NANJING UNIVERSITY

第五次习题课

王蔚峻
dg1733016@nju.edu.cn

简要回顾

连续性（ε-δ定义）：

- Def1：若在x处，极限值=函数值
  - 三要素：
    - x处有定义
    - x处有极限
    - 极限值=函数值
- Def2：x的变化量趋于0时，y的变化量也趋于0
- TH：既左连续，又右连续

简要回顾

- 闭区间连续函数性质
  - 有界TH
    - 证法：1. 有限覆盖TH; 2. 反证+区间套TH; 3. 反证+Weierstrass
  - 最值TH
    - 证法：1. 确界+反证+构造函数g(x)=1/M-f(x)<=H(M为f(x)上确界,H为g(x)上确界); 2. 确界TH+Weierstrass
  - 零点TH
    - 证法：1. 区间套TH; 2. 构造S={x:f(x)<0,x∈[a,b]}
  - 介值TH
    - 构造F(x)=f(x)-x+零点定理

简要回顾

- 闭区间连续函数性质
  - 有界TH

刻画实数域的连续性或完备性的定理包括：单调有界定理，确界存在定理，区间套定理，Weierstrass定理，Cauchy收敛原理，有限覆盖定理，这六个定理彼此等价。

因此，其中任何一个定理都可以用来证明**闭区间连续函数的性质**。

  - 介值TH
    - 构造F(x)=f(x)-x+零点定理

典型例题

例 18 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$a<c<d<b$，证明：对任意正数 p 和 q，至少有一 $\xi\in[c,d]$，使

$$pf(c)+qf(d)=(p+q)f(\xi).$$

证明思路：最值TH+介值TH。

证 因 $[c,d]\subset[a,b]$，所以 f 在 $[c,d]$ 上连续，必在 $[c,d]$ 上有最大值 M 与最小值 m，使

$$m\leqslant f(c)\leqslant M,\quad m\leqslant f(d)\leqslant M.$$

又因 $p>0,q>0$，所以

$$pm\leqslant pf(c)\leqslant pM,\quad qm\leqslant qf(d)\leqslant qM,$$

得
$$(p+q)m\leqslant pf(c)+qf(d)\leqslant(p+q)M,$$

即
$$m\leqslant\frac{pf(c)+qf(d)}{p+q}\leqslant M.$$

于是，依闭区间上连续函数的介值定理，在 $[c,d]$ 上至少有一点 ξ，使

$$f(\xi)=\frac{pf(c)+qf(d)}{p+q}.$$

从而有
$$pf(c)+qf(d)=(p+q)f(\xi).$$

典型例题

例 20 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且无零点，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上恒正(或恒负).

证明思路：反证法+零点定理。

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上不恒正(或不恒负)，可设

$$f(x_1) < 0, f(x_2) > 0, x_1, x_2 \in [a,b] \text{ 且 } x_1 < x_2.$$

函数的零点定理，至少有一点 $\xi \in (x_1, x_2)$，使 $f(\xi) = 0$. 与题设 $f(x)$ 无零点矛盾. 故 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必恒正(或恒负).

典型例题

例 23 设函数 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 在$[a,b]$上连续，且 $f_1(a) < f_2(a)$，$f_1(b) > f_2(b)$，证明：在(a,b)内至少存在一点 ξ，使 $f_1(\xi) = f_2(\xi)$.

证明思路：辅助函数$F(x) = f_1(x) - f_1(x)$。

$F(a) < 0$，$F(b) > 0$，$F(x)$ 在$[a,b]$上连续.

零点定理，在(a,b)内至少有一点 ξ，使 $F(\xi) = 0$

典型例题

例 24 证明：若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$a<x_1<x_2<\cdots<x_n<b$，则在 $[x_1,x_n]$ 上必有一点 ξ，使

$$f(\xi)=\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}.$$

证 因为 $f(x)$ 在 $[x_1,x_n]$ 上连续，所以 $f(x)$ 在 $[x_1,x_n]$ 上有最大值 M 和最小值 m，故对 x_i 有

$$m\leqslant f(x_i)\leqslant M \quad (x_i\in[x_1,x_n],i=1,2,\cdots,n).$$

于是 $$nm\leqslant f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)\leqslant nM,$$

即 $$m\leqslant\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}\leqslant M.$$

由闭区间上连续函数的介值定理知，存在 $\xi\in[x_1,x_n]$，使

$$f(\xi)=\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n},\quad \xi\in[a,b].$$

典型例题

例 25 设 $f(x)$ 在 $[0,n]$ 上连续，$f(0)=f(n)$ $(n\in \mathbf{N})$，证明：在 $(0,n)$ 内至少有一点 ξ，使 $f(\xi+1)=f(\xi)$.

证明思路：构造F(x)=f(x+1)-f(x)。

证 作辅助函数 $F(x)=f(x+1)-f(x)$，则 $F(x)$ 在 $[0,n-1]$ 上连续，且

$$F(i)=f(i+1)-f(i)\quad (i=0,1,\cdots,n-1),$$

$$F(0)+F(1)+\cdots+F(n-1)=f(n)-f(0)=0$$

记 $F(x)$ 在 $[0,n-1]$ 上的最大值为 M，最小值为 m

$$m\leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}F(i)\leqslant M$$

由闭区间上连续函数的介值定理

在 $(0,n-1)$ 内至少存在一点 ξ，使

$$F(\xi)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}F(i)=0,$$

即

$$f(\xi+1)=f(\xi),\ \xi\in(a,b)$$

典型例题

例 17　证明：若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上每个函数值恰好取得两次，则函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上不连续.

证明思路：反证法+介值定理。

证明：假设f在[a,b]上连续。

由题意知，存在唯一的c∈[a,b]，有f(a)=f(c)。不妨假设c=b,即f(b)=f(a)。

$\forall x \in (a,b)$，有 $f(x) < f(a)$ 或 $f(x) > f(a)$. 取 $f(x) > f(a)$（$f(x) < f(a)$ 类似可证），则 $f(a) = f(b)$ 是 f 在 $[a,b]$ 上的最小值 m. 由 f 的连续性，f 在 $[a,b]$ 必有最大值 M，依题设有 $x, y \in [a,b]$，且 $x < y$，使 $f(x) = f(y) = M$（见图 2.2）.

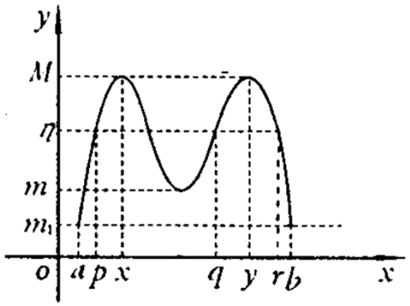

图 2.2

又f在[x,y]上连续，故在(x,y)内f有最小值m’，m<m’<M。

因此，由介值定理，任意v∈[m’,M]都在[a,x],[x,y],[y,b]中至少有一点可取到。

与每个值恰取到两次，矛盾。

简要回顾

一直连续性（ε-δ定义）：

- 与连续性区别：
  - 连续性刻画局部（点）的性态
  - 一致连续性刻画整体性态

- 从函数研究的角度看：拥有该性质的函数，连续性的研究对象变成了整个区间，而不需要仅仅是对某个点x的邻域。

简要回顾

Cantor TH：闭区间上，连续和一致连续等价。

1. 反正+Weierstrass; 2. 有限覆盖TH

前提：闭区间

一致连续 ➔ 连续。　显然。

连续 ➔ 一致连续？　本质区别：存在一个共同的δ保证每个点都连续。

问题转化为：寻找这个共同的δ。

连续：闭区间上任一点x_{0}在其δ邻域上有，|f(x)-f(x_{0})|<ε.

➔枚举闭区间上所有点，所有δ邻域组成一个无限开覆盖

➔可以挑选有限开区间构成该闭区间的开覆盖（有限覆盖定理），且每个开区间中是连续的。

取所有δ中最小的一个，保证对所有δ都连续➔保证了闭区间内所有点都在x_{0}的一个δ邻域内。

Trick: 取δ=δ/2。

设$f(x)$在$[a,b]$上连续，故对任意$\varepsilon>0$，任意$x\in[a,b]$，存在$\delta_x>0$，

当$\mu\in[a,b]\cap(x-\delta_x,x+\delta_x)$时，$|f(\mu)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$，

当$x',x''\in[a,b]\cap(x-\delta_x,x+\delta_x)$时，

$$|f(x')-f(x'')|\leqslant|f(x')-f(x)|+|f(x'')-f(x)|$$
$$<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon. \qquad (*)$$

显然，$H=\{(x-\frac{\delta_x}{2},x+\frac{\delta_x}{2})\mid x\in[a,b]\}$为$[a,b]$的一个开区间覆盖，由有限覆盖定理可知，存在有限子覆盖

$$H_1=\{(x_R-\frac{\delta_{xR}}{2},x_R+\frac{\delta_{xR}}{2})\mid k=1,2,\cdots,n\}\subset H$$

令$\delta=\min\{\frac{\delta_R}{2}\mid R=1,2,\cdots,n\}>0$，

则以任意$x',x''\in[a,b]$，$|x'-x''|<\delta$，存在$k\in N$，$k\leqslant n$，使

$$x'\in(x_R-\frac{\delta_{xR}}{2},x_R+\frac{\delta_{xR}}{2})$$

于是$|x''-x_R|\leqslant|x''-x'|+|x'-x_R|<\delta+\frac{\delta_{xR}}{2}\leqslant\delta_{xR}$，

即$x''\in(x_R-\delta_{xR},x_R+\delta_{xR})$，由$(*)$式推得

$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$，

从而$f(x)$在$[a,b]$上一致连续。

简要回顾

- 为什么开区间为什么不等价？
  - 开区间无法保证有限覆盖➔无法保证取到共同的δ。
- 开区间(a,b)上满足什么条件可以有f一致连续？
  - a点右连续，b点左连续➔f在[a,b]上连续。
- 几何意义：
  - 平滑。
    - f(x)从点a到点b，自变量非常小以至于小于δ时，函数值也非常小以至于小于ε。

典型例题

例 32　证明：在区间(a,b)内的有限个一致连续函数的和与乘积在(a,b)内仍然一致连续.

证明：只证两函数，由多项式乘法的结合律，其余可推广。

(1) 设$f(x),g(x)$都在(a,b)内一致连续. $\forall\ \varepsilon>0,\exists\ \delta_1>0$，使对任何$x',x''\in(a,b)$，当$|x'-x''|<\delta_1$时，就有

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$$

$\forall\ \varepsilon>0,\exists\ \delta_2>0$，使对任何$x',x''\in(a,b)$，当$|x'-x''|<\delta_2$时，就有$|g(x_1')-g(x_2')|<\varepsilon$. 因此，若令$\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$，则当$|x'-x''|<\delta$时，恒有

$$|[f(x')+g(x')]-[f(x'')+g(x'')]|$$

$$\leqslant|f(x')-f(x'')|+|g(x')-g(x'')|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

典型例题

例 32 证明：在区间(a,b)内的有限个一致连续函数的和与乘积在(a,b)内仍然一致连续.

(2) 设 $f(x),g(x)$ 在(a,b)内一致连续，由例 26 结论(2)，$f(x),g(x)$ 在(a,b)上有界，即

$$|f(x)| \leqslant M, \quad |g(x)| \leqslant L \ (L>0, M>0).$$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$，对于任何 $x', x'' \in (a,b)$，当 $|x'-x''| < \delta$ 时，

就有 $|f(x')-f(x'')| < \dfrac{\varepsilon}{2M}, |g(x')-g(x'')| < \dfrac{\varepsilon}{2L}$，所以

$$\begin{aligned} &|f(x')g(x')-f(x'')g(x'')| \\ &= |[f(x')-f(x'')g(x')] + f(x'')[g(x')-g(x'')]| \\ &< \frac{\varepsilon}{2M}M + \frac{\varepsilon}{2L}L = \varepsilon. \end{aligned}$$

因而 $f(x)g(x)$ 在(a,b)内一致连续.

典型例题

例 28 设 $f(x)$ 在 (a,b) 内一致连续，证明：

(1) $\exists\ \delta > 0$，使 $\forall\ x_0$，当 $x \in (a,b) \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 时，$|f(x)| \leqslant |f(x_0)| + 1$；

(2) $f(x)$ 在 (a,b) 内有界.

证明思路(1)直接利用定义

证 (1) 因为 $f(x)$ 一致连续，故对 $\varepsilon = 1 > 0$，$\exists\ \delta > 0$，当 $x \in (a,b) \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 时，有

$$|f(x) - f(x_0)| < 1 \Rightarrow |f(x)| \leqslant |f(x_0)| + 1.$$

典型例题

例 28 设 $f(x)$ 在 (a,b) 内一致连续，证明：

(1) $\exists\, \delta > 0$，使 $\forall\, x_0$，当 $x \in (a,b) \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 时，$|f(x)| \leqslant |f(x_0)| + 1$；

(2) $f(x)$ 在 (a,b) 内有界.

证明思路(2)对(a,b)进行划分

(2) 利用题(1) 中的 δ，把 (a,b) 分为 n 个小区间，分点为 $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$，使

$$\max_{1\leqslant k\leqslant n}(x_k - x_{k-1}) < \delta.$$

取
$$M = \max_{1\leqslant k\leqslant n-1}\{f(x_k) + 1\},\quad \forall\, x \in (a,b),$$
x 必落在其中一个小区间上. 则依题(1)，有

$$|f(x) - f(x_k)| < 1\ (1 \leqslant k \leqslant n-1),$$

故
$$|f(x)| \leqslant M.$$

典型例题

例 28 设 $f(x)$ 在 (a,b) 内一致连续,证明:

(1) $\exists\ \delta > 0$,使 $\forall\ x_0$,当 $x \in (a,b) \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 时,$|f(x)| \leqslant |f(x_0)| + 1$;

(2) $f(x)$ 在 (a,b) 内有界.

证明思路(2)对(a,b)进行划分

(2) 利用题(1)中的 δ,把 (a,b) 分为 n 个小区间,分点为 $a =$

$x_0 <$

为什么不用有限覆盖定理?

因为有限覆盖定理只对闭区间成立。

取 $M = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n-1} \{f(x_k) + 1\}$, $\forall\ x \in (a,b)$,

x 必落在其中一个小区间上. 则依题(1),有

$$|f(x) - f(x_k)| < 1 \ (1 \leqslant k \leqslant n-1),$$

故

$$|f(x)| \leqslant M.$$

典型例题

例 30 函数 $f(x)$ 在区间 I 上一致连续的充要条件是：

$\forall\ \{x_n\},\{y_n\}\in I$，当$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)=0$时，有

$$\lim_{n\to\infty}[f(x_n)-f(y_n)]=0.$$

- 必要性：利用定义。

因为 $f(x)$ 一致连续，故 $\forall\ \varepsilon>0$，

$\exists\ \delta>0$，当 $x_n, y_n\in I$ 时，有

$$|x_n-y_n|<\delta\Rightarrow|f(x_n)-f(y_n)|<\varepsilon.$$

对于 $\delta>0$，$\exists\ N\in\mathbf{N}$，$\forall\ n>N$，必有 $|x_n-y_n|<\delta$

因而 $|f(x_n)-f(y_n)|<\varepsilon$ $\lim\limits_{n\to\infty}[f(x_n)-f(y_n)]=0.$

典型例题

例 30 函数 $f(x)$ 在区间 I 上一致连续的充要条件是：$\forall\ \{x_n\},\{y_n\}\in I$，当 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)=0$ 时，有

$$\lim_{n\to\infty}[f(x_n)-f(y_n)]=0.$$

- 充分性：反正法。

设 $f(x)$ 在 I 上不一致连续，则有 $\varepsilon_0>0$，$\forall\ \delta>0$，$\exists\ x',x''\in I$

$$|x'-x''|<\delta\Rightarrow|f(x')-f(x'')|>\varepsilon_0$$

取 $\delta=\dfrac{1}{n}\ (n\in\mathbf{N})$，$\exists\ x_n,y_n\in I$，由

$$|x_n-y_n|<\frac{1}{n}\Rightarrow|f(x_n)-f(y_n)|\geqslant\varepsilon_0.$$

显然与 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)=0$ 时、有 $\lim\limits_{n\to\infty}|f(x_n)-f(y_n)|=0$ 矛盾，得证。

典型例题

例 31 设 f 在 $\mathbf{R}$ 上一致连续，则存在正数 A,B，使 $\forall\, x\in\mathbf{R}$，

有 |

构建一个递推式：$|f(k\delta+x)-f((k-1)\delta+x)|<1$

证 由 f 在 $\mathbf{R}$ 上一致连续知，对 $\varepsilon=1$，$\exists\,\delta>0$，$\forall\, x',x''\in\mathbf{R}$，若 $|x'-x''|\leqslant\delta$，则有 $|f(x')-f(x'')|<1$.

又 $\forall\, x\in\mathbf{R}$，有 $\boxed{x=n\delta+x_0}$，$n\in\mathbf{Z}$，$x_0\in(-\delta,\delta)$.

$$|f(x)|=\left|\sum_{k=1}^{n}[f(k\delta+x_0)-f((k-1)\delta+x_0)]+f(x_0)\right|$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^{n}|f(k\delta+x_0)-f((k-1)\delta+x_0)|+|f(x_0)|$$ 三角不等式

$$\leqslant|n|+M=\frac{1}{\delta}|x-x_0|+M$$ ε=1 & 有界性

$$\leqslant\frac{1}{\delta}|x|+\frac{1}{\delta}|x_0|+M\leqslant\frac{1}{\delta}|x|+M+1.$$

令 $\frac{1}{\delta}=A$，$M+1=B$，即得 $|f(x)|\leqslant A|x|+B$.

典型例题

例 34 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续，$\varphi(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续，$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-\varphi(x)]=0$. 证明：$\varphi(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续.

证明思路：将$[a,+\infty)$分为$[a,X+k]$和$[X,+\infty)$两个区间分别证明。

由题设极限存在知：$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ X>a$，当 $x>X$ 时，$|f(x)-\varphi(x)|<\dfrac{\varepsilon}{3}$

由 $f(x)$ 一致连续得：$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ \delta_1>0$，当 $|x'-x''|<\delta_1$ 时，$|f(x')-f(x'')|<\dfrac{\varepsilon}{3}$

因而 $\forall\ x',x''>X$，且 $|x'-x''|<\delta_1$，有

$$\begin{aligned}|\varphi(x')-\varphi(x'')| &\leqslant |\varphi(x')-f(x')|+|f(x')-f(x'')| \\ &\quad +|f(x'')-\varphi(x'')| \\ &< \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.\end{aligned}$$

由康托尔(Cantor)定理(一致连续性)知，$\varphi(x)$ 在 $[a,X+1]$ 上一致连续

所以对此 $\varepsilon>0$，$\exists\ \delta_2>0$，当 $x',x''\in[a,X+1]$ 且 $|x'-x''|<\delta_2$ 时，有 $|\varphi(x')-f(x'')|<\varepsilon$.

于是，取 $\delta=\min\{1,\delta_1,\delta_2\}$，则当 $x',x''\in[a,+\infty)$ 且 $|x'-x''|<\delta$ 时有 $|\varphi(x')-\varphi(x'')|<\varepsilon$