习题课

赵申宜

zhaosy@lamda.nju.edu.cn

求曲线长

设 $I=[\alpha,\beta]$ 为区间, 映射 $\sigma: I\to\mathbb{R}^2$ 用分量表示为

$$\sigma(t)=(x(t),y(t)),\ t\in I.$$

如果 $x(t)$, $y(t)$ 均为连续函数, 则称 σ 为 $\mathbb{R}^2$ 上的连续曲线. 如果 $x(t)$, $y(t)$ 均可微 (连续可微), 则称 σ 为可微 (连续可微) 曲线.

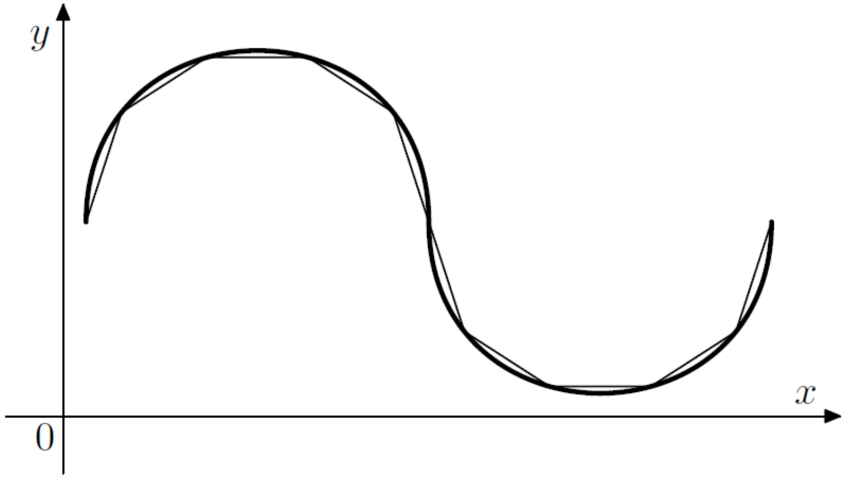


图 7.1　曲线的长度

设 σ 为连续可微曲线, 通过分割曲线并用直线段长度之和作逼近, 我们可以定义 σ 的长度为

$$L(\sigma)=\int_\alpha^\beta [(x'(t))^2+(y'(t))^2]^{\frac{1}{2}}dt.$$

求面积

(**1**) 如果 $f > 0$ 为 $[a,b]$ 上的连续函数, 则由 $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$ $(a < b)$ 与 $y = 0$ 围成的曲边梯形的面积为

$$S = \int_a^b f(x)\,dx.$$

一般地, 当 f 变号时, 上式仍有意义, 称为代数面积和, 而

$$S = \int_a^b |f(x)|\,dx$$

才是所围面积之和. 更一般地, 由 $y = f_2(x)$, $y = f_1(x)$ 以及 $x = a$, $x = b$ 围成的图形的面积为

$$S = \int_a^b |f_2(x) - f_1(x)|\,dx.$$

求面积

(**2**) 设 σ 为平面曲线, 由极坐标方程

$$r = r(\theta), \quad \theta \in [\alpha, \beta]$$

给出, 其中 $r(\theta)$ 关于 θ 连续, $\beta - \alpha \leqslant 2\pi$. 则由 σ, $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$ 所围成的图形面积为

$$S = \lim_{\|\pi\| \to 0} \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{2} r^2(\xi_i) \cdot \Delta\theta_i = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\theta)\, d\theta.$$

这个公式是通过使用扇形的面积和逼近图形面积得到的.

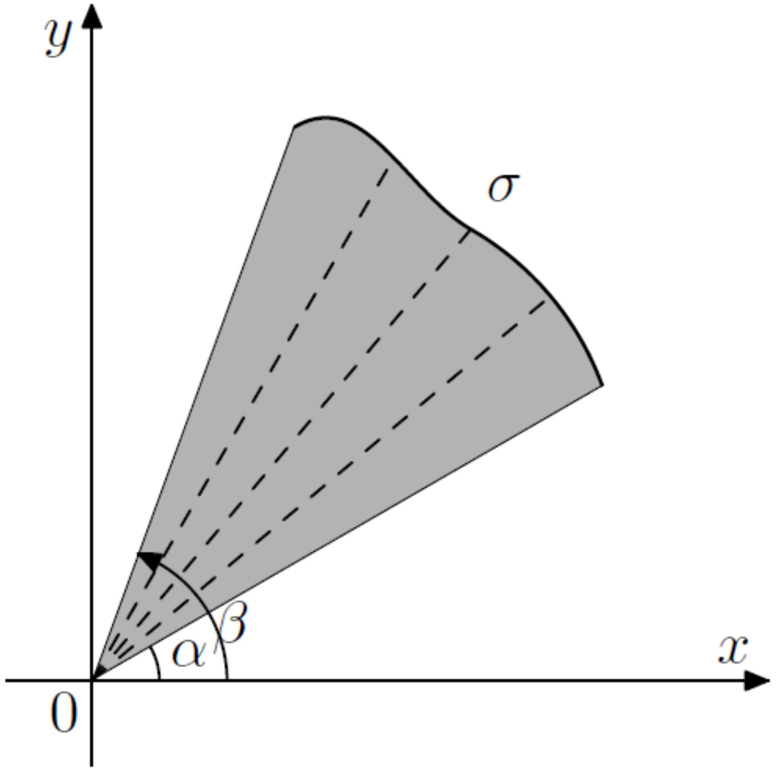


图 7.4　极坐标表示的曲线

求面积

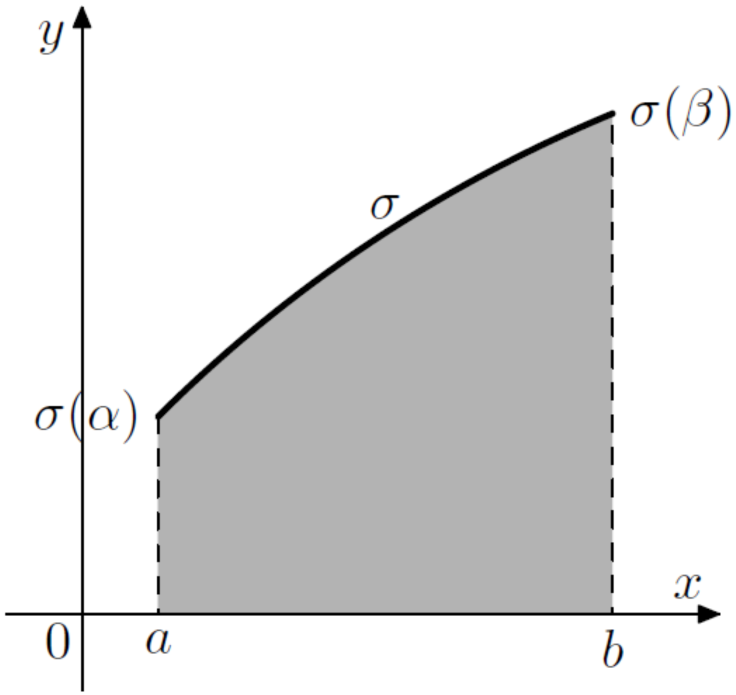
(3) 如果曲线 σ 由 $\sigma(t)=(x(t),y(t))$, $t\in[\alpha,\beta]$ 给出, 其中 $y(t)\geqslant 0$, x 关于 t 单调递增, $x([\alpha,\beta])=[a,b]$. 则 σ 与 $x=a$, $x=b$ 以及 $y=0$ 围成的曲边梯形的面积为

$$S=\int_\alpha^\beta y(t)x'(t)dt.$$

这个公式仍然是通过使用矩形面积之和去逼近曲边梯形得到. 一般地, 如果只设 x 是单调的, 则面积公式为

$$S=\int_\alpha^\beta |y(t)x'(t)|dt.$$

求面积



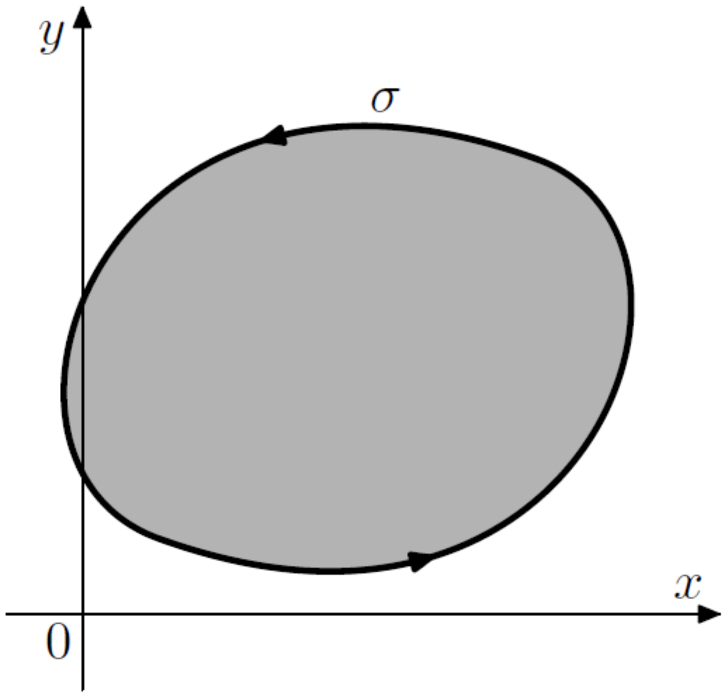


图 7.5 曲线围成的图形

如果 σ 除在 $t = \alpha, \beta$ 处以外无自交点, 则 σ 本身围成的图形的面积为

$$S = \left| \int_\alpha^\beta y(t)x'(t)dt \right| = \left| \int_\alpha^\beta x(t)y'(t)dt \right|,$$

求面积

(**4**) 旋转曲面的面积

设 σ 为平面曲线

$$\sigma(t) = (x(t), y(t)), \quad t \in [\alpha, \beta], \ y(t) \geqslant 0.$$

σ 绕 x 轴旋转所得曲面的面积为

$$S = \int_\alpha^\beta 2\pi y(t)[(x'(t))^2 + (y'(t))^2]^{\frac{1}{2}}\, dt.$$

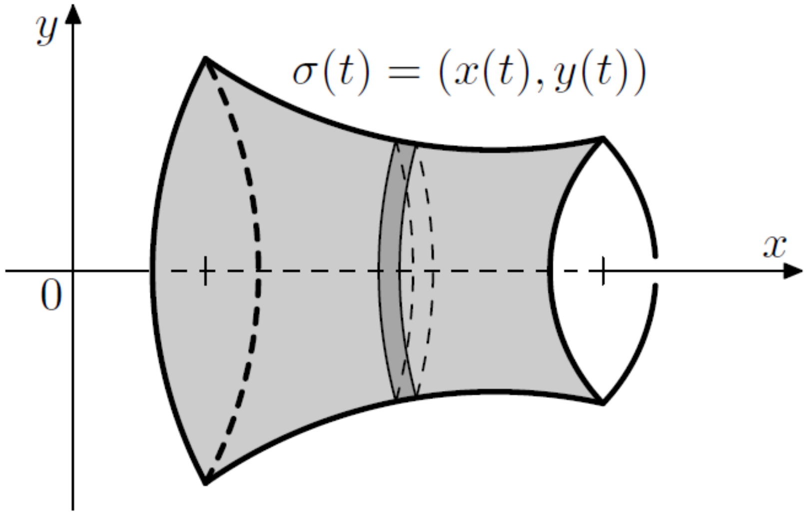


图 7.8　旋转曲面

求体积

(1) 平行截面之间的立体体积

设 Ω 为 $\mathbb{R}^3$ 中一块立体区域, 夹在平面 $x = a$ 与 $x = b$ $(a < b)$ 之间. 记 $S(x)$ 为 $x \in [a, b]$ 处垂直于 x 轴的平面截 Ω 的截面面积函数. 如果 $S(x)$ 关于 x 连续, 则 Ω 的体积为

$$V = \int_a^b S(x)dx.$$

求体积

(2) 旋转体的体积

设 f 为 $[a,b]$ 上的连续函数, Ω 是由平面图形

$$\{(x,y) \mid a \leqslant x \leqslant b,\ 0 \leqslant |y| \leqslant |f(x)|\}$$

绕 x 轴旋转一周所得旋转体. 该旋转体在 $x \in [a,b]$ 处的截面为圆盘, 其面积为

$$S(x) = \pi f^2(x).$$

因此 Ω 的体积为

$$V = \int_a^b S(x)\,dx = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx.$$

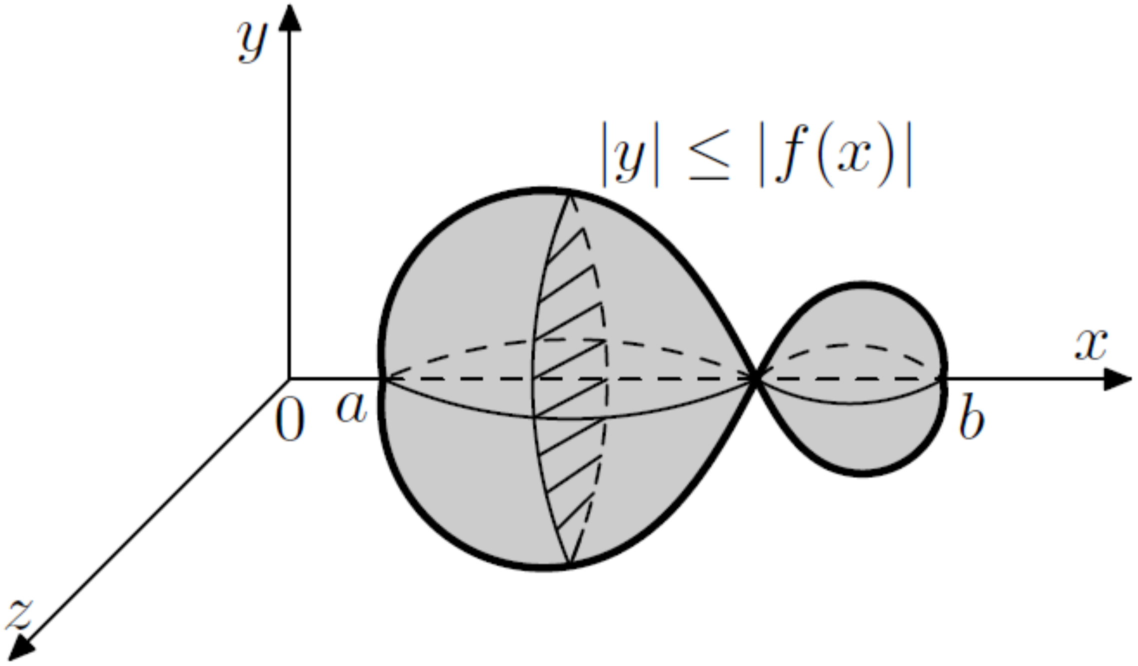


图 7.12 旋转体

自己做题。。。

1. 讨论 $\int_0^{+\infty} \cos(x^2)\,dx$的敛散性。

2. 假设连续函数$f(x) > 0$，且广义积分$\int_0^{+\infty} f(x)dx$收敛，那么是否 $f(x) \to 0(x \to +\infty)$？

3. 讨论 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^p} dx \ (0 < p < 2)$ 的敛散性。

4. 设$a \geq 0$, 讨论$\int_0^{+\infty} e^{-ax} \frac{\sin(x)}{x} dx$ 的敛散性。

5. 设 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$收敛，且$xf(x)$单调递减趋于零,$x \to +\infty$，则 $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x)In\,x = 0$ 。

6. 设$f(x) > 0$ 且在$x \in [0,+\infty)$中连续。若$\int_0^{+\infty} \frac{1}{f(x)}dx$收敛，则 $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} \frac{1}{\lambda}\int_0^{\lambda} f(x)dx = +\infty$ 。