7 Moč množic

Naloga 7.1. Pri reševanju naslednjih nalog poleg samega odgovora ugotovite tudi, za katere vrednosti parametrov $k, m, n \in \mathbb{N}$ je odgovor veljaven. Pazite na to, ali so dovoljene ničelne vrednosti, ali mora biti eden od parametrov manjši od drugega ipd.

(a) Koliko je večkratnikov števila n med števili $1, 2, \ldots, m$?

(b) Koliko je večkratnikov števila n med števili $0, 1, 2, \ldots, m$?

(c) Koliko je večkratnikov števila n med števili $k, k+1, \ldots, m$?

Naloga 7.2. Koliko je naravnih števil od 1 do 2024, ki:

(a) so deljiva s 4 ali z 9?

(b) so deljiva s 4 in z 9?

(c) so deljiva s 4 ali s 6?

(d) so deljiva s 4 in niso deljiva s 6?

(e) niso deljiva s 4 in niso deljiva s 6?

(f) so deljiva z vsaj enim od števil 4, 6 ali 9?

(g) so deljiva s 4 ali 6 in niso deljiva z 9?

Naloga 7.3. Koliko je števil med 1 in $1\,000\,000$, ki niso niti kvadrati niti kubi?

Naloga 7.4. V anketi je sodelovalo 32 študentov. Iz njihovih odgovorov izvemo, da jih

- 18 zanima algebra,
- 20 zanima analiza,
- 22 zanima računalništvo,
- 12 zanima algebra in računalništvo,
- 12 zanima algebra in analiza,
- 19 zanima analiza in računalništvo,
- 3 ne zanima nobeden od teh predmetov.

Določite število študentov, ki jih zanimajo vsi trije predmeti. Določite število študentov, ki jih zanima natanko eden od teh treh predmetov.

Naloga 7.5. V razredu je 50 študentov, ki pišejo test s tremi vprašanji. Vsak od študentov je pravilno odgovoril na vsaj eno vprašanje. Recimo, da 12 študentov ni odgovorilo na prvo vprašanje, 14 na drugo in 10 na tretje. Predpostavimo še, da je 25 študentov pravilno odgovorilo na vsa tri vprašanja. Koliko študentov je odgovorilo pravilno na natanko eno vprašanje?

Naloga 7.6. Matriki, ki sestoji iz samih ničel in enic, pravimo 0-1 *matrika*.

(a) Koliko je 0-1 matrik velikosti $n \times n$?

(b) Koliko je 0-1 matrik velikosti $n \times n$, ki imajo v vsaki vrstici natanko eno enico?

(c) Koliko je 0-1 matrik velikosti $n \times n$, ki imajo v vsakem stolpcu natanko eno enico?

(d) Koliko je 0-1 matrik velikosti $n \times n$, ki imajo v vsakem stolpcu in vsaki vrstici natanko eno enico? Takim matrikam pravimo ***permutacijske*** matrike.

(e) S pomočjo dobljenih rezultatov utemeljite, da velja $n! \leq n^n \leq 2^{n^2}$.

Naloga 7.7. Če je $A \subseteq B$ podmnožica s k elementi, pravimo, da je A *k-podmnožica* B. S $\mathcal{P}_k(A)$ označimo množico vseh k-podmnožic množice A:

$$\mathcal{P}_k(A) = \{B \subseteq A \mid |B| = k\}.$$

Binomski koeficient $\binom{n}{k}$ definiramo kot moč množice $\mathcal{P}_k([n])$, kjer smo označili $[n] = \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Povedano z besedami, $\binom{n}{k}$ je število k-podmnožic množice z n elementi.

Pri reševanju naslednjih nalog izhajajte iz definicije binomskega koeficienta in *ne* uporabljajte splošno znanega dejstva, da je $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$.

(a) Dokažite, da velja $\mathcal{P}_k([n]) \cong \mathcal{P}_{n-k}([n])$. Za katere k in n je to res? Ali mora biti $k \leq n$, je lahko $k = 0$?

(b) Dokažite, da velja

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

(c) Dokažite, da velja $\mathcal{P}_k([n]) \cong \mathcal{P}_k([n-1]) + \mathcal{P}_{k-1}([n-1])$. Za katere k in n je to res? Ali mora biti $k \leq n$, je lahko $k = 0$?

(d) Dokažite, da velja

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

(e) Dokažite, da velja

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n.$$

Najprej zapišite ustrezni izomorfizem množic, iz katerega zgornja enačba neposredno sledi.

(f) Naj bo

$$I_{k,n} = \{f \colon [k] \to [n] \mid f \text{ je injektivna}\},$$
$$B_k = \{f \colon [k] \to [k] \mid f \text{ je bijektivna}\}.$$

Dokažite, da velja

$$I_{k,n} \cong B_k \times \mathcal{P}_k([n]).$$

Od tod sklepajte, da velja

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}.$$

Naloga 7.8. Naj velja $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Dokažite: množica $\mathbb{R}$, odprti interval (a, b), zaprti interval $[a, b]$ ter polodprta intervala $[a, b)$ in $(a, b]$ imajo enako moč.

Naloga 7.9. Podajte bijekcijo med množico $\bigcup_{n=1}^{\infty} [n^2, n^2 + n]$ in $\mathbb{R}$.

Naloga 7.10. Za naslednje množice dokažite, da so števne:

(a) $\mathbb{1} + \mathbb{N}$

(b) $\mathbb{N} + \mathbb{N}$

(c) slika števne množice,

(d) podmnožica števne množice,

(e) množica celih števil $\mathbb{Z}$,

(f) množica racionalnih števil $\mathbb{Q}$,

(g) kartezični produkt $\mathbb{N}^k$ za katerikoli $k \in \mathbb{N}$,

(h) množica $\{A \subseteq \mathbb{N} \mid |A| = k\}$, kjer $k \in \mathbb{N}$,

(i) množica vseh končnih zaporedij naravnih števil $\{(a_1, \dots, a_k) \in \mathbb{N}^k \mid k \in \mathbb{N}\}$,

(j) množica končnih podmnožic naravnih števil $\{A \subseteq \mathbb{N} \mid |A| < \aleph_0\}$,

(k) množica vseh končnih nizov A^*, kjer je abeceda A števna.

Naloga 7.11.

(a) Denimo, da je S neprazna množica z naslednjo lastnostjo: za vsako zaporedje $a\colon \mathbb{N} \to S$ obstaja $x \in S$, da velja $x \neq a_n$ za vse $n \in \mathbb{N}$. Dokažite, da S ni števna množica.

(b) S pomočjo prejšnje točke dokažite, da $\mathbb{2}^{\mathbb{N}}$ ni števna (kjer $\mathbb{2} = \{0, 1\}$).

(c) Dokažite, da za vsako zaporedje realnih števil $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ obstaja $x \in \mathbb{R}$, ki je različen od vseh členov zaporedja. Od tod sledi, da $\mathbb{R}$ ni števna množica.

(d) Naj bo A množica, ki ni števna, in $B \subseteq A$ števna podmnožica. Dokažite, da $A \setminus B$ ni števna.

Naloga 7.12. Dokažite sledeče (ne)enakosti.

(a) $|\mathbb{N}| < \left|\mathbb{2}^{\mathbb{N}}\right|$

(b) $|\mathbb{2}^{\mathbb{N}}| = |\mathbb{N}^{\mathbb{N}}|$

(c) $|\mathbb{2}^{\mathbb{N}}| = |\mathbb{R}|$

Namig: $|\mathbb{2}^{\mathbb{N}}| \leq |\mathbb{R}|$ dokažete tako, da poiščete injektivno funkcijo $\mathbb{2}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$, ter $|\mathbb{R}| \leq |\mathbb{2}^{\mathbb{N}}|$ tako, da poiščete injektivno funkcijo $\mathbb{R} \to \mathcal{P}(\mathbb{Q})$ in upoštevate $\mathcal{P}(\mathbb{Q}) \cong \mathbb{2}^{\mathbb{Q}} \cong \mathbb{2}^{\mathbb{N}}$.

(d) $\left|\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right| = |\mathbb{R}|$

Naloga 7.13. Naj bo S neprazna množica, za katero velja $|S| = |S + S|$. Dokažite, da velja

$$\big|\mathcal{P}\big(\mathcal{P}(S)\big)\big| = \big|\mathcal{P}(S)^{\mathcal{P}(S)}\big|.$$

Namig: najprej dokažite $\big|2^S\big| = \big|S \times 2^S\big|$.