数理逻辑期终试卷 (A)

考试方式：开卷　　考试日期 2013 年 6 月　　考试时间 2 小时

系 ________　　年级 ________　　班级 ________

学号 ________　　姓名 ________　　成绩 ________

题号	一	二	三	四	五	六	七
分数							

一．（15 分）在系统 **G** 中证明

（1）$\vdash (A \to B) \to (\neg A \vee B)$；

（2）$\vdash (\neg A \vee B) \to (A \to B)$。

二．（15 分）设 $x \notin FV(B)$，在 **G** 系统中证明：

（1）$\vdash (\forall x. A \to B) \to \exists x. (A \to B)$；

（2）$\vdash \exists x. (A \to B) \to (\forall x. A \to B)$。

三． （15 分）设一阶语言 $\mathcal{L}$ 的结构 $\mathfrak{m} = (\mathrm{M}, I)$，$\sigma$ 为赋值，以及M' 为与 M 等势的集合（即有映射 $f: \mathrm{M} \xrightarrow{1-1,\ onto} \mathrm{M}'$），证明存在 $\mathcal{L}$ 的结构$\mathfrak{m}' = (\mathrm{M}', I')$和赋值$\sigma'$使对任何公式 A 有 $\mathfrak{m} \vDash_{\sigma} A$ *iff* $\mathfrak{m}' \vDash_{\sigma'} A$。

四． （15 分）在一阶语言中将下列推理符号化并在 **G** 系统中给出形式证明：

鸟会飞，猴不会飞，所以猴不是鸟。

五．　（15 分）在算术语言 $\mathcal{A}$ 中，设 $\Gamma = \{\exists x\,(x > S^n 0) \mid n \in \mathbb{N}\}$，证明 Γ 可满足。

六．　（15 分）设 $p(x)$, $q(x)$ 为一元谓词符，证明 $\vdash \forall x(p(x) \to q(x)) \to \exists x(p(x) \wedge \neg q(x))$在 $\mathbf{G}$ 中不可证。

七． （10分）Let $\mathcal{L}$ be a language containing a binary predicate R. Show that there is no set Σ of $\mathcal{L}$-sentences with at least one infinite model such that R_M is a well ordering of M for each infinite model $\mathfrak{m}$ of Σ.

{ 设$\mathcal{L}$为含二元谓词符 R 带等词的一阶语言，证明不存在$\mathcal{L}$-句子的集合Σ其至少有一个无穷模型使得对每个Σ的无穷模型$\mathfrak{m}$皆有R_M为M的良序，这里M为$\mathfrak{m}$的论域。

Definition 1

A well ordering on M is a linear ordering on A with the further property that every nonempty subset of A has a least element.

Definition 2

R is a linear ordering on M iff

(1) R is a binary relation on M;

(2) R is transitive;

(3) R satisfies trichotomy on M, i.e., for any x and y in A exactly one of the three alternatives, $x\mathrm{R}y$, $x = y$, $y\mathrm{R}x$, holds. **}**