数理逻辑期中考试试卷

2018 年 5 月

（共 8 题 总分 100 分 考试时间 2 小时，开卷）

系： 学号： 姓名：

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
得分									

得分	

1、（本题满分 12 分）

令命题逻辑公式 φ为 $(A \vee B) \rightarrow \neg C$，其中$A, B, C \in PS$。

（1）φ 是否一个永真式？请作出判断并证明你的结论。

（2）求 φ 的$\wedge\vee-nf$和$\vee\wedge-nf$。

解：

（1）φ不是一个永真式。

证明：当 $\hat{v}(A) = F, \hat{v}(B) = T, \hat{v}(C) = T$ 时，$v(\varphi) = F$。故上述结论成立。□

（2）

可列出φ的真值表如下：

A	B	C	$\neg C$	$A \vee B$	$(A \vee B) \rightarrow \neg C$	$\vee\wedge-nf$	$\wedge\vee-nf$
F	F	F	T	F	T	$\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C$	
F	F	T	F	F	T	$\neg A \wedge \neg B \wedge C$	
F	T	F	T	T	T	$\neg A \wedge B \wedge \neg C$	
F	T	T	**F**	**T**	**F**		$A \vee \neg B \vee \neg C$
T	F	F	T	T	T	$A \wedge \neg B \wedge \neg C$	
T	F	T	**F**	**T**	**F**		$\neg A \vee B \vee \neg C$
T	T	F	T	T	T	$A \wedge B \wedge \neg C$	
T	T	T	**F**	**T**	**F**		$\neg A \vee \neg B \vee \neg C$

所以，

$\vee\wedge-nf$为：

$(\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge C) \vee (\neg A \wedge B \wedge \neg C) \vee (A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (A \wedge B \wedge \neg C)$

$\wedge\vee-nf$为：

$(A \vee \neg B \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee B \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee \neg B \vee \neg C)$

得分	

2、（本题满分 12 分）

联结词 $\nrightarrow$ 的真值表定义如下：

P	Q	$P \nrightarrow Q$
T	T	F
T	F	T
F	T	F
F	F	F

在此基础上，我们将联结词的集合扩充为$\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \nrightarrow\}$。

（1）求证 $P \nrightarrow P$为永假命题，而$(P \nrightarrow P) \rightarrow P$为永真命题；
（2）求 $P \rightarrow (P \nrightarrow P)$的真值表
（3）求证$\{\rightarrow, \nrightarrow\}$是联结词的完全组。

(1) 证：$\because$

P	$P \nrightarrow P$	$(P \nrightarrow P) \rightarrow P$
T	F	T
F	F	T

$\therefore$ $P \nrightarrow P$为永假命题，而$(P \nrightarrow P) \rightarrow P$为永真命题。 □

(2) 解：

P	$P \rightarrow (P \nrightarrow P)$
T	F
F	T

(3) 证：由上述真值表知 $P \rightarrow (P \nrightarrow P)$ 与 $\neg P$同真假，因此$\neg$可由$\{\rightarrow, \nrightarrow\}$表示。又因为$\{\neg, \rightarrow\}$是联结词的完全组，故$\{\rightarrow, \nrightarrow\}$是联结词的完全组。

□

得分	

3、（本题满分 10 分）

令$A,B,C,D \in PROP$，sequent $A \vee B \vee C \vee D \vdash A \wedge B \wedge C \wedge D$是否在$G'$中可证？请作出判断，并证明你的结论。

不可证。

证明：假设该 sequent 可证。那么由 soundness 有该 sequent 有效，即

$\vDash (A \vee B \vee C \vee D) \to (A \wedge B \wedge C \wedge D)$

但是，存在$\hat{v}$满足$\hat{v}(A) = \hat{v}(B) = \hat{v}(C) = F$，$\hat{v}(D) = T$，使得

$\hat{v}((A \vee B \vee C \vee D) \to (A \wedge B \wedge C \wedge D)) = F$，这与该 sequent 有效矛盾。

故该 sequent 不可证。

□

得分	

4、（本题满分 10 分）

设$\mathcal{L}$为带等词的一阶语言

（1）给出公式（句子）P_3 使对任何结构 $\mathbb{M} = (M, I)$，若 $M \vDash P_3$ 则 $|M| \geq 3$;

（2）给出公式（句子）P_n（$n \in \mathbb{N}$）使对任何结构 $\mathbb{M} = (M, I)$，若 $M \vDash P_n$则 $|M| \geq n$.

解：

（1）　令x_1, x_2, x_3为互异的个体变元

$$P_3 \equiv \exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 (\neg(x_1 \doteq x_2) \wedge \neg(x_1 \doteq x_3) \wedge \neg(x_2 \doteq x_3))$$

设 $\mathbb{M}$ 为任何结构,

$M \vDash P_3 \quad \Rightarrow$ 存在 a_1, a_2, a_3, 使当 $i \neq j$ 时 $a_i \neq a_j$

$\Rightarrow M$ 中至少有3个元素 $\Rightarrow |M| \geq 3.$

（2）令 $x_1, \cdots, x_n$ 为互异个体变元,

$$P_n \equiv \exists x_1 \exists x_2 \cdots \exists x_n (\bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} \neg(x_i \doteq x_j))$$

或

$$P_n \equiv \exists x_1 \exists x_2 \cdots \exists x_n (\bigwedge_{1 \leq i, j \leq n; i \neq j} \neg(x_i \doteq x_j))$$

设 $\mathbb{M}$ 为任何结构,

$M \vDash P_n \quad \Rightarrow$ 存在 $a_1, \cdots, a_n$, 使当 $i \neq j$ 时 $a_i \neq a_j$

$\Rightarrow M$ 中至少有n个元素 $\Rightarrow |M| \geq n.$

得分	

5、（本题满分 12 分）

在 G 中证明矢列 $\vdash \forall x(B \to C) \to (\exists x B \to \forall x C)$ (其中$x \notin FV(C)$) 可证。

证明：

$$
\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\overset{\text{Ax}}{\forall x(B\to C),C,B[\frac{y_1}{x}]\vdash C}\qquad \overset{\text{Ax}}{\forall x(B\to C),B[\frac{y_1}{x}]\vdash B[\frac{y_1}{x}],C}}{\forall x(B\to C),B[\frac{y_1}{x}]\to C,B[\frac{y_1}{x}]\vdash C}\to L}{\forall x(B\to C),B[\frac{y_1}{x}]\vdash C[\frac{y_2}{x}]}\forall L}{\forall x(B\to C),B[\frac{y_1}{x}]\vdash \forall x C}\forall R}{\forall x(B\to C),\exists x B\vdash \forall x C}\exists L}{\forall x(B\to C)\vdash(\exists x B\to\forall x C)}\to R}{\vdash \forall x(B\to C)\to(\exists x B\to\forall x C)}\to R
$$

其中y_1, y_2为新变元。

故上述矢列可证。 □

得分	

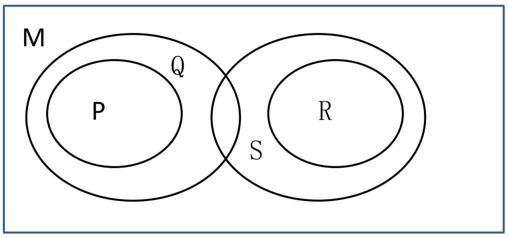
6、（本题满分 14 分）

令φ为一阶逻辑公式：

$$\Big(\forall x\big(P(x)\to Q(x)\big)\land\forall x\big(R(x)\to S(x)\big)\Big)\to\Big(\big(Q(x)\land S(x)\big)\to\big(P(x)\land R(x)\big)\Big)$$

（1）φ是否可满足？（2）φ是否永真？（3）矢列 $\vdash\varphi$是否有效？（4）矢列 $\vdash\varphi$是否可证？

请作出判断并证明你的结论。



解：

（1）φ 可满足。

证明：可构作如下模型$\mathbb{M}=(M,I,\sigma)$：

$M=\{0\}$，$P_M=\{0\}$，$Q_M=\{0\}$，

$R_M=\{0\}$，$S_M=\{0\}$，$\sigma(x)=0$，于是有

$M\vDash_\sigma\Big(\forall x\big(P(x)\to Q(x)\big)\land\forall x\big(R(x)\to S(x)\big)\Big)$ 且 $M\vDash_\sigma\Big(\big(Q(x)\land S(x)\big)\to\big(P(x)\land R(x)\big)\Big)$。

故，φ 可满足。 □

（2）φ 不永真。

证明：可构作如下模型$\mathbb{M}=(M,I,\sigma)$：

$M=\{0,1,2,3,4\}$，$P_M=\{0\}$,$Q_M=\{0,1,2\}$,$R_M=\{3\}$,$S_M=\{2,3,4\}$，$\sigma(x)=2$，于是有

$M\vDash_\sigma\Big(\forall x\big(P(x)\to Q(x)\big)\land\forall x\big(R(x)\to S(x)\big)\Big)$ 但 $M\nvDash_\sigma\Big(\big(Q(x)\land S(x)\big)\to\big(P(x)\land R(x)\big)\Big)$。

故，φ 不永真。 □

（3）矢列 $\vdash\varphi$ 非有效。因为由（2）知 $\nvDash\varphi$。

（4）矢列 $\vdash\varphi$ 不可证。因为由 soundness 知，若$\vdash\varphi$可证，那么$\vdash\varphi$有效。而$\vdash\varphi$ 非有效。

得分	

7、（本题满分 14 分）

在 PK 系统中求证：$\vdash \neg\forall x(A \to B) \to \neg(A \to \forall xB)$，这里$x \notin FV(A)$。

证明：$\vdash \neg\forall x(A \to B) \to \neg(A \to \forall xB)$

$\Leftarrow$ $\neg\forall x(A \to B) \vdash \neg(A \to \forall xB)$ （thm9.4 推理定理）

$\Leftarrow$ $\neg\neg(A \to \forall xB) \vdash \neg\neg\forall x(A \to B)$ （lemma，已证）

$\Leftarrow$ $(A \to \forall xB) \vdash \neg\neg\forall x(A \to B)$ （A06，MP）

$\Leftarrow$ $(A \to \forall xB) \vdash \forall x(A \to B)$ （T18，MP）

$\Leftarrow$ $(A \to \forall xB) \vdash A \to B$ （thm9.5，$x \notin FV(A \to \forall xB)$）

$\Leftarrow$ $\vdash (A \to \forall xB) \to (A \to B)$ （MP）

因此，仅需证 $\vdash (A \to \forall xB) \to (A \to B)$，如下：

$\because \vdash \forall xB \to B$ （A13）

又$\because \vdash (\forall xB \to B) \to ((A \to \forall xB) \to (A \to B))$ （T13）

$\therefore$ 由 MP 有 $\vdash (A \to \forall xB) \to (A \to B)$

$\square$

得分	

8、（本题满分 16 分）

(1) 在一阶语言中将下列推理符号化：

所有的猫都吃鱼，所有的兔都不吃鱼，因此所有的兔都不是猫

(2) 上述推理是否有效？如果是，请在 G 系统中给出证明；如果否，请找出反例模型。

解：(1) 令 $C(x) \triangleq x$为猫；
$F(x) \triangleq x$吃鱼；
$R(x) \triangleq x$为兔， 其中 $C(x), F(x), R(x)$ 为一元谓词。

于是有下列公式：
$\alpha : \forall x((C(x) \to F(x))$
$\beta : \forall x((R(x) \to \neg F(x))$
$\gamma : \forall x(R(x) \to \neg C(x))$

在一阶语言中题中的推理为 $\alpha, \beta \vdash \gamma$：

（2）上述推理有效，在 G 中证明如下：

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{Ax}
\UnaryInfC{$\alpha, \beta, R(y), C(y) \vdash C(y)$}
\RightLabel{$\neg R$}
\UnaryInfC{$\alpha, \beta, R(y) \vdash \neg C(y), C(y)$}
\AxiomC{Ax}
\UnaryInfC{$\alpha, \beta, F(y), R(y) \vdash \neg C(y), F(y)$}
\RightLabel{$\neg L$}
\UnaryInfC{$\alpha, \beta, \neg F(y), F(y), R(y) \vdash \neg C(y)$}
\AxiomC{Ax}
\UnaryInfC{$\alpha, \beta, F(y), R(y) \vdash \neg C(y), R(y)$}
\RightLabel{$\to L$}
\BinaryInfC{$\alpha, \beta, R(y) \to \neg F(y), F(y), R(y) \vdash \neg C(y)$}
\RightLabel{$\forall L$}
\UnaryInfC{$\alpha, \beta, F(y), R(y) \vdash \neg C(y)$}
\RightLabel{$\to L$}
\BinaryInfC{$\alpha, \beta, C(y) \to F(y), R(y) \vdash \neg C(y)$}
\RightLabel{$\forall L$}
\UnaryInfC{$\alpha, \beta, R(y) \vdash \neg C(y)$}
\RightLabel{$\to R$}
\UnaryInfC{$\alpha, \beta \vdash R(y) \to \neg C(y)$}
\RightLabel{$\forall R$}
\UnaryInfC{$\alpha, \beta \vdash \gamma$}
\end{prooftree}
$$

其中y为 fresh 的变元。

$\square$