Analiza 1

Naravna, racionalna in realna števila

(1) Reši neenačbi:

(a) $\sqrt{x^2+1}+2x-1>0$,

(b) $\dfrac{3-x}{x+1}>\sqrt{3-2x}$.

Rešitev: Neenačbe rešujemo računsko ali pa grafično. Če se lotimo reševanja neenačbe računsko, moramo paziti, da ne naredimo kakšne operacije, ki bi morebiti obrnila smer neenakosti. Tako lahko na obeh straneh neenačbe prištejemo poljubno realno število. Neenačbo smemo množiti samo s pozitivnimi realnimi števili, kvadriramo pa jo lahko, če sta obe strani pozitivni. Pri grafični obravnavi neenačbe pa preprosto narišemo grafa obeh strani in ju primerjamo. Če je neenačba komplicirana, je to lahko netrivialno opravilo.

(a) Poskusimo rešiti neenačbo $\sqrt{x^2+1}+2x-1>0$ najprej računsko. Če damo linearen člen na desno stran, dobimo neenačbo

$$\sqrt{x^2+1}>1-2x.$$

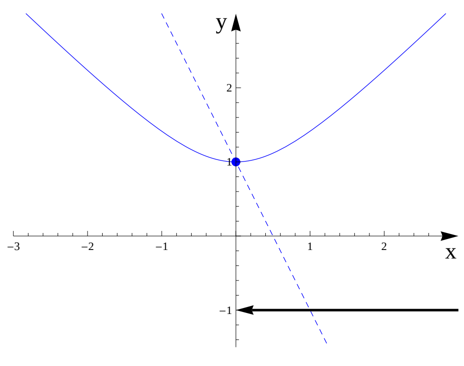
Da bi se znebili korena na levi strani, bi morali obe strani kvadrirati. Pri tem pa moramo biti pozorni, da lahko to storimo le, če sta obe strani pozitivni. Za $x>\frac{1}{2}$ je desna stran negativna, zato je v tem primeru neenakost avtomatično izpolnjena. Za $x\leq\frac{1}{2}$ pa lahko obe strani kvadriramo, da dobimo:

$$\begin{aligned} x^2+1&>1-4x+4x^2,\\ 3x^2-4x&<0,\\ x(3x-4)&<0. \end{aligned}$$

Ta neenakost je izpolnjena za $x\in(0,\frac{4}{3})$. Če torej upoštevamo še možnost od prej, je rešitev neenačbe interval

$$R=(0,\infty).$$

Za občutek si poglejmo neenačbo $\sqrt{x^2+1}>1-2x$ še grafično.



Vidimo, da leži graf linearne funkcije pod korensko funkcijo na pozitivnem poltraku realnih števil.

(b) Sedaj obravnavamo neenačbo

$$\frac{3-x}{x+1} > \sqrt{3-2x}.$$

Če hočemo, da bo neenačba sploh definirana, mora biti $x \neq -1$ in $3-2x \geq 0$. Z drugimi besedami to pomeni, da mora biti $x \in (-\infty,-1) \cup (-1, \frac{3}{2}]$.

Če je $x \in (-\infty,-1)$ je leva stran neenačbe negativna, desna pa pozitivna, od koder sledi, da na tem intervalu neenačba nima rešitve.

Predpostavimo sedaj, da je $x \in (-1, \frac{3}{2}]$. Izraz $x+1$ je potem pozitiven, zato lahko neenačbo preoblikujemo v

$$3-x > (x+1)\sqrt{3-2x}.$$

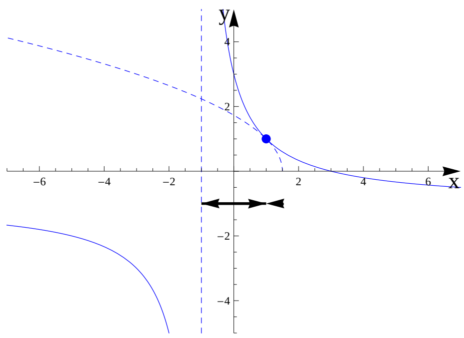
Ker sta obe strani pozitivni, lahko neenačbo sedaj kvadriramo, da dobimo:

$$\begin{aligned}
x^2-6x+9 &> (x+1)^2(3-2x),\\
x^2-6x+9 &> 3x^2-2x^3+6x-4x^2+3-2x,\\
2x^3+2x^2-10x+6 &> 0,\\
(x-1)^2(x+3) &> 0.
\end{aligned}$$

Zadnja neenačba ima rešitev $(-3,1) \cup (1,\infty)$. Ker pa mora biti $x \in (-1, \frac{3}{2}]$, je rešitev prvotne neenačbe

$$R = (-1,1) \cup (1, \tfrac{3}{2}].$$

Poglejmo si še grafa.



□

(2) Reši neenačbe:

(a) $|x+1| < x+3$,

(b) $|x^2+4x+3| < 2$,

(c) $|1-|x-1|| < 1$.

Rešitev: (a) Preden začnemo z obravnavo neenačbe $|x+1| < x+3$, se spomnimo na definicijo absolutne vrednosti. Izraz na levi strani je po definiciji enak

$$|x+1| = \begin{cases} x+1 & ; \ x \geq -1, \\ -x-1 & ; \ x < -1. \end{cases}$$

Torej imamo opravka z dvema neenačbama: eno na intervalu $(-\infty, -1)$, drugo pa na intervalu $[-1, \infty)$.

Na intervalu $(-\infty, -1)$ imamo neenačbo

$$-x - 1 < x + 3,$$

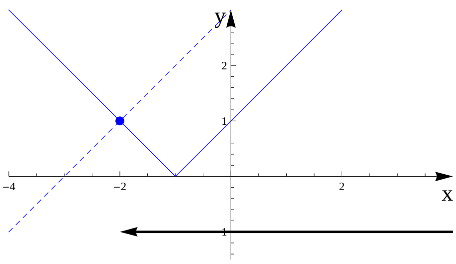
ki se prevede v neenačbo $x > -2$. Za rešitev tu tako dobimo interval $(-2, -1)$. Na intervalu $[-1, \infty)$ pa imamo po drugi strani neenačbo

$$x + 1 < x + 3,$$

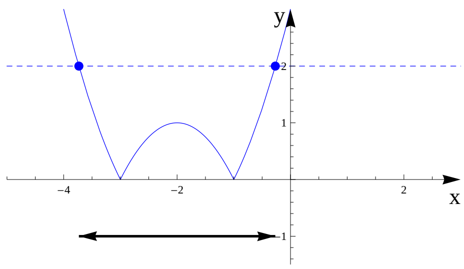
ki je izpolnjena povsod na tem intervalu. Skupna rešitev prvotne neenačbe je torej interval

$$R = (-2, \infty).$$

Poglejmo si rešitev še grafično.



(b) Neenačbo $|x^2 + 4x + 3| < 2$ bomo poskusili rešiti grafično, da nam ne bo treba obravnavati preveč primerov. Kvadratna funkcija $f(x) = x^2 + 4x + 3$ ima ničli $x_1 = -3$ in $x_2 = -1$, njeno teme pa je v točki $T(-2, -1)$. Če upoštevamo še absolutno vrednost, se del grafa, ki leži pod abscisno osjo, prezrcali čez abscisno os. Tako dobimo naslednjo sliko.



Vidimo, da neenačbo rešijo števila na intervalu med presečiščema grafa funkcije f in premice $y = 2$. Tako dobimo rešitev

$$R = (-2 - \sqrt{3}, -2 + \sqrt{3}).$$

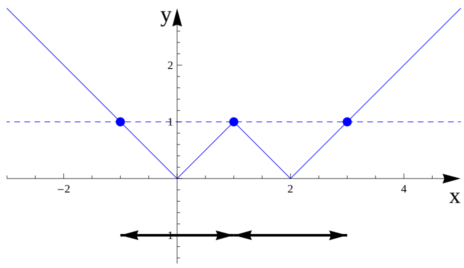
(c) Za konec si poglejmo še neenačbo $|1 - |x - 1|| < 1$. Izraz na levi strani bomo izračunali v dveh korakih. Najprej je

$$1 - |x - 1| = \begin{cases} 2 - x & ; \ x \geq 1, \\ x & ; \ x < 1. \end{cases}$$

Od tod sledi

$$|1-|x-1|| = \begin{cases} 2-x & ; x \in [1,2], \\ x-2 & ; x \in [2,\infty), \\ x & ; x \in [0,1], \\ -x & ; x < 0. \end{cases}$$

Poglejmo še sliko.



Rešitev neenačbe je

$$R = (-1,1) \cup (1,3).$$

□

(3) Dokaži: če je 2^n+1 praštevilo, potem je n oblike 2^k, kjer je k naravno število ali 0.

Rešitev: Za začetek si poglejmo nekaj vrednosti števil oblike 2^n+1:

$$\begin{aligned} 2^1+1 &= 3, \\ 2^2+1 &= 5, \\ 2^3+1 &= 9 = 3\cdot 3, \\ 2^4+1 &= 17, \\ 2^5+1 &= 33 = 3\cdot 11, \\ 2^6+1 &= 65 = 5\cdot 13, \\ 2^7+1 &= 129 = 3\cdot 43, \\ 2^8+1 &= 257, \\ 2^9+1 &= 513 = 3^3\cdot 19. \end{aligned}$$

Kot vidimo na zgornjih nekaj primerih, se praštevila pojavljajo le, ko je eksponent n potenca števila 2. Sedaj bomo pokazali, da je v primeru, ko n ni potenca števila 2, število 2^n+1 sestavljeno. Pri tem bomo uporabili faktorizacijsko formulo

$$a^m+b^m = (a+b)(a^{m-1}-a^{m-2}b+a^{m-3}b^2+\ldots-ab^{m-2}+b^{m-1}),$$

ki velja za vsako liho naravno število m.

Denimo najprej, da je n liho število. Z uporabo zgornje formule potem dobimo, da je

$$2^n+1 = 2^n+1^n = (2+1)(2^{n-1}-2^{n-2}+\ldots+2^2-2^1+1),$$

kar pomeni, da je število 2^n+1 deljivo s 3. Edina možnost, da je tako število praštevilo, je v primeru, ko je $n=1$.

Če je n sodo število, pa ga zmeraj lahko zapišemo v obliki $n = 2^k l$, kjer je l liho število, k pa pozitivno število. V kolikor je $l > 1$, od tod sledi

$$2^{2^k l} + 1 = (2^{2^k})^l + 1^l = (2^{2^k} + 1)((2^{2^k})^{l-1} - (2^{2^k})^{l-2} + \ldots + 1),$$

kar spet pomeni, da $2^n + 1$ ni praštevilo. Edina možnost, da je $2^n + 1$ praštevilo, je torej v primeru, ko je $l = 1$. Tedaj pa je $n = 2^k$, kar smo želeli pokazati.

<u>Opomba</u>: Niso vsa števila oblike $2^{2^k} + 1$ praštevila. Najmanjši protiprimer je število

$$2^{32} + 1 = 4294967297 = 641 \cdot 6700417.$$

□

(4) Naj bo n naravno število. Pokaži, da je število $\sqrt{n}$ bodisi naravno bodisi iracionalno.

Rešitev: Realna števila lahko razdelimo na racionalna in iracionalna števila. Racionalna števila so tista realna števila, ki jih lahko predstavimo z ulomki, njihov decimalni zapis pa je od nekod dalje periodičen. Iracionalna števila so vsa preostala števila, imajo pa lastnost, da je njihov decimalni zapis neperiodičen.

Pokazali bomo, da so koreni naravnih števil ene izmed naslednjih dveh oblik:

$$\begin{aligned} \text{iracionalna števila}: & \ \sqrt{2},\ \sqrt{3},\ \sqrt{5},\ \sqrt{6}, \ldots, \\ \text{naravna števila}: & \ \sqrt{1} = 1,\ \sqrt{4} = 2,\ \sqrt{9} = 3,\ \sqrt{16} = 4, \ldots. \end{aligned}$$

Ne more se torej zgoditi, da bi bil koren naravnega števila pravi ulomek.

Pa denimo, da je

$$\sqrt{n} = \frac{p}{q},$$

kjer je $q > 1$ in sta števili p in q tuji. Od tod sledi:

$$\begin{aligned} q\sqrt{n} &= p, \\ q^2 n &= p^2. \end{aligned}$$

Naj bo sedaj a nek praštevilski delitelj števila q. Iz enakosti $q^2 n = p^2$ potem sledi, da a deli tudi p^2 in posledično tudi p. To pa je v protislovju s predpostavko, da sta p in q tuji števili. □

(5) Pokaži, da obstajata iracionalni števili x in y, za kateri je število x^y racionalno.

Rešitev: Takšnih parov iracionalnih števil je mnogo, a je v splošnem težko pokazati, da so konkretna števila res iracionalna. En par, za katerega to znamo pokazati, pa je na primer $x = \sqrt{2}$ in $y = \log_{\sqrt{2}} 3$, saj je

$$\sqrt{2}^{\log_{\sqrt{2}} 3} = 3.$$

Za koren $\sqrt{2}$ že vemo, da je iracionalen, zato poskusimo pokazati, da je število $\log_{\sqrt{2}} 3$ iracionalno.

Spet bomo uporabili dokaz s protislovjem. Recimo torej, da je

$$\log_{\sqrt{2}} 3 = \frac{m}{n}$$

za nek okrajšan ulomek. Od tod potem sledi:

$$\begin{aligned} \log_{\sqrt{2}} 3 &= \frac{m}{n}, \\ \sqrt{2}^{\frac{m}{n}} &= 3, \\ \sqrt{2}^m &= 3^n, \\ 2^m &= 9^n. \end{aligned}$$

Ker sta m in n naravni števili, smo torej prišli do protislovja, kar pomeni, da je število $\log_{\sqrt{2}} 3$ iracionalno.

Opomba 1: Malce bolj naraven par iracionalnih števil z dano lastnostjo bi bil morda

$$e^{\ln 2} = 2.$$

Čeprav so naravni logaritmi naravnih števil iracionalni, pa je to precej težko dokazati.

Opomba 2: Na precej zvit način bi lahko nalogo dokazali tudi takole. Vzemimo na primer število

$$\sqrt{2}^{\sqrt{2}}.$$

Če je to število racionalno, že imamo iskani par, sicer pa lahko pogledamo število

$$\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2.$$

V vsakem primeru torej imamo par števil, ki zadošča pogojem naloge. Če bi hoteli ugotoviti, kateri par je pravi, pa bi se spet morali precej potruditi. Dokazati se da, da je število $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ iracionalno, tako da je primeren drugi par. $\square$

(6) Pokaži, da število e ni racionalno.

Rešitev: Pri nalogi bomo upoštevali definicijo števila e kot neskončno vsoto

$$e = 1 + \tfrac{1}{1!} + \tfrac{1}{2!} + \tfrac{1}{3!} + \tfrac{1}{4!} + \dots$$

Recimo, da obstaja nek ulomek $\frac{k}{l} \in \mathbb{Q}$, da velja $e = \frac{k}{l}$. Če to enakost pomnožimo z $l!$, dobimo

$$\left(l! + \tfrac{l!}{1!} + \tfrac{l!}{2!} + \tfrac{l!}{3!} + \tfrac{l!}{4!} + \dots + \tfrac{l!}{l!}\right) + \left(\tfrac{l!}{(l+1)!} + \tfrac{l!}{(l+2)!} + \dots\right) = k(l-1)!.$$

Izraz v levem oklepaju in izraz na desni strani enakosti sta oba celi števili, zato mora biti tudi izraz v desnem oklepaju celo število. Jasno je to celo število pozitivno, velja pa tudi

$$\tfrac{l!}{(l+1)!} + \tfrac{l!}{(l+2)!} + \tfrac{l!}{(l+3)!} + \dots < \tfrac{1}{l+1} + \tfrac{1}{(l+1)^2} + \tfrac{1}{(l+1)^3} + \dots$$

Na desni strani imamo vsoto geometrijske vrste, ki se sešteje v $\frac{1}{l}$. Torej je

$$0 < \tfrac{l!}{(l+1)!} + \tfrac{l!}{(l+2)!} + \tfrac{l!}{(l+3)!} + \dots < 1,$$

kar pa nas pripelje do protislovja. $\square$

(7) Naj bo q neničelno racionalno število, $x > 0$ in y pa iracionalni števili.

(a) Dokaži, da so števila $\sqrt{x}$, $q + x$ in qx iracionalna.

(b) Ali lahko kaj podobnega povemo o številih $x + y$, xy in $\sqrt{q}$?

Rešitev: (a) $\sqrt{x}$ je iracionalno število:

Recimo, da je $\sqrt{x}$ racionalno število. Torej ga lahko zapišemo v obliki

$$\sqrt{x} = \frac{m}{n},$$

kjer je $\frac{m}{n}$ nek ulomek. Od tod pa bi potem sledilo, da je tudi

$$x = (\sqrt{x})^2 = \frac{m^2}{n^2}$$

racionalno število, kar pa je v nasprotju s predpostavko, da je x iracionalen. Torej je $\sqrt{x}$ iracionalno število.

$q + x$ je iracionalno število:

Recimo spet, da je $q + x$ racionalno število. Torej je

$$q + x = r$$

za nek $r \in \mathbb{Q}$. Od tod potem sledi, da je

$$x = r - q$$

razlika dveh racionalnih števil, kar pa je spet racionalno število. To je ponovno v nasprotju s predpostavko, da je x iracionalen.

qx je iracionalno število:

Denimo sedaj, da je qx racionalno število, kar pomeni, da je oblike

$$qx = r$$

za nek $r \in \mathbb{Q}$. Ker smo predpostavili, da je $q \neq 0$, je torej

$$x = \frac{r}{q}$$

kvocient dveh racionalnih števil in je zato racionalen. Spet pridemo v protislovje s predpostavko, da je x iracionalen.

Opomba: Ta naloga nam omogoča generirati veliko množico iracionalnih števil, če imamo dano konkretno iracionalno število. Ker sta $\sqrt{2}$ in e iracionalni števili, so torej avtomatično iracionalna števila

$$\sqrt{e},\ 2e, e + 1,\ \sqrt{2} + 1,\ \frac{\sqrt{2}}{5}, \ldots$$

(b) Če iracionalnemu številu prištejemo, ali pa ga pomnožimo z iracionalnim številom, se lahko zgodi, da dobimo racionalno število. Tako je na primer:

$$\sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0,$$
$$e \cdot \frac{1}{e} = 1.$$

Podobno je s korenjenjem. Kvadratni koren realnega števila je včasih lahko racionalen, kot je v primeru $\sqrt{4} = 2$. $\square$

(8) Pokaži, da med poljubnima različnima realnima številoma obstaja iracionalno število.

Rešitev: Naj bosta x in y različni realni števili in denimo, da je $x < y$. Naša naloga bo, da pokažemo, da interval $[x, y]$ vsebuje vsaj eno iracionalno število. Ker sta bila x in y poljubna, to pomeni, da vsak neprazen interval realnih števil vsebuje vsaj eno iracionalno število. Pogosto zato rečemo, da so iracionalna števila gosta v množici realnih števil.

Pa vzemimo poljubni realni števili x in y in naj bo $x < y$. Pri dokazu bomo uporabili rezultat s predavanj, ki pravi, da so racionalna števila gosta v realnih številih. Da bi lahko uporabili ta rezultat, bomo uporabili naslednji trik. Poglejmo si interval

$$\left(\frac{x}{\sqrt{2}}, \frac{y}{\sqrt{2}}\right).$$

Vemo, da ta interval vsebuje neko racionalno število q, kar pomeni, da je

$$\frac{x}{\sqrt{2}} < q < \frac{y}{\sqrt{2}}.$$

Če neenakosti pomnožimo s $\sqrt{2}$, dobimo

$$x < \sqrt{2}q < y.$$

Od prej že vemo, da je produkt iracionalnega in racionalnega števila iracionalen, kar pomeni, da je $\sqrt{2}q$ iracionalno število, ki ustreza pogojem naloge.

Opomba: Namesto števila $\sqrt{2}$ bi lahko v dokazu uporabili katerokoli pozitivno iracionalno število. $\square$

V nadaljevanju bomo obravnavali princip matematične indukcije, ki ga uporabljamo za dokazovanje formul, ki veljajo za naravna števila. Če hočemo dokazati, da neka lastnost L velja za vsa naravna števila, je dovolj, da pokažemo:

· veljavnost lastnosti L za $n = 1$ (včasih začnemo tudi pri $n = 2$ ali kakšni drugi vrednosti),
· da iz veljavnosti lastnosti L za poljuben $n \in \mathbb{N}$ sledi veljavnost lastnosti L za $n + 1$.

Videli bomo, kako lahko indukcijo uporabimo za dokazovanje raznih enakosti, neenakosti, deljivosti in kombinatoričnih formul, v katerih nastopajo naravna števila.

(9) Dokaži, da za vsa naravna števila n veljajo enakosti:

(a) $1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$,

(b) $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,

(c) $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Rešitev: (a) Dokazati želimo formulo za vsoto prvih n naravnih števil

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

$\underline{n=1}$:

$$1 = \frac{1 \cdot 2}{2}.$$

$\underline{n \to n+1}$:

Privzemimo sedaj, da za nek $n \in \mathbb{N}$ velja $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. Pokazati želimo, da potem velja tudi

$$1 + 2 + \ldots + n + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Računajmo:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \ldots + n + (n+1) &\overset{\text{I.P.}}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1), \\ &= (n+1)\left(\frac{n}{2} + 1\right), \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2}. \end{aligned}$$

S tem smo pokazali, da zgornja formula velja za vsa naravna števila.

(b) $\underline{n=1}$:

$$1^2 = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3.$$

$\underline{n \to n+1}$:

Privzemimo sedaj, da za nek $n \in \mathbb{N}$ velja

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1).$$

Pokazati želimo, da potem velja tudi

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3)$$

Računajmo:

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 + (n+1)^2 &\overset{\text{I.P.}}{=} \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) + (n+1)^2, \\ &= (n+1)\left(\frac{1}{6} n(2n+1) + n + 1\right), \\ &= \frac{1}{6}(n+1)(2n^2 + n + 6n + 6), \\ &= \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3). \end{aligned}$$

(c) Sedaj želimo dokazati formulo za vsoto kubov prvih n naravnih števil

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

$\underline{n=1}$:

$$1^3 = \frac{1^2 \cdot 2^2}{4}.$$

$\underline{n \to n+1}$:
Privzemimo sedaj, da za nek $n \in \mathbb{N}$ velja $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$. Pokazati želimo, da potem velja tudi

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 + (n+1)^3 = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}.$$

Računajmo:

$$\begin{aligned}
1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 + (n+1)^3 &\overset{\text{I.P.}}{=} \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3, \\
&= (n+1)^2\left(\frac{n^2}{4} + n + 1\right), \\
&= \frac{1}{4}(n+1)^2(n^2 + 4n + 4), \\
&= \frac{1}{4}(n+1)^2(n+2)^2.
\end{aligned}$$

$\square$

(10) Dokaži, da za vsa naravna števila n veljata neenakosti:

(a) $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}$,

(b) $n! \leq 2\left(\frac{n}{2}\right)^n$.

Rešitev: (a) Sedaj bomo uporabili indukcijo za dokaz neenakosti

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}.$$

$\underline{n = 1}$:

$$\frac{1}{\sqrt{1}} \geq \sqrt{1}.$$

$\underline{n \to n+1}$:
Privzemimo sedaj, da za nek $n \in \mathbb{N}$ velja neenakost

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}.$$

Pokazati želimo, da potem velja tudi

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \geq \sqrt{n+1}.$$

Izraz na levi lahko najprej z uporabo indukcijske predpostavke ocenimo takole

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \geq \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Pokazati moramo torej še, da velja

$$\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \geq \sqrt{n+1}.$$

Če to neenakost pomnožimo s $\sqrt{n+1}$, dobimo:

$$\begin{aligned}\sqrt{n^2+n} + 1 &\geq n+1,\\ \sqrt{n^2+n} &\geq n,\\ n^2+n &\geq n^2.\end{aligned}$$

Zadnja neenakost velja za vsa naravna števila, kar pomeni, da smo pokazali, da je

$$\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \geq \sqrt{n+1}$$

za vsa naravna števila n. Od tod sledi trditev naloge.

(b) $\underline{n=1}$:

$$1! \leq 2\left(\frac{1}{2}\right)^1 = 1.$$

$\underline{n \to n+1}$:

Recimo, da za nek n velja $n! \leq 2(\frac{n}{2})^n$ in pokažimo, da od tod sledi $(n+1)! \leq 2(\frac{n+1}{2})^{n+1}$. Po indukcijski predpostavki je

$$(n+1)! = (n+1)n! \leq (n+1)2\Big(\frac{n}{2}\Big)^n = 2(n+1)\frac{n^n}{2^n}.$$

Želimo pokazati, da velja neenakost

$$2(n+1)\frac{n^n}{2^n} \leq 2\Big(\frac{n+1}{2}\Big)^{n+1} = 2\frac{(n+1)^{n+1}}{2^{n+1}},$$

ki pa je ekvivalentna neenakosti

$$2 \leq \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^n.$$

To neenakost lahko dokažemo s pomočjo binomskega razvoja

$$\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n = 1 + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \ldots + \frac{1}{n^n}.$$

Vsota prvih dveh členov je enaka 2, vsi ostali členi pa so pozitivni. □

(11) Dokaži Bernoullijevo neenakost: za vsako naravno število n in za vsako realno število $a > -1$ velja

$$(1+a)^n \geq 1 + na.$$

Rešitev: Neenakosti

$$(1+a)^n \geq 1 + na$$

rečemo Bernoullijeva neenakost. Veljavna je tudi, če n zamenjamo s poljubnim realnim številom $r \geq 1$, a je v tem splošnejšem primeru ne moremo dokazati s pomočjo indukcije.

$\underline{n = 1}$: $(1+a)^1 \geq 1 + a$.

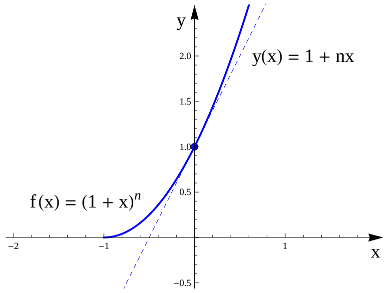
$\underline{n \to n+1}$: Recimo, da za nek n velja neenakost $(1+a)^n \geq 1 + na$ in pokažimo, da od tod sledi $(1+a)^{n+1} \geq 1 + (n+1)a$. Po indukcijski predpostavki je

$$(1+a)^{n+1} = (1+a)(1+a)^n \geq (1+a)(1+na) = 1 + a + na + na^2 = 1 + (n+1)a + na^2.$$

Pri tem smo upoštevali, da je $a > -1$. Ker je $na^2 \geq 0$, od tod sledi

$$(1+a)^{n+1} \geq 1 + (n+1)a.$$

Opomba: Geometrijsko lahko Bernoullijevo neenakost interpretiramo na naslednji način. Definirajmo funkcijo $f(x) = (1+x)^n$ za $x > -1$. Njena tangenta v točki $x = 0$ je premica $y(x) = 1 + nx$, Bernoullijeva neenakost pa pravi, da leži graf funkcije f nad to tangento.



$\square$

(12) (a) Pokaži, da 10 deli izraz $2^{2^n} - 6$ za vsako naravno število $n \geq 2$.
(b) Pokaži, da je za vsako naravno število n izraz $13^{2n} + 6$ deljiv s 7.

Rešitev: (a) Z uporabo indukcije lahko tudi dokazujemo deljivosti določenih družin izrazov z danimi fiksnimi naravnimi števili. Poglejmo si to na konkretnem primeru. V tem primeru trditev ne velja pri $n = 1$, zato bomo začeli z

$\underline{n = 2}$:

$$2^{2^2} - 6 = 2^4 - 6 = 16 - 6 = 10.$$

$\underline{n \to n+1}$:

Privzemimo sedaj, da $10 \,|\, 2^{2^n} - 6$ za nek $n \in \mathbb{N}$. To pomeni, da obstaja tak $k \in \mathbb{N}$, da je $2^{2^n} - 6 = 10k$. Za indukcijski korak najprej opazimo, da je

$$2^{2^{n+1}} - 6 = 2^{2^n \cdot 2} - 6 = \left(2^{2^n}\right)^2 - 6.$$

Iz indukcijske predpostavke sledi $2^{2^n} = 10k + 6$, od koder dobimo

$$\left(2^{2^n}\right)^2 - 6 = (10k+6)^2 - 6 = 100k^2 + 120k + 36 - 6 = 10(10k^2 + 12k + 3).$$

Torej $10 \,|\, 2^{2^{n+1}} - 6$, kar smo želeli dokazati.

(b) $\underline{n = 1}$:

$$13^2 + 6 = 175 = 7 \cdot 25.$$

$\underline{n \to n+1}$:

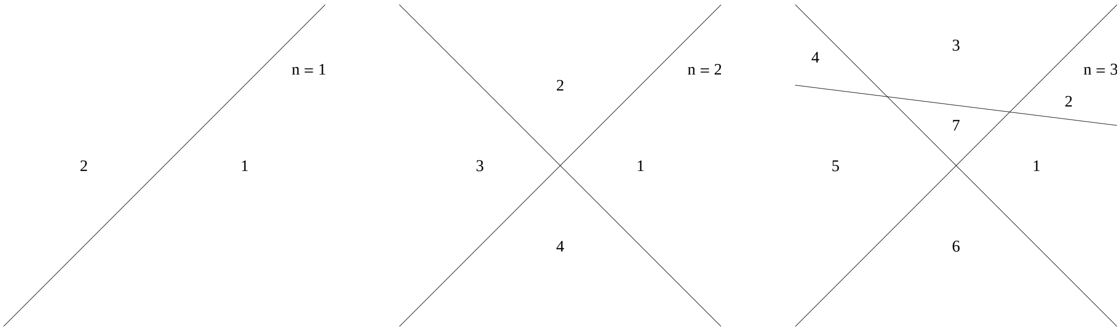
Privzemimo sedaj, da za nek $n \in \mathbb{N}$ velja $13^{2n} + 6 = 7k$. Od tod potem sledi

$$13^{2(n+1)} + 6 = 13^{2n+2} + 6 = 169 \cdot 13^{2n} + 6 = 169(7k - 6) + 6 = 7 \cdot 169k - 6 \cdot 168 = 7 \cdot (169k - 144),$$

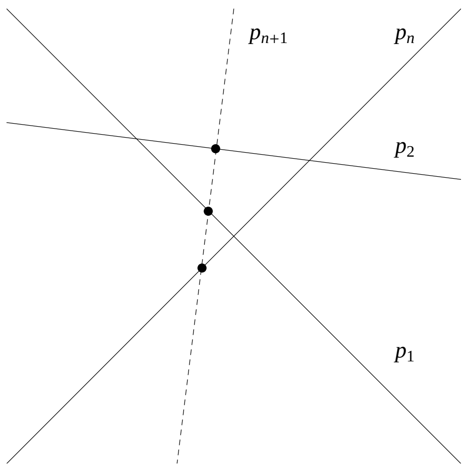
kar smo želeli dokazati. $\square$

(13) Dokaži, da n paroma nevzporednih premic v ravnini, od katerih se nobene tri ne sekajo v isti točki, razdeli ravnino na $\frac{n(n+1)}{2} + 1$ delov.

Rešitev: Najprej si poglejmo skico za nekaj majhnih vrednosti n.



Kot vidimo, formula velja za $n = 1, 2, 3$. Da velja za poljubno naravno število, pa bomo sedaj pokazali z indukcijo. Naj bodo $\{p_1, p_2, \ldots, p_n, p_{n+1}\}$ poljubne premice v ravnini, ki zadoščajo pogojem naloge. Po indukcijski predpostavki premice $p_1, \ldots, p_n$ razdelijo ravnino na $\frac{n(n+1)}{2} + 1$ delov. Ko zraven dodamo še premico p_{n+1}, le-ta po predpostavki seka vsako izmed premic $p_1, \ldots, p_n$ izven že obstoječih presečišč.



Premica p_{n+1} torej poteka skozi $n+1$ delov ravnine, ki jih določajo premice $p_1, \ldots, p_n$, in vsakega izmed njih razdeli na dva dela. Novih delov je torej $n + 1$, vseh delov skupaj pa

$$\frac{n(n+1)}{2} + 1 + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} + 1,$$

kar se ujema z željeno formulo. □

(14) Dokaži binomsko formulo: za vsaki realni števili a in b in za vsako naravno število n velja

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \ldots + b^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Rešitev: Za vsako naravno število n in vsako naravno število $0 \leq k \leq n$ definiramo binomski simbol

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!}.$$

Po dogovoru je $0! = 1$, od koder sledi $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$. Kombinatorično ustreza binomski simbol $\binom{n}{k}$ številu vseh k-elementnih podmnožic množice z n elementi.

Binomsko formulo bomo dokazali z indukcijo in pa z uporabo formule

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}.$$

Za $n = 1$ se binomska formula poenostavi v $a + b = a + b$, zato denimo sedaj, da za nek n velja

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Potem je:

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \stackrel{\text{I.P.}}{=} (a+b) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k, \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1}.
\end{aligned}$$

Sedaj bomo v desni vsoti uvedli zamenjavo $l = k + 1$. Če k teče od 0 do n, bo torej l tekel od 1 do $n + 1$, desna vsota pa bo enaka

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} = \sum_{l=1}^{n+1} \binom{n}{l-1} a^{n+1-l} b^l.$$

Ker ime spremenljivke, po kateri vsota teče, ni važno, lahko sedaj namesto l spet pišemo k, da dobimo:

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^{n+1-k} b^k, \\
&= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) a^{n+1-k} b^k, \\
&= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k, \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k.
\end{aligned}$$

Pri tem smo, kot že rečeno, uporabili formulo

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1},$$

ki velja za vse $1 \leq k \leq n$, člena $k = 0$ in $k = n + 1$ pa smo obravnavali posebej. □

(15) Dokaži, da za naravni števili m in n ter za $j \in \{0, 1, 2, \ldots, m + n\}$ velja

$$\binom{n+m}{j} = \sum_{i=0}^{j} \binom{m}{i} \binom{n}{j-i}.$$

Rešitev: Formuli

$$\binom{n+m}{j} = \sum_{i=0}^{j} \binom{m}{i}\binom{n}{j-i}$$

rečemo Vandermondova identiteta. Dokazali jo bomo na dva načina: en bo računski, drugi pa kombinatorični.

Najprej poskusimo Vandermondovo identiteto dokazati z uporabo binomske formule. Po eni strani je

$$(1+x)^{m+n} = \sum_{i=0}^{m+n} \binom{m+n}{i} x^i.$$

Po drugi strani pa velja tudi

$$(1+x)^{m+n} = (1+x)^m (1+x)^n.$$

Ideja je torej, da za vsak faktor na desni strani uporabimo binomsko formulo in nato ta člena zmnožimo. Tako dobimo

$$\sum_{i=0}^{m+n} \binom{m+n}{i} x^i = \left(\sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} x^i\right)\left(\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i\right).$$

Na to enakost lahko gledamo kot na enakost polinomov, spomnimo pa se lahko, da sta dva polinoma enaka natanko takrat, ko imata enake vse koeficiente. Na levi strani je koeficient pri členu x^j ravno $\binom{n+m}{j}$, zato moramo sedaj pokazati še, da dobimo na desni strani pri x^j koeficient, ki ustreza izrazu na desni strani Vandermondove identitete. Če množimo dva polinoma, dobimo v produktu potenco x^j v primerih, ko bomo v prvi vsoti vzeli člen x^i v drugi pa x^{j-i}, kjer je $i = 0, 1, 2, \ldots, j$. Ko te člene seštejemo, dobimo ravno izraz

$$\binom{m}{0}\binom{n}{j} + \binom{m}{1}\binom{n}{j-1} + \binom{m}{2}\binom{n}{j-2} + \ldots + \binom{m}{j}\binom{n}{0} = \sum_{i=0}^{j} \binom{m}{i}\binom{n}{j-i}.$$

Vandermondovo enakost lahko dokažemo tudi kombinatorično. Recimo na primer, da imamo množico $m+n$ elementov, od katerih jih je m prvega tipa, n pa drugega tipa. Iz te množice z $m+n$ elementi jih lahko j izberemo na

$$\binom{m+n}{j}$$

načinov. Po drugi strani pa jih lahko j izberemo tudi takole. Lahko na primer izberemo vse elemente drugega tipa in nič prvega tipa. Takšnih možnosti je $\binom{m}{0}\binom{n}{j}$. Lahko je en prvega tipa, ostali pa drugega tipa. Takšnih možnosti je $\binom{m}{1}\binom{n}{j-1}$. Lahko sta dva prvega tipa, ostali pa drugega tipa... Ko zapišemo vse možnosti in jih seštejemo, dobimo ravno Vandermondovo identiteto. $\square$

(16) Za naslednje množice določi supremum, infimum, minimum in maksimum, če obstajajo.

(a) $A = \{1 + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$,

(b) $B = \{x \in (0,1) \mid x \text{ ima v decimalnem zapisu vsaj eno enko}\}$,

(c) $C_c = \{\frac{1}{1+e^{cx}} \mid x \geq 0\}$, kjer je $c \in \mathbb{R}$.

Rešitev: Naj bo A podmnožica realnih števil $\mathbb{R}$. Pogosto nas zanima, ali ima A najmanjši oziroma največji element. Če jih ima, jih imenujemo minimum oziroma maksimum ter jih označimo z $\min A$ in $\max A$. Če za množico A vzamemo interval $[0, 1]$, tako dobimo:

$$\min[0,1] = 0,$$
$$\max[0,1] = 1.$$

Včasih pa kakšna množica, kot je na primer interval $(0, 1)$, nima najmanjšega elementa. Če je množica A navzdol omejena, lahko definiramo največjo spodnjo mejo oziroma infimum množice A. To je takšno število $\inf A$, ki je manjše od vseh števil iz A in je največje število s to lastnostjo. Formalno to pomeni, da mora veljati:

· $\inf A \leq a$ za vsak $a \in A$ (to pomeni, da je $\inf A$ spodnja meja množice A),
· če je m spodnja meja množice A, je $m \leq \inf A$.

Podobno lahko definiramo supremum oziroma najmanjšo zgornjo mejo navzgor omejene množice. Za interval $(0, 1)$ velja:

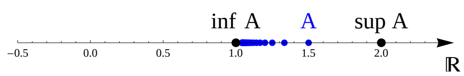
$$\inf(0,1) = 0,$$
$$\sup(0,1) = 1.$$

Za razliko od minimuma in maksimuma infimum in supremum omejene množice nista nujno elementa množice, sta pa v vsakem primeru zelo blizu elementom množice. Vedno lahko namreč najdemo zaporedji elementov množice, ki k njima konvergirata.

(a) Za začetek si poglejmo množico

$$A = \{1 + \tfrac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}\} = \{2, 1 + \tfrac{1}{2}, 1 + \tfrac{1}{3}, \ldots\}$$

oziroma njeno sliko.



Ta množica je navzgor omejena z 2, ki je hkrati največji element množice A. Zato je

$$\max A = \sup A = 2.$$

Navzdol je množica omejena z 1, hkrati pa je vsaka spodnja meja množice A manjša ali enaka 1, saj zaporedje $a_n = 1 + \frac{1}{n}$ konvergira k 1. Ker 1 ni element množice A, množica A nima minimuma, ima pa infimum

$$\inf A = 1.$$

(b) Vsi elementi množice

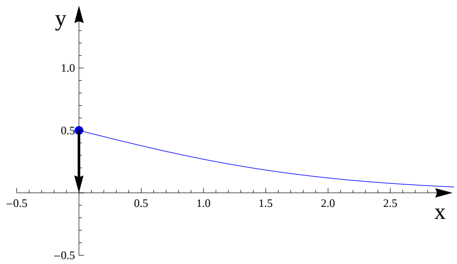
$$B = \{x \in (0, 1) \,|\, x \text{ ima v decimalnem zapisu vsaj eno enko}\}$$

ležijo v intervalu $(0, 1)$, zato je 0 spodnja meja, 1 pa zgornja meja množice B. V množici B ležijo števila oblike

$$0.1,\ 0.01,\ 0.001,\ 0.0001, \ldots,$$

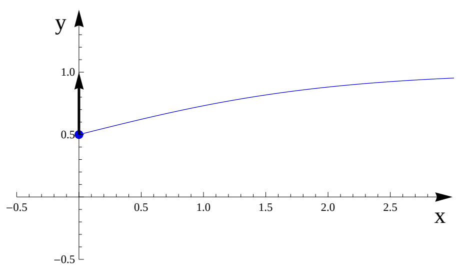
ki imajo vsa v decimalnem zapisu vsaj eno enko. Ker so ta števila lahko poljubno majhna, je
$$\inf B = 0.$$
Ker $0 \notin B$, množica B nima minimuma. Za izračun supremuma si poglejmo števila
$$0.91, 0.91, 0.991, 0.9991, \ldots$$
Števila te oblike so lahko poljubno blizu števila 1. Zato je
$$\sup B = 1,$$
maksimuma pa množica B nima.

(c) V primeru množice
$$C_c = \{\tfrac{1}{1+e^{cx}} \mid x \geq 0\}$$
bomo ločili več primerov (v odvisnosti od vrednosti parametra c). Če je $c = 0$, je $C_0 = \{\frac{1}{2}\}$, zato je
$$\min C_0 = \inf C_0 = \max C_0 = \sup C_0 = \tfrac{1}{2}.$$
Za obravnavo primerov, ko je $c \neq 0$, si bomo pomagali z grafom funkcije $f(x) = \frac{1}{1+e^{cx}}$ za $x \geq 0$. Zanima nas projekcija tega grafa na ordinatno os. V primerih, ko je $c > 0$, imamo naslednjo sliko.



Vidimo torej, da je $C_c = (0, \frac{1}{2}]$, od koder dobimo
$$\max C_c = \sup C_c = \tfrac{1}{2},\ \inf C_c = 0,$$
medtem ko minimum množice C_c ne obstaja.

V primerih, ko je $c < 0$, pa dobimo naslednji graf.



Sedaj je $C_c = [\frac{1}{2}, 1)$, od koder sledi
$$\min C_c = \inf C_c = \tfrac{1}{2},\ \sup C_c = 1.$$
Maksimum množice C_c ne obstaja. $\square$

(17) Naj bosta A in B podmnožici v $\mathbb{R}$. Vsota in razlika množic sta definirani s predpisom

$$A \pm B = \{a \pm b \,|\, a \in A,\, b \in B\}.$$

Dokaži spodnje enakosti. Kdaj so te formule smiselne?

(a) $\inf(A+B) = \inf A + \inf B$,
(b) $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$,
(c) $\inf(A-B) = \inf A - \sup B$,
(d) $\sup(A-B) = \sup A - \inf B$.

Rešitev: Če sta A in B poljubni podmnožici realnih števil, je z $A+B$ definirana množica vseh vsot števil iz množic A in B. Analogno definiramo razliko dveh množic. Poglejmo si za občutek nekaj primerov:

$$\begin{aligned}
[-1,0]+[0,1] &= [-1,1],\\
[-1,0]+(0,1) &= (-1,1),\\
(0,1)-(0,1) &= (-1,1),\\
\mathbb{N}+\mathbb{N} &= \{2,3,4,\ldots\},\\
\mathbb{N}+\mathbb{Z} &= \mathbb{Z},\\
\mathbb{N}-\mathbb{N} &= \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

(a) Začeli bomo z dokazom enakosti $\inf(A+B) = \inf A + \inf B$. Želimo torej dokazati, da je število $\inf A + \inf B$ infimum množice $A+B$. To pomeni, da je:

· $\inf A + \inf B \leq a+b$ za vsak $a \in A$ in vsak $b \in B$,
· če je m spodnja meja množice $A+B$, je $m \leq \inf A + \inf B$.

Po definiciji infimuma je $\inf A \leq a$ za vsak $a \in A$ in $\inf B \leq b$ za vsak $b \in B$. Če ti dve neenakosti seštejemo, dobimo, da velja

$$\inf A + \inf B \leq a+b$$

za vsak $a \in A$ in vsak $b \in B$, kar pomeni, da je $\inf A + \inf B$ spodnja meja množice $A+B$. Naj bo sedaj m poljubna spodnja meja množice $A+B$. To pomeni, da je

$$m \leq a+b$$

za poljuben $a \in A$ in poljuben $b \in B$. Za trenutek sedaj fiksirajmo število b in ga prestavimo na levo stran neenakosti. Tako dobimo, da velja

$$m-b \leq a$$

za vsak $a \in A$. Po definiciji infimuma množice A pa od tod sledi $m-b \leq \inf A$ oziroma $m \leq \inf A + b$. Ker je bil b poljuben, ta neenakost velja za vsak $b \in B$. To pomeni, da za vsak $b \in B$ velja

$$m - \inf A \leq b.$$

Če spet uporabimo definicijo infimuma množice B, je torej $m - \inf A \leq \inf B$ oziroma

$$m \leq \inf A + \inf B,$$

kar smo želeli pokazati. Opomnimo še, da formula velja, če sta množici A in B navzdol omejeni.

(b) Dokaz enakosti $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$ je analogen dokazu enakosti za infimume. Enakost pa velja, če sta množici A in B navzgor omejeni.

(c) Enakost $\inf(A-B) = \inf A - \sup B$ bi lahko dokazali podobno kot enakost (a), a bomo raje uporabili naslednji trik. Za poljubno podmnožico $B \subset \mathbb{R}$ definirajmo množico

$$-B = \{-b \,|\, b \in B\}.$$

Zanjo velja $\inf(-B) = -\sup B$ in $\sup(-B) = -\inf B$. Poleg tega je še $A - B = A + (-B)$. Z uporabo enakosti (a) tako dobimo

$$\inf(A-B) = \inf(A+(-B)) = \inf(A) + \inf(-B) = \inf A - \sup B.$$

Formula je smiselna, če je A navzdol omejena, B pa navzgor omejena.

(d) Dokaz enakosti $\sup(A-B) = \sup A - \inf B$ je analogen dokazu v primeru (c). Formula je smiselna, če je A omejena navzgor, B pa navzdol. $\square$

(18) Dana je množica

$$E = \{q \in \mathbb{Q} \,|\, q < 1 + \tfrac{1}{1!} + \tfrac{1}{2!} + \tfrac{1}{3!} + \ldots + \tfrac{1}{n!} \text{ za nek } n \in \mathbb{N}\}.$$

Pokaži, da množica E določa Dedekindov rez.

Rešitev: Najprej se spomnimo na definicijo Dedekindovega reza. Intuitivno je to odprt interval racionalnih števil, ki je navzgor omejen, navzdol pa neomejen. Formalno pa je *Dedekindov rez* podmnožica $A \subset \mathbb{Q}$, ki zadošča pogojem:

(1) $A \neq \emptyset$ in $A \neq \mathbb{Q}$,

(2) če je $q \in A$ in $q' < q$, je tudi $q' \in A$,

(3) za vsak $q \in A$ obstaja tak $q' \in A$, da je $q < q'$.

Množica Dedekindovih rezov predstavlja enega izmed modelov realnih števil. Geometrično si lahko predstavljamo, da rez A predstavlja točko $x = \sup(A)$ na realni osi. Po tej korespondenci pripada rezu E število e.

Sedaj bomo preverili, da množica E res zadošča danim pogojem.

(1) Jasno je $0 \in E$, zato je E neprazna množica. Po drugi strani pa iz ocene $\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}}$ sledi

$$1 + \tfrac{1}{1!} + \tfrac{1}{2!} + \tfrac{1}{3!} + \ldots + \tfrac{1}{n!} \leq 1 + \tfrac{1}{1!} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2^2} + \ldots + \tfrac{1}{2^{n-1}} < 3,$$

od koder sledi, da $3 \notin E$.

(2) Naj bo $q \in E$. Torej je $q < 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!}$ za nek $n \in \mathbb{N}$. Če je $q' < q$, potem sledi $q' < 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!}$, kar pa pomeni, da je $q' \in E$.

(3) Če je $q \in E$, je $q < 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!}$ za nek $n \in \mathbb{N}$. Ker pa je

$$1 + \tfrac{1}{1!} + \tfrac{1}{2!} + \tfrac{1}{3!} + \ldots + \tfrac{1}{n!} < 1 + \tfrac{1}{1!} + \tfrac{1}{2!} + \tfrac{1}{3!} + \ldots + \tfrac{1}{n!} + \tfrac{1}{(n+1)!},$$

lahko vzamemo kar $q' = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!}$. $\square$

(19) Definirajmo rez

$$\sqrt{2} = \{q \in \mathbb{Q} \mid q < 0 \text{ ali } q^2 < 2\}.$$

Pokaži, da velja $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2^*$.

Rešitev: Dedekindov rez A je pozitiven, če je $0 \in A$. Produkt pozitivnih rezov A in B definiramo s predpisom

$$A \cdot B = \{q \in \mathbb{Q} \mid q \leq ab \text{ za neka pozitivna } a \in A \text{ in } b \in B\}.$$

Da dokažemo enakost $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2^*$, moramo dokazati, da sta množici $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$ in 2^* enaki. Pri tem bomo upoštevali, da lahko za vsako racionalno število r definiramo rez

$$r^* = \{q \in \mathbb{Q} \mid q < r\}.$$

$\underline{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \subset 2^*}$:

Vzemimo poljuben $q \in \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$. Potem obstajata pozitivni števili $a, b \in \sqrt{2}$, da je $q \leq ab$. Z uporabo neenakosti med geometrično in aritmetično sredino števil a^2 in b^2 dobimo oceno

$$ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2}.$$

Ker je $a^2 < 2$ in $b^2 < 2$, pa od tod sledi

$$q \leq ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2} < \frac{2 + 2}{2} = 2,$$

kar smo želeli pokazati.

$\underline{2^* \subset \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}$:

Vzemimo sedaj poljuben $q \in 2^*$, kar z drugimi besedami pomeni poljubno racionalno število $q < 2$. Radi bi našli pozitivni števili $a, b \in \sqrt{2}$, da bo veljalo $q \leq ab$. Da si malce poenostavimo iskanje, bomo privzeli, da je $a = b$. Iščemo torej pozitivno racionalno število a, ki zadošča pogojema $q < a^2 < 2$. V ta namen označimo s q_n decimalni približek števila $\sqrt{2}$, ki ima za decimalno vejico n neničelnih števk. Tako je na primer $q_1 = 1.4$, $q_2 = 1.41$ in $q_3 = 1.414$. Vsa števila q_n zadoščajo pogoju $q_n^2 < 2$, od koder sledi $q_n \in \sqrt{2}$. Po drugi strani pa po definiciji decimalnega približka velja

$$(q_n + 10^{-n})^2 > 2.$$

S kvadriranjem in upoštevanjem, da je $q_n < 2$, lahko to neenakost prepišemo v obliko

$$q_n^2 > 2 - 2q_n 10^{-n} - 10^{-2n} > 2 - 4 \cdot 10^{-n} - 10^{-2n}.$$

Ko večamo n, se izraz na desni strani približuje 2, zato lahko najdemo tak n, da bo veljalo $2 - 4 \cdot 10^{-n} - 10^{-2n} > q$. Za dani n velja

$$q < q_n^2 < 2,$$

zato je $a = q_n$ število, ki smo ga iskali. $\square$

(20) Z uporabo Dedekindovega aksioma pokaži, da za vsak realen $x > 0$ in vsak $n \in \mathbb{N}$ obstaja natanko eno realno število $y = \sqrt[n]{x} > 0$, da velja $y^n = x$.

Rešitev: Ključna lastnost, v kateri se realna števila razlikujejo od racionalnih, je v obstoju supremumov in infimumov omejenih množic.

Dedekindov aksiom: Vsaka neprazna, navzgor omejena množica realnih števil ima natančno zgornjo mejo.

Vzemimo sedaj poljuben $x > 0$ in definirajmo množico

$$A = \{q \in \mathbb{R} \,|\, q > 0,\, q^n < x\}.$$

Pokazali bomo, da je A neprazna, navzgor omejena množica, katere natančna zgornja meja je iskano število $y = \sqrt[n]{x}$.

Definirajmo število $t = \frac{x}{1+x}$. Za to število potem velja $0 < t < 1$ in $t < x$, kar pomeni, da je $t^n < t < x$. Torej je $t \in A$. Nadalje imamo oceno

$$(1+x)^n \geq 1 + nx > x,$$

od koder sledi, da je množica A navzgor omejena z $1 + x$. Množica A je torej neprazna in navzgor omejena, zato ima po Dedekindovem aksiomu natančno zgornjo mejo $y = \sup(A)$. V nadaljevanju bomo pokazali, da velja $y^n = x$.

Če ne bi veljalo $y^n = x$, je lahko bodisi $y^n < x$ ali pa $y^n > x$. Recimo najprej, da je $y^n < x$. Pokazali bomo, da bi potem za nek $h > 0$ veljalo $(y + h)^n < x$, kar bi pomenilo, da y ni zgornja meja množice A. Najprej opazimo, da za vsak $0 < h < y$ velja:

$$\begin{aligned}
(y+h)^n &= y^n + \binom{n}{1} y^{n-1}h + \binom{n}{2} y^{n-2}h^2 + \ldots + \binom{n}{n-1} yh^{n-1} + h^n, \\
&< y^n + \binom{n}{1} y^{n-1}h + \binom{n}{2} y^{n-1}h + \ldots + \binom{n}{n-1} y^{n-1}h + y^{n-1}h, \\
&= y^n + hy^{n-1}\left(\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n-1} + 1\right).
\end{aligned}$$

Z uporabo enakosti $2^n = 1 + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n-1} + 1$ lahko izraz v desnem oklepaju navzgor ocenimo z 2^n, da dobimo oceno

$$(y+h)^n < y^n + hy^{n-1}2^n.$$

Število $\frac{x-y^n}{y^{n-1}2^n}$ je potem pozitivno, za $h < \frac{x-y^n}{y^{n-1}2^n}$ pa velja

$$(y+h)^n < y^n + hy^{n-1}2^n < y^n + (x - y^n) = x,$$

kar smo želeli pokazati.

Denimo sedaj, da je $y^n > x$. Pokazali bomo, da bi v tem primeru obstajal $h > 0$, da bi veljalo $(y - h)^n > x$. Od tod bi sledilo, da y ni natančna zgornja meja množice A. Podobno kot prej lahko ocenimo:

$$\begin{aligned}
(y-h)^n &= y^n - \binom{n}{1} y^{n-1}h + \binom{n}{2} y^{n-2}h^2 - \binom{n}{3} y^{n-3}h^3 + \ldots + (-1)^n h^n, \\
&> y^n - \binom{n}{1} y^{n-1}h - \binom{n}{3} y^{n-3}h^3 - \binom{n}{5} y^{n-5}h^5 - \ldots.
\end{aligned}$$

Pri tej oceni smo izpustili vse pozitivne člene. Če podobno kot prej privzamemo še, da je $h < y$, lahko ocenimo

$$(y-h)^n > y^n - \binom{n}{1} y^{n-1} h - \binom{n}{3} y^{n-1} h - \binom{n}{5} y^{n-1} h - \ldots > y^n - h y^{n-1} 2^n$$

Za $h < \frac{y^n - x}{y^{n-1} 2^n}$ sedaj velja

$$(y-h)^n > y^n - (y^n - x) = x,$$

kar pomeni, da y ni natančna zgornja meja množice A.

Dokazali smo torej, da velja $y^n = x$. Za poljubno število $z > y$ velja $z^n > y^n = x$, za število $0 < z < y$ pa $z^n < y^n = x$. Torej je n-ti koren $y = \sqrt[n]{x}$ števila $x > 0$ enolično določen. $\square$