AGLA II / Geometrie

Stefan Wiedmann / Verena Spratte – Sommersemester 2021

Aufgabenblatt 8

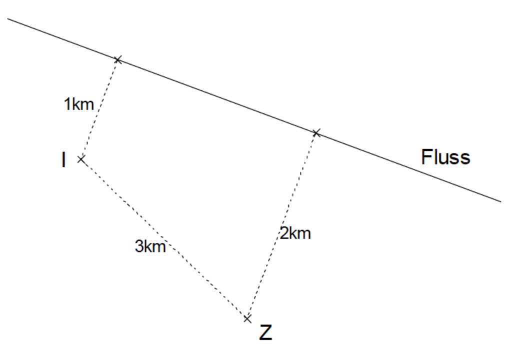
Vorname	Nachname	1	2	3	4	Σ

Gruppenabgabe im Stud.IP: Mittwoch 02.06.2021 bis 18 Uhr.

Geben Sie bitte jede Aufgabe in einzelnen Dateien in den zugehörigen Abgabeordner im Stud.IP ab. Verwenden Sie außschließlich die Formate

- **NachnameBlatt8A1.pdf** für Aufgabe 1. Dokumentieren Sie dabei, welche Geogebra-Befehle Sie benutzt haben.
- **NachnameNachnameNachnameBlatt8A3.pdf** bzw. **NachnameNachnameNachnameBlatt8A2uA4.pdf** für die Aufgaben 2,3 und 4.

Aufgabe 8.1. (20 Punkte, Einzelabgabe) Die folgende Aufgabe (Teil a) zumindest) ist eine klassische Schulaufgabe, die hiesige Version (Teile a) und b)) ist einer Geometrieklausur der Uni Freiburg entnommen.



Ein Indianer I möchte mit seinem Pferd auf kürzestem Weg zu seinem Zelt Z reiten. Allerdings muss er einen Umweg zum Fluss machen, um sein Pferd zu tränken.

a) Konstruieren Sie diesen kürzestem Weg in Geogebra, fügen Sie Screenshots in Ihre Lösung ein. Sie müssen nicht maßstabsgetreu arbeiten. Begründen Sie (elementargeometrisch), warum jeder andere Weg länger wäre.

b) Wie lang ist dieser kürzeste Weg? I ist 1km vom Fluss entfernt, Z ist 2km vom Fluss entfernt; die Entfernung von I und Z (natürlich ohne den Umweg über den Fluss) beträgt 3km. Rechnen – nicht messen (auch nicht in Geogebra)!

c) Der Indianer fürchtet Verfolgung. Um seine Spuren zu verwischen, möchte er 500m im Flussbett reiten. Konstruieren Sie den nun kürzesten Weg in Geogebra, begründen Sie Ihre Lösung und bestimmen Sie rechnerisch die Länge des Weges.

d) Nun sind Flüsse in Natura selten gerade: Der reißende, nicht überquerbare Fluss verläuft entlang $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - x^3 + x + 2$, der Indianer startet in $I = (-1.5, 0)^T$, sein Zelt steht in $Z = (1, 0.5)^T$ (1LE entspricht 1km). Modellieren Sie die Situation in Geogebra und stellen Sie möglichst restriktive Bedingungen an einen Punkt auf, an dem der Indianer das Pferd tränken sollte. Suchen Sie dann aus den verbleibenden Punkten einen möglichst geeigneten aus.

e) Im von Ihnen vorgeschlagenen Punkt angekommen bemerkt der Indianer Verfolger und entscheidet sich, 500m im Flussbett zu reiten. An welcher Stelle verlässt er den Fluss wieder? (Nutzen Sie den Befehl *Länge()*.) Wie lang war sein Umweg insgesamt?

Aufgabe 8.2. (20 Punkte)
Bestimmen Sie die Signatur der folgenden symmetrischen Matrizen mit Hilfe des symmetrischen Gauß-Verfahrens.

1) Sei
$$G = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$
mit $a, b, c \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie in Abhängigkeit von a, b, c die Signatur und diskutieren sie alle möglichen Fälle.

2) Bestimmen Sie die Signatur der Matrix
$$G_1 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

3) Bestimmen Sie die Signatur der Matrix
$$G_2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 8.3. (20 Punkte)
Wir betrachten den euklidschen Raum $(\mathbb{R}^3, \langle\ ,\ \rangle)$ bezüglich der Standardbasis $\mathcal{E} = [e_1, e_2, e_3]$.

1) Geben Sie die Abbildungsmatrix ${}_{\mathcal{E}}\mathrm{M}_{\mathcal{E}}(\sigma)$ der Spiegelung σ an der Ebene $2e_1 - 2e_2 - e_3 = 0$ an.

2) Geben Sie die Abbildungsmatrix ${}_{\mathcal{E}}\mathrm{M}_{\mathcal{E}}(\varphi)$ der Drehung φ mit Achse $\mathbb{R}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ und Drehwinkel $\frac{\pi}{4}$ an.

3) Gegeben sei die Matrix A mit

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}+2}{4} & \frac{\sqrt{2}-2}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}-2}{4} & \frac{\sqrt{2}+2}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

   a) Zeigen Sie, dass die zugehörige lineare Abbildung L_A orthogonal ist.
   b) Sei $v = (-1, 1, 0)^T$. Bestimmen Sie $L_A(v)$ sowie $a_1 = \frac{v}{\|v\|}$. Ergänzen Sie zu einer Orthonormalbasis $\mathcal{B}$ und bestimmen Sie die Abbildungsmatrix von L_A bezüglich der Basis $\mathcal{B}$.
   c) Argumentieren Sie, warum L_A eine Drehung ist. Bestimmen Sie die Drehachse und den Drehwinkel.

Aufgabe 8.4. (20 Punkte)
Sei $(\mathbb{R}^n, \langle\ ,\ \rangle)$ der standard-euklidische, n-dimensionaler Vektorraum, $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine orthogonale Abbildung. Die Abbildung u habe keinen reellen Eigenwert. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass für jeden komplexen Eigenwert λ auch das komplex Konjugierte $\overline{\lambda}$ ein Eigenwert ist und mit $v \in \mathrm{Eig}(u, \lambda)$ auch $\overline{v} \in \mathrm{Eig}(u, \overline{\lambda})$ gilt. Sei für einen Eigenvektor v die Menge

$$W := \mathbb{R}(v + \overline{v}) + \mathbb{R}(i(v - \overline{v})) \subseteq \mathbb{C}^n$$

Zeigen Sie:

1) Für $w \in W$ ist $w = \overline{w}$ und damit $W \subseteq \mathbb{R}^n$.

2) W ist ein zwei-dimensionaler reeller Untervektorraum in $\mathbb{R}^n$.

3) $u(W) = W$.

4) $u|_W$ ist einen Drehung.

Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten linear unabhängig sind und dass die Fortsetzung von u nach $\mathbb{C}^n$ auch $\mathbb{C}$-linear ist.