AGLA II / Geometrie

Stefan Wiedmann / Verena Spratte – Sommersemester 2021

Aufgabenblatt 9

Vorname	Nachname	1	2	3	4	Σ

Gruppenabgabe im Stud.IP: Mittwoch 09.06.2021 bis 18 Uhr.

Geben Sie bitte jede Aufgabe in einzelnen Dateien in den zugehörigen Abgabeordner im Stud.IP ab. Verwenden Sie außschließlich die Formate

- **NachnameBlatt9A1.pdf** und **NachnameBlatt9A1.ggb** für Aufgabe 1.
- **NachnameNachnameNachnameBlatt9A3.pdf** bzw. **NachnameNachnameNachnameBlatt9A2uA4.pdf** für die Aufgaben 2,3 und 4.

Bevor Sie eine .ggb-Datei abgeben, prüfen Sie im Konstruktionsprotokoll und an der Objektliste, ob Sie unnötige Objekte gelöscht haben.

Aufgabe 9.1. (20 Punkte, Einzelabgabe) Wir betrachten den euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$ bezüglich des Standard-Skalarprodukts und mit der Basis $\mathcal{E} = [e_1, e_2, e_3]$. Seien d_i für $i \in \{1, 2, 3\}$ die (mathematisch positiv orientierten) Drehungen um die Gerade $\mathbb{R}e_i$ mit Drehwinkel $\frac{\pi}{2}$. Seien $\sigma = d_3 d_2$ und $\tau = d_1^{-1} d_2 d_1$.

1) Stellen Sie σ und τ in Geogebra dar, indem Sie das Dreieck verfolgen, das von $e-1, e_2, e_3$ aufgespannt wird.

2) Stellen Sie daraus (ohne Rechnung) die Abbildungsmatrizen von A_σ und A_τ auf. Bestimmen Sie (geometrisch oder rechnerisch) die Drehachsen von σ und τ.

3) Bestimmen Sie in Geogebra den Drehwinkel von σ und τ. (Tipp: Schieberegler)

4) Überprüfen Sie Ihr Ergebnis rechnerisch.

Geben Sie die Geogebra-Konstruktion als .ggb, die Rechnungen als .pdf ab.

Aufgabe 9.2. (20 Punkte)
Diese Aufgabe baut auf Aufgabe 9.3 auf - lösen Sie die also zuerst.

Schreiben Sie mittels quadratischer Ergänzung falls möglich die folgenden Ausdrücke über dem jeweiligen Körper K als Summe von Vielfachen von Quadraten:

1) $x^2 + 2xy + y^2$ wobei K beliebig.

2) $x^2 + xy + y^2$ wobei $K = \mathbb{R}$.

3) xy wobei $K = \mathbb{R}$.

4) $x^2 + 2xy + 2xz + y^2 + z^2$ wobei $K = \mathbb{R}$.

5) $x^2 + 2xy + 2xz + 2yz + y^2 + z^2$ wobei $K = \mathbb{R}$.

6) $x^2 + 2xy + 2xz + 2xy + y^2 + z^2$ wobei $K = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

7) $x^2 + 2xy + 2xz + 2xy + y^2 + z^2$ wobei $K = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.

Aufgabe 9.3. (20 Punkte)
Die folgenden Aufgaben stammen aus dem *Training Klassenarbeiten. Lambacher Schweizer, Mathematik für Gymnasien, Klasse 8* (Seite 46).

2 (2 + 2 + 2 VP)
Kreuze *alle* richtigen Antworten an.
a) Wenn man die Parabel mit der Gleichung $f(x) = (x + 2)^2$, $x \in \mathbb{R}$, an der y-Achse spiegelt, so heißt die Gleichung der Bildkurve:

☐ $g(x) = (x - 2)^2$ ☐ $g(x) = -(x + 2)^2$ ☐ $g(x) = (-x + 2)^2$ ☐ $g(x) = -(x - 2)^2$ ☐ Keine Antwort ist richtig.

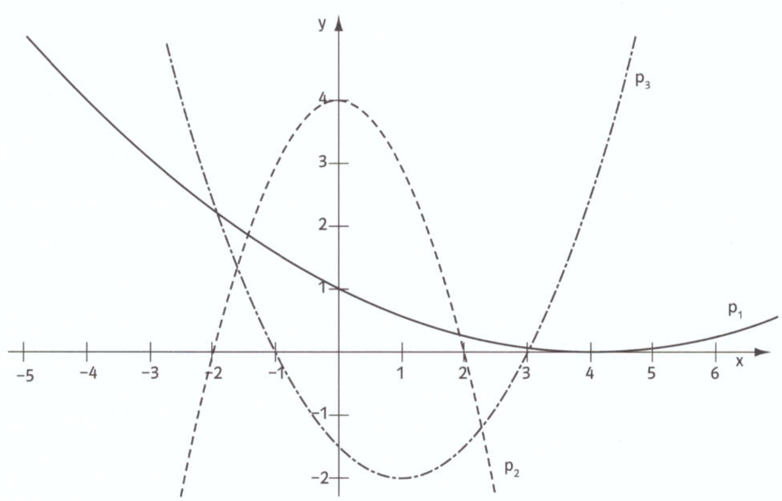
b) Die Parabel mit der Gleichung $f(x) = (x + 1)^2 - 3$, $x \in \mathbb{R}$, hat die Symmetrieachse mit der Gleichung:

☐ $y = -3$ ☐ $y = 1$ ☐ $x = 1$ ☐ $x = -3$ ☐ Keine Antwort ist richtig.

c) Der Scheitel der Parabel mit der Gleichung $f(x) = ax^2 + c$, $x \in \mathbb{R}$, $a, c \in \mathbb{R}$, liegt unterhalb der x-Achse, falls gilt:

☐ $a < 0$ und $c > 0$ ☐ $a > 0$ und $c < 0$ ☐ $a > 0$ und $c > 0$ ☐ $a < 0$ und $c < 0$ ☐ Keine Antwort ist richtig.

3 (3 VP)
Lies aus der Zeichnung die Gleichungen der drei Parabeln p_1, p_2, p_3 ab.



1) Lösen Sie die Aufgaben.

2) Eine quadratische Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lässt sich in drei Standardformen darstellen:

- Normalform $f(x) = ax^2 + bx + c$ für $a, b, c \in \mathbb{R}$
- Scheitelpunktform $f(x) = r(x - s)^2 + t$ für $r, s, t \in \mathbb{R}$
- über Linearfaktoren $f(x) = u(x - v)(x - w)$ für $u, v, w \in \mathbb{R}$

Geben Sie für alle 6 möglichen Umrechnungswege an, wie sich die neuen Koeffizienten bestimmen lassen. Sie dürfen sich auf echte quadratische Funktionen beschränken (also solche, die keine Geraden sind).

Aufgabe 9.4. (20 Punkte)
Sei $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein unitärer Raum mit $\dim V = n$. Sei $f : V \to V$ eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung und sei $f^t : V \to V$ die dazu adjungierte Abbildung, die duch die Eigenschaft

$$\langle f(v), w\rangle = \langle v, f^t(w)\rangle \quad \forall v, w \in V$$

eindeutig bestimmt ist. Zeigen Sie

1) $(f^t)^t = f$
2) $\mathrm{Kern}(f^t) = \mathrm{Bild}(f)^\perp$
3) $\mathrm{Bild}(f^t) = \mathrm{Kern}(f)^\perp$
4) $\mathrm{Rang}(f) = \mathrm{Rang}(f^t)$
5) f ist injektiv $\Longleftrightarrow$ f^t ist surjektiv und f ist surjektiv $\Longleftrightarrow$ f^t ist injektiv
6) $(f+g)^t = f^t + g^t$ und $(\lambda f)^t = \overline{\lambda} f^t$
7) $(f \circ g)^t = g^t \circ f^t$
8) $\chi_{f^t}(\lambda) = \overline{\chi_f(\lambda)}$

Für 6), 7), 8) sei dabei $g : V \to V$ eine weitere $\mathbb{C}$-lineare Abbildung.
Hinweis: Für Teil 8) können Sie verwenden, dass für eine ONB $\mathcal{B}$ von V und für die Abbildungsmatrix $A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f)$ gilt, dass $\overline{A}^T = \mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f^t)$ ist.