随机过程讲义

概率统计与运筹控制研究所

李朝艳

随机过程简史

- 公理化概率论首先使随机过程的研究获得了新的起点，它是作为随时间变化的偶然量的数学模型，是现代概率论研究主要论题.

- 人类历史上第一个从理论上提出并加以研究的过程模型是马尔科夫链，马尔可夫链最早由Markov（1907年）提出,这是原始形式马尔可夫过程.

Markov过程是一种无后效性随机过程，即在已知当前状态情况下，过程未来状态与其过去状态无关.

- 1931年Kolmogrov在《概率论的解析方法》中用分析的方法奠定了Markov过程之理论基础；

- Kolmogrov之后，在此研究中作出重大贡献而影响了整个概率论的重要代表人物有P. Levy，（1886-1971）、辛钦（Khinchine 1894-1959）、J. L. Doob和伊藤清（Itó）等.

- Levy, 法国数学家，现代概率论的开拓者之一。他从1938年开始创立研究随机过程新方法，即着眼于轨道性质的概率方法，1948年出版《随机过程与布朗运动》，提出了独立增量过程的一般理论，并以其为基础极大地推进了对作为一类特殊Markov过程的Brown Motion之研究.

- 自然界中许多随机现象表现出某种平稳性，统计特性不随时间的推移而变化的随机过程叫做平稳过程，平稳过程之相关理论是1934年由辛钦提出的.

- 另一类有重要意义的随机过程是“鞅”，布朗运动也是其特例. Levy在1935年已有鞅之思想，1939年J. Ville引进“鞅”Martingale这个名称，但鞅论之奠基人是美国概率论学派的代表人物Doob，他从1950年开始对鞅概念进行了系统研究而使鞅论成为一门独立的分支，它使随机过程的研究进一步抽象，不仅丰富了概率论内容，而且为其它数学分支如调和分析、复函、位势理论等提供了有力工具.

- 从1942年开始，日本数学家伊藤清（Itó）引进了随机积分与随机微分方程，不仅开辟了随机过程研究的新道路，而且为一门意义深远的数学新分支——随机分析的创立与发展奠定了基础.伊藤公式是随机分析这个数学分支的基本定理. 伊藤的成果在20世纪80年代后在金融领域得到广泛应用，他因此被称为“华尔街最有名的日本人”.

- 1930年左右，Wiener对概率论布朗运动研究使人们常常将此类运动称为Wiener过程；另外，他在时间序列的预测与滤波之理论建立亦做出贡献.

- 20世纪的中国概率论学者：许宝禄、江泽培(Stationary Process)、钟开莱、王梓坤、严加安等亦有重要贡献。

应用

- 无线电,通信和控制：随机序列的预测，滤波与控制，信号处理（非线性和非平稳信号）
- 机电,机械:电力负荷预测与控制;噪声过程等.
- 计算机专业:随机数学相关算法,软件可靠性评估等
- 金融,经济和管理等专业:数理金融（资产定价、投资组合）、排队论、时间序列分析、动态组合优化等
- 社会学：动态指标和数据处理等

第一章 概率论的补充知识

- § 1 概率空间
- 定义 设Ω是一个集合，F 是由 Ω 的某些子集组成的集合族. 如果

1）$\Omega \in F$

2）若$A \in F$ ，则 $A^c \triangleq \Omega \setminus A \in F$

3）若 $A_n \in F,\ n=1,2,\cdots$ ，则$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in F$

则称 F 为Borel域或$\sigma-$代数. (Ω, F)称为可测空间. F 中的集合称为随机事件，简称事件.

- 由定义知

  (1) $\phi \in F$

  (2) 若 $A, B \in F$ ，则 $A \setminus B \in F$

  (3) 若 $A_i \in F, \ i = 1, 2, \cdots$ ，则 $\bigcup_{i=1}^{n} A_i, \ \bigcap_{i=1}^{n} A_i, \ \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in F$

- 性质 Ω 的一切子集构成的集类是一个 $\sigma-$ 代数.

- 例: 掷一枚硬币，出现“正面”或“反面”都是基本事件。

❖ 定义(概率的公理化定义) 设 (Ω, F) 是可测空间，$P(\cdot)$ 是定义在 F 上的实值函数. 如果

1）$\forall A \in F,\ P(A) \geq 0,\ P(\Omega) = 1$

2）$\forall A_i \in F,\ A_i \cap A_j = \phi,\ i \neq j,\ j = 1, 2, \cdots$ ， 则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

则称 P 是(Ω, F) 上的概率，(Ω, F, P)称为概率空间，$P(A)$ 为 A 的概率.

- 定义 设 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 是概率空间，$\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$，如果对任意 $A_1, A_2, \cdots, A_n \in \mathcal{G}$，$n = 1, 2, \cdots$，有

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \prod_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

则称 $\mathcal{G}$ 是独立事件族.

- §2 随机变量和概率分布
- 定义 设$(\Omega,\mathcal{F},P)$是概率空间. $X=X(\omega)$ 是定义在Ω上的实函数，如果对于任意实数 x ，有

$$\{\omega: X(\omega)\le x\}\in\mathcal{F}$$

则称X是概率空间$(\Omega,\mathcal{F},P)$上的随机变量. 而称

$$F(x)=P\{\omega: X(\omega)\le x\},\ -\infty<x<\infty$$

为 $X=X(\omega)$的分布函数.

- **分布函数 具有下列性质.**

1）$F(x)$是单调不减函数.

2）$F(x)$ 是右连续函数.

3）$\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0,\ \lim\limits_{x\to\infty}F(x)=1$

- n维随机变量及其分布
- 定义 设 (Ω, F, P)是概率空间，$X=X(\omega)=[X_1(\omega)\cdots X_n(\omega)]$是定义在 Ω 上在$n$ 维空间R^n 中取值的向量函数. 如果对于任意 $x=(x_1\cdots x_n)\in R^n$ ， 有

$$\{\omega: X_1(\omega)\le x_1,\cdots, X_n(\omega)\le x_n\}\in F$$

则称 $X=X(\omega)=(X_1(\omega)\cdots X_n(\omega))$ 为n 维随机变量或n 维随机向量，而称

$$F(x)=F(x_1,\cdots,x_n)=P\{\omega: X_1(\omega)\le x_1,\cdots, X_n(\omega)\le x_n\}$$

$$x=(x_1\cdots x_n)\in R^n$$

为 X的联合分布函数.

- 联合分布函数 $F(x)=F(x_1,\cdots,x_n)$ 具有下列性质.

1）对于每个变元 $x_i(i=1,\cdots,n)$, $F(x)=F(x_1,\cdots,x_n)$ 是单调不减函数,

2）对于每个变元 $x_i(i=1,\cdots,n)$, $F(x)=F(x_1,\cdots,x_n)$ 是右连续的.

3）对于 R^n 中任意区间 $(a,b]=(a_1,b_1;\cdots;a_n,b_n]$

$$F(b_1,\cdots,b_n)-\sum_{i=1}^{n}F(b_1,\cdots,b_{i-1},a_i,b_{i+1},\cdots,b_n)$$

$$+\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{n}F(b_1,\cdots,b_{i-1},a_i,b_{i+1},\cdots,b_{j-1},a_j,b_j,\cdots,b_n)\ +(-1)^nF(a_1,\cdots,a_n)\ge 0$$

4）$\lim\limits_{x_i\to-\infty}F(x_1,\cdots,x_n)=0,\ i=1,2,\cdots,n$

$$\lim_{x_1,\cdots,x_n\to\infty}F(x_1,\cdots,x_n)=1$$

❖ 定义(独立性) 设 $X=X(\omega)=\{X_{t_i}(\omega),t_i\in T\}$ 是一族随机变量，如果对于任意$n\geq 2$和 $t_1,\cdots,t_n\in T$, $x_1,\cdots,x_n\in R$ ，有

$$P\{\omega:X_{t_1}(\omega)\leq x_1,\cdots x_{t_n}(\omega)\leq x_n\}=\prod_{i=1}^{n}P\{\omega:X_{t_i}(\omega)\leq x_i\}$$

则称 $\{X_{t_i}(\omega),\ t_i\in T\}$ 是独立的.

❖ 若$X=\{X_{t_i}(\omega),t_i\in T\}$是一族离散型随机变量，上式等价于

$$P\{\omega:X_{t_1}=x_1,\cdots,x_{t_n}=x_n\}=\prod_{i=1}^{n}P\{\omega:X_{t_i}=x_i\}$$

式中，x_i 是 X_{t_i} 的任意可能值.

❖ 若$X=\{X_{t_i}(\omega),t_i\in T\}$是一族连续型随机变量，上式等价于

$$f_{t_1\cdots t_n}(x_1,\cdots,x_n)=\prod_{i=1}^{n}f_{t_i}(x_i)$$

其中 $f_{t_1\cdots t_n},f_{t_1},\cdots,f_{t_n}$ 分别是 $(X_{t_1},\cdots X_{t_n})$, $X_{t_1},\cdots,X_{t_n}$ 的分布密度.

- 一般公式：$(\xi_1,\cdots,\xi_n)\, p\cdot d\cdot f\;\; p(x_1,\cdots,x_n)$

$$\eta_1 = f_1(\xi_1,\cdots,\xi_n),\cdots,\eta_n = f_n(\xi_1,\cdots,\xi_n)$$

$(\xi_1,\cdots,\xi_n)$ 与$(\eta_1,\cdots,\eta_n)$有1–1对应关系时，若对$y_i = f_i(x_1,\cdots,x_n)$

∃ 唯一反函数$x_i(y_1,\cdots,y_n) = x_i$，且$(\eta_1,\cdots,\eta_n)\, p\cdot d\cdot f$ 为$q(y_1,\cdots,y_n)$

则

$$q(y_1,\cdots,y_n) = p(x_1,\cdots,x_n)\,|J|$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial y_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x_1}{\partial y_n} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial y_n} \end{vmatrix}$$

- 例:若ξ,η 独立同分布$r\cdot v$，$\xi\sim N(0,1)$，作极坐标$\rho=\sqrt{\xi^2+\eta^2}$ 及 $\varphi = arctg\dfrac{\eta}{\xi}$ 取值变换于$[0,2\pi]$，则 ρ 与 φ 亦独立

- § 4 特征函数、母函数和拉氏变换
- 斯蒂尔吉斯积分
- 定义 设 $f(x), g(x)$ 是定义在区间$[a,b]$上的两个有界函数，把区间$[a,b]$分成 n 个子区间，分点为$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ ，在每一个子区间 $[x_{k-1}, x_k]$上任意取一个点 ξ_k ,作和式

$$S = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\left[g(x_k) - g(x_{k-1})\right]$$

令 $\Delta = \max\limits_{1\le k\le n}(x_k - x_{k-1})$. 如果极限

$$\lim_{\Delta\to 0} S = \lim_{\Delta\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\left[g(x_k) - g(x_{k-1})\right]$$

存在，且与子区间的分法和ξ_k 的取法无关，则称此极限为函数 $f(x)$ 对函数 $g(x)$ 在区间$[a,b]$上的斯蒂尔吉斯积分，简称 S 积分，记为$\int_a^b f(x)\mathrm{d}g(x)$.

- 若 $g(x)$ 是在 $(-\infty,+\infty)$ 上的阶梯函数，它的跳跃点为 $x_1,x_2\cdots$ (有限多个或可列无穷多个)，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}g(x)=\sum_k f(x_k)\left[g(x_k+0)-g(x_k-0)\right]$$

- 若 $g(x)$ 是在 $(-\infty,+\infty)$ 上的可微函数，它的导函数为 $g'(x)$，则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}g(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g'(x)\mathrm{d}x$$

- 定义：设函数 $g(x)$ 定义在无限区间 $(-\infty,+\infty)$ 上，若积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}\mathrm{d}g(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\cos tx\mathrm{d}g(x)+i\int_{-\infty}^{+\infty}\sin tx\mathrm{d}g(x)$$

存在，则称此积分为对 $g(x)$ 的傅里叶-斯蒂尔吉斯积分，简称F-S积分.

- 特征函数
- 定义 设随机变量X的分布函数为$F(x)$，则称

$$\varphi(t) \triangleq E(e^{itX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF(x), \quad -\infty < t < \infty$$

为X的特征函数.

- 当X是离散型随机变量，分布列

$$p_k = p(X = x_k),\ k = 0, 1, 2, \cdots$$

则
$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{itx_k} p_k$$

- 当X是连续型随机变量，分布密度为$f(x)$，则

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x) dx$$

❖ 特征函数的性质

1） $\varphi(0)=1;\ |\varphi(t)|\le 1;\ \varphi(-t)=\overline{\varphi(t)}$

2） $\varphi(t)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上一致连续.

3）若随机变量 X 的 n 阶矩 EX^n 存在，那么 X 的特征函数 $\varphi(t)$ 可微分 n 次，且当 $k\le n$ 时，有 $\varphi^{(k)}(0)=i^k EX^k$

4） $\varphi(t)$ 是非负定的. 即对任意正整数 n 及任意实数 $t_1,\cdots,t_n$ 及复数 $z_1,\cdots,z_n$ ，有

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\varphi(t_k-t_l)z_k\bar{z}_l\ge 0$$

5）设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是独立随机变量，则 $X=X_1+\cdots X_n$ 的特征函数

$$\varphi(t)=\varphi_1(t)\cdots\varphi_n(t)$$

式中，$\varphi_k(t)$ 是 X_k 的特征函数，$k=1,2,\cdots,n$.

6）随机变量的分布函数由其特征函数唯一确定.

- 例 求正态分布 $N(a,\sigma^2)$ 特征函数，先讨论 $N(0,1)$ 场合.

- 例 分布函数再生性问题： 若 $X \sim B(m,p),\ Y \sim B(n,p)$ 且已知 X,Y 独立，求 $Z=X+Y$ 的概率分布.

- 例 利用特征函数求正态分布 $N(a,\sigma^2)$ 的数学期望和方差.

- 对非负定函数加些条件可得到特征函数.
- 定理 设 $\varphi(t)$ 满足 $\varphi(0)=1$, 且在 $-\infty<t<+\infty$ 上是连续的复值函数，则 $\varphi(t)$ 是特征函数的充分必要条件为它是非负定的.
- 对于 n 维随机变量亦可以定义特征函数.
- 定义 设 $X=(X_1\cdots X_n)$ 是 n 维随机变量，则称

$$\varphi(t)=\varphi(t_1,\cdots,t_n)=Ee^{itX'}=Ee^{i\sum_{k=1}^{n}t_kX_k}\ ,\quad t=(t_1\cdots t_n)\in R^n$$

为 X 的特征函数.

- 若 $X=(X_1\cdots X_n)$ 的联合分布函数为 $F(x)=F(x_1,\cdots,x_n)$， 那么 X 的特征函数

$$g(t)=g(t_1,\cdots,t_n)=Ee^{i\sum_{k=1}^{n}t_kX_k}=\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}e^{i(t_1x_1+\cdots+t_nx_n)}dF(x_1,\cdots,x_n)$$

- 研究非负整数值随机变量，母函数是有力工具.
- 定义 设 X 是非负整数值随机变量，分布列

$$p_k = P(X = k), \quad k = 0,1,2,\cdots$$

则称

$$P(s) \triangleq E(s^X) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k$$

为 X 的母函数.

- 由于 $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$ ，所以 $P(s)$ 在 $|s| \le 1$ 绝对收敛.
- 母函数性质
- 1）非负整数值随机变量 X 的分布列由其母函数唯一确定.

- 2）设 $P(s)$ 是 X 的母函数，若 EX 存在，则 $EX=P'(1)$

  若 DX 存在，则

$$DX=P''(1)+P'(1)-[P'(1)]^2$$

- 3）独立随机变量之和的母函数等于母函数之积.
- 4）随机个独立同分布随机变量之和的母函数等于原来两个母函数的复合. 即若 $N,\ X_1,\ X_2,\ \cdots$ 是独立非负整数值随机变量，且 $X_1,X_2,\cdots$ 同分布，则 $Y=\sum_{k=1}^{N}X_k$ 的母函数

$$H(s)=G(P(s))$$

式中的 $G(s)$ 、$P(s)$ 分别是 N 、X_1 的母函数.

- § 5 **n** 维正态分布
- 二维正态随机变量 $X=(X_1,X_2)$ 的联合分布密度

$$f(x_1,x_2)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\right.$$

$$\left.\cdot\left[\left(\frac{x_1-a_1}{\sigma_1}\right)^2-2\rho\left(\frac{x_1-a_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{x_2-a_2}{\sigma_2}\right)+\left(\frac{x_2-a_2}{\sigma_2}\right)^2\right]\right\}$$

记 $x=(x_1\quad x_2),\ a=(a_1\quad a_2),\ b_{ij}=B_{X_iX_j},\ i,j=1,2$

$$B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

那么 $f(x)=f(x_1,x_2)=\dfrac{1}{2\pi|B|^{\frac{1}{2}}}\exp\left\{-\dfrac{1}{2}(x-a)B^{-1}(x-a)'\right\}$

其中 B 是对称正定矩阵.

- 定义 若 n 维随机变量 $X=(X_1\cdots X_n)$ 的联合分布密度

$$f(x)=f(x_1,\cdots,x_n)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}|B|^{\frac{1}{2}}}\cdot\exp\left\{-\frac{1}{2}(x-a)B^{-1}(x-a)'\right\}$$

式中 $a=(a_1,\cdots,a_n)$ 是常向量，$B=(b_{ij})_{nxn}$是对称正定矩阵，则称 X 为 n 维正态随机变量或服从 n 维正态分布，记作 $X\sim N(a,B)$.

- 引理 若 $X\sim N(a,B)$，则存在 n 阶正交矩阵 T ，使得

$$Y=(Y_1\cdots Y_n)=(X-a)T'$$

是 n 维独立正态随机变量，即 $Y_1,\cdots,Y_n$ 相互独立，且 $Y_k\sim N(0,d_k)$ ，其中 $d_k>0$ 是 B 的特征根，$k=1,2,\cdots,n$.

❖ 证　由于 B 是对称正定矩阵，存在正交矩阵 T，使得

$$TBT' = D = \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix}$$

其中，$d_k > 0$ 是 B 的特征根，$k = 1, 2, \cdots, n$. 往证 $Y = (X - a)T'$ 是 n 维独立正态随机变量. 事实上，设 Y 的联合分布密度 $p(y) = p(y_1, \cdots, y_n)$，那么

$$p(y)dy = P(y < Y \le y + dy) = P(Y \in (y, y + dy])$$

$$= P((X - a)T' \in (y, y + dy]) = P(X \in a + (y, y + dy]T)$$

$$= f(a + yT)dy_1 \cdots dy_n$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |B|^{\frac{n}{2}}} \exp\left\{-\frac{1}{2} yTB^{-1}T'y'\right\} dy_1 \cdots dy_n$$

但 $|B|=|T'DT|=|D|=d_1\cdots d_n$

$$yTB^{-1}T'y' = yD^{-1}y' = (y_1,\cdots,y_n)\begin{pmatrix} \frac{1}{d_1} & & & \\ & \frac{1}{d_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{d_n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{n} \frac{y_k^2}{d_k}$$

所以 $p(y)dy = p(y_1,\cdots,y_n)dy_1\cdots dy_n = \dfrac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}(d_1\cdots d_n)^{\frac{n}{2}}}\exp\left\{-\dfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\dfrac{y_k^2}{d_k}\right\}dy_1\cdots dy_n$

$$=\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi d_k}}\exp\left\{-\frac{y_k^2}{2d_k}\right\}dy_1\cdots dy_n$$

由此可知 Y_k 的分布密度

$$p_k(y_k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi d_k}}\exp\left\{-\frac{y_k^2}{2d_k}\right\}$$

所以$p(y_1,\cdots,y_n)=p_1(y_1)\cdots p_n(y_n)$，故$Y=(Y_1\cdots Y_n)$ 是 n 维独立正态随机变量，且$Y_k\sim N(0,d_k),k=1,2,\cdots,n$.

- **定理:** 若$X\sim N(a,B)$ ，则X 的特征函数

$$\varphi(t)=\varphi(t_1,\cdots,t_n)=e^{iat'-\frac{1}{2}tBt'}$$

- **定理:** 设 $X \sim N(a, B), Y = XA$ ， 若 $A'BA$ 正定， 则 $Y \sim N(aA, A'BA)$
  即正态随机变量经线性变换还是正态随机变量.
- **定理:** 若 $X \sim N(a, B)$,则 $EX_k = a_k, B_{X_k X_l} = b_{kl}, k, l = 1, 2, \cdots, n$

- §6 条 件 期 望
- 设 X,Y 是离散型随机变量，可能值分别是 $x_1, x_2, \cdots$
  和 $y_1, y_2, \cdots$,在 $X = x_i$ 的条件下, $Y = y_j$ 的条件概率

$$P(Y = y_j \mid X = x_i) = \frac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P(X = x_i)}$$

于是在 $X=x_i$ 的条件下，Y 的期望

$$E(Y|X=x_i)=\sum_j y_j P(Y=y_i|X=x_i)$$

称为在 $X=x_i$ 下，Y 的条件期望.

- $g(x_i)=E(Y|X=x_i)$ 是 x_i 的函数.
- 在已知 X 的条件下，

$$g(X)=E(Y|X)$$

是随机变量 X 的函数，称为 Y 在 X 下的条件期望.

- 设 X,Y 是连续型随机变量，称

$$P(y<Y\le y+dy\,|\,x<X\le x+dx)=\frac{f(x,y)dxdy}{f_1(x)dx}=\frac{f(x,y)}{f_1(x)}dy$$

为在 $X=x$ 下, Y 的条件密度.记为 $f(y|x)$.

- 在 $X=x$ 的情况下，Y 的期望

$$E(Y|x)=\int_{-\infty}^{\infty}yf(y|x)dy$$

称为在 $X=x$ 下, Y 的条件期望.

- 类似的，称

$$g(X)=E(Y|X)$$

为 Y 在 X 下的条件期望.

习　题

- 5.定义二元函数

$$F(x,y)=\begin{cases}1, & x+y\geq 0\\ 0, & x+y<0\end{cases}$$

验证此函数对每个变元非降，右连续，且满足分布函数的极限性质，但无法使此函数保持非负性质.

- 9.若 ξ,η 是独立的随机变量，且均服从 $N(0,1)$ ，试求 $U=\xi+\eta,V=\xi-\eta$ 的联合密度函数.

- 14.求证：对于任何实值特征函数 $f(t)$ ，以下两个不等式成立

$$1-f(2t)\leq 4(1-f(t))$$

$$1+f(2t)\geq 2(f(t))^2$$

- 19. 求Γ分布 $G(\lambda,r)$ 的特征函数.