习题课

赵申宜

zhaosy@lamda.nju.edu.cn

例 1 讨论下列函数的单调性：

(1) $y=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}$, $x>0$;

(2) $y=\sqrt[3]{(2x-a)(a-x)^{2}}$, $a>0$;

(3) $y=x+|\sin x|$;　　(4) $y=x^{n}\cdot e^{-x}$, $n>0, x>0$.

例 2　判断下列命题的真伪：

(1) 若 $f(x)$ 在 (a,b) 内单增且可导，则 $f'(x)>0$.

(2) 单调函数的导函数必单调.

(3) 一个函数的导函数单调，则函数必单调.

(4) $f(x)$ 在 (a,b) 内连续，在 $[a,b]$ 上单调减少，则 $f'(x)\leqslant 0$.

例 4　证明下列不等式：

(1) $1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})>\sqrt{1+x^2},\ x>0$;

例 7　讨论 $k>0$，k 为何值时，方程

$$\arctan x-kx=0$$

存在正根.

例 13　证明：$\frac{1}{2^{p-1}}\leqslant x^p+(1-x)^p\leqslant 1,\ 0\leqslant x\leqslant 1,p>1$.

例 1 设 $f(x)$,$g(x)$ 为(a,b) 上的凸函数,证明:

$$h(x) \triangleq \max\{f(x),g(x)\}$$

也是(a,b) 上的凸函数.

例 6 设 $f(x)$ 在(a,b) 内可导,$\forall\ x,y \in (a,b)$,且 $x < y$,$\exists$ 惟一的 $z \in (x,y)$,使 $f(y) - f(x) = f'(z)(y - x)$,证明:$f(x)$ 在(a,b) 内是严格凸或严格凹的.

例 8 设 a,b,x,y 都是正数，证明：

$$x\ln\frac{x}{a}+y\ln\frac{y}{b}\geqslant(x+y)\ln\frac{x+y}{a+b}.$$

证 设 $f(x)=x\ln x\ (x>0)$，则 $f'(x)=1+\ln x$，$f''(x)=\frac{1}{x}>0$，所以 $f(x)$ 为凸函数，有

$$\frac{x+y}{a+b}\ln\frac{x+y}{a+b}\leqslant\frac{x}{a+b}\ln\frac{x}{a+b}+\frac{y}{a+b}\ln\frac{y}{a+b}.$$

故 $(x+y)\ln\frac{x+y}{a+b}\leqslant x\ln\frac{x}{a+b}+y\ln\frac{y}{a+b}\leqslant x\ln\frac{x}{a}+y\ln\frac{y}{b}.$

1

Assume $f(x)$ is continuous on $[0,1]$, and $f(0) = f(1)$. Please proof that $\forall n \in N^+$, $\exists \zeta_n \in [0,1]$ s.t. $f(\zeta_n) = f(\zeta_n + \frac{1}{n})$.

2

Assume $f(x)$ is a continuous function on R, and $f(f(x)) = x$. Please proof that $\exists \zeta$ s.t. $f(\zeta) = \zeta$.

3

Let $\{a_n\}$ be a positive sequence, $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Please proof that $\exists M > 0$ s.t. $\sum_{n=1}^{m} \frac{a_n}{S_n^2} < M, \forall m \geq 1$.

4

Assume $f(x)$ is differentiable on $[a, \infty)$, and it satisfies $f(a) = 0, |f'(x)| \leq |f(x)|, \forall x \in [a, \infty)$. Please proof that $f(x) = 0$.

5

Assume $f(x)$ is continuous on I. $\forall x \in I, \exists \delta_x$ s.t. $f(x)$ is convex on $(x-\delta_x, x+\delta_x)$. Please proof that $f(x)$ is convex on I.

6

Is there any convex function $f(x)$ satisfying $f(0) < 0$ and

$$\lim_{|x| \to \infty} (f(x) - |x|) = 0?$$