第五章 马尔科夫过程初步

- 马尔科夫过程是无后效的随机过程. 所谓无后效性是指：当过程在 t_n 时刻所处的状态为已知时，过程在大于t_n 时刻所处状态的概率特性只与过程在t_n 时刻所处的状态有关，而与过程在 t_n时刻以前的状态无关.

- 如果把t_n 时刻作为“现在”，t_n 以后的时刻作为“将来”，t_n 以前的时刻作为“过去”，无后效性即为：过程在已知现在状态的条件下，将来的状态只与现在有关，而与过去无关.

- 马尔科夫过程按其状态和时间参数是连续或离散的可分为三类：

(1)时间，状态都是离散的马尔科夫过程，也称为马尔科夫链；

(2)时间连续，状态离散的马尔科夫过程，也称为纯不连续的马尔科夫过程；

(3)时间状态都是连续的马尔科夫过程.

- 本章主要讨论离散时间马尔科夫链的概念及其转移概率，状态的分类，平稳分布等内容.
- 在本章中，无特别声明我们总是假设：

1. 参数集合 $T=\{0,1,2,\cdots\}$.

2. 状态空间 $S=\{0,1,2,\cdots\}$ 或 $S=\{\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots\}$ 或其子集.

第一节 离散时间的马尔科夫链定义

定义： 设$\{X_n, n\ge 0\}$是定义在概率空间(Ω, F, P)上的随机过程，状态空间为S．若对任意$n\ge 1$及任意整数$0\le t_1<t_2<\cdots<t_n<t_{n+1}$, $i_1, i_2, \cdots, i_n, j\in S$ 有

$$P\left\{X_{t_{n+1}}=j \middle| X_{t_1}=i_1, X_{t_2}=i_2, \cdots, X_{t_n}=i_n\right\}=P\left\{X_{t_{n+1}}=j \middle| X_{t_n}=i_n\right\} \qquad (*)$$

则称$\{X_n, n\ge 0\}$为离散参数的马尔可夫链；

- 若S为可列集，则称$\{X_n, n\ge 0\}$为离散参数的可列马尔可夫链；
- 若S为有限集，则称其为离散参数的有限马尔可夫链。
- (*) 式称为马尔可夫性或无后效性

- 转移概率
- 马尔可夫链$\{X_n, n\geq 0\}$，一步转移概率

$$p_{ij}(m)=P\left\{X_{m+1}=j \middle| X_m=i\right\},\quad i,j\in S$$

描述其概率性质.

- **定义:**设$\{X_n, n\geq 0\}$是状态空间为S的马尔可夫链, 称

$$p_{ij}^{(n)}(m)=P\left\{X_{m+n}=j \middle| X_m=i\right\},\quad i,j\in S$$

为系统在m时刻时处于状态 i 的条件下，经n步转移到状态j 的n 步转移概率.

- 显然,$p_{ij}^{(n)}(m)$具有下列性质：

(1) $p_{ij}^{(n)}(m)\geq 0,\quad i,j\in S$,

(2) $\sum_{j\in S}p_{ij}^{(n)}(m)=\sum_{j\in S}P\left\{X_{m+n}=j \middle| X_m=i\right\}=1,\ i\in S$

❖ 规定：

（1） $p_{ij}^{(1)}(m)=p_{ij}(m)$ ； （2） $p_{ij}^{(0)}(m)=\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j,\\ 0, & i\neq j.\end{cases}$

❖ 若$p_{ij}^{(n)}(m)$ 与 m 无关，则称$\{X_n, n\geq 0\}$ 是时齐的或齐次的马尔可夫链。此时, 记

$$p_{ij}^{(n)}=p_{ij}^{(n)}(m),\ \ i,j\in S,\ n\geq 1$$

一步转移概率记为 $p_{ij}=p_{ij}^{(1)},\ \ i,j\in S$.

❖ 对时齐的马尔可夫链 $\{X_n, n\geq 0\}$ ，有

$$p_{ij}^{(n)}=P\left\{X_{m+n}=j\middle|X_m=i\right\}=P\left\{X_n=j\middle|X_0=i\right\},\ \ i,j\in S,\ \forall m\geq 0.$$

- 由于概率非负，且过程必须转移到某个状态，则

$$p_{ij} \geq 0, \quad i, j \geq 0$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_{ij} = 1, i = 0, 1, 2\cdots$$

- 以P记一步转移概率p_{ij}的矩阵，则

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} & \cdots & p_{0j} & \cdots \\ p_{10} & p_{11} & \cdots & p_{1j} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{i0} & p_{i1} & \cdots & p_{ij} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

称此矩阵为随机矩阵. 若马尔科夫链的状态总数有限，则$\boldsymbol{P}$是有限阶的方阵，其阶数正好是状态空间中状态的总数.

例1 直线上的随机游动. 考虑在直线整数点上运动的粒子，当它处于位置 j 时(姑且设 j 即为过程所处的状态)，向右移动到 $j+1$ 的概率为 p ，而向左移动到 $j-1$ 的概率为 $q=1-p$，又设时刻 0 时例子处在原点，即 $X_0\equiv 0$. 于是粒子在时刻 n 所处的位置 X_n 就是一个马尔科夫链，且转移概率为

$$p_{jk}=\begin{cases} p, k=j+1 \\ q, k=j-1 \\ 0, \quad \text{其它} \end{cases}$$

当 $p=q=\dfrac{1}{2}$ 时，称为简单对称随机游动.

❖ 例2 两状态的马尔科夫链. 设系统的状态空间$S=\{0,1\}$，状态 0 表示系统工作正常，状态1 表示系统出故障. 设在时刻n系统处于正常状态，则下一步转移到故障状态的概率为p；当时刻n 系统处于故障状态，下一步转移到正常状态的概率为 q，同时假定每次转移不依赖系统过去所处状态，若以X_n 表示在时刻 n 系统所处的状态，则 $\{X_n, n\ge 1\}$ 是一齐次马尔科夫链，其转移概率矩阵为

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{bmatrix}$$

- 例3 (生灭链)观察某种生物种群，以X_n表示在时刻 n 群体的数目，设为i 个数量单位，若在时刻$n+1$增加到$i+1$个数量单位的概率为b_i，减少到$i-1$个数量单位的概率为a_i，保持不变的概率为$r_i=1-(a_i+b_i)$，则$\{X_n,n\geq 0\}$为齐次马尔科夫链，$S=\{0,1,2,\cdots\}$，其转移概率为

$$p_{ij}=\begin{cases} b_i,\ j=i+1, \\ r_i, i=j, \\ a_i, j=i-1 \end{cases}$$

$(a_0=0)$，称此马尔科夫链为生灭链.

- **定理** （Chapman-Kolmogorov）设$p_{ij}^{(n)}$是马尔可夫链$\{X_n,\ n\ge 0\}$的n步转移概率，则$\forall\ i,j\in S,\ m,n\ge 0$有

$$p_{ij}^{(m+n)}=\sum_{k\in S}p_{ik}^{(m)}p_{kj}^{(n)}.$$

（C-K方程）

- **定理** 马尔可夫链$\{X_n,\ n\ge 0\}$的一步转移概率p_{ij}可以确定所有的n步转移概率$p_{ij}^{(n)}$。

- 记$\boldsymbol{P}^{(n)}=(p_{ij}^{(n)})_{i,j\in S}$，$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^{(1)}=(p_{ij})_{i,j\in S}$. 称$\boldsymbol{P}^{(n)}$为马尔可夫链$\{X_n,\ n\ge 0\}$的$n$ 步转移矩阵。此时，C-K方程可表示为$\boldsymbol{P}^{(m+n)}=\boldsymbol{P}^{(m)}\boldsymbol{P}^{(n)}$ 且$\boldsymbol{P}^{(n)}=\boldsymbol{P}^{n}$.

- **定义：** 设$\{X_n, n\geq 0\}$是马尔可夫链，对任意的$n\geq 0$，称 $\pi_i(n)=P\{X_n=i\}$，$i\in S$ 为绝对概率，特别地，称 $\pi_i(0)=P\{X_0=i\}, i\in S$ 为初始概率。
- 显然，绝对概率和初始概率具有下列性质：

$$\begin{cases}\pi_i(n)\geq 0,\ \ i\in S,\\ \sum_{i\in S}\pi_i(n)=1.\end{cases} \qquad \begin{cases}\pi_i(0)\geq 0,\ \ i\in S,\\ \sum_{i\in S}\pi_i(0)=1.\end{cases}$$

故对任意$n\geq 0$，$\{\pi_i(n), i\in S\}$ 是概率分布，通常称为绝（概率）分布；特别，$\{\pi_i(0), i\in S\}$称为初始（概率）分布。记 $\Pi(0)=\{\pi_i(0)\}_{i\in S}$，$\Pi(n)=\{\pi_i(n)\}_{i\in S}$

- **定理** 设 $\{X_n, n\ge 0\}$是马尔可夫链，则它的任意有限维概率分布完全由初始分布和一步转移概率决定。
- **例 1**（无限制的随机游动）若随机游动 $\{X_n, n\ge 0\}$ 的状态空间为$S=\{\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots\}$，且转移概率为

$$p_{ij}=\begin{cases} p, & j=i+1, \\ q, & j=i-1, \quad i,j\in S \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

其中 $0<p<1,\ q=1-p$. 求：n 步转移概率$p_{ij}^{(n)}$.

- **例2**（带有一个吸收壁的随机游动）设 $\{X_n, n\ge 0\}$是随机游动，其状态空间为 $S=\{0,1,2,\cdots\}$，若转移概率为

$$p_{ij}=\begin{cases}1, & i=j=0\\ p, & j=i+1,\\ q, & j=i-1,\\ 0, & 其他.\end{cases} \quad i,j\in S,\ \ (0<p<1,\ \ p+q=1)$$

则称$\{X_n,\ n\ge 0\}$为带有吸收壁0 的随机游动。其转移矩阵为

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & \cdots\\ q & 0 & p & 0 & \cdots\\ 0 & q & 0 & p & \cdots\\ 0 & 0 & q & 0 & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\end{pmatrix}$$

❖ **例3**（带有两个吸收壁的随机游动）设 $\{X_n, n \geq 0\}$ 是随机游动，其状态空间为 $S=\{0,1,2,\cdots,b\}$，其转移概率为

$$p_{ij}=\begin{cases}1, & i=j=0,\\ 1, & i=j=b,\\ p, & j=i+1,\ \ i,j\in S,\ \ (0<p<1,\ \ p+q=1)\\ q, & j=i-1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

其转移矩阵为

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ q & 0 & p & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ 0 & q & 0 & p & \cdots & 0 & 0 & 0\\ \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & q & 0 & p\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

❖ **例4**（带有一个反射壁的随机游动）设 $\{X_n,\ n \geq 0\}$ 是随机游动，其状态空间为$S=\{0,1,2,\cdots\}$，其转移概率为

$$p_{ij}=\begin{cases}1, & i=0,\ j=1\\ p, & j=i+1,\\ q, & j=i-1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases} \quad i,j\in S,\ \ (0<p<1,\ \ p+q=1)$$

其转移矩阵为

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ q & 0 & p & 0 & \cdots \\ 0 & q & 0 & p & \cdots \\ 0 & 0 & q & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

❖ **例5**（带有两个反射壁的随机游动）设 $\{X_n, n \ge 0\}$ 是随机游动，其状态空间为 $S = \{0,1,2,\cdots,b\}$ ，其转移概率为

$$p_{ij} = \begin{cases} 1, & i=0, j=1, \\ 1, & i=b, j=b-1, \\ p, & j=i+1, \\ q, & j=i-1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases} \qquad i,j \in S, \ (0<p<1, \ p+q=1)$$

其转移矩阵为

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ & \cdots & & & \cdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- **例6** 设$\{X_n,\ n\geq 0\}$是只有两个状态$S=\{0,\ 1\}$的随机游动，其转移矩阵为

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1-p & p \\ q & 1-q\end{pmatrix},\ \ 0<p<1,\ \ 0<q<1.$$

这里 $p+q$ 未必等于1. 求$\boldsymbol{P}^{(n)}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\pi_0(n)$, $\lim\limits_{n\to\infty}\pi_1(n)$.

- **例7** 设$\{X_n,\ n\geq 0\}$是马尔可夫链，状态空间$S=\{1,2,3\}$ ，转移矩阵为

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1/4 & 3/4 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \\ 0 & 3/4 & 1/4\end{pmatrix}$$

初始分布为$\{\pi_1(0),\ \pi_2(0),\ \pi_3(0)\}=\{1/6,\ 1/2,\ 1/3\}$，求

（1）二步转移矩阵 $P^{(2)}$ ； （2）$P\{X_1=2,\ X_3=1\}$；

（3）$P\{X_3=2,\ X_2\neq 2,\ X_1\neq 2 \mid X_0=2\}$.

- **例8** 天气预报问题. 若明天是否有雨仅与今天天气有关，与过去无关，并设今日有雨，明日也有雨的概率为α ，今日无雨而明日有雨的概率为β，试求今日有雨且第四日仍有雨的概率（设 $\alpha=0.7,\beta=0.4$ ）

参考文献

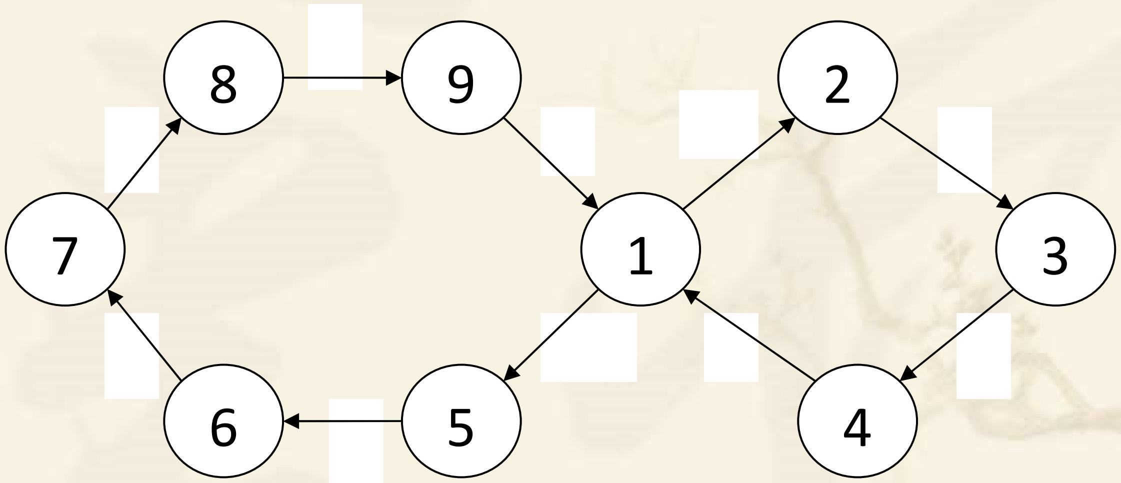
❖ 本章内容可参考如下文献

❖ [1]应用随机过程. 柳金甫，孙洪祥，王军编著，清华大学出版社，2006.

❖ [2]应用随机过程. 林元烈 编著，清华大学出版社，2002.

第二节 马尔科夫链的状态分类

- 状态的分类
- **例** 设马尔可夫链 的状态空间为 $S=\{1,2,\cdots,9\}$ ，状态之间的转移概率如图所示。



- **定义** 设马尔可夫链$\{X_n,\ n\ge 0\}$的状态空间为S，n 步转移概率为$p_{ij}^{(n)}$，对于$i\in S$，若集合$\left\{n\,\middle|\,n\ge 1,\ p_{ii}^{(n)}>0\right\}$非空，则称该集合的最大公约数

$$d=d(i)\triangleq \mathrm{G.C.D}\left\{n\,\middle|\,n\ge 1,\ p_{ii}^{(n)}>0\right\}$$

为状态i 的周期。如果$d>1$，称状态i 为周期的，如果$d=1$ ，称状态i为非周期的。若$\left\{n:n\ge 1,\ p_{ii}^{(n)}>0\right\}$ 是空集，则不对状态i 定义周期。

- **定理** 设状态i的周期为d，则存在正整数M，对一切$n\ge M$ ，有$p_{ii}^{(nd)}>0$.

- 证明：设$\left\{n:n\ge 1,\ p_{ii}^{(n)}>0\right\}=\{n_1,n_2,\cdots\}$，令

$$t_k=\mathrm{G.C.D}\{n_1,n_2,\cdots,n_k\}$$

- 则 $t_1 \ge t_2 \ge \cdots \ge d \ge 1$，故存在正整数 N，使得 $t_N = t_{N+1} = \cdots = d$

因此 $d = \text{G.C.D}\{n_1, n_2, \cdots, n_N\}$. 从而存在正整数 M，对一切 $n \ge M$，由初等数论有

$$nd = \sum_{k=1}^{N} a_k n_k \quad \text{，}(a_k\text{为正整数})$$

因而当 $n \ge M$ 时

$$p_{ii}^{(nd)} = p_{ii}^{\left(\sum_{k=1}^{N} a_k n_k\right)} \ge p_{ii}^{(a_1 n_1)} p_{ii}^{(a_2 n_2)} \cdots p_{ii}^{(a_N n_N)} \ge \prod_{k=1}^{N} \left[p_{ii}^{n_k} \right]^{a_k}$$

- 记

$$\begin{aligned} f_{ij}^{(n)} &= P\{X_1 \ne j, X_2 \ne j, \cdots, X_{n-1} \ne j, X_n = j | X_0 = i\} \\ &= \sum_{i_1 \ne j} \sum_{i_2 \ne j} \cdots \sum_{i_{n-1} \ne j} p_{ii_1} p_{i_1 i_2} \cdots p_{i_{n-1} j}, \quad n \ge 1. \end{aligned}$$

$f_{ij}^{(n)}$表示系统从 i 出发，经n步首次到达状态j的概率. 也称为首中概率.

- $f_{ii}^{(n)}$ 表示系统从 i 出发，经 n 步首次返回 i 的概率.
- 规定：$f_{ij}^{(0)}=0$
- 令

$$f_{ij}=\sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)},$$

则 f_{ij} 表示系统从状态 i 出发, 经有限步到达状态 j 的概率（也可以说成系统从状态 i 出发, 迟早要到达状态 j 的概率）。

- f_{ii} 表示从状态 i 出发, 迟早要返回状态 i 的概率。

- **定义** 若 $f_{ii}=1$，则称 i 是常返状态；若 $f_{ii}<1$，则称 i 是非常返状态或滑过状态。（显然，吸收状态是常返状态）
- **例** 设马氏链 $\{X_n,\ n\ge 0\}$ 的状态空间为 $S=\{1,2,3,4\}$，转移矩阵为

$$P=\begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 1/4 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

试判别状态的常返性。

- **定理** 对任意状态 $i, j\in S,\ n\ge 1$，有

$$p_{ij}^{(n)}=\sum_{m=1}^{n} f_{ij}^{(m)} p_{jj}^{(n-m)}.$$

- 显然有 $0\le f_{ij}^{(n)}\le p_{ij}^{(n)}\le f_{ij}\le 1.$

- 注：C-K方程及上式是马氏链的关键公式，它们可以把$p_{ij}^{(n)}$分解成较低步的转移概率之和形式. 由上述定理可得到周期的等价定义.
- **定理** 设状态$i \in S$，如果集合$\left\{ n \middle| n \geq 1, f_{ii}^{(n)} > 0 \right\}$非空，则

$$\text{G.C.D}\left\{ n \middle| n \geq 1,\ p_{ii}^{(n)} > 0 \right\} = \text{G.C.D}\left\{ n \middle| n \geq 1,\ f_{ii}^{(n)} > 0 \right\}$$

- **定理** 设$i, j \in S$，则

(1)若存在正整数n，使$p_{ii}^{(n)} > 0, p_{ii}^{(n+1)} > 0$，则$i$ 非周期.

(2)若存在正整数m，使m步转移矩阵$P^{(m)}$中对应于状态j的那列元素全不为0，则j非周期.

- 对于常返状态i，由于$f_{ii}=\sum_{n=1}^{\infty}f_{ii}^{(n)}=1$，因此$\left\{f_{ii}^{(n)},\ n\geq 1\right\}$是一个概率分布，此分布的期望值为

$$\mu_i=\sum_{n=1}^{\infty}nf_{ii}^{(n)}$$

表示由i出发再返回i的平均返回时间.

- **定义** 设状态i是常返的. 若 $\mu_i<\infty$，则称i是**正常返**的；若$\mu_i=\infty$，则称i是**零常返**的。非周期的正常返态称为**遍历态**.

- 常返性的判别及其性质
- 设$\{a_n, n \ge 0\}$为实数列，考虑其母函数

$$A(s)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n$$

若$\{a_n, n \ge 0\}$有界，则$A(s)$对一切$|s|<1$收敛。进而，若$\{a_n\}$与$\{b_n\}$的母函数分别为$A(s)$与$B(s)$，且对一切$|s|<1$收敛，则$\{a_n\}$与$\{b_n\}$的卷积

$$C_n=\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \left(n=0,1,\cdots\right)$$

的母函数为

$$C(s)=A(s)B(s)$$

❖ **定理** 状态i常返的充要条件为

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$$

状态 i 非常返，当且仅当

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \frac{1}{1-f_{ii}} < \infty$$

❖ 证明：约定 $p_{ii}^{(0)} = 1, f_{ii}^{(0)} = 0.$ 则

$$p_{ii}^{(n)} = \sum_{l=0}^{n} f_{ii}^{(l)} p_{ii}^{(n-l)}.$$

令$\left\{p_{ii}^{(n)}\right\},\left\{f_{ii}^{(n)}\right\}(n \geq 0)$的母函数分别为$P(s),F(s)$，即

$$P(s) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} s^n, F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{ii}^{(n)} s^n$$

❖ 又 $$\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} s^n = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{l=1}^{n} f_{ii}^{(l)} p_{ii}^{(n-l)}\right) s^n = \left(\sum_{l=1}^{\infty} f_{ii}^{(l)} s^l\right)\left(\sum_{n=l}^{\infty} p_{ii}^{(n-l)} s^{n-l}\right)$$

$$=\left(F(s)-f_{ii}^{(0)}\right)\sum_{n'=0}^{\infty} p_{ii}^{(n')} s^{n'} = F(s)P(s).$$

而

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} s^n = \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} s^n - p_{ii}^{(0)} s^0 = P(s)-1,$$

因此 $$P(s)-1 = P(s)F(s).$$

注意到，当 $0 \le s < 1$ 时，$F(s) < f_{ii} \le 1$，故

$$P(s) = \frac{1}{1-F(s)}, 0 \le s < 1.$$

又因对一切 $0 \le s < 1$ 及正整数 N，有

$$\sum_{n=0}^{N} p_{ii}^{(n)} s^n \le P(s) \le \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)},$$

且当$s\to 1$时$P(s)$不减，则上式中先令$s\to 1$，后令$N\to\infty$可得 $\lim\limits_{s\to 1^-}P(s)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}p_{ii}^{(n)}$. 同理可得$\lim\limits_{s\to 1^-}F(s)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}f_{ii}^{(n)}=\mathrm{f}_{ii}$.
则令$s\to 1$，可知定理结论成立。

- 为解释上述定理的直观含义，令

$$I_n(i)=\begin{cases}1, & X_n=i,\\ 0, & X_n\neq i.\end{cases}$$

及 $S(i)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}I_n(i)$. 则 $S(i)$ 表示马尔科夫链$\{X_n, n\geq 0\}$到达 i 的次数.

此时

$$E(S(i)|X_0=i)=\sum_{n=0}^{\infty}E(I_n(i)|X_0=i)=\sum_{n=0}^{\infty}P\{X_n=i|X_0=i\}=\sum_{n=0}^{\infty}p_{ii}^{(n)}$$

- 注：$\sum_{n=0}^{\infty}p_{ii}^{(n)}$ 表示由i 出发返回i 的平均次数. 当i 为常返状态时，返回 i 的平均次数为无限多次，反之亦然. 当状态i 为非常返状态时，再回到 i 的平均次数至多是有限次.
- 推论 若j 为非常返状态，则对任意$i\in S$ ，有

$$\sum_{n=1}^{\infty}p_{ij}^{(n)}<\infty,$$

$$\lim_{n\to\infty}p_{ij}^{(n)}=0$$

❖ 下面再从概率意义考察常返状态的性质. 记

$$S_m(j)=\sum_{n=m}^{\infty} I_n(j),$$

$$g_{ij}=P\{S_1(j)=+\infty \mid X_0=i\}=P\{S_{m+1}(j)=+\infty \mid X_m=i\}$$

则事件 $\{S_m(j)=+\infty\}$ 表示从时刻 m 起系统无穷多次到达状态 j. 有下面的定理

❖ **定理** 对任意 $i\in S$，有

$$g_{ij}=\begin{cases} f_{ij}, & \text{如j为常返状态,} \\ 0, & \text{如j为非常返状态.} \end{cases}$$

- **定理** 状态i为常返状态，当且仅当$g_{ii}=1$；若状态i为非常返状态，则$g_{ii}=0$.
- 注：若i为常返状态，则系统从i出发以概率1无穷多次返回i，即从i出发的几乎所有样本轨道无穷多次回到i. 若i为非常返状态，则从i出发几乎所有样本轨道至多有限次回到i.
- 对于常返状态i，为判别它是遍历或零常返，给出如下两定理
- **定理** 设状态i常返且有周期d，则$\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(nd)}=d/\mu_i$.

（其中μ_i为状态i的平均返回时间，当$\mu_i=\infty$时，约定$d/\mu_i=0$）

- **定理** 设i是常返状态，则

  ① i 是零常返状态$\Longleftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)}=0$ ；

  ② i是遍历状态$\Longleftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)}=1/\mu_i>0$.

- **定义** 设$i,j\in S$，若 $\exists\, n\geq 1$ ，使$p_{ij}^{(n)}>0$ ，则称状态i可达状态 j，记为$i\to j$ ；若 $\forall\, n\geq 1$ ，有$p_{ij}^{(n)}=0$，则称状态 i 不可达状态 j，记为$i\nrightarrow j$ ；若 $i\to j$且$j\to i$，则称状态i和状态 j相通（或互通），记为$i\leftrightarrow j$.

- **定理**（1）若$i\to k$ 且 $k\to j$，则$i\to j$；

  （2）若 $i\leftrightarrow k$且 $k\leftrightarrow j$，则$i\leftrightarrow j$.

- **定理** 设状态$i,j\in S$，且$i\leftrightarrow j$，则

（1）i 与 j同为常返状态或同为非常返状态；如果同为常返状态，则它们同为正常返状态或同为零常返状态。（2）i 与j有相同的周期。

- 证明: (1)由于$i\leftrightarrow j$，由可达的定义知存在$l\geq 1$和$n\geq 1$，使得

$$p_{ij}^{(l)}=\alpha>0,\ p_{ji}^{(n)}=\beta>0$$

由C-K方程，对任意的$m\geq 1$，总有

$$p_{ii}^{(l+m+n)}\geq p_{ij}^{(l)}p_{jj}^{(m)}p_{ji}^{(n)}=\alpha\beta p_{jj}^{(m)},$$

$$p_{jj}^{(l+m+n)}\geq p_{ji}^{(n)}p_{ii}^{(m)}p_{ij}^{(l)}=\alpha\beta p_{ii}^{(m)}.$$

将上式两边从1到∞求和，得

$$\sum_{m=1}^{\infty} p_{ii}^{(l+m+n)} \geq \alpha\beta \sum_{m=1}^{\infty} p_{jj}^{(m)},$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} p_{jj}^{(l+m+n)} \geq \alpha\beta \sum_{m=1}^{\infty} p_{ii}^{(m)}.$$

可见，$\sum_{k=1}^{\infty} p_{ii}^{(k)}$与$\sum_{k=1}^{\infty} p_{jj}^{(k)}$相互控制，所以它们同为无穷或同为有限。$i$与$j$同为常返状态或同为非常返状态。

若i与j同为常返状态，在以上的不等式中取极限，令$m\to\infty$，得

$$\lim_{m\to\infty} p_{ii}^{(l+m+n)} \geq \alpha\beta \lim_{m\to\infty} p_{jj}^{(m)}, \quad \lim_{m\to\infty} p_{jj}^{(l+m+n)} \geq \lim_{m\to\infty} \alpha\beta p_{ii}^{(m)}.$$

因此，$\lim_{k\to\infty} p_{ii}^{(k)}$与$\lim_{k\to\infty} p_{jj}^{(k)}$同为正或同为零，则$i$与$j$同为正常返状态或同为零常返状态。

（2）设状态 i 的周期为 d，状态 j 的周期为 c. 因为

$$p_{ij}^{(l)}=\alpha>0,\ p_{ji}^{(n)}=\beta>0,$$

所以对任一使 $p_{jj}^{(m)}>0$ 的 m，必有

$$p_{ii}^{(l+m+n)}\geq p_{ij}^{(l)}p_{jj}^{(m)}p_{ji}^{(n)}=\alpha\beta p_{jj}^{(m)}>0,$$

从而 d 可除尽 $l+m+n$. 又因为 $p_{ii}^{(l+n)}\geq p_{ij}^{(l)}p_{ji}^{(n)}=\alpha\beta>0$ ，所以 d 也可除尽 $l+n$. 因此, d 可除尽 m . 这说明 $d\leq c$. 同理可证 $d\geq c$. 故 $d=c$，即状态 i 与 j 有相同的周期。

- （注：状态的常返性与马尔可夫链的初始分布是无关的）

- 例：设马氏链$\{X_n\}$的状态空间为 $S=\{0,1,2,\cdots\}$，转移概率为

$$p_{00}=\frac{1}{2}, p_{i,i+1}=\frac{1}{2}, p_{i0}=\frac{1}{2}, i\in S$$

考察各状态的常返性。

第三节 状态空间的分解

- 定义（1）设$C\subset S$ ，若 $\forall\, i\in C,\ j\in S-C$，有$i\nrightarrow j$ ，则称 C是闭集；（2）设$C\subset S$，若$\forall\, i,j\in C$ ，都有$i\to j$，则称C是不可约的；（3）若S是不可约的，则称马氏链$\{X_n,\ n\geq 0\}$ 是不可约的（即$\forall\, i,j\in S\Rightarrow i\to j$）。
- 定理 设$C\subset S$ ，则下列各条等价

（1）C 是闭集；

（2）$\forall\, i\in C,\ j\notin C,\ n\geq 1\Rightarrow p_{ij}^{(n)}=0$ ；

- **注**（1）若C是闭集，则$\forall\, i\in C,\ n\geq 1$，有$\sum_{j\in C} p_{ij}^{(n)}=1$.

  （2）整个状态空间S是闭集，是最大的闭集；吸收状态i（即$p_{ii}=1$）是闭集，是最小的闭集。

- **定理** 状态空间S可唯一地分解成有限个或可列无穷个互不相交的子集之和，即$S=S_N\cup S_R^{(1)}\cup S_R^{(2)}\cup\cdots$，且使得

（1）每个$S_R^{(k)}$是常返状组成的不可约闭集；

（2）$S_R^{(k)}$中的状态或全是正常返状态，或全是零常返状态，且有相同的周期；

（3）S_N是由全体非常返状态组成，自$S_R^{(k)}$中的状态不能到达S_N中的状态。

- 注：分解定理中的S_N不一定是闭集，但如果 S 为有限集，S_N 一定是非闭集。
- 例：设$S=\{1,2,\cdots,6\}$，转移矩阵

$$P=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

试分解此链，并指出各状态的常返性及周期性.

- **定理** 周期为d 的不可约马尔可夫链，其状态空间S可唯一地分解为d个互不相交的子集之和，即 $S=S_0\bigcup S_1\bigcup S_2\bigcup\cdots\bigcup S_{d-1}$，且使得自$S_r$中任一状态出发，经一步转移必进入 S_{r+1}中，$r=0,1,2,\cdots,d-1$. 约定：$S_d=S_0$
- 证明：（1）任意取定一状态 $i\in S$，令

$$S_r=\left\{j\,\middle|\,\exists\, n\ge 0,\ \text{使}\ p_{ij}^{(nd+r)}>0\right\},\ r=0,1,2,\cdots,d-1$$

因 S是不可约的，即S中的状态是互通的，故$\bigcup_{r=0}^{d-1}S_r=S$

（2）若$\exists j\in S_r\bigcap S_t$ （$r\ne t$），由定义知，必存在非负整数 n 和m 使得 $p_{ij}^{(nd+r)}>0$ ，$p_{ij}^{(md+t)}>0$. 又由于$j\leftrightarrow i$，必存在正整数 h，使 $p_{ji}^{(h)}>0$ ，于是由C-K方程，

$$p_{ii}^{(nd+r+h)}\ge p_{ij}^{(nd+r)}p_{ji}^{(h)}>0\qquad p_{ii}^{(md+t+h)}\ge p_{ij}^{(md+t)}p_{ji}^{(h)}>0$$

❖ 所以，d能除尽$nd+r+h$，又能除尽$md+t+h$，从而d能除尽

$$(nd+r+h)-(md+t+h)=(n-m)d+r-t\ ,$$

故d能除尽$r-t$，注意到$0\le r\le d-1,\ 0\le t\le d-1$，故只能$r-t=0$，这说明，当 $r\ne t$ 时，$S_r\cap S_t=\varnothing$.

（3）下面证明对任一 $j\in S_r$，有$\sum_{k\in S_{r+1}}p_{jk}=1$.事实上

$$1=\sum_{k\in S}p_{jk}=\sum_{k\in S_{r+1}}p_{jk}+\sum_{k\notin S_{r+1}}p_{jk}=\sum_{k\in S_{r+1}}p_{jk}$$

最后一个等式是因：$j\in S_r$，由定义有 $p_{ij}^{(nd+r)}>0$，而当 $k\notin S_{r+1}$ 时，由定义有$p_{ik}^{(nd+r+1)}=0$，由C-K方程，有

$$0=p_{ik}^{(nd+r+1)}\ge p_{ij}^{(nd+r)}p_{jk},$$

故 $p_{jk}=0$

（4）最后证明分解的唯一性，这只需证明

$$\{S_0, S_1, S_2, \cdots, S_{d-1}\}$$

不依赖于最初取定的状态 i . 亦即只需证明：对取定的状态 i，如果 $j, k \in S_r$，则对另取的状态 i'，仍有 $j, k \in S_{r'}$（r' 可以与 r 不同）。

设对 i 的分解为 $\{S_0, S_1, S_2, \cdots, S_{d-1}\}$，对 i' 的分解为 $\{S'_0, S'_1, S'_2, \cdots, S'_{d-1}\}$，又设 $j, k \in S_r$, $i' \in S_t$. 于是，当 $r \geq t$ 时，自 i' 出发，以概率1只能在 $r-t, r-t+d, r-t+2d, \cdots$ 等这些步上转移到 j 或 k，从而 $j, k \in S'_{r-t}$；当 $r < t$ 时，自 i' 出发，以概率1只能在 $d-(t-r)=r-t+d, r-t+2d, r-t+3d, \cdot$ 等这些步上转移到 j 或 k，从而 $j, k \in S'_{r-t+d}$.

- **定理** 设$\{X_n, n\ge 0\}$是周期为d 的不可约的马尔可夫链如果只在时刻$0,d,2d,\cdots$ 上考虑$\{X_n\}$，则得一新的马尔可夫链$\{X_{nd}, n\ge 0\}$，其一步转移矩阵为$\boldsymbol{P}^{(d)}=(p_{ij}^{(d)})$，原马尔可夫链$\{X_n, n\ge 0\}$按照上述定理分解出的每个$S_r$，是新马尔可夫链$\{X_{nd}, n\ge 0\}$的不可约的闭集, 且$S_r$中的状态对新马尔可夫链是非周期的。

例： 设不可约马氏链的状态空间为$S=\{1,2,3,4,5,6\}$，转移阵为

$$P=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 \end{bmatrix}$$

将状态空间分解为不相交的子集之和。

❖ 例：设马氏链具有状态空间$S=\{0,1,\cdots,6\}$，转移概率为

$$P=\begin{bmatrix} \frac{2}{5} & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{7}{10} & 0 & \frac{3}{10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

讨论S的常返性.

第四节 平稳分布

- 对 $p_{ij}^{(n)}$ 极限性质，我们讨论两个问题。一是 $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$ 是否存在；二是其极限是否与 i 有关。这就与马尔可夫链的所谓平稳分布有密切联系。
- **定理** 若 $j \in S$ 是非常返状态或零常返状态，则对任意 $i \in S$，有 $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0$
- **推论** 如果马尔可夫链的状态空间 S 是有限集，则 S 中的状态不可能全是非常返状态，也不可能含有零常返状态，从而不可约的有限马尔可夫链的状态都是正常返状态。

- 在物理学中常有这样一种情形，不管一个系统的初始状态如何，当响应系统的条件变化不太大时，经历一段时间后，系统将处于某种平衡状态。描述这种系统的概率特性，要用$p_{ij}^{(n)}$的渐进性质和平稳分布的概念。
- 定义 若对于一切$i,j \in S$，极限

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = p_j > 0$$

存在，则称该马尔科夫链具有遍历性. 此链又称遍历链.

- 注：马尔科夫链的遍历性说明，不论从哪个状态出发，经过充分大的转移步数后，到达状态 j 的概率接近于正常数p_j .

- **定理** 若 j 是非周期，正常返状态（即遍历态）且 $i \to j$

则

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \frac{f_{ij}}{\mu_j}$$

其中 $\mu_j = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{jj}^{(n)}$ 为状态 j 的平均返回时间.

- **注**：对于不可约马尔科夫链，若它的状态是非周期正常返的，则它是遍历链；对于不可约马尔科夫链，若它的状态有限且非周期，则它是遍历链.

- **定义** 设马尔科夫链有转移矩阵 $\boldsymbol{P} = (p_{ij})$，若存在一个概率分布 $\{\pi_i, i \geq 0\}$，其满足

$$\pi_j = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i p_{ij}, j \in S$$

则称 $\{\pi_i, i \geq 0\}$ 为该马尔科夫链的平稳分布.

❖ 对于平稳分布 $\{\pi_j, j\in S\}$ ，有

$$\pi_j=\sum_{i\in S}\pi_i p_{ij}=\sum_{i\in S}\left(\sum_{k\in S}\pi_k p_{ki}\right)p_{ij}=\sum_{k\in S}\pi_k\left(\sum_{i\in S}p_{ki}p_{ij}\right)=\sum_{k\in S}\pi_k p_{kj}^{(2)}$$

一般，有 $\pi_j=\sum_{i\in S}\pi_i p_{ij}^{(n)}$， $n\ge 1$.

若初始分布$\{\pi_j(0), j\in S\}$是马尔可夫链$\{X_n, n\ge 0\}$ 的平稳分布，则

$$\pi_j(n)=P\{X_n=j\}=\sum_{i\in S}P\{X_0=i\}P\{X_n=j|X_0=i\}$$
$$=\sum_{i\in S}\pi_i(0)p_{ij}^{(n)}=\pi_j(0),\quad j\in S$$

即对任何 $n\ge 1$，绝对概率等于初始概率。

❖ 由此可见，当我们能判定马尔可夫链的初始分布$\{\pi_j(0), j\in S\}$是一平稳分布时，则该马尔可夫链在任何时刻的绝对分布$\{\pi_j(n), j\in S\}$都与初始分布相同。

❖ **定理** 非周期不可约的马尔可夫链是正常返的充分必要条件是它存在平稳分布，且此平稳分布就是极限分布 $1/\mu_j, j\in S$.

❖ 证明 “$\Leftarrow$” 设存在平稳分布 $\{\pi_j, j\in S\}$，于是有

$$\pi_j = \sum_{i\in S}\pi_i p_{ij}^{(n)},\quad n\geq 1$$

由于 $\pi_j\geq 0, j\in S$ 和 $\sum_{j\in S}\pi_j=1$ ，故可以交换极限与求和顺序，两边令 $n\to\infty$ 得

$$\pi_j=\lim_{n\to\infty}\sum_{i\in S}\pi_i p_{ij}^{(n)}=\sum_{i\in S}\pi_i\left(\lim_{n\to\infty}p_{ij}^{(n)}\right)=\sum_{i\in S}\pi_i\left(1/\mu_j\right)=1/\mu_j$$

因为 $\sum_{j\in S}\pi_j=1$ ，故至少存在一个 $\pi_k>0$，即 $1/\mu_k>0$ ，从而 $\lim_{n\to\infty}p_{ik}^{(n)}=1/\mu_k>0$ ，故 k 是正常返的，从而马尔可夫链是正常返的，且所有的 $1/\mu_j=\pi_j>0$.

❖ “$\Rightarrow$”设马尔可夫链是正常返的，于是

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 1/\mu_j > 0$$

由C-K方程，对任意正整数N（若S是有限集，则不必如此），有

$$p_{ij}^{(m+n)} = \sum_{k\in S} p_{ik}^{(m)} p_{kj}^{(n)} \geq \sum_{k=0}^{N} p_{ik}^{(m)} p_{kj}^{(n)}$$

两边令$m\to\infty$，得

$$\frac{1}{\mu_j} = \lim_{m\to\infty} p_{ij}^{(m+n)} \geq \sum_{k=0}^{N} \left(\lim_{m\to\infty} p_{ik}^{(m)}\right) p_{kj}^{(n)} = \sum_{k=0}^{N} \left(\frac{1}{\mu_k}\right) p_{kj}^{(n)}$$

再令$N\to\infty$，得

$$\frac{1}{\mu_j} \geq \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\mu_k}\right) p_{kj}^{(n)} = \sum_{k\in S} \left(\frac{1}{\mu_k}\right) p_{kj}^{(n)} \qquad (*)$$

下面进一步证明，只能等式成立。由

$$1=\sum_{k\in S}p_{ik}^{(n)}\geq\sum_{k=0}^{N}p_{ik}^{(n)}$$

先令$n\to\infty$，再令$N\to\infty$，得

$$1\geq\sum_{k\in S}\frac{1}{\mu_k}$$

将（*）式对j求和，并假定对某个j，（*）式为严格大于，则

$$\sum_{j\in S}\frac{1}{\mu_j}>\sum_{j\in S}\left(\sum_{k\in S}\left(\frac{1}{\mu_k}\right)p_{kj}^{(n)}\right)=\sum_{k\in S}\left(\frac{1}{\mu_k}\sum_{j\in S}p_{kj}^{(n)}\right)=\sum_{k\in S}\frac{1}{\mu_k}$$

于是导致自相矛盾的结果$\sum_{j\in S}\frac{1}{\mu_j}>\sum_{k\in S}\frac{1}{\mu_k}$

故（*）式对一切j都只能成立等式

$$\frac{1}{\mu_j}=\sum_{k\in S}\frac{1}{\mu_k}p_{kj}^{(n)}$$

再令 $n\to\infty$，得

$$\frac{1}{\mu_j}=\sum_{k\in S}\frac{1}{\mu_k}\left(\lim_{n\to\infty}p_{kj}^{(n)}\right)=\sum_{k\in S}\frac{1}{\mu_k}\left(\frac{1}{\mu_j}\right)=\frac{1}{\mu_j}\sum_{k\in S}\frac{1}{\mu_k}$$

由此可知

$$\sum_{k\in S}\frac{1}{\mu_k}=1$$

故 $\left\{1/\mu_j,\ j\in S\right\}$是平稳分布。

推论 (1)对不可约非周期马尔科夫链，若所有状态是正常返，则该链存在平稳分布，且平稳分布 $\left\{\pi_j,\ j\in S\right\}$ 就是极限分布$\left\{1/\mu_j,\ j\in S\right\}$，若所有状态是非常返或所有状态是零常返，则不存在平稳分布.

(2)不可约非周期的有限状态马氏链必存在平稳分布.

- (3)若$\{\pi_j,\ j\in S\}$是马氏链的平稳分布，则

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \frac{1}{\mu_j} = \pi_j$$

- 例：设马尔科夫链的转移概率矩阵为

$$P=\begin{bmatrix} 0.7 & 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 & 0.1 \\ 0.05 & 0.05 & 0.9 \end{bmatrix}$$

求该链的平稳分布即各状态的平均返回时间.

❖ 例：设马尔科夫链的状态空间$S=\{0,1,2,\cdots\}$，转移概率矩阵满足

$$p_{ij}=\begin{cases}p_i,\ j=i+1,\\ \mathrm{r}_i, i=j,\\ q_i, j=i-1,\\ 0,\text{其它}\end{cases}\left(i,j\in S, p_i+r_i+q_i=1\right)$$

这种链称为生灭链，它是不可约的，若记

$$a_0=1, a_j=\frac{p_0p_1\cdots p_{j-1}}{q_1q_2\cdots q_j},(j\ge 1)$$

试证此链存在平稳分布的充要条件为$\sum_{j=0}^{\infty}a_j<\infty$

- 例 市场占有率预测. 设某地有1600户居民，某产品只有甲乙丙3个厂家的在该地销售. 经调查，8 月份买甲乙丙3 个厂家的户数分别为 480,320,800 . 9 月份，原来买甲的有48户转买乙产品，有 96户转买丙产品；原买乙的有32户转买甲产品，有64 户转买丙产品；原买丙的有64户转买甲产品，有32 户转买乙产品. 于是得频数转移矩阵（状态 1,2,3 分表甲乙丙）

$$N=\begin{bmatrix} 336 & 48 & 96 \\ 32 & 224 & 64 \\ 64 & 32 & 704 \end{bmatrix}$$

用频率估计概率，以N中各行元素之和除以N中相应行的元素，得转移概率矩阵

$$P=\begin{bmatrix}0.7 & 0.1 & 0.2\\ 0.1 & 0.7 & 0.2\\ 0.08 & 0.04 & 0.88\end{bmatrix}$$

以1600除以 N 中各行元素之和，得初始概率分布（即初始市场占有率）

$$(\pi_1,\pi_2,\pi_3)=(0.3,0.2,0.5)$$

由初始分布及 P 可算得9月份市场占有率为

$$(0.3,0.2,0.5)\begin{bmatrix}0.7 & 0.1 & 0.2\\ 0.1 & 0.7 & 0.2\\ 0.08 & 0.04 & 0.88\end{bmatrix}=(0.27,0.19,0.54)$$

类似地，可算出12月份市场占有率为

$$\left(0.3,0.2,0.5\right)P^{(4)}=\left(0.2319,0.1698,0.5983\right)$$

由该链不可约，非周期，状态有限知其平稳分布即为极限分布，由方程组

$$\begin{cases}\pi_1=0.7\pi_1+0.1\pi_2+0.08\pi_3\\ \pi_2=0.1\pi_1+0.7\pi_2+0.04\pi_3\\ \pi_3=0.2\pi_1+0.2\pi_2+0.88\pi_3\\ \pi_1+\pi_2+\pi_3=1\end{cases}$$

解得当顾客流如此长期稳定下去时市场占有率的分布为

$$\left(\pi_1,\pi_2,\pi_3\right)=\left(0.219,0.156,0.625\right)$$

第五节 连续时间马尔科夫链

- 我们仅讨论取非负整数值的连续时间的马尔可夫链 $\{X(t),\ t \geq 0\}$.
- **定义** 设随机过程$\{X(t),\ t \geq 0\}$的状态空间为$S=\{0,1,2,\cdots\}$，如果对任意的n，任意的$0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_{n+1}$，及任意的$i_1,\ i_2,\ \cdots,\ i_{n+1} \in S$，有

$$P\left\{X(t_{n+1})=i_{n+1} \middle| X(t_1)=i_1, X(t_2)=i_2,\cdots, X(t_n)=i_n\right\}=P\left\{X(t_{n+1})=i_{n+1} \middle| X(t_n)=i_n\right\}$$

则称$\{X(t),\ t \geq 0\}$为连续时间的马尔可夫链。

- 记 $p_{ij}(s,t) \triangleq P\{X(s+t)=j \mid X(s)=i\}$，$s \ge 0,\ t \ge 0,\ i,j \in S$ ，则 $p_{ij}(s,t)$ 表示系统在 s 时刻处于状态i，经过t 时间后转移到状态 j 的转移概率。并规定：

$$p_{ij}(s,0)=P\{X(s)=j \mid X(s)=i\}=\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j,\\ 0, & i \ne j.\end{cases}$$

- **定义** 设$\{X(t),\ t \ge 0\}$ 为连续时间的马尔可夫链，若转移概率 $p_{ij}(s,t)$与s 无关，则称$\{X(t),\ t \ge 0\}$是时齐的（或齐次的）马尔可夫链。此时转移概率简记为

  $p_{ij}(t) \triangleq p_{ij}(s,t)$，其转移概率矩阵简记为$\boldsymbol{P}(t)=(p_{ij}(t))$ ，（$t \ge 0,\ i,j \in S$）.

- 以下的讨论总是假设连续时间的马尔可夫链$\{X(t),\ t \ge 0\}$是时齐的，并简称为马尔可夫链。

- 由马尔可夫性可知，系统在$(0,s]$内处于状态i的条件下，在区间$[s, s+t]$中仍处于状态i的概率正是系统处于状态i至少t个单位时间的（无条件）概率。若记T_i为系统在转移到另一状态之前停留在状态i的时间，则对一切$s, t \geq 0$，有

$$P\left\{T_i > s+t \middle| T_i > s\right\} = P\left\{T_i > t\right\}$$

这说明随机变量T_i是无记忆的，因此T_i应服从指数分布，设其分布参数为q_i，由此可引出链的构造性定义

- **定义** 随机过程$\{X(t), t \geq 0\}$称为齐次马尔科夫链，如果对任意$i \in S$满足

  (1)若过程进入i后，在i的逗留时间服从参数为q_i

  (即均值为$1/q_i$的指数分布)的指数分布；

(2)若过程离开i，则不管它在i的逗留时间有多长和以前去过什么状态，它离开i后转移到S中任一异于i的状态i的概率总是p_{ij}，此时显然有

$$\sum_{j\neq i} p_{ij} = 1$$

❖ **定理** 马尔可夫链$\{X(t),\ t\geq 0\}$的转移概率$p_{ij}(t)$具有下列性质：

（1）$p_{ij}(t)\geq 0,\ \forall\ t\geq 0,\ \forall\ i,j\in S$；

（2）$\sum_{j\in S} p_{ij}(t)=1,\ \forall\ t\geq 0,\ \ \forall\ i\in S$；

（3）$p_{ij}(s+t)=\sum_{k\in S} p_{ik}(s)p_{kj}(t),\ \forall\ s,t\geq 0,\ \ \forall\ i,j\in S$.（C-K方程）

- 以下恒设马尔可夫链满足正则性条件（或连续性条件或标准性条件）：

$$\lim_{t\to 0^+} p_{ij}(t)=\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j,\\ 0, & i\neq j.\end{cases}\quad \forall\, i,j\in S$$

- 在这一假设下， 还具有进一步性质
- (4)对任意固定的 $i,j\in S$ ，转移概率$p_{ij}(t)$是t $(t\geq 0)$ 的一致连续函数。
- (5)对任意固定的 $i\in S$ ，极限

$$p'_{ii}(0)=\lim_{h\to 0+}\frac{p_{ii}(h)-1}{h}=q_{ii}$$

总存在，这里 $-\infty<q_{ii}\leq 0$

- (6)当$i\neq j$时，下面的极限存在 $p'_{ij}(0)=\lim_{t\to 0+}\frac{p_{ij}(t)}{t}=q_{ij}$

  且 $0\leq q_{ij}<+\infty$

❖ **定义** 称 $q_{ij}=\lim_{h\to 0^+}\frac{p_{ij}(h)}{h}$ 为链的转移强度或转移率，而

$$q_i=\lim_{h\to 0+}\frac{1-p_{ii}(h)}{h}=-q_{ii}$$

为链的通过强度或通过率. 矩阵

$$Q=\left(q_{ij}\right)$$

为链的转移强度矩阵或密度矩阵，它满足

$$q_{ii}\le 0,q_{ij}\ge 0\left(i,j\in S,i\ne j\right)$$

$$q_i\ge\sum_{j\ne i}q_{ij}$$

称Q是保守的，如果

$$\sum_{j\ne i}q_{ij}=q_i=-q_{ii}<\infty$$

- 注：Q 中的元素 q_{ij} 是链的转移概率 $p_{ij}(t)$ 在 $t=0$ 点的右导数，他提供了有关转移概率在 $t=0$ 附近的信息，故 Q 起着与离散时间链转移概率矩阵 P 类似的作用.

推论：当 S 为有限状态空间时，对任意 $i,j\in S$ 有

$$\sum_{j\neq i} q_{ij} = q_i = -q_{ii} < \infty$$

定理：设马尔科夫链 $\{X(t),\ t\geq 0\}$，$Q=(q_{ij})$. 当 S 为有限集时，有

$$P'(t)=P(t)Q$$

$$P'(t)=QP(t)$$

注：上述两方程称为柯尔莫哥洛夫向前向后微分方程。

- 转移概率$p_{ij}(t)$的进一步讨论
- 仅对$p_{ij}(t)$是标准的情形进行讨论：
- (1) $p_{ij}(t)$ 在$(0,\infty)$上有有穷的连续导数
- (2) $\lim_{t\to\infty} p'_{ij}(t)=0$
- (3)$p_{ij}(t)$在$(0,\infty)$ 上恒等于零或恒大于零
- (4)$\lim_{t\to\infty} p_{ij}(t)=v_{ij}$存在，它一般随 i 和 j 而变.
- 定义 称状态i,j 是连通的(或互达的)，如果存在$s>0$和$t>0$ ，使得

$$p_{ij}(s)>0, \quad p_{ji}(t)>0$$

- 由上面性质(3)知，若i,j 连通，则对所有 $t>0$，皆有$p_{ij}(t)>0, p_{ji}(t)>0$

- 称链是不可约的，如果其所有状态是两两相通的. 这等价于 $\forall i, j \in S$ 和 $\forall t > 0$ 皆有 $p_{ij}(t) > 0$.
- **定理** 设 $\{X(t), t \geq 0\}$ 是不可约连续马氏链，则对任意 $h > 0$ ，离散马氏链

$$X_h \triangleq \{X(nh), n \geq 0\}$$

是非周期不可约的.

- **定理** 设 $p_{ij}(t)$ 是不可约马氏链的转移概率，则 $\forall i, j \in S$ ，存在与 i 无关的极限

$$\lim_{t \to \infty} p_{ij}(t) = \pi_j$$

- 证因 $p_{ij}(t)$ 关于 t 一致连续，则对 $\forall \varepsilon > 0$,，存在 $h > 0$

使对 $\tau: 0<\tau<h$ 及任意 t 有

$$\left|p_{ij}(t+\tau)-p_{ij}(t)\right|<\varepsilon/3$$

且由上定理知

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}(nh)=\pi_j(h)$$

于是存在正整数 N ，当 $n,\ m\ge N$ 时有

$$\left|p_{ij}(nh)-p_{ij}(mh)\right|<\varepsilon/3$$

对任意实数 $t,t^{'}>Nh$ ，存在正整数 $n,\ m$，使得 $nh\le t<(n+1)h$ 和 $mh\le th'<(m+1)h$，此时显然有 $n,\ m\ge N$，故

$$\left|p_{ij}(\mathrm{t})-p_{ij}(t^{'})\right|\le\left|p_{ij}(t)-p_{ij}(nh)\right|+\left|p_{ij}(nh)-p_{ij}(mh)\right|+\left|p_{ij}(mh)-p_{ij}(t^{'})\right|<\varepsilon$$

从而 $\lim_{t\to\infty} p_{ij}(t)$ 存在，

- 记 $\lim_{t\to\infty} p_{ij}(t)=\pi_j$ ，则 $\pi_j, j\in S$ 满足下面定理.

- 定理 (1)对任意$s>0$，有

$$\pi_j=\sum_{k\in S}\pi_k p_{kj}(s)$$

(2)对所有$j\in S$，或者诸$\pi_j=0$，或者诸$\pi_j>0$. 在后一种情形,$\pi_j, j\in S$ 是一概率分布，满足

$$\sum_{j\in S}\pi_j=1$$

从而$\pi_j, j\in S$ 构成关于$\{p_{ij}(t)\}$的平稳分布.

- 1.非齐次情形下的向前和向后方程
- 设 $X(t),t\geq 0$ 为非齐次马尔科夫链. 对任意 $j,k\in S$ 和 $0\leq s<t$ ， 令

$$p_{jk}(s,t)=P\left(X(t)=k\mid X(s)=j\right)$$

且设

$$\lim_{h\to 0}\frac{1-p_{jj}(\mathrm{t},\mathrm{t}+h)}{h}=q_j(t)=-q_{jj}(t)$$

和

$$\lim_{h\to 0}\frac{p_{jk}(\mathrm{t},\mathrm{t}+h)}{h}=q_{jk}(t)(j\neq k)$$

存在且连续. 由C-K方程

$$\frac{1}{h}\left(p_{ij}(s,t+h)-p_{ij}(s,t)\right)=\frac{\sum_{k\neq j}p_{ik}(s,t)p_{kj}(t,t+h)-\left(1-p_{jj}(t,t+h)\right)p_{ij}(s,t)}{h}$$

令上式两端 $h \to 0$ ，若极限求和运算的次序可以交换，则

$$\frac{\partial}{\partial t} p_{ij}(s,t) = \sum_{k \neq j} p_{ik}(s,t) q_{kj}(t) + q_{jj}(t) p_{ij}(s,t) = \sum_{k} p_{ik}(s,t) q_{kj}(t)$$

另一方面，由C-K 方程又得

$$p_{ij}(s-h,t) = \sum_{k \in S} p_{ik}(s-h,s) p_{kj}(s,t)$$

于是有

$$-\frac{\left[p_{ij}(s-h,t) - p_{ij}(s,t)\right]}{h}$$

$$= -\frac{\left\{\sum_{k \neq i} p_{ik}(s-h,s) p_{kj}(s,t) - \left(1 - p_{ii}(s-h,s) p_{ij}(s,t)\right)\right\}}{h}$$

令 $h \to 0$，并设极限和求和运算可交换次序，则有

$$\frac{\partial}{\partial s} p_{ij}(s,t) = \sum_{k \neq j} q_{ik}(s) p_{kj}(s,t) + q_{ii}(s) p_{ij}(s,t) = \sum_{k} q_{ik}(s) p_{kj}(s,t)$$

写成矩阵方程的形式分别为

$$\frac{\partial}{\partial t} P(s,t) = P(s,t) Q(t)$$

$$\frac{\partial}{\partial s} P(s,t) = Q(s) P(s,t)$$

上两式分别称为柯尔莫戈洛夫向前方程和向后方程.

- 2.齐次链的向前方程和向后方程
- 注意在齐次假设下，上面的

$$p_{ij}(s,t) = P_{ij}(t-s)$$

$$q_{ij}(s) \equiv q_{ij}$$

- 故向前方程和向后方程分别化为

$$p'_{ij}(t)=\sum_k p_{ik}(t)q_{kj} \qquad (1)$$

$$p'_{ij}(t)=\sum_k q_{ik}p_{kj}(t) \qquad (2)$$

$$P'(t)=P(t)Q$$

$$P'(t)=QP(t)$$

- 定理 (1)对给定的 $i\in S$ ，向后方程(2)成立的充要条件是

$$q_i<\infty \quad \text{和} \quad q_i=\sum_{j\neq i} q_{ij} \qquad (3)$$

(2)对于向前方程(1),其成立的充要条件是(3)成立，并且还需对给定的$j\in S$ ，对 i 一致的有

$$\frac{\lim\limits_{h\to 0} p_{ij}(h)}{h}=q_{ij},(i\neq j)$$

泊松过程

- 例 电话交换站在 t 时刻前来到呼叫次数 $X(t)$(即时间 $[0,t]$ 内来到的呼叫数)是一个随机过程. 已知现在 t_m 时刻前来到的呼叫数，未来时刻 t ($t>t_m$)前来到的呼叫数只依赖于 t_m 时刻前来到的呼叫数. 因为 $[0,t]$ 内来到的呼叫数等于 $[0,t_m]$ 时间内来到的呼叫数加上 $(t_m,t]$ 时间内来到的呼叫数，而 $(t_m,t]$ 内来到的呼叫数与 t_m 以前来到的呼叫数相互独立. 因而 $X(t)$ 具有无后效性，是马尔科夫过程.

- 独立增量过程：若随机过程$\{X(t),t\in[0,+\infty)\}$满足下列两个条件：

(1)$X(0)=0$

(2)对任意整数$m(m\geq 3)$和任意m个时刻

$t_1,t_2\cdots,t_m\left(0\leq t_1<t_2<\cdots<t_m\right)$，有

$$X(t_2)-X(t_1),X(t_3)-X(t_2),\cdots,X(t_m)-X(t_{m-1})$$

是$m-1$个相互独立的随机变量，则称其为独立增量过程. 若还满足$X(t)-X(a)$的概率分布与a无关，则称为平稳独立增量过程.

- 定义1 设随机过程$\{X(t), t\in[0,+\infty)\}$ 的无限状态空间是 $S=\{0,1,2,\cdots\}$，若满足两个条件：

(1)$X(t)$是平稳独立增量过程

(2)$\forall a,t\geq 0$，每一增量$X(a+t)-X(a)$非负，且服从参数为 λt 的泊松分布，即有

$$P\{X(t+a)-X(a)=k\}=\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}, k=0,1,2,\cdots$$

其中 $\lambda>0,$ 则称$X(t)$是具有参数λ的泊松过程.

- 定义2　设随机过程$\{X(t),t\in[0,+\infty)\}$的无限状态空间是$S=\{0,1,2,\cdots\}$，若满足两个条件：

(1)$X(t)$是平稳独立增量过程

(2)$\forall a,t\ge 0$,增量$X(a+t)-X(a)$非负, 且有

$$P\{X(t+\Delta t)-X(t)=1\}=\lambda\Delta t+o(\Delta t)$$

$$P\{X(t+\Delta t)-X(t)\ge 2\}=o(\Delta t)$$

其中$\lambda>0,$　则称$X(t)$为具有参数λ的泊松过程.

- **定理1**　定义1与定义2等价.
- 引理 设$f(x)$是连续函数或单调函数，且$\forall x,y\ge 0$有$f(x)f(y)=f(x+y)$成立，则有$f(x)=a^t$，其中$a\ge 0$为某常数.

下面讨论另一种类型的随机过程——计数过程. 然后，从计数过程的角度看泊松过程.

设 $X_1,\cdots,X_n,\cdots$ 是相互独立的非负 $r\cdot v$，且每一个 $r\cdot v$ 服从参数 λ 的负指数分布，即 X_i pdf 为：

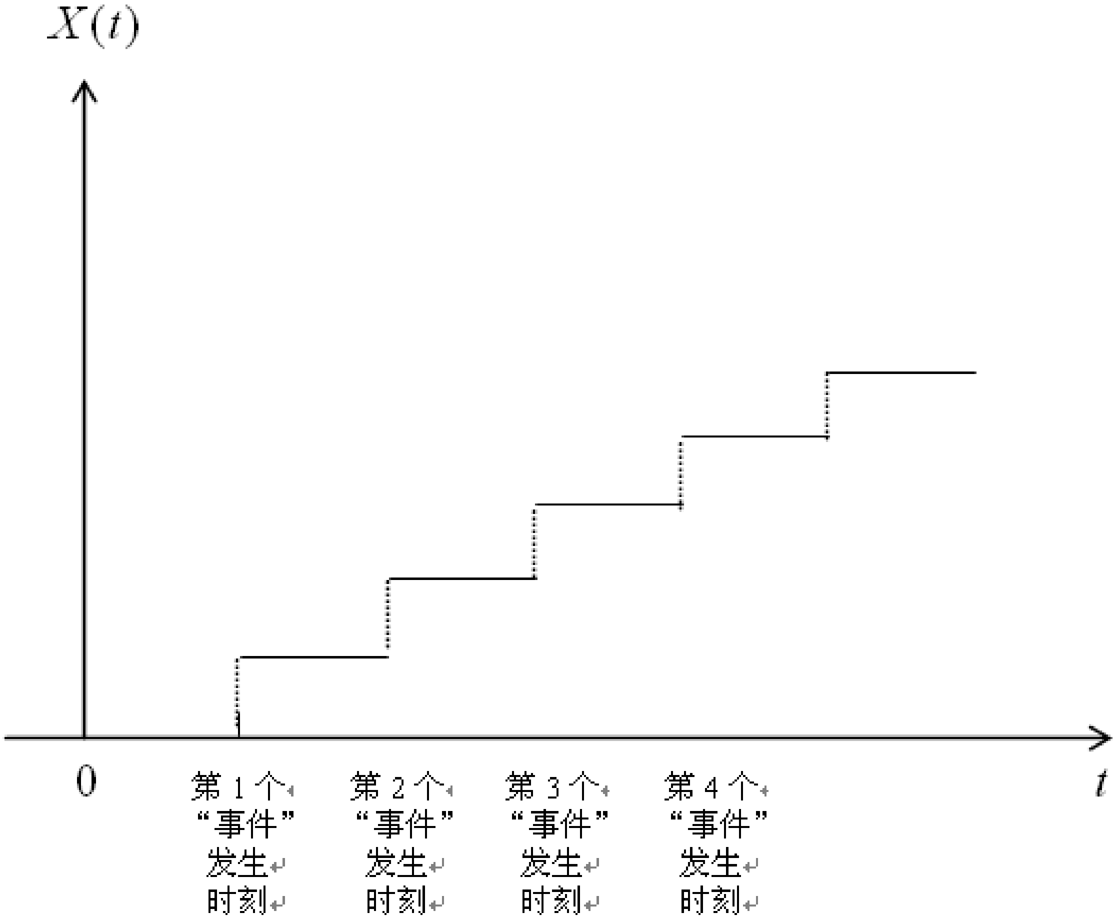
$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, x>0\\ 0, \quad x\le 0\end{cases} \qquad \text{其中 } \lambda>0$$

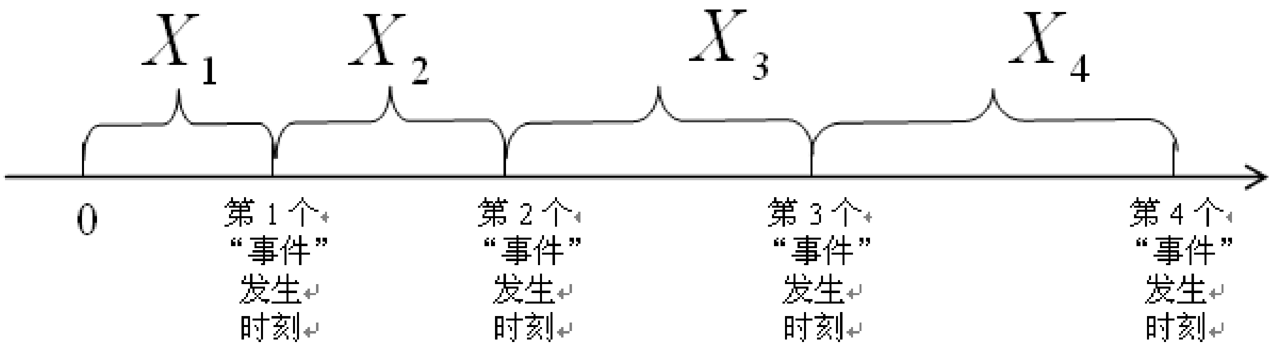
若从零时刻起算，X_1 理解为第一个"事件"发生时刻，X_2 理解为第一个"事件"发生与第二个"事件"发生的相隔时间，$\cdots$，一般 X_n 理解为第 $n-1$ 个"事件"发生与第 n 个"事件"发生之相隔时间，令 $S_n=X_1+X_2+\cdots+X_n, n=1,2,\cdots$ 它表示第 n 个"事件"发生的时刻. 在 $[0,t]$ 时间内发生的事件数记为 $X(t)$. 即 $X(t)=\begin{cases}0, & X_1>t\\ n, & s_n\le t, s_{n+1}>t\end{cases}$ 则称 $\{X(t),t\in[0,\infty)\}$ 为具有负指数间隔的计数过程.

Remark：

（1）计数过程 $X(t)$ 状态空间为 $E=\{0,1,2,\cdots\}$，它是时间连续，状态离散的随机过程. 具负指数间隔的计数过程和泊松分布有极密切关系；

（2）泊松过程的样本轨道：如图





把每一个跳跃增加 1 的时刻看作“事件”发生时刻，如此 X_1 表第一个“事件”发生时刻，$X_n(n \geq 2)$ 表示第 $n-1$ 个“事件”与第 n 个“事件”发生时刻之间的间隔. 故 $X(t)$ 正好表示在 $[0,t]$ 时间内发生的事件数，可看作计数过程.

Theorem2 泊松过程$\{X(t),t\in[0,+\infty)\}$是具有负指数间隔的计数过程.

Proof：只须证明上面的$X_1,X_2,\cdots$是独立、同分布$r\cdot v$，且$\forall X_i \sim E(\lambda)$即可.

$\because X(t)$为泊松分布，$\therefore$利用 Def1 知在$(a,a+t]$时间内无“事件”发生的概率为：

$$P\{X(a+t)-X(a)=0\}=\frac{(\lambda t)^0}{0!}e^{-\lambda t}=e^{-\lambda t},t\geq 0,a\geq 0$$

考察X_1的分布：$P\{X_1>t\}=P\{X(t)=0\}=e^{-\lambda t}$

（即在$[0,t]$不会有第 1 个“事件”发生时刻X_1）

再考虑X_2对X_1的条件概率分布：

$$P\{X_2>t\mid X_1=s\}=P\{X_2>t,X_1=s\mid X_1=s\}$$

$P\{$在$(s,s+t]$时间内无“事件”发生$\mid X_1=s\}$

（即第一个“事件”发生时刻为s，而第二个“事件”发生时刻应大于$s+t$）

$=P\{X(s+t)-X(s)=0\mid X_1=s\}$

$\because$泊松过程是独立增量过程.

$\therefore P\{X_2>t\mid X_1=s\}=P\{X(s+t)-X(s)=0\}=e^{-\lambda t}$

故$X_2\sim E(\lambda)$且与X_1独立.

同理可证$X_n\sim E(\lambda)$，且与$X_1,X_2,\cdots,X_{n-1}$独立　　□

Theorem2 之逆亦成立

Theorem3 设 $X(t)$ 是个有负指数间隔的计数过程，则它是泊松过程. **Ref:**《随机服务系统》徐光辉，科社 1980. （P_{14}）

Note: $EX(t) = \lambda t$ $\quad X(t)$ 为泊松过程

$\therefore$ 它不是平稳过程.

- 1设马尔科夫链的状态空间为 $S=\{1,2,3,4\}$，转移概率矩阵为

$$P=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

讨论$\lim\limits_{n\to\infty} p_{i1}{}^{(n)}$

❖ 2.设一马尔科夫链的转移概率矩阵为

$$P=\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

讨论此马尔科夫链的遍历性.

- 3. 设马尔科夫链的转移概率矩阵为

$$P=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

求其平稳分布.