
无尺度网络

概念

无尺度网络 (Scale-Free Network) 是网络科学中描述一类具有特定节点度分布特性的复杂网络。这类网络的核心特征是节点的度分布遵循幂律分布 (Power-law Distribution), 即网络中存在少数高度连接的节点, 而大多数节点则只有少量的连接。无尺度网络的概念由 Albert-László Barabási 和 Réka Albert 在 1999 年提出, 他们通过研究互联网的拓扑结构发现了这一特性^[1]。

无尺度网络的特性, 在于其度分布没有一个特定的平均值指标, 即大多数节点的度在此附近^[2]。在研究这个网络的度分布时, Barabási 等人发现其遵守幂律分布 (也称为帕累托分布, 即:

$$P(d = k) \propto k^{-\gamma}$$

其中, $P(d = k)$ 表示度为 k 的节点的比例, γ 是幂律分布的指数。

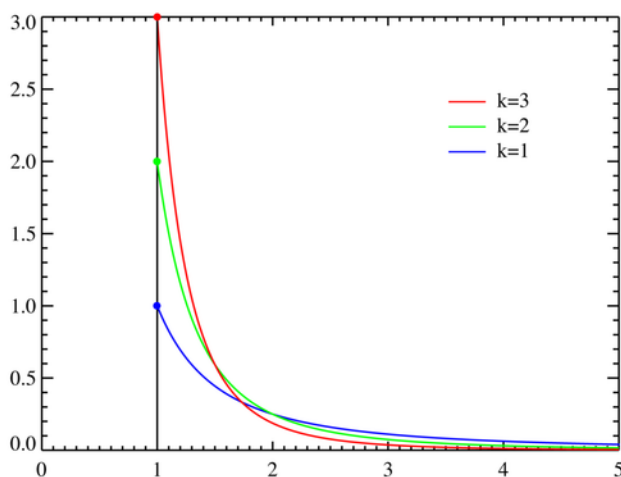


Figure 1: 帕累托分布

构造方法

BA 模型^[1]

Albert-László Barabási 与 Réka Albert 在 1999 年的论文中提出了一个模型来解释复杂网络的无尺度特性，称为 BA 模型。这个模型基于两个假设：

- **增长模式**：不少现实网络是不断扩大不断增长而来的，例如互联网中新网页的诞生，人际网络中新朋友的加入，新的论文的发表，航空网络中新机场的建造等等。
- **优先连接模式**：新的节点在加入时会倾向于与有更多连接的节点相连，例如新网页一般会有到知名的网络站点的连接，新加入社群的人会想与社群中的知名人士结识，新的论文倾向于引用已被广泛引用的著名文献，新机场会优先考虑建立与大机场之间的航线等等。

在这种假设下，BA 模型的具体构造为：

1. 增长：从一个较小的网络 G_0 开始（这个网络有 n_0 个节点， E_0 条边），逐步加入新的节点，每次加入一个
2. 连接：假设原来的网络已经有 n 个节点 (s_1, s_2, \dots, s_n) 。在某次新加入一个节点 s_{n+1} 时，从这个新节点向原有的 n 个节点连出 mn_0 个连接
3. 优先连接：连接方式为优先考虑高度数的节点。对于某个原有节点 $s_i (1 \leq i \leq n)$ ，将其在原网络中的度数记作 d_i ，那么新节点与之相连的概率 P_i 为：

$$P_i = \frac{d_i}{\sum_{j=1}^n d_j}$$

在经过 t 次之后，新的网络一共有 $n_0 + t$ 个节点，一共有 $E_0 + mt$ 条边。当节点数量足够大时，BA 模型网络的度分布遵从 $\gamma = 3$ 的幂律分布。

适应度模型^[3]

适应度模型主要是修正了优先连接的机制，对每个节点加上一个吸引因子 μ_i ，这样新节点的相连概率改正为：

$$P_i = \frac{\mu_i d_i}{\sum_{j=1}^n \mu_j d_j} \quad (1)$$

局域世界演化模型^[4]

局域世界演化模型将 BA 模型优先连接的机制改为：新加入的节点时，先选择全部节点的一部分（随机选取的 M 个节点）作为局域世界，然后再在局域世界中进行优先连接。

复制模型^[5]

复制模型是一个与增长时间无关的模型。复制模型的做法是每次随机地“复制”一个原有的节点：即随机选定一个节点 i ，再加入一个新节点，然后新节点按照 i 与其它旧节点连接的方式与旧节点相连，最后与 i 也相连。

应用领域

传染病动力学^[2]

流行病或网络病毒在复杂网络中的传播也是复杂网络研究的方向之一。在均匀网络如 ER 模型随机网络或小世界网络中，如果考虑易感 (S) → 感染 (I) → 易感 (S) 的 SIS 模型，那么存在一个与网络特性相关的临界值，当有效传播率高于这个临界值的时候，传染病会在网络中传播并稳定在某个恒定密度上（激活相态）。而当有效传播率低于这个临界值时，传染病会很快逐渐消亡（吸收相态）。对于无尺度网络，由于度分布不均匀，临界值比较小。对于 BA 模型，临界值为 0。也就是说，只要有效传播率大于 0，病毒就能有效传播并达到稳定。而对于有限规模的无标度网络，临界值大于 0，但会在均匀网络的十分之一左右。因此，无标度网络对于病毒传播的抵抗性较均匀网络脆弱得多。

由于无尺度网络应对流行病感染的脆弱性，人们提出不同的免疫策略来弥补。主要研究的免疫策略有三种：随机免疫、选择免疫与熟人免疫。

随机免疫

随机免疫是在网络中随机抽取一部分节点进行免疫。研究表明，采取这种策略的话，需要对网络中几乎所有的节点都进行免疫才能保证最终消灭传染病。

选择免疫

选择免疫是在网络中抽取度最大的节点进行免疫。就 BA 模型而言，采取这种策略的话，即使有效传播率变化，也可以只免疫很小一部分节点就保证消灭传染病。

熟人免疫

由于选择免疫需要知道全局节点的度数情况，才能找到度数最大节点进行免疫，这在面对互联网等庞大的复杂网络时会导致难以操作。熟人免疫采取的是随机抽取一部分节点，然后对每个节点随机选一个与之相连的“邻居”节点来进行免疫。由于在无尺度网络中，度大的节点可以与非常多的节点相连，因此选择“邻居”免疫的话，碰到度大节点的概率会比碰到度小节点的概率大得多。所以熟人免疫要比随机免疫有效得多，只略差于选择免疫。

References

- [1] Albert-László Barabási and Réka Albert. “Emergence of scaling in random networks”. In: *science* 286.5439 (1999), pp. 509–512.
- [2] 汪小帆, 李翔, and 陈关荣. 复杂网络理论及其应用. 清华大学出版社有限公司, 2006.
- [3] Ginestra Bianconi and Albert-László Barabási. “Bose-Einstein condensation in complex networks”. In: *Physical review letters* 86.24 (2001), p. 5632.
- [4] Qin Sen and Dai Guan-Zhong. “A new local-world evolving network model”. In: *Chinese Physics B* 18.2 (2009), p. 383.
- [5] Ravi Kumar et al. “Stochastic models for the web graph”. In: *Proceedings 41st Annual Symposium on Foundations of Computer Science*. IEEE. 2000, pp. 57–65.