{x}{1+\sqrt{x}}\right)$, $n \in \mathbb{N}$,

(c) $f(x) = \dfrac{2^{3x}}{3^{x^2}}$,

(d) $f(x) = \dfrac{1-\ln^2 x}{\ln 3 + \ln^3 x}$,

(e) $f(x) = \ln(\ln(\ln x))$,

(f) $f(x) = (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$.

Rešitev: Odvode danih funkcij bomo izračunali s pomočjo tabele osnovnih odvodov in pa s pomočjo pravil za odvod vsote, razlike, produkta, kvocienta in pa kompozituma funkcij:

$$\begin{aligned}
(f \pm g)'(x) &= f'(x) \pm g'(x), \\
(f \cdot g)'(x) &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x), \\
\left(\frac{f}{g}\right)'(x) &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}, \\
(f(g(x)))' &= f'(g(x)) \cdot g'(x).
\end{aligned}$$

(a) Funkcija $f(x) = e^{-\cos x}$ je kompozitum kosinusne in eksponentne funkcije, zato je

$$f'(x) = e^{-\cos x}(-\cos x)' = \underline{\underline{e^{-\cos x}\sin x}}.$$

(b) Pri funkciji $f(x) = x^n \ln\left(\frac{x}{1+\sqrt{x}}\right)$ bomo uporabili pravila za produkt, kompozitum in kvocient funkcij. Tako dobimo:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= nx^{n-1}\ln\left(\frac{x}{1+\sqrt{x}}\right) + x^n\left(\ln\left(\frac{x}{1+\sqrt{x}}\right)\right)', \\
&= nx^{n-1}\ln\left(\frac{x}{1+\sqrt{x}}\right) + x^n \cdot \frac{1}{\frac{x}{1+\sqrt{x}}} \cdot \frac{1\cdot(1+\sqrt{x}) - x\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(1+\sqrt{x})^2}, \\
&= \underline{\underline{nx^{n-1}\ln\left(\frac{x}{1+\sqrt{x}}\right) + x^{n-1}\frac{1+\frac{\sqrt{x}}{2}}{1+\sqrt{x}}}}.
\end{aligned}$$

(c) Za izračun odvoda funkcije $f(x) = \frac{2^{3x}}{3^{x^2}}$ bomo uporabili pravili za odvod kvocienta in kompozituma

$$f'(x) = \frac{(2^{3x})' \cdot 3^{x^2} - 2^{3x}\cdot\left(3^{x^2}\right)'}{\left(3^{x^2}\right)^2} = \frac{3\ln 2 \cdot 2^{3x}\, 3^{x^2} - 2^{3x}2x\ln 3 \cdot 3^{x^2}}{\left(3^{x^2}\right)^2} = \underline{\underline{\frac{2^{3x}(3\ln 2 - 2x\ln 3)}{3^{x^2}}}}.$$

(d) Pri odvajanju funkcije $f(x) = \frac{1-\ln^2 x}{\ln 3+\ln^3 x}$ bomo zopet uporabili pravili za odvod kvocienta in kompozituma

$$f'(x) = \frac{-2\frac{\ln x}{x} \cdot (\ln 3 + \ln^3 x) - (1 - \ln^2 x) \cdot \frac{3\ln^2 x}{x}}{(\ln 3 + \ln^3 x)^2} = \underline{\underline{\frac{\ln x(-2\ln 3 + \ln^3 x - 3\ln x)}{x(\ln 3 + \ln^3 x)^2}}}.$$

(e) Za odvod funkcije $f(x) = \ln(\ln(\ln x))$ bomo dvakrat uporabili formulo za odvod kompozituma

$$f'(x) = \frac{(\ln(\ln x))'}{\ln(\ln x)} = \frac{(\ln x)'}{\ln x \ln(\ln x)} = \underline{\underline{\frac{1}{x\ln x\ \ln(\ln x)}}}.$$

(f) Sedaj imamo funkcijo oblike $f(x) = (\sin x)^{\operatorname{tg} x} = g(x)^{h(x)}$. Takšne funkcije odvajamo tako, da jih najprej napišemo v obliki

$$f(x) = e^{h(x)\ln g(x)}$$

in jih nato odvajamo z uporabo verižnega pravila. V našem primeru je $f(x) = e^{\operatorname{tg} x \ln(\sin x)}$, od koder sledi

$$f'(x) = e^{\operatorname{tg} x \ln(\sin x)} \cdot (\operatorname{tg} x \ln(\sin x))' = \underline{\underline{(\sin x)^{\operatorname{tg} x}\left(\frac{1}{\cos^2 x}\ln(\sin x) + 1\right)}}.$$

□

(2) (a) Izračunaj odvode funkcij sh, ch in th.
(b) Izračunaj odvode funkcije arsh, arch in arth na dva načina.

Rešitev: (a) Spomnimo se, da so hiperbolične funkcije definirane s predpisi:

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \\ \operatorname{ch} x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \\ \operatorname{th} x &= \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}. \end{aligned}$$

Od tod dobimo:

$$\begin{aligned} (\operatorname{sh} x)' &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x, \\ (\operatorname{ch} x)' &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh} x, \\ (\operatorname{th} x)' &= \left(\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}\right)' = \frac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}. \end{aligned}$$

(b) Inverzi teh treh hiperboličnih funkcij so dani s predpisi:

$$\begin{aligned} \operatorname{arsh} x &= \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}), \\ \operatorname{arch} x &= \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), \\ \operatorname{arth} x &= \tfrac{1}{2}\ln\left(\tfrac{1+x}{1-x}\right). \end{aligned}$$

Če želimo izračunati njihove odvode, imamo na voljo dve možnosti. Lahko odvajamo dane predpise ali pa uporabimo formulo za odvod inverzne funkcije.

Z odvajanjem predpisov dobimo:

$$
\begin{aligned}
(\operatorname{arsh} x)' &= \frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}} = \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{(x+\sqrt{x^2+1})\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}, \\
(\operatorname{arch} x)' &= \frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{x+\sqrt{x^2-1}} = \frac{\sqrt{x^2-1}+x}{(x+\sqrt{x^2-1})\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \\
(\operatorname{arth} x)' &= \tfrac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{1+x}{1-x}} \cdot \frac{(1-x)+(1+x)}{(1-x)^2} = \frac{1}{1-x^2}.
\end{aligned}
$$

Po drugi strani pa lahko za izračun odvoda inverzne funkcije uporabimo formulo

$$
(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.
$$

Z upoštevanjem zvez:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x &= 1, \\
1 - \operatorname{th}^2 x &= \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}
\end{aligned}
$$

tako dobimo:

$$
\begin{aligned}
(\operatorname{arsh} x)' &= \frac{1}{\operatorname{ch}(\operatorname{arsh} x)} = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{sh}^2(\operatorname{arsh} x)}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \\
(\operatorname{arch} x)' &= \frac{1}{\operatorname{sh}(\operatorname{arch} x)} = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}^2(\operatorname{arch} x)-1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \\
(\operatorname{arth} x)' &= \frac{1}{\frac{1}{\operatorname{ch}^2(\operatorname{arth} x)}} = \frac{1}{1-\operatorname{th}^2(\operatorname{arth} x)} = \frac{1}{1-x^2}.
\end{aligned}
$$

<u>Opomba</u>: Hiperbolični sinus in kosinus smo že podrobneje obravnavali, zato si na hitro poglejmo še hiperbolični tangens. Hiperbolični tangens th je liha naraščajoča funkcija z vodoravnima asimptotama:

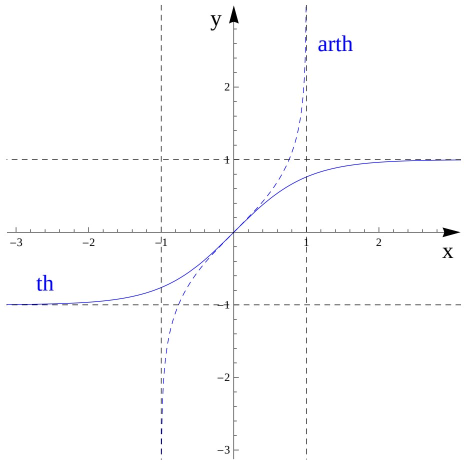
$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \operatorname{th} x &= \lim_{x\to\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}} = 1, \\
\lim_{x\to-\infty} \operatorname{th} x &= \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = -1.
\end{aligned}
$$

To pomeni, da je $\operatorname{th} : \mathbb{R} \to (-1,1)$ zvezna bijekcija. Njen inverz

$$
\operatorname{arth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}
$$

je posledično zvezna bijekcija $\operatorname{arth} : (-1,1) \to \mathbb{R}$.

Poglejmo še grafa funkcij th in arth v istem koordinatnem sistemu.



□

(3) Poišči globalne ekstreme funkcije $f(x) = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$ na intervalu $[0, 2]$.

Rešitev: Vsaka zvezna funkcija f na omejenem zaprtem intervalu $[a, b]$ na tem intervalu doseže svojo minimalno in maksimalno vrednost. Če je funkcija f še razmeroma gladka, lahko ti dve vrednosti poiščemo s pomočjo odvoda. Pri iskanju ekstremnih vrednosti najprej zožimo nabor morebitnih kandidatov na naslednje tipe točk z intervala $[a, b]$:

· stacionarne točke funkcije f v (a, b) (to so točke $x \in (a, b)$, za katere velja $f'(x) = 0$),
· robni točki intervala $[a, b]$,
· točke na intervalu (a, b), v katerih funkcija f ni odvedljiva.

Funkcija arc sin je definirana in zvezna na intervalu $[-1, 1]$, odvedljiva pa je na intervalu $(-1, 1)$. Ker za vsak $x \in \mathbb{R}$ velja $\left|\frac{2x}{1+x^2}\right| \leq 1$, je torej f definirana in zvezna na celem $\mathbb{R}$, odvedljiva pa je povsod razen v točkah $x = \pm 1$.

Najprej izračunajmo odvod funkcije $f(x) = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$. Velja

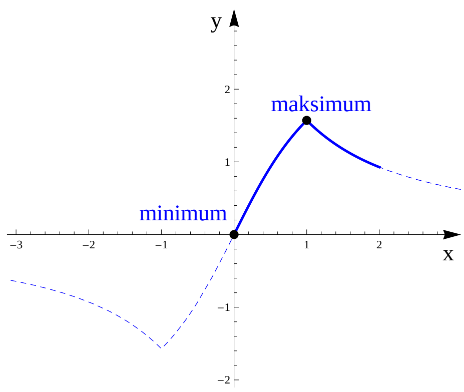
$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}} \cdot \frac{2(1 + x^2) - 2x \cdot 2x}{(1 + x^2)^2} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}} \cdot \frac{2(1 - x^2)}{(1 + x^2)^2}.$$

Edina ničli števca sta $x = \pm 1$, vendar pa v teh dveh točkah funkcija f ni odvedljiva. Torej funkcija f nima stacionarnih točk.

Kandidati za ekstreme funkcije f na intervalu $[0, 2]$ so torej točka $x = 1$, kjer f ni odvedljiva, in pa robni točki $x = 0$ in $x = 2$. Sedaj moramo izračunati vrednosti funkcije f v teh točkah, da najdemo ekstremni vrednosti. Iz vrednosti $f(0) = 0$, $f(1) = \frac{\pi}{2}$ in $f(2) = \arcsin \frac{4}{5}$ sklepamo, da je:

$$\max(f) = \tfrac{\pi}{2} \text{ pri } x = 1,$$
$$\min(f) = 0 \text{ pri } x = 0.$$

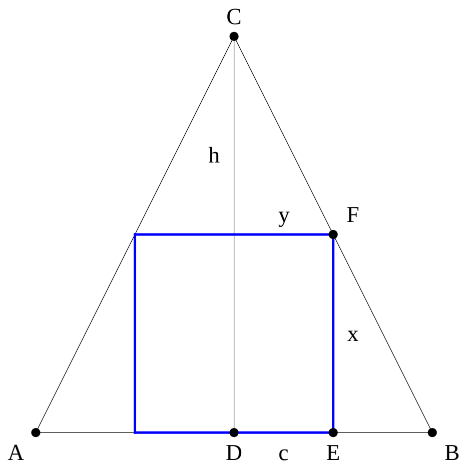
Poglejmo še graf funkcije f.



$\square$

(4) V enakokrak trikotnik z osnovnico c in višino h včrtaj pravokotnik, ki ima eno stranico vzporedno osnovnici in ima največjo možno ploščino.

Rešitev: Poglejmo najprej skico.



Denimo, da sta dolžini stranic pravokotnika enaki x in y. Ploščina pravokotnika je potem $S = xy$. Ker je pravokotnik včrtan trikotniku, dolžini x in y nista neodvisni. Z upoštevanjem podobnih trikotnikov BCD in BFE dobimo zvezo

$$\frac{x}{h} = \frac{\frac{c}{2} - \frac{y}{2}}{\frac{c}{2}}.$$

Od tod lahko izrazimo

$$y = \frac{c(h-x)}{h} = c - \frac{c}{h}x.$$

Ploščina včrtanega pravokotnika je torej funkcija spremenljivke x s predpisom

$$S(x) = cx - \frac{c}{h}x^2.$$

Ker so geometrično smiselne samo vrednosti $x \in [0, h]$, je naš cilj poiskati maksimum funkcije S na tem intervalu. Funkcija S je povsod odvedljiva, v robnih točkah pa velja

$S(0) = S(h) = 0$ (to je zato, ker se v teh dveh točkah pravokotnik zdegenerira v daljici). Odvod funkcije S je

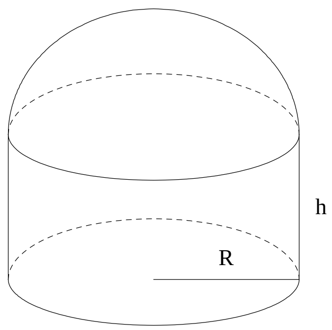
$$S'(x) = c - \frac{2cx}{h}.$$

Imamo torej eno stacionarno točko $x = \frac{h}{2}$. Ker je S kvadratna funkcija z negativnim vodilnim koeficientom, ima v tej točki maksimum.

Izmed vseh včrtanih pravokotnikov ima torej največjo ploščino tisti s stranicama $x = \frac{h}{2}$ in $y = \frac{c}{2}$, njegova ploščina pa je enaka $S = \frac{ch}{4}$. $\square$

(5) Cena enote površine valjastega dela silosa je dvakrat nižja od cene enote površine sferne kupole. Pri danem volumnu določi dimenzije najcenejšega silosa.

Rešitev: Denimo, da ima valjasti del silosa višino h in polmer osnovne ploskve R.



Sferna kupola je potem polovica sfere s polmerom R. Pri danih R in h ima silos volumen

$$V = \pi R^2 h + \frac{2}{3}\pi R^3.$$

Površina plašča valja je enaka $P_{\text{valj}} = 2\pi Rh$, površina sferne kupole pa $P_{\text{kupola}} = 2\pi R^2$. Če označimo z α ceno enote površine valjastega dela silosa, je skupna cena silosa enaka

$$c = 2\pi Rh \cdot \alpha + 2\pi R^2 \cdot 2\alpha = 2\pi\alpha(Rh + 2R^2).$$

Zaenkrat imamo ceno izraženo s spremenljivkama R in h. Iz izraza za volumen pa lahko izrazimo $h = \frac{V}{\pi R^2} - \frac{2}{3}R$, da dobimo

$$c(R) = 2\pi\alpha\left(R\left(\frac{V}{\pi R^2} - \frac{2}{3}R\right) + 2R^2\right) = 2\pi\alpha\left(\frac{V}{\pi R} + \frac{4}{3}R^2\right).$$

Sedaj bi radi našli minimum funkcije c na intervalu $(0, \infty)$ (če smo povsem natančni, nas zanimajo samo vrednosti, ko je $\frac{2}{3}\pi R^3 < V$). Funkcija c je racionalna funkcija s polom pri $R = 0$ in s kvadratno asimptoto. Torej velja

$$\lim_{R\downarrow 0} c(R) = \lim_{R\to\infty} c(R) = \infty.$$

Ker je funkcija c zvezna na $(0, \infty)$, mora nekje na tem intervalu doseči minimum. Odvod funkcije c je

$$c'(R) = 2\pi\alpha\left(-\frac{V}{\pi R^2} + \frac{8}{3}R\right).$$

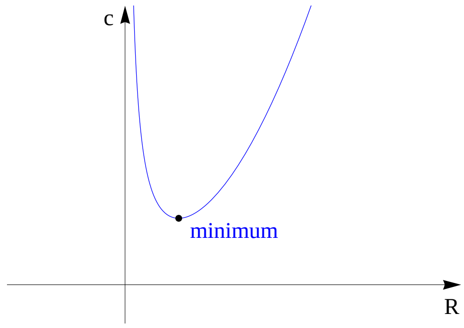
Od tod sledi, da ima c eno stacionarno točko

$$R = \sqrt[3]{\frac{3V}{8\pi}},$$

v kateri doseže minimum. Pri tej vrednosti R je višina silosa enaka

$$h = \sqrt[3]{\frac{3V}{\pi}}.$$

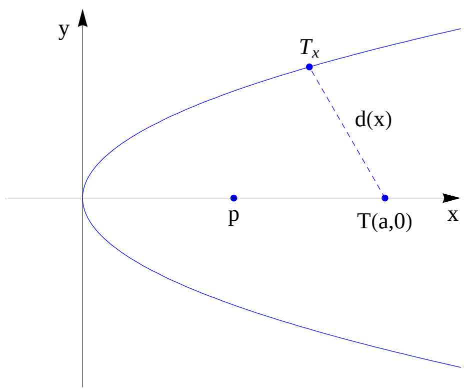
Za konec poglejmo še graf funkcije c.



$\square$

(6) Naj bosta $a, p > 0$. Na paraboli $y^2 = 2px$ poišči točko, ki je najbližja točki $(a, 0)$.

Rešitev: Iščemo točko na paraboli $y^2 = 2px$, ki je najbližja točki $(a, 0)$ na abscisni osi.



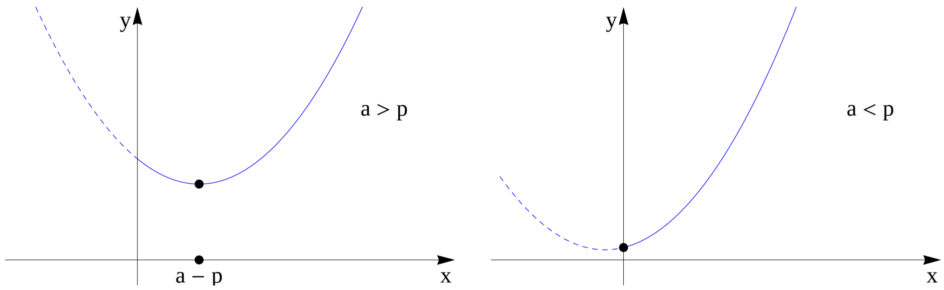
Najprej opazimo, da se lahko zaradi simetrije omejimo samo na točke, ki ležijo na zgornji veji parabole. Točka $T(a, 0)$ je namreč enako oddaljena od točk $(x, \sqrt{2px})$ in $(x, -\sqrt{2px})$. Če označimo $T_x(x, \sqrt{2px})$, je razdalja med točkama T_x in T enaka

$$d(x) = d(T_x, T) = \sqrt{(x-a)^2 + (\sqrt{2px} - 0)^2} = \sqrt{(x-a)^2 + 2px}.$$

Iščemo minimum funkcije d na intervalu $[0, \infty)$. Pri iskanju minimumov funkcij oblike $d(x) = \sqrt{f(x)}$ lahko upoštevamo dejstvo, da dosežeta funkciji d in f minimuma v istih točkah. Namesto stacionarnih točk funkcije d zato raje poiščemo stacionarne točke funkcije f, saj se s tem izognemo odvajanju korena. V našem primeru je $f(x) = (x-a)^2 + 2px$ in

$$f'(x) = 2(x-a) + 2px = 2(x + p - a).$$

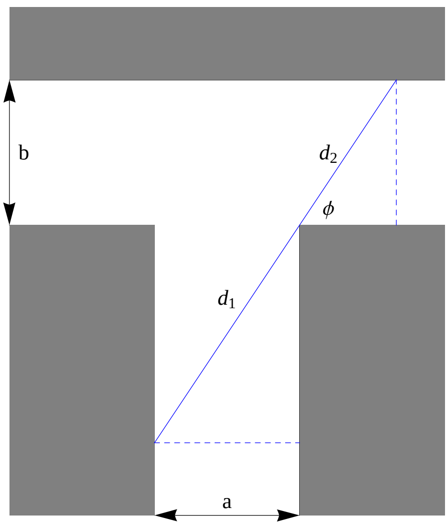
Kvadratna funkcija f ima torej teme v točki $x = a - p$, mi pa iščemo minimum funkcije f na intervalu $[0, \infty)$. Ločiti moramo primera $a > p$ in $a \leq p$. Če je $a > p$, je $a - p > 0$, zato ima funkcija f minimum v točki $x = a - p$. Če pa je $a \leq p$, pa ima f minimum v točki $x = 0$.



Od tod sklepamo, da je v primeru, ko je $a \leq p$, točki $(a, 0)$ najbližja točka $(0, 0)$ na paraboli. Če pa je $a > p$, pa sta točki $(a, 0)$ najbližji dve točki $(a - p, \sqrt{2p(a-p)})$ in $(a - p, -\sqrt{2p(a-p)})$. $\square$

(7) Kolikšna je dolžina najdaljše palice, ki jo lahko nesemo vzporedno tlem skozi hodnik s pravokotnim ovinkom, če je širina hodnika pred ovinkom enaka a, po ovinku pa b.

Rešitev: Poglejmo si tloris hodnika.



Palico želimo zavrteti iz navpične v vodoravno lego. Da bi jo lahko zavrteli do kota ϕ, bo morala biti palica krajša kot najdaljša daljica, ki jo še lahko pod kotom ϕ včrtamo v hodnik. Dolžina te najdaljše daljice je enaka

$$d(\phi) = d_1 + d_2 = \frac{a}{\cos\phi} + \frac{b}{\sin\phi}.$$

Palico bomo lahko prenesli okrog ovinka, če bo njena dolžina krajša od vseh možnih vrednosti $d(\phi)$ za $\phi \in (0, \frac{\pi}{2})$. Iščemo torej minimum funkcije

$$d : (0, \tfrac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}.$$

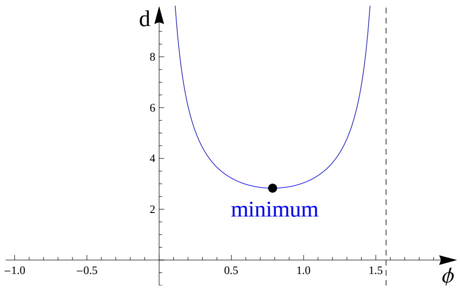
Odvod funkcije d je

$$d'(\phi) = \frac{a\sin\phi}{\cos^2\phi} - \frac{b\cos\phi}{\sin^2\phi}.$$

Sledi

$$d'(\phi) = 0 \iff \frac{\sin^3\phi}{\cos^3\phi} = \frac{b}{a} \iff \operatorname{tg}\phi = \sqrt[3]{\frac{b}{a}}.$$

Funkcija d ima torej eno stacionarno točko $\phi_0 = \operatorname{arc\,tg}\sqrt[3]{\frac{b}{a}}$. Z analizo predznaka odvoda ugotovimo, da funkcija d pada na $(0, \phi_0)$ in narašča na $(\phi_0, \frac{\pi}{2})$. Od tod sledi, da doseže d v točki ϕ_0 globalni minimum. Poleg tega velja še $\lim\limits_{\phi\downarrow 0} d(\phi) = \infty$ in $\lim\limits_{\phi\uparrow\frac{\pi}{2}} d(\phi) = \infty$.



Izračunajmo sedaj še vrednost $d(\phi_0)$. Najprej velja

$$\frac{1}{\cos\phi_0} = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\phi_0} = \sqrt{1 + b^{\frac{2}{3}}a^{-\frac{2}{3}}}.$$

Od tod dobimo:

$$\begin{aligned}
d(\phi_0) &= \frac{a}{\cos\phi_0} + \frac{b}{\sin\phi_0},\\
&= \frac{1}{\cos\phi_0}\left(a + \frac{b}{\operatorname{tg}\phi_0}\right),\\
&= \sqrt{1 + b^{\frac{2}{3}}a^{-\frac{2}{3}}}\left(a + b^{\frac{2}{3}}a^{\frac{1}{3}}\right),\\
&= \sqrt{1 + b^{\frac{2}{3}}a^{-\frac{2}{3}}}\,a\left(1 + b^{\frac{2}{3}}a^{-\frac{2}{3}}\right),\\
&= a\left(1 + b^{\frac{2}{3}}a^{-\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}},\\
&= \left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}.
\end{aligned}$$

Okrog ovinka lahko torej prenesemo palice, ki so krajše od $\left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$. □

(8) Poišči enačbo tiste tangente na graf funkcije $f(x) = -x^2 + x + 2$, ki je vzporedna premici $y = 3 - 3x$.

Rešitev: S pomočjo odvoda lahko računamo enačbe tangent na krivulje. Vrednost $f'(x)$ namreč ustreza koeficientu tangente na graf funkcije f v točki x. Ker sta dve premici vzporedni natanko takrat, ko imata enaka koeficienta, torej iščemo tak x, ki ustreza enačbi

$$f'(x) = -3.$$

Ker je $f'(x) = -2x + 1$, ima ta enačba eno samo rešitev $x = 2$.

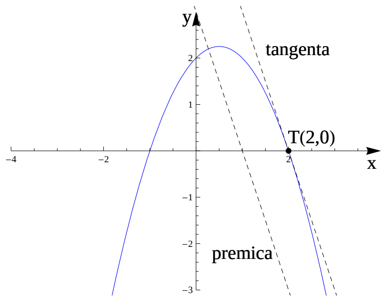
Tangenta na graf funkcije f v točki $(x_0, f(x_0))$ ima enačbo

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

V našem primeru iščemo tangento na graf funkcije f v točki $T(2, 0)$, zato ima njena tangenta enačbo

$$y = -3(x - 2) + 0 = -3x + 6.$$

Poglejmo še graf funkcije in tangente.



$\square$

(9) Poišči enačbo normale na graf funkcije $f(x) = \sqrt{\ln x}$ v $x = e$.

Rešitev: Normala na krivuljo je pravokotna na tangento, kar pomeni, da je $k_n = -\frac{1}{k_t}$. Za izračun normale moramo torej najprej izračunati odvod funkcije f. Ta je enak

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\ln x}} \cdot \frac{1}{x}.$$

V točki $x = e$ dobimo

$$k_t = f'(e) = \frac{1}{2\sqrt{\ln e}} \cdot \frac{1}{e} = \frac{1}{2e}$$

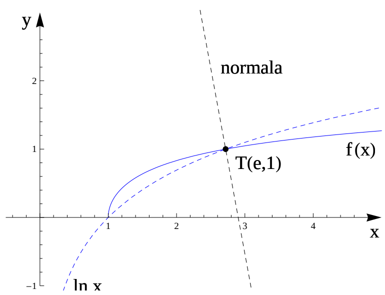
od koder sledi

$$k_n = -2e.$$

Enačba normale pa je

$$y = -2e(x - e) + 1 = -2ex + 2e^2 + 1.$$

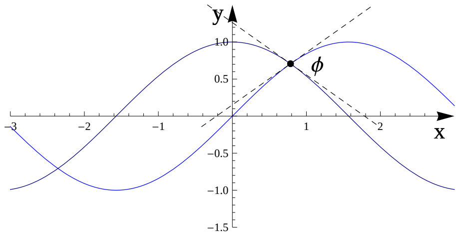
Za konec še skica.



$\square$

(10) Pod kakšnim kotom se sekata grafa funkcij $f(x) = \sin x$ in $g(x) = \cos x$.

Rešitev: Če se dve gladki krivulji sekata v neki točki, definiramo, da je kot med krivuljama v dani točki enak kotu med njunima tangentama v tej točki.



Grafa funkcij f in g se sekata v točkah, katerih x-koordinate zadoščajo enakosti

$$\sin x = \cos x.$$

To je res pri točkah oblike $x_k = \frac{\pi}{4} + k\pi$. Izkaže se, da se dani krivulji v vseh presečiščih sekata pod istim kotom, zato si bomo podrobneje pogledali samo presečišče $T\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Iz odvodov $f'(x) = \cos x$ in $g'(x) = -\sin x$ dobimo:

$$k_1 = f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2},$$
$$k_2 = g'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

V splošnem lahko kot med premicama s smernima koeficientoma k_1 in k_2 izračunamo s pomočjo formule

$$\operatorname{tg}\phi = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}.$$

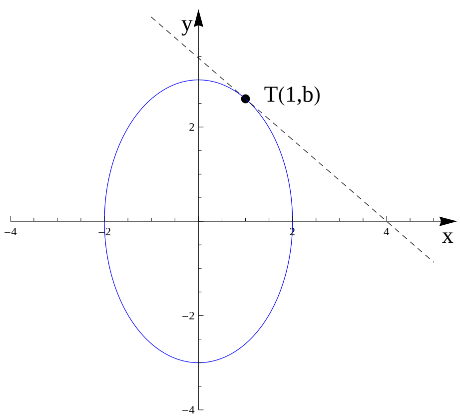
V našem primeru tako dobimo $\operatorname{tg}\phi = 2\sqrt{2}$ oziroma

$$\phi = \operatorname{arc\,tg}(2\sqrt{2}) \approx 70,5°.$$

$\square$

(11) Zapiši enačbo tangente na elipso $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ v točki $(1, b)$, kjer je $b > 0$.

Rešitev: Včasih imamo zvezo med odvisno in neodvisno spremenljivko podano z implicitno enačbo. Ker je eksplicitno izražavo načeloma težko poiskati, lahko odvod izračunamo posredno z odvajanjem enačbe.



V našem primeru z odvajanjem enačbe $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ po x dobimo:

$$\begin{aligned}\frac{2x}{4} + \frac{2y}{9}y' &= 0,\\ y' &= -\frac{2x}{4} \cdot \frac{9}{2y},\\ y' &= -\frac{9x}{4y}.\end{aligned}$$

Naklon tangente na elipso v točki $(1, b)$ je torej enak

$$k = -\frac{9}{4b},$$

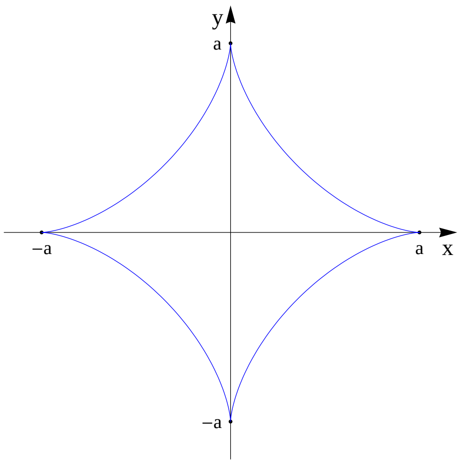
z upoštevanjem, da je $b = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, pa dobimo še eksplicitno vrednost $k = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Enačba tangente na elipso v dani točki pa je

$$y = -\frac{\sqrt{3}}{2}(x-1) + \frac{3\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}x + 2\sqrt{3}.$$

$\square$

(12) Dokaži, da je dolžina odseka tangente na astroido med koordinatnima osema konstantna. Astroida je podana z implicitno enačbo $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ za nek $a > 0$.

Rešitev: Astroida je krivulja, ki ima obliko zvezde.



Najprej bomo izračunali enačbo tangente na astroido v točki $T(x_0, y_0)$. Zaradi simetrije je dovolj obravnavati primer, ko točka leži v prvem kvadrantu. S posrednim odvajanjem implicitne enačbe dobimo

$$\tfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} + \tfrac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}y' = 0.$$

Od tod dobimo

$$y' = -\sqrt[3]{\tfrac{y}{x}}.$$

Tangenta na astroido v točki $T(x_0, y_0)$ ima torej enačbo

$$y = -\sqrt[3]{\tfrac{y_0}{x_0}}(x - x_0) + y_0.$$

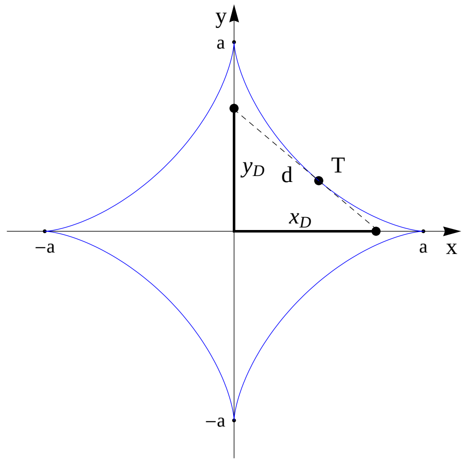
Presečišči te tangente s koordinatnima osema dobimo tako, da vstavimo v zgornjo enačbo $x = 0$ oziroma $y = 0$. Tako pridemo do točk s koordinatami:

$$x = 0 \Longrightarrow y_D = \sqrt[3]{\frac{y_0}{x_0}}x_0 + y_0,$$
$$y = 0 \Longrightarrow x_D = \sqrt[3]{\frac{x_0}{y_0}}y_0 + x_0.$$

Če označimo z d razdaljo med tema dvema točkama, dobimo po Pitagorovem izreku

$$d^2 = x_D^2 + y_D^2.$$

Naš cilj je, da dokažemo, da je izraz na desni neodvisen od točke na astroidi.



Da si olajšamo računanje, lahko najprej izpeljemo, da je

$$x_D = \sqrt[3]{\frac{x_0}{y_0}}y_0 + x_0 = \sqrt[3]{x_0y_0^2} + x_0 = \sqrt[3]{x_0}(x_0^{\frac{2}{3}} + y_0^{\frac{2}{3}}) = \sqrt[3]{x_0}a^{\frac{2}{3}}.$$

Podobno lahko izpeljemo tudi

$$y_D = \sqrt[3]{y_0}a^{\frac{2}{3}}.$$

Ko ti dve enakosti vstavimo v enakost $d^2 = x_D^2 + y_D^2$, dobimo

$$d^2 = \left(\sqrt[3]{x_0}a^{\frac{2}{3}}\right)^2 + \left(\sqrt[3]{y_0}a^{\frac{2}{3}}\right)^2 = a^{\frac{4}{3}}(x_0^{\frac{2}{3}} + y_0^{\frac{2}{3}}) = a^2.$$

Dolžina tangente na astroido je torej konstantno enaka a. □

(13) Z uporabo diferenciala približno izračunaj naslednji vrednosti:

(a) $e^{0.2}$,

(b) $\sqrt{0.97}$.

Rešitev: Naj bo f funkcija, katere vrednost znamo natančno izračunati v točki $x = a$. S pomočjo diferenciala lahko potem približno izračunamo vrednosti funkcije f za x blizu a z uporabo formule

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a).$$

Geometrično gre pri tem za aproksimacijo grafa s tangento na graf v točki $x = a$.

(a) Izberimo funkcijo $f(x) = e^x$ in $a = 0$. Zanima nas vrednost funkcije f v točki $x = 0.2$. Iz $f'(x) = e^x$ sledi

$$e^{0.2} \approx f(0) + f'(0)(0.2 - 0) = 1 + 1 \cdot 0.2 = 1.2.$$

Natančna vrednost je $e^{0.2} = 1.2214$.

(b) Sedaj naj bo $f(x) = \sqrt{x}$ in $a = 1$. Radi bi izračunali vrednost funkcije f v točki $x = 0.97$. Odvod funkcije f je $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, zato je

$$\sqrt{0.97} \approx f(1) + f'(1)(0.97 - 1) = 1 + \tfrac{1}{2} \cdot (-0.03) = 0.985.$$

Natančna vrednost tega korena je $\sqrt{0.97} = 0.9849$. $\square$

(14) Izračunaj njuna odvoda, nato pa v isti koordinatni sistem skiciraj grafa funkcij:

$$f(x) = \operatorname{arc\,tg} x, \quad g(x) = \tfrac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} \tfrac{2x}{1-x^2}.$$

Rešitev: Izračunajmo najprej odvoda:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2},$$
$$g'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + (\frac{2x}{1-x^2})^2} \cdot \frac{2(1-x^2) - 2x(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{1 - x^2 + 2x^2}{(1-x^2)^2 + 4x^2} = \frac{1+x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{1+x^2},$$

Vidimo, da imata obe funkciji ista odvoda. Od tod lahko sklepamo, da se na vsakem intervalu, na katerem sta obe definirani, razlikujeta za konstante. Te konstante so lahko načeloma odvisne od izbire intervala.

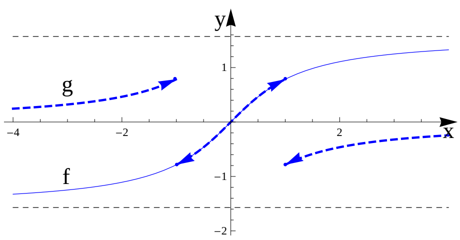
Ker je $D_f = \mathbb{R}$ in $D_g = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$, se funkciji f in g na vsakem izmed intervalov $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ in $(1, \infty)$ razlikujeta za konstanto. To konstanto lahko določimo s primerjavo vrednosti v neki konkretni točki, ali pa z izračunom asimptote v neskončnosti, če je le-ta vodoravna.

$$\begin{aligned}
&(-\infty, -1): && \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2} \quad \text{in} \quad \lim_{x\to-\infty} g(x) = 0,\\
&(-1, 1): && f(0) = 0 \quad \text{in} \quad g(0) = 0,\\
&(1, \infty): && \lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{\pi}{2} \quad \text{in} \quad \lim_{x\to\infty} g(x) = 0.
\end{aligned}$$

Od tod dobimo

$$g(x) = \begin{cases} \operatorname{arc\,tg} x + \frac{\pi}{2} & ; \ x < -1, \\ \operatorname{arc\,tg} x & ; \ -1 < x < 1, \\ \operatorname{arc\,tg} x - \frac{\pi}{2} & ; \ x > 1. \end{cases}$$

Poglejmo še grafa obeh funkcij.



$\square$

(15) Dokaži Leibnizovo pravilo za višje odvode produkta

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

S pomočjo te formule izračunaj $(x\cos(2x))^{(100)}$.

Rešitev: Formula za višje odvode produkta po obliki precej spominja na binomsko formulo za potenciranje vsote dveh števil. Pri $n = 1$ imamo znano formulo

$$(fg)' = fg' + f'g,$$

pri $n = 2$ pa se ta formula glasi

$$(fg)'' = fg'' + 2f'g' + f''g.$$

Da velja za poljuben $n \in \mathbb{N}$, bomo dokazali z uporabo indukcije. Veljavnost formule pri $n = 1$ smo že preverili, zato denimo, da za nek $n \in \mathbb{N}$ velja

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

Potem od tod sledi:

$$\begin{aligned}
(fg)^{(n+1)} &= \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}\right)' = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k+1)} g^{(n-k)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k+1)}, \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} f^{(k)} g^{(n+1-k)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)}, \\
&= f^{(n+1)}g + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} f^{(k)} g^{(n+1-k)} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)} + fg^{(n+1)}, \\
&= f^{(n+1)}g + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right) f^{(k)} g^{(n+1-k)} + fg^{(n+1)}, \\
&= f^{(n+1)}g + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)} + fg^{(n+1)}, \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)},
\end{aligned}$$

kar smo želeli dokazati.

Z uporabo te formule dobimo

$$(x\cos(2x))^{(100)} = \sum_{k=0}^{100} \binom{100}{k} x^{(k)} \cos(2x)^{(100-k)} = x\cos(2x)^{(100)} + 100\cos(2x)^{(99)}.$$

Če upoštevamo, da se odvodi $\cos(2x)$ ponavljajo periodično s periodo 4 in da se pri vsakem odvodu rezultat pomnoži z 2, dobimo

$$(x\cos(2x))^{(100)} = x\cos(2x)^{(100)} + 100\cos(2x)^{(99)} = 2^{100} x\cos(2x) + 100 \cdot 2^{99} \sin(2x).$$

$\square$

(16) Naj bo funkcija f podana s predpisom

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & ;\ x \geq 1, \\ ax + b & ;\ 0 \leq x < 1, \\ 2 \operatorname{arc\,tg} x + c & ;\ x < 0. \end{cases}$$

(a) Določi konstante a, b in c tako, da bo f zvezno odvedljiva na $\mathbb{R}$.

(b) Izračunaj zalogo vrednosti funkcije f.

(c) Pokaži, da obstaja inverzna funkcija f^{-1}.

Rešitev: Pri tej nalogi obravnavamo zlepek treh zveznih funkcij. Kadar v neki točki zlepimo dve funkciji z različnima predpisoma, pogosto želimo, da je dobljena funkcija zvezna in odvedljiva. Včasih dodatno zahtevamo še, da se ujemata tudi ukrivljenosti grafov v dani točki.

Denimo torej, da sta f_1 in f_2 funkciji, ki sta zvezni in odvedljivi v točki $x = a$. Njun zlepek bo potem zvezen v tej točki, če velja $f_1(a) = f_2(a)$ in odvedljiv, če velja $f_1'(a) = f_2'(a)$.

(a) V našem primeru je funkcija f definirana kot zlepek funkcij $f_1(x) = 2 \operatorname{arc\,tg} x + c$, $f_2(x) = ax + b$ in $f_3(x) = x^2$. V točki $x = 0$ zlepimo funkciji f_1 in f_2, v točki $x = 1$ pa f_2 in f_3. Če hočemo, da bo zlepek zvezen, mora veljati $f_1(0) = f_2(0)$ in $f_2(1) = f_3(1)$, od koder dobimo enačbi:

$$\begin{aligned} c &= b, \\ a + b &= 1. \end{aligned}$$

Pogoja odvedljivosti $f_1'(0) = f_2'(0)$ in $f_2'(1) = f_3'(1)$ pa nam dasta:

$$\begin{aligned} 2 &= a, \\ a &= 2. \end{aligned}$$

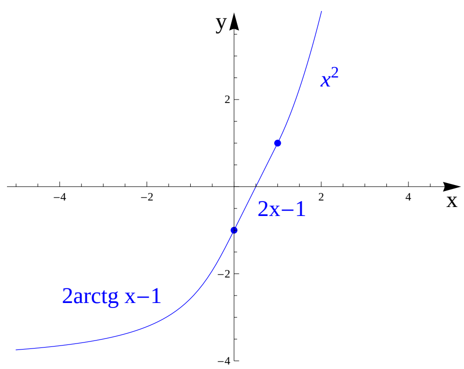
Rešitev danega sistema enačb je $a = 2$, $b = c = -1$, zato ima funkcija f predpis

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & ;\ x \geq 1, \\ 2x - 1 & ;\ 0 \leq x < 1, \\ 2 \operatorname{arc\,tg} x - 1 & ;\ x < 0. \end{cases}$$

Njen odvod je funkcija

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & ;\ x \geq 1, \\ 2 & ;\ 0 \leq x < 1, \\ \frac{2}{x^2+1} & ;\ x < 0. \end{cases}$$

Vidimo, da je tudi f' zvezna funkcija, kar po definiciji pomeni, da je f zvezno odvedljiva. Če pogledamo graf funkcije f, vidimo, da je zvezna in odvedljiva v $x = 0$ in $x = 1$.



(b) Funkcija f je zvezno odvedljiva na celi realni osi. Ker je njen odvod povsod pozitiven, je torej strogo naraščajoča funkcija. Zaloga vrednosti takšne funkcije leži na intervalu med obema limitama funkcije f pri $x \to \pm\infty$. Ker je:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (2 \operatorname{arc\,tg} x - 1) = -\pi - 1,$$
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} x^2 = \infty,$$

je zaloga vrednosti funkcije f enaka

$$Z_f = (-\pi - 1, \infty).$$

(c) Ker je funkcija f strogo naraščajoča, je injektivna, kar pomeni, da določa bijekcijo $f : \mathbb{R} \to (-\pi - 1, \infty)$. Njen inverz pa je potem bijekcija

$$f^{-1} : (-\pi - 1, \infty) \to \mathbb{R}.$$

$\square$

(17) Naj bo

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & ; x \neq 0, \\ 0 & ; x = 0. \end{cases}$$

Dokaži, da je funkcija f odvedljiva, a ni zvezno odvedljiva na $\mathbb{R}$.

Rešitev: Iz definicije sledi, da je funkcija f zvezna na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Posebej moramo preveriti še, da velja

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0.$$

V okolici točke $x = 0$ lahko zapišemo $f(x) = g(x)h(x)$, kjer je $g(x) = x^2$ in $h(x) = \sin \frac{1}{x}$. Funkcija g ima v točki $x = 0$ ničlo, medtem ko je funkcija h omejena z 1 v okolici točke $x = 0$. Od tod sledi $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$, kar pomeni, da je funkcija f zvezna tudi v točki $x = 0$.

Izračunajmo sedaj odvod funkcije f. V točki $x = 0$ ga moramo izračunati po definiciji

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 \sin \frac{1}{h}}{h} = \lim_{h\to 0} h \sin \tfrac{1}{h} = 0.$$

Pri zadnjem enačaju lahko uporabimo isti postopek kot pri dokazu zveznosti funkcije f.

Za točke $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ pa lahko odvod izračunamo kar s pomočjo pravil za odvajanje

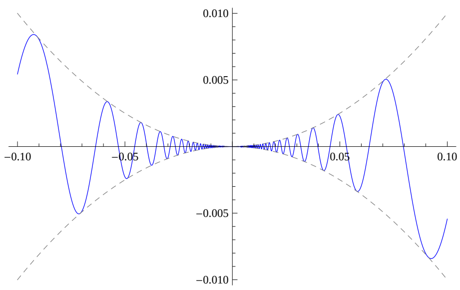
$$f'(x) = 2x \sin \tfrac{1}{x} + x^2 \cos \tfrac{1}{x} \cdot \left(\tfrac{-1}{x^2}\right) = 2x \sin \tfrac{1}{x} - \cos \tfrac{1}{x}.$$

Funkcija f je torej odvedljiva povsod in velja

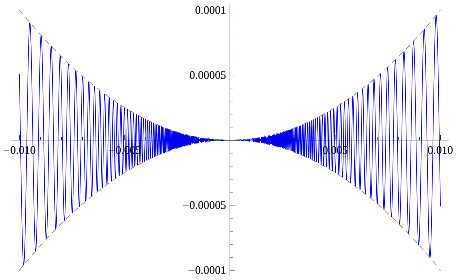
$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & ; x \neq 0, \\ 0 & ; x = 0. \end{cases}$$

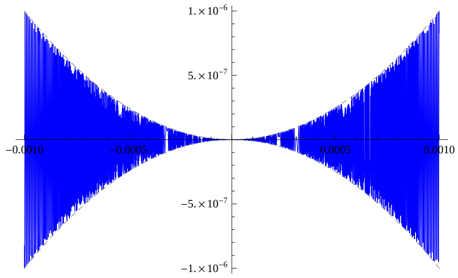
Funkcija f pa ni zvezno odvedljiva v točki $x = 0$, saj ne obstaja limita $\lim_{x\to 0} f'(x)$. Izraz $2x \sin \frac{1}{x}$ gre sicer proti 0 pri $x \to 0$, vendar pa izraz $\cos \frac{1}{x}$ zavzame vse vrednosti med -1 in 1 poljubno blizu točke $x = 0$.

Poglejmo si sedaj graf funkcije f.



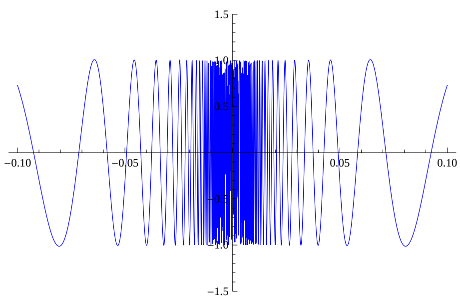
Graf funkcije f si lahko predstavljamo kot sinusoido, katere amplituda se približuje 0, ko gre $x \to 0$, perioda pa prav tako postaja poljubno majhna. Če pogledamo graf v zelo majhnih okolicah točke 0, je v principu graf funkcije še vedno krivulja, ki pa je s pisalom fiksne širine ne moremo narisati, ker so periode 'valov' premajhne. Zato bi graf, če bi ga poskušali narisati, v okolice točke $x = 0$ izgledal kot na spodnji sliki.





Na grafu lahko opazimo, da ima funkcija vodoravno tangento v točki $x = 0$. Dejstvo, da funkcija f ni zvezno odvedljiva, pa sledi iz opazke, da imajo tangente na graf funkcije f poljubno blizu točke 0 naklone med -1 in 1.

Poglejmo še graf odvoda.



Vidimo, da limita $\lim_{x\to 0} f'(x)$ ni enaka vrednosti 0, ampak je v nekem smislu ta limita kar cel interval $[-1, 1]$. □

(18) Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je zvezna v 0, odvedljiva v 0, za vsaka $x, y \in \mathbb{R}$ pa velja

$$f(x + y) = 2f(x)f(y).$$

Dokaži, da je f zvezno odvedljiva na $\mathbb{R}$.

Rešitev: Najprej izračunajmo vrednost funkcije f v točki $x = 0$. Če v funkcijsko zvezo vstavimo $x = y = 0$, dobimo enačbo

$$f(0) = 2f(0)^2,$$

ki ima rešitvi $f(0)=0$ in $f(0)=\frac{1}{2}$. Denimo najprej, da je $f(0)=0$. Pri $y=0$ potem iz funkcijske enačbe dobimo

$$f(x)=2f(x)f(0)=0.$$

Torej je v tem primeru $f(x)=0$ za vsak x. Ničelna funkcija je zvezno odvedljiva, zato izpolnjuje zahteve naloge.

Več dela bomo imeli v primeru, ko je $f(0)=\frac{1}{2}$. Najprej zapišimo, kaj nam povesta pogoja, da je f zvezna in odvedljiva v 0. Zveznost nam pove, da je

$$\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)=\frac{1}{2}.$$

Iz odvedljivosti pa dobimo

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-\frac{1}{2}}{x}.$$

Dokažimo sedaj, da je f zvezna funkcija na celem $\mathbb{R}$. Pokazati moramo, da za vsak $a\in\mathbb{R}$ velja

$$f(a)=\lim_{x\to a} f(x).$$

Začeli bomo z limito na desni strani in uvedli novo spremenljivko s pogojem $x=a+h$. Ko gre x proti a, gre h proti 0, zato je

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{h\to 0} f(a+h)=\lim_{h\to 0} 2f(a)f(h)=2f(a)\lim_{h\to 0} f(h)=2f(a)\tfrac{1}{2}=f(a).$$

Funkcija f je torej zvezna na celi realni osi. Da je tudi odvedljiva, sledi iz enakosti

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2f(a)f(h)-f(a)}{h}=2f(a)\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-\frac{1}{2}}{h}=2f(a)f'(0).$$

Hkrati smo v zgornjem računu izpeljali zvezo

$$f'(x)=2f(x)f'(0),$$

iz katere sledi, da je odvod funkcije f v bistvu večkratnik funkcije f. Ker je f zvezna, mora biti tudi odvod zvezen.

Opomba: V nalogi smo pokazali, da je f zvezno odvedljiva, ne da bi vedeli, katera funkcija f sploh je. Pokažemo pa lahko, da iz zveznosti funkcije f sledi, da ima predpis

$$f(x)=\tfrac{1}{2}e^{kx},$$

kjer je k poljubno realno število. □

V sledečih nalogah bomo spoznali Lagrangeev in Rolleov izrek.

Lagrangeev izrek: Naj bo $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ zvezna funkcija, ki je na intervalu (a,b) odvedljiva. Potem obstaja $c\in(a,b)$, za katerega velja

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)\iff f(b)-f(a)=f'(c)(b-a).$$

Geometrično to pomeni, da je vsaj ena tangenta na graf funkcije v notranjosti intervala vzporedna sekanti skozi robni točki.

(19) Dokaži, da za vsak $a > 0$ velja $\frac{1}{a+1} < \ln(1 + \frac{1}{a}) < \frac{1}{a}$.

Rešitev: Neenakosti bomo dokazali z uporabo Lagrangeevega izreka. Na prvi pogled ni jasno, kako bi ga lahko uporabili za dokaz danih neenakosti, zato najprej opomnimo, da velja

$$\ln(1 + \tfrac{1}{a}) = \ln(\tfrac{a+1}{a}) = \ln(a + 1) - \ln a.$$

V tem izrazu prepoznamo razliko dveh vrednosti naravnega logaritma. Definirajmo sedaj $f(x) = \ln x$. Ker je $f'(x) = \frac{1}{x}$, lahko po Lagrangeevem izreku na intervalu $(a, a + 1)$ najdemo točko c, za katero velja

$$\ln(a + 1) - \ln a = \tfrac{1}{c}(a + 1 - a) = \tfrac{1}{c}.$$

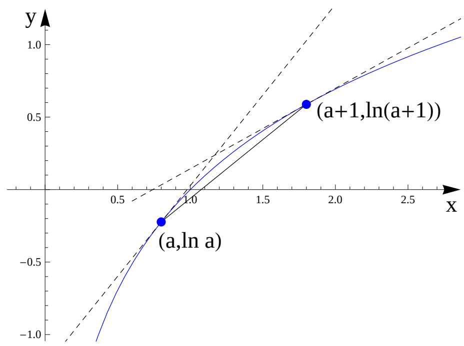
Funkcija $f'(x) = \frac{1}{x}$ je na intervalu $(a, a + 1)$ padajoča, zato je

$$\frac{1}{a+1} < \frac{1}{c} < \frac{1}{a}$$

oziroma

$$\frac{1}{a+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{a}\right) < \frac{1}{a}.$$

Opomba: Zgornjo neenakost lahko geometrično interpretiramo na naslednji način: naklon sekante grafa funkcije ln med točkama $(a, \ln a)$ in $(a + 1, \ln(a + 1))$ je večji od naklona tangente v točki $a + 1$ in manjši od naklona tangente v točki a.



□

(20) Dokaži, da za vsaka $x, y \in \mathbb{R}$ velja $|\operatorname{arc\,tg} x - \operatorname{arc\,tg} y| \leq |x - y|$. Ali je funkcija arc tg enakomerno zvezna na $\mathbb{R}$?

Rešitev: Denimo, da je $x < y$. Če uporabimo Lagrangeev izrek za funkcijo arc tg na intervalu $[x, y]$, dobimo enakost

$$\operatorname{arc\,tg} y - \operatorname{arc\,tg} x = \frac{1}{1 + c^2}(y - x).$$

Pri tem je c neko število na intervalu (x, y). Iz ocene $\frac{1}{1+c^2} \leq 1$ potem sledi

$$\operatorname{arc\,tg} y - \operatorname{arc\,tg} x \leq y - x.$$

Za poljubna x in y pa iz zgornje neenakosti dobimo neenakost

$$|\operatorname{arc\,tg} x - \operatorname{arc\,tg} y| \leq |x - y|.$$

Dokažimo sedaj, da od tod sledi, da je funkcija arc tg enakomerno zvezna na $\mathbb{R}$. Za poljuben $\epsilon > 0$ moramo najti tak $\delta > 0$, da iz $|x-y| < \delta$ sledi $|f(x) - f(y)| < \epsilon$. Izberimo $\delta = \epsilon$. Potem iz $|x - y| < \delta$ sledi

$$|\operatorname{arc\,tg} x - \operatorname{arc\,tg} y| \leq |x - y| < \delta = \epsilon,$$

kar smo želeli dokazati. □

(21) Naj bo funkcija f odvedljiva na intervalu I in naj bo njen odvod omejena funkcija. Dokaži, da je potem f enakomerno zvezna na I.

Rešitev: Izberimo poljuben $\epsilon > 0$. Potem moramo najti tak $\delta > 0$, da bo za vsak $x, y \in I$ veljalo

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

Ker je funkcija f' omejena, obstaja tak $M > 0$, da za vse $t \in I$ velja $|f'(t)| < M$. Denimo, najprej da je $x > y$. Po Lagrangeevem izreku potem obstaja tak $t \in (y, x)$, da je

$$f(x) - f(y) = f'(t)(x - y).$$

Ko na tej enakosti uporabimo absolutno vrednost in upoštevamo, da je odvod omejen, dobimo, da za vsaka $x, y \in I$ velja

$$|f(x) - f(y)| = |f'(t)||x - y| < M|x - y|.$$

Če sedaj izberemo $\delta = \frac{\epsilon}{M}$, bo sledilo

$$|f(x) - f(y)| < M|x - y| < M\delta = \epsilon.$$

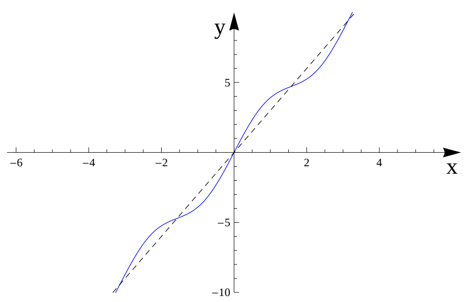
Opomba: Če je odvod funkcije f omejen, je f enakomerno zvezna. Obratno pa ni vedno res. Protiprimer je funkcija $f(x) = \sqrt{x}$ na intervalu $[0, 1]$. Kljub temu, da je njen odvod neomejen v okolici točke $x = 0$, je f enakomerno zvezna na intervalu $[0, 1]$. □

(22) Dana je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s predpisom $f(x) = 3x + \sin(2x)$.

(a) Pokaži, da je f bijekcija in da sta tako f kot f^{-1} enakomerno zvezni na $\mathbb{R}$.

(b) Ali v splošnem velja, da je inverz bijektivne, enakomerno zvezne funkcije enakomerno zvezen?

Rešitev: (a) Graf funkcije f izgleda kot sinusoida, ki niha okoli premice $y = 3x$.



Odvod funkcije f je

$$f'(x) = 3 + 2\cos(2x).$$

Ker je $f'(x) > 0$ za vsak $x \in \mathbb{R}$, je funkcija f strogo naraščajoča. Njeni limiti sta $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ in $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$. Ker je zvezna, od tod sledi, da je funkcija f bijekcija

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

Odvod funkcije f lahko ocenimo navzgor

$$|f'(x)| = |3 + 2\cos(2x)| \leq 5,$$

od koder po prejšnji nalogi sledi, da je f enakomerno zvezna na $\mathbb{R}$. Ker je po drugi strani $|f'(x)| \geq 1$ pa dobimo z uporabo formule za odvod inverzne funkcije oceno

$$|(f^{-1})'(x)| = \frac{1}{|f'(f^{-1}(x))|} \leq 1,$$

kar pomeni, da je tudi funkcija f^{-1} enakomerno zvezna na $\mathbb{R}$.

(b) Inverz enakomerno zvezne funkcije ni nujno enakomerno zvezen. Protiprimer je npr. funkcija $\operatorname{arc\,tg}$, ki je enakomerno zvezna na $\mathbb{R}$ in določa bijekcijo $\operatorname{arc\,tg} : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Njen inverz $\operatorname{tg} : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ pa ni enakomerno zvezen, saj je vsaka enakomerno zvezna funkcija na končnem odprtem intervalu omejena. $\square$

Poseben primer Lagrangeevega izreka, ko sta vrednosti funkcije v robnih točkah enaki, je Rolleov izrek.

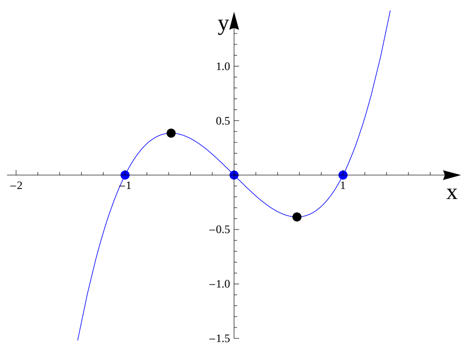
Rolleov izrek: Naj bo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija, ki je na intervalu (a, b) odvedljiva. Če je $f(a) = f(b)$, obstaja tak $c \in (a, b)$, da je $f'(c) = 0$.

(23) Naj bo f $(n-1)$-krat zvezno odvedljiva na $[a, b]$ in naj obstaja n-ti odvod funkcije f na (a, b). Dokaži: če za točke $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ velja $f(x_0) = f(x_1) = \ldots = f(x_n)$, potem je $f^{(n)}(c) = 0$ za nek $c \in (a, b)$.

Rešitev: Pri tej nalogi bomo dokazali posplošitev Rolleovega izreka. V primeru, ko je $n = 1$, že vemo, da iz pogoja $f(a) = f(b)$ sledi, da nekje na intervalu (a, b) obstaja točka, kjer je tangenta na graf vodoravna. Da bi si pogoje te posplošitve lažje zapomnili, si poglejmo na primer polinom

$$p(x) = x^3 - x.$$

Ta polinom ima tri različne realne ničle na intervalu $[-1, 1]$. Njegov odvod $p'(x) = 3x^2 - 1$ ima dve ničli, drugi odvod $p''(x) = 6x$ pa eno ničlo.



Opazimo lahko, da pri vsakem odvajanju izgubimo eno ničlo. Dokazali bomo, da nekaj podobnega velja v splošnem.

Denimo torej, da obstajajo števila $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, da velja

$$f(x_0) = f(x_1) = \ldots = f(x_n).$$

Po Rolleovem izreku lahko za vsak $0 \le i \le n-1$ na intervalu (x_i, x_{i+1}) najdemo tak t_i, da velja $f'(t_i) = 0$. Našli smo torej točke $a < t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < b$, da velja

$$f'(t_0) = f'(t_1) = \ldots = f'(t_{n-1}) = 0.$$

Če se vrednosti funkcije f na $[a, b]$ ujemajo v $(n+1)$ točkah, ima torej odvod f' na (a, b) vsaj n ničel. Sedaj ta postopek ponavljamo, dokler ne pridemo do n-tega odvoda. Po istem sklepu ima f'' vsaj $n-1$ ničel, f''' pa vsaj $n-2$ ničel. Po n korakih pridemo do sklepa, da ima $f^{(n)}$ vsaj eno ničlo na intervalu (a, b). □

S pomočjo odvoda lahko na preprost način izračunamo kakšne limite, ki se sicer izkažejo za trd oreh. To nam pride prav pri študiju asimptotskega obnašanja funkcij.

<u>L'Hospitalovo pravilo</u>: Naj bosta funkciji f in g odvedljivi na neki okolici točke x_0 (razen morda v x_0) in naj gresta obe hkrati proti 0 ali pa obe hkrati proti $\pm\infty$ pri $x \to x_0$. Če obstaja limita $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, obstaja tudi limita $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ in obe limiti sta enaki.

Pravilo velja tudi za enostranske limite in limite v neskončnosti.

(24) Izračunaj limite:

(a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{3x+1} - 2}{\sin(\pi x)}$,

(b) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x - 1} \right)$,

(c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1 - \cos x)}{\ln(1 - e^{-x^2})}$,

(d) $\lim\limits_{x \downarrow 0} x^x$.

Rešitev:

(a) $$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{3x+1} - 2}{\sin(\pi x)} = \lim_{x \to 1} \frac{\frac{3}{2\sqrt{3x+1}}}{\pi \cos(\pi x)} = -\frac{3}{4\pi}.$$

(b) $$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right) = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{e^x - 1 + xe^x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x}{e^x + e^x + xe^x} = \frac{1}{2}.$$

(c) $$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 - \cos x)}{\ln(1 - e^{-x^2})} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\sin x}{1 - \cos x}}{\frac{2xe^{-x^2}}{1 - e^{-x^2}}} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{e^{x^2} - 1}{2(1 - \cos x)} = \lim_{x \to 0} \frac{2xe^{x^2}}{2 \sin x} = 1.$$

(d) $$\lim_{x \downarrow 0} x^x = \lim_{x \downarrow 0} e^{x \ln x} = e^{\lim\limits_{x \downarrow 0} x \ln x} = e^{\lim\limits_{x \downarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}} = e^{\lim\limits_{x \downarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}} = e^{\lim\limits_{x \downarrow 0}(-x)} = 1.$$

□

(25) Izračunaj limite:

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{e^x}$,

(b) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 e^{2x}$,

(c) $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}}$,

(d) $\lim\limits_{x\to\infty} x \operatorname{arc\,tg} \dfrac{1}{2x+1}$,

(e) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x-\sin x}{3x+\cos x}$.

Rešitev:

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{e^x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{e^x} = 0.$

(b) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 e^{2x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3}{e^{-2x}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x^2}{-2e^{-2x}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{6x}{4e^{-2x}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{6}{-8e^{-2x}} = 0.$

(c) $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1}} = 1.$

(d)
$$\lim_{x\to\infty} x \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{2x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\operatorname{arc\,tg} \frac{1}{2x+1}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{1+\frac{1}{(2x+1)^2}} \cdot \frac{-2}{(2x+1)^2}}{-\frac{1}{x^2}},$$
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2}{(2x+1)^2+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2}{4x^2+4x+2} = \frac{1}{2}.$$

(e) Limita
$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x-\sin x}{3x+\cos x}$$
je primer limite, kjer L'Hospitalovega pravila ne moremo uporabiti. Če bi namreč posebej odvajali števec in imenovalec, bi dobili izraz
$$\frac{2-\cos x}{3-\sin x},$$
ki pa nima limite. Lahko pa upoštevamo, da sta sinus in kosinus omejena in limito izračunamo takole
$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x-\sin x}{3x+\cos x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2-\frac{\sin x}{x}}{3+\frac{\cos x}{x}} = \frac{2}{3}.$$

□

(26) Izračunaj linearni asimptoti funkcije $f(x)=\sqrt{x^2+x}$.

Rešitev: Linearna funkcija $y=kx+n$ je asimptota funkcije f pri $x\to\infty$, če je

$$\lim_{x\to\infty}(f(x)-(kx+n))=0.$$

Analogno definiramo tudi linearne asimptote pri $x\to-\infty$.
Če ima funkcija f asimptoto, lahko koeficienta k in n izračunamo z uporabo formul:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x},$$
$$n=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx).$$

Najprej izračunajmo asimptoto, ko gre $x\to\infty$:

$$k_+=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+x}}{x}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{1+\tfrac{1}{x}}=1,$$
$$n_+=\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+x}-x)(\sqrt{x^2+x}+x)}{(\sqrt{x^2+x}+x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}=\frac{1}{2}.$$

Od tod sledi, da ima funkcija f linearno asimptoto

$$y_+(x)=x+\frac{1}{2}.$$

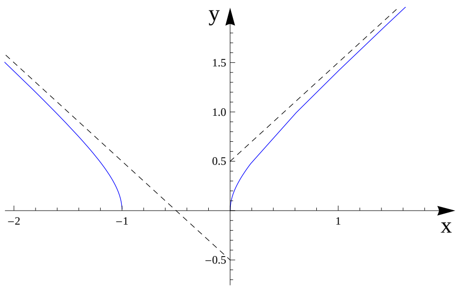
Ko gre $x\to-\infty$, pa dobimo:

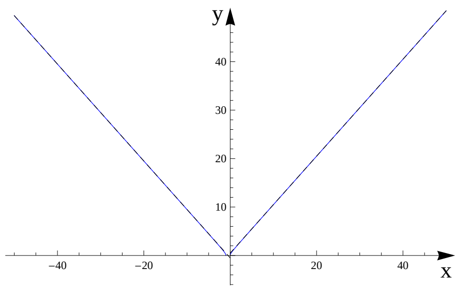
$$k_-=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+x}}{x}=\lim_{x\to-\infty}-\sqrt{1+\frac{1}{x}}=-1,$$
$$n_-=\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+x}+x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{(\sqrt{x^2+x}+x)(\sqrt{x^2+x}-x)}{(\sqrt{x^2+x}-x)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+x}-x}=-\frac{1}{2},$$

kar pomeni, da je asimptota pri $x\to-\infty$ premica

$$y_-(x)=-x-\frac{1}{2}.$$

Vidimo, da ima funkcija f dve različni linearni asimptoti.





Opomba: Podobno lahko definiramo tudi polinomske asimptote višjih redov. Polinom p je polinomska asimptota funkcije f pri $x\to\infty$, če je

$$\lim_{x\to\infty}(f(x)-p(x))=0.$$

Tipični primeri funkcij s polinomskimi asimptotami so racionalne funkcije, primera funkcij, ki nimata polinomskih asimptot, pa sta logaritemska in eksponentna funkcija.

Če je polinom $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ polinomska asimptota funkcije f, lahko njegove koeficiente izračunamo v naslednjem zaporedju:

$$\begin{aligned}
a_n &= \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x^n}, \\
a_{n-1} &= \lim_{x\to\infty} \frac{f(x) - a_n x^n}{x^{n-1}}, \\
&\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\
a_0 &= \lim_{x\to\infty} (f(x) - (a_n x^n + \cdots + a_1 x)).
\end{aligned}$$

Število n poskušamo uganiti. Če izberemo prevelik n, dobimo prvo limito enako nič, v primeru premajhnega n pa je ta limita neskončna. $\square$

(27) Skiciraj grafe funkcij:

(a) $f(x) = \sin x + \sin^2 x$,

(b) $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$,

(c) $f(x) = \dfrac{1 - \ln x}{1 + \ln x}$,

(d) $f(x) = (2x^2 - 17)\sqrt[3]{(x^2-1)^2}$.

Rešitev: Pri skiciranju grafov funkcij si pomagamo z naslednjimi podatki:

· definicijsko območje, ničle, poli, limite na robu definicijskega območja, asimptote,

· stacionarne točke, intervali naraščanja in padanja, tangente na robu definicijskega območja.

Po potrebi lahko izračunamo še prevoje in ugotovimo, kje je funkcija konveksna oziroma konkavna.

(a) $\underline{f(x) = \sin x + \sin^2 x}$.

- Funkcija f je definirana na celem $\mathbb{R}$. Je periodična s periodo 2π, zato se bomo omejili na interval $[0, 2\pi]$. Iz zapisa

$$\sin x + \sin^2 x = \sin x(1 + \sin x)$$

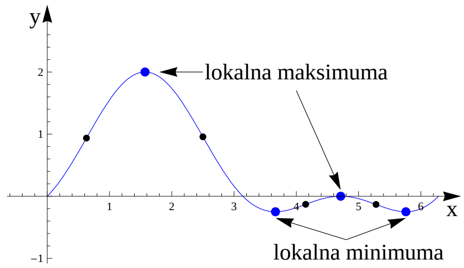
  sledi, da ima f na intervalu $[0, 2\pi]$ ničle v točkah $\{0, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi\}$.
- Odvod funkcije f je enak

$$f'(x) = \cos x + 2\sin x\cos x = \cos x(1 + 2\sin x).$$

  Stacionarne točke so rešitve enačb $\cos x = 0$ in $\sin x = -\frac{1}{2}$. To so števila $\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\}$. Z analizo predznaka odvoda lahko sklepamo, da f narašča na

$$(0, \tfrac{\pi}{2}) \cup (\tfrac{7\pi}{6}, \tfrac{3\pi}{2}) \cup (\tfrac{11\pi}{6}, 2\pi),$$

  sicer pa pada. Od tod sklepamo, da ima f v točkah $x = \frac{7\pi}{6}$ in $x = \frac{11\pi}{6}$ lokalna minimuma, v točkah $x = \frac{\pi}{2}$ in $x = \frac{3\pi}{2}$ pa lokalna maksimuma. Vrednosti funkcije f v teh točkah so $f(\frac{\pi}{2}) = 2$, $f(\frac{3\pi}{2}) = 0$ in $f(\frac{7\pi}{6}) = f(\frac{11\pi}{6}) = -\frac{1}{4}$. S temi podatki že lahko približno skiciramo graf.



Na grafu vidimo, da ima funkcija f tudi štiri prevoje. Drugi odvod funkcije f je

$$f''(x) = -\sin x + 2\cos 2x.$$

Če bi poiskali ničle drugega odvoda, bi dobili, da so prevoji približno v točkah $\{0.63, 2.50, 4.15, 5.28\}$.

(b) $\underline{f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}}$.

- Funkcija f je definirana na $D_f = (-1,\infty) \setminus \{0\}$. Ničel nima, njene limite pa so:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}}{1}} = e,$$
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to \infty}\frac{\ln(1+x)}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to \infty}\frac{\frac{1}{1+x}}{1}} = 1,$$
$$\lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x\to -1}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to -1}\frac{\ln(1+x)}{x}} = \infty.$$

Vidimo, da ima funkcija f pol pri $x=-1$ in vodoravno asimptoto $y=1$ pri $x\to\infty$.

- Odvod funkcije f je enak

$$f'(x) = \left(e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}\right)' = e^{\frac{\ln(1+x)}{x}} \cdot \frac{\frac{x}{1+x} - \ln(1+x)}{x^2}.$$

Čeprav to na prvi pogled ni jasno, se izkaže, da je odvod f' povsod negativen. Levi faktor in pa imenovalec desnega faktorja sta pozitivna, zato moramo dokazati, da je funkcija

$$g(x) = \frac{x}{1+x} - \ln(1+x)$$

negativna na $(-1,\infty)\setminus\{0\}$. Pomagali si bomo z odvodom

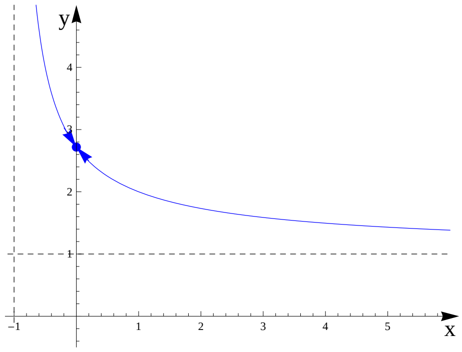
$$g'(x) = \frac{(1+x)-x}{(1+x)^2} - \frac{1}{1+x} = \frac{1}{(1+x)^2} - \frac{1}{1+x} = -\frac{x}{(1+x)^2}.$$

Z analizo predznaka funkcije g' lahko ugotovimo, da ima g v točki $x=0$ maksimum. Ker je $g(0)=0$, mora torej g biti negativna na $(-1,\infty)\setminus\{0\}$. Od tod sledi, da funkcija f povsod pada.

Zanimivo je še pogledati, v kateri smeri se graf funkcije f približuje ordinatni osi. To nam pove naslednja limita:

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0}\left(e^{\frac{\ln(1+x)}{x}} \cdot \frac{\frac{x}{1+x} - \ln(1+x)}{x^2}\right) = e\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{1+x} - \ln(1+x)}{x^2},$$
$$= e\cdot\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x}{(1+x)^2}}{2x} = -\frac{e}{2}.$$

Poglejmo še graf.



(c) $\underline{f(x) = \frac{1-\ln x}{1+\ln x}}$.

- Funkcija f je definirana na $D_f = (0,\infty)\setminus\{e^{-1}\}$. Ima eno ničlo $x = e$ in limite:

$$\lim_{x\downarrow 0} f(x) = \lim_{x\downarrow 0}\frac{1-\ln x}{1+\ln x} = \lim_{x\downarrow 0}\frac{\frac{1}{\ln x}-1}{\frac{1}{\ln x}+1} = -1,$$

$$\lim_{x\uparrow e^{-1}} f(x) = \lim_{x\uparrow e^{-1}}\frac{1-\ln x}{1+\ln x} = -\infty,$$

$$\lim_{x\downarrow e^{-1}} f(x) = \lim_{x\downarrow e^{-1}}\frac{1-\ln x}{1+\ln x} = \infty,$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{1-\ln x}{1+\ln x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{\ln x}-1}{\frac{1}{\ln x}+1} = -1.$$

  V točki $x = e^{-1}$ ima funkcija f pol, njena vodoravna asimptota pa je premica $y = -1$.

- Odvod funkcije f je enak

$$f'(x) = \frac{-\frac{1}{x}(1+\ln x) - (1-\ln x)\frac{1}{x}}{(1+\ln x)^2} = -\frac{2}{x(1+\ln x)^2}.$$

  Vidimo, da f nima stacionarnih točk in da povsod pada. Poleg tega je:

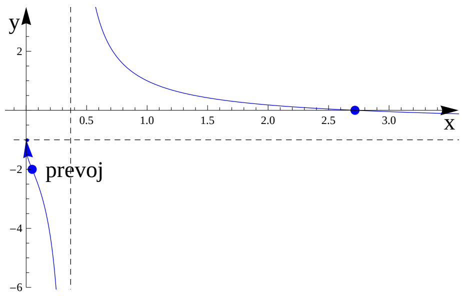
$$\lim_{x\downarrow 0} f'(x) = \lim_{x\downarrow 0} -\frac{2}{x(1+\ln x)^2} = -\lim_{x\downarrow 0}\frac{\frac{2}{x}}{(1+\ln x)^2},$$

$$= -\lim_{x\downarrow 0}\frac{-\frac{2}{x^2}}{2(1+\ln x)\frac{1}{x}} = -\lim_{x\downarrow 0}\frac{-\frac{1}{x}}{1+\ln x} = -\lim_{x\downarrow 0}\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}} = -\infty.$$

  Od tod sklepamo, da je tangenta na graf v točki $x = 0$ navpična.
  Drugi odvod funkcije f je enak

$$f''(x) = \frac{2(3+\ln x)}{x^2(1+\ln x)^3},$$

  kar pomeni, da ima f v točki $x = e^{-3}$ prevoj.



(d) $\underline{f(x) = (2x^2 - 17)\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}$.

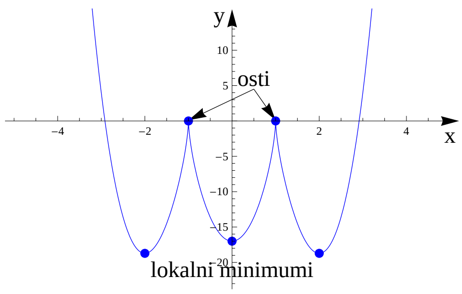
- Funkcija f je soda funkcija, definirana pa je na celi realni osi. Ima štiri ničle $\{\pm\sqrt{\frac{17}{2}}, \pm 1\}$, pri $x \to \pm\infty$ pa narašča čez vse meje.
- Odvod funkcije f je

$$f'(x) = 4x(x^2-1)^{\frac{2}{3}} + (2x^2-17) \cdot \tfrac{2}{3} \cdot 2x \cdot (x^2-1)^{-\frac{1}{3}} = \frac{20x(x-2)(x+2)}{\sqrt[3]{x^2-1}}.$$

Od tod sledi, da ima f stacionarne točke $\{-2, 0, 2\}$, v točkah $x = \pm 1$ pa ni odvedljiva. Z analizo predznaka odvoda ugotovimo, da f narašča na $(-2,-1) \cup (0,1) \cup (2,\infty)$, kar pomeni, da ima f v točkah $\{-2,0,2\}$ lokalne minimume. Vrednosti funkcije f v teh točkah so $f(\pm 2) = -9\sqrt[3]{9} \approx -18.7$ in $f(0) = -17$. Poglejmo si še, pod kakšnim kotom se graf približuje točkama, kjer f ni odvedljiva. V točki $x = 1$ velja:

$$\lim_{x \uparrow 1} f'(x) = \lim_{x \uparrow 1} \frac{20x(x-2)(x+2)}{\sqrt[3]{x^2-1}} = -\infty,$$
$$\lim_{x \downarrow 1} f'(x) = \lim_{x \downarrow 1} \frac{20x(x-2)(x+2)}{\sqrt[3]{x^2-1}} = \infty.$$

Zaradi sodosti funkcije f veljata analogna rezultata tudi v točki $x = -1$. Tangente na graf v teh dveh točkah so torej navpične, kar pomeni, da ima graf v teh točkah dve osti. Čeprav funkcija v teh točkah ni odvedljiva, sta tam vseeno lokalna maksimuma.



□

(28) Skiciraj krivulji, ki sta podani v parametrični obliki:

(a) $x(t) = t^2 - 1$, $y(t) = t^3 - t$ za $t \in \mathbb{R}$,

(b) $x(t) = \cos^2 t$, $y(t) = \sin^2 t$ za $t \in [0, \pi]$.

Rešitev: Vektorska funkcija oziroma parametrično podana krivulja je funkcija

$$\vec{r} : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^2,$$

kjer je $[t_0, t_1] \subset \mathbb{R}$ nek interval. Predstavljamo si lahko, da opisuje gibanje točke po ravnini. Parameter $t \in [t_0, t_1]$ si predstavljamo kot čas, vrednost $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$ pa kot položaj točke ob času t. Pomemben je tudi vektor $\dot{\vec{r}}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t))$, ki ga interpretiramo kot hitrost točke.

Pri skiciranju tira vektorske funkcije si pomagamo z naslednjimi podatki:

· skiciramo grafa obeh komponent,

· označimo položaje, ki ustrezajo stacionarnim točkam obeh komponent,

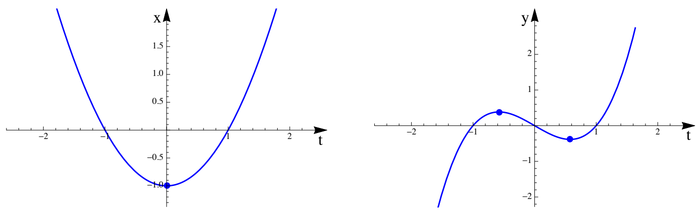
· analiziramo limitno in asimptotično obnašanje obeh komponent.

Z upoštevanjem teh podatkov lahko sedaj poskusimo skicirati graf. Na intervalih, kjer funkcija $x(t)$ narašča, se točka premika v desno, kjer pa pada, pa v levo. Podobno nam naraščanje funkcije $y(t)$ pove, da se točka premika navzgor, padanje pa pomeni, da se premika navzdol. V stacionarnih točkah funkcije x je tangenta na tir funkcije navpična, v stacionarnih točkah funkcije y pa vodoravna. Če imata ob nekem času obe funkciji x in y odvod enak nič, se lahko zgodi, da dobimo na tiru ost.

(a) Poskusimo najprej skicirati krivuljo, ki je podana s predpisom:

$$x(t) = t^2 - 1,$$
$$y(t) = t^3 - t.$$

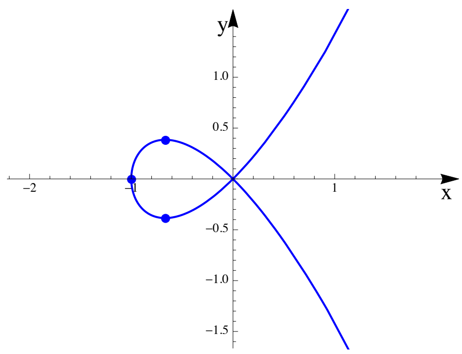
Grafa komponent sta na spodnji sliki.



Odvoda komponent sta $\dot{x}(t) = 2t$ in $\dot{y}(t) = 3t^2 - 1$. Zanimajo nas točke, kjer je vsaj eden izmed odvodov enak nič. To so točke $\{0, \frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\}$, položaji točke pri teh parametrih pa so:

$$\vec{r}(-\tfrac{\sqrt{3}}{3}) = (-\tfrac{2}{3}, \tfrac{2\sqrt{3}}{9}),$$
$$\vec{r}(0) = (-1, 0),$$
$$\vec{r}(\tfrac{\sqrt{3}}{3}) = (-\tfrac{2}{3}, -\tfrac{2\sqrt{3}}{9}).$$

Z obeh grafov lahko razberemo, da se na intervalu $(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3})$ točka premika levo in gor, na $(-\frac{\sqrt{3}}{3}, 0)$ levo in dol, na $(0, \frac{\sqrt{3}}{3})$ desno in dol ter na $(\frac{\sqrt{3}}{3}, \infty)$ desno in gor. Z upoštevanjem teh podatkov lahko skiciramo krivuljo.



Gre za singularno kubično krivuljo, ki jo lahko izrazimo tudi v implicitni obliki z enačbo

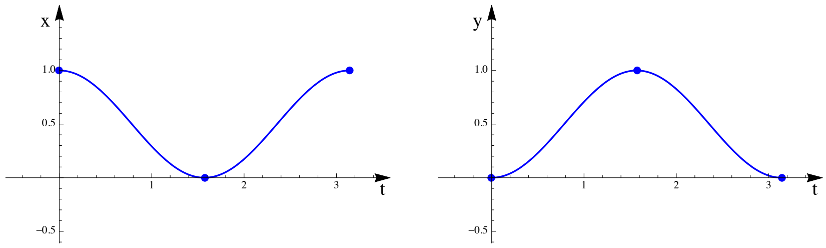
$$y^2 = x^2(x+1).$$

Iz eksplicitne oblike $y = \pm x\sqrt{x+1}$ pa sledi, da krivulja nima linearne asimptote.

(b) Sedaj imamo krivuljo, ki je podana v parametrični obliki s predpisom:

$$x(t) = \cos^2 t,$$
$$y(t) = \sin^2 t.$$

Grafa komponent sta na spodnji sliki.



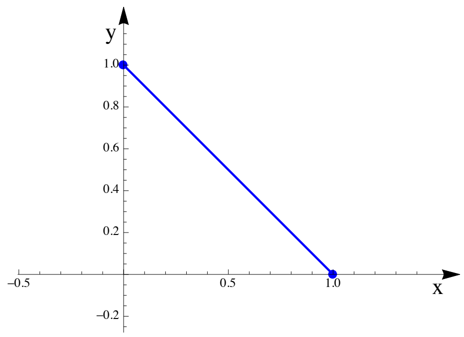
Iz odvodov:

$$\dot{x}(t) = -2\cos t \sin t,$$
$$\dot{y}(t) = 2\sin t \cos t$$

vidimo, da sta pri parametrih $t \in \{0, \frac{\pi}{2}, \pi\}$ oba odvoda enaka nič, kar pomeni, da se v teh trenutkih točka ustavi. Na intervalu $[0, \frac{\pi}{2}]$ se točka giblje levo navzgor, na intervalu $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ pa desno navzdol. Ker je

$$x + y = \sin^2 t + \cos^2 t = 1,$$

ta parametrizacija opisuje gibanje točke po daljici med točkama $(1, 0)$ in $(0, 1)$.



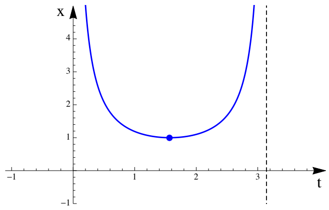
□

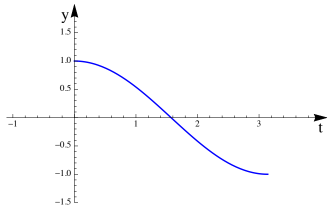
(29) Skiciraj krivuljo, ki je podana v parametrični obliki $x(t) = \frac{1}{\sin t}$, $y(t) = \cos t$ za $t \in (0, \pi)$. Nato izračunaj enačbo tangente na krivuljo v točki $(\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$.

Rešitev: Odvoda obeh komponent sta:

$$\dot{x} = -\frac{\cos t}{\sin^2 t},$$
$$\dot{y} = -\sin t.$$

Funkcija x ima stacionarno točko $t = \frac{\pi}{2}$, funkcija y pa nima stacionarnih točk na $(0, \pi)$. Grafa obeh komponent sta na spodnji sliki.





Komponenta x ima pola v točkah $t \in \{0, \pi\}$. V teh točkah bo krivulja pobegnila v neskončnost, izkazalo pa se bo, da ima krivulja dve vodoravni asimptoti.

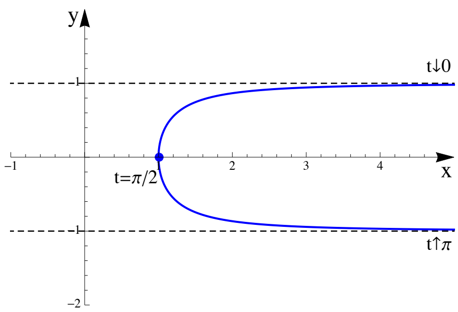
Začnimo sedaj z risanjem krivulje na intervalu $t \in (0, \frac{\pi}{2})$. Ker pri $t \downarrow 0$ velja $x \to \infty$, bomo pri $t \downarrow 0$ dobili asimptoto. Če bi tudi komponenta y imela pol pri $t = 0$, bi bila ta asimptota v principu poševna, ker pa je $\lim_{t \downarrow 0} y(t) = \lim_{t \downarrow 0} \cos t = 1$, lahko preverimo, da pri $t \downarrow 0$ dobimo vodoravno asimptoto

$$y = 1.$$

Na intervalu $t \in (0, \frac{\pi}{2})$ se bo sedaj točka premikala levo in dol, dokler ne bo prišla do točke $\vec{r}(\frac{\pi}{2}) = (1, 0)$, kjer je tangenta na krivuljo navpična. Na intervalu $t \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ se nato točka premika desno in dol, pri $t \uparrow \pi$ pa dobimo vodoravno asimptoto

$$y = -1.$$

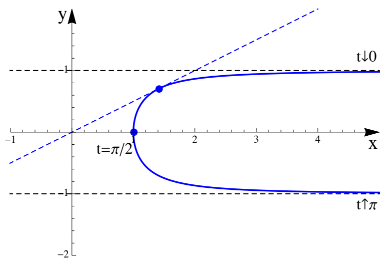
Dobimo krivuljo, ki je zrcalna glede na abscisno os.



Izračunajmo sedaj še enačbo tangente na krivuljo v točki $\vec{r}(\frac{\pi}{4}) = (\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$. Vemo, da ima tangenta smerni vektor $\dot{\vec{r}}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t))$. Če je $\dot{x}(t) = 0$, je tangenta navpična, sicer pa lahko za izračun naklona tangente uporabimo formulo

$$k(t) = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}.$$

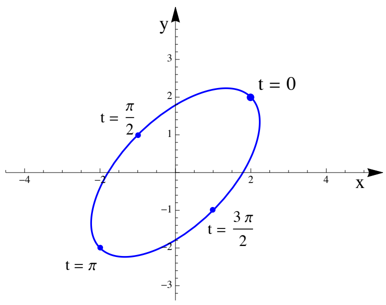
V našem primeru tako dobimo $k(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}$ in enačbo tangente $a = \frac{x}{2}$.



□

(30) Pokaži, da predpis v parametrični obliki $x(t) = 2\cos t - \sin t$ in $y(t) = 2\cos t + \sin t$ za $t \in [0, 2\pi]$ določa elipso. V okolici točke $(2, 2)$ izrazi elipso v obliki $y = y(x)$ in izračunaj $y''(x)$ v tej točki.

Rešitev: Dana parametrizacija opisuje elipso v ravnini, ki je nagnjena za kot $45°$ glede na vodoravnico, v točki $\vec{r}(0) = (2, 2)$ pa ima eno izmed temen.



Najprej bomo izračunali implicitno obliko enačbe te elipse. Iz enakosti $x + y = 4\cos t$ in $y - x = 2\sin t$ sledi, da je

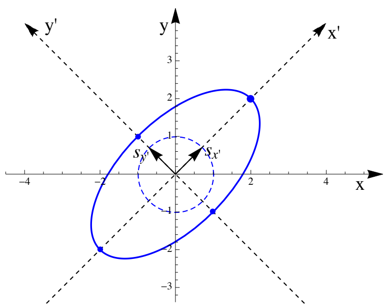
$$\frac{(x+y)^2}{16} + \frac{(y-x)^2}{4} = 1.$$

Od tod dobimo po kratkem računu implicitno obliko enačbe dane krivulje

$$5x^2 - 6xy + 5y^2 = 16.$$

Z uporabo linearne algebre lahko natanko določimo, kakšno krivuljo opisuje poljubna kvadratna enačba dveh spremenljivk. V našem primeru pa bomo samo pokazali, da gre res za zavrteno elipso.

Označimo z $\vec{s}_{x'} = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ in $\vec{s}_{y'} = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ enotska vektorja v smereh obeh simetral kvadrantov in z x' ter y' pridruženi koordinati.



Med prvotnimi in zavrtenimi koordinatami potem velja zveza

$$(x, y) = x'\vec{s}_{x'} + y'\vec{s}_{y'},$$

kar lahko zapišemo v obliki

$$x = \tfrac{\sqrt{2}}{2}(x' - y'),$$
$$y = \tfrac{\sqrt{2}}{2}(x' + y').$$

Ko to vstavimo v implicitno enačbo naše krivulje, dobimo v zavrtenih koordinatah enačbo

$$2x'^2 + 8y'^2 = 16,$$

od koder preberemo, da gre za elipso s polosema $a = 2\sqrt{2}$ in $b = \sqrt{2}$.

V okolici točke $(2, 2)$ lahko iz implicitne enačbe dano krivuljo izrazimo tudi eksplicitno v obliki

$$y = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}\sqrt{5 - x^2}.$$

Z dvakratnim odvajanjem bi lahko izračunali, da je $y''(2) = -4$. Včasih pa je koristno vedeti, da lahko drugi odvod $y''(x)$ izračunamo tudi, ne da bi šli eksplicitno računati funkcijo $y = y(x)$. Pri tem lahko uporabimo formulo

$$y''(x) = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^3}.$$

Odvodi komponent so:

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= -2\sin t - \cos t, \\
\dot{y} &= -2\sin t + \cos t, \\
\ddot{x} &= -2\cos t + \sin t, \\
\ddot{y} &= -2\cos t - \sin t,
\end{aligned}$$

od koder dobimo

$$y''(2) = \frac{(-1)(-2) - (-2)}{(-1)^3} = -4.$$

□

(31) Descartov list je implicitno podan z enačbo $x^3 - 3axy + y^3 = 0$ za nek $a > 0$. Z uvedbo parametra $t = \frac{y}{x}$ ga zapiši v parametrični obliki in nato še skiciraj.

Rešitev: Če pišemo $y = tx$ in to vstavimo v implicitno enačbo $x^3 - 3axy + y^3 = 0$, dobimo:

$$\begin{aligned}
x^3 - 3atx^2 + t^3x^3 &= 0, \\
x - 3at + xt^3 &= 0, \\
x &= \frac{3at}{1 + t^3}.
\end{aligned}$$

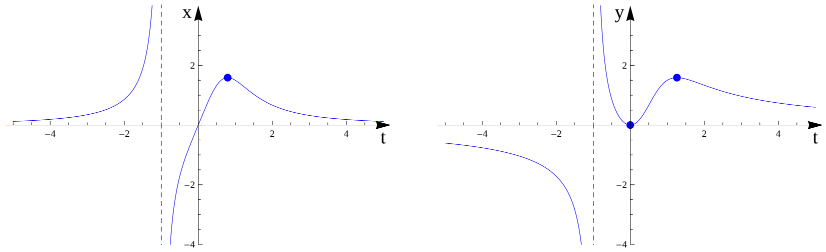
Če upoštevamo še, da je $y = tx$, dobimo od tod parametrizacijo Descartovega lista:

$$\begin{aligned}
x(t) &= \frac{3at}{1 + t^3}, \\
y(t) &= \frac{3at^2}{1 + t^3}.
\end{aligned}$$

Zanimali nas bodo parametri s cele realne osi. Preden skiciramo grafa obeh komponent, izračunajmo še njuna odvoda:

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \frac{3a(1 + t^3) - 3at \cdot 3t^2}{(1 + t^3)^2} = \frac{3a(1 - 2t^3)}{(1 + t^3)^2}, \\
\dot{y} &= \frac{6at(1 + t^3) - 3at^2 \cdot 3t^2}{(1 + t^3)^2} = \frac{3at(2 - t^3)}{(1 + t^3)^2}.
\end{aligned}$$

Funkcija x ima stacionarno točko $t = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$, medtem ko ima y stacionarni točki $t = 0$ in $t = \sqrt[3]{2}$. Če upoštevamo še pole in asimptote obeh koordinat, dobimo naslednja grafa.



Sedaj bomo poskusili skicirati Descartov list. Odvodi komponent nam povedo, da ležijo točke:

$$\vec{r}(0) = (0,0),$$
$$\vec{r}(\tfrac{1}{\sqrt[3]{2}}) = (a\sqrt[3]{4}, a\sqrt[3]{2}),$$
$$\vec{r}(\sqrt[3]{2}) = (a\sqrt[3]{2}, a\sqrt[3]{4})$$

na krivulji in da so tangente na krivuljo v teh točkah vodoravne oziroma navpične. Začnimo z risanjem krivulje na primer pri parametru $t = 0$. Tedaj je položaj točke enak $(0,0)$, tangenta na krivuljo pa je vodoravna. Na intervalu $(0, \frac{1}{\sqrt[3]{2}})$ se točka premika desno in navzgor, dokler ne pride do položaja $(a\sqrt[3]{4}, a\sqrt[3]{2})$, kjer je tangenta na krivuljo navpična. Nato se za $t \in (\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \sqrt[3]{2})$ točka premika levo in navzgor in pride do položaja $(a\sqrt[3]{2}, a\sqrt[3]{4})$, kjer je tangenta na krivuljo vodoravna. Na intervalu $(\sqrt[3]{2}, \infty)$ se točka premika levo in navzdol ter se asimptotično približuje koordinatnemu izhodišču. Da bi izračunali, pod kakšnim kotom pride v koordinatno izhodišče, moramo najprej izračunati, kaj se dogaja z naklonom tangente na krivuljo. Naklon tangente na krivuljo v položaju, ki ustreza parametru t, je enak

$$k(t) = \tfrac{\dot{y}}{\dot{x}}.$$

V našem primeru je torej

$$k(t) = \frac{\frac{3at(2-t^3)}{(1+t^3)^2}}{\frac{3a(1-2t^3)}{(1+t^3)^2}} = \frac{t(2-t^3)}{1-2t^3}.$$

Vidimo, da v limiti velja

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t(2-t^3)}{1-2t^3} = \infty,$$

kar pomeni, da pride krivulja v koordinatno izhodišče v navpični smeri.

Zaenkrat smo obravnavali del krivulje, ki ustreza parametrom na intervalu $[0,\infty)$, in ugotovili, da je ta del krivulje omejen. Sedaj bomo analizirali še obnašanje krivulje pri negativnih parametrih. Ko se parameter približuje vrednosti $t = -1$, gresta tako x kot y v neskončnost. Bolj natančno: ko t pada proti -1, gre $x \to -\infty$ in $y \to \infty$. To pomeni, da točka potuje v neskončnost v smeri levo in navzgor. Podobno lahko ugotovimo, da gre v primeru, ko t narašča proti -1, točka v neskončnost v smeri desno in navzdol. Izkaže se, da se krivulja v obeh primerih približuje neki poševni asimptoti. Koeficient te asimptote je enak

$$k = \lim_{t\to-1} k(t) = \lim_{t\to-1} \frac{t(2-t^3)}{1-2t^3} = -1,$$

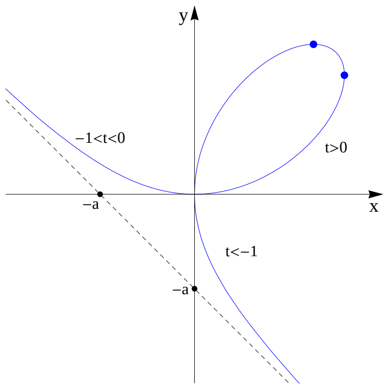
začetna vrednost pa je enaka

$$n = \lim_{t\to-1}(y(t) - kx(t)) = \lim_{t\to-1}\left(\frac{3at^2}{1+t^3} + \frac{3at}{1+t^3}\right) = \lim_{t\to-1}\frac{3at(t+1)}{(1+t)(1-t+t^2)} = -a.$$

Descartov list ima torej asimptoto

$$y = -x - a.$$

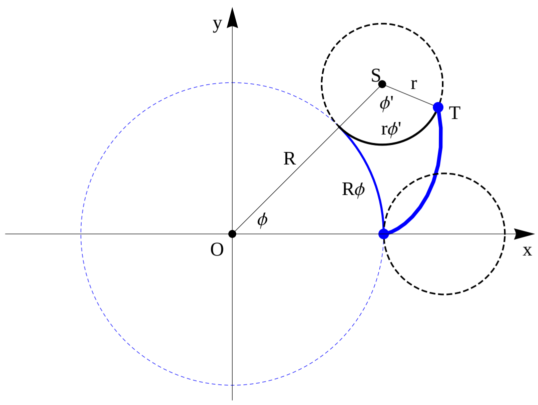
Za konec omenimo še, da se pri $t \to -\infty$ točka ponovno približuje koordinatnemu izhodišču, tokrat v navpični smeri.



□

(32) Zapiši enačbo krivulje, ki jo opiše točka na obodu kroga s polmerom r, ki se kotali po zunanji strani kroga s polmerom $R \geq r$.

Rešitev: Krivulji, ki jo opiše točka na obodu kroga, ki se kotali po zunanji strani večjega kroga, rečemo epicikloida. Pri različnih razmerjih polmerov dobimo različne krivulje. Naš cilj je, da poiščemo parametrizacijo teh krivulj. Najprej poglejmo sliko.



Za parameter bomo vzeli kar kot ϕ. Položaj točke na krivulji je potem enak

$$\vec{r}(\phi) = \overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OS} + \overrightarrow{ST}.$$

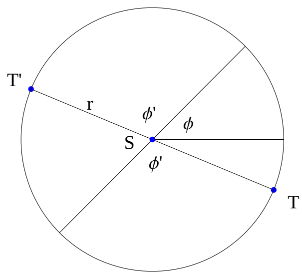
Brez problemov lahko ugotovimo, da je

$$\overrightarrow{OS} = ((R + r)\cos\phi, (R + r)\sin\phi).$$

Nekaj več dela pa bomo imeli z izražavo vektorja $\overrightarrow{ST}$. Najprej bomo upoševali pogoj, da se manjši krog kotali po zunanji strani večjega kroga. Matematično to pomeni, da sta loka, ki sta narisana s polno črto, enako dolga. Od tod dobimo zvezo

$$R\phi = r\phi'.$$

Sedaj poglejmo naslednjo sliko.



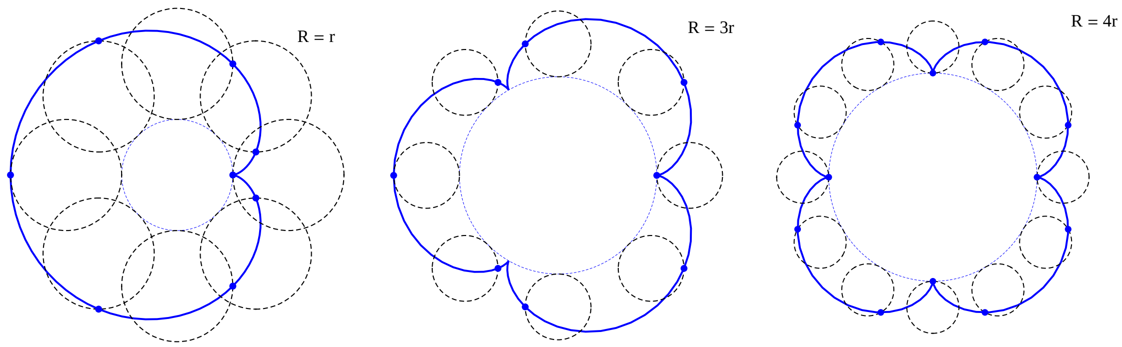
Vidimo, da je vektor $\overrightarrow{ST}$ nasproten vektorju $\overrightarrow{ST'}$, ki pa z vodoravnico oklepa kot $\phi + \phi'$. Z upoštevanjem, da je $\phi' = \frac{R\phi}{r}$, od tod dobimo

$$\overrightarrow{ST} = (-r\cos(\phi+\phi'), -r\sin(\phi+\phi')) = \left(-r\cos\left((1+\tfrac{R}{r})\phi\right), -r\sin\left(1+\tfrac{R}{r})\phi\right)\right).$$

Če sedaj parameter ϕ zamenjamo z običajnim t, dobimo parametrizacijo epicikloide:

$$x(t) = (R+r)\cos t - r\cos\left((1+\tfrac{R}{r})t\right),$$
$$y(t) = (R+r)\sin t - r\sin\left((1+\tfrac{R}{r})t\right).$$

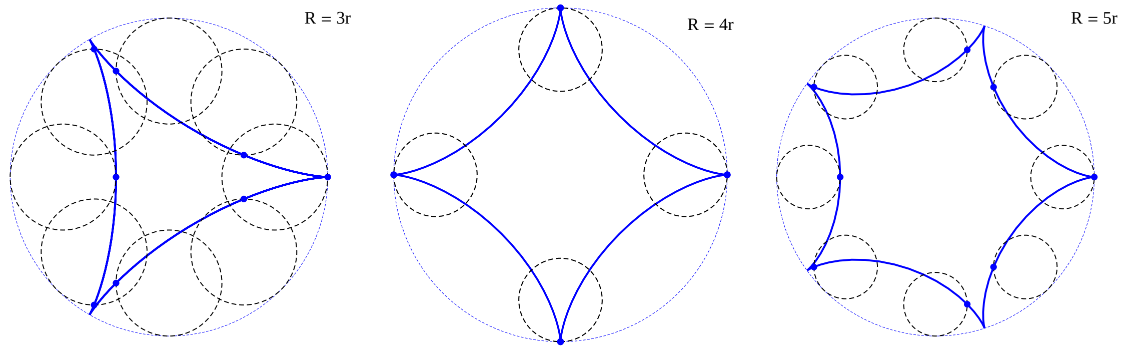
V posebnem primeru, ko je $r = R$, dobimo krivuljo, ki po obliki spominja na srce. Zato ji rečemo tudi srčnica oziroma kardioida.



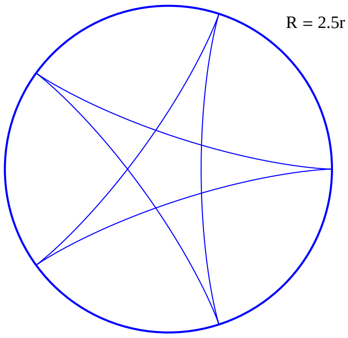
Opomba: Krivuljam, ki jih dobimo s kotaljenjem kroga s polmerom r po notranjem obodu večjega kroga s polmerom R, rečemo hipocikloide. Hipocikloido lahko parametriziramo s predpisom:

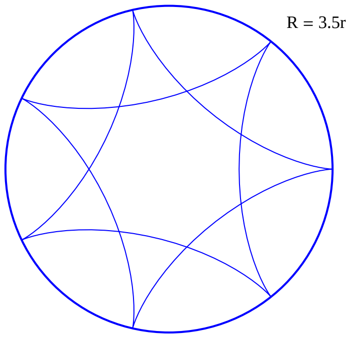
$$x(t) = (R-r)\cos t + r\cos\left((\tfrac{R}{r}-1)t\right),$$
$$y(t) = (R-r)\sin t - r\sin\left((\tfrac{R}{r}-1)t\right).$$

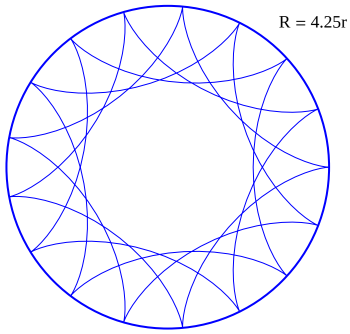
Če velja $R = 4r$, dobimo astroido.



Če je razmerje $R = nr$, kjer je $n \in \mathbb{N}$, dobimo krivuljo z n ostmi, če pa je $R = \frac{p}{q}r$, pa dobimo krivuljo s p ostmi, ki q-krat obkroži izhodišče, preden se spet sklene.







□

(33) Naj bosta $a, b > 0$. Skiciraj krivulje, ki so podane v polarnih koordinatah:

(a) $r(\phi) = a(1 + \cos\phi)$ za $\phi \in [0, 2\pi]$,
(b) $r(\phi) = a\cos(3\phi)$ za $\phi \in [0, 2\pi]$,
(c) $r(\phi) = a + b\phi$ za $\phi \in [0, \infty)$,
(d) $r(\phi) = \frac{a}{\phi}$ za $\phi \in (0, \infty)$.

Rešitev: Pri tej nalogi bomo spoznali še en način podajanja ravninskih krivulj. Krivuljo lahko opišemo tudi tako, da povemo, kako daleč je neka točka na krivulji od koordinatnega izhodišča. Če točke na krivulji parametriziramo s polarnim kotom, dobimo funkcijo

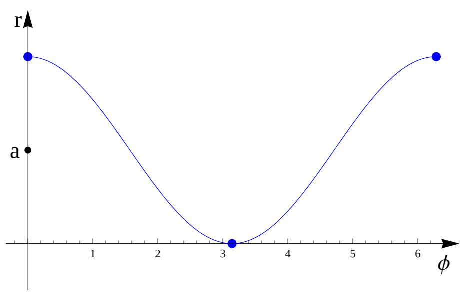
$$r = r(\phi),$$

ki določa te razdalje. Krivuljo, ki je podana v polarnih koordinatah, narišemo tako, da se enakomerno vrtimo okoli koordinatnega izhodišča, hkrati pa se (upoštevajoč funkcijo r) približujemo ali oddaljujemo od izhodišča. Za dodatno pomoč si lahko tudi označimo nekaj točk na krivulji.

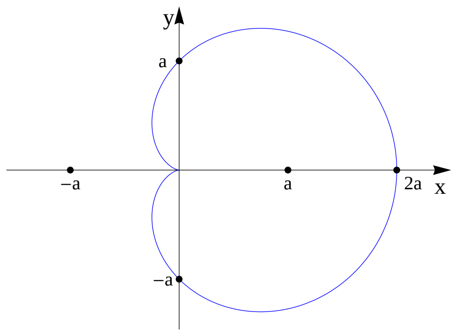
(a) Najprej bomo skicirali krivuljo, ki je v polarnih koordinatah podana s predpisom

$$r(\phi) = a(1 + \cos\phi).$$

Velja $r'(\phi) = -a\sin\phi$, kar pomeni, da ima r na intervalu $[0, 2\pi]$ tri stacionarne točke $\{0, \pi, 2\pi\}$. V pridruženih točkah doseže oddaljenost krivulje od izhodišča lokalne ekstreme. Pri kotu $\phi = \pi$ je ta razdalja minimalna in enaka 0, pri kotih $\phi = 0$ in $\phi = 2\pi$ pa je ta razdalja maksimalna in enaka $2a$. Poglejmo graf funkcije r.



Z grafa razberemo, da bo na intervalu $\phi \in [0, \pi]$ oddaljenost točke od izhodišča padala. To pomeni, da bo točka krožila okoli izhodišča in se hkrati izhodišču približevala. Na intervalu $\phi \in [\pi, 2\pi]$ bo nato situacija obratna. Točka se bo med kroženjem oddaljevala od izhodišča in se pri kotu $\phi = 2\pi$ vrnila v začetni položaj. Izkaže se, da na ta način dobimo kardioido, ki smo jo že spoznali pri nalogi o epicikloidah.



Za izračun naklonov tangent na krivuljo v polarnih koordinatah je najlažje uporabiti parametrizacijo:

$$x(\phi) = r(\phi)\cos\phi = a(1+\cos\phi)\cos\phi,$$
$$y(\phi) = r(\phi)\sin\phi = a(1+\cos\phi)\sin\phi$$

in nato uporabiti formulo

$$k(\phi) = \frac{y'(\phi)}{x'(\phi)}.$$

V našem primeru dobimo:

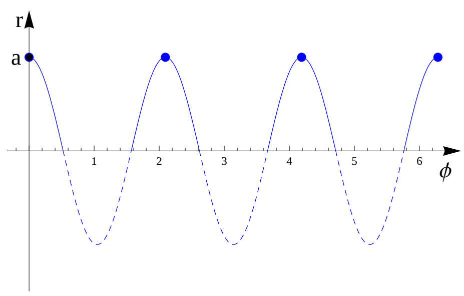
$$x'(\phi) = a(-\sin\phi - 2\cos\phi\sin\phi),$$
$$y'(\phi) = a(\cos\phi + \cos(2\phi)).$$

Vidimo lahko, da je $x'(0) = x'(\frac{2\pi}{3}) = x'(\frac{4\pi}{3}) = 0$, kar pomeni, da so tangente na kardioido v pripadajočih točkah navpične. Tangenti sta vodoravni v točkah, ki ustrezata kotoma $\frac{\pi}{3}$ in $\frac{5\pi}{3}$, v točki $(0,0)$, ki ustreza kotu π, pa imamo ost. Izračunamo lahko, da se kardioida približuje koordinatnemu izhodišču v vodoravni smeri.

(b) Sedaj imamo krivuljo, ki je v polarnih koordinatah podana s predpisom

$$r(\phi) = a\cos(3\phi).$$

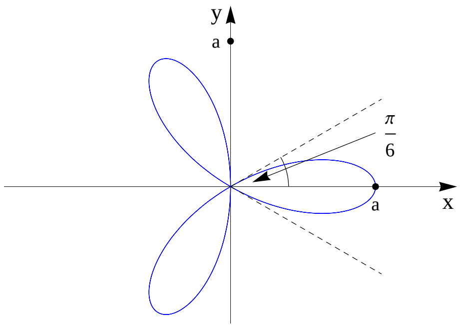
Graf funkcije r je na spodnji sliki.



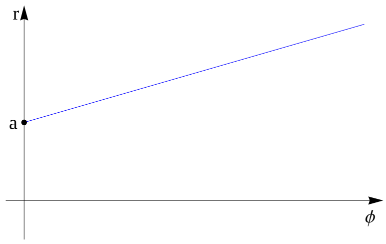
Po dogovoru upoštevamo samo vrednosti r, ki so večje ali enake nič. V našem primeru to pomeni, da se bo krivulja nahajala samo v smereh, ki ustrezajo kotom

$$\phi \in [0, \tfrac{\pi}{6}] \cup [\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{5\pi}{6}] \cup [\tfrac{7\pi}{6}, \tfrac{3\pi}{2}] \cup [\tfrac{11\pi}{6}, 2\pi].$$

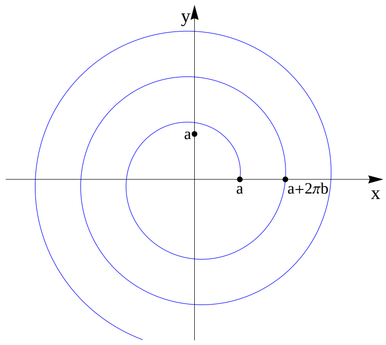
Največjo oddaljenost od izhodišča a bo dosegla v smereh $\phi \in \{0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\}$. Krivulja ima obliko triperesne deteljice.



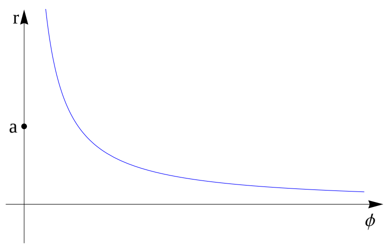
(c) Sedaj bomo obravnavali primer, ko predpis $r(\phi) = a + b\phi$ ni periodičen. Posledično krivulja ne bo sklenjena.



Vidimo, da razdalja točke od izhodišča med kroženjem ves čas narašča. Na začetku je enaka a, vsakič, ko obkrožimo izhodišče, pa se oddaljenost poveča za $2\pi b$. Dobljeni krivulji rečemo Arhimedova spirala.



(d) Primer $r(\phi) = \frac{a}{\phi}$ je podoben prejšnemu, le da se sedaj točka med vrtenjem okoli izhodišča izhodišču približuje.



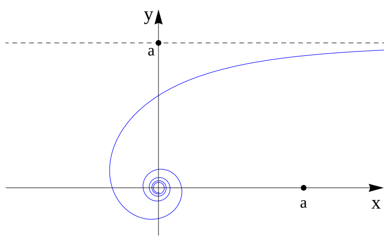
Ko gre $\phi \to \infty$, dobimo spiralo, ki se neskončnokrat ovije okoli izhodišča, vsakič bliže. Pri $\phi = 0$ predpis ni definiran, zato moramo obravnavati še obnašanje krivulje pri $\phi \to 0$. Če krivuljo parametriziramo, dobimo:

$$x(\phi) = a\frac{\cos\phi}{\phi},$$
$$y(\phi) = a\frac{\sin\phi}{\phi}.$$

V limiti tako dobimo:

$$\lim_{\phi\downarrow 0} x(\phi) = \lim_{\phi\downarrow 0} a\frac{\cos\phi}{\phi} = \infty,$$
$$\lim_{\phi\downarrow 0} y(\phi) = \lim_{\phi\downarrow 0} a\frac{\sin\phi}{\phi} = a.$$

Ko gre $\phi \to 0$, se torej točka premika v neskončnost v smeri osi x in se asimptotično približuje premici $y = a$.



□

(34) Lemniskata je podana v implicitni obliki z enačbo $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$ za nek $a > 0$. Izrazi jo v polarnih koordinatah in jo nato skiciraj.

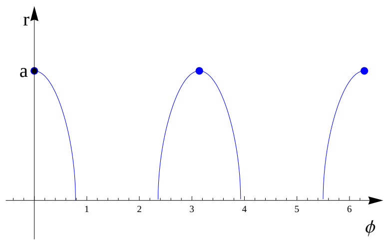
Rešitev: Pišimo $x = r\cos\phi$ in $y = r\sin\phi$. Če to vstavimo v implicitno enačbo, dobimo:

$$\begin{aligned}(r^2\cos^2\phi + r^2\sin^2\phi)^2 &= a^2(r^2\cos^2\phi - r^2\sin^2\phi),\\ r^4 &= a^2r^2\cos(2\phi),\\ r &= a\sqrt{\cos(2\phi)}.\end{aligned}$$

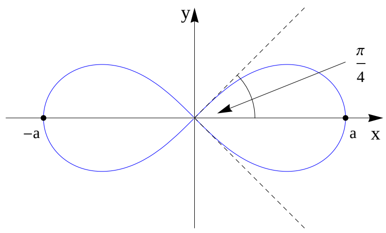
V polarnih koordinatah lahko torej lemniskato opišemo s predpisom

$$r(\phi) = a\sqrt{\cos(2\phi)}$$

za $\phi \in [0, 2\pi]$. Poglejmo graf funkcije r.



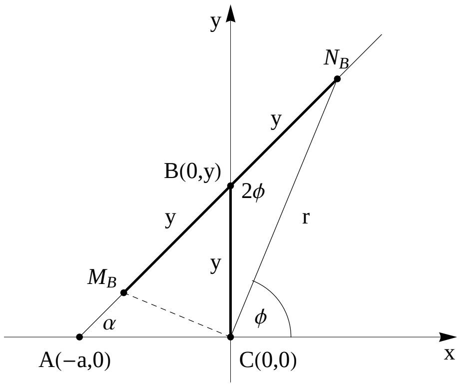
Funkcija r ima stacionarne točke $\phi \in \{0, \pi, 2\pi\}$. V teh točkah je oddaljenost krivulje od izhodišča maksimalna. Iz ničel funkcije r pa lahko preberemo, da lemniskata prečka izhodišče pot kotoma $\phi = \pm\frac{\pi}{4}$.



□

(35) Dana je premica p in točka A, ki ne leži na p. Označimo s C pravokotno projekcijo A na p. Za poljubno točko $B \in p$ naj bosta M_B in N_B točki na premici AB, ki zadoščata pogoju $|M_B B| = |N_B B| = |BC|$. Množica vseh teh točk M_B in N_B tvori krivuljo, ki ji rečemo strofoida. Določi enačbo strofoide in jo nato skiciraj.

Rešitev: Da bomo lažje računali, postavimo koordinatni sistem tako, da bo premica p sovpadala z ordinatno osjo, točka C bo koordinatno izhodišče, točka A pa naj leži na abscisni osi. Potem je $C(0,0)$ in $A(-a,0)$ za nek $a > 0$. Nadalje naj bo $B(0,y)$ za nek y.



Denimo, da je N_B točka na premici AB, ki leži v prvem kvadrantu. Če želimo strofoido opisati v polarnih koordinatah, mora potem za $\phi \in (0, \frac{\pi}{2})$ veljati

$$r(\phi) = |CN_B|.$$

Ker je trikotnik $N_B BC$ enakokrak z vrhom pri B in z dolžino kraka y, lahko izpeljemo, da je notranji kot pri B enak 2ϕ. Z uporabo kosinusnega izreka od tod dobimo

$$r^2 = 2y^2 - 2y^2\cos(2\phi) = 2y^2(1 - \cos(2\phi)) = 4y^2\sin^2\phi.$$

Če upoštevamo, da je $y > 0$ in $\phi \in (0, \frac{\pi}{2})$, lahko sklepamo, da je

$$r(\phi) = 2y\sin\phi.$$

Sedaj moramo dolžino y izraziti s kotom ϕ. V ta namen si poglejmo pravokotni trikotnik BAC. Notranji kot pri oglišču A je enak $\alpha = 2\phi - \frac{\pi}{2}$. Od sledi, da je

$$y = a\,\mathrm{tg}\left(2\phi - \tfrac{\pi}{2}\right).$$

Ko to vstavimo v predpis za $r = r(\phi)$, dobimo

$$r(\phi) = 2y \sin\phi = 2a \operatorname{tg}\left(2\phi - \tfrac{\pi}{2}\right) \sin\phi = -2a \operatorname{ctg}(2\phi) \sin\phi = -a\frac{\cos(2\phi)}{\cos\phi}.$$

Krivulja, ki jo opiše točka N_B, ima torej v polarnih koordinatah predpis

$$r(\phi) = -a\frac{\cos(2\phi)}{\cos\phi}.$$

Če hočemo, da bo $r \geq 0$, mora biti $\phi \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$.

Izračunajmo sedaj še predpis za del krivulje, ki ga opiše točka M_B. Ker je trikotnik M_BCN_B pravokoten, je polarni kot točke M_B enak $\phi' = \phi + \frac{\pi}{2}$. Z uporabo Pitagorovega izreka za trikotnik M_BCN_B pridemo do predpisa:

$$\begin{aligned} r(\phi')^2 &= (2y)^2 - r(\phi)^2 = 4y^2 - (2y^2 - 2y^2\cos(2\phi)), \\ &= 2y^2(1+\cos(2\phi)) = 2y^2(1+\cos(2\phi'-\pi)) = 2y^2(1-\cos(2\phi')). \end{aligned}$$

Prišli smo do iste formule kot v prejšnjem primeru. Z analognim računom kot prej lahko ta izraz preoblikujemo v $r(\phi') = -a\frac{\cos(2\phi')}{\cos\phi'}$.

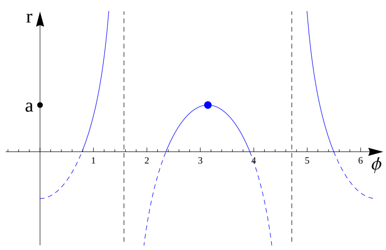
Zaenkrat smo privzeli, da točka B leži v zgornji polravnini, zaradi simetrije pa isti račun deluje tudi v primeru, ko je B v spodnji polravnini. Tako pridemo do polarne oblike enačbe strofoide

$$r(\phi) = -a\frac{\cos(2\phi)}{\cos\phi},$$

kjer je $\phi \in [0, 2\pi]$. Sedaj bomo strofoido poskusili skicirati. Funkcija r ima pola pri $\phi \in \{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\}$. Njen odvod je

$$r'(\phi) = a\sin\phi\frac{\sin^2\phi + 3\cos^2\phi}{\cos^2\phi}.$$

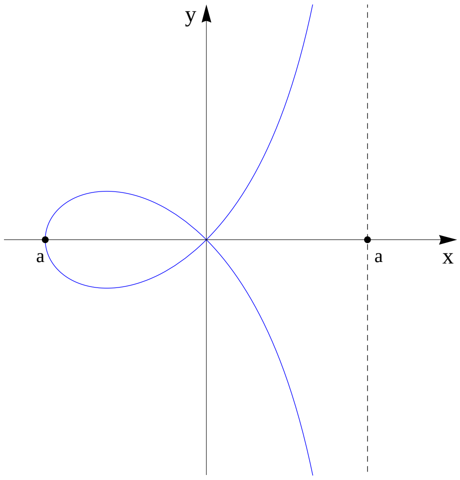
Od tod sledi, da je pri $\phi = \pi$ oddaljenost krivulje od izhodišča lokalno maksimalna. Poglejmo sedaj graf funkcije r.



Vidimo, da je $r \geq 0$ za $\phi \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}) \cup [\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}] \cup (\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}]$. Da bi analizirali obnašanje krivulje pri $\phi \to \frac{\pi}{2}$ in $\phi \to \frac{3\pi}{2}$, najprej zapišimo strofoido v parametrični obliki:

$$\begin{aligned} x(\phi) &= -a\cos(2\phi), \\ y(\phi) &= -a\cos(2\phi)\operatorname{tg}\phi. \end{aligned}$$

Če izračunamo limiti pri $\phi \to \frac{\pi}{2}$ in $\phi \to \frac{3\pi}{2}$, vidimo, da ima strofoida vertikalno asimptoto $x = a$. Poglejmo še skico.



Opomba: Strofoido lahko izrazimo tudi v implicitni obliki z enačbo

$$y^2 = x^2 \frac{a+x}{a-x}.$$

$\square$