Kvadratni funkcionali

Klemen Šivic

21. maj 2020

V celem poglavju o kvadratnih funkcionalih bomo obravnavali realne vektorske prostore. Bilinearne in kvadratne funkcionale je seveda mogoče definirati na vektorskih prostorih nad poljubnim obsegom, toda za povezavo s skalarnim produktom bomo potrebovali realne vektorske prostore. Prav tako bomo realne vektorske prostore potrebovali za uporabo kvadratnih form v geometriji. Vedno bomo tudi predpostavili, da imamo na prostoru $\mathbb{R}^n$ standardni skalarni produkt.

1 Bilinearni in kvadratni funkcionali

Spomnimo se naslednje definicije:

Definicija 1.1. Naj bosta V in W realna vektorska prostora. Preslikava $B\colon V \times W \to \mathbb{R}$ je *bilinearen funkcional* (ali *bilinearna forma*), kadar velja

- $B(\lambda x + \mu y, z) = \lambda B(x, z) + \mu B(y, z)$ za vse $x, y \in V$, $z \in W$ in $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, ter
- $B(x, \lambda z + \mu w) = \lambda B(x, z) + \mu B(x, w)$ za vse $x \in V$, $z, w \in W$ in $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Oglejmo si najprej, kako zgleda bilinearna forma, če si izberemo bazi prostorov in vektorje zapišemo po komponentah.

Lema 1.2. *Naj bo $B\colon V \times W \to \mathbb{R}$ preslikava, $\{e_1, \ldots, e_n\}$ baza prostora V in $\{f_1, \ldots, f_m\}$ baza prostora W. Za $i = 1, \ldots, n$ in $j = 1, \ldots, m$ označimo $a_{ij} = B(e_i, f_j)$. Potem velja:*

1. *Naj bosta $x \in V$ in $y \in W$ poljubna vektorja. Razvijmo ju po bazah: $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, $y = \sum_{j=1}^m y_j f_j$. Če je B bilinearna forma, potem je*

$$B(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_i y_j. \tag{1}$$

2. *Obratno, preslikava, definirana s predpisom (1), je bilinearna.*

Dokaz. Da je preslikava, definirana s predpisom $B(x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} x_i y_j$, kjer je $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ in $y = \sum_{j=1}^m y_j f_j$, bilinearna, preverimo z neposrednim računom.

Dokažimo še prvo točko. Ob upoštevanju bilinearnosti je

$$B(x, y) = B\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{m} y_j f_j\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_i y_j B(e_i, f_j) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_i y_j.$$

$\square$

Iz prejšnje leme zdaj lahko izpeljemo povezavo med bilinearnimi formami in skalarnim produktom.

Trditev 1.3. *Preslikava $B\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ je bilinearna forma natanko takrat, ko obstaja matrika $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$, da je $B(x,y) = x^T Ay = \langle Ay, x\rangle$ za vsak $x \in \mathbb{R}^n$ in vsak $y \in \mathbb{R}^m$. Pri tem je matrika A z bilinearno formo B enolično določena.*

Dokaz. Da je s predpisom $B(x,y) = x^T Ay$ (kar je enako $\langle Ay, x\rangle$, saj imamo na $\mathbb{R}^n$ standardni skalarni produkt) definirana bilinearna forma, sledi iz preprostega računa.

Predpostavimo zdaj, da je B bilinearna forma. Po prejšnji lemi obstajajo skalarji $a_{ij} \in \mathbb{R}$, da za vsak $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ in vsak $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m$ velja enakost (1). Naj bo $A = [a_{ij}]_{1\le i\le n, 1\le j\le m} \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Potem za vsaka $x \in \mathbb{R}^n$ in $y \in \mathbb{R}^m$ velja

$$B(x,y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_iy_j = \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = x^T Ay.$$

Dokazati je treba še enoličnost matrike A. Recimo, da je $x^T Ay = x^T A'y$ za neko matriko $A' \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Potem za vsaka $x \in \mathbb{R}^n$ in $y \in \mathbb{R}^m$ velja $\langle (A - A')y, x\rangle = 0$, od tod pa vemo, da sledi $A - A' = 0$. □

V nadaljevanju bomo obravnavali kvadratne forme. Podobno kot smo napravili v primeru bilinearnih form, jih bomo definirali na poljubnih realnih vektorskih prostorih, nato pa bomo poiskali ustrezne karakterizacije kvadratnih form na $\mathbb{R}^n$.

Definicija 1.4. Naj bo V vektorski prostor nad $\mathbb{R}$. Preslikava $K\colon V \to \mathbb{R}$ je *kvadraten funkcional* (ali *kvadratna forma*), kadar veljata naslednja pogoja:

1. $K(\lambda x) = \lambda^2 K(x)$ za vsak $x \in V$ in vsak $\lambda \in \mathbb{R}$.
2. Preslikava $B\colon V \times V \to \mathbb{R}$, definirana s predpisom $B(x,y) = \frac{1}{2}\left(K(x+y) - K(x) - K(y)\right)$, je bilinearna forma.

Trditev 1.5. *Preslikava $K\colon V \to \mathbb{R}$ je kvadratna forma natanko takrat, ko obstaja bilinearna forma $B\colon V \times V \to \mathbb{R}$, da je $K(x) = B(x,x)$ za vsak $x \in V$.*

Dokaz. Če je K kvadratna forma, je, po drugi točki definicije, preslikava $B\colon V \times V \to \mathbb{R}$, definirana s predpisom $B(x,y) = \frac{1}{2}\left(K(x+y) - K(x) - K(y)\right)$, bilinearna forma. Poleg tega za vsak $x \in V$ velja

$$B(x,x) = \frac{1}{2}(K(2x) - 2K(x)) = \frac{1}{2}(4K(x) - 2K(x)) = K(x).$$

Obratno, če je $B\colon V \times V \to \mathbb{R}$ bilinearna forma in $K(x) = B(x,x)$ za vsak $x \in V$, potem očitno za vsak $x \in V$ in vsak $\lambda \in \mathbb{R}$ velja

$$K(\lambda x) = B(\lambda x, \lambda x) = \lambda^2 B(x,x) = \lambda^2 K(x).$$

Definirajmo zdaj preslikavo $B'\colon V\times V \to \mathbb{R}$ s predpisom $B'(x,y) = \frac{1}{2}\left(K(x+y) - K(x) - K(y)\right)$. Potem za vsaka $x, y \in V$ velja

$$B'(x,y) = \frac{1}{2}\left(B(x+y, x+y) - B(x,x) - B(y,y)\right) = \frac{1}{2}(B(x,y) + B(y,x)).$$

Ker je bila preslikava B bilinearna, sledi

$$\begin{aligned} B'(\lambda x + \mu y, z) &= \frac{1}{2}(B(\lambda x + \mu y, z) + B(z, \lambda x + \mu y)) \\ &= \frac{1}{2}(\lambda B(x,z) + \mu B(y,z) + \lambda B(z,x) + \mu B(z,y)) = \lambda B'(x,z) + \mu B'(y,z) \end{aligned}$$

za vse $x, y, z \in V$ in vse $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, in podobno velja tudi $B'(x, \lambda y + \mu z) = \lambda B'(x, y) + \mu B'(x, z)$ za vse $x, y, z \in V$ in vse $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Preslikava B' je torej bilinearna, kar pomeni, da je K kvadratna forma.

□

Iz Leme 1.2 zdaj takoj sledi, kako zgledajo kvadratne forme po komponentah:

Posledica 1.6. *Naj bo $K\colon V \to \mathbb{R}$ preslikava in $\{e_1, \ldots, e_n\}$ baza prostora V. Potem velja:*

1. *Če je K kvadratna forma, obstajajo koeficienti $a_{ij} \in \mathbb{R}$, tako da za vsak $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in V$ velja*
$$K(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j. \tag{2}$$
2. *Obratno, preslikava, definirana s predpisom (2), je kvadratna forma.*

Dokaz. Če je K kvadratna forma, po prejšnji trditvi obstaja bilinearna forma $B\colon V \times V \to \mathbb{R}$, da je $K(x) = B(x, x)$ za vsak $x \in V$. Definirajmo $a_{ij} = B(e_i, e_j)$ za vsaka i and j. Po Lemi 1.2 sledi $B(x, y) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j$ za vsaka $x, y \in V$, zato je tudi $K(x) = B(x, x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$ za vsak $x \in V$. To dokazuje prvo točko posledice.

Za dokaz druge točke pa najprej upoštevajmo, da je po Lemi 1.2 s predpisom $B(x, y) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j$ definirana bilinearna forma $B\colon V \times V \to \mathbb{R}$. S predpisom $K(x) = B(x, x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$ je torej po prejšnji trditvi definirana kvadratna forma. □

Podobno kot v primeru bilinearnih form bomo tudi kvadratne forme na $\mathbb{R}^n$ karakterizirali s skalarnim produktom.

Trditev 1.7. *Preslikava $K\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je kvadratna forma natanko takrat, ko obstaja* **simetrična** *matrika $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, da je $K(x) = \langle Ax, x \rangle$ za vsak $x \in \mathbb{R}^n$. Pri tem je matrika A enolično določena s kvadratno formo K.*

Dokaz. Vemo, da je s predpisom $B(x, y) = \langle Ay, x \rangle$ definirana bilinearna forma na $\mathbb{R}^n$, torej je s predpisom $K(x) = B(x, x) = \langle Ax, x \rangle$ res definirana kvadratna forma.

Obratno, naj bo $K\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ poljubna kvadratna forma. Po Trditvi 1.5 obstaja bilinearna forma $B\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, da je $K(x) = B(x, x)$ za vsak x. Po Trditvi 1.3 pa obstaja matrika $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, da je $B(x, y) = \langle Ay, x \rangle$ za vsaka $x, y \in \mathbb{R}^n$. Torej je $K(x) = \langle Ax, x \rangle$ za vsak $x \in \mathbb{R}^n$. Matrika A zaenkrat ni nujno simetrična. Velja pa
$$\langle \frac{1}{2}(A + A^T)x, x \rangle = \frac{1}{2}\langle Ax, x \rangle + \frac{1}{2}\langle A^T x, x \rangle = \frac{1}{2}\langle Ax, x \rangle + \frac{1}{2}\langle x, Ax \rangle = \langle Ax, x \rangle.$$
To pomeni, da lahko matriko A zamenjamo s simetrično matriko $\frac{1}{2}(A + A^T)$ in še vedno velja $K(x) = \langle \frac{1}{2}(A + A^T)x, x \rangle$ za vsak $x \in \mathbb{R}^n$.

Dokazati moramo še enoličnost simetrične matrike A, za katero velja $K(x) = \langle Ax, x \rangle$ za vsak $x \in \mathbb{R}^n$. Pa denimo, da obstaja še ena *simetrična* matrika $A' \in \mathbb{R}^{n \times n}$, da je $K(x) = \langle A'x, x \rangle$ za vsak $x \in \mathbb{R}^n$. Za vsak $x \in \mathbb{R}^n$ torej velja $\langle (A - A')x, x \rangle = 0$. Ker je matrika $A - A'$ simetrična, od tod sledi $A - A' = 0$. □

Definicija 1.8. Kvadratna forma $K\colon V \to \mathbb{R}$ je *pozitivno definitna*, kadar velja $K(x) > 0$ za vsak $x \in V \backslash \{0\}$.

Neposredno iz definicije sledi:

Posledica 1.9. *Kvadratna forma, podana s predpisom $K(x) = \langle Ax, x \rangle$, kjer je A simetrična matrika, je pozitivno definitna natanko takrat, ko je matrika A pozitivno definitna.*

Naj bo kvadratna forma na $\mathbb{R}^n$ podana s predpisom $K(x) = \langle Ax, x\rangle$, kjer je A simetrična matrika. Spomnimo se, da smo matriko A definirali s pomočjo (standardne) baze prostora $\mathbb{R}^n$. Oglejmo si, kaj se zgodi, če spremenimo bazo prostora $\mathbb{R}^n$. Naj bo $\{e_1, \ldots, e_n\}$ standardna baza prostora $\mathbb{R}^n$ in $\{v_1, \ldots, v_n\}$ poljubna baza tega prostora. Naj bo $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ obrnljiva matrika, sestavljena iz stolpcev $v_1, \ldots, v_n$. Za poljuben $x \in \mathbb{R}^n$ pišimo $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ in $x = \sum_{i=1}^n y_i v_i$. Označimo še $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$. Potem je

$$x = \sum_{i=1}^n y_i v_i = \sum_{i=1}^n y_i P e_i = P(\sum_{i=1}^n y_i e_i) = Py.$$

Zato je

$$K(x) = \langle Ax, x\rangle = \langle APy, Py\rangle = \langle P^T APy, y\rangle.$$

Torej je $K(x) = K'(y) = K'(P^{-1}x)$, kjer je K' kvadratna forma, definirana s predpisom $K'(v) = \langle (P^T AP)v, v\rangle$.

Definicija 1.10. Naj bosta A in B realni simetrični $n \times n$ matriki. Matrika B je *kongruentna* matriki A, kadar obstaja taka realna obrnljiva $n \times n$ matrika P, da je $B = P^T AP$.

Enako kot v primeru ekvivalentnosti in podobnosti dokažemo:

Trditev 1.11. *Kongruentnost je ekvivalenčna relacija na množici realnih simetričnih $n \times n$ matrik.*

Iz razmisleka pred definicijo kongruentnosti sledi, da kongruentni simetrični matriki predstavljata isto kvadratno formo, a v drugih bazah. Za vsako simetrično realno matriko zato želimo poiskati čim bolj enostavno simetrično realno matriko, ki je naši matriki kongruentna.

Izrek 1.12 (Sylvestrov izrek o vztrajnosti)**.** *Vsaka realna simetrična matrika A je kongruentna matriki oblike*

$$B = \begin{bmatrix} I_p & & \\ & -I_q & \\ & & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{bmatrix}.$$

Pri tem je p število pozitivnih, q pa število negativnih lastnih vrednosti matrike A (štetih z večkratnostmi v karakterističnem polinomu). Matriki $B_1 = \begin{bmatrix} I_{p_1} & & \\ & -I_{q_1} & \\ & & 0 \end{bmatrix}$ in $B_2 = \begin{bmatrix} I_{p_2} & & \\ & -I_{q_2} & \\ & & 0 \end{bmatrix}$ sta kongruentni natanko takrat, ko je $p_1 = p_2$ in $q_1 = q_2$.

Dokaz. Ker je matrika A simetrična, obstajata ortogonalna matrika Q in diagonalna matrika $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$, da je $Q^T AQ = D$. Pri tem so $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ lastne vrednosti matrike A, ki so zaradi simetričnosti vse realne. Predpostavimo lahko, da obstajata $p, q \geq 0$, da je $\lambda_i > 0$ za $i \leq p$, $\lambda_i < 0$ za $p < i \leq p+q$ in $\lambda_i = 0$ za $i > p+q$. Definirajmo matriko

$$R = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & \frac{1}{\sqrt{\lambda_p}} & & & & & & \\ & & & \frac{1}{\sqrt{-\lambda_{p+1}}} & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & \frac{1}{\sqrt{-\lambda_{p+q}}} & & & \\ & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 1 \end{bmatrix}.$$

Očitno je R simetrična in obrnljiva realna matrika. Definirajmo še $P = QR$. Kot kompozitum obrnljivih matrik je P seveda obrnljiva matrika. Ob upoštevanju vseh definicij in dejstva, da diagonalne matrike komutirajo, zdaj lahko izračunamo

$$P^T A P = R^T Q^T A Q R = R^T D R = R D R = D R^2 = \begin{bmatrix} I_p & & \\ & -I_q & \\ & & 0 \end{bmatrix}.$$

Dokazati je treba še enoličnost števila enic in minus enic na diagonali. Pa denimo, da sta matriki B_1 in B_2 kongruentni, in naj bo $B_2 = P^T B_1 P$ za neko obrnljivo matriko P. Ker je P obrnljiva, je $\operatorname{rang} B_1 = \operatorname{rang} B_2$, torej $p_1 + q_1 = p_2 + q_2$. Izrek bo torej dokazan, če pokažemo, da je $p_1 = p_2$. Naj bo $K\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ kvadratna forma, določena s kongruentnima matrikama B_1 in B_2. Naj bo W nek podprostor prostora $\mathbb{R}^n$, za katerega velja $K|_W(x) > 0$ za vsak $x \in W \backslash \{0\}$. Če je $\dim W > p_1$, je $W \cap \operatorname{Lin}\{e_{p_1+1}, \ldots, e_n\} \neq \{0\}$. Naj bo $x = \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ nek neničelni vektor v tem preseku, ki smo ga zapisali v bločni obliki glede na velikosti blokov matrike B_1. Po definiciji prostora W je $K(x) > 0$, očitno pa je

$$K(x) = \begin{bmatrix} 0 & x_2^T & x_3^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & & \\ & -I & \\ & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = -x_2^T x_2 \leq 0,$$

kar je protislovje. Torej je $\dim W \leq p_1$. Povedano z besedami, vsak vektorski podprostor prostora $\mathbb{R}^n$, na katerem je zožitev kvadratnega funkcionala K pozitivno definitna, je največ p_1-razsežen. Po drugi strani pa je $\operatorname{Lin}\{e_1, \ldots, e_{p_1}\}$ očitno tak podprostor, ki ima razsežnost p_1. Torej je p_1 največja možna razsežnost vektorskega podprostora, na katerem je zožitev kvadratnega funkcionala K pozitivno definitna. Isto mora seveda veljati za p_2, saj matriki B_1 in B_2 obe pripadata kvadratni formi K. Torej je $p_1 = p_2$ in iz enakosti rangov matrik B_1 in B_2 sledi še $q_1 = q_2$. $\square$

Posledica 1.13. *Naj bo $K\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ poljubna kvadratna forma. Potem obstajata enolično določena $p, q \geq 0$, in obstaja taka baza $\{v_1, \ldots, v_n\}$ prostora $\mathbb{R}^n$, da za vsak $y = \sum_{i=1}^n y_i v_i \in \mathbb{R}^n$ velja $K(y) = \sum_{i=1}^p y_i^2 - \sum_{i=p+1}^{p+q} y_i^2$.*

2 Uporaba v geometriji

2.1 Krivulje drugega reda

Krivulja drugega reda je množica rešitev enačbe

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

v $\mathbb{R}^2$, kjer so $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}^2$ in a, b, c niso vsi 0. Naj bo $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ in

$$K(x, y) = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Potem je K kvadraten funkcional na $\mathbb{R}^2$ in imamo enačbo $K(x, y) + dx + ey + f = 0$.

Najprej si oglejmo poseben primer, ko je $d = e = 0$. Imamo torej enačbo $K(x, y) + f = 0$. Matrika A je simetrična, zato obstaja ortogonalna matrika $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$, da je $Q^T AQ$ diagonalna matrika. Pišimo $Q^T AQ = D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{bmatrix}$. Označimo še $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = Q \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$. Ker je matrika Q ortogonalna, je seveda $\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = Q^T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. Potem je

$$\begin{aligned} K(x, y) &= \left\langle A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right\rangle = \left\langle QDQ^T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right\rangle = \left\langle DQ^T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, Q^T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right\rangle \\ &= \left\langle D \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \right\rangle = \lambda_1 u^2 + \lambda_2 v^2. \end{aligned}$$

Torej moramo obravnavati enačbo $\lambda_1 u^2 + \lambda_2 v^2 + f = 0$. Ločimo 3 možnosti:

1. Če je $\det A > 0$, potem sta lastni vrednosti λ_1 in λ_2 obe pozitivni ali obe negativni. Rešitev enačbe $\lambda_1 u^2 + \lambda_2 v^2 + f = 0$ je odvisna od predznakov lastnih vrednosti λ_1 in λ_2 in parametra f:
   - Če je $\lambda_i f < 0$ za $i = 1, 2$, potem je rešitev enačbe elipsa v centralni legi. Osi elipse sta podani s pogojema $u = 0$ oziroma $v = 0$, in ob teh pogojih je vektor $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ enak enemu od stolpcev matrike Q, torej enemu od lastnih vektorjev matrike A. Osi elipse torej kažeta v smereh lastnih vektorjev matrike A.
   - Če je $f = 0$, je rešitev le izhodišče $(0, 0)$.
   - Če je $\lambda_i f > 0$ za $i = 1, 2$, potem je rešitev prazna množica.
2. Če je $\det A < 0$, je ena od lastnih vrednosti λ_1 in λ_2 pozitivna, druga pa negativna. Rešitev enačbe $\lambda_1 u^2 + \lambda_2 v^2 + f = 0$ je v tem primeru:
   - hiperbola v centralni legi, katere osi sta lastna vektorja matrike A, če je $f \neq 0$,
   - 2 premici, ki se sekata v izhodišču, če je $f = 0$.
3. Če je $\det A = 0$, je ena lastna vrednost matrike A enaka 0, druga pa ne (saj je matrika A simetrična in neničelna). Imamo torej enačbo $\lambda_1 u^2 + f = 0$, katere rešitev je:
   - 2 vzporedni premici, zrcalni glede na izhodišče, če je $\lambda_1 f < 0$,
   - dvojna premica skozi izhodišče, če je $f = 0$,
   - prazna množica, če je $\lambda_1 f > 0$.

Obravnavajmo zdaj še splošni primer. Novi koordinati u in v določimo kot zgoraj in dobimo enačbo

$$\lambda_1 u^2 + \lambda_2 v^2 + pu + qv + r = 0 \tag{3}$$

za neke $p, q, r \in \mathbb{R}$. Če se da, zdaj s translacijo odpravimo linearna člena. Ločimo dve možnosti:

1. Če je $\det A = \lambda_1\lambda_2 \neq 0$, naredimo translacijo, kar pomeni, da pišemo

$$u = X + \alpha, \quad v = Y + \beta, \tag{4}$$

kjer sta X in Y novi spremenljivki, α in β pa zaenkrat še neznani konstanti. Določili ju bomo tako, da bomo odpravili linearna člena. Enakosti (4) vstavimo v (3) in dobimo

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda_1(X+\alpha)^2 + \lambda_2(Y+\beta)^2 + p(X+\alpha) + q(Y+\beta) + r \\ &= \lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + (2\lambda_1\alpha + p)X + (2\lambda_2\beta + q)Y + \lambda_1\alpha^2 + \lambda_2\beta^2 + r. \end{aligned}$$

Ker sta $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$, lahko definiramo $\alpha = -\frac{p}{2\lambda_1}$ in $\beta = -\frac{q}{2\lambda_2}$. S tem dobimo enačbo $\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + s = 0$ za nek $s \in \mathbb{R}$, ki nima linearnih členov in jo že znamo obravnavati.

2. Če je $\det A = 0$, je spet ena lastna vrednost neničelna, ena pa je enaka 0. Zaradi simetrije lahko predpostavimo, da je $\lambda_1 \neq 0$ in $\lambda_2 = 0$. S pomočjo translacije $u = X + \alpha, v = Y$ dobimo enačbo $\lambda_1 X^2 + qY + s = 0$ za nek $s \in \mathbb{R}$. Zdaj imamo dve možnosti: če je $q \neq 0$, je rešitev enačbe parabola, če je $q = 0$, pa smo dobili enačbo brez linearnih členov, ki jo že znamo rešiti.

Primer 2.1. Narišimo krivuljo, podano z enačbo $5x^2 + 6xy + 5y^2 = 8$.

Kvadratni funkcional $K(x, y) = 5x^2 + 6xy + 5y^2$ je določen z matriko $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$. Matriko A diagonalizirajmo. Njen karakteristični polinom je enak $\Delta_A(\lambda) = (5-\lambda)^2 - 9 = (2-\lambda)(8-\lambda)$, zato sta lastni vrednosti matrike A enaki $\lambda_1 = 2$ in $\lambda_2 = 8$. Poiščimo še lastne vektorje.

Lastni vektor, ki pripada lastni vrednosti $\lambda_1 = 2$, je element jedra matrike $A - 2I = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$, ki je očitno napeto na vektor $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Če ta vektor normiramo, dobimo $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$.

Podobno je lastni vektor, ki pripada lastni vrednosti $\lambda_2 = 8$, element jedra matrike $A - 8I = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$, ki je napeto na normiran vektor $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$.

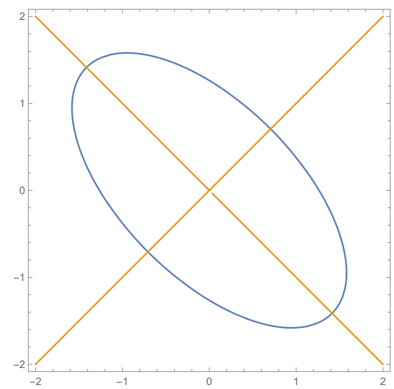
Če torej definiramo $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$ in $Q = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$, je Q ortogonalna matrika, za katero velja $A = QDQ^T$. Definirajmo $\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = Q^T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. Potem je $u = \frac{\sqrt{2}}{2}(x - y)$ in $v = \frac{\sqrt{2}}{2}(x + y)$, ter

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = Q \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}(u+v) \\ \frac{\sqrt{2}}{2}(-u+v) \end{bmatrix}.$$

Zgornja predpisa za x in y vstavimo v začetno enačbo in dobimo

$$8 = K(x, y) = 5 \cdot \frac{1}{2}(u+v)^2 + 6 \cdot \frac{1}{2}(u+v)(-u+v) + 5 \cdot \frac{1}{2}(-u+v)^2 = 8v^2 + 2u^2,$$

oziroma $\frac{u^2}{4} + v^2 = 1$. To pa je enačba elipse s polosema, ki imata dolžini 2 oziroma 1, kažeta pa v smeri vektorjev, podanih z enačbama $v = 0$ in $u = 0$, oziroma $x = -y$ in $x = y$.



2.2 Ploskve drugega reda

Naj bo $K_A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ kvadraten funkcional, določen z neničelno realno simetrično 3×3 matriko A in naj bodo $p, q, r, s \in \mathbb{R}$. *Ploskev drugega reda* je množica rešitev enačbe

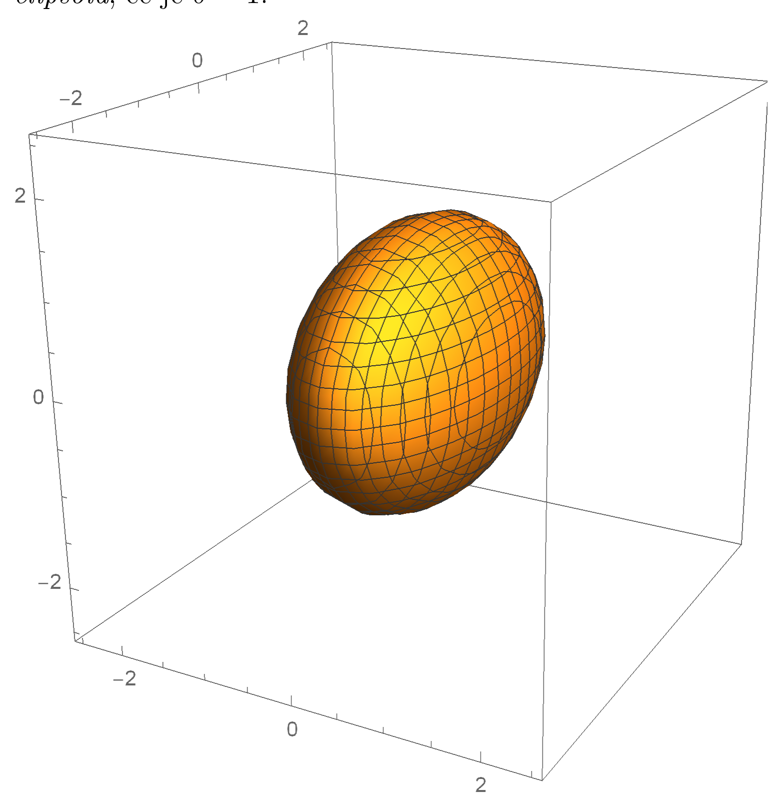
$$K_A(x, y, z) + 2px + 2qy + 2rz + s = 0$$

v $\mathbb{R}^3$. Kot v primeru krivulj drugega reda matriko A diagonaliziramo v ortonormirani bazi, nato naredimo še translacijo. Nove koordinate označimo z X, Y, Z. Dobimo naslednje možnosti:

1. Če je $\det A \neq 0$, imamo naslednji dve možnosti:

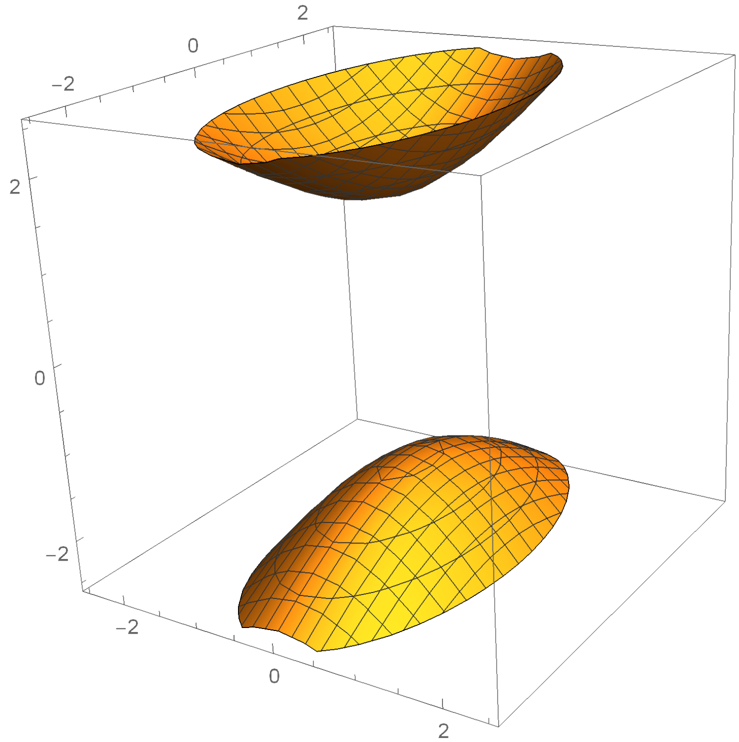
   (a) A je kongruentna $\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$ ali $\begin{bmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{bmatrix}$. V tem primeru imamo enačbo $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} = \delta$, kjer je $\delta \in \{-1, 0, 1\}$. Rešitve te enačbe so:

   - prazna množica, če je $\delta = -1$,
   - koordinatno izhodišče, če je $\delta = 0$,
   - *elipsoid*, če je $\delta = 1$.

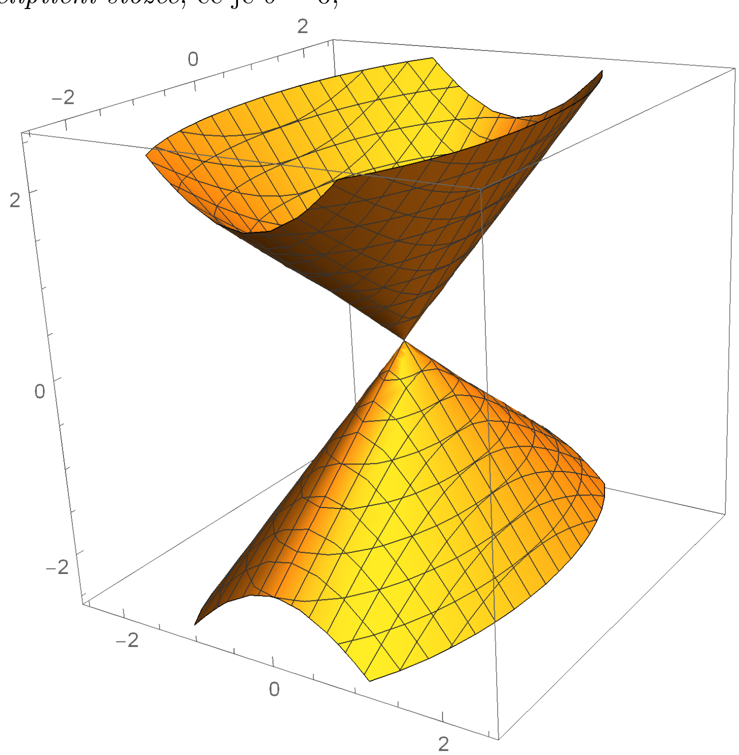


(b) A je kongruentna $\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{bmatrix}$ ali $\begin{bmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{bmatrix}$. V tem primeru imamo enačbo $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - \frac{Z^2}{c^2} = \delta$, kjer je $\delta \in \{-1, 0, 1\}$. Rešitve te enačbe so:

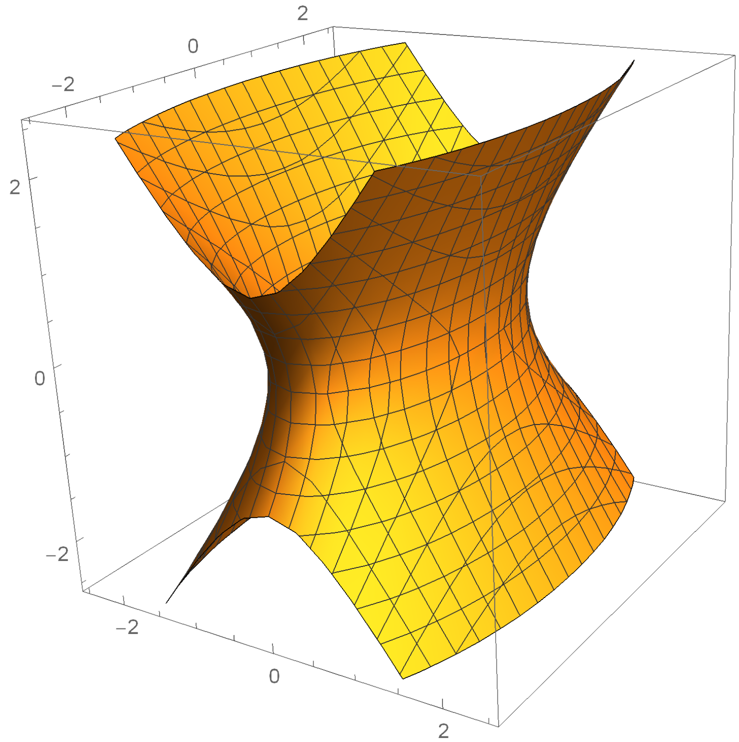
- *dvodelni eliptični hiperboloid*, če je $\delta = -1$,



- *eliptični stožec*, če je $\delta = 0$,



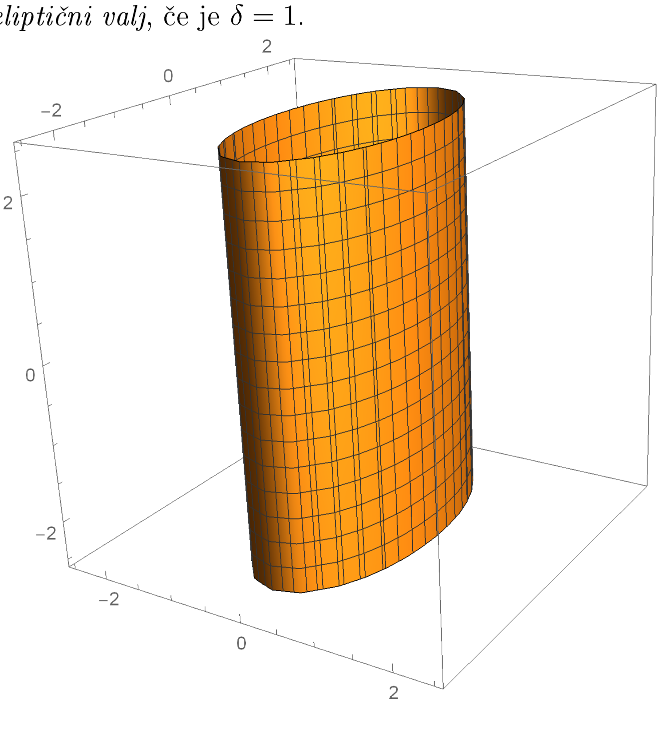
- *enodelni eliptični hiperboloid*, če je $\delta = 1$.



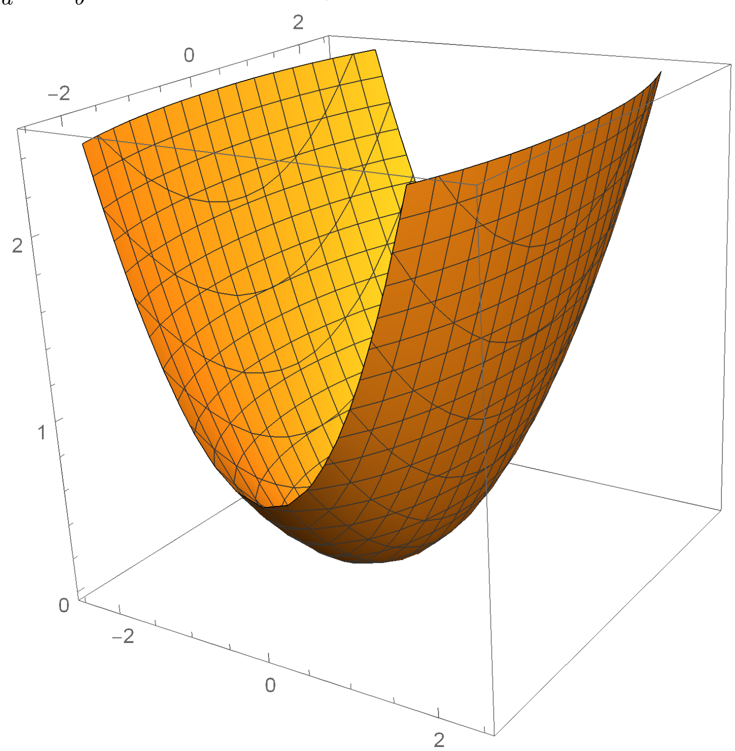
2. Če je $\det A = 0$, pa imamo naslednje možnosti:

   (a) V primeru, ko je matrika A kongruentna $\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{bmatrix}$ ali $\begin{bmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{bmatrix}$, imamo za obliko enačbe dve možnosti:

      i. $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = \delta$, kjer je $\delta \in \{-1, 0, 1\}$. Rešitve te enačbe so:
         - prazna množica, če je $\delta = -1$,
         - premica $X = Y = 0$, če je $\delta = 0$,
         - *eliptični valj*, če je $\delta = 1$.



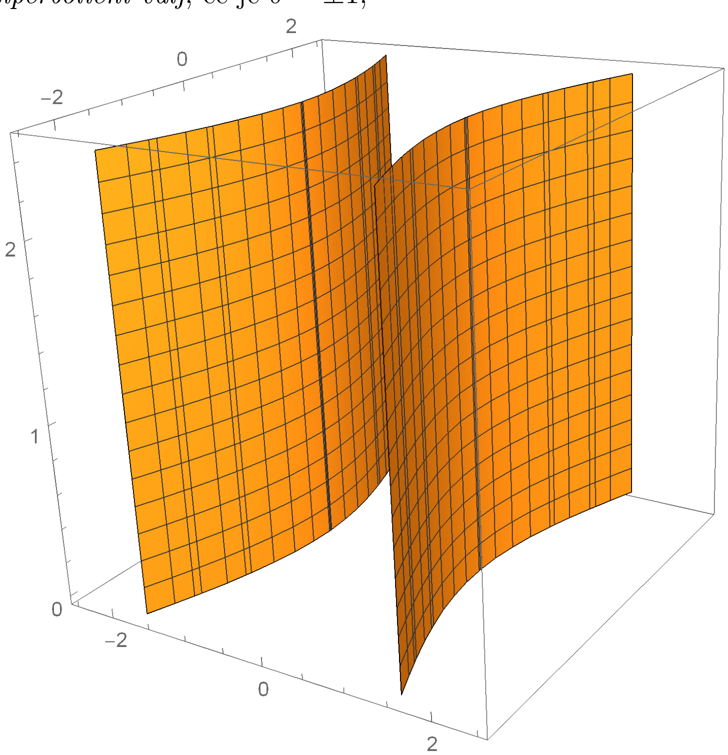
ii. $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 2pZ$, kjer je $p \neq 0$. Rešitev je *eliptični paraboloid*.



(b) V primeru, ko je matrika A kongruentna $\begin{bmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{bmatrix}$ imamo spet dve možnosti za obliko enačbe:

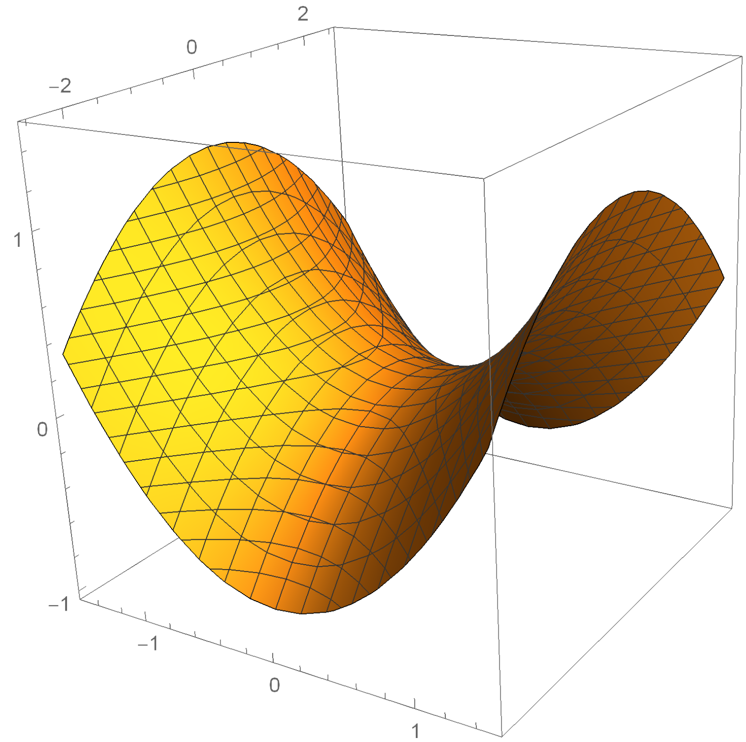
i. $\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = \delta$, kjer je $\delta \in \{-1, 0, 1\}$. Rešitev te enačbe je:

- *hiperbolični valj*, če je $\delta = \pm 1$,



- dve ravnini, ki se sekata, če je $\delta = 0$.

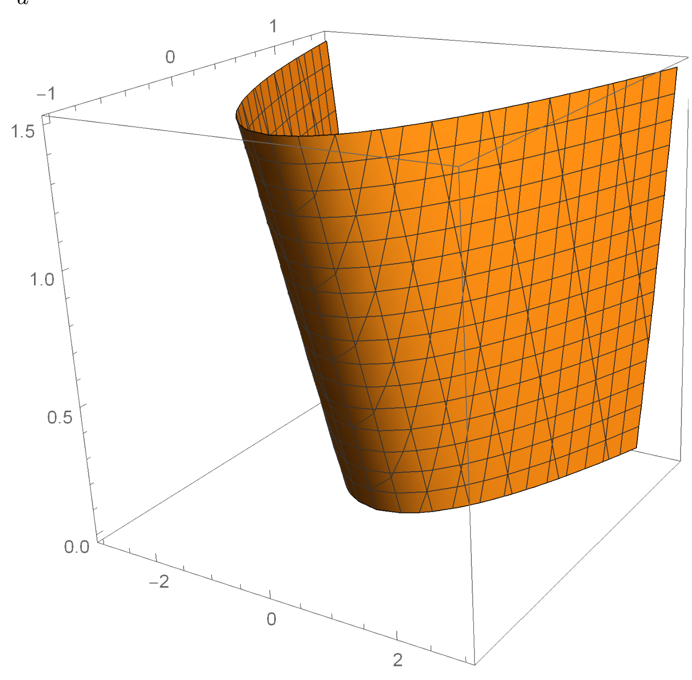
ii. $\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 2pZ$, kjer je $p \neq 0$. Rešitev je *hiperbolični paraboloid*.



Matrika A je lahko kongruentna tudi $\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{bmatrix}$ ali $\begin{bmatrix} -1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{bmatrix}$. Tudi v tem proimeru imamo dve možnosti:

i. $\frac{X^2}{a^2} = \delta$, kjer je $\delta \in \{-1, 0, 1\}$. Rešitve so:
   - prazna množica, če je $\delta = -1$,
   - (dvojna) ravnina $X = 0$, če je $\delta = 0$,
   - vzporedni ravnini $X = a$ in $X = -a$, če je $\delta = 1$.

ii. $\frac{X^2}{a^2} = 2pY + 2qZ$, kjer je $p \neq 0$ ali $q \neq 0$. Rešitev je *parabolični valj*.



Primer 2.2. Ugotovimo, katero ploskev predstavlja enačba $2xy + 2xz + 2yz = 1$, in določimo tudi smeri glavnih osi.

Kvadratna forma je določena z matriko $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Poiščimo njene lastne vrednosti. Njen karakteristični polinom je enak

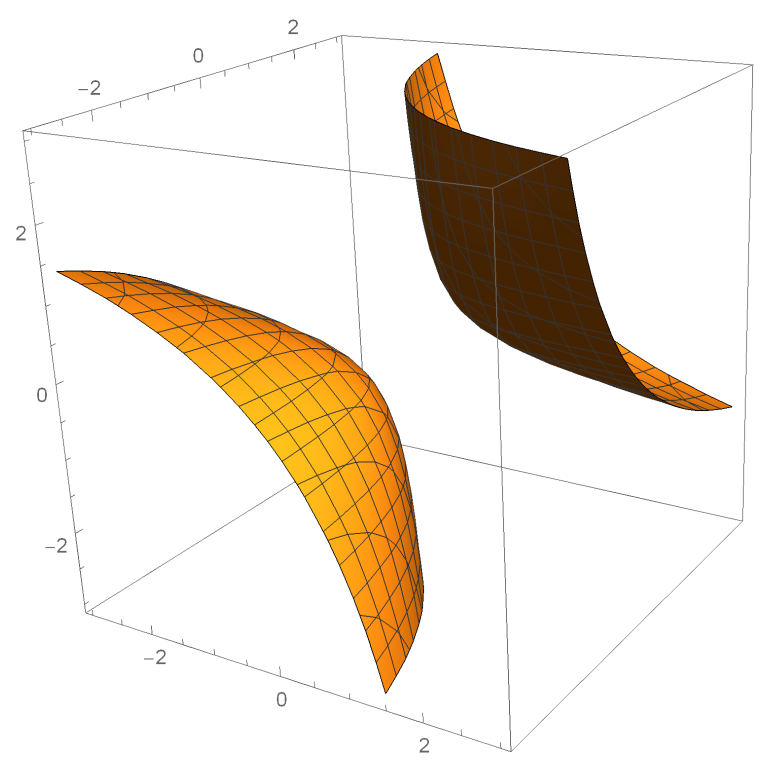
$$\Delta_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 2 + 3\lambda = -(\lambda+1)(\lambda^2 - \lambda - 2) = -(\lambda+1)^2(\lambda - 2),$$

torej sta njeni lastni vrednosti -1 (dvakratna) in 2. Dvojna lastna vrednost je negativna, enojna pa pozitivna, zato je ploskev dvodelni eliptični hiperboloid.

Za izračun glavnih osi je treba poiskati lastne vektorje.

Lastni vektorji, ji pripadajo lastni vrednosti -1, tvorijo jedro matrike $A + I = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Bazo za jedro te matrike tvorita vektorja $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ in $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$. Po Gram-Schmidtovi ortogonalizaciji in normiranju dobimo vektorja $v_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}$ in $v_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\sqrt{\frac{2}{3}} \end{bmatrix}$.

Lastni vektorji, ki pripadajo lastni vrednosti 2, tvorijo jedro matrike $A - 2I = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$, ki je enako $\mathrm{Lin}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$. Po normiranju dobimo še $v_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$.

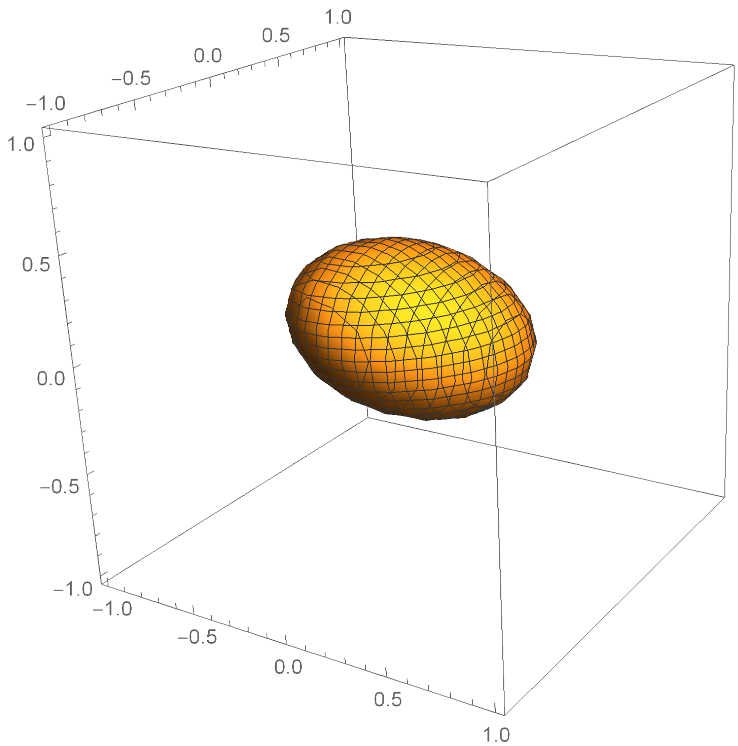


Primer 2.3. Ugotovimo še, katero ploskev predstavlja enačba $6x^2 + 5y^2 + 7z^2 - 4xy + 4xz = 1$, in katere točke na tej ploskvi so najbližje koordinatnemu izhodišču.

Kvadratna forma $K(x, y, z) = 6x^2 + 5y^2 + 7z^2 - 4xy + 4xz$ je podana z matriko $A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{bmatrix}$. Poiščimo njene lastne vrednosti. Karakteristični polinom je enak

$$\begin{aligned} \Delta_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} 6-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & 5-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 7-\lambda \end{vmatrix} = (6-\lambda)(5-\lambda)(7-\lambda) - 4(7-\lambda) - 4(5-\lambda) \\ &= (6-\lambda)(5-\lambda)(7-\lambda) - 8(6-\lambda) = (6-\lambda)(\lambda^2 - 12\lambda + 27) = (6-\lambda)(3-\lambda)(9-\lambda). \end{aligned}$$

Lastne vrednosti matrike A so torej 3, 6 in 9. Vse so pozitivne, zato enačba $K(x, y, z) = 1$ določa elipsoid.



Iz enačbe elipsoida $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} = 1$ opazimo, da so dolžine polosi enake obratnim vrednostim korenov iz lastnih vrednosti. V našem primeru je zato najbližja točka na elipsoidu od izhodišča oddaljena za $\frac{1}{3}$ enote. Da ugotovimo, katera točka je to, pa moramo poiskati normiran lastni vektor, ki pripada lastni vrednosti 9. Jedro matrike $A - 9I = \begin{bmatrix} -3 & -2 & 2 \\ -2 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ je enako $\operatorname{Lin}\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$, zato je normiran lastni vektor enak $\begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$. Točki na elipsoidu, ki sta najbližji koordinatnemu izhodišču, sta torej $\pm(\frac{2}{9}, -\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$.