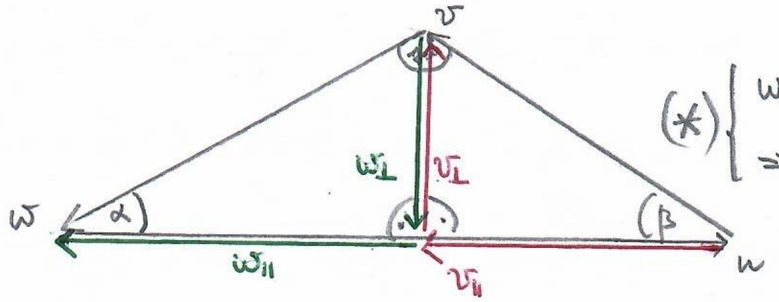
3.



$$(*)\left\{\begin{array}{l} w_\perp = -v_\perp \\ \Rightarrow \langle w_\perp, v_\perp \rangle = |w_\perp|^2 = |v_\perp|^2 \end{array}\right.$$

Bemerkungen:

1) Einheitsvektoren werden mit "Dach" notiert : $\hat{u} := \frac{u}{|u|}$, $\hat{v} := \frac{v}{|v|}$, $\hat{w} = \frac{w}{|w|}$

2) Im rechtwinkligen Dreieck gilt :

$\cos\alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypothenuse}}$ $\quad$ $\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypothenuse}}$ $\quad$ Beispiel : $\cos(\alpha) = \frac{|w_\parallel|}{|w|}$

3.1 Finde Zusammenhang zw. Kosinus vom Winkel und Skalarprodukt :

Idee: 1) Betrachtungen erfolgen für einen beliebigen Winkel und können dann für alle anderen gefolgert werden. Wahl fällt auf α.

2) Betrachte eine orthogonale Zerlegung von w bzgl. $\hat{u}$ und finde durch die Geometrie im rechtwinkligen Dreieck die Beziehung zwischen $\cos(\alpha)$ und $\langle w, \hat{u} \rangle$.

$w = w_\parallel + w_\perp$ mit $\langle w_\perp, \hat{u} \rangle = 0$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{für } 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}: & w_\parallel = |w_\parallel| (-\hat{u}) = |w| \overbrace{\cos(\pi-\alpha)}^{=-\cos(\alpha)} (-\hat{u}) \\ \text{für } \frac{\pi}{2} < \alpha \leq \pi: & w_\parallel = |w_\parallel| (+\hat{u}) = |w| \cos(\alpha) (+\hat{u}) \end{array}\right\} = |w| \cos(\alpha)\, \hat{u},$$

$$\Rightarrow \langle w, \hat{u} \rangle = \langle w_\parallel + w_\perp, \hat{u} \rangle = \langle w_\parallel, \hat{u} \rangle + \underbrace{\langle w_\perp, \hat{u} \rangle}_{=0} = \langle |w| \cos(\alpha) \hat{u}, \hat{u} \rangle$$

$$= |w| \cos(\alpha) \underbrace{\langle \hat{u}, \hat{u} \rangle}_{=1}.$$

Also : $\forall \alpha \in [0, \pi]: \cos(\alpha) = \frac{\langle w, \hat{u} \rangle}{|w|} = \langle \hat{w}, \hat{u} \rangle$

Analog unter Berücksichtigung der in d. Aufgabenstellung angegebenen Richtungen:

$\forall \beta \in [0, \pi]: \cos(\beta) = \langle \hat{v}, \hat{u} \rangle$

$\forall \gamma \in [0, \pi]: \cos(\gamma) = -\langle \hat{v}, \hat{w} \rangle = -\cos(\pi - \gamma)$

3.2 Zusammenhang zwischen Sinus eines Winkels und Skalarprodukt:

Idee: gehe genauso vor wie in 3.1. Betrachte Winkel α und $w = w_\perp + w_\parallel$.

$$w = w_\parallel + w_\perp \quad \text{mit} \quad \langle w_\perp, \hat{u} \rangle = 0 \;\wedge\; w_\parallel = -|w| \langle \hat{w}, \hat{u} \rangle \hat{u} = -\langle w, \hat{u} \rangle \hat{u}.$$

für $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$: $\sin(\alpha) = \dfrac{|w_\perp|}{|w|} = \dfrac{|w - w_\parallel|}{|w|} = \dfrac{|w - \langle w, \hat{u} \rangle \hat{u}|}{|w|}$

es gilt $\sin(\alpha) = \sin(\pi - \alpha) \Rightarrow \forall \alpha \in [0, \pi]: \sin(\alpha) = \dfrac{|w - \langle w, \hat{u} \rangle \hat{u}|}{|w|}$.

Analog folgt wieder für $\sin(\beta)$, $\sin(\gamma)$:

$$\forall \gamma, \beta \in [0, \pi]: \sin(\beta) = \frac{|v - \langle v, \hat{u} \rangle \hat{u}|}{|v|}, \quad \sin(\gamma) = \frac{|v - \langle v, \hat{w} \rangle \hat{w}|}{|v|}$$

3.3 Zeige $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\pi - \gamma) \wedge \sin(\alpha + \beta) = \sin(\pi - \gamma)$

Additionstheoreme: $\begin{cases} \cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\sin(\beta) + \sin(\alpha)\cos(\beta) \end{cases}$

$$\cos(\alpha+\beta) = \langle \hat{w}, \hat{u} \rangle \langle \hat{v}, \hat{u} \rangle - \frac{1}{|w||v|} \underbrace{|w - \langle w, \hat{u} \rangle \hat{u}| \, |v - \langle v, \hat{u} \rangle \hat{u}|}$$

$$|w - \langle w, \hat{u} \rangle \hat{u}| = |v - \langle v, \hat{u} \rangle \hat{u}| \Rightarrow \quad = \langle w - \langle w, \hat{u} \rangle \hat{u}, v - \langle v, \hat{u} \rangle \hat{u} \rangle \cdot \frac{1}{\underbrace{\cos(\pi)}_{=-1}}$$

$$= \langle \hat{w}, \hat{u} \rangle \langle \hat{v}, \hat{u} \rangle - \frac{1}{|w||v|} \Big(\langle w, v \rangle - \langle w, \hat{u} \rangle \langle \hat{u}, v \rangle \cancel{- \langle v, \hat{u} \rangle \langle w, \hat{u} \rangle} \cancel{+ \langle w, \hat{u} \rangle \langle v, \hat{u} \rangle} \underbrace{\langle \hat{u}, \hat{u} \rangle}_{=1} \Big) \cdot (-1)$$

$$= \cancel{\langle \hat{w}, \hat{u} \rangle \langle \hat{v}, \hat{u} \rangle} + \frac{1}{|w||v|} \langle w, v \rangle - \langle w, \hat{u} \rangle \langle \hat{u}, v \rangle$$

$$= \frac{1}{|w||v|} \langle w, v \rangle = \langle \hat{w}, \hat{v} \rangle = \cos(\pi - \gamma).$$

$$\sin(\alpha+\beta) = -\cos\left(\alpha + \beta + \frac{\pi}{2}\right) = -\cos\left(\pi - \gamma + \frac{\pi}{2}\right) = \sin(\pi - \gamma).$$

3.4 $\forall \alpha \in (-\pi, \pi), \forall x \in \mathbb{R}: \tan(\alpha) = x \Leftrightarrow \alpha = \arctan(x)$.

$\alpha + \beta \in (-\pi, \pi)$: $\tan(\alpha+\beta) = \tan(\pi - \gamma) \Leftrightarrow \alpha + \beta = \pi - \gamma$.

$|\alpha + \beta| > \pi$ wäre ein entartetes Dreieck, also ist die Behauptung bewiesen.