NANJING UNIVERSITY

第九次习题课

王蔚峻
weijunwang@smail.nju.edu.cn

作业

- 习题3.1
  - A: 1(2), 4(2,3), 8(2,3,6), 9, 10, 11, 12, 14
  - B: 3, 4, 5, 6

outline

- 定积分定义
- Darboux和
- 定积分性质

定积分

- 分：精确（=）. [a,b]中任意插入n-1个分点

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_m = b$$

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1},\ i = 1, 2, \cdots, n.$$

- 匀：近似（≈）. 任取小区间中一点

$$\xi_i \in [x_i, x_{i-1}] \qquad \Delta A \approx f(\xi_i)\Delta x_i$$

- 合：所有ΔA求和

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

- 精：取极限➔“=”. 分割细度➔0
  - $A = \lim_{d \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$

例 1 将区间$[a,b]$ n 等分，并取 ξ_i 为小区间的中点，求下列函数 $f(x)$ 在给定区间上的积分和 $\sum^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$：(2) $f(x)=x^2,[0,4]$.

令 $\Delta x_i = \frac{4}{n}, \xi_i = \frac{4(i-1)}{n} + \frac{2}{n}$

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{4(i-1)}{n}+\frac{2}{n}\right)^2 \cdot \frac{4}{n} = \sum_{i=1}^{n}\frac{4^2}{n^3}(2i-1)^2$$

$\sum_{i=1}^{n} i^2 = n(n+1)(2n+1)/6$， $\sum_{i=1}^{2n} i^2 = 2n(2n+1)(4n+1)/6$，
$\sum_{i=1}^{n}(2i)^2 = 4n(n+1)(2n+1)/6$，
$\sum_{i=1}^{n}(2i-1)^2 = \sum_{i=1}^{2n} i^2 - \sum_{i=1}^{n}(2i)^2 = n(4n^2-1)/3$

$$= \frac{4^2}{n^3}\frac{n}{3}(4n^2-1) = \frac{16}{3}\frac{4n^2-1}{n^2}.$$

定积分定义

条件：

- f是定义在区间[a,b]上的有界函数；
- 无论如何分割；
- 无论点如何选取；
- 分割后的小区间的最大长度➔0；

和式 $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 都趋于一个常数，则该常数为f在[a,b]上的定积分。记作 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

定积分定义

- 定积分$\varepsilon-\delta$定义

2. 定积分定义 设 f 是定义在$[a,b]$上的一个有界函数，I 是一个确定的常数. 若 $\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ \delta>0$，使得对于$[a,b]$上的任何分割 T，只要它的细度 $\|T\|<\delta$，就有分割 T 的所有积分和 $\sum(T)$ 都满足

$$\left|\sum(T)-I\right|<\varepsilon$$

- $\lim\limits_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$与函数极限的定义有什么不同？
  - 取极限的对象不同（d，x）。
  - 趋近过程中的对应关系不同。每个d对应无穷个和式（每个x对应一个f（x））

例 3 用定积分定义计算下列积分：

(1) $\int_0^1 a^x \mathrm{d}x$；　　　　(4) $\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ $(0 < a < b)$.

(3) 将区间n等分，并取左端点

$$\int_0^1 a^x \mathrm{d}x = \lim_{\|T\|\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} a^{\xi_i} \Delta x_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} a^{i/n} \cdot \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \frac{a-1}{a^{1/n}-1} = \frac{a-1}{\ln a}.$$

(4) 对[a,b] n等分，并在每个区间中取$\sqrt{x_i \cdot x_{i+1}}$

$$\sum_{i=1}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{x_i x_{i+1}}(x_{i+1} - x_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{1}{x_i} - \frac{1}{x_{i+1}} \right)$$

telescoping series (即裂项相消)

$$= \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$$

达布和

- 函数f在[a,b]上有界；
- 对[a,b]上的任一分割T，$\Delta_{\mathrm{i}} = [x_i, x_{i-1}], i = 1, \ldots, n$；
- 对f(x)在Δ_{i}有上、下确界M_i和m_i；

则称和数$\sum_{i=1}^{n} \mathrm{M}_i \Delta_i$ 和 $\sum_{i=1}^{n} \mathrm{m}_i \Delta_i$为f关于T的达布上、下和

也叫Darboux大（小）和

例 2 将区间$[a,b]n$等分，求下列函数在指定区间上达布下和与达布上和：$f(x)=\sqrt{x},[0,1]$

取$\Delta x_i=1/n$，f(x)在[0,1]上严格单调增，因此

$$m_i=\sqrt{\frac{i-1}{n}},\quad M_i=\sqrt{\frac{i}{n}}.$$

所以，

$$s=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{i-1}{n}}\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{i-1}{n}}$$

$$S=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{i}{n}}\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{i}{n}}$$

$\sum\sqrt{i}$ 没有通项解

Riemann可积

- 前提：f是定义在[a,b]上的有界函数
- 充要条件：
  - 一：$\forall \varepsilon > 0, \exists$ 某一分割 T，使得

$$\lim_{\|T\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i = 0.$$

  - 二：d→0时，Darboux上积分= Darboux下积分

Riemann可积

- 可积函数类：
  - f 在 [a,b] 上连续。
    - 证明 hint：cantor TH 找最小的δ + darboux TH
  - f 是在 [a,b] 上只有有限个间断点的有界函数。
    - 证明 hint：间断、连续两部分分别用darboux TH
  - f 是在 [a,b] 上的单调有界函数。
    - 证明 hint：单调→Mi=f(xi+1), mi=f(xi) + darboux TH

例 4 证明：若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上无界，则函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上不可积.

- Hint：反证法+定义
- f可积←→对ε=1，δ>0，任意分割T，||T||<δ，则

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - I\right| < 1$$

- f无界→在分割的某个小区间中存在某点函数值>M.
- 不妨假设第一个区间无界，则有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \lim_{n\to\infty}\left[f(\xi_1)\Delta x_1 + \sum_{i=2}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\right] = \infty$$

- 与可积定义矛盾。

例 6 设 f 在 $[a,b]$ 上连续，试说明任意改变 f 在有限个点上的值不影响它的可积性和积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的值.

- 令改变后的函数为f’
- f’有有限个可去间断点的函数可积
- 一点处积分为零，且间断点个数有限

➔ 积分值不变。

可不可以改变这些点的值为∞，使积分值改变?

不可以。因为函数可积的前提是函数有界。

例8 若函数 $f(y)$ 与 $y=\varphi(x)$ 都可积，它们的复合函数 $f[\varphi(x)]$ 是否可积？

不一定。如何用复合函数构造Dirichlet函数。

$$f(y)=\begin{cases}0, & y=0,\\ 1, & y\neq 0\end{cases}$$

$$y=\varphi(x)=\begin{cases}0, & x\text{ 是无理数},\\ 1, & x=0,\\ 1/n, & x=\dfrac{m}{n},\end{cases}\quad m\text{ 与 }n\text{ 是互质整数}$$

Riemann

$$f[\varphi(x)]=\begin{cases}0, & x\text{ 是无理数},\\ 1, & x\text{ 是有理数}\end{cases}$$

Dirichlet

例 12 证明：若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上黎曼可积，且 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x > 0$，则 $\exists$ 区间 $[\alpha,\beta] \subset [a,b]$，在 $[\alpha,\beta]$ 上 $f(x) > 0$.

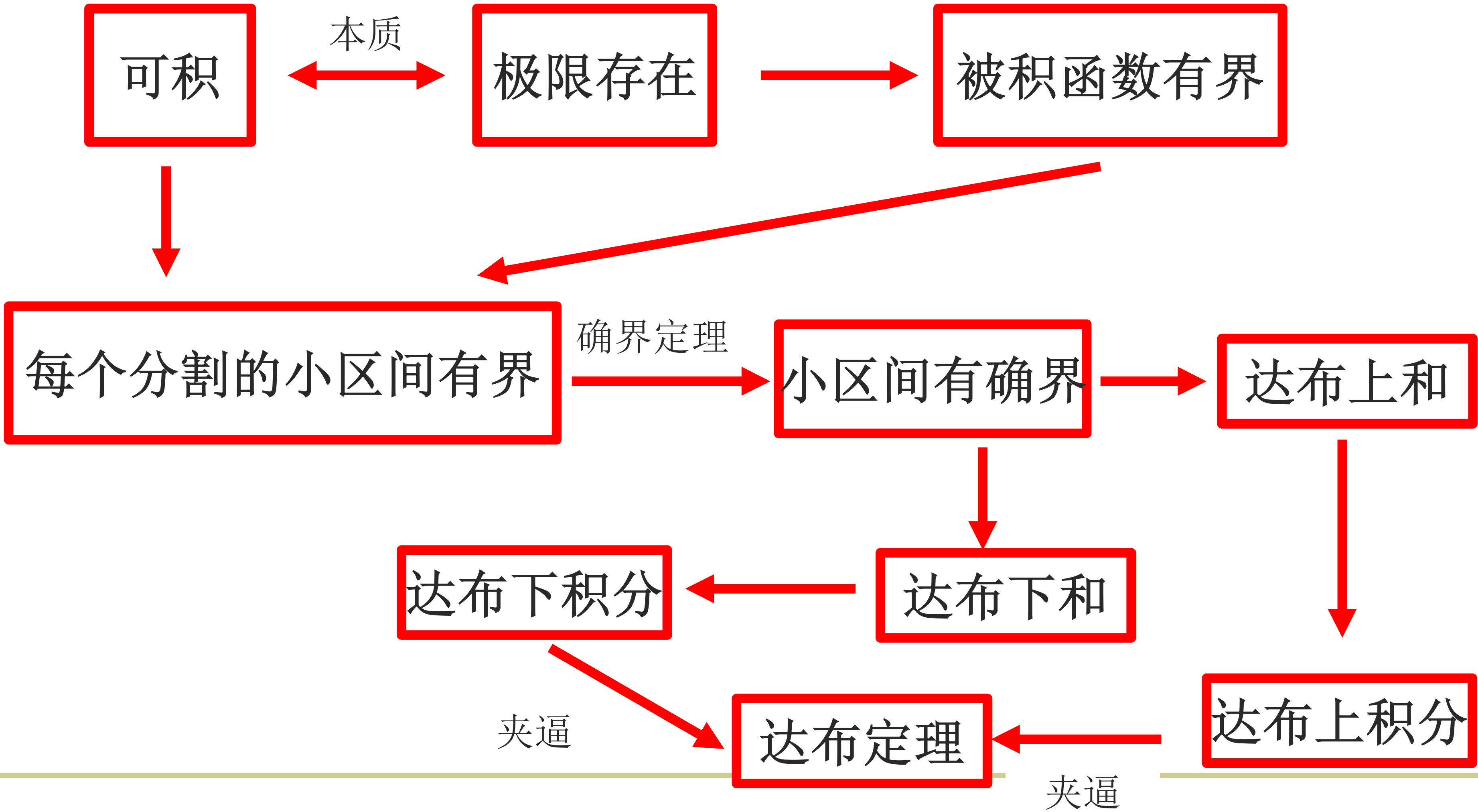
反证法：

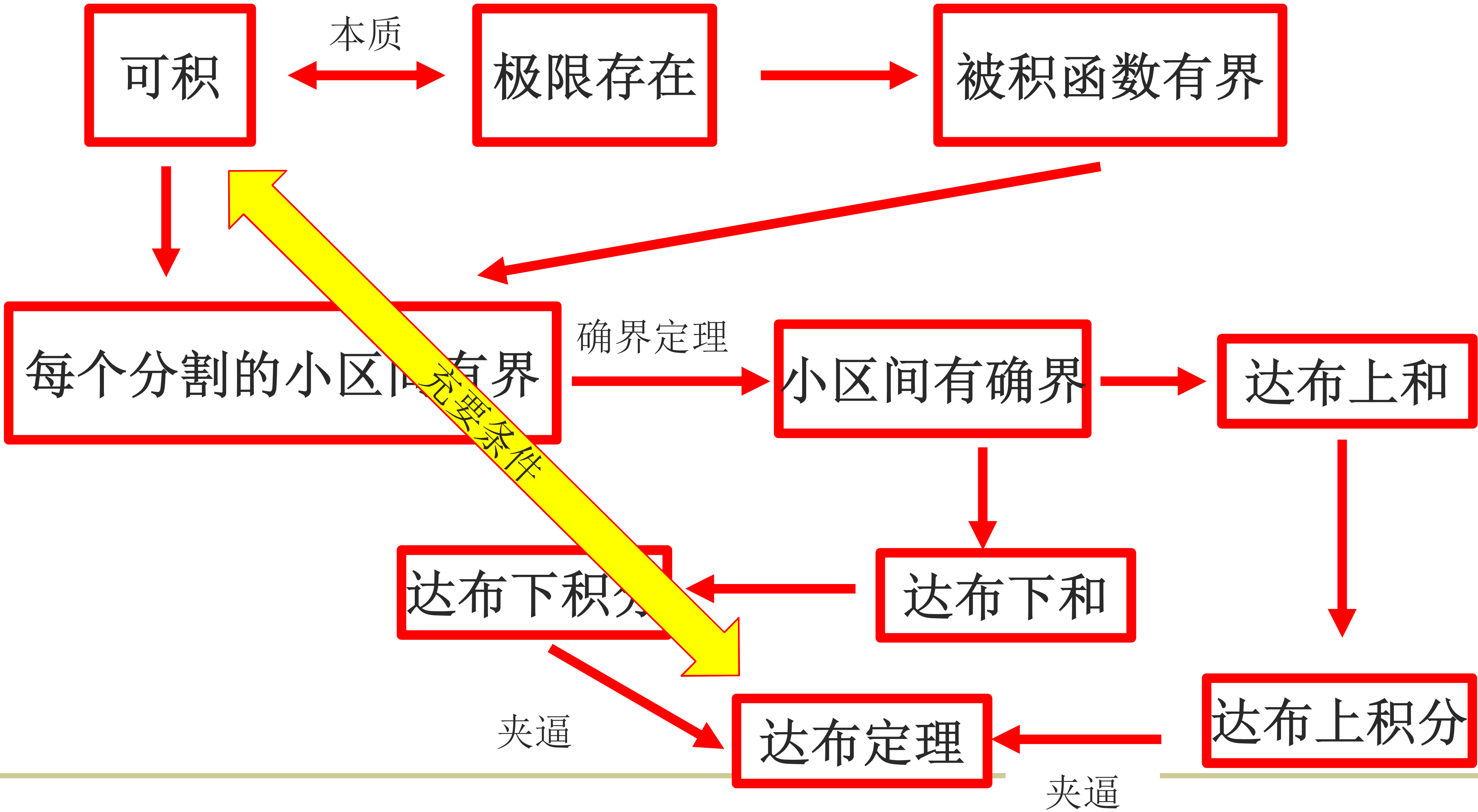
假设对所有区间[α,β]都有f(x)≤0。➔

对[a,b]的任一分割T，每个区间都有c_i使得$f(c_i) \le 0$ ➔

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{||T||\to 0} \sum_{i=1}^{n} c_i \Delta_i \le 0$$

矛盾。


可积
本质
极限存在
被积函数有界
每个分割的小区间有界
确界定理
小区间有确界
达布上和
达布下和
达布下积分
达布上积分
夹逼
达布定理
夹逼


可积
本质
极限存在
被积函数有界
每个分割的小区间有界
充要条件
确界定理
小区间有确界
达布上和
达布下积分
达布下和
达布上积分
夹逼
达布定理
夹逼

例 1 利用定积分求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}}\right)$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}\ (p>0)$;

(7) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n}}{n^{3/2}}$;

ln2 ln(1+√2) 1/p+1 2/3

例 3　用定积分求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}2^{i/n}\frac{1}{n+1/i}$；

Hint：夹逼TH

$$\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}2^{i/n}<\sum_{i=1}^{n}2^{i/n}\frac{1}{n+1/i}<\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}2^{i/n}$$

$$\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}2^{i/n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}2^{i/n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}2^{i/n}$$

$$=\left[2^x\frac{1}{\ln 2}\right]\Bigg|_0^1=\frac{1}{\ln 2}$$

定积分的性质

- 线性性质 （利用定义可证）
- 单调性 （ 利用线性性质可证）
- 若f(x)可积，则|f(x)|可积（ Darboux定理）
  - ||f(x1)|-|f(x2)||<=|f(x1)-f(x2)| （x1,x2是小区间中任意两点）
- 乘积可积性 (darboux定理+”搭桥法”证明)
  - f(x1)g(x1)-f(x2)g(x2)=f(x1)g(x1)-f(x1)g(x2)+f(x1)g(x2)-f(x2)g(x2)<=A*[g(x1)-g(x2)]+B[f(x1)-g(x2)]<=A*ωf+B*ωg (A,B分别为f(x),g(x)在[a,b]的上确界)
- 积分中值定理
  - f连续，g不变号，则$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx$
    - 利用连续函数最值+介值定理证明
  - 特例：f(x)连续，g(x)=1,则为f(c)(b-a)

利用性质进行估计、比较

例 5　估计下列各积分的值：

(1) $\int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} x\arctan x\,\mathrm{d}x$；　　(2) $\int_0^2 \mathrm{e}^{x^2-x}\mathrm{d}x$.

利用　$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant M(b-a)$

$$\frac{\pi}{9} \leqslant \int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} x\arctan x\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{2\pi}{3}$$

$$2\mathrm{e}^{-1/2} \leqslant \int_0^2 \mathrm{e}^{x^2-x}\mathrm{d}x \leqslant 2\mathrm{e}^2$$

例 8　比较下列定积分值的大小：

(1) $\int_0^1 \frac{x}{1+x}\mathrm{d}x$ 和 $\int_0^1 \ln(1+x)\mathrm{d}x$；

积分区间相同，比较被积函数大小。

作辅助函数 $\varphi(x) = \frac{x}{1+x} - \ln(1+x), x \in [0,1]$

$$f'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} - \frac{1}{1+x} = -\frac{x}{(1+x)^2} \leqslant 0$$

f(x)在积分区间单调减，且X=0时, f(x) = 0，因此

$$\frac{x}{1+x} \leqslant \ln(1+x) \xRightarrow{\text{定积分单调性}} \int_0^1 \frac{x}{1+x}\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \ln(1+x)\mathrm{d}x$$

例 6 利用第一积分中值定理估计下列定积分：

(1) $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{1+(\cos x)/2}$； (2) $\int_0^1 \frac{x^9}{\sqrt{1+x}}dx$.

（1） f(x)是连续函数。

由第一积分中值定理可得，原式=f(c) $\int_0^{2\pi} 1dx$ (1)。

由最值定理，1/(1+1/2)<= f(c) <=1/(1-1/2)。

结合(1)式可得，1/(1+1/2) *$\int_0^{2\pi} 1dx$ <=原式<= 1/(1-1/2) $\int_0^{2\pi} 1dx$

$$\frac{2}{3}\cdot 2\pi \leqslant \int_0^{2\pi} \frac{dx}{1+(\cos x)/2} \leqslant 2\cdot 2\pi,$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{1+(\cos x)/2} = \frac{4\pi}{3}(2\theta),\ |\theta| < 1.$$

(2) $\int_0^1 \frac{x^9}{\sqrt{1+x}}\mathrm{d}x$

(2) 因为 $\frac{x^9}{\sqrt{2}} \leqslant \frac{x^9}{\sqrt{1+x}} \leqslant x^9 \quad (0 \leqslant x \leqslant 1)$，所以

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^1 x^9 \mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \frac{x^9}{\sqrt{1+x}}\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^9 \mathrm{d}x,$$

$$\frac{1}{10\sqrt{2}} \leqslant \int_0^1 \frac{x^9}{\sqrt{1+x}}\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{10}.$$

例 10 设 $x > 0$，证明：存在 $0 < \theta < 1$，使

$$\int_0^x e^t dt = xe^{\theta x}, \quad 且 \quad \lim_{x \to +\infty} \theta = 1.$$

Hint: 中值定理。

证：e^x连续➔原式= $e^c \int_0^x dt$，另c=θx （积分中值定理）

又由定积分可计算得$\int_0^x e^t dt = e^x - 1$

连列$e^x - 1 = e^{\theta x} \int_0^x dt$ ➔ $\theta = (1/x)\ln((e^x - 1)/x)$

$$\lim_{x \to +\infty} \theta = \lim_{x \to +\infty} \left(\ln \frac{e^x - 1}{x} \right) \Big/ x$$ ∞/∞型

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x - 1} \left(\frac{e^x - 1}{x} \right)' = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{e^x}{e^x - 1} - \frac{1}{x} \right) = 1.$$