AGLA II / Geometrie

Stefan Wiedmann / Verena Spratte – Sommersemester 2021

Aufgabenblatt 5

Vorname	Nachname	1	2	3	4	Σ

Gruppenabgabe im Stud.IP: Mittwoch 12.05.2021 bis 18 Uhr.

Geben Sie bitte jede Aufgabe in einzelnen Dateien in den zugehörigen Abgabeordner im Stud.IP ab. Verwenden Sie

- bis zu drei ggb-Datei der Form **NachnameBlatt5A1a.pdf** etc. für Aufgabe 1 (zur besseren Übersicht dürfen Sie die Aufgabenteile einzeln abgeben),
- je ein pdf-Dokument der Form **NachnameNachnameNachnameBlatt5A3.pdf** bzw. **NachnameNachnameNachnameBlatt5A2uA4.pdf** für die Aufgaben 2,3 und 4.

Andere Formate und/oder mehr Dateien pro Aufgabe werden nicht akzeptiert.

Aufgabe 5.1. (20 Punkte, Einzelabgabe)

1) Erstellen Sie einen Winkel im $\mathbb{R}^2$, dessen Größe sich per Schieberegler einstellen lässt. Zerlegen Sie die Drehung um diesen Winkel zeichnerisch in 2 Spiegelungen und prüfen Sie ihr Ergebnis, indem Sie mehrere Objekte (z.B. Dreiecke) verfolgen.

2) Übertragen Sie Ihr Ergebnis in den $\mathbb{R}^3$: Zerlegen Sie eine Drehung um eine Ursprungsgerade zeichnerisch in zwei Spiegelungen an Ebenen.

3) Zerlegen Sie die Punktspiegelung im Ursprung (also $-\mathrm{id}$) im $\mathbb{R}^3$ in drei Spiegelungen an Ebenen. Finden Sie mindestens zwei verschiedene Möglichkeiten.

Aufgabe 5.2. (20 Punkte)

a) Zu zeigen: $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$, der Vektorraum der reellen $n \times n$-Matrizen wird mit

$$\langle X, Y\rangle := \mathrm{Spur}(X^T Y)$$

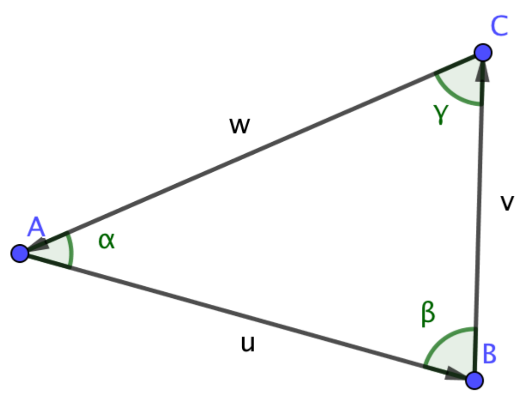
zu einem euklidischen Vektorraum, d.h. zu zeigen ist, dass die Bilinearform positiv definit ist (vgl. Aufgabe 4.2).

b) Ortho<u>normalisieren</u> Sie mit dem Verfahren von Gram-Schmidt die Vektoren bezüglich der Form in Teil a):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5.3. (20 Punkte)

Gegeben sei das (nicht ausgeartete) Dreieck



mit $\alpha = \measuredangle(B, A, C)$, $\beta = \measuredangle(C, B, A)$, $\gamma = \measuredangle(A, C, B)$ in der euklidischen Ebene $\mathbb{R}^2$ und $u = \overrightarrow{AB}$, $v = \overrightarrow{BC}$ und $w = \overrightarrow{CA}$, d.h. $u + v + w = 0$. Zeigen Sie, dass $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ ist.

Bestimmen Sie dazu:

1) $\cos(\alpha)$, $\cos(\beta)$, $\cos(\gamma)$ mittels des Skalarprodukts.

2) $\sin(\alpha)$, $\sin(\beta)$, $\sin(\gamma)$ mittels Pythagoras und 1).

3) Zeigen Sie dann mittels Additionstheoremen und 1), 2): $\sin(\alpha + \beta) = \sin(\pi - \gamma)$ und $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\pi - \gamma)$.

4) Folgern Sie nun die Aussage mittels der Verwendung der Bijektivität der Tangensfunktion.

Aufgabe 5.4. (20 Punkte)

Diese Aufgabe verallgemeinert die Dimensionsformel aus der Vorlesung, die zur Lösung der Aufgabe benutzt werden darf.
Sei (V, b) ein Vektorraum mit symmetrischer Bilinearform b, W sei ein Untervektorraum von V. Weiter bezeichne $W^{\perp}$ das orthogonale Komplement von W in V bezüglich b. Sei $R := \mathrm{rad}(V, b)$ das Radikal von (V, b). Dann gilt für die Dimensionen der Untervektorräume:

$$\dim(W^{\perp}) = \dim(V) - \dim(W) + \dim(R \cap W)$$

a) Prüfen Sie die Formel zunächst für einen 2-dimensionalen Vektorraum indem Sie alle Möglichkeiten auflisten.

b) Zeigen Sie, dass jede Zerlegung $V = R \oplus V'$ schon orthogonal ist und dass $(V', b|_{V'})$ nicht ausgeartet ist.

c) Zeigen Sie, dass es eine Zerlegung $V = R \oplus V'$ gibt, sodass $W = (R \cap W) \oplus W'$ mit $W' = V' \cap W$ gilt.

d) Sei $(W'_{V'})^{\perp}$ der Senkrechtraum von W' in V'. Zeigen Sie, dass $(W)^{\perp} = (W'_{V'})^{\perp} \oplus R$ gilt.

e) Folgern Sie nun die verallgemeinerte Dimensionsformel.