

数理逻辑期中考试试卷

2018 年 5 月

(共 8 题 总分 100 分 考试时间 2 小时，开卷)

系： 学号： 姓名：

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
得分									

得分	
----	--

1、(本题满分 12 分)

令命题逻辑公式 φ 为 $(A \vee B) \rightarrow \neg C$ ，其中 $A, B, C \in PS$ 。

- (1) φ 是否一个永真式？请作出判断并证明你的结论。
(2) 求 φ 的 $\wedge \neg nf$ 和 $\vee \neg nf$ 。

得分	
----	--

2、(本题满分 12 分)

联结词 \leftrightarrow 的真值表定义如下：

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
T	T	F
T	F	T
F	T	F
F	F	F

在此基础上，我们将联结词的集合扩充为 $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ 。

- (1) 求证 $P \leftrightarrow P$ 为永假命题，而 $(P \leftrightarrow P) \rightarrow P$ 为永真命题；
- (2) 求 $P \rightarrow (P \leftrightarrow P)$ 的真值表
- (3) 求证 $\{\rightarrow, \leftrightarrow\}$ 是联结词的完全组。

得分	
----	--

3、(本题满分 10 分)

令 $A, B, C, D \in PROP$, sequent $A \vee B \vee C \vee D \vdash A \wedge B \wedge C \wedge D$ 是否在 G' 中可证? 请作出判断, 并证明你的结论。

得分	
----	--

4、(本题满分 10 分)

设 \mathcal{L} 为带等词的一阶语言

- (1) 给出公式 (句子) P_3 使对任何结构 $\mathbb{M} = (M, I)$, 若 $M \models P_3$ 则 $|M| \geq 3$;
- (2) 给出公式 (句子) P_n ($n \in \mathbb{N}$) 使对任何结构 $\mathbb{M} = (M, I)$, 若 $M \models P_n$ 则 $|M| \geq n$.

得分	
----	--

5、(本题满分 12 分)

在 \mathbf{G} 中证明矢列 $\vdash \forall x(B \rightarrow C) \rightarrow (\exists x B \rightarrow \forall x C)$ (其中 $x \notin FV(C)$) 可证。

得分	
----	--

6、(本题满分 14 分)

令 φ 为一阶逻辑公式：

$$\left(\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge \forall x(R(x) \rightarrow S(x)) \right) \rightarrow \left((Q(x) \wedge S(x)) \rightarrow (P(x) \wedge R(x)) \right)$$

(1) φ 是否可满足？ (2) φ 是否永真？ (3) 矢列 $\vdash \varphi$ 是否有效？ (4) 矢列 $\vdash \varphi$ 是否可证？

请作出判断并证明你的结论。

得分	
----	--

7、(本题满分 14 分)

在 PK 系统中求证: $\vdash \neg \forall x(A \rightarrow B) \rightarrow \neg(A \rightarrow \forall xB)$, 这里 $x \notin FV(A)$ 。

得分	
----	--

8、(本题满分 16 分)

(1) 在一阶语言中将下列推理符号化：

所有的猫都吃鱼，所有的兔都不吃鱼，因此所有的兔都不是猫

(2) 上述推理是否有效？如果是，请在 G 系统中给出证明；如果否，请找出反例模型。