AGLA II / Geometrie

Stefan Wiedmann / Verena Spratte – Sommersemester 2021

Aufgabenblatt 12

Vorname	Nachname	1	2	3	4	Σ

Gruppenabgabe im Stud.IP: Mittwoch 30.06.2021 bis 18 Uhr.

Geben Sie bitte jede Aufgabe in einzelnen Dateien in den zugehörigen Abgabeordner im Stud.IP ab. Verwenden Sie außschließlich die Formate

- **NachnameBlatt12A1.pdf** für Aufgabe 1.
- **NachnameNachnameNachnameBlatt12A2.pdf** bzw. **NachnameNachnameNachnameBlatt12A3A4.pdf** für die Aufgaben 2, 3 und 4.

Aufgabe 12.1. (20 Punkte, Einzelabgabe)

Sei $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine affine und bijektive Abbildung, d.h. $F(x) = Ax + b$ mit $A \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ und $b \in \mathbb{R}^2$. Informieren Sie sich über die folgenden affinen Abbildungen der Euklidischen Ebene:

1) Identität
2) Scherung
3) Parallelstreckung
4) Schrägspiegelung
5) Eulersche Affinität
6) Zentrische Streckung
7) Punktspiegelung
8) Scherstreckung
9) Drehstreckung
10) Schubschrägspiegelung
11) Verschiebung
12) Schubscherung

Welche (Jordan-)Normalformen von A liegen jeweils zu Grunde? Was kann man jeweils über Fixpunkte, Eigenwerte und Fixgeraden aussagen? Welche sind Bewegungen?

Aufgabe 12.2. (20 Punkte)

Die Koordinaten von Düsseldorf sind: Breitengrad: $+51.28°$; Längengrad: $+6.75°$ und von Los Angeles: Breitengrad $+33.93°$; Längengrad $-118.42°$.

1) Bestimmen Sie die Länge der (kürzesten) Flugroute.

2) Auf welchem Kurs sollte das Flugzeug abfliegen?

3) Wo erreicht es seinen nördlichsten Punkt?

Sie dürfen die Flughöhe vernachlässigen und annehmen, dass die Erde eine perfekte Kugel ist. Der Erdradius beträgt 6370 km.

Aufgabe 12.3. (20 Punkte)

Sei $V = \mathbb{R}^2$ und seien u, v zwei verschiedene Vektoren in V. Wir definieren $\overrightarrow{uv} := v - u$ als den Verbindungsvektor von u nach v. Sei $g(u, v) := \{u + t\,\overrightarrow{uv} \mid t \in \mathbb{R}\}$ die Gerade durch u und v. Wir definieren für $x \in g(u, v)$ das Teilungsverhältnis von $x = u + t\,\overrightarrow{uv}$ für ein $t \in \mathbb{R}$ in Bezug auf u, v durch

$$TV(x; u, v) := \frac{t}{1-t} \text{ für } x \neq v.$$

Sei $\triangle(A, B, C)$ ein (nicht ausgeartetes) Dreieck in V mit den Eckpunkten A, B, C. Zeigen Sie mit Hilfe von Zeichungen und den Strahlensätzen: Sei P ein von A, B, C verschiedener Punkt aus V, C_1 der Schnittpunkt der Geraden $g(C, P)$ mit der Geraden $g(A, B)$, entsprechend seien zyklisch die Punkte A_1 und B_1 auf $g(B, C)$ und auf $g(A, C)$ definiert (insbesondere ist also $g(C, P)$ nicht parallel zu $g(A, B)$ angenommen, sinngemäß entsprechend die anderen Geraden durch P). Zu zeigen der Satz von Ceva: Es gilt für das Produkt der Teilungsverhältnisse

$$TV(A_1; B, C) \cdot TV(B_1; C, A) \cdot TV(C_1; A, B) = 1.$$

Aufgabe 12.4. (20 Punkte)

1) Seien V, W euklidische Vektorräume und sei $F : V \to W$ eine affin-lineare Abbildung, d.h. $F(v) = f(v) + b$ mit einer linearen Abbildung $f : V \to W$ und $b \in W$. Seien $u, v \in V$, $u \neq v$ und sei $g(u, v) := \{u + t(v - u) \mid t \in \mathbb{R}\}$ die Gerade durch u und v. Zeigen Sie, dass F die Gerade $g(u, v)$ auf die Gerade $g(F(u), F(v))$ abbildet.

2) Sei $x \in g(u, v)$. Zeigen Sie, falls definiert: $T(x; u, v) = T(F(x); F(u), F(v))$.

3) Sei $\triangle(A, B, C)$ ein (nicht ausgeartetes) Dreieck in V mit den Eckpunkten A, B, C. Sei g eine von den drei Seiten von $\triangle(A, B, C)$ verschiedene Gerade in V, die die drei Geraden $g(A, B)$, $g(B, C)$, $g(A, C)$ in C_1, A_1, B_1 schneidet. Man zeige den Satz von Menelaos: Es gilt für das Produkt der Teilungsverhältnisse

$$TV(A_1; B, C) \cdot TV(B_1; C, A) \cdot TV(C_1; A, B) = -1.$$

Hinweis: Sie dürfen annehmen, dass eine Parallelprojektion eine affin-lineare Abbildung ist.