泰勒公式

1. 若函数f满足下列条件:

   – 在闭区间[a,b]上函数f有直到n阶的连续导数;

   – 在开区间(a,b)上函数f有直到n + 1阶导数。

   则对任何$x, x_0 \in (a,b)$,至少存在一点$\xi \in (a,b)$,使得

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

   成立。其中

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

   称为f在x_0的泰勒多项式.
   而$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$称为f在$x_0$处泰勒公式的余项。$\xi = x_0 + \theta(x-x_0)$,$0 < \theta < 1$。

2. 当$n = 0$时,泰勒定理即为拉格朗日中值定理。

3. 泰勒公式在$x_0=0$时称麦克劳林(Maclaurin)公式.

4. 带皮亚诺(Peano)余项的泰勒公式：若函数f满足

   - 在点x_0的某邻域$U(x_0)$有直到$n-1$阶的连续导数；
   - $f^{(n)}(x_0)$存在，

   则

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2$$
$$+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n).x\in U(x_0)$$

5. 常用的初等函数的麦克劳林公式：

   (1)
$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1};$$

   (2)
$$ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$$
$$+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}};$$

(3)

$$sinx = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}$$
$$+(-1)^m\frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}sin\left(\theta x + \frac{\pi}{2}\right);$$

(4)

$$cosx = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^m\frac{x^{2m}}{(2m)!}$$
$$+(-1)^{m+1}\frac{x^{2m+2}}{(2m+2)!}cos(\theta x)$$

(5)

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2$$
$$+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$$
$$+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!}x^{n+1}(1+\theta x)^{\theta-n-1},$$

其中$0 < \theta < 1$。

例1 求下列极限：

(1)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2} + 1 - \sqrt{1+x^2}}{x^2 sinx^2}$$

当$x \to 0$时，

有 $\sqrt{1+x^2} = 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + o(x^4)$,故

$$\lim_{x\to0} \frac{\frac{x^2}{2} + 1 - \sqrt{1+x^2}}{x^2 sinx^2} = \lim_{x\to0} \frac{\frac{x^4}{8} + o(x^4)}{x^2 \cdot x^2}$$
$$= \frac{1}{8}.$$

(2)

$$\lim_{x\to0} \frac{cos(sinx) - cosx}{sin^4 x}$$

当$x \to 0$时，有：

$$cos(sinx) = 1 - \frac{1}{2}sin^2 x + \frac{1}{24}sin^4 x + o(sin^4 x)$$
$$= 1 - \frac{1}{2}\left[x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)\right]^2 + \frac{1}{24}\left[x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)\right]^4 + o(x^4)$$
$$= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + o(x^4)$$

$cos(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)$. 故

$$原式 = \lim_{x\to0} \frac{\frac{5x^4}{24} - \frac{x^4}{24} + o(x^5)}{sin^4 x}$$
$$= \lim_{x\to0} \frac{\frac{x^4}{6} + o(x^4)}{x^4}$$
$$= \frac{1}{6}.$$

(3)
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x+x^2}-1}{e^x-1}$$
当$x\to 0$时，
$\sqrt[3]{1+x+x^2}=1+\frac{1}{3}(x+x^2)+o(x), e^x=1+x+o(x)$.故
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x+x^2}-1}{e^x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{(x+x^2)}{3}+o(x)}{x+o(x)}$$
$$=\frac{1}{3}$$
例2 确定常数λ 和μ，使得
$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{1-x^3}-\lambda x-\mu)=0$$
.

解 当 $x \to +\infty$ 时，$\frac{1}{x} \to 0$，有

$$\sqrt[3]{1-\frac{1}{x^3}} = 1 - \frac{1}{3x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

故 原式 $= \lim\limits_{x \to +\infty} x\left[-\sqrt[3]{1-1/x^3} - \lambda - \frac{\mu}{x}\right]$

$$= \lim_{x \to +\infty} x\left[-1 + \frac{1}{3x^3} - \lambda - \frac{\mu}{x} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right]$$

$$= \lim_{x \to +\infty} x\left[(-1-\lambda) - \frac{\mu}{x} + \frac{1}{3}\frac{1}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right].$$

要使左边 = 右边，则 $-1-\lambda = 0, \mu = 0$，**于是** $\lambda = -1, \mu = 0.$

例3 设f(x)有二阶导数，且

$$f(x) \le \frac{1}{2}[f(x-h) + f(x+h)],$$

试证$f''(x) \ge 0$.

证　由泰勒公式，有

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{1}{2}f''(x)h^2+o(h^2),$$

$$f(x-h)=f(x)-f'(x)h+\frac{1}{2}f''(x)h^2+o(h^2).$$

将二式相加再除以 h^2，利用题设条件，即得

$$f''(x)+o(1)\geqslant 0.$$

令 $h\to 0$，取极限得 $f''(x)\geqslant 0$.

例4 设函数f(x)在[0, 2]上二阶可导，

且$|f(x)|\leq 1, |f''(x)|\leq 1$，证明：在[0, 2]上必

有$|f'(x)|\leq 2$。

证 将 $f(2)$，$f(0)$ 在任意点 $x\in[0,2]$ 展开，有

$$f(2)=f(x)+f'(x)(2-x)+\frac{1}{2}f''(\xi_1)(2-x)^2,\ \xi_1\in(x,2),$$

$$f(0)=f(x)+f'(x)(-x)+\frac{1}{2}f''(\xi_2)(-x)^2,\ \xi_2\in(0,x).$$

故 $$f(2)-f(0)=2f'(x)-\frac{1}{2}x^2f''(\xi_2)+\frac{1}{2}(2-x)^2f''(\xi_1).$$

因为 $|f(x)|\leqslant 1$，$|f''(x)|\leqslant 1$，所以

$$\begin{aligned}2|f'(x)| &\leqslant |f(2)|+|f(1)|+\frac{x^2}{2}|f''(\xi_2)|\\ &\quad+\frac{1}{2}(2-x)^2|f''(\xi_1)|\\ &\leqslant 2+\frac{1}{2}[x^2+(2-x)^2].\end{aligned}$$

又，函数 $g(x)=2+\frac{1}{2}[x^2+(2-x)^2]$ 在 $x=0$ 和 $x=2$ 取得最大值 $g(0)=(2)=4$，故

$$2|f'(x)|\leqslant 4\Rightarrow|f'(x)|\leqslant 2.$$