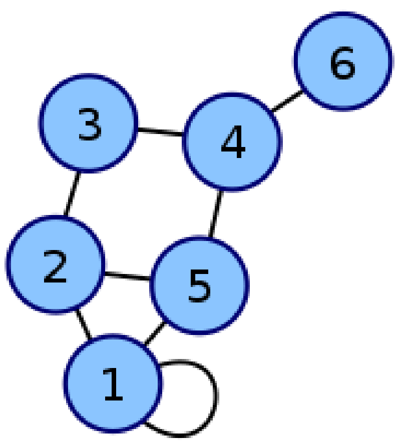
邻接矩阵 (Adjacency Matrix)

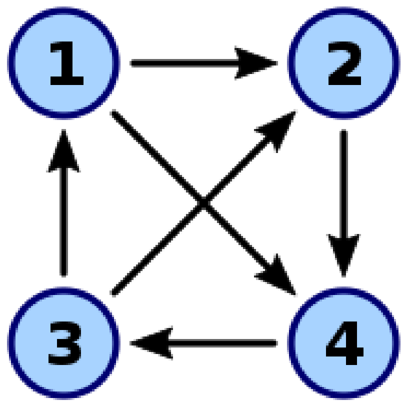
定义

在网络科学中，**邻接矩阵（Adjacency Matrix）**是一种用于表示图（Graph）中顶点（或称为节点）之间连接关系的矩阵。邻接矩阵是图论和网络分析中的一种基本数据结构，它能够直观地展示图中所有顶点的邻接情况。

- **数学定义**

  对于一个包含 n 个顶点的图 G，其邻接矩阵 A 是一个 $n \times n$ 的方阵。矩阵中的元素 A_{ij} 表示顶点 i 和顶点 j 之间是否存在边（连接）。如果顶点 i 和顶点 j 之间存在边，则 A_{ij} 的值就加 1（在无向图中，A_{ij} 和 A_{ji} 同时加上 1，而每个自环加上 2。这样让某一节点的度数可以通过邻接矩阵的对应行或者列求和得到）[1]。

无向图	邻接矩阵
	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

有向图	邻接矩阵
	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

性质

- 对于无向图，邻接矩阵是**对称的**，即 $A_{ij} = A_{ji}$；对于有向图，邻接矩阵可能不是对称的，它反映了边的方向性。
- 如果顶点有自我连接产生的自环（loop），则在矩阵的主对角线上会有非零的值；如果没有自环，则主对角线上全部是 0
- A^n 的元素 A^n_{ij} 表示从顶点 i 到顶点 j 长度为 n 的路径数 [2]

相关概念

拉普拉斯矩阵 (Laplacian Matrix)

拉普拉斯矩阵 L 是图的另一种矩阵表示，它定义为度矩阵 D 和邻接矩阵 A 的差，即 $L = D - A$。在这里，度矩阵 D 是一个对角矩阵，其对角线上的元素 D_{ii} 等于顶点 i 的度数（即与顶点 i 相连的边的数量）。

- **谱特性**: 拉普拉斯矩阵的谱（特征值和特征向量）揭示了图的一些重要特性，如连通性、图的谱聚类和网络的鲁棒性。特别是，拉普拉斯矩阵的第二小非零特征值（称

为 Fiedler 值）提供了图的连通性的一个度量。

- **图的连通性**: 拉普拉斯矩阵的非零特征值可以告诉我们图的连通分量数量。如果 L 有 k 个非零特征值，那么图至少有 k 个连通分量。
- **谱聚类**: 拉普拉斯矩阵在谱聚类算法中扮演重要角色。谱聚类利用拉普拉斯矩阵的特征向量来划分图的社区结构，即通过特征向量的空间将顶点分组。

应用

- **图的表示**: 邻接矩阵提供了一种直观的方式来表示图的结构，通常采用邻接表或邻接矩阵的形式存储在计算机中。
- **图的遍历**: 使用邻接矩阵，可以轻松实现图的遍历算法，如深度优先搜索（DFS）和广度优先搜索（BFS）。这些算法对于寻找路径、检测环和解决许多图论问题至关重要。

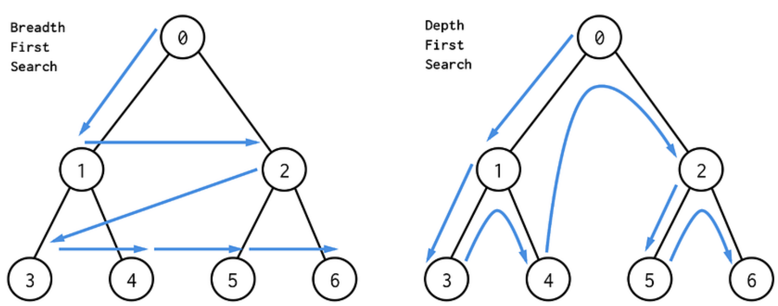


Figure 1: 图的遍历

- **图上的优化问题**: 在解决图的优化问题时，如最短路径问题、最大流问题等，邻接矩阵提供了必要的信息。例如，Dijkstra 算法和 Floyd-Warshall 算法都依赖于邻接矩阵来找到最短路径。

References

[1] 图 *(数学)*. In: 维基百科，自由的百科全书. Page Version ID: 78710366. Aug. 29, 2023. URL: https://zh.wikipedia.org/w/index.php?title=%E5%9B%BE_(%E6%95%B0%E5%AD%A6)&oldid=78710366#cite_note-:0-1 (visited on 04/04/2024).

[2] 刘亚国. "图论中邻接矩阵的应用". In: 张家口职业技术学院学报 4 (2007).