NNU · 南京师范大学 · 数学科学学院
SCHOOL OF MATHEMATICAL SCIENCES NANJING NORMAL UNIVERSITY
XianLin Campus
No.1 Wenyuan Road.
Nanjing 210023,P.R.China
Tel:86-25-85898785

四. 函数幂级数展开.

Taylor级数. $f(x)$在$x=x_0$存在任意(n)阶导数. 称
$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ 为$f(x)$在x_0的Taylor级数.

问题: 在x_0的邻域内是否有 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$. 即Taylor级数和函数等于$f(x)$本身.

eg: $f(x)=\begin{cases}0 & x=0\\ e^{-\frac{1}{x^2}} & x\neq 0\end{cases}$

解: 易知 $f(0)=0$. $f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x^2}}}=0$.

$f'(x)=\frac{1}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}\ (x\neq 0)\Rightarrow f''(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{x^4}}{e^{\frac{1}{x^2}}}=0$.

$\vdots$

$f^{(n)}(x)=\frac{P(\frac{1}{x})}{e^{\frac{1}{x^2}}}\to\frac{1}{x}$的多项式 $\Rightarrow f^{(n+1)}(0)=\cdots=0$.

$\therefore f(x)$在$x=0$的Taylor级数为 $f(0)+f'(0)x+\cdots+f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!}+\cdots=0=S(x)$

其和函数 $S(x)=0$. 显然在$x=0$的邻域内不等于$f(x)$.

问题: 什么样的条件下有 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$

Th: $f(x)$在$x=x_0$有任意阶导数. 对任意x: $|x-x_0|<r$. 若 $\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0$ then
$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n/n!$ $x\in U(x_0,r)=(x_0-r,x_0+r)$.

i). 令$x_0=0$. 即$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}f^{(n)}(0)x^n/n!$. 称为Maclaurin展式.

ii). 余项三种形式:

a). 积分余项: $R_n(x)=\frac{1}{n!}\int_0^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt$.

b) lagrange余项: $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$ ξ介于0与x之间.

c). cauchy余项: $R_n(x)=f^{(n+1)}(\theta x)(1-\theta)^n x^{n+1}/n!$ $0\le\theta\le 1$.

eg: $f(x)=e^x$的Maclaurin展式.

解: 由 $f^{(k)}(x)=e^x\Rightarrow f^{(k)}(0)=1$ $k=0,1,2,\cdots$. e^x在$x=0$处的Taylor级数为 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ 注 $0!=1$

$\therefore$ lagrange余项 $R_n(x)=\frac{e^{\xi}x^{n+1}}{(n+1)!}\Rightarrow|R_n(x)|\le\frac{e^{|x|}\cdot|x|^{n+1}}{(n+1)!}$ 由 $|\xi|<|x|$.

由比式判别法 得知 $\sum_{n=1}^{\infty}e^{|x|}|x|^{n+1}/(n+1)!$ 级数收敛 $\Rightarrow e^{|x|}|x|^{n+1}/(n+1)!\to 0$. $\therefore R_n(x)\to 0$.

$\therefore e^x=1+x+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$

NNU · 南京师范大学 · 数学科学学院
SCHOOL OF MATHEMATICAL SCIENCES NANJING NORMAL UNIVERSITY
XianLin Campus
No.1 Wenyuan Road.
Nanjing 210023,P.R.China
Tel:86-25-85898785

eg: $f(x)=\sin x$ 的 Maclaurin 展式.

解: $f^{(k)}(x)=\sin(x+\frac{k}{2}\pi)$ $\therefore f^{(k)}(0)=0,1,0,-1,0,1,0,-1\cdots$

$\therefore \sin x$ 的 Maclaurin 展式为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

其 lagrange 余项为

$$R_n(x)=\frac{\sin(\xi+\frac{n+1}{2}\pi)}{(n+1)!}x^{n+1} \qquad \therefore |R_n(x)|\le\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 收敛. $\therefore |R_n(x)|\to 0$ $\therefore R_n(x)\to 0$.

$$\therefore \sin x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

同理可得 $\cos x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2k}/(2k)!$

eg. $f(x)=\ln(1+x)$ 的 Maclaurin 展式.

解一: $f(0)=1$. $f'(x)=\frac{1}{1+x}$ ~~$f(0)=\frac{1}{1+x}$~~ $f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$ $f^{(n)}(0)=1$. $n=1,2,3,\cdots$

$\therefore \ln(1+x)$ 的 Maclaurin 展式为 $\sum(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$ $x\in(-1,1)$ 收敛.

下证余项 $R_n(x)\to 0$.

i). 当 $0\le x<1$ 时. lagrange 余项

$$|R_n(x)|=\left|\frac{(-1)^n}{(n+1)!}\frac{n!}{(1+\xi)^{n+1}}x^{n+1}\right|=\left|\frac{1}{n+1}\left(\frac{x}{1+\xi}\right)^{n+1}\right|\le\frac{1}{n+1}\to 0.$$

$(\sin 0\le x<1.\quad x\le 1+\xi \quad \frac{x}{1+\xi}\le 1)$

ii). 当 $-1<x<0$ 时. cauchy 余项

$$R_n(x)=\left|\frac{(-1)^n}{n!}\frac{n!}{(1+\theta x)^{n+1}}(1-\theta)^n x^{n+1}\right|=\frac{1}{1+\theta x}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n|x|^{n+1}\to 0$$

$-1<x<0.\quad 1-\theta<1+\theta x.\quad 0\le\frac{1-\theta}{1+\theta x}\le 1.$

$$\therefore \ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}.$$

解二: 易知 $\frac{1}{1+x}=\frac{1}{1-(-x)}=1+(-x)+\cdots+(-x)^n+\cdots$ $|x|<1$.

$$\therefore \ln(1+x)=\int_0^x\frac{1}{1+t}dt=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x(-t)^n dt$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)\int_0^x(-t)^n d(-t)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n+1}$$