Pravila dokazovanja

Pravili zamenjave

- izraz smemo zamenjati z njemu enakim izrazom
- izjavo smemo zamenjati z njej ekvivalentno izjavo

Za vsak veznik in kvantikator

Pravila vpeljave, ki povedo kako neposredno dokažemo izjavo s tem veznikom ali kvantfikatorjem

Pravila uporabe, ki povedo kako lahko že znano izjavo uporabimo.

Konjunkcija

Pravilo vpeljave

- Če sta izjavi ϕ in ψ na voljo, potem lahko dodamo v dokaz.

$$\phi \land \psi$$ ker veljata ϕ in ψ

Pravili uporabe

- če je izjava $\phi \wedge \psi$ na voljo, potem lahko dodamo v dokaz:

$$\phi \quad \text{ker velja } \phi \wedge \psi$$

- če je izjava $\phi \wedge \psi$ na voljo, potem lahko dodamo ψ v dokaz

$$\psi \quad \text{ker velja } \phi \wedge \psi$$

Implikacija

Pravilo vpeljave

Lahko dodamo v dokaz:

Dokažemo $\phi \Rightarrow \psi$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Predpostavimo } \phi \\ \dots \langle \text{dokaz} \rangle \dots \\ \\ \psi \end{array}}$$

$\phi \Rightarrow \psi$

Predpostavka ϕ je na voljo le v oranžni škatljici

Pravilo uporabe

- Če sta izjavi $\Phi \Rightarrow \Psi$ in Φ na voljo, potem lahko dodamo v dokaz:

$$\Psi \quad \text{ker veljata } \Phi \Rightarrow \Psi \text{ in } \Phi$$

Disjunkcija

Pravili vpeljave

- Če je izjava ϕ na voljo, potem lahko dodamo v dokaz:

$$\phi \vee \psi \quad \text{ker velja } \phi$$

- Če je izjava ψ na voljo, potem lahko dodamo v dokaz:

$$\phi \vee \psi \quad \text{ker velja } \psi$$

Pravilo uporabe

- Če je izjava $\phi \vee \psi$ na voljo in bi želeli dokazovati ρ, lahko dodamo v dokaz.

Dokažemo ρ z uporabo $\phi \vee \psi$

> Predpostavimo ϕ
>
> ... <dokaz> ...
>
> ρ

> Predpostavimo ψ
>
> ... <dokaz> ...
>
> ρ

ρ

Vsaka predpostavka je na voljo le v svoji oranžni škatljici.

Negacija

Pravilo vpeljave

- Lahko dodamo v dokaz :

Dokažemo $\neg \phi$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Predpostavimo } \phi \\ \quad \dots \langle \text{dokaz} \rangle \dots \\ \bot \end{array}}$$

$\neg \phi$

Predpostavka ϕ je na voljo le v oranžni škatljici

Pravilo uporabe

- Če sta $\neg\phi$ in ϕ na voljo, lahko dodamo v dokaz:

$$\bot \quad \text{ker veljata } \neg\phi \text{ in } \phi$$

Neresnica

Pravila vpeljave ni.

Pravilo uporabe

- če je $\perp$ na voljo, lahko dodamo v dokaz

ϕ zaradi protislovja

Resnica

Pravilo vpeljave

- Lahko dodamo v dokaz:

$$\top \quad \text{očitno}$$

Pravila uporabe ni

Dokaz s protislovjem

- Dodamo v dokaz

Dokažemo ϕ s protislovjem

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Predpostavimo } \neg\phi \\ \quad \dots \langle \text{dokaz} \rangle \dots \\ \bot \end{array}}$$

ϕ

Predpostavka $\neg\phi$ je na voljo le v oranžni škatljici

Pravilo izključene tretje možnosti

- Lahko vedno dodamo v dokaz

$$\phi \vee \neg\phi \qquad \text{LEM}$$

LEM pomeni "Law of the Excluded Middle".

Universalni kvantifikator

Pravilo vpeljave

- Dodamo v dokaz

Dokažemo $\forall x \in X .\ \phi(x)$

> Naj bo $x \in X$
>
> ... <dokaz> ...
>
> $\phi(x)$

$\forall x \in X .\ \phi(x)$

Izjava $x \in X$ doda spremenljivko x v kontekst. x mora biti sveža spremenljivka. x je na voljo le v oranžni škatljici.

Pravilo uporabe

- Če je $\forall x \in X . \phi(x)$ na voljo in če vemo da $\langle \text{izraz} \rangle \in X$, lahko dodamo v dokaz

$$\phi(\langle \text{izraz} \rangle) \quad \text{ker velja } \forall x . \phi(x)$$

Vse proste spremenljivke v $\langle \text{izraz} \rangle$u morajo biti iz trenutnega konteksta.

Eksistenčni kvantifikator

Pravilo vpeljave

- Če je $\phi(\langle izraz \rangle)$ na voljo in vemo, da $\langle izraz \rangle \in X$, lahko dodamo v dokaz

$$\exists x \in X . \phi \quad \text{ker } \phi(\langle izraz \rangle)$$

(Samodejno drži, da so vse proste spremenljivke <izraz>a iz konteksta, ker je to posledica pogoja, da je $\phi(\langle izjav \rangle)$ na voljo.)

Pravilo uporabe

- Če je izjava $\exists x \in X . \phi(x)$ na voljo in bi želeli dokazovati p, lahko dodamo v dokaz:

Dokažemo p z uporabo $\exists x \in X . \phi(x)$

> Naj bo $x \in X$
>
> Predpostavimo $\phi(x)$
>
> … ⟨dokaz⟩ …
>
> p

p

Izjava $x \in X$ doda spremenljivko x v kontekst, kjer je x sveža spremenljivka. Spremenljivka x in predpostavka $\phi(x)$ sta na voljo le v oranžni škatljici.