第一次 习题课

王蔚峻
dg1733016@nju.edu.cn

大纲

- 反三角函数
- 复数
- 数学归纳法
- 确界定理

反正弦函数

1、定义： 正弦函数$y=\sin x(x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}])$ 的反函数

叫反正弦函数，记作 $x=\arcsin y$ (本义反函数)

习惯记作$y=\arcsin x$ (矫正反函数)

$$x\in[-1,1], y\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$$

若$x=a\in[-1,1]$,有$y=\arcsin a$,

这里的"$\arcsin a$"是一个角的符号

2、反正弦函数y=arcsinx,x∈[-1，1]的图象与性质：

(1)定义域:[-1，1]。

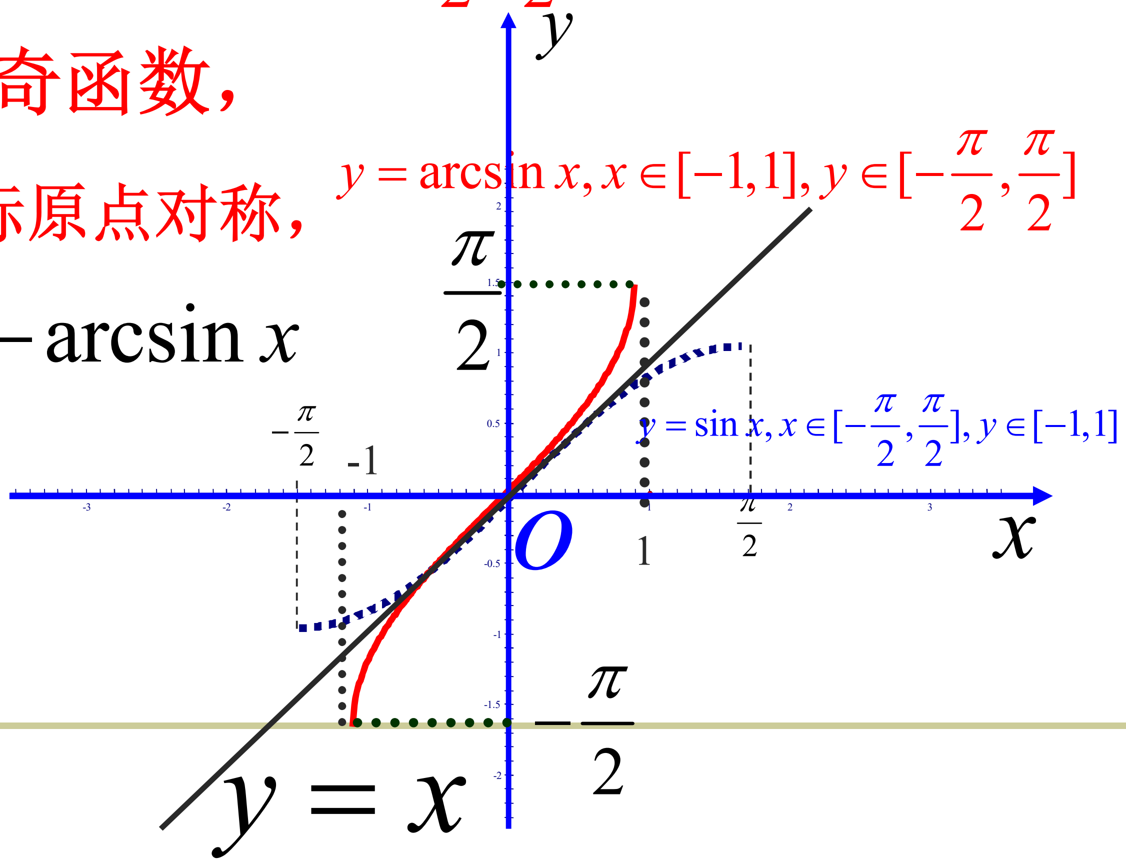
(2)主值区间（值域）：$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$

(3)奇偶性: 是奇函数,

其图象关于坐标原点对称,

$$\arcsin(-x)=-\arcsin x$$

$$x\in[-1,1].$$



(4)单调性:

是增函数。

例：判断下列各式是否正确？并简述理由。

$(1)\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{3}$ 对

$(2)\arcsin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 错 $\frac{\pi}{3}>1$

$(3)\arcsin 1=2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in Z)$ 错 值域

$(4)\arcsin(-\frac{\pi}{3})=-\arcsin\frac{\pi}{3}$ 错 $-\frac{\pi}{3}<-1$

$(5)\sin(\arcsin\sqrt{2})=\sqrt{2}$ 错 $\sqrt{2}>1$

$(6)\sin(\arcsin\frac{\pi^2}{10})=\frac{\pi^2}{10}$ 对

例、求下列各式的值：

$$(1)\tan\left(\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \qquad (2)\cos\left(\arcsin\frac{4}{5}\right)$$

$$(3)\cos\left(\arcsin x\right), x\in[-1,1] \qquad (4)\sin\left(2\arcsin\frac{3}{5}\right)$$

解：$(1)\tan\left(\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$

(2) 设 $\arcsin\frac{4}{5}=\alpha$ 则 $\sin\alpha=\frac{4}{5}$

$$\because \alpha\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}], \therefore \cos\alpha\ge 0,$$

$$\therefore \cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\frac{3}{5},$$

$$\therefore \cos\left(\arcsin\frac{4}{5}\right)=\frac{3}{5}$$

例、求下列各式的值：

$$(1)\tan\left(\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \qquad (2)\cos\left(\arcsin\frac{4}{5}\right)$$

$$(3)\cos(\arcsin x), x\in[-1,1] \qquad (4)\sin\left(2\arcsin\frac{3}{5}\right)$$

(3) 设$\arcsin x=\alpha$，　则 $\sin\alpha=x$

$$\because \alpha\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}], \therefore \cos\alpha\geq 0,$$

$$\therefore \cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-x^2},$$

$$\therefore \cos(\arcsin x)=\sqrt{1-x^2}$$

例、求下列各式的值：

$$(1)\tan\left(\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \qquad (2)\cos\left(\arcsin\frac{4}{5}\right)$$

$$(3)\cos(\arcsin x), x\in[-1,1] \qquad (4)\sin\left(2\arcsin\frac{3}{5}\right)$$

$$(4)\sin\left(2\arcsin\frac{3}{5}\right)=2\sin\left(\arcsin\frac{3}{5}\right)\cos\left(\arcsin\frac{3}{5}\right)$$

$$=2\times\frac{3}{5}\times\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}$$

$$=2\times\frac{3}{5}\times\frac{4}{5}$$

$$=\frac{24}{25}$$

反余弦函数

1、定义：余弦函数 $y = \cos x (x \in [0, \pi])$ 的反函数

叫反余弦函数，记作 $x = \arccos y$ (本义反函数)

习惯记作$y = \arccos x$(矫正反函数)

$$x \in [-1, 1], y \in [0, \pi]$$

若$x = a \in [-1, 1]$，有$y = \arccos a$，

这里的“$\arccos a$”是一个角的符号.

2、反余弦函数y=arccosx,x∈[-1，1]的图象与性质

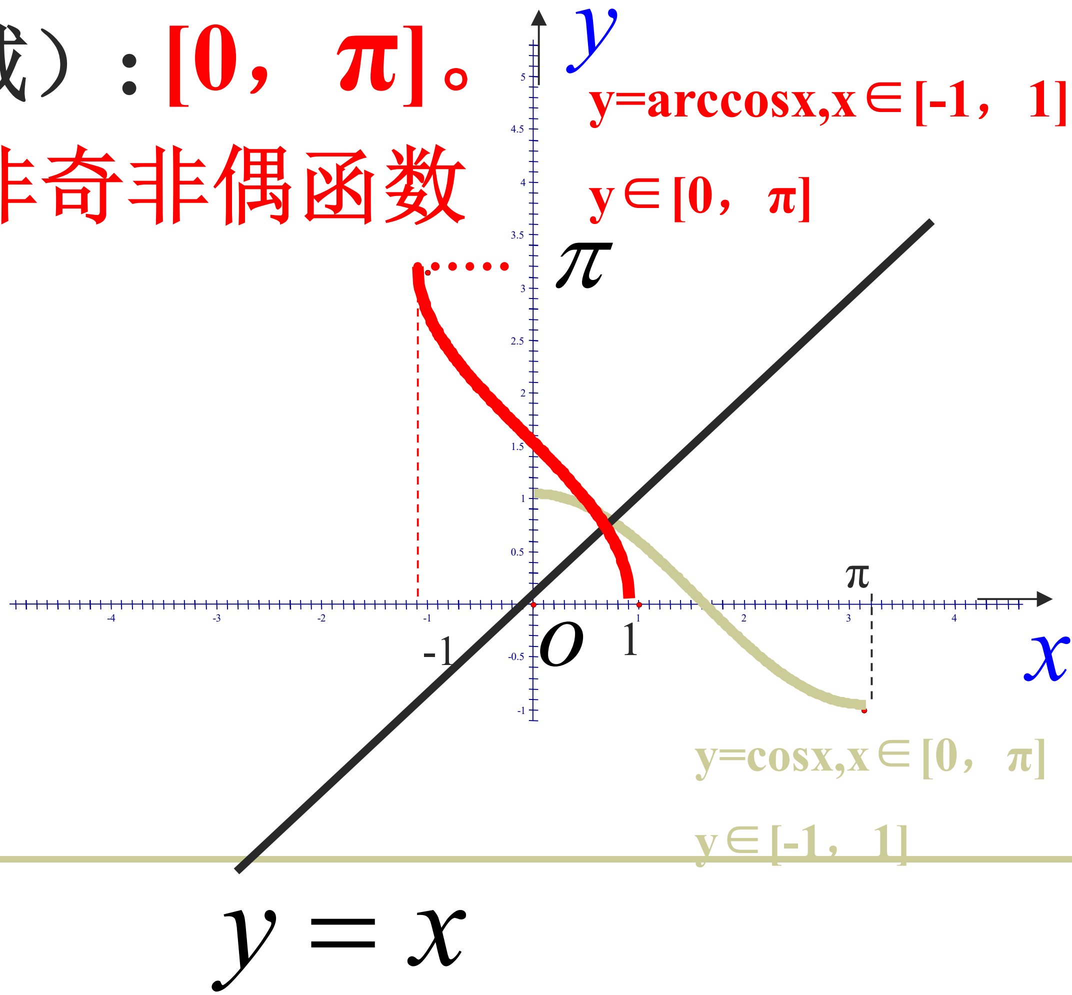
(1)定义域：[-1，1]。

(2)主值区间（值域）：[0，π]。

(3)奇偶性：非奇非偶函数

(4)单调性：

是减函数。



例、求下列各式的值：

$$(1)\sin\left[\arccos\left(-\frac{4}{5}\right)\right]$$

$$(2)\cos\left[\arccos\frac{4}{5}+\arccos\left(-\frac{5}{13}\right)\right]$$

(1) 设$\arccos\left(-\frac{4}{5}\right)=\alpha$，则 $\cos\alpha=-\frac{4}{5}$

$$\because \alpha\in[0,\pi],\therefore \sin\alpha\ge 0,$$

$$\therefore \sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\frac{3}{5},$$

$$\therefore \sin\left[\arccos\left(-\frac{4}{5}\right)\right]=\frac{3}{5}$$

$$(1)\sin\left[\arccos\left(-\frac{4}{5}\right)\right]$$

$$(2)\cos\left[\arccos\frac{4}{5}+\arccos\left(-\frac{5}{13}\right)\right]$$

$$(2)\cos\left[\arccos\frac{4}{5}+\arccos\left(-\frac{5}{13}\right)\right]$$

$$=\cos\left(\arccos\frac{4}{5}\right)\cos\left[\arccos\left(-\frac{5}{13}\right)\right]$$

$$-\sin\left(\arccos\frac{4}{5}\right)\sin\left[\arccos\left(-\frac{5}{13}\right)\right]$$

$$=\frac{4}{5}\times\left(-\frac{5}{13}\right)-\frac{3}{5}\times\frac{12}{13}=-\frac{56}{65}.$$

反正切函数

1、定义： 正切函数 $y=\tan x(x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 的反函数

叫反正切函数，记作 $x=\arctan y$ （本义反函数）

习惯记作 $y=\arctan x$ （矫正反函数）

$$x\in R, y\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$$

若 $x=a\in R$，有 $y=\arctan a$，

复数

1. 虚数单位:

实例：方程 $x^2=-1$ 在实数集中无解.

为了解方程的需要，引入一个新数 i，称为虚数单位.

对虚数单位的规定:

(1) $i^2=-1$;

(2) i 可以与实数在一起按同样的法则进行四则运算.

复数

对于任意两实数 x, y, 我们称 $z = x + yi$ 或 $z = x + iy$ 为复数.

其中 x, y 分别称为 z 的实部和虚部,

记作 $x = \mathrm{Re}(z), \quad y = \mathrm{Im}(z).$

当 $x = 0, \ y \neq 0$ 时, $z = iy$ 称为纯虚数;

当 $y = 0$ 时, $z = x + 0i$, 我们把它看作实数 x.

复数

两复数相等当且仅当它们的实部和虚部分别相等.

复数 z 等于0当且仅当它的实部和虚部同时等于0.

说明　两个数如果都是实数,可以比较它们的大小, 如果不全是实数, 就不能比较大小, 也就是说, 复数不能比较大小.

观察复数 i 和 0, 由复数的定义可知 $i \neq 0$,

(1) 若 $i > 0$, 则 $i \cdot i > 0 \cdot i$, 即 $-1 > 0$, 矛盾;

(2) 若 $i < 0$, 则 $i \cdot i > 0 \cdot i$, 同样有 $-1 > 0$, 矛盾.

由此可见, 在复数中无法定义大小关系.

复数的代数运算

设两复数 $z_1 = x_1 + iy_1, \quad z_2 = x_2 + iy_2,$

1. 两复数的和、差:

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2).$$

2. 两复数的积:

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_2y_1 + x_1y_2).$$

3. 两复数的商:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

例2 将下列复数表示为 $x+iy$ 的形式.

(1) $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^7$;　　(2) $\dfrac{i}{1-i}+\dfrac{1-i}{i}$.

解　(1) $\dfrac{1-i}{1+i}=\dfrac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\dfrac{(1-i)^2}{2}=-i,$

$$\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^7=(-i)^7=i.$$

(2) $\dfrac{i}{1-i}+\dfrac{1-i}{i}=\dfrac{i^2+(1-i)^2}{(1-i)i}=\dfrac{-1-2i}{1+i}$

$$=\frac{(-1-2i)(1-i)}{2}=-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i.$$

共轭复数

实部相同而虚部绝对值相等符号相反的两个复数称为共轭复数. 与 z 共轭的复数记为 $\bar{z}$,

若 $z = x + iy$, 则 $\bar{z} = x - iy$.

例1　计算共轭复数 $x + yi$ 与 $x - yi$ 的积.

解　$(x - yi)(x + yi) = x^2 - (yi)^2 = x^2 + y^2.$

结论:

两个共轭复数 $z, \bar{z}$ 的积是一个实数.

共轭复数

共轭复数的性质:

(1) $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z}_1 \pm \overline{z}_2$; $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2$; $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}$;

(2) $\overline{\overline{z}} = z$;

(3) $z \cdot \overline{z} = [\mathrm{Re}(z)]^2 + [\mathrm{Im}(z)]^2$;

(4) $z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$, $z - \overline{z} = 2i\,\mathrm{Im}(z)$.

例4 设两复数 $z_1 = x_1 + iy_1, \quad z_2 = x_2 + iy_2,$

证明 $z_1 \cdot \bar{z}_2 + \bar{z}_1 \cdot z_2 = 2\,\mathrm{Re}(z_1 \cdot \bar{z}_2).$

证 $z_1 \cdot \bar{z}_2 + \bar{z}_1 \cdot z_2 =$

$$(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2) + (x_1 - iy_1)(x_2 + iy_2)$$

$$= (x_1x_2 + y_1y_2) + i(x_2y_1 - x_1y_2)$$

$$+ (x_1x_2 + y_1y_2) + i(-x_2y_1 + x_1y_2)$$

$$= 2(x_1x_2 + y_1y_2) = 2\,\mathrm{Re}(z_1 \cdot \bar{z}_2).$$

数学归纳法 (Induction)

- 证明某定理对任意的正整数n为真，只需证明下面两点：
  - 该定理对n=1为真。
  - 归纳假设该定理对任一正整数n为真，则它对下一个正整数n+1也为真。

例：用数学归纳法证明 $1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

（算数级数 arithmetic series）

数学归纳法 (Induction)

证：当n=1时，等式成立。

假设对于n=k时，等式成立，即

$$1+2+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}$$

则对于n=k+1时，有

$$1+2+\cdots+k+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+k+1$$

$$=\frac{k^2+3k+2}{2}=\frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}$$

于是，由数学归纳法，对于任何正整数，等式成立

数学归纳法 (Induction)

例：证 $1^3+2^3+\cdots+n^3=(1+2+\cdots+n)^2$

证：当n=1时，等式成立。

假设n=k时等式成立，即 $1^3+2^3+\cdots+k^3=(1+2+\cdots+k)^2$

则对于n=k+1，有

$$\begin{aligned}1^3+2^3+\cdots+k+(k+1)^3 &= (1+2+\cdots+k)^2+(k+1)^3\\ &= (\frac{k(k+1)}{2})^2+(k+1)^3\\ &= \frac{k^2(k+1)^2+4(k+1)^3}{2}\\ &= \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{2}=\{\frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}\}^2\end{aligned}$$

于是，对于任何正整数n，等式成立。

数学归纳法 (Induction)

例：证 $(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n)\ge 1+x_1+x_2+\cdots+x_n$ ，其中 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是符号相同且大于-1的数。（伯努利不等式）

证：当n=1时，不等式成立。

假设n=k时，不等式成立，即 $(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_k)\ge 1+x_1+x_2+\cdots+x_k$

则n=k+1时，由 $1+x_i>0$，有

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_k)(1+x_{k+1})\ge(1+x_1+x_2+\cdots+x_k)(1+x_{k+1})$$

$$=(1+x_1+x_2+\cdots+x_k+x_{k+1})+(x_1x_{k+1}+x_2x_{k+1}+\cdots+x_kx_{k+1})$$

因为 $x_ix_j\ge 0$

$$\ge 1+x_1+x_2+\cdots+x_k+x_{k+1}$$

于是，得证。

数学归纳法 (Induction)

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

证：当n=1时，成立。

假设n=k时，成立，即 $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2k-1}{2k}<\frac{1}{\sqrt{2k+1}}$

则对于n=k+1时，有

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2k-1}{2k}\cdot\frac{2k+1}{2k+2}<\frac{1}{\sqrt{2k+1}}\cdot\frac{2k+1}{2k+2}=\frac{\sqrt{2k+1}}{2k+2}$$

故只要证 $\frac{\sqrt{2k+1}}{2k+2}<\frac{1}{\sqrt{2k+3}}$，即证 $(2k+1)(2k+3)<(2k+2)^2$，该不等式为

$$4k^2+8k+3<4k^2+8k+4$$

所以成立。

于是，不等式对任何正整数n都成立。

数学归纳法 (Induction)

例：设 $a^{[n]}=a(a-h)\cdots[a-(n-1)h]$ 及 $a^{[0]}=1$，求证：$(a+b)^{[n]}=\Sigma_{m=0}^{n}C_n^m a^{[n-m]}b^m$

证：当n=1时，$(a+b)^{[1]}=a+b$ 且 $\Sigma_{m=0}^{1}C_1^m a^{[1-m]}b^{[m]}=a+b$，成立。

设n=k时，成立，即 $(a+b)^{[k]}=\Sigma_{m=0}^{k}C_k^m a^{[k-m]}b^{[m]}$

则对于n=k+1时，有 $(a+b)^{[k+1]}=(a+b)^{[k]}(a+b-kh)$

将n=k代入得，$(a+b)^{[k+1]}=(a+b-kh)\Sigma_{m=0}^{k}C_k^m a^{[k-m]}b^{[m]}$

$$=(a+b-kh)\{C_k^0a^{[k]}b^{[0]}+C_k^1a^{[k-1]}b^{[1]}+\cdots+C_k^ka^{[0]}b^{[k]}\}$$

$$=(a+b-kh)C_k^0a^{[k]}b^{[0]}+(a+b-kh)C_k^1a^{[k-1]}b^{[1]}+\cdots+(a+b-kh)C_k^ka^{[0]}b^{[k]}$$

$$=((a-kh)+b)C_k^0a^{[k]}b^{[0]}+(a-(k-1)h+(b-h))C_k^1a^{[k-1]}b^{[1]}+\cdots+(a+(b-kh))C_k^ka^{[0]}b^{[k]}$$

$$=C_k^0a^{[k+1]}b^{[0]}+C_k^0a^{[k]}b^{[1]}+C_k^1a^{[k]}b^{[1]}+C_k^1a^{[k-1]}b^{[2]}+\cdots+C_k^ka^{[1]}b^{[k]}+C_k^ka^{[0]}b^{[k+1]}$$

$$=C_{k+1}^0a^{[k+1]}b^{[0]}+(C_k^0+C_k^1)a^{[k]}b^{[1]}+\cdots+(C_k^{k-1}+C_k^k)a^{[1]}b^{[k]}+C_{k+1}^{k+1}a^{[0]}b^{[k+1]}$$

$$=C_{k+1}^0a^{[k+1]}b^{[0]}+C_{k+1}^1a^{[k]}b^{[1]}+\cdots+C_{k+1}^ka^{[1]}b^{[k]}+C_{k+1}^{k+1}a^{[0]}b^{[k+1]}$$

$$=\Sigma_{m=0}^{k+1}C_{k+1}^m a^{[k+1-m]}b^{[m]}$$

数学归纳法 (Induction)

例：设 $a^{[n]}=a(a-h)\cdots[a-(n-1)h]$ 及 $a^{[0]}=1$，求证：$(a+b)^{[n]}=\Sigma_{m=0}^{n}C_n^m a^{[n-m]}b^m$

证：当n=1时，$(a+b)^{[1]}=a+b$ 且 $\Sigma_{m=0}^{1}C_1^m a^{[1-m]}b^{[m]}=a+b$，成立。

设n=k时，成立，即 $(a+b)^{[k]}=\Sigma_{m=0}^{k}C_k^m a^{[k-m]}b^{[m]}$

则对于n=k+1时，有 $(a+b)^{[k+1]}=(a+b)^{[k]}(a+b-kh)$

将n=k代入得，$(a+b)^{[k+1]}=(a+b-kh)\Sigma_{m=0}^{k}C_k^m a^{[k-m]}b^{[m]}$

$$=(a+b-kh)\{C_k^0a^{[k]}b^{[0]}+C_k^1a^{[k-1]}b^{[1]}+\cdots+C_k^ka^{[0]}b^{[k]}\}$$

$$=(a+b-kh)C_k^0a^{[k]}b^{[0]}+(a+b-kh)C_k^1a^{[k-1]}b^{[1]}+\cdots+(a+b-kh)C_k^ka^{[0]}b^{[k]}$$

$$=((a-kh)+b)C_k^0a^{[k]}b^{[0]}+(a-(k-1)h+(b-h))C_k^1a^{[k-1]}b^{[1]}+\cdots+(a+(b-kh))C_k^ka^{[0]}b^{[k]}$$

$$=C_k^0a^{[k+1]}b^{[0]}+C_k^0a^{[k]}b^{[1]}+C_k^1a^{[k]}b^{[1]}+C_k^1a^{[k-1]}b^{[2]}+\cdots+C_k^ka^{[1]}b^{[k]}+C_k^ka^{[0]}b^{[k+1]}$$

$$=C_{k+1}^0a^{[k+1]}b^{[0]}+(C_k^0+C_k^1)a^{[k]}b^{[1]}+\cdots+(C_k^{k-1}+C_k^k)a^{[1]}b^{[k]}+C_{k+1}^{k+1}a^{[0]}b^{[k+1]}$$

$$=C_{k+1}^0a^{[k+1]}b^{[0]}+C_{k+1}^1a^{[k]}b^{[1]}+\cdots+C_{k+1}^ka^{[1]}b^{[k]}+C_{k+1}^{k+1}a^{[0]}b^{[k+1]}$$

$$=\Sigma_{m=0}^{k+1}C_{k+1}^m a^{[k+1-m]}b^{[m]}$$

观察：第三个等式比最终要求的少一项。显然，需要对组合数进行拆分。

$$C_{n+1}^{k+1}=C_n^k+C_n^{k+1}$$

又a+b-kh=(a-kh)+b=(a-(k-1)h)+(b-h)=……恰好可以构成对应系数

$$(a+b-kh)C_k^i a^{[k-i]}b^{[i]} = (a-(k-i)h+(b-ih))C_k^i a^{[k-i]}b^{[i]}$$
$$= (a-(k-i)h)C_k^i a^{[k-i]}b^{[i]} + (b-ih)\, C_k^i a^{[k-i]}b^{[i]}$$
$$= C_k^i a^{[k+1-i]}b^{[i]} + C_k^{i+1} a^{[k-i]}b^{[i+1]}$$

设n=k时，成立，即 $(a+b)^{[k]} = \Sigma_{m=0}^{k} C_k^m a^{[k-m]}b^{[m]}$

则对于n=k+1时，有 $(a+b)^{[k+1]} = (a+b)^{[k]}(a+b-kh)$

将n=k代入得，$(a+b)^{[k+1]} = (a+b-kh)\Sigma_{m=0}^{k} C_k^m a^{[k-m]}b^{[m]}$

$$= (a+b-kh)\{C_k^0 a^{[k]}b^{[0]} + C_k^1 a^{[k-1]}b^{[1]} + \cdots + C_k^k a^{[0]}b^{[k]}\}$$

$$= (a+b-kh)C_k^0 a^{[k]}b^{[0]} + (a+b-kh)C_k^1 a^{[k-1]}b^{[1]} + \cdots + (a+b-kh)C_k^k a^{[0]}b^{[k]}$$

$$= ((a-kh)+b)C_k^0 a^{[k]}b^{[0]} + (a-(k-1)h+(b-h))C_k^1 a^{[k-1]}b^{[1]} + \cdots + (a+(b-kh))C_k^k a^{[0]}b^{[k]}$$

$$= C_k^0 a^{[k+1]}b^{[0]} + C_k^0 a^{[k]}b^{[1]} + C_k^1 a^{[k]}b^{[1]} + C_k^1 a^{[k-1]}b^{[2]} + \cdots + C_k^k a^{[1]}b^{[k]} + C_k^k a^{[0]}b^{[k+1]}$$

$$= C_{k+1}^0 a^{[k+1]}b^{[0]} + (C_k^0 + C_k^1)a^{[k]}b^{[1]} + \cdots + (C_k^{k-1} + C_k^k)a^{[1]}b^{[k]} + C_{k+1}^{k+1} a^{[0]}b^{[k+1]}$$

$$= C_{k+1}^0 a^{[k+1]}b^{[0]} + C_{k+1}^1 a^{[k]}b^{[1]} + \cdots + C_{k+1}^k a^{[1]}b^{[k]} + C_{k+1}^{k+1} a^{[0]}b^{[k+1]}$$

$$= \Sigma_{m=0}^{k+1} C_{k+1}^m a^{[k+1-m]}b^{[m]}$$

观察：第三个等式比最终要求的少一项。显然，需要对组合数进行拆分。

$$C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_n^{k+1}$$

又a+b-kh=(a-kh)+b=(a-(k-1)h)+(b-h)=……恰好可以构成对应系数

确界存在定理

- 上确界(sup A)：
  - 设A为非空实数集，若$\exists s\in R$，满足：

    $$\forall x\in A, x\le s$$

    $$\forall \epsilon>0, \exists x_0\in A, \text{有} x_0>s-\epsilon$$

  - 则称s是A的上确界。
- 下确界 (inf A)：略
- 确界存在定理：
  - 任一有上（下）界的非空实数集A必有上（下）确界。

确界存在定理

例：设{-x}为数的集合，这些数是与x∈{x}符号相反的数，证明(1)inf{-x}=-sup{x}; (2)sup(-x)=-inf{x}

证：(1) 设inf{-x}=m，则有：

$$\forall -x \in \{-x\}, -x \ge m \qquad \forall \epsilon > 0, \exists -x' \in \{-x\}, -x' < m + \epsilon$$

由上两式和题设，得

$$\forall x \in \{x\}, x \le -m \qquad \forall \epsilon > 0, \exists x' \in \{x\}, x' > -m - \epsilon$$

因此有，-m’=sup{x}，即m’=-sup{x}，证毕。

(2) 设sup(-x)=M，则有：

$$\forall -x \in \{-x\}, -x \le M \qquad \forall \epsilon > 0, \exists -x' \in \{-x\}, -x' > M - \epsilon$$

同理，可得

$$\forall x \in \{x\}, x \ge -M \qquad \forall \epsilon > 0, \exists x' \in \{x\}, x' < -M + \epsilon$$

因此，M=-inf{x}，证毕。

确界存在定理

例：设{x+y}是所有x+y这些和的集合，其中x∈{x}及y∈{y}.证：(1)inf{x+y}=inf{x}+inf{y}; (2)sup{x+y}=sup{x}+sup{y}.

证：(1)设inf{x}=m_1,inf{y}= m_2，则

$$\forall x \in \{x\}, x \geq m_1 \qquad \forall \epsilon > 0, \exists x' \in \{x\}, x' < m_1 + \boxed{\frac{\epsilon}{2}}$$

$$\forall y \in \{y\}, y \geq m_2 \qquad \forall \epsilon > 0, \exists y' \in \{y\}, y' < m_2 + \frac{\epsilon}{2}$$

由上式可得

$$x + y \in \{x + y\},\text{其中} x \in \{x\}, y \in \{y\},\text{则} x + y \geq m_1 + m_2$$

$$\forall \epsilon > 0, \exists x' + y' \in \{x + y\},\text{其中} x' \in \{x\}, y' \in \{y\}, x' + y' < m_1 + \frac{\epsilon}{2} + m_2 + \frac{\epsilon}{2} = m_1 + m_2 + \epsilon$$

因此， $m_1 + m_2$=inf{x+y}，即inf{x+y}=inf{x}+inf{y}。

(2)同法可证。

确界存在定理

例：设{xy}是所有xy所有乘积的集合，其中x∈{x}及y∈{y}，且$x \geq 0, y \geq 0$.证：(1)inf{xy}=inf{x}inf{y}; (2)sup{xy}=sup{x}sup{y}.

证：(1)设inf{x}=m_1,inf{y}= m_2，又$x \geq 0, y \geq 0$，故$m_1 \geq 0, m_2 \geq 0$则

$$\forall x \in \{x\}, x \geq m_1 \geq 0 \qquad \forall \epsilon > 0, \exists x' \in \{x\}, 0 \leq x' < m_1 + \epsilon$$

$$\forall y \in \{y\}, y \geq m_2 \geq 0 \qquad \forall \epsilon > 0, \exists y' \in \{y\}, 0 \leq y' < m_2 + \epsilon$$

由上式可得

$$xy \in \{xy\},\text{其中} x \in \{x\}, y \in \{y\},\text{则} xy \geq m_1 m_2$$

$$\forall \epsilon > 0, \exists x'y' \in \{xy\},\text{其中} x' \in \{x\}, y' \in \{y\}, 0 \leq x'y' < (m_1 + \epsilon)(m_2 + \epsilon) = m_1 m_2 + \epsilon'$$

$$\epsilon' = (m_1 + m_2)\epsilon + \epsilon^2$$

因此，$m_1 m_2$=inf{xy}，即inf{xy}=inf{x}inf{y}。