第三章 平稳随机过程

§1 平稳过程概念

- 考虑某纺织机所纺处的某一根棉纱，随着时间的演变，由于原料的质量，机器的性能，操作工的态度，以及环境温度湿度的改变等原因，工作条件不断发生变化，所以纺出纱的横截面的直径自然会有波动. 但如果工作条件基本稳定，没有剧烈变化时，当我们同时观察n根纱 $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n$ ， 并以 $X(t, \mu_i)$ 表示棉纱 μ_i 在 t 时的横截面直径时，如果用 $G(t, x)$ 来记 t 时刻截面直径不超过定数 x 的纱的根数与 n 的比，即

$$G(t, x) = \frac{满足X(t, \mu_i) \leq x的i的个数}{n}$$

那么对任意充分大的n，就会发现：对任意的^2，

$$G\left(t,x\right)\approx G\left(t+{}^2,x\right)$$

就是说这个比值在不同的时刻基本上是不变的(或者说，稳定的). 更一般地，有

$$G\left(t_1,\cdots \mathrm{t}_n;x_1,\cdots,x_n\right)\approx G\left(t_1+{}^2,\cdots \mathrm{t}_n+{}^2;x_1,\cdots,x_n\right)$$

其中

$$G\left(s_1,\cdots s_n;x_1,\cdots x_n\right)=\frac{\text{满足}\mathrm{X}\left(s_1,\mu_i\right)\le \mathrm{x}_1,\cdots,\mathrm{X}\left(s_n,\mu_i\right)\le \mathrm{x}_n\text{的}\mathrm{i}\text{的个数}}{\mathrm{n}}$$

❖ **定义1**. 设随机过程$\{X(t), t\in T\}$的有限维分布函数族为$\{F(x_1,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n):\ t_1,t_2,\cdots,t_n\in T, n\geq 1\}$. 若对任意 n 和任意 $t_1,t_2,\cdots,t_n\in T$, 及使 $t_1+2, t_2+2,\cdots,t_n+2\in T$ 的任意 2 有

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n)=F(x_1,\cdots,x_n;t_1+2,\cdots,t_n+2)$$

则称$\{X(t), t\in T\}$是平稳(随机)过程，亦称严(强)平稳过程或狭义平稳过程.

❖ (1)连续概率分布情形，上述条件可换成：

$$f(x_1,\cdots,x_n;t_1,\cdots,t_n)=f(x_1,\cdots,x_n;t_1+2,t_2,\cdots,t_n+2)$$

称 $\{X(t), t\in T\}$是平稳随机过程.

- (2) T 是离散集时, 如取 $T=\{\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots\}$ ，$\{X(t),t\in T\}$ 是随机序列. 可记为$\{X(n),n=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$， 上述^2 应取整数，符合平稳过程定义的随机序列，称为平稳(随机)序列.
- **定义** 设随机过程$\{X(t),t\in T\}$的一、二阶矩存在，若有数学期望 $m_X(t)=m_X$ (常数), 且满足：$R_X(t,t+^2)=R_X(^2)$ 与 t 无关，则称$\{X(t),t\in T\}$为弱平稳过程，也称宽(广义)平稳随机过程.

- 注：严平稳与宽平稳过程之间的关系.
- (1)严平稳过程不一定是宽平稳的；但对二阶矩过程严平稳过程必定是宽平稳的.
- (2)宽平稳过程一般推不出它是严平稳过程.

- 定理：正态过程是严平稳过程的充要条件是它为宽平稳过程，即正态过程的严平稳性和宽平稳性等价.
- 证：“ $\Rightarrow$ ” 正态过程为二阶矩过程. 所以它是宽平稳过程（因为它是严平稳二阶矩过程）

❖ “ $\Leftarrow$”若正态过程$\{X(t),t\in T\}$是宽平稳的，则有$m_X(t)=m_X$，

$R_X(t+2,t)=R_X(2)$ ， $\therefore C_X(t+2,t)=C_X(2)$.其 *n* 维分布密度为：$\forall 2$

$$f(x_1,\cdots,x_n;t_1+2,t_2+2,\cdots,t_n+2)$$

$$=\frac{1}{(2®)^{n/2}|C|^{1/2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(x-m_X)'C^{-1}(x-m_X)\right\}$$

其中 $x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},m_X=\begin{pmatrix}m_X(t_1+2)\\m_X(t_2+2)\\\vdots\\m_X(t_n+2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}m_X\\m_X\\\vdots\\m_X\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}m_X(t_1)\\m_X(t_2)\\\vdots\\m_X(t_n)\end{pmatrix}$

因而协方差阵:

$$C=\begin{pmatrix} C_X(t_1+2,t_1+2) & C_X(t_1+2,t_2+2) & \cdots & C_X(t_1+2,t_n+2) \\ C_X(t_2+2,t_1+2) & C_X(t_2+2,t_2+2) & \cdots & C_X(t_2+2,t_n+2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_X(t_n+2,t_1+2) & C_X(t_n+2,t_2+2) & \cdots & C_X\left(t_n+2,t_n+2\right) \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} C_X(0) & C_X(t_2-t_1) & \cdots & C_X(t_n-t_1) \\ C_X(t_1-t_2) & C_X(0) & \cdots & C_X(t_n-t_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_X(t_1-t_n) & C_X(t_2-t_n) & \cdots & C_X(0) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} C_X(t_1,t_1) & C_X(t_1,t_2) & \cdots & C_X(t_1,\mathrm{t}_n) \\ C_X(t_2,t_1) & C_X(t_1,t_2) & \cdots & C_X(t_2,t_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_X(t_n,t_1) & C_X(t_n,t_2) & \cdots & C_X(t_n,t_n) \end{pmatrix}$$

$$\therefore f(x_1,\cdots,x_n;t_1+2,t_2+2,\cdots,t_n+2)=f(x_1,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n)$$

故 $\{X(t),t\in(-\infty,+\infty)\}$是严平稳过程.

- 平稳随机过程 $\{X(t), t \in T\}$ 数字特征：(一、二阶矩存在)
- 数学期望：

$$m_X(t_1) = EX(t_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 dF(x_1, t_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 dF(x_1, t_1 + \tau) = m_X(t_1 + \tau) = m_X$$

与 τ, t_1 均无关的常数.

- 相关函数：$R_X(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 dF(x_1, x_2; t_1, t_2)$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 dF(x_1, x_2; t_1 + \tau, t_2 + \tau) = R_X(t_1 + \tau, t_2 + \tau)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 dF(x_1, x_2; t_1 - t_2, 0) = R_X(t_1 - t_2)$$

常记 $R_X(t_1 + \tau, t_1) = R_X(\tau)$ 与 t_1 无关.

- 协方差与方差函数：

$$C_X(t,t+\tau)=R_X(t,t+\tau)-m_X(t)m_X(t+\tau)=R_X(\tau)-m_X^2=C_X(\tau)$$

与 t 无关.

$$D_X(t)=C_X(t,t)=C_X(0)=R_X(0)-m_X^2$$

与 t 无关的常数.

- **定义：** 设 $\{Z(t),t\in T\}$ 是复随机过程，若 $m_Z(t)=m_Z$(复常数)，且 $R_Z(t_1,t_2)$ 仅与 t_2-t_1 有关，而与 t_1 无关，即

$$R_Z(t,t+\tau)=E[Z(t)\overline{Z(t+\tau)}]=R_Z(\tau),t,t+\tau\in T$$

则称 $\{Z(t),t\in T\}$ 是复平稳过程.

❖ 协方差函数：$C_Z(t_1,t_2)=R_Z(t_1,t_2)-m_Z(t_1)\overline{m_Z(t_2)}$

$$=R_Z(t_2-t_1)-|m_Z|^2=C_Z(^2)\quad {}^2=t_2-t_1$$

❖ 方差: $D_Z(t)=C_Z(t,t)=C_Z(0)$ 为非负实数.

❖ **例1**. 设 $\{X(n),n=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$为随机序列，其中 $X(n)$ 是两两不相关的$r\cdot v$，而 $EX(n)=0$，$DX(n)=\pm^2$. 则 $\{X(n),n=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$ 是平稳随机序列，称之为离散白噪声. 若 $X(n)$ 又服从正态分布 $N(0,\pm^2)$，则称 $X(n)$ 为正态白噪声.

❖ **例2**. 设$\{X(n),n=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$是白噪声，$\{a_k\}$ 为满足 $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}a_k^2<+\infty$ 的实数列，则

$$Z(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_kX(n-k),n=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

称为白噪声$X(n)$之无限滑动和，上式级数意义：

$Z(n)=\mathop{\mathrm{l{\cdot}i{\cdot}m}}\limits_{N\to\infty}\sum\limits_{k=-N}^{N}a_kX(n-k)$，则 $Z(n)$为平稳随机过程.

❖ 例：随机简谐运动的叠加

(1) $X(n)=\P\cos(n\mu)+¦\sin(n\mu), n\in Z$,其中 $\mu\in[0,\circledR]$ 为角频率，$E\P=E¦=0$,

$E\P^2=E¦^2=\pm^2$,且 $E\P¦=0$,即$\P$,$¦$ 互不相关，称 $X(n)$ 为随机简谐运动，证明 $X(n)$ 为宽平稳过程.

(2) $X(n)=\sum_{k=0}^{m}\left(\P_k\cos(n\mu_k)+¦_k\sin(n\mu_k)\right), n\in Z$，其中$\mu_k\in[0,\circledR]$ 为角频率，

$E\P_k=E¦_k=0,\ E\P_k^2=E¦_k^2=\pm_k^2, E(\P_k\P_l)=E(¦_k¦_l)=0,(k\neq l),\forall 0\leq k,l\leq m, E(\P_k¦_l)=0$

证明 $X(n)$ 为宽平稳过程.

(3) $X(n)=\sum_{k=0}^{\infty}\P_k e^{in\mu_k}$，其中$\P_k$ 性质同上，且 $\sum_{k=0}^{\infty}\pm_k^2<\infty, n\in Z$，则 $X(n)$ 为宽平稳过程.

§2 相关函数性质

- 自相关函数的性质
- 平稳过程$\{X(t),t\in T\}$的自相关函数具有如下性质：

(1) $R_X(0)=EX^2(t)\ge 0 \quad (R_X(0)=R_X(t,t)=EX^2(t)\ge 0)$

(2) $|R_X(\tau)|\le R_X(0)$

(3) $R_X(\tau)$是偶函数，即$R_X(-\tau)=R_X(\tau)$

(4) $R_X(\tau)$具有非负定性，即对任意自然数***n***和任意***n***个实数$\tau_1,\tau_2,\cdots,\tau_n$和复数$Z_1,Z_2,\cdots,Z_n$有：

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}R_X(\tau_j-\tau_k)Z_k\overline{Z}_j\ge 0$$

- 注：协方差函数$C_X(\tau)$同样具有上述性质，第一条改为 $C_X(0)=D_X(t)\ge 0$

❖ 定义 若平稳过程$\{X(t),t\in T\}$在T上均方连续，则称$X(t)$是在T上连续的平稳过程.

❖ 定理 设$\{X(t),t\in T\}$是平稳过程，则它在T上连续$\Leftrightarrow R_X(\tau)$在$\tau=0$处连续，且此时$R_X(\tau)$在$T$上连续.

❖ 互相关函数及其性质：

❖ 定义：设两个平稳过程$X(t),Y(t),(t\in T)$，若互相关函数

$R_{XY}(t,t+\tau)=E[X(t)Y(t+\tau)]$不依赖于$t$，则称$X(t)$与$Y(t)$是平稳相关的，记为$R_{XY}(\tau)=R_{XY}(t,t+\tau)$，此时，互协方差函数:

$$\begin{aligned}C_{XY}(t,t+\tau)&=R_{XY}(t,t+\tau)-m_X(t)m_Y(t+\tau)\\&=R_{XY}(\tau)-m_Xm_Y\\&\triangleq C_{XY}(\tau)\end{aligned}$$

- 其相关函数满足:

(1) $R_{XY}(-\tau)=R_{YX}(\tau)$

(2) $\left|R_{XY}(\tau)\right|\le\sqrt{R_X(0)}\sqrt{R_Y(0)}$

- 注：互协方差函数 $C_{XY}(\tau)$ 亦有上述两条性质.

§3 各态历经性

- 平稳过程期望和相关函数通过试验近似确定的主要方法是进行多次试验得到多个样本函数，用在某个固定时刻的试验平均值去近似数学期望.
- 但是，在工程技术中常常很难测量到很多个样本函数.
- 实际中，如果已知一个较长时间的样本记录，是否可由此获得平稳过程的数字特征的充分依据，即按时间取平均来代替统计平均呢？

- 设独立同分布随机变量序列 $\{X_n, n=1,2,\cdots\}$ 满足 $EX_n = m$，$DX_n = \pm^2 (n=1,2,\cdots)$，则

$$\lim_{N\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} X_k - m\right| < \pounds\right\} = 1$$

- 若将随机序列 $\{X_n, n=1,2,\cdots\}$ 看作是具有离散参数的随机过程，则 $\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} X_k$ 可视为随机过程的样本函数按不同时刻取平均．而 $m = EX_n$ 是随机过程的均值，即任意时刻的过程取值的统计平均．
- 大数定律表明，随时间 n 的无限增长，随机过程的样本函数按时间平均以越来越大的概率近似过程的统计平均，即只要观测时间足够长，随机过程的每个样本函数都能够“遍历”各种可能状态．

- **定义：** 平稳过程 $X(t)$ 在区间$(-\infty,+\infty)$ 上的时间平均：设 $\{X(t),-\infty<t<+\infty\}$是平稳过程，若下面均方极限存在，记为$<X(t)>=\underset{T\to\infty}{\mathrm{l\cdot i\cdot m}}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X(t)dt$,称平稳过程 $X(t)$ 在区间$(-\infty,\infty)$ 上的时间平均.

- **定义：** 平稳过程 $X(t)$在区间$(-\infty,+\infty)$上的时间相关函数：若下面形式均方极限存在，且可记为

$$<X(t)X(t+{}^{2})>=\underset{T\to\infty}{\mathrm{l\cdot i\cdot m}}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X(t)X(t+{}^{2})dt$$

则称平稳过程$X(t)$ 在区间 $(-\infty,\infty)$ 上的时间相关函数.

- **定义：** 若 $P\{<X(t)>=m_X\}=1$ 成立，则称平稳过程 $X(t)$ 具有期望的各态历经性，即遍历性.

若对固定的 ^{2} 有 $P\{<X(t)X(t+^2)>=R_X(^2)\}=1$ 成立，则称平稳过程 $X(t)$ 具有相关函数的各态历经性，即遍历性.

- **定义：** 如果平稳过程 $X(t)$ 的均值和相关函数都具有各态历经性，则称该平稳过程具有各态历经性或遍历性.

- 注：随机过程的时间平均一般是个随机变量.

若 $X(t)$ 是各态历经过程，则 $<X(t)>$ 和 $<X(t)X(t+^2)>$ 不在依赖于样本函数，而是以概率 1 分别等于 m_X ，$R_X(^2)$.于是随机过程的统计特性可用任一个样本函数的时间平均代替。

❖ 例：具有随机初相位正弦波 $X(t)=a\cos(\mu_0 t+\Phi),-\infty<t<+\infty$ ，其中 a,μ_0 是正常数，而 $\Phi\sim U[0,2$®$]$，试讨论 $X(t)$ 的各态历经性.

- 一个平稳过程需加什么条件才能具有各态历经性？
- 定理1（数学期望各态历经定理）设 $\{X(t), -\infty < t < +\infty\}$ 是平稳过程，则

$$< X(t) >= \underset{T\to\infty}{\mathrm{l \cdot i \cdot m}} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} X(t)dt = m_X, \quad \mathrm{a \cdot s}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{0}^{2T} (1-\frac{2}{2T})(R_X(2)-m_X^2)d^2 = 0$$

- 证明：因 $<X(t)>$ 是随机变量，先求其均值和方差. 得

$$E < X(t) >= E[\underset{T\to\infty}{\mathrm{l \cdot i \cdot m}} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} X(t)dt] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} E[\int_{-T}^{T} X(t)dt] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} EX(t)dt = m_X$$

由方差的性质，若能证明 $D<X(t)>=0$，则 $<X(t)>$ 以概率1等于 $E<X(t)>$. 即要证明 $<X(t)>$ 的均值具有各态历经性等价于证 $D<X(t)>=0$.

$$D<X(t)>=E\left\{<X(t)>^2\right\}-(E<X(t)>)^2 = E\left\{[\underset{T\to\infty}{\mathrm{l\cdot i\cdot m}}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X(t)dt]^2\right\}-m_X^2$$

$$=\lim_{T\to\infty}E[\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X(t)dt]^2-m_X^2$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{4T^2}E[\int_{-T}^{T}X(t_1)dt_1\int_{-T}^{T}X(t_2)dt_2]-m_X^2$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{4T^2}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}R_X(t_2-t_1)dt_1dt_2-m_X^2$$

作积分变换： $\begin{cases}2_1=t_1+t_2\\ 2_2=t_2-t_1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2_1+2_2=2t_2\\ 2_1-2_2=2t_1\end{cases}$

$$\begin{cases}t_1=\dfrac{1}{2}(2_1-2_2)\\ t_2=\dfrac{1}{2}(2_1+2_2)\end{cases}\quad\begin{pmatrix}-2T\le 2_1+2_2\le 2T\\ -2T\le 2_1-2_2\le 2T\end{pmatrix}$$

雅可比行列式： $\dfrac{\partial(t_1,t_2)}{\partial(2_1,2_2)}=\dfrac{1}{\dfrac{\partial(2_1,2_2)}{\partial(t_1,t_2)}}=\dfrac{1}{\begin{vmatrix}\dfrac{\partial 2_1}{\partial t_1} & \dfrac{\partial 2_1}{\partial t_2}\\ \dfrac{\partial 2_2}{\partial t_1} & \dfrac{\partial 2_2}{\partial t_2}\end{vmatrix}}=\dfrac{1}{\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{vmatrix}}=1/2$

❖ ∵ $R_X(\tau)$ 关于 τ 为偶函数且积分区间对称, 则

$$\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T} R_X(t_2-t_1)dt_1dt_2 = \iint_H R_X(\tau_2)\frac{1}{2}d\tau_1 d\tau_2$$

$$=4\iint_H R_X(\tau_2)\frac{1}{2}d\tau_1 d\tau_2 = 2\int_0^{2T}d\tau_2\int_0^{2T-\tau_2}R_X(\tau_2)d\tau_1$$

$$=2\int_0^{2T}(2T-\tau_2)R_X(\tau_2)d\tau_2 = 2\int_0^{2T}(2T-\tau)R_X(\tau)d\tau$$

将上式代入 $D<X(t)>$ 得：

$$D<X(t)> = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^{2T}(1-\frac{\tau}{2T})R_X(\tau)d\tau - m_X^2$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^{2T}(1-\frac{\tau}{2T})(R_X(\tau)-m_X)d\tau \quad (易知\int_0^{2T}(1-\frac{\tau}{2T})d\tau = T)$$

上式等于零即为 $<X(t)>$ 以概率1 等于 m_X 的充要条件.

- 下面介绍有遍历性的一个充分条件：
- **推论**：若平稳过程 $X(t)$ 满足条件 $\lim\limits_{\tau\to\infty} R_X(\tau)=m_X^2$ ， 即 $\lim\limits_{\tau\to\infty} C_X(\tau)=0$ ， 则 $<X(t)>=m_X, \quad a\cdot s$.
- 注：推论给出了平稳过程具有期望各态历经性的充分条件. 表明当时间间隔无限变大时两个状态线性联系无限变弱的平稳过程具有期望各态历经性.
- 例：设随机过程 $X(t)=A\cos\omega_0 t+B\sin\omega_0 t$ ， 已经算得 $m_X=0$ ， $R_X(\tau)=\sigma^2\cos\omega_0\tau$ ， 试讨论这个平稳过程具有期望各态历经性. （已知 A 、B 独立 $r\cdot v$ ， 且有 $EA=EB=0$ ，$DA=DB=\sigma^2>0$ ，ω_0 为常数）
- 例：讨论随机过程 $X(t)=Y$ 的各态历经性，其中 Y 是方差不为零的随机变量.

- 下面讨论相关函数各态历经性.当τ 固定，相关函数 $R_X(\tau)=E[X(t)X(t+\tau)]$可看成是过程 $\{X(t)X(t+\tau),-\infty<t<+\infty\}$ 的数学期望. 令 $Y_\tau(t)=X(t)X(t+\tau)$ ，若要对$Y_\tau(t)$ 用期望之各态历经定理，首先要求它是平稳过程.
- 定理2（相关函数各态历经定理）设对$\forall\tau,\{X(t)X(t+\tau),-\infty<t<+\infty\}$是平稳过程，则

$$<X(t)X(t+\tau)>=R_X(\tau),\quad \mathrm{a\cdot s}\quad \Leftrightarrow \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^{2T}(1-\frac{\tau_1}{2T})[B_\tau(\tau_1)-R_X^2(\tau)]d\tau_1=0$$

其中 $B_\tau(\tau_1)=E[X(t)X(t+\tau)X(t+\tau_1)X(t+\tau+\tau_1)]$

- 定理3（期望各态历经定理）设$\{X(t),0\le t<\infty\}$是平稳过程，则

$$\underset{T\to\infty}{\mathrm{l\cdot i\cdot m}}\frac{1}{T}\int_0^T X(t)dt=m_X,\quad a\cdot s\Leftrightarrow \underset{T\to\infty}{\mathrm{l\cdot i\cdot m}}\frac{1}{T}\int_0^T(1-\frac{\tau}{T})[R_X(\tau)-m_X^2]d\tau=0$$

- 定理4（相关函数各态历经定理）设 $\{X(t)X(t+\tau),0\le t<+\infty\}$ 是平稳过程，这里 $\tau\ge 0$ ，则

$$\underset{T\to\infty}{\mathrm{l\cdot i\cdot m}}\frac{1}{T}\int_0^T X(t)X(t+\tau)dt=R_X(\tau),\quad a\cdot s$$

$$\Leftrightarrow \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T(1-\frac{\tau_1}{T})[B_\tau(\tau_1)-R_X^2(\tau)]d\tau_1=0$$

其中 $B_\tau(\tau_1)=E[X(t)X(t+\tau)X(t+\tau_1)X(t+\tau+\tau_1)].$

- 定理5（期望各态历经定理）设 $\{X(n),n=0,1,2,\cdots\}$ 是平稳序列，则：

$$\underset{T\to\infty}{\mathrm{l\cdot i\cdot m}}\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n}X(j)=m_X,\quad a\cdot s$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n}(1-\frac{j}{n+1})[R(j)-m_X^2]=0$$

❖ 定理6(相关函数各态历经定理)设$\{X(n)X(n+m), n=0,1,\cdots\}$是平稳序列，这里 m 是固定的非负整数，则

$$\underset{n\to\infty}{\mathrm{l\cdot i\cdot m}}\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n}X(j)X(j+m)=R_X(m),\quad a\cdot s$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n}(1-\frac{j}{n+1})[B_m(j)-R_X^2(m)]=0$$

其中 $B_m(j)=E[X(n)X(n+m)X(n+j)X(n+m+j)]$

注：遍历性定理的重要价值在于它从理论上说明了平稳过程只要满足定理的条件，便可以从一次试验所得过程 $X(t)$ 的样本函数来确定该过程的均值和自相关函数.

- 各态历经定理的应用(用一个样本函数近似计算数学期望和相关函数)
- 定义:设 $r\cdot v$ 序列 $\{X_n, n=1,2,\cdots\}$ 和随机变量 X，对 $\forall\varepsilon>0$ 有 $\lim\limits_{n\to\infty} P\{|X_n - X| \geq \varepsilon\} = 0$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty} P\{|X_n - X| < \varepsilon\} = 1$，则称 X_n 依概率收敛到 X 即 $X_n \xrightarrow{P} X$.
- 定理：若 $\mathop{\mathrm{l{\cdot}i{\cdot}m}}\limits_{n\to\infty} X_n = X$，则 $X_n \xrightarrow{P} X$.即均方收敛比依概率收敛强！
- 设平稳过程 $\{X(t), 0\leq t<\infty\}$，它的一个样本函数为 $x(t), 0\leq t<\infty$. 若数学期望具有各态历经性，即 $\mathop{\mathrm{l{\cdot}i{\cdot}m}}\limits_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T X(t)dt = m_X$，此式中积分可采用把 $[0,T]$ 区间等分方式进行计算，即

$$\int_0^T X(t)dt = \mathop{\text{l·i·m}}_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{N} X(t_k)\Delta t = \mathop{\text{l·i·m}}_{N\to\infty}\frac{T}{N}\sum_{k=1}^{N} X(k\cdot\frac{T}{N})$$

其中 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = T$， 而 $\Delta t = t_k - t_{k-1} = \frac{T}{N}, t_k = k\cdot\Delta t$.于是

$$\mathop{\text{l·i·m}}_{T\to\infty}\frac{1}{T}\mathop{\text{l·i·m}}_{N\to\infty}\frac{T}{N}\sum_{k=1}^{N} X(k\cdot\frac{T}{N}) = m_X$$

即

$$\mathop{\text{l·i·m}}_{T\to\infty}\mathop{\text{l·i·m}}_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} X(k\cdot\frac{T}{N}) = m_X$$

则对 $\forall £ > 0$ ， 有

$$\lim_{T\to\infty}\lim_{N\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} X(k\frac{T}{N}) - m_X\right| < £\right\} = 1$$

当 T 和 N 相当大， 且 $\frac{T}{N}$ 很小时， $P\left\{\left|\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} X(k\cdot\frac{T}{N}) - m_X\right| < £\right\} \approx 1$

据实际推断原理， 一次抽样得到样本函数 $x(t)$ ， 事件

$$\left\{\left|\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x(k\cdot\frac{T}{N}) - m_X\right| < £\right\}$$

可以认为一定发生， 于是 $m_X \approx \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{n} x(k\cdot\frac{T}{N})$

即近似计算 实际上只需用到样本函数 $x(t)$ 在 $k\cdot\frac{T}{N}$ 点上 $(k\in\{1,2,\cdots,N\})$ 数值，这些点称之为采样点. 实际测量 $x(k\cdot\frac{T}{N})$ ，用上式计算 m_X 近似值，T 、N 很大，且 $\frac{T}{N}$ 很小.

- 相关函数 $R_X(^2)$ 可类似计算：令 $^2=r\cdot\frac{T}{N}$ ，其中 r 固定，$r=0,1,2,\cdots,m$ 类似地，

$$\lim_{T\to\infty}\lim_{N\to\infty}P\left\{\left|\frac{1}{N-r}\sum_{k=1}^{N-r}X(k\cdot\frac{T}{N})X(k\cdot\frac{T}{N}+r\cdot\frac{T}{N})-R_X(r\cdot\frac{T}{N})\right|\geq £\right\}=0$$

因而

$$R_X(r\cdot\frac{T}{N})\approx\frac{1}{N-r}\sum_{k=1}^{N-r}x(k\cdot\frac{T}{N})x((k+r)\frac{T}{N})$$

注：实际中定理3、定理4充要条件很难检验，$\because R_X(^2),B_2(^2{}_1)$ 未知；故实际工程中均先用后，由实践作检验的方法.

§4 平稳过程的（功率）谱密度

- 相关函数谱分解：
- 维纳-辛钦定理：设连续平稳过程$\{X(t),-\infty<t<+\infty\}$ 相关函数是$R_X(\tau)$
  则 $R_X(\tau)$可表示为

$$R_X(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\tau\omega}d\widetilde{F}(\omega),-\infty<\tau<+\infty$$

其中$\widetilde{F}(\omega)$是有界非降函数，且$\widetilde{F}(-\infty)=0,\widetilde{F}(+\infty)=2\pi R_X(0)$

- $\widetilde{F}(\omega)$称为平稳过程 的（自）谱函数.若$\exists$非负函数$S_X(\omega)$使：

$$\widetilde{F}(\omega)=\int_{-\infty}^{\omega}S_X(\omega)d\omega,\quad -\infty<\omega<+\infty$$

则称$S_X(\omega)$ 为平稳过程$X(t)$ 的（自）谱密度.

- 若$\int_{-\infty}^{+\infty}|R_X(\tau)|d\tau<+\infty$，则

$$R_X(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\omega\tau}S_X(\omega)d\omega,-\infty<\tau<\infty$$

$$S_X(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\omega\tau}R_X(\tau)d\tau,-\infty<\omega<\infty$$

❖ 定理：设平稳序列$\{X(n), n=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$的相关函数$R_X(m)$，则

$$R_X(m)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{im\omega}d\widetilde{F}(\omega), m=0,\pm1,\cdots$$

其中$\widetilde{F}(\omega)$是$[-\pi,\pi)$上有界非降函数，且$\widetilde{F}(-\pi)=0, \widetilde{F}(\pi)=2\pi R_X(0)$

❖ $\widetilde{F}(\omega), \omega\in[-\pi,\pi)$称为平稳序列的（自）谱函数. 若$\exists$非负函数$S_X(\omega)$使$\widetilde{F}(\omega)=\int_{-\pi}^{\omega}S_X(\omega)d\omega, -\pi\le\omega<\pi$，则称$S_X(\omega), \omega\in[-\pi,\pi)$为平稳序列$X(n)$的（自）谱密度.

❖ 若$\sum_{m=-\infty}^{\infty}|R_X(m)|<\infty$，则

$$R_X(m)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{im\omega}S_X(\omega)d\omega, m=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

$$S_X(\omega)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}e^{-im\omega}R_X(m), -\pi\le\omega<\pi$$

谱密度的物理意义

- 确定性信号的功率谱密度
- 定理：若函数 $x(t)(-\infty < t, +\infty)$ 满足狄氏条件和 $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|\, dt < \infty$，则 $x(t)$ 可表为

$$x(t) = \frac{1}{2\circledR}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\mu t} F_x(\mu)\, d\mu, -\infty < t < +\infty \qquad (1)$$

其中

$$F_x(\mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-i\mu t} dt, -\infty < \mu < +\infty \qquad (2)$$

- (1)式表明信号可表示成谱分量 $\frac{1}{2\circledR} F_x(\mu)(d\mu) e^{i\mu t}$ 的无限叠加，其中 μ 称为圆频率. 复函数 $F_x(\mu)$ 称之为信号 $x(t)$ 之频谱. $\frac{1}{2\circledR}|F_x(\mu)|\, d\mu$ 为圆频率为 μ 的谱分量的振幅.

- 由(2)式知：$F_x(-\mu)=\overline{F_x(\mu)}$
- 信号 $x(t)$之总能量和谐分量的能量之间关系：

Parseval等式：若 $\int_{-\infty}^{+\infty}x^2(t)dt<\infty$ ，则

$$\int_{-\infty}^{+\infty}x^2(t)dt=\frac{1}{2\text{®}}\int_{-\infty}^{+\infty}|F_x(\mu)|^2\,d\mu$$

- 上式左端表示时间函数 $x(t)$在 $(-\infty,+\infty)$ 上的总能量，右边被积式中 $|F_x(\mu)|^2$ 为 $x(t)$ 的能量谱密度，右边表示能量谱密度在全部频域上的积分，即总能量，称为总能量的谱表达式. 说明一个函数时域内能量积分和频域内能量积分相等.
- 但通常总能量 $\int_{-\infty}^{+\infty}x^2(t)dt=\infty$. 然而平均功率有限,称为功率型时间函数. 它不满足绝对可积条件，为了利用傅氏变换，构造一个截尾函数：

$$x_T(t)=\begin{cases} x(t), & |t|\le T \\ 0, & |t|>T \end{cases}$$

它在 $(-\infty,+\infty)$ 上绝对可积，且

$$F_x(\mu,T)=\int_{-\infty}^{+\infty} x_T(t)e^{-i\mu t}dt=\int_{-T}^{T} x(t)e^{-i\mu t}dt$$

对 $x_T(t)$ 用Parseval等式得到 $x(t)$ 在 $(-T,T)$ 内总能量

$$\int_{-T}^{T} x^2(t)dt=\frac{1}{2\text{®}}\int_{-\infty}^{+\infty}|F_x(\mu,T)|^2 d\mu$$

两边除以 $2T$,令 $T\to\infty$ 得 $x(t)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内平均功率

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x^2(t)dt=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-\infty}^{+\infty}|F_x(\mu,T)|^2\frac{1}{2\text{®}}d\mu$$

$$=\frac{1}{2\text{®}}\int_{-\infty}^{+\infty}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}|F_x(\mu,T)|^2 d\mu$$

称 $\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}|F_x(\mu,T)|^2$ 为信号 $x(t)$ 在 μ 处的功率谱密度.

❖ 平稳随机信号之功率谱密度：平稳随机信号 $X(t), -\infty < t < +\infty$；$x(t)$ 可视其样本函数.

同确定性信号讨论相类似有：

$$F_X(\mu, T) = \int_{-T}^{T} X(t) e^{-i\mu t} dt$$

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} X^2(t)dt = \frac{1}{2T}\cdot\frac{1}{2\text{®}}\int_{-\infty}^{+\infty} |F_X(\mu, T)|^2 d\mu$$

上式两边取数学期望，再令 $T \to \infty$ 取极限得

$$\lim_{T\to\infty} E[\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} X^2(t)dt] = \frac{1}{2\text{®}}\int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T} E[|F_X(\mu, T)|^2] d\mu$$

等式左端是平稳随机信号 $X(t)$ 在时间 $(-\infty, +\infty)$ 中的平均功率. 这里，平均含义包括对时间的平均和对 $r \cdot v$ 的平均. 在频率域中，记

$$S_X(\mu) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T} E[|F_X(\mu, T)|^2]$$

称之为平稳随机信号 $X(t)$ 在 μ 处的功率谱密度.

- 由上式知平均功率

$$R_X(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}S_X(\omega)d\omega$$

- 注：功率谱密度是从频率角度描述平稳过程的统计规律的最主要的数字特征. 它的物理意义为过程的平均功率关于频率的分布.

- 结论：设$R_X(\tau)$是均方连续平稳过程$\{X(t),t\in T\}$的自相关函数，若$\int_{-\infty}^{+\infty}|R_X(\tau)|d\tau<\infty$存在，则谱密度就是功率谱密度，即

$$S_X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\tau\omega}R_X(\tau)d\tau$$

$$R_X(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}S_X(\omega)e^{i\omega\tau}d\omega$$

- 谱密度的性质
- 谱密度$S_X(\mu)$是实的，非负的偶函数.
- 相关函数$R_X(^2)$和功率谱密度$S_X(\mu)$之间关系亦可用实函数积分形式表示：

$$S_X(\mu)=2\int_0^{+\infty}R_X(^2)\cos\mu^2\,d^2$$

$$R_X(^2)=\frac{1}{®}\int_0^{\infty}S_X(\mu)\cos\mu^2\,d\mu$$

- 工程上还用单边功率谱密度，定义为：

$$G_Z(\mu)=\begin{cases}2S_X(\mu), & \mu\geq 0\\ 0, & \mu<0\end{cases}$$

- 平稳过程谱密度计算：

相关函数计算谱密度-傅里叶变换

谱密度计算相关函数-逆傅里叶变换

❖ 定义：若 $¢(x-x_0)$满足

$$¢(x-x_0)=\begin{cases}+\infty, & x=x_0\\ 0, & x\neq x_0\end{cases}$$

和
$$\int_{-\infty}^{+\infty}¢(x-x_0)dx=1$$

则称 $¢(x-x_0)$ 是在 $x=x_0$ 的¢ 函数.

❖ 关于 函数积分有如下公式：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)¢(x-x_0)dx=f(x_0)$$

❖ Fourier变换原函数，象函数，Fourier变换性质：

$$F\{R_X(²)\}=S_X(µ)$$

$$F^{-1}\{S_X(µ)\}=R_X(²)$$

其中$R_X(²)$ 和 $S_X(µ)$分别称为Fourier变换原函数和象函数.

- Fourier变换性质三条：

（1）线性性质：$F\{c_1 f_1(^{2})+c_2 f_2(^{2})\}=c_1F\{f_1(^{2})\}+c_2F\{f_2(^{2})\}$

（2）反Fourier变换线性性质：

$$F^{-1}\{c_1\text{¨}_1(\mu)+c_2\text{¨}_2(\mu)\}=c_1F^{-1}\{\text{¨}_1(\mu)\}+c_2F\{\text{¨}_2(\mu)\}$$

其中 c_1,c_2 为常数.

（3）卷积性质： $F\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)g(^{2}-u)du\right\}=F\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} f(^{2}-u)g(u)du\right\}$

$$=F\{f(^{2})\}F\{g(^{2})\}$$

- **例1.** 若平稳过程谱密度 $S_X(\mu)=¢(\mu)$ ，求相关函数.
- **例2.** 设平稳过程 $R_X(^2)=S_0¢(^2)$，其中 $S_0>0$ ，计算它的谱密度.
- 定义：设$\{X(t),-\infty<t<+\infty\}$为实值平稳过程，若它的均值为零，且谱密度在所有频率范围内为非零常数，即

$S_X(\mu)=N_0\left(-\infty<\mu<+\infty\right)$，则称 $X(t)$ 为白噪声过程.

- 由于白噪声过程有类似白光的性质，其能量谱在各种频率上均匀分布，固有“白”噪声之称. 又由于他的统计特性不随时间推移而改变，故它是平稳过程.
- 白噪声过程也可定义为均值为零，相关函数为 $S_0¢(^2)$ 的平稳过程. 在任何两个时刻，$X(t_1)$ 与 $X(t_2)$ 不相关，即白噪声随时间变化起伏极快.

- **例3.** 已知相关函数形式 $R_X(\tau)=\sigma^2\cos\omega_0\tau$ ， 求谱密度.
- **例4.** 随机电报信号相关函数是 $R_X(\tau)=I^2e^{-2\alpha|\tau|}$， 计算它的功率谱密度.
- **例5.** 已知平稳过程功率谱密度 $S_X(\omega)=\dfrac{\omega^2+4}{\omega^4+10\omega^2+9}$ ， 求它的相关函数 $R_X(\tau)$ 和平均功率.
- 总结：工程上常遇 $S_X(\omega)=S_0\times\dfrac{\omega^{2n}+a_{2n-2}\omega^{2n-2}+\cdots+a_0}{\omega^{2m}+b_{2m-2}\omega^{2m-2}+\cdots+b_0},\ -\infty<\omega<+\infty$ ， 其中 $S_0,a_{2n-2},\cdots,a_2,a_0,b_{2m-2},\cdots,b_2,b_0$ 均为实数，$S_0>0,\ n<m$ ， 且分子分母无相同零点， 分母无实零点.（有理谱密度）

- 互谱密度及其性质：
- 定义：若互相关函数满足$\int_{-\infty}^{+\infty}|R_{XY}(\tau)|d\tau<\infty$， 则$R_{XY}(\tau)$ Fourier变换

$$S_{XY}(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}R_{XY}(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau,\quad -\infty<\omega<+\infty$$

存在，称之为平稳过程 $X(t),\ Y(t)$ 之互谱密度.

- 利用Fourier变换反演公式有：

$$R_{XY}(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}S_{XY}(\omega)e^{i\omega\tau}d\omega,\quad -\infty<\tau<+\infty$$

即$R_{XY}(\tau)$ 是$S_{XY}(\omega)$ 之反Fourier变换.

- 注1： $$S_{XY}(\omega)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}E[F_X(-\omega,T)F_Y(\omega,T)]$$

其中

$$F_X(\omega,T)=\int_{-\infty}^{\infty}X_T(t)e^{-i\omega t}dt=\int_{-T}^{T}X(t)e^{-i\omega t}dt$$

$$F_Y(\omega,T)=\int_{-\infty}^{\infty}Y_T(t)e^{-i\omega t}dt=\int_{-T}^{T}Y(t)e^{-i\omega t}dt$$

❖ 注2：互谱密度一般是 μ 之复函数，不能像自谱密度一样有物理意义. 其作用在于将讨论互相关函数转换到频率域中讨论互谱密度.

❖ 互谱密度性质：

(1) $S_{XY}(-\mu)=S_{XY}^{*}(\mu),\ S_{XY}^{*}(\mu)=S_{YX}(\mu)$， 前一等式表示 $S_{XY}(\mu)$ 具有共轭对称性.

证： $$S_{XY}(-\mu)=\int_{-\infty}^{+\infty}R_{XY}({}^2)e^{i\mu{}^2}d{}^2=S_{XY}^{*}(\mu)$$

$$S_{XY}^{*}(\mu)=S_{XY}(-\mu)=\int_{-\infty}^{+\infty}R_{XY}({}^2)e^{i\mu{}^2}d{}^2=\int_{-\infty}^{+\infty}R_{XY}(-{}^2{}')e^{-i\mu{}^2{}'}d{}^2{}'$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}R_{YX}({}^2{}')e^{-i\mu{}^2}d{}^2{}'=S_{YX}(\mu),\qquad {}^2=-{}^2{}'$$

(2) $\mathrm{Re}[S_{XY}(\mu)],\ \mathrm{Re}[S_{YX}(\mu)]$是实的偶函数， 而 $\mathrm{Im}[S_{XY}(\mu)],\ \mathrm{Im}[S_{YX}(\mu)]$是实的奇函数.

(3)互谱密度与自谱密度有不等式关系

$$|S_{XY}(\omega)| \le \sqrt{S_X(\omega)}\sqrt{S_Y(\omega)}$$

- 例3. 设两个平稳过程：$X(t)=a\cos(\omega_0 t+\Phi)$

  $Y(t)=b\sin(\omega_0 t+\Phi), -\infty<t<+\infty$

  其中a,b,ω_0为常量，而$\Phi\sim U[0,2\pi]$，求$R_{XY}(\tau)$与$R_{YX}(\tau)$

- 例8. 已知平稳过程$X(t)$自相关函数，试分别求$X(t)$的功率谱密度.

  （1）$R_X(\tau)=e^{-a|\tau|}\cos\omega_0\tau$，其中 $a>0$

  （2）$R_X(\tau)=\begin{cases}1-\dfrac{|\tau|}{T}, & -T<\tau \\ 0, & \text{其它}\end{cases}$

  （3）$R_X(\tau)=4e^{-|\tau|}\cos\pi\tau+\cos 3\pi\tau$

  （4）$R_X(\tau)=\sigma^2 e^{-a|\tau|}(\cos b\tau-ab^{-1}\sin b|\tau|)$，其中$a>0$

❖ 例9. 已知下列平稳过程 功率谱密度，试分别求 的自相关函数.

(1) $$S_X(\mu)=\begin{cases}1, & |\mu|\le\mu_0\\ 0, & 其它\end{cases}$$

(2) $$S_X(\mu)\begin{cases}8\text{¢}(\mu)+20(1-\dfrac{|\mu|}{10}), & |\mu|\le 10\\ 0, & 其它\end{cases}$$

(3) $$S_X(\mu)=\begin{cases}1-\dfrac{|\mu|}{\mu_0}, -\mu_0\le\mu\le\mu_0\\ 0, \qquad 其它\end{cases}$$

(4) $S_X(\mu)=1/(1+\mu^2)^2$

(5) $S_X(\mu)=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{a_k}{\mu^2+b_k^2}$ ，其中 $a_k>0, k=1,2,\cdots,n$

❖ **例6.** 设$\{X(t), -\infty < t < +\infty\}$是平稳过程，且$EX(t)=1$，$R(^2)=1+e^{-2|^2|}$，求r.v $S=\int_0^1 X(t)dt$ 期望与方差.

❖ 常见平稳过程的相关函数 $R_X(\tau)$ 及相应的谱密度 $S_X(\omega)$

$R_X(\tau)$	$S_X(\omega)$
$R_X(\tau)=\sigma^2 e^{-a\lvert\tau\rvert}$	$S_X(\omega)=\dfrac{2\sigma^2 a}{a^2+\omega^2}$
$R_X(\tau)=\begin{cases}\sigma^2\left(1-\dfrac{\lvert\tau\rvert}{T}\right), & \lvert\tau\rvert\le T\\ 0, & \lvert\tau\rvert>T\end{cases}$	$S_X(\omega)=\dfrac{4\sigma^2\sin^2(\omega T/2)}{T\omega^2}$
$R_X(\tau)=e^{-a\lvert\tau\rvert}\cos(\omega_0\tau)$	$S_X(\omega)=\dfrac{a}{a^2+(\omega+\omega_0)^2}+\dfrac{a}{a^2+(\omega-\omega_0)^2}$
$R_X(\tau)=N\dfrac{\sin\omega_0\tau}{\pi\tau}$	$S_X(\omega)=\begin{cases}N, & \lvert\omega\rvert\le\omega_0\\ 0, & \lvert\omega\rvert>\omega_0\end{cases}$
$R_X(\tau)=1$	$S_X(\omega)=2\pi\delta(\omega)$
$R_X(\tau)=a\cos(\omega_0\tau)$	$S_X(\omega)=a\pi\left[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)\right]$

§6 线性系统中的平稳过程

- 作为平稳过程的应用之一，分析线性系统对随机输入的影响. 在自动控制，无线电技术，机械振动等方面，经常遇到的随机过程是与“系统”相联系的.
- 定义：假设某一系统的输入 $u(t)$ 与输出 $y(t)$ 之间的关系可表示为 $y(t)=L[u(t)]$

若 L 满足以下条件:

(1)对任意实数 $\sim$, 有 $L[au(t)]=aL[u(t)]$ ，即为比例性质；

(2)对于任意的输入 $u_i(t)$ 和实数 $\sim_i$ $(i=1,2,\cdots n)$ 均有

$$L\left[\sum_{i=1}^{n} a_i u_i(t)\right]=\sum_{i=1}^{n} a_i L[u_i(t)]$$

即为叠加性，则称该系统为线性系统.

- 定义：一个线性系统若满足输出 $y(t)$ 对输入 $x(t)$ 的依赖关系不随时间的推移而改变，即

$$L\left[x\left(t+{}^{2}\right)\right]=y\left(t+{}^{2}\right)$$

则称该线性系统为线性时不变系统. 其中 $t,{}^{2}$ 为任意实数.

- 定理：设 L 为线性时不变系统，若输入一谐波信号

$x(t)=e^{i\mu t}$，则输出

$$y(t)=L\left[e^{i\mu t}\right]=H(\mu)e^{i\mu t}$$

其中，$H(\mu)=L\left[e^{i\mu t}\right]|_{t=0}$

- 证:令 $y(t)=L\left[e^{i\mu t}\right]$，由系统线性时不变，则对固定的 ^{2} 和任意 t，有

$$y\left(t+{}^{2}\right)=L\left[e^{i\mu\left(t+{}^{2}\right)}\right]=e^{i\mu{}^{2}}L\left[e^{i\mu t}\right]$$

令 $t=0$，得

$$y(\tau)=e^{i\omega\tau}L\left[e^{i\omega t}\right]\Big|_{t=0}=H(\omega)e^{i\omega\tau}$$

- 定理表明，对线性时不变系统输入一谐波信号时，其输出也是同频率的谐波，只不过振幅和相位有所变化. 其中$H(\omega)$ 表示了这个变化，称它为系统的频率响应函数，一般它是复值函数.
- 系统的时域分析和频域分析

由 δ 函数的性质，有

$$x(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

则

$$y(t)=L\left[x(t)\right]=L\left[\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau\right]=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)L\left[\delta(t-\tau)\right]d\tau=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

其中 $h(t-\tau)=L\left[\delta(t-\tau)\right]$

- 若输入 $x(t)$ 为表示脉冲的 δ 函数，则上式为

$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}h(t-\tau)\delta(\tau)d\tau=h(t)$$

即 $h(t)$ 是输入为脉冲时的输出，故称它为系统的脉冲响应.

- 通过变量代换，

$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t-\tau)h(\tau)d\tau$$

即线性时不变系统的输出 $y(t)$ 等于输入 $x(t)$ 与脉冲响应 $h(t)$ 的卷积，即

$$y(t)=h(t)*x(t)$$

- 线性系统的输入是一个平稳过程 $X(t)(-\infty<t<+\infty)$ 情形，系统的输出随机过程为 $Y(t)=\int_0^{\infty}X(t-ª)h(ª)dª$， 是否为一个平稳过程？

- 定理1. 设定常线性系统的脉冲响应函数为 $h(t)\ (t\geq 0)$，若系统的输入 $X(t)(-\infty<t+\infty)$ 是一个平稳过程，其期望为 m_X， 而相关函数为 $R_X(²)$， 则系统的输出 $Y(t)$是一个平稳过程，且

$$EY(t)=m_X\int_0^{\infty}h(ª)dª$$

$$R_Y(²)=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}R_X(ª_2-ª_1-²)h(ª_1)h(ª_2)dª_1dª_2$$

- 定理2 Th1中系统条件下，若输入平稳过程 $X(t)\ (-\infty<t<+\infty)$ 谱密度为$S_X(µ)$，则输出过程$Y(t)$的谱密度为 $S_Y(µ)=|H(iµ)|^2S_X(µ)$ 其中 $H(iµ)$是系统的频率响应函数. $|H(iµ)|^2$ 为系统的功率增益因子.

❖ 证： $R_Y(\tau)=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}R_X(\lambda_2-\lambda_1-\tau)h(\lambda_1)h(\lambda_2)d\lambda_1 d\lambda_2$

$Y(t)$ 的谱密度： $S_Y(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}R_Y(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}R_X(\lambda_2-\lambda_1-\tau)h(\lambda_1)h(\lambda_2)d\lambda_1 d\lambda_2\right]e^{-i\omega\tau}d\tau$$

$$=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}R_X(\lambda_2-\lambda_1-\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau\right]h(\lambda_1)h(\lambda_2)d\lambda_1 d\lambda_2$$

其中 $\int_{-\infty}^{+\infty}R_X(\lambda_2-\lambda_1-\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau$

$$\overset{\lambda_2-\lambda_1-\tau=-\tau_1}{=}\int_{-\infty}^{+\infty}R_X(-\tau_1)e^{i\omega(\tau_1+\lambda_2-\lambda_1)}d\tau_1$$

$$=e^{-i\omega(\lambda_2-\lambda_1)}\int_{-\infty}^{+\infty}R_X(-\tau_1)e^{-i\omega\tau_1}d\tau_1=e^{-i\omega(\lambda_2-\lambda)}\int_{-\infty}^{+\infty}R_X(\tau_1)e^{-i\omega\tau_1}d\tau_1$$

$$=S_X(\omega)e^{-i\omega(\lambda_2-\lambda_1)}$$

代入 $S_Y(\omega)$ 中得： $S_Y(\omega)=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\left[S_X(\omega)e^{-i\omega(\lambda_2-\lambda_1)}\right]h(\lambda_1)h(\lambda_2)d\lambda_1 d\lambda_2$

$$=S_X(\omega)\int_0^{\infty}h(\lambda_2)e^{-i\omega\lambda_2}d\lambda_2\int_0^{\infty}h(\lambda_1)e^{i\omega\lambda_1}d\lambda_1$$

$$=S_X(\omega)H(i\omega)H(-i\omega)=S_X(\omega)\left|H(i\omega)\right|^2 \quad \square$$

从而 $Y(t)$自相关函数：

$$R_Y(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}S_Y(\omega)e^{j\omega\tau}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|H(i\omega)\right|^2 S_X(\omega)e^{i\omega\tau}d\omega$$

而输出的平均功率：$R_Y(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|H(i\omega)\right|^2 S_X(\omega)d\omega$

- 输入、输出的互相关函数，互谱密度：（平稳过程是否平稳相关？）
- 定理3 Th1系统条件下，若输入 $X(t)$ $(-\infty<t<+\infty)$ 是一个平稳过程，则输入过程 $X(t)$和输出过程 $Y(t)$ 是平稳相关的，且互相关函数和互谱密度为：

$$R_{XY}(\tau)=\int_0^{\infty}R_X(\tau-\lambda)h(\lambda)d\lambda$$

$$S_{XY}(\omega)=S_X(\omega)H(i\omega)$$