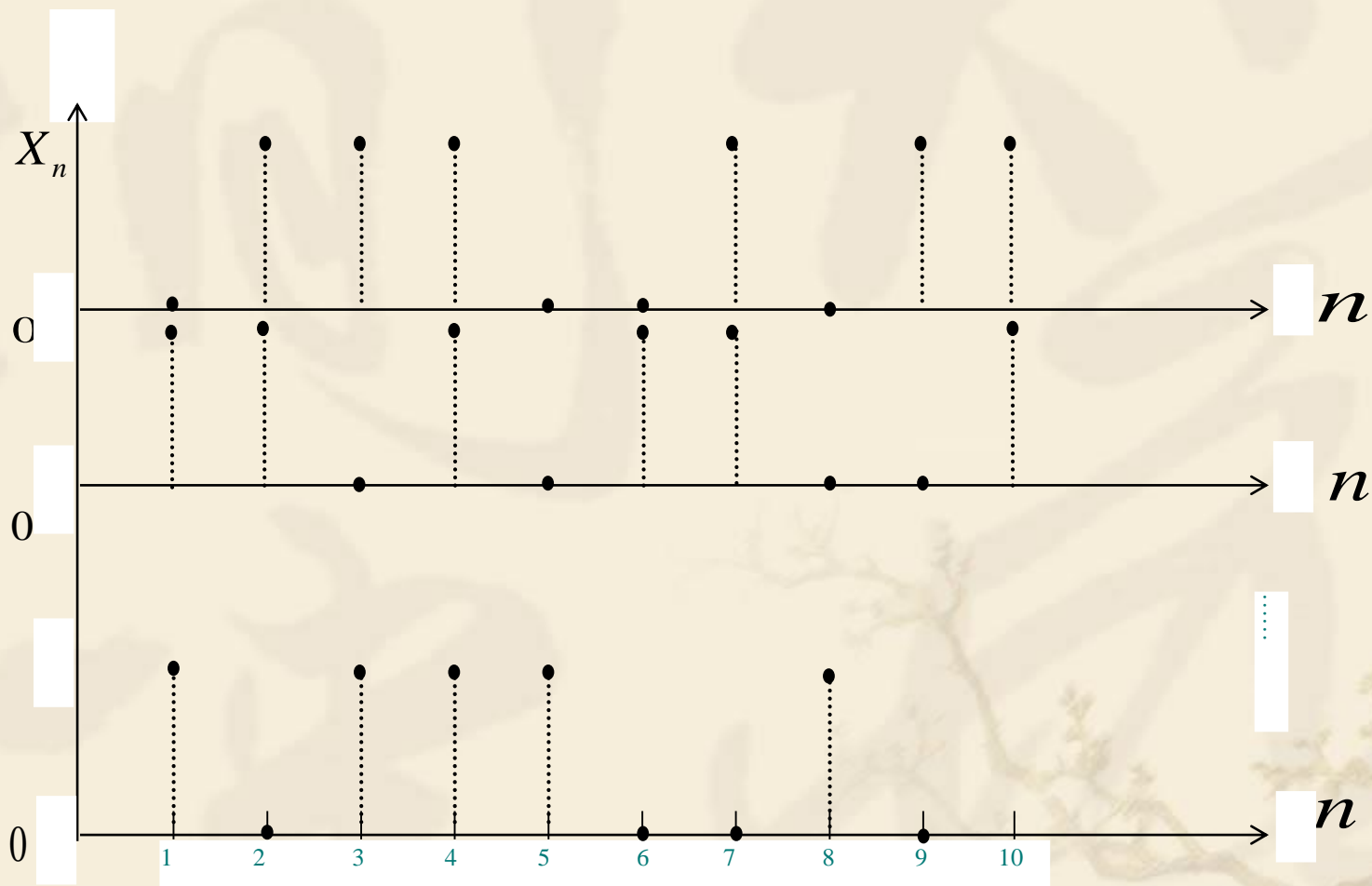


第二章 随机过程的基本概念

- ❖ § 1 随机过程及其概率分布
- ❖ 一、随机过程概念：
- ❖ 初等概率论所研究的随机现象，基本上可以用随机变量或随机向量来描述. 但在实际中有些随机现象要涉及(可列或非可列)无穷多个随机变量.

❖ 例1. 某人扔一枚硬币，无限制的重复地扔下去，要表示无限多次扔的结果，我们不妨记正面为1，反面为0. 第 n 次扔的结果是一个 $r.v X_n$ ，其分布 $P\{X_n=1\}=P\{X_n=0\}=1/2$ ，无限多次扔的结果是一个随机过程，可用一族相互独立 $r.v X_1, X_2, \dots$ 或 $\{X_n, n \geq 1\}$ 表示.



❖ **例2.** 当 $t(t \geq 0)$ 固定时，电话交换站在 $[0, t]$ 时间内来到的呼叫次数是 $r \cdot v$ ，记 $X(t)$ ， $X(t) \sim P(\lambda t)$ ，其中 λ 是单位时间内平均来到的呼叫次数，而 $\lambda > 0$ ，若 t 从 0 变到 ∞ ，时刻 t 来到的呼叫次数需用一族随机变量 $\{X(t), t \in [0, \infty)\}$ 表示， $X(t)$ 是一个随机过程。

❖ 对电话交换站作一次观察 E 可得到一条表示 t 以前来到的呼唤曲线 $x_1(t)$ ，它为非降的阶梯曲线，在有呼唤来到的时刻阶跃地增加，（假定在任一呼唤来到的时刻不可能来到多于一次呼唤）。

- ❖ 同理，第二次观察，得到另一条阶梯形曲线 $x_2(t)$ ；
- ❖ 同理，第n次观察，得到另一条阶梯形曲线 $x_n(t)$.
- ❖ 总之，一次试验得到阶梯形曲线形状具有随机性

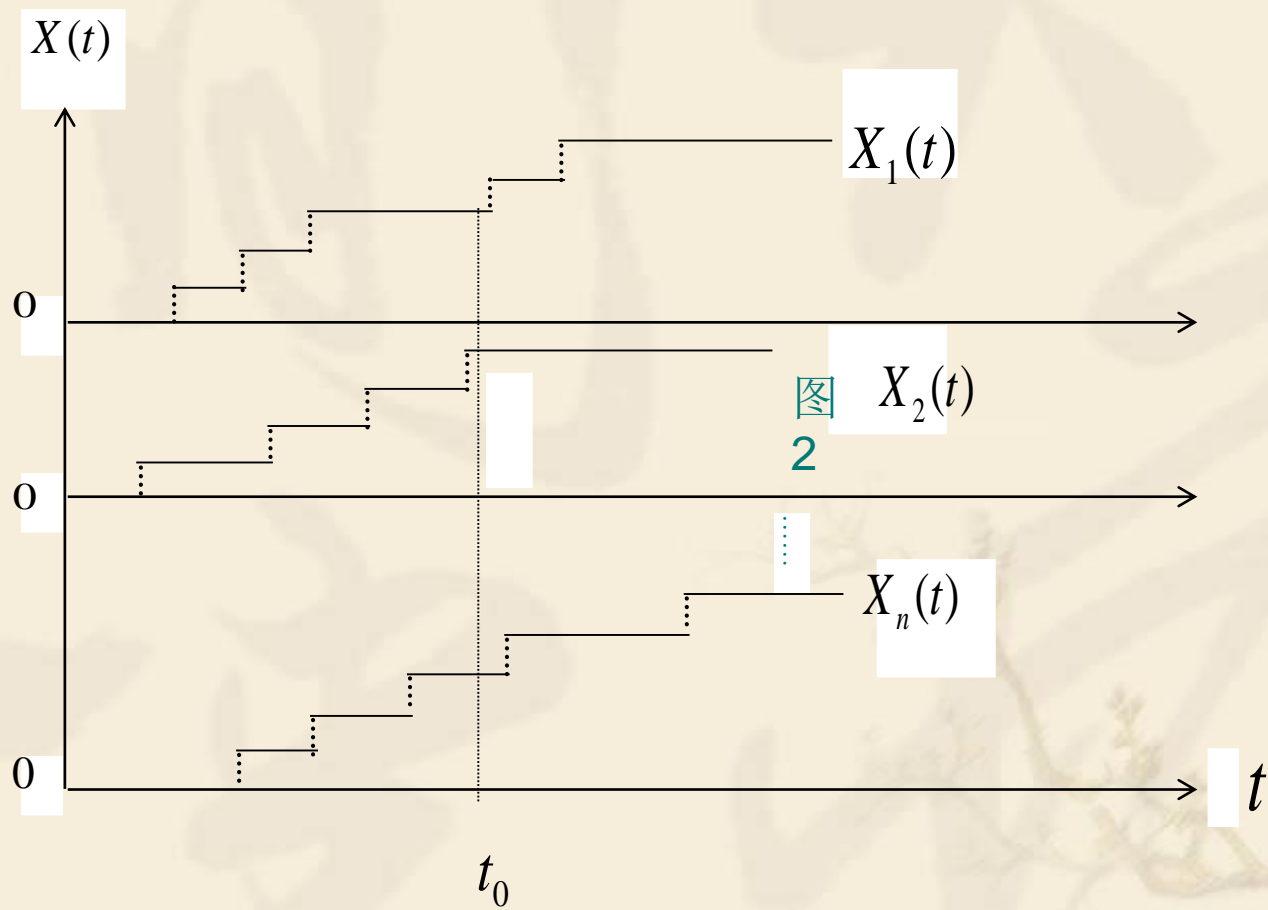


图
2

图2

- ❖ 在例1中每一张点图和例2中每一条阶梯形曲线，称作一个样本函数或一条样本曲线. 样本函数表示一次 E 结果的函数. 对随机过程进行一次观察 E ，出现样本函数是随机的. 即随机过程是一族（无限多个）随机变量；另一方面，它是某种 E 的结果，而试验出现的样本函数是随机的.

- ❖ **例3.** 热噪声电压. 电子元件或器件由于内部微观粒子（如电子）的随机热运动所引起的端电压，称为热噪声电压. 以电阻之热噪声电压为例. 以 $\{X(t), t \in [0, \infty)\}$ 表示热噪声电压. 引进第 i 次长时间测量得一条电压-时间曲线 $x_i(t)$ ($i=1, 2, \dots, n, \dots$)，一次 E 得到的样本曲线是随机的.
- ❖ **理解：** 固定 $t = t_0$ ，考察 $X(t)$ 在 t_0 数值，第 i 次值为 $x_i(t_0)$ ($i=1, 2, \dots, n, \dots$) . 显然 $X(t_0)$ 为一个 $r.v$. 于是固定 t 时热噪声电压 $X(t)$ 是一个 $r.v$ ，而 t 变化时 $\{X(t), t \in (0, +\infty)\}$ 是一族 $r.v$ ，因此， $X(t)$ 是一个随机过程.

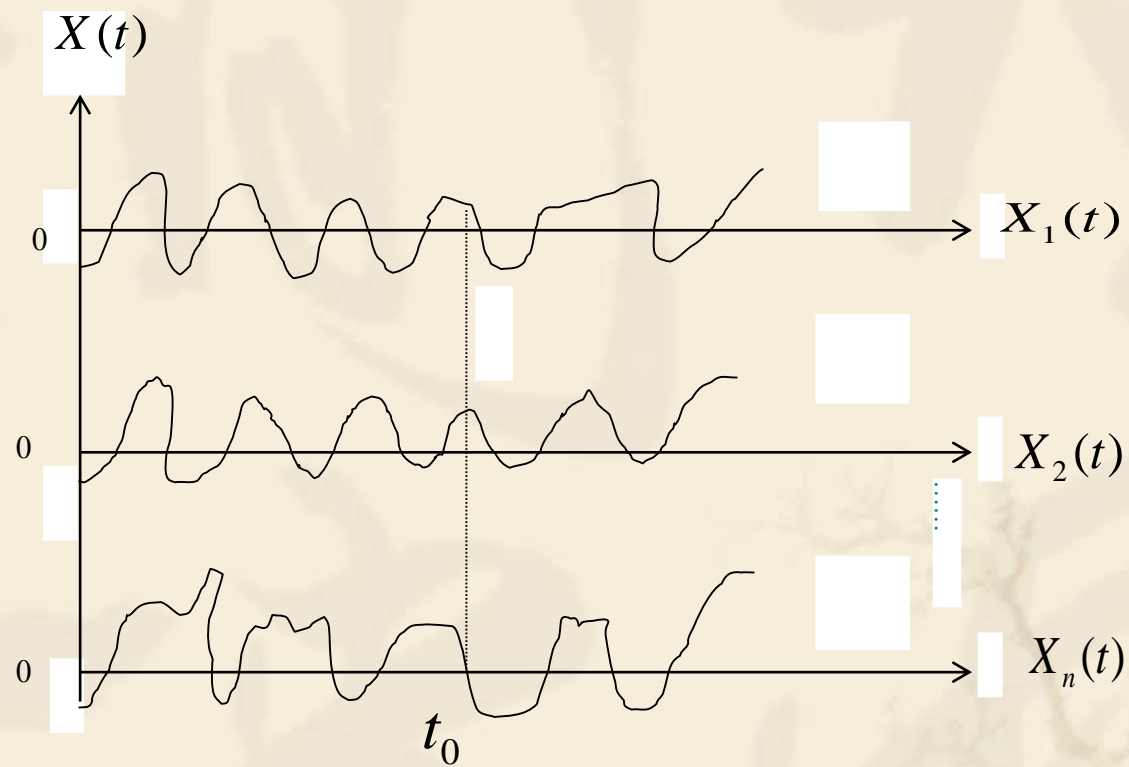


图3

❖ 例4. 英国植物学家Brown发现液体表面的花粉微粒做无规则的运动，后来就称为Brown运动. 这种运动的起因是花粉受到液体分子的碰撞，这种碰撞每秒钟多达 10^{21} 次，这些微小碰撞力的总和使花粉微粒做随机运动. 我们用 $X(t), Y(t)$ 表示 t 时刻花粉微粒的位置，这是二维随机向量. 我们得到 $\{(X(t), Y(t)), t \in (0, \infty)\}$.

❖ 定义：设 (Ω, F, P) 是一个概率空间, T 是一个实数集. $\{X(t, \omega), t \in T, \omega \in \Omega\}$ 是对应于 t 和 ω 的函数, 即为定义在 T 和 Ω 上的二元函数, 若此函数对任意固定的 $t \in T$, $X(t, \omega)$ 是 (Ω, F, P) 上 $r.v$, 则称 $\{X(t, \omega), t \in T, \omega \in \Omega\}$ 是随机过程.

❖ 随机过程在时刻 t 状态或截口: $X(t, \omega)$ 为一随机过程, 在 t 固定时, 它是一个 $r.v$, 称之为过程 $X(t, \omega)$ 在时刻 t 的状态或截口. 若 ω 固定, 它是 t 的函数, 称为随机过程的样本函数或样本曲线, 亦称之为现实 (曲线).

❖ Remark: ①上述定义中样本空间 Ω 通常可理解为样本函数的全体，而每一条样本曲线作为一个基本事件 ω ；例3：样本曲线 $x_i(t)$

作为 $\omega_i(i=1,2,\dots,n,\dots)$ 改写为 $X(t,\omega_i)$ ；全体样本函数 $\{x(t)\}$ 构成样本空间 Ω ，即 $\{X(t,\omega)\}$ 全体构成样本空间 Ω 当 $\omega = \omega_i$ 时， $X(t,\omega_i)$ 即为 $x_i(t), i=1,2,\dots$

❖ ②随机过程可简记为 $\{X(t), t \in T\}$, 通常并不指出概率空间 Ω . 此时样本函数用 $x(t)$ 表示, 第 i 次得到的样本函数为 $x_i(t)$ ($i=1, 2, \dots, n, \dots$).

❖ 随机过程状态空间或值域: 随机变量 $X(t)$ (t 固定, 且 $t \in T$) 的所有可能取的值构成一个实数集, 称之为过程 $X(t)$ 的状态空间或值域, 记为 E ; 而每一个可能值称为一个状态($r \cdot v$).



- ❖ 随机过程的各个状态: $X(t)$ ($t \in T$) (可能取的各个数值). 例1 状态空间由 1 与 0 二数构成; 例3 噪声电压的状态空间 $(-\infty, +\infty)$.
- ❖ 随机过程的分类(根据 T 及 E 为可列集或非可列集)
- ❖ (1) 离散参数, 离散状态的随机过程:
- ❖ (2) 离散参数, 连续状态的随机过程:
- ❖ (3) 连续参数, 离散状态的随机过程.
- ❖ (4) 连续参数, 连续状态的随机过程

❖ 二、有限维分布族:

❖ 定义: 对于任意的 $t_1, t_2, \dots, t_n \in T$,

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = P\{X(t_1) \leq x_1, \dots, X(t_n) \leq x_n\}$$

称为随机过程 $X(t)$ 的 n 维分布函数.

❖ 定义随机过程 $X(t)$ 的 n 维分布密度

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = \frac{\partial^n}{\partial x_1 \partial x_2 \cdots \partial x_n} F(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n)$$

❖ 随机过程 $X(t)$ 一维分布函数, 二维分布函数, \dots , n 维分布函数, 等等的全体

$$\{F(x_1, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) : t_1, \dots, t_n \in T, n \geq 1\}$$

称为过程 $X(t)$ 的有限维分布族.

❖ 有限维分布函数族性质:

❖ (1). 对称性: 对 $1, 2, \dots, n$ 的任意一种排列 j_1, j_2, \dots, j_n 有

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = F(x_{j_1}, \dots, x_{j_n}; t_{j_1}, \dots, t_{j_n})$$

❖ (2). 相容性: 对 $m < n$, 有:

$$F(x_1, \dots, x_m; t_1, t_2, \dots, t_m) = F(x_1, \dots, x_m, +\infty, \dots, +\infty; t_1, t_2, \dots, t_n)$$

- ❖ 利用随机过程的统计特性(有限维分布族和数字特征)进行分类, 主要有两类随机过程: 平稳过程与马尔可夫过程. 下面我们介绍随机过程中的一个重要定理:
- ❖ **Theorem (Kolmogorov)** 若给定参数集 T 及分布函数族 $\{F(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n): \forall n \geq 1, t_1, \dots, t_n \in T\}$ 满足相容性条件, 则必存在概率空间 (Ω, \mathcal{F}, P) 及定义于其上的随机过程 $\{X(t), t \in T\}$, 使 $X(t)$ 的有限维分布函数族与上述给定的分布函数族是重合的.

❖ § 2. 随机过程的数字特征

❖ 一、数学期望和方差

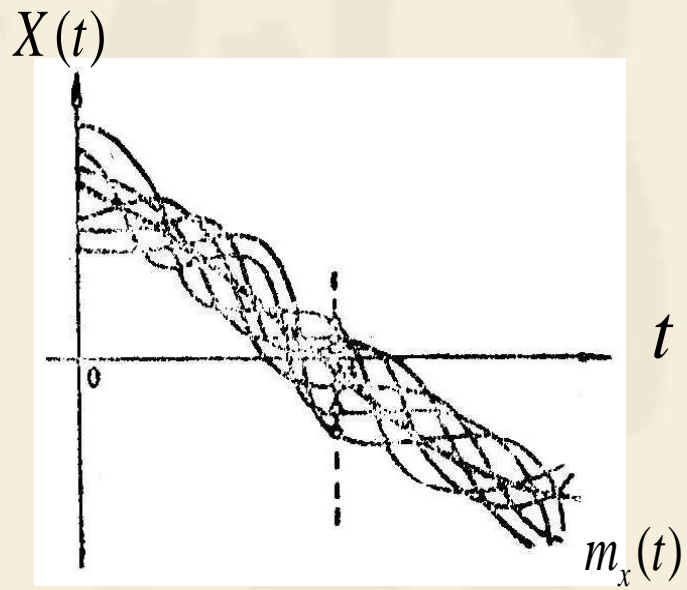
❖ $\{X(t), t \in T\}$ 在每一时刻 $t \in T$ 是一个 $r.v.$ ，其期望和方差都是依赖于参数 t 的函数.

❖ 均值(函数): $m_X(t) = EX(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x dF(x, t), t \in T$

其中 $F(x; t)$ 是过程的一维分布函数.

❖ $m_X(t)$ 表示随机过程的样本函数在 t 时的状态的统计平均值, $m_X(t)$ 是一条固定曲线.

❖ (a)



(b)

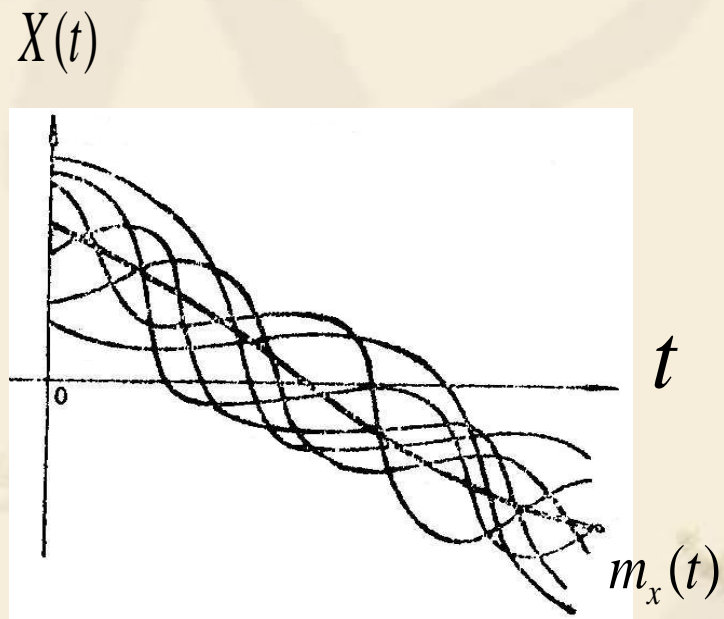


图5

❖ 方差(函数)

$$D_X(t) = D(X(t)) = E[X(t) - m_X(t)]^2, t \in T$$

❖ 标准差

$$\sigma_X(t) = \sqrt{D_X(t)} = \sqrt{DX(t)}$$

❖ 它们描绘它的样本曲线在各个时刻 t 对 $m_X(t)$ 的分散程度

❖ 均方值(函数)

$$\Psi_X(t) = EX^2(t)$$

❖ 易知

$$DX(t) = EX^2(t) - m_X^2(t) = \Psi_X(t) - m_X^2(t)$$

❖ 二、随机过程的协方差函数和相关函数

❖ 随机过程 $X(t)$ 的(自)协方差函数 ($X(t_1)$ 与 $X(t_2)$ 的协方差)

$$C_X(t_1, t_2) = \text{cov}(X(t_1), X(t_2)) = E[X(t_1) - m_X(t_1)][X(t_2) - m_X(t_2)]$$

❖ 协方差函数还可表示为:

$$C_X(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)] - EX(t_1)EX(t_2)$$

❖ 随机过程的(自)相关函数

$$R_X(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)]$$

❖ **例1.** 随机相位正弦波 $X(t) = a \cos(\omega_0 t + \Phi) \quad -\infty < t < +\infty$

其中 a, ω_0 是正常数, 而 $r.v. \Phi \sim U[0, 2\pi]$, 求 $X(t)$ 期望、方差和相关函数.

❖ **例2.** 设随机过程 $X(t) = X + Yt + Zt^2, -\infty < t < +\infty$, 其中 X, Y, Z 相互独立, 各自期望为0, 方差为1, 求协方差函数.

❖ **例3.** 给定一个随机过程 $X(t)$ 和常数 a , 用 $X(t)$ 的相关函数表示随机过程 $Y(t) = X(t+a) - X(t)$ 的相关函数.

❖ 三. 正态随机过程（高斯过程）

❖ 定义 设 $T=[0,+\infty)$ 或 $T=(-\infty,+\infty)$, 称随机过程 $\{X(t), t \in T\}$ 为正态随机过程, 如果对任意正整数 n 及 $t_1, \dots, t_n \in T$, $(X(t_1), \dots, X(t_n))$ 是 n 维正态向量.

❖ n 维密度函数:

$$f(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |C|^{\frac{1}{2}}} \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2} (x - m_X) C^{-1} (x - m_X)' \right\}$$

其中 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $m_X = (m_X(t_1), m_X(t_2), \dots, m_X(t_n))$

$$C = \begin{pmatrix} C_X(t_1, t_1) & C_X(t_1, t_2) & \cdots & C_X(t_1, t_n) \\ C_X(t_2, t_1) & C_X(t_2, t_2) & \cdots & C_X(t_2, t_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_X(t_n, t_1) & C_X(t_n, t_2) & \cdots & C_X(t_n, t_n) \end{pmatrix}, |C| \neq 0$$

- ❖ 性质：正态随机过程的有限维分布密度完全的由其期望和协方差函数所确定.
- ❖ 定理 $\{X(t), t \in T\}$ 是高斯过程的充要条件是它的任意有限个元 $X(t_1), \dots, X(t_n)$ 的任意线性组合都是一个一维正态随机变量或常数.

例：设 ξ 与 η 为独立同分布随机变量，且均服从标准正态分布，试求随机过程

$$\zeta = \{\zeta(t) = t\xi + \eta, t \in (-\infty, +\infty)\}$$

的有限维分布。

❖ 定义：称随机过程 $\{X(t), t \in T\}$ 为独立过程，如果对任意 n 及 $t_1, t_2, \dots, t_n \in T$ ，有 $X(t_1), \dots, X(t_n)$ 相互独立。

定理：正态过程 $\{X(t), t \in T\}$ 是独立过程的充要条件是协方差函数 $C(s, t) = 0, s \neq t$ 。

❖ 四、二阶矩过程(second moments processes)

❖ 若随机过程 $\{X(t), t \in T\}$ 的一、二阶矩存在, 即

$$EX(t) < +\infty$$

$$E(x(t))^2 < +\infty$$

则称 $X(t)$ 是二阶矩过程.

❖ 二阶矩过程的协方差函数 $C_X(t_1, t_2)$, 相关函数 $R_X(t_1, t_2)$ 总是存在的.

❖ 高斯过程是二阶矩过程.

❖ 随机过程的相关理论: 从二阶矩过程数学期望和相关函数出发讨论随机过程的性质, 而允许不涉及它的有限维分布. 这种理论称之为随机过程的相关理论.

❖ 五、相关函数的性质:

❖ 两条性质:

❖ (1) $R_X(t_1, t_2)$ 是对称的, 即 $R_X(t_1, t_2) = R_X(t_2, t_1)$

❖ (2) 相关函数 $R_X(t_1, t_2)$ 是非负定的, 即对任意 $n \geq 1$ 和任意实数 $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n \in T$ 及任意复数 z_1, \dots, z_n 有:

$$\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n R_X(\tau_k, \tau_j) z_k \bar{z}_j \geq 0$$

❖ 注: 协方差函数 $C_X(t_1, t_2)$ 也满足上述性质.

❖ § 3 复(值)随机过程

- ❖ 从实值随机过程到复值随机过程, 是数学上的推广, 在工程上亦有必要.
- ❖ 复随机过程: 若 $X(t), Y(t) (t \in T)$ 是实随机过程, 则称 $Z(t) = X(t) + iY(t), t \in T$ 为复随机过程.
- ❖ 复随机过程 $Z(t)$ 概率分布: 可用二维随机过程 $(X(t), Y(t))^T$ 的所有 $m+n$ 维分布函数或分布密度给出.
- ❖ 期望: $m_Z(t) = EZ(t) = EX(t) + iEY(t), t \in T$
- ❖ (自)协方差函数: $C_Z(t_1, t_2) = E[(Z(t_1) - m_Z(t_1))(Z(t_2) - m_Z(t_2))]$, $t_1, t_2 \in T$

❖ (自)相关函数定义:

$$R_Z(t_1, t_2) = E[Z(t_1)\overline{Z(t_2)}], t_1, t_2 \in T$$

❖ 注意与实随机过程协方差和相关函数定义不同(取共轭)

❖ 方差:

$$D_Z(t) = E|Z(t) - m_Z(t)|^2 = C_Z(t, t)$$

非负的实函数.

❖ 均方值: $\Psi_Z(t) = E|Z(t)|^2 = R_Z(t, t)$

非负实函数.

❖ 易知: $C_Z(t_1, t_2) = R_Z(t_1, t_2) - m_Z(t_1) \overline{m_Z(t_2)}$

Proof:
$$\begin{aligned} C_Z(t_1, t_2) &= E[(Z(t_1) - m_Z(t_1))(\overline{Z(t_2) - m_Z(t_2)})] \\ &= E[Z(t_1) \overline{Z(t_2)}] - m_Z(t_1) \overline{m_Z(t_2)} \\ &= R_Z(t_1, t_2) - m_Z(t_1) \overline{m_Z(t_1)} \end{aligned}$$

- ❖ 复二阶矩过程: 一阶和二阶矩存在(期望、方差、协方差和相关函数有限)的复随机过程. 且期望和相关函数是复二阶矩过程的基本数字特征, 协方差与方差均可由它们确定.
- ❖ 两个复随机过程 $Z_1(t), Z_2(t) (t \in T)$, 可定义互协方差函数:

$$\begin{aligned} C_{Z_1 Z_2}(t_1, t_2) &= \text{cov}(Z_1(t_1), Z_2(t_2)) \\ &= E[Z_1(t_1) - m_{Z_1}(t_1)][\overline{Z_2(t_2) - m_{Z_2}(t_2)}] \quad t_1, t_2 \in T \end{aligned}$$

- ❖ 互相关函数: $R_{Z_1 Z_2}(t_1, t_2) = E[Z_1(t_1) \overline{Z_2(t_2)}]$

❖ Remark:

- ❖ (1) 通常仅考虑实随机过程
- ❖ (2). 随机过程的微积分和第三章平稳过程亦适用复随机过程.
- ❖ 例. 复随机过程

$$Z(t) = \sum_{k=1}^N A_k e^{i(\omega_0 t + \Phi_k)}, -\infty < t < +\infty$$

其中 ω_0 是正常数, N 是固定正整数, A_k 是实数, $\Phi_k \in U[0, 2\pi]$, A_k 和 Φ_k ($k = 1, 2, \dots, N$) 相互独立, 求 $Z(t)$ 的期望与相关函数.

- ❖ 此例 $Z(t)$ 表示 N 个复谐波信号叠加而成的信号, 它是复随机过程.

§ 4 随机微积分

- ❖ 在实际问题中，常涉及到随机过程的导数和积分，这些运算都是极限运算. 就我们的目的而言，假定极限为均方意义下的极限就够了. 这是因为一般应有领域所涉及的过程大部分是二阶矩过程，并且均方收敛在数学上比其它收敛简单，存在有效的研究方法.

一、均方极限(limit in mean square):

- ❖ 定义1. 设随机序列, $\{X_n, n=1, 2, \dots\}$ 和 $r.v. X$, 且 $E|X_n|^2 < \infty, E|X|^2 < \infty$ 若有:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E|X_n - X|^2 = 0$$

则称 X_n 均方收敛于 X , 而 X 是 X_n 均方极限

记 $\lim_{n \rightarrow \infty} l \cdot i \cdot m X_n = X$ (“ $l \cdot i \cdot m$ ” limit in mean square)

- ❖ Remark: \lim 针对一般数列而言
 $l \cdot i \cdot m$ 针对随机序列而言

❖ 定理. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} l \cdot i \cdot m X_n = X$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} l \cdot i \cdot m X_n = Y$, 则 $P\{X = Y\} = 1$.

即均方极限在概率为1相等的意义下唯一.

❖ 均方极限性质:

❖ (1) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} l \cdot i \cdot m X_n = X$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} EX_n = EX$, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} EX_n = E[\lim_{n \rightarrow \infty} l \cdot i \cdot m X_n]$

即极限与数学期望可交换次序.

❖ (2) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} l \cdot i \cdot m X_m = X, \lim_{n \rightarrow \infty} l \cdot i \cdot m Y_n = Y$, 则 $\lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ n \rightarrow \infty}} EX_m Y_n = EXY$.

特别的, 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} l \cdot i \cdot m X_n = X$, 则 $\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ n \rightarrow \infty}} E(X_m X_n) = EX^2$.

❖ (3) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} l \cdot i \cdot m X_n = X, \lim_{n \rightarrow \infty} l \cdot i \cdot m Y_n = Y$, 则对常数 a, b 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} l \cdot i \cdot m (aX_n + bY_n) = aX + bY$$

❖ (4) 若数列 $\{a_n, n=1, 2, \dots\}$ 有极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, 又 X 是 $r \cdot v$, 则

$$l \cdot i \cdot m_{n \rightarrow \infty} (a_n X) = 0$$

❖ (5) $l \cdot i \cdot m_{n \rightarrow \infty} X_n$ 存在 $\Leftrightarrow l \cdot i \cdot m_{\substack{m \rightarrow \infty \\ n \rightarrow \infty}} (X_m - X_n) = 0$.

❖ Remark: 在性质(2)条件下不能得到

$$l \cdot i \cdot m_{m \rightarrow \infty} X_m^2 = X^2, l \cdot i \cdot m_{n \rightarrow \infty} (X_n Y_n) = XY$$

❖ 例1: 设有二阶矩随机序列 $\{X_n\}$ 和二阶矩变量 X , 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} E(X_n - X)^2 = 0$, $f(n)$ 是普通函数, 且满足李普希茨条件: $|f(u) - f(v)| \leq M|u - v|$, 其中 M 是一正常数, 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E f(X_n) = E f(X)$$

❖ 例2: 设 Y_1, Y_2, \dots 是独立同分布随机变量序列, $EY_1 = \mu, DY_1 = \sigma^2$, 令 $X_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i$, 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E X_n = \mu$$

❖ 二、均方连续性与均方导数

❖ 本节以后之内容参数集 T 取为连续的, 如取 $[a, b], (-\infty, +\infty), [0, +\infty)$.

❖ 定义 若随机过程 $\{X(t), t \in T\}$, 对固定的 $t_0 \in T$, 有

$$\lim_{t \rightarrow t_0} E|X(t) - X(t_0)|^2 = 0$$

即

$$\lim_{t \rightarrow t_0} E|X(t) - X(t_0)|^2 = 0$$

则称 $X(t)$ 在 t_0 处均方连续. 若 $X(t)$ 在 T 中每一个 t 处都连续, 则称 $X(t)$ 在 T 上均方连续.

❖ 定理 随机过程 $\{X(t), t \in T\}$ 在 T 上均方连续 \Leftrightarrow 其相关函数 $R_X(t_1, t_2)$ 在 $\{(t, t) : t \in T\}$ 的所有点上连续的.

❖ 证：事实上需证： $X(t)$ 在 T 上任一固定点 t_0 上连续
 $\Leftrightarrow R_X(t_1, t_2)$ 在 (t_0, t_0) 连续.

❖ 定义 $\{X(t), t \in T\}$ 在 t_0 处，下列均方极限

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{X(t_0 + h) - X(t_0)}{h}$$

存在，则称此极限为 $X(t)$ 在 t_0 处的均方导数，记为 $X'(t_0)$ ，或 $\left. \frac{dX(t)}{dt} \right|_{t=t_0}$ ，此时，称 $X(t)$ 在 t_0 处均方可导. 若 $X(t)$ 在 T 中的每一点 t 上均方可导，则称 $X(t)$ 在上 T 均方可导.

❖ 定理 随机过程 $\{X(t), t \in T\}$ 在 t 处均方可导 \Leftrightarrow
极限

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h' \rightarrow 0}} \frac{R_X(t+h, t+h') - R_X(t+h, t) - R_X(t, t+h') + R_X(t, t)}{h \times h'} \quad (\text{I})$$

存在，因而 $X(t)$ 在 T 上均方可导 \Leftrightarrow 上式对所有 t 均成立.

证： \Leftarrow 上式成立，只需证 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{X(t+h) - X(t)}{h}$ 存在. 由均方极限性质(5)，只要

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h' \rightarrow 0}} l \cdot i \cdot m \left[\frac{X(t+h) - X(t)}{h} - \frac{X(t+h') - X(t)}{h'} \right] = 0$$

即

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h' \rightarrow 0}} E \left| \frac{X(t+h) - X(t)}{h} - \frac{X(t+h') - X(t)}{h'} \right|^2 = 0$$

❖ 亦即

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h' \rightarrow 0}} \left[\frac{R_X(t+h, t+h) - R_X(t+h, t) - R_X(t, t+h) + R_X(t, t)}{h^2} \right. \\ \left. + \frac{R_X(t+h', t+h') - R_X(t+h', t) - R_X(t, t+h') + R_X(t, t)}{h'^2} \right. \\ \left. - 2 \times \frac{R_X(t+h, t+h') - R_X(t+h, t) - R_X(t, t+h') + R_X(t, t)}{hh'} \right] = 0$$

❖ 因为(I)极限存在，而此极限在 $h = h'$ 时亦存在，且极限数值不变，所以

$$l \cdot i \cdot m_{h \rightarrow 0} \frac{X(t+h) - X(t)}{h}$$

存在.

❖ \Rightarrow 设 $X(t)$ 在 t 处可导, 利用均方极限性质(2),
且

$$\lim_{h \rightarrow 0} E \left[\frac{X(t+h) - X(t)}{h} \right]$$

存在, 可得

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h' \rightarrow 0}} E \left[\frac{X(t+h) - X(t)}{h} \cdot \frac{X(t+h') - X(t)}{h'} \right]$$

存在, 亦即极限

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h' \rightarrow 0}} \frac{R_X(t+h, t+h') - R_X(t+h, t) - R_X(t, t+h') + R_X(t, t)}{hh'}$$

存在.

❖ 性质(其证明只须用均方导数定义和均方极限性质)

❖ (1) 若过程 $X(t)$ 在 t 处可导, 则它在 t 处连续.

(2) $X(t)$ 均方导数 $X'(t)$ 的期望是

$$m_{X'}(t) = E[X'(t)] = \frac{d}{dt} EX(t) = m'_X(t)$$

求导记号与数学期望可交换次序.

❖ (3) 随机过程 $X(t)$ 之均方导数 $X'(t)$ 相关函数是

$$R_{X'}(t_1, t_2) = E[X'(t_1)X'(t_2)] = \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} R_X(t_1, t_2) = \frac{\partial^2}{\partial t_2 \partial t_1} R_X(t_1, t_2)$$

❖ (4) 若 X 为 $r.v.$, 则 $X' = 0$

❖ (5) 若 $X(t), Y(t)$ 是随机过程, a, b 是常数, 则

$$[aX(t) + bY(t)]' = aX'(t) + bY'(t)$$

❖ 证:

$$\begin{aligned}& E \left| \frac{aX(t+h) + bY(t+h) - aX(t) - bY(t)}{h} - aX'(t) - bY'(t) \right|^2 \\&= E \left| a \left(\frac{X(t+h) - X(t)}{h} - X'(t) \right) + b \left(\frac{Y(t+h) - Y(t)}{h} - Y'(t) \right) \right|^2 \\&\leq a^2 E \left| \frac{X(t+h) - X(t)}{h} - X'(t) \right|^2 + b^2 E \left| \frac{Y(t+h) - Y(t)}{h} - Y'(t) \right|^2 \\&\quad + 2|ab| \left(E \left| \frac{X(t+h) - X(t)}{h} - X'(t) \right|^2 \right)^{1/2} \cdot \left(E \left| \frac{Y(t+h) - Y(t)}{h} - Y'(t) \right|^2 \right)^{1/2} \\&\xrightarrow{h \rightarrow 0} 0\end{aligned}$$

❖ (6) 若 $f(t)$ 是可微函数， $X(t)$ 是随机过程，则

$$[f(t)X(t)]' = f'(t)X(t) + f(t)X'(t)$$

证：

$$\begin{aligned} & E \left| \frac{f(t+h)X(t+h) - f(t)X(t)}{h} - f'(t)X(t) - f(t)X'(t) \right|^2 \\ &= E \left| \frac{f(t+h)X(t+h) - f(t)X(t+h) + f(t)X(t+h) - f(t)X(t)}{h} - f'(t)X(t) - f(t)X'(t) \right|^2 \\ &= E \left| \frac{f(t+h) - f(t)}{h} X(t+h) - f'(t)X(t) + f(t) \left[\frac{X(t+h) - X(t)}{h} - X'(t) \right] \right|^2 \\ &= E \left| (f'(t) + o(h))X(t+h) - f'(t)X(t) + f(t) \left[\frac{X(t+h) - X(t)}{h} - X'(t) \right] \right|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= E \left| f'(t) [X(t+h) - X(t)] + o(h)X(t+h) + f(t) \left[\frac{X(t+h) - X(t)}{h} - X'(t) \right] \right|^2 \\
&\leq E(f'(t))^2 |X(t+h) - X(t)|^2 + o(h)EX^2(t+h) + f^2(t)E \left[\frac{X(t+h) - X(t)}{h} - X'(t) \right]^2 \\
&\quad + 2o(h)|f'(t)|(E|X(t+h) - X(t)|^2)^{1/2} \cdot (E|X(t+h)|^2)^{1/2} \\
&\quad + 2o(h)|f(t)| \left(E \left| \frac{X(t+h) - X(t)}{h} - X'(t) \right|^2 \right)^{1/2} (E|X(t+h)|^2)^{1/2} \\
&\quad + 2|f'(t)||f(t)|(E|X(t+h) - X(t)|^2)^{1/2} \left(E \left| \frac{X(t+h) - X(t)}{h} - X^2(t) \right|^2 \right)^{1/2} \\
&\xrightarrow{h \rightarrow 0} \mathbf{0}
\end{aligned}$$

❖ 三、均方积分(integration in mean square):

❖ 定义 设 $\{X(t), t \in [a, b]\}$ 是随机过程, $f(t)(t \in [a, b])$ 是函数. 将区间 $[a, b]$ 分成 n 个子区间, 分点为

$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$, 作和式

$$\sum_{k=1}^n f(u_k)X(u_k)(t_k - t_{k-1})$$

其中 u_k 是子区间 $[t_{k-1}, t_k]$ 中任意一点, $k = 1, 2, \cdots, n$. 令

$\Delta = \max_{1 \leq k \leq n} (t_k - t_{k-1})$, 若均方极限 $\lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(u_k)X(u_k)(t_k - t_{k-1})$ 存在, 且与子区间的分法和 u_k 的取法无关, 则称此极限

为 $f(t)X(t)$ 在 $[a, b]$ 上的均方积分, 记为 $\int_a^b f(t)X(t)dt$.

此时也称 $f(t)X(t)$ 在区间 $[a, b]$ 上是均方可积的.

- ❖ 定理 $f(t)X(t)$ 在区间 $[a,b]$ 上均方可积的充分条件是二重积分 $\int_a^b \int_a^b f(s)f(t)R_X(s,t)dsdt$ 存在, 且有

$$E \left| \int_a^b f(t)X(t)dt \right|^2 = \int_a^b \int_a^b f(s)f(t)R_X(s,t)dsdt.$$

- ❖ 证: 利用均方极限性质(5), 要积分 $\int_a^b f(t)X(t)dt$ 存在, 只需证明

$$\lim_{\substack{\Delta \rightarrow 0 \\ \Delta' \rightarrow 0}} l \cdot i \cdot m \left[\sum_{k=1}^n f(u_k)X(u_k)(t_k - t_{k-1}) - \sum_{l=1}^m f(v_l)X(v_l)(s_l - s_{l-1}) \right] = 0$$

其中 $a = s_0 < s_1 < \cdots < s_m = b$ 是区间 $[a,b]$ 的另一组分点, 而 $s_{l-1} \leq v_l \leq s_l$, $\Delta' = \max_{1 \leq l \leq m} (s_l - s_{l-1})$, 亦即

$$\lim_{\substack{\Delta \rightarrow 0 \\ \Delta' \rightarrow 0}} E \left| \sum_{k=1}^n f(u_k)X(u_k)(t_k - t_{k-1}) - \sum_{l=1}^m f(v_l)X(v_l)(s_l - s_{l-1}) \right|^2 = 0$$

即

$$\lim_{\substack{\Delta \rightarrow 0 \\ \Delta' \rightarrow 0}} \left[\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n f(u_k) f(u_j) R_X(u_k, u_j) (t_k - t_{k-1})(t_j - t_{j-1}) \right. \\ \left. + \sum_{l=1}^m \sum_{n=1}^m f(v_l) f(v_n) R_X(v_l, v_n) (s_l - s_{l-1})(s_n - s_{n-1}) \right. \\ \left. - 2 \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m f(u_k) f(v_l) R_X(u_k, v_l) (t_k - t_{k-1})(s_l - s_{l-1}) \right] = 0$$

由二重积分定义，左边极限等于

$$\int_a^b \int_a^b f(s) f(t) R_X(s, t) ds dt + \int_a^b \int_a^b f(s) f(t) R_X(s, t) ds dt \\ - 2 \int_a^b \int_a^b f(s) f(t) R_X(s, t) ds dt = 0$$

充分性获证.

❖ 因均方积分 $\int_a^b f(t)X(t)dt$ 存在，由均方极限性质(2)有

$$\lim_{\substack{\Delta \rightarrow 0 \\ \Delta' \rightarrow 0}} E \left[\sum_{k=1}^n f(u_k)X(u_k)(t_k - t_{k-1}) \sum_{l=1}^m f(v_l)X(v_l)(s_l - s_{l-1}) \right]$$

❖ 存在，且等于 $E \left| \int_a^b f(t)X(t)dt \right|^2$ ，即

$$\int_a^b \int_a^b f(s)f(t)R_X(s,t)dsdt = E \left| \int_a^b f(t)X(t)dt \right|^2$$

❖ 性质(定义和均方极限性质)

❖ (1) 若 $X(t)$ 在 $[a, b]$ 上均方连续, 则 $X(t)$ 在 $[a, b]$ 上均方可积.

❖ (2)
$$E\left[\int_a^b f(t)X(t)dt\right] = \int_a^b f(t)EX(t)dt = \int_a^b f(t)m_X(t)dt$$

❖ (3)
$$E\left|\int_a^b f(t)X(t)dt\right|^2 = \int_a^b \int_a^b f(s)f(t)R_X(s, t)dsdt$$

❖ (4) α, β 为常数, 则

$$\int_a^b [\alpha X(t) + \beta Y(t)]dt = \alpha \int_a^b X(t)dt + \beta \int_a^b Y(t)dt$$

❖ (5) X 为随机变量, 则 $\int_a^b f(t)Xdt = X \int_a^b f(t)dt$

❖ (6) $\int_a^b X(t)dt = \int_a^c X(t)dt + \int_c^b X(t)dt$

❖ (7) $X(t)$ 在 $[a, b]$ 上均方连续, 则

$$Y(t) = \int_a^t X(s)ds, \quad a \leq t \leq b$$

在 $[a, b]$ 上均方连续, 均方可导, 且 $Y'(t) = X(t)$.

❖ (8) $X(t)$ 在 $[a, b]$ 上均方可导, 且 $X'(t)$ 在 $[a, b]$ 上均方连续, 则

$$X(b) - X(a) = \int_a^b X'(t)dt$$

均方可积性质证明:

(1) $\because X(t)$ 在 $[a, b]$ 上均方连续 \therefore 利用Th2:

$X(t)$ 的自协方差函数 $R_X(s, t)$ 在 $\{(t, t) | t \in T\}$ 上连续

则易知 $R_X(s, t)$ 在 $T \times T$ 上连续

$\therefore \forall s_0, t_0 \in T$

$$|R_X(s, t) - R_X(s_0, t_0)| = |EX(s)X(t) - EX(s_0)X(t) + EX(s_0)X(t) - EX(s_0)X(t_0)|$$

$$= |EX(t)(X(s) - X(s_0)) + EX(s_0)(X(t) - X(t_0))|$$

$$\leq (EX^2(t))^{1/2} (E|X(s) - X(s_0)|^2)^{1/2} + (EX^2(s_0))^{1/2} (E|X(t) - X(t_0)|^2)^{1/2}$$

或 $\lim_{s \rightarrow s_0} X(s) = X(s_0) \quad \lim_{t \rightarrow t_0} X(t) = X(t_0)$

利用均方极限性质（2）：

$$\lim_{\substack{s \rightarrow s_0 \\ t \rightarrow t_0}} EX(s)X(t) = EX(s_0)X(t_0)$$

即 $\lim_{\substack{s \rightarrow s_0 \\ t \rightarrow t_0}} R_X(s, t) = R_X(s_0, t_0)$

$\therefore R(s, t)$ 在 $T \times T$ 上可积, 即

$\int_a^b \int_a^b R_X(s, t) ds dt$ 存在

$X(t)$ 在 $[a, b]$ 上可积.

(2) Proof:

$$E \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{k=1}^k f(u_k) X(u_k) (t_k - t_{k-1}) \stackrel{\text{均方极限 (1)}}{=} \lim_{\Delta \rightarrow 0} E \sum_{k=1}^n f(u_k) X(u_k) (t_k - t_{k-1})$$

$$= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(u_k) m_X(u_k) (t_k - t_{k-1}) = \int_a^b f(t) m_X(t) dt$$

$$= E \int_a^b f(t) X(t) dt$$

(3) Proof: $\because \int_a^b f(t) X(t) dt$ 均方积分存在,

\therefore 利用均方极限性质 (2) 有:

$$\lim_{\substack{\Delta \rightarrow 0 \\ \Delta' \rightarrow 0}} E \left[\sum_{k=1}^n f(u_k) X(u_k) (t_k - t_{k-1}) \sum_{l=1}^m f(v_l) X(v_l) (s_l - s_{l-1}) \right]$$

$$= E \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(u_k) X(u_k) (t_k - t_{k-1}) \lim_{\Delta' \rightarrow 0} \sum_{l=1}^m f(v_l) X(v_l) (s_l - s_{l-1})$$

$$= \lim_{\substack{\Delta \rightarrow 0 \\ \Delta' \rightarrow 0}} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m f(u_k) f(v_l) R_X(u_k, v_l) (t_k - t_{k-1}) (s_l - s_{l-1})$$

$$= \int_a^b \int_a^b f(s) f(t) R_X(s, t) ds dt = E \left| \int_a^b f(t) X(t) dt \right|^2$$

(5) 略

(6) 与普通分析中证明类似 (略)

(7) Proof: $X(t)$ 均方连续

$$(\because E|Y(t) - Y(t_0)|^2 = E\left|\int_{t_0}^t X(s)ds\right|^2 = \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t R_X(s_1, s_2)ds_1ds_2 \rightarrow 0)$$

或

$$\|Y(t) - Y(t_0)\| = \left\| \int_{t_0}^t X(t) - X(t_0) \right\| \leq \int_{t_0}^t \|X(t) - X(t_0)\| dt \leq \max\|X(t) - X(t_0)\| |t - t_0| \rightarrow 0$$

来证 $Y(t)$ 均方可微

$$\because \left(E \left| \frac{Y(t+h) - Y(t)}{h} - X(t) \right|^2 \right)^{1/2} = \left(E \left| \frac{1}{h} \int_t^{t+h} (X(s) - X(t)) ds \right|^2 \right)^{1/2}$$

$$\leq \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \|X(s) - X(t)\| ds \leq \max_{|t-s| \leq h} \|X(s) - X(t)\| \rightarrow 0 (h \rightarrow 0)$$

(8) Proof: $\hookrightarrow X(t) = \int_a^t X'(t)dt + c \quad \therefore X(a) = c$

$$X(b) = \int_a^b X'(t)dt + c$$

$$\therefore \int_a^b X'(t)dt = X(b) - X(a)$$

Remark: ①均方积分定义可推广到无限区间

$$[a, \infty)(-\infty, b](-\infty, +\infty)$$

亦可; 积分性质(1)~(5)

②均方斯蒂尔吉斯积分 (Stieljes integration) 亦可类似定义:

$$\int_a^b f(t) dX(t)$$

❖ 定义：设 $\{X(t), t \in [a, b]\}$ 是随机过程，而 $f(t) (t \in [a, b])$ 是函数. 把区间 $[a, b]$ 分成 n 个子区间，分点为

$a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b$ ，作和式

$$\sum_{k=1}^n f(u_k)[X(t_k) - X(t_{k-1})]$$

其中 u_k 是子区间 $[t_{k-1}, t_k]$ 中任意一点, $k = 1, 2, \cdots, n$.

令 $\Delta = \max_{1 \leq k \leq n} (t_k - t_{k-1})$ ，若均方极限

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(u_k)[X(t_k) - X(t_{k-1})]$$

存在，且与子区间的分法和 u_k 的取法无关，则称此极限为 $f(t)$ 对 $X(t)$ 在 $[a, b]$ 上的均方斯蒂尔吉斯积分，记为 $\int_a^b f(t) dX(t)$

❖ 均方斯蒂尔吉斯积分 $\int_a^b f(t)dX(t)$ 存在的充分条件是二重积分 $\int_a^b \int_a^b f(s)f(t)dR_X(s,t)$ 存在.

❖ 二重积分定义为

$$\lim_{\substack{\Delta_1 \rightarrow 0 \\ \Delta_2 \rightarrow 0}} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m f(u_{jk})f(v_{jk})[R_X(s_j, t_k) - R_X(s_{j-1}, t_k) - R_X(s_j, t_{k-1}) + R_X(s_{j-1}, t_{k-1})]$$

$$s_{j-1} \leq u_j \leq s_j, t_{k-1} \leq v_k \leq t_k,$$

$$\Delta_1 = \max_{1 \leq j \leq n} (s_j - s_{j-1})$$

$$\Delta_2 = \max_{1 \leq k \leq n} (t_k - t_{k-1})$$