

# 数学分析笔记:2019春学期下半学期

- 数学分析笔记:2019春学期下半学期
  - 1. 期中考前空间解析几何知识点整理
    - 1.1.1. 向量
    - 1.1.2. 空间平面和直线
    - 1.1.3. 空间曲面的方程
  - 2. 几类积分的联系
    - 1.2.1. 高斯公式
    - 1.2.2. 斯托克斯公式
  - 3. 第七章 无穷级数
    - 1.3.1. 数项级数
      - 1.3.1.1. 常数项级数
      - 1.3.1.2. 正项级数( $a_n \geq 0$ )
      - 1.3.1.3. 一般级数
    - 1.3.2. 函数项级数
      - 1.3.2.1. 函数列的一致收敛性
      - 1.3.2.2. 函数项级数
    - 1.3.3. 幂级数
      - 1.3.3.1. 函数的幂级数展开
    - 1.3.4. 傅里叶级数
  - 4. 第四章 常微分方程
    - 1.4.1. 可分离变量的微分方程
    - 1.4.2. 一阶线性微分方程
    - 1.4.3. 可降阶的高阶微分方程
    - 1.4.4. 高阶线性微分方程
    - 1.4.5. 常系数齐次线性方程
    - 1.4.6. 常系数非齐次微分方程
  - 5. 习题课
    - 1.5.1. 习题课
    - 1.5.2. 习题课
    - 1.5.3. 习题课

## 1. 期中考前空间解析几何知识点整理

### 1.1.1. 向量

- 混合积:  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  坐标为  $(a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2), (a_3, b_3, c_3)$  则

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & b_2 & a_3 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

- 三向量共面: 混合积为零

### 1.1.2. 空间平面和直线

- 点到平面的距离:  $P_1(x_1, y_1, z_1)$  到平面  $\pi: Ax + By + Cz + D = 0$  的距离为:

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

- 直线的标准方程:

$$\frac{x - x_0}{X} = \frac{y - y_0}{Y} = \frac{z - z_0}{Z}$$

其中  $(X, Y, Z)$  称为方向系数

- 两直线相交: 设直线  $\ell_i$  过点  $M_i(x_i, y_i, z_i)$ , 方向向量为  $(X_i, Y_i, Z_i) (i = 1, 2)$ , 则他们相交的充要条件为:

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & X_1 & X_2 \\ y_2 - y_1 & Y_1 & Y_2 \\ z_2 - z_1 & Z_1 & Z_2 \end{vmatrix} = 0$$

且他们不相交或重合

- $\ell$  与  $\pi$  平行的充要条件:  $AX + BY + CZ = 0$  且  $\ell$  上有一点不在  $\pi$  上
- 异面直线间的距离:

$$d = \frac{|\overrightarrow{M_1 M_2} \cdot \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2|}{|\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2|}$$

(考虑投影到公垂线段上)

### 1.1.3. 空间曲面的方程

- 圆柱面: 半径为 $r$ , 母线方向为 $\mathbf{v}(l, m, n)$ , 对称轴 $\ell_0$ 过点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ , 则 $M(x, y, z)$ 在此圆柱面上的充要条件是

$$\frac{|\overrightarrow{MM_0} \times \mathbf{v}|}{|\mathbf{v}|} = r$$

(注意叉乘)

- 圆锥面: 设轴的方向向量为 $\mathbf{v}$ , 则 $|\cos < \overrightarrow{M_0M}, \mathbf{v} >| = \cos \alpha$

## 2. 几类积分的联系

### 1.2.1. 高斯公式

设空间区域 $\Omega$ 由分片光滑的闭曲面 $\Sigma$ 构成, 则

$$\iiint_{\Omega} \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \oiint_{\Sigma} P dy dz + Q dz dx + R dx dy$$

其中 $P, Q, R$ : 一阶连续可微

证明:

设 $\Omega$ 的下表面 $\Sigma_{\text{下}}: z = z_1(x, y)$ , 上表面 $\Sigma_{\text{上}}: z = z_2(x, y)$   
利用三重积分的先一后二和曲面积分的计算, 考虑 $\iiint_{\Omega} \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz$ 的穿线, 有

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz &= \iint_{D_{xy}} dx dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz \\ &= \iint_{D_{xy}} R(x, y, z_2(x, y)) - R(x, y, z_1(x, y)) dx dy \\ \text{而 } \oiint_{\Sigma} R dx dy &= \iint_{\Sigma_{\text{上}}} + \iint_{\Sigma_{\text{下}}} \\ &= \iint_{D_{xy}} R(x, y, z_2(x, y)) - \iint_{D_{xy}} R(x, y, z_1(x, y)) dx dy \end{aligned}$$

从而证明了原命题.

使用Gaussian公式: 常加入与坐标平面平行的平面组成封闭平面

eg1:

$$\text{求 } I = \iiint_{\Sigma} y^2 z dx dy - x z dy dz + x^2 y dz dx$$

$\Sigma: z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 = 1$  及坐标面所围曲线的外侧

注意: 画好积分区域, 主要在第一卦限

so1:

$$I = \iiint_{\Omega} (-z + x^2 + y^2) dx dy dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 r dr \int_0^{r^2} (-z + r^2) dz$$

### 1.2.2. 斯托克斯公式

考虑三维空间的曲面 $\Sigma$ , 其边界为 $\Gamma$ , 曲线方向取正向, 曲面方向取右手螺旋. 我们有

$$\oint_{\Gamma} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz = \iint_{\Sigma} \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz dx + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

注意以 $\Gamma$ 为边界的曲面 $\Sigma$ 可能有若干个, 可以选择一个比较合适的 (有时甚至选择球面比较方便)

行列式记法:

$$= \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} dy dz & dz dx & dx dy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

证明:

希望把曲线积分 (找参数方程) 和曲面积分 (设法投影) 化到同一个东西  
设 $\Sigma: z = z(x, y)$ , 将 $\Sigma$ 投影到 $xOy$ 面, 得到 $D_{xy}$ , 记其边界线为 $L: x = x(t), y = y(t)$ .  
而 $L$ 为 $\Gamma$ 在 $xOy$ 面的投影, 故 $\Gamma: x = x(t), y = y(t), z = z(x(t), y(t))$

于是曲线积分

$$\oint_{\Gamma} P(x, y, z) dx = \oint_L P(x, y, z(x, y)) dx$$

注意这是平面的曲线积分, 由格林公式  $= \iint_{D_{xy}} -\frac{\partial P}{\partial y} dx dy$ , 这样就把曲线积分化成了二重积分

$$\text{由复合求导} = \iint_{D_{xy}} -\left(\frac{\partial P}{\partial x} \times 0 + \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x}\right) dx dy,$$

考虑  $dx dy = \cos \gamma dS$ ,  $dz dx = \cos \beta dS$ , 往证

$$\frac{\partial z}{\partial y} \cos \gamma dS = -\cos \beta dS$$

只需证  $\frac{\partial z}{\partial y} \cos \gamma = -\cos \beta$

考虑  $\Sigma: z(x, y) - z = 0$ ,  $\vec{n} = (z_x, z_y, -1)$ , 易见  $\frac{\cos \beta}{\cos \gamma} = -z_y = \frac{\partial z}{\partial y}$ , 从而证明了原命题.

启示: 重视基本含义, 基本计算方法

eg2:

$$\text{求 } I = \oint_{\Gamma} (y - z) dx + (z - x) dy + (x - y) dz$$

$\Gamma: x^2 + y^2 = a^2$  与  $\frac{x}{a} + \frac{z}{b} = 2(a > 0, b > 0)$  的交线, 方向为从  $x$  轴正向看去是逆时针

注意画图的技巧: 把  $zOx$  面作为纸面

sol2:

考虑  $\Sigma: \frac{x}{a} + \frac{z}{b} = 1$ , 其投影  $D_{xy}: x^2 + y^2 \leq a^2$

$$I = \iint_{\Sigma} (-1 - 1) dy dz + (-1 - 1) dz dx + (-1 - 1) dx dy$$

$= -2 \iint_{\Sigma} (dy dz + dz dx + dx dy)$ , 它是曲面在坐标面上的投影的面积

考虑  $\Sigma$  在  $yOz$  面上的投影:  $a^2(1 - \frac{z}{b})^2 + y^2 = a^2$ , 即  $\frac{y^2}{a^2} + \frac{(z - b)^2}{b^2} = 1$   
于是  $I = -2(\pi ab + 0 + \pi a^2)$

### 3. 第七章 无穷级数

#### 1.3.1. 数项级数

##### 1.3.1.1. 常数项级数

• 定义:

- 给定  $\{a_n\}$ ,  $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ , 或  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , 简记为  $\sum a_n$
- 研究问题: 收敛/发散
- 级数的收敛定义: **部分和**  $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ , 构成**数列**  $\{S_n\}$ , 其敛散性与原级数的敛散性相同; 研究级数的收敛性需要通过研究数列的收敛性.
- 收敛级数的余项:  $R_n = S - S_n$ , 其中  $S$  为级数的和

• 判断敛散性

- Cauchy收敛准则:

给定  $\{b_n\}$ ,  $b_n \rightarrow b \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists N > 0, s.t. \forall p \in \mathbb{Z}_+$ , 有对  $n > N$ ,  $|b_{n+p} - b_n| < \epsilon$

- 级数的Cauchy收敛准则:**

级数  $\sum a_n$ , 部分和  $S_n$  收敛  $\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists N > 0, s.t. \forall p \in \mathbb{Z}_+$ , 有对  $n > N$ ,  $|S_{n+p} - S_n| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p}| < \epsilon$ . 要习惯这种  $\epsilon\delta$  语言进行证明

- 调和级数
  - 知道发散, 知道发散的阶
  - 应用: 随机树: 每次只选一个叶子节点向下分, 研究随机一个叶子节点的层数:  $\ln n$

• 收敛级数的性质

- 线性性
- 任意改动有限项不影响级数的收敛性
- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛  $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  (证明:  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n - S_{n+1} = 0$ )
- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛  $\Rightarrow$  任意加括号后级数收敛 (反之不成立, 反例:  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ ) (利用逆否命题: 加括号发散  $\Rightarrow$  原级数发散)

证明:

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n \\ S'_k &= b_1 + b_2 + \cdots + b_k \\ &= a_1 + a_2 + \cdots + a_{n_k} \\ &= S_{n_k}, \text{ 其为 } S_n \text{ 的子列, 故收敛} \end{aligned}$$

Th1:

$$\ln(1+n) \leq S_n \leq 1 + \ln n, \text{ 其中 } S_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}$$

证明:

$$\begin{aligned} \text{对 } x \in [i, i+1], \frac{1}{i+1} &\leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{i} \\ \text{积分, 得 } \frac{1}{i+1} &\leq \int_i^{i+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{i} \\ \text{累加, 得 } \sum_{i=1}^n \frac{1}{i+1} &\leq \sum_{i=1}^n \int_i^{i+1} \frac{1}{x} dx \leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \\ \text{于是 } S_n &\geq \int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx = \ln(n+1) \\ \text{且 } \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i+1} &\leq \int_1^n \frac{1}{x} dx = \ln n, \text{ 则 } S_n \leq 1 + \ln n. \end{aligned}$$

eg1:

$$\text{证明: } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ 收敛}$$

证明:

$$\begin{aligned} \text{任意 } \epsilon > 0, \exists N = \frac{1}{\epsilon}, \text{ 对 } \forall p \in \mathbb{Z}_+, \text{ 当 } n > N \text{ 时,} \\ \left| \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+p)^2} \right| \\ \leq \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p} \right| \quad \text{由Cauchy收敛准则, 级数收敛} \\ = \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} \right| \\ \leq \frac{1}{n} < \epsilon. \end{aligned}$$

eg2

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+1} - \frac{1}{\sqrt{n}-1} &= \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{1}{\sqrt{n}+1} - \frac{1}{\sqrt{n}-1} \right) \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{-2}{n-1} \quad \text{故其发散} \end{aligned}$$

created on 2019-05-09

### 1.3.1.2. 正项级数( $a_n \geq 0$ )

- 性质
  - $S_n$  单调, 收敛只需证其有界:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ 收敛} \Leftrightarrow S_n \leq M, \text{ 即部分和有上界} \quad (1)$$

- 审敛法
  - 比较判别法(根本)

若  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  与  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  为正项级数, 且  $\exists N, \forall n > N, s.t. a_n \leq b_n$ , 则

$$\begin{aligned} 1. \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ 收敛} &\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ 收敛} \\ 2. \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ 发散} &\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ 发散} \end{aligned} \quad (2)$$

证明: 考虑 (1) 易见

- 极限形式

若  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  与  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  为正项级数, 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \ell$

i)  $0 < \ell < \infty$  : 敛散性相同

ii)  $\ell = 0$  : 与(2)相同

iii)  $\ell = \infty$  : 与(2)相反

证明: 考虑  $\ell - \epsilon \leq \frac{a_n}{b_n} \leq \ell + \epsilon$ , 取  $\epsilon = \frac{\ell}{2}$  即得

eg1

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - n^2}$$

考虑比较级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$  即可

- 比值判别法(d'Alembert)

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  为正项级数, 若  $\exists N, \forall n > N$ , 有

i)  $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$  :  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛

ii)  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$  :  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  发散

证明i):

$$a_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \frac{a_{N+2}}{a_{N+1}} a_{N+1} \quad \text{其中 } q \leq 1. \text{ 故原级数收敛.}$$

$$\leq q^{n-N-1} a_{N+1}$$

ii) : 考虑必要条件

极限形式:

i)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q < 1$  :  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛

ii)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q > 1$  :  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  发散

iii)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q = 1$  :  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  不能确定

iii) 的反例:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  与  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

若  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$  不存在: 考虑上极限

eg2

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{2} + \frac{2 \times 5}{1 \times 5} + \cdots + \frac{2 \times 5 \times 8 \times \cdots \times (3n-2)}{1 \times 5 \times 9 \times \cdots \times (4n-1)} + \cdots$$

sol2

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3}{4} < 1 \text{ 收敛}$$

- 根式判别法(Cauchy)

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  为正项级数, 若  $\exists N, \forall n > N$ , 有

i)  $\sqrt[n]{a_n} \leq \ell < 1$  :  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛

ii)  $\sqrt[n]{a_n} > 1$  :  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  发散

证明: i)  $a_n \leq \ell^n$ ,  $\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \ell^n$ , 收敛

ii) :  $a_n > 1$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \geq 1$ , 考虑必要条件, 发散

极限形式

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell$$

$$i) \ell < 1 : \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ 收敛 } \checkmark$$

$$ii) \ell > 1 : \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ 发散 } \checkmark$$

$$iii) \ell = 1 : \text{不能确定 } \checkmark$$

反例:  $a_n = \frac{1}{n}$  和  $\frac{1}{n^2}$

eg3

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + (-1)^n}{2^n}$$

sol3

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{2 + (-1)^n}}{2} < 1, \text{ 收敛 } \checkmark$$

- 根式与比值判别法的联系: 比值判别法有效, 根值判别法一定有效
- trick: 有阶乘用比值, 有n次方根式

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q \leq 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q \leq 1$$

证明:

$$a_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \frac{a_2}{a_1} a_1$$

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{a_n}{a_{n-1}} \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \frac{a_2}{a_1} a_1} \rightarrow q$$

其中利用了结论 若  $\{a_n\} \rightarrow a$ , 则  $\{\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}\} \rightarrow a$

eg4

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1 + x^{2n}}$$

sol4 用根式判别法易见, 比值判别法也未尝不可

eg5

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(2 + \frac{1}{n})^n}$$

要利用结论  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^k} \rightarrow 1$   $\checkmark$

- 积分判别法(有时在  $q = 1$  时可用): 对于

$$f(x) : [1, +\infty) \rightarrow (0, +\infty) \text{ 且单调递减, 则 } \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \text{ 与 } \int_1^{\infty} f(x) \text{ 同收敛或发散}$$

证明:

$$f(n) = \int_{n-1}^n f(x) dx$$

而对于  $f(x) \in [n-1, n], f(n) \leq f(x) \leq f(n-1)$

$$\text{从而 } f(n) = \int_{n-1}^n f(x) dx \leq \int_{n-1}^n f(x) dx \leq \int_{n-1}^n f(n-1) dx = f(n-1)$$

$$\text{则 } \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \leq \int_1^{\infty} f(x) dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} f(n-1).$$

再利用比较审敛法易见.

eg6

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$$

$$f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^p}$$

用积分判别法

### 1.3.1.3. 一般级数

- 交错级数:  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n (a_n > 0)$

◦ Leibniz: 若  $i) : a_n \downarrow$   $ii) a_n \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$ , 则  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$  收敛

证明: 采用Cauchy判别法  $\forall \epsilon > 0, \exists N s.t. \forall n > N, p \in \mathbb{N}_+,$

$p = 2k :$

$$\begin{aligned} & |a_{n+1} - a_{n+2} + \cdots + (-1)^{p+1} a_{n+2p}| \\ &= a_{n+1} - (a_{n+2} - a_{n+3}) - \cdots - (a_{n+2k-2} - a_{n+2k-1}) - a_{n+2k} \\ &\leq a_{n+1} < \epsilon \text{ (利用 } a_n \rightarrow 0 \text{ 和单调性)} \end{aligned}$$

$p = 2k - 1$  :同理

- 绝对收敛:  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  收敛
  - 性质: 绝对收敛  $\rightarrow$  收敛

证明1:

$$\begin{aligned} & 0 \leq a_n + |a_n| \leq 2|a_n| \\ & \sum_{n=1}^{\infty} a_n + |a_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} 2|a_n|. \text{ 则易见} \end{aligned}$$

证明2: 用Cauchy 见书.

- 条件收敛:  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛, 但不绝对收敛.

eg1: 判断是否绝对收敛:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!}, \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \ln(1 + \frac{1}{n})$$

tip: 小不等式 在学习理论证明中有用 (看来这里面也用了不少放缩)

$$\begin{aligned} & \ln(1+x) \leq x \quad (x > -1) \\ & \ln(1+x) \geq x - \frac{x^2}{4} \quad (0 < x < 1) \\ & 1+x \leq e^x \end{aligned} \quad (7.1.3.1)$$

eg2: 讨论敛散性(用上式):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p + (-1)^{n-1}}$$

eg3:

$$f(x) \in C^2(-\delta, \delta), \text{ 且 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0. \text{ 证明: } \sum_{n=1}^{\infty} f(\frac{1}{n}) \text{ 绝对收敛.}$$

证明:

$$\begin{aligned} & \text{易见 } f(0) = 0, f'(0) = 0. \text{ 由泰勒展开: } f(\frac{1}{n}) = f''(\xi) \frac{1}{2n^2}, \xi \in [0, \frac{1}{n}] \\ & \text{当 } \frac{1}{n} = x < \frac{\delta}{2} \text{ 时, } f''(x) \text{ 有界, } |f''(x)| \leq M, \text{ 则} \\ & |f(\frac{1}{n})| \leq \frac{M}{2n^2}. \text{ 则易见原命题成立.} \end{aligned}$$

Th:  $f(x)$  在  $(-\delta, \delta)$  二阶可导.  $a_n = f(\frac{1}{n})$  则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  绝对收敛  $\Leftrightarrow f(0) = f'(0) = 0$

eg4

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \ln(1 + \frac{1}{n})$$

用 (7.1.3.1) 即可.

- 绝对收敛的性质
  - 可任意重排, 都收敛, 和一样. (条件收敛不可, 考虑调和级数)
  - 设级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  与  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  都绝对收敛, 和为  $A, B$ , 则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n a_k b_{n-k+1}$  收敛于  $AB$  (事实上乘积项按任意次序排列均可)
- (Abel)  $\{a_n\}$  单调有界,  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  收敛, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$  收敛.
- (Dirichlet)  $\{a_n\}$  单调且  $a_n \rightarrow 0$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  部分和有界, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$  收敛. (可依此证明 Leibniz)

eg:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$$

### 1.3.2. 函数项级数

#### 1.3.2.1. 函数列的一致收敛性

- Intuition: 求极限与求积分,求导数能不能交换次序
- 设函数列  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots, x \in I$ . 如果  $\forall x_0 \in D, \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0) = f(x)$ , 则称  $\{f_n\}$  在  $D$  上收敛于  $f$ . 若  $D$  包含所有收敛点, 则称其为函数列的收敛域

$\forall \epsilon > 0, \exists N = N(\epsilon, x) > 0, \forall n > N, |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$  (注意与不同  $x$  取值有关)

eg1: 求  $f_n(x) = x^n$  的收敛域

sol1:  $|x| < 1: f_n(x) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty; x = 1: \text{收敛}; x = -1: \text{不收敛}; |x| > 1: \text{发散}$  故收敛域为  $(-1, 1]$

- 讨论:  $f_n(x)$  每一项都连续, 可导, 可积, ..., 极限是否有相应的性质
- 一致收敛性  $f_n(x) \Rightarrow f(x)$ : 设函数列  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots, x \in D, f_n(x) \Rightarrow f(x) \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists N = N(\epsilon) > 0, \forall n > N, |f_n(x) - f(x)| < \epsilon, \forall x \in D$
- 反:  $\exists \epsilon > 0, \forall N, n > N$  时,  $\exists x_n, |f_n(x_n) - f(x_n)| \geq \epsilon$

eg2: 证明  $f_n(x) = x^n$  非一致收敛

sol2:

$$|f_n(x) - f(x)| = |x^n|, \text{ let } x_n \text{ be } (1 - \frac{1}{n})^n$$
$$|f_n(x) - f(x)| = 1 - \frac{1}{n} \geq \frac{1}{2}.$$

- 几何意义:  $n > N$  时,  $y = f_n(x)$  被限制在一个小区间之内
- Cauchy 判别法:  $f_n(x) \Rightarrow f(x) \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists N = N(\epsilon) > 0, \forall n, m > N, |f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon, \forall x \in D$
- 余项判别法:  $D$  上,  $f_n(x) \Rightarrow f(x) \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| = 0$

eg3:  $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$

sol3:

$$f(x) = 0.$$
$$\sup_{x \in D} f_n(x) = \frac{nx}{e^{nx^2}}, \text{ 求导求最大值} = \frac{n}{\sqrt{2n}} e^{-\frac{1}{2}} \rightarrow \infty \neq 0.$$

故不一致收敛

- 性质1:  $D$  上,  $f_n(x) \Rightarrow f(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$
- 性质2:  $D$  上,  $f_n(x) \Rightarrow f(x) \Rightarrow \forall n \geq 1, f_n(x)$  连续, 则  $f(x)$  连续.
- 性质3:  $D$  上,  $f_n(x) \Rightarrow f(x) \Rightarrow \forall n \geq 1, f_n(x)$  连续, 则  $f(x)$  可积, 且

$$\int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x)$$

- 性质4:  $f_n(x)$  在  $D$  上可导,  $f'_n(x) \Rightarrow f'(x) \Rightarrow \{f_n(x)\}$  的极限函数可导, 且

$$\frac{d}{dx} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d}{dx} f_n(x)$$

eg4: 验证性质:

$$f_n(x) = \frac{2x+n}{x+\frac{n}{2}}, x \in [0, b]$$
$$f_n(x) = x - \frac{x^2}{n}, x \in [0, 1]$$

sol4:

1. 用余项

#### 1.3.2.2. 函数项级数



- $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ . 研究部分和函数  $S_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x)$ , 构成函数列  $S_1(x), S_2(x), \dots, S_n(x), \dots, S_n(x_0)$  收敛称  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  在  $x = x_0$  处收敛. 在集合上收敛, 收敛域类似定义. 若部分和函数一致收敛, 则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  一致收敛.
- 和函数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x)$

$\{f_n(x)\}$

eg1:  $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$  的收敛域

- 柯西判别法: 同7.1.1; 必要条件: 通项  $u_n(x) \rightarrow 0$
- 余项判别法: 同7.1.1;

eg2:  $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$  在  $x \in (-1, 1)$  上的一致收敛性

sol2: 当出现  $\sup_{x \in (-1, 1)} \frac{x^{n+1}}{1-x}$  时, 无需求得最小值, 只需令  $x = \frac{n}{n+1}$ ,  $\sup_{x \in (-1, 1)} \frac{x^{n+1}}{1-x} \geq \frac{(\frac{n}{n+1})^{n+1}}{\frac{1}{n+1}} = (n+1)(1 - \frac{1}{n+1})^{n+1} \rightarrow \infty$ , 故不一致收敛

- 维尔斯特拉斯判别法: 若  $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$  收敛, 且  $\forall n \in \mathbf{N}_+, \forall x \in D, |u_n(x)| \leq M_n$ , 则  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  一致收敛

Intuition: 将函数的上界换为数列

- 性质
  - 连续性: 若  $u_n(x)$  连续, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  连续
  - 逐项可积: 若  $u_n(x)$  连续, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  可积, 且  $\int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x u_n(x) dx$
  - 逐项可导:  $u_n(x) \in C^{(1)}$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$  一致收敛, 则  $S(x)$  可导, 且  $S'(x) = (\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x))' = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$
  - 内闭一致收敛: 在区间内任意一个闭区间一致收敛, 则上面的性质都可用

eg3:  $u_n(x) = \frac{1}{n^3} \ln(1 + n^2 x^2)$ . 证明:  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  在  $[0, 1]$  一致收敛

sol3:

Weierstrass:  $S_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^3} \ln(1 + x^2 k^2) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^3} \ln(1 + k^2)$ . 考虑  $M_n = \frac{1}{n^3} \ln(1 + n^2)$ , 易见原命题成立.

同时,  $u'_n(x) \leq \frac{1}{n^2}$ , 故  $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$  一致收敛, 可知  $S'(x)$

eg4: 证明:  $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n}$

sol4:

恒成立:  $1+x = 1-x+x^2-x^3+\dots+(-1)^{n+1}x^n+\dots$

两边积分:  $\int_0^x \frac{1}{1+x} dx = \int_0^x 1-x+x^2-x^3+\dots+(-1)^{n+1}x^n+\dots$ , 化为逐项积分易见.

注意为何符合条件

### 1.3.3. 幂级数

- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$
- $Th(Abel)$ :
  - i)  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$  在  $x = x_0$  处收敛, 则  $\forall x, |x| < |x_0|$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$  收敛
  - ii)  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$  在  $x = x_0$  处发散, 则  $\forall x, |x| > |x_0|$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$  发散

证明:

(i)  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_0^n (\frac{x^n}{x_0^n})$ . 由  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_0^n$  收敛知  $a_n x_0^n \leq M$  有界, 又  $(\frac{x}{x_0})^n < 1$  则易见收敛.

(ii) 反证

- 收敛半径  $R$ : 阻隔收敛与发散 关于原点对称
- 幂级数的收敛性判别法

- 比式  $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ 
  - $0 < \rho < \infty : R = \frac{1}{\rho}$

- $\rho = 0 : R = \infty$
- $\rho = \infty : R = 0$

证明: 用正项级数的比式判别法

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|, \text{比较其与1的大小关系}$$

- 根式  $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ 
  - $0 < \rho < \infty : R = \frac{1}{\rho}$
  - $\rho = 0 : R = \infty$
  - $\rho = \infty : R = 0$

eg1: 求  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$  的收敛域

sol1: 直接用比式判别法, 多一个分情况讨论

$$\text{eg2: } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^n n}$$

注意: Stirling 公式

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

- 性质
  - 和函数在  $(-R, R)$  连续
  - 若  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  在  $x = R / -R$  收敛, 则和函数  $S_n$  在该点单边收敛
  - 收敛半径内, 和函数可逐项求导, 求积分
  - $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  与  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1}$  及  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{1}{n+1} x^{n+1}$  有相同的收敛半径

证明:  $\forall x \in (-R, R), \exists y \in (-R, R), |x| < |y|$ .  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n y_n \frac{n x^{n-1}}{y^{n-1}} \leq \sum_{n=0}^{\infty} M \frac{n x^{n-1}}{y^{n-1}}$ . 这是由于  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  收敛, 通项有界. 用比式判别法易证其收敛.

- $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ .  $S(0) = a_0, S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}, S'(0) = a_1, a_n = \frac{S^{(n)}(0)}{n!}$

eg3 求  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^2 x^n$

sol1: 收敛半径:  $(-1, 1)$ .

$$\begin{aligned} S(x) &= x \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n n x^{n-1} = x g(x) \\ \int_0^x g(t) dt &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n x^n = x f(x) \\ \int_0^x f(t) dt &= \frac{-x}{1+x} \\ \text{求导, } f(x) &= -\frac{1}{(1+x)^2}, \int_0^x g(t) dt = -\frac{1}{x(1+x)^2} \\ g(x) &= \cdots, S(x) = x g(x) \end{aligned}$$

### 1.3.3.1. 函数的幂级数展开

- Taylor级数  $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + f^{(n)}(x_0) \frac{(x - x_0)^n}{n!}$

反例:

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{-\frac{1}{x^2}}, f'(x) = 0 \\ &= 0, x = 0 \end{aligned}$$

其求n阶导为0,  $S(x) = 0$ .

- Th: 若  $f(x)$  在  $x = x_0$  处有任意阶导数, 且对  $|x - x_0| < r, \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ , 则  $\forall x \in (x_0 - r, x_0 + r), f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f^{(n)}(x_0) \frac{(x - x_0)^n}{n!}$

余项的表达式:  $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} x^{n+1}$

eg4 求  $f(x) = \ln(1 - x)$  的幂级数展开

sol4: 用求导等运算 eg5:  $\ln \frac{1+x}{1-x}$

sol5:

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) &= \ln(1+x) - \ln(1-x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(-x)^n}{n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \\ &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}\end{aligned}$$

eg6: 求  $f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$  的  $n$  阶导数

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!}$$

比较系数得  $f^{(2n)}(0) = 0, f^{(2n+1)}(0) = \frac{(-1)^n (2n+1)!}{n!(2n+1)}$

### 1.3.4. 傅里叶级数

- 若  $f(x)$  以  $2\pi$  为周期, 则在傅里叶系数  $a_n, b_n$  下,

$$\begin{aligned}f(x) &\sim A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(nx + \phi_n) \\ &= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n (\sin\phi_n \cos nx + \cos\phi_n \sin nx) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \quad (1)\end{aligned}$$

- 收敛性:  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| + |b_n|$  收敛, 则 (1) 收敛且一致收敛
- 正交性: 若  $\phi(x), \psi(x)$  在  $[a, b]$  可积, 且  $\langle \phi, \psi \rangle = \int_a^b \phi(x)\psi(x)dx = 0$ , 则称  $\phi(x), \psi(x)$  在  $[a, b]$  正交
- 三角函数系  $1, \sin x, \cos x, \dots, \sin nx, \cos nx$ 
  - 周期为  $2\pi$
  - 宛如正交基,  $\langle a_i, a_j \rangle = \pi \delta(i, j)$
- 与  $f(x)$  的联系
  - $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, n = 0, 1, 2, \dots$
  - $b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx, n = 1, 2, \dots$

证明: (1) 两边积分求  $a_n$ :

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

由正交性, 一致收敛性:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx = \pi a_n$$

- 和函数收敛定理: 若  $f(x)$  以  $2\pi$  为周期, 且  $[-\pi, \pi]$  按段光滑, 则  $\forall x \in (-\infty, +\infty)$ , 傅里叶级数收敛至  $\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$
- 按段光滑:  $f(x)$  在  $[a, b]$  满足:
  - 除有限第一类间断点外,  $f(x)$  连续
  - 除有限第一类间断点外,  $f'(x)$  存在, 且若  $x_0$  为不连续点, 则  $f'_+(x_0), f'_-(x_0)$  存在

eg1:  $f(x), 2\pi$  为周期,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , -\pi < x < 0 \\ x & , 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

sol1:

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx \\
&= \frac{1}{n\pi} [x \sin nx] \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n\pi} \int_0^{\pi} \sin nx dx \\
&= \frac{1}{n^2\pi} [\cos nx] \Big|_0^{\pi} \\
&= \frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi} \quad (n \neq 0) \\
a_0 &= \frac{\pi}{2} \\
b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \\
&= \frac{(-1)^{n+1}}{n} \\
S(x) &= \begin{cases} f(x) & x \in (-\pi, \pi) \\ \frac{\pi}{2} & x = \pm\pi \end{cases}
\end{aligned}$$

- 若周期不为  $2\pi$ , 为  $2\ell$  :

设函数  $f(x)$  以  $2\ell$  为周期, 可积, 则

$$\begin{aligned}
f(x) &\sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \frac{n\pi}{\ell} x + b_n \sin \frac{n\pi}{\ell} x) \\
a_n &= \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \cos \frac{n\pi}{\ell} x dx \\
b_n &= \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \sin \frac{n\pi}{\ell} x dx
\end{aligned}$$

eg2:  $f(x)$  以 10 为周期

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -5 \leq x < 0 \\ 3 & 0 \leq x < 5 \end{cases}$$

- 若  $f(x)$  为偶函数, 则正弦项积分为 0. 奇函数, 余弦积分为 0.

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{\ell} x$$

## 4. 第四章 常微分方程

### 1.4.1. 可分离变量的微分方程

- 通解: 包括常数的解, 独立常数的个数与微分方程的阶相同.
- 可分离变量的微分方程 (包括变量代换后可分离的)

eg1:

$$\text{求 } \frac{dy}{dx} = 3x^2 y \text{ 的通解.}$$

sol1:

$$\begin{aligned}
\text{当 } y=0 \text{ 时, } \int \frac{1}{y} dy &= \int 3x^2 dx + C, y = Ce^{x^3} \quad (C \neq 0) \\
&\quad (\text{通解, 但不包括所有解}) \\
\text{当 } y=0 \text{ 时, } C &= 0; \text{ 故 } y = Ce^{x^3}
\end{aligned}$$

- 齐次方程

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= F(x, y) = \phi\left(\frac{y}{x}\right) \\
\text{令 } u &= \frac{y}{x}, y'_x = (ux)' = \frac{du}{dx} x + u = \phi(u) \\
\frac{du}{\phi(u) - u} &= \frac{1}{x} dx
\end{aligned}$$

eg2:

$$(x + \sqrt{x^2 + y^2})y' = y$$

sol2:

$$x > 0: \left(1 + \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}\right) \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

$$\text{或: } \frac{dx}{dy} = \frac{x + \sqrt{x^2 + y^2}}{y} = \frac{x}{y} + \sqrt{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2}$$

$$\text{令 } u = \frac{x}{y}, x = uy, \frac{dx}{dy} = \frac{du}{dy}y + u = u + \sqrt{1 + u^2}$$

eg3:

$$y' = \frac{3x + 2y + 1}{4x + 2y + 2}$$

线性代换 待定系数

#### 1.4.2. 一阶线性微分方程

- 形式:  $y' + P(x)y = Q(x)$ 
  - $Q(x) \equiv 0$ : 齐次:  $y = Ce^{\int -P(x)dx}$
  - 非齐次: 常数变易法(想法:  $C \rightarrow u(x)$ , 令其为方程特解)

$$y' = u'(x)e^{\int -P(x)dx} + u(x)e^{\int -P(x)dx}(-P(x))$$

$$= u'(x)e^{\int -P(x)dx} - yP(x)$$

带入原方程:  $\frac{du}{dx}e^{\int -P(x)dx} = Q(x)$  ( $yP(x)$  一定会被消掉)

$$u = \int Q(x)e^{\int P(x)dx} + C$$

$$\text{故 } y = Ce^{\int -P(x)dx} + e^{\int -P(x)dx} \int Q(x)e^{\int P(x)dx}$$

$$= \text{通解} + \text{特解}$$

eg1

$$y' - \frac{2}{x+1}y = (x+1)^{\frac{2}{5}}$$

eg2

$$y' = \frac{1}{x+y}$$

sol2:

法一:  $u = x + y$ , 可分离变量

法二:  $\frac{dx}{dy} = x + y$  一阶线性(反函数微分 常用)

eg3(略作变化)

$$f(x) = \sin x - \int_0^x f(x-t)dt$$

sol3:

$$\int_0^x f(x-t)dt = - \int_0^x f(x-t)d(x-t) = \int_0^x f(u)du; \text{ 可对 } x \text{ 求导}$$

- 伯努利方程  $y' + P(x)y = Q(x)y^n$

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

$$y^{-n}y' + P(x)y^{1-n} = Q(x)$$

$$\text{令 } z = y^{1-n}, z' = (1-n)y^{-n}y'$$

$$z' + (1-n)P(x)z = Q(x)(1-n)$$

(可照常求解)

eg4

$$y' + \frac{1}{x}y = a \ln x \cdot y^2$$

#### 1.4.3. 可降阶的高阶微分方程

- $y^{(n)} = f(x)$  求  $n$  次不定积分
- $y'' = f(x, y')$ : 令  $u = f'$

eg1

$$x > -1. g'(x) + g(x) - \frac{1}{1+x} \int_0^x g(t)dt = 0. g(0) = 1$$

$$\text{求: } i) g'(x); ii) e^{-x} \leq g(x) \leq 1, x \geq 0$$

sol:

$$\text{证 } g(x) \geq e^{-x} : f(x) = g(x) - e^{-x}, \text{ 求 } f'(x)$$

$$\bullet y'' = f(y, y') : \text{令 } y' = p, y'' = \frac{dP}{dx} = \frac{dp}{dy} \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} p, \Rightarrow pp' = f(y, p)$$

#### 1.4.4. 高阶线性微分方程

$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = f(x); f(x) \equiv 0$ : 齐次

- 考虑  $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ , 若  $y_1 = y_1(x), y_2 = y_2(x)$  是它的解, 则  $y = C_1y_1 + C_2y_2$  也是它的解. 证明: 利用求导的线性性  $(Cy)'' = Cy''$ ; 到  $n$  阶也成立
- 函数组线性相关:  $k_1y_1(x) + k_2y_2(x) + \dots + k_ny_n(x) \equiv 0, \text{ s.t. } k_1k_2 \dots k_n = 0$
- Liouville Th.* 若  $y_1(x)$  是  $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$  的解, 则  $y_2(x) = y_1(x) \int \frac{\exp(-\int p(x)dx)}{y_1^2(x)} dx$
- 非齐次的情况:  $y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$ ; 若  $y^* = y^*(x)$  是它的特解, 且  $Y = Y(X)$  是对应齐次方程的通解, 则  $y = y^* + Y$  也是原方程的解.

#### 1.4.5. 常系数齐次线性方程

- $y'' + py' + qy = 0$ ; 试探:  $y = e^{rx} \Rightarrow r^2e^{rx} + rpe^{rx} + qre^{rx} = (r^2 + pr + q)e^{rx} \equiv 0, r^2 + pr + q = 0$ ; 讨论其根的分布
  - i)  $\Delta > 0, r_1, r_2, y = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x}$
  - ii)  $\Delta = 0, y = e^{rx}(C_1 + C_2x)$
  - iii)  $\Delta < 0, r_{1,2} = \frac{-p \pm i\sqrt{-\Delta}}{2} = \alpha \pm i\beta, y = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x)$

eg1:

$$y'' - 2y' + 5 = 0$$

sol1: 特征方程:  $r^2 - 2r + 5 = 0; r_{1,2} = 1 \pm 2i; y = e^x(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x)$

eg2:

$$z = f(e^x \sin y) \text{ s.t. } \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) = e^{2x} z. \text{ 求 } f(u)$$

sol: 依次求二阶导,  $\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) = f''(u)e^{2x}\sin^2 y + f'(u)e^x \sin y, \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) = f''(u)e^{2x}\cos^2 y - f'(u)e^x \sin y$  故  $f''(u) = f(u)$

- $n$  阶的情况:  $y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \dots + a_ny = 0$ ; 特征方程:  $r^n + a_1r^{n-1} + \dots + a_n = 0$ 
  - i).  $r$  为  $k$  重实根:  $e^{rx}(C_0 + C_1x + \dots + C_{k-1}x^{k-1})$
  - ii).  $r$  为  $k$  重复根:  $e^{\alpha x}[(C_0 + C_1x + \dots + C_{k-1}x^{k-1})\cos\beta x + (D_0 + D_1x + \dots + D_{k-1}x^{k-1})\sin\beta x]$

#### 1.4.6. 常系数非齐次微分方程

- $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = f(x)$ . 可做的情形:  $f(x) = e^{\lambda x}P_n(x)$  或  $f(x) = e^{\alpha x}(R^{(\ell)}(x)\cos\omega x + R^{(r)}(x)\sin\omega x)$
- $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = e^{\lambda x}P_n(x)$ .
  - 二次的情形:

假设  $y^* = e^{\lambda x}Q(x)$ , 则  $y'^* = e^{\lambda x}(\lambda Q(x) + Q'(x)), y''^* = \dots$ , 带入整理得  $Q''(x) + (2\lambda + p)Q'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)Q(x) = P_n(x)$

i)  $\lambda^2 + p\lambda + q \neq 0$ : 待定系数:  $Q(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n$ , 比较系数易得.

ii)  $\lambda^2 + p\lambda + q = 0, 2\lambda + p \neq 0$ :  $Q(x)$ :  $n + 1$  次待定系数:  $Q(x) = b_0x + b_1x^2 + \dots + b_nx^{n+1}$

iii)  $\lambda^2 + p\lambda + q = 0, 2\lambda + p = 0$ : 待定系数:  $Q(x) = b_0x^2 + b_1x^3 + \dots + b_nx^{n+2}$

eg1:

$$y'' + 2y' - 3y = (3 - 4x)e^x$$

sol1: 先求通解.  $r_1 = 1, r_2 = 3$  注意  $\lambda = 1$  是特征方程的解但不是重根, 故设  $y^* = e^x(Ax + Bx^2)$ , 带入整理易得.

- $n$  阶的情形  $y^* = e^{\lambda x}x^kQ_n(x)$ , 其中  $Q_n(x)$  与  $P_n(x)$  次数相同,  $k$  是  $\lambda$  为齐次方程特征方程的根的重数
- $f(x) = e^{\alpha x}(R^{(\ell)}(x)\cos\beta x + R^{(r)}(x)\sin\beta x)$ , 特解为  $y^* = e^{\alpha x}x^k(R_1(x)\cos\beta x + R_2(x)\sin\beta x)$ ,  $R_1(x), R_2(x)$  的次数为  $\max(\ell, r)$ , 且  $\alpha + \beta i$  为  $k$  重特征根

eg2

$$y'' + y = x\cos 2x$$

sol2:  $y'' + y = (x\cos 2x + 0\sin 2x)e^{0x}$ . 求对应齐次方程的特征根:  $\pm i$ .  $\alpha + \beta i = 2i$  不是特征根. 故令  $y^* = (Ax + B)\cos 2x + (Cx + D)\sin 2x$ , 解出系数即得.

eg3

$$y^{(4)} + 2y'' + y = \sin x$$

## 5. 习题课

### 1.5.1. 习题课

- 极限

1.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x^y$  不存在:

两个累次极限不相等

- $f(x, y) = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} ((x, y) \rightarrow (0, 0))$

令  $y = x: f(x, y) \rightarrow 0$

令  $y = x^2 - x^3: f(x, y) = \frac{x^3+(x^2-x^3)^3}{x^3} = 1 + o(1) \rightarrow 1$

- 证偏导数不连续: 把除该点外的偏导数用公式求出

- 空间解几

- 求曲线  $x^2 + y^2 + z^2 = 6, x + y + z = 0$  在  $(1, -2, 1)$  处的切线方程

直线的方向向量:  $(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds})$

两式对  $x$  求偏导:  $2x + 2y \frac{dy}{dx} + 2z \frac{dz}{dx} = 0$

$1 + \frac{dy}{dx} + \frac{dz}{dx} = 0$

带入数值, 求出  $\frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}$

- 不一定要写出参数方程再做 把他们看成  $x$  的函数

- 求椭圆面  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  在  $M(x_0, y_0, z_0)$  点的切平面方程

法向量:  $(F_x, F_y, F_z)$ , 即  $(\frac{2x}{a^2}, \frac{2y}{b^2}, \frac{2z}{c^2})$

故切平面方程为  $\frac{2x_0}{a^2}(x - x_0) + \frac{2y_0}{b^2}(y - y_0) + \frac{2z_0}{c^2}(z - z_0) = 0$

- 函数极值

- 给定  $f(x, y) = 2(y - x^2)^2 - \frac{1}{7}x^7 - y^2$

(1) 求  $(x, y)$  的极值

(2) 证明: 沿  $(0, 0)$  点的每条直线,  $(0, 0)$  点都是定义在该直线上的函数  $f(x, y)$  的极小值点

(1)

$A: f''_{xx}, B: f''_{xy}, C: f''_{yy}$

$(0, 0)$  点:  $B^2 - AC > 0$  不能确定是否是极值点, 故令  $x = 0, f(x, y) = y^2$ , 此时  $f(0, 0) \leq f(x, y)$ , 为极小值

再令  $y = x^2, f(x, x^2) = -\frac{1}{7}x^7 - x^4 \leq 0, f(0, 0)$  为极大值

(2)

令  $y = kx (k > 0), f(x, kx) = x^2(k^2 - 4kx - 2x^2 - \frac{1}{7}x^5)$ , 当  $x \rightarrow 0$  时,  $f(x, kx)$  恒大于  $0, f(0, 0)$  为极小值点

若  $k = 0, f(x, 0) = x^4(2 - \frac{1}{7}x^3) > 0, f(0, 0)$  为极小值点

- 计算重积分

- $I = \iint_D \sqrt{1-y^2} dx dy$

- 注意偶函数的对称性

- $I = \int_0^1 dy \int_y^0 \frac{y}{\sqrt{1+x^3}} dx$

- 交换积分次序:  $I = \int_0^1 dx \int_0^x \frac{y}{\sqrt{1+x^3}} dy = \int_0^1 \frac{x^2}{2\sqrt{1+x^3}} dx$

- 求曲面  $z = xy, z = 0, x + y = 1$  所围立体的体积

- $I = \iint_D dx dy \int_0^{xy} dz$

### 1.5.2. 习题课

- 第一型曲线积分

- 第二型曲线积分

- $\int_{\partial\Omega} P dx + Q dy = \int_{\partial\Omega} (P, Q) \cdot \vec{n} ds$ , 其中  $\vec{n}$  为曲线在  $(x, y)$  点的法向量.

- 曲面面积 设  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  为连续可微函数,  $D \subset \mathbb{R}^{n-1}$ , 则  $graph(f)$  为  $\mathbb{R}^n$  中超曲面, 其面积公式为

$$\sigma = \int_D \sqrt{1 + \|\nabla f\|^2}$$

- 第二型曲面积分 设  $\Sigma$  为  $\mathbf{R}^3$  中可定向的曲面, 其与定向相容的参数表示为

$$r(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), (u, v) \in \Omega.$$

则对于定义在  $\Sigma$  上的连续向量值函数  $(P, Q, R)$ , 定义其曲面积为

$$I = \int_{\Omega} (P \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} + Q \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} + R \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}) du dv$$

eg

$$\Phi = \int_{\Sigma} x^2 dy \wedge dz + y^2 dz \wedge dx + x^2 dx \wedge dy$$

其中  $\Sigma$  为球面  $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$ , 方向为外侧

sol: 进行球坐标变换, 计算

$$\frac{\partial(y, z)}{\partial(\phi, \theta)} = R^2 \sin^2 \phi \cos \theta, \text{ 等等}$$

考虑定向:  $\vec{n} = (x_0 - a, y_0 - b, z_0 - c) = (R \sin \phi \cos \theta, R \sin \phi \sin \theta, R \cos \phi)$  其与  $\vec{N}$  方向相同.

法二: 考虑

$$\vec{v} = (P, Q, R) \\ \Phi = \int_{\Sigma} \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma$$

- 格林公式
  - 诱导定向: 从法向量转向切向量是逆时针
  - 平面分部积分公式(在偏微分方程中 useful)
- 高斯公式
  - 散度:  $\vec{X} = (P, Q, R), \operatorname{div} \vec{X} = (\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial z})$  则高斯公式的散度形式为

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{X} dx dy dz = \int_{\partial \Omega} \vec{X} \cdot \vec{n} d\sigma$$

其中  $\vec{n}$  为边界曲面的单位外法向量

eg2: 设  $C$  为平面上连续可微的闭曲线,  $\vec{v}$  为固定的向量, 证明:

$$\int_C \vec{v} \cdot \vec{n} ds = 0$$

其中  $\vec{n}$  为  $C$  的单位外法向量

sol2: 在  $x(t), y(t)$  点,  $\vec{n} ds = (\frac{y'(t)}{\sqrt{x'^2 + y'^2}, \frac{-x'(t)}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}) \sqrt{x'^2 + y'^2} dt = (dy, -dx)$ . 带入原式, 用 Green 公式立得.

eg3: 计算积分

$$I = \int_{\partial \Omega} (y-z) dx + (z-x) dy + (x-y) dz$$

其中  $\Omega$  为八分之一单位球面(第一卦限), 方向为外侧诱导定向

用 Stokes 公式,  $I = -2 \int_{\Omega} dy \wedge dz + dz \wedge dx + dx \wedge dy$ , 用投影.

### 1.5.3. 习题课

- $\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2} (\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)})$ , 易于消项
- 注意高尉不等式  $\ln(1+x) \geq x - \frac{x^2}{4} (0 < x < 1)$
- $(\ln n)^{\ln n} = e^{\ln n \ln \ln n} = n^{\ln \ln n}$
- $\sqrt[n]{n} - 1 = e^{\frac{1}{n} \ln n} - 1 \sim \frac{1}{n} \ln n$
- $2^{n^2} = 2^{n \times n} = (2^n)^n = 2^n \times 2^n \times \dots \times 2^n$  熟悉指数的指数