AGLA II / Geometrie

Stefan Wiedmann / Verena Spratte – Sommersemester 2021

Aufgabenblatt 2

Vorname	Nachname	1	2	3	4	Σ

Gruppenabgabe als pdf-Datei im Stud.IP: Mittwoch 21.4.2020 bis 18 Uhr.

Geben Sie bitte jede Aufgabe in einzelnen Dateien in den zugehörigen Abgebeordner im StudIP ab. Verwenden Sie

- geogebra-Files der Form **NachnameBlatt2A1.ggb** für Aufgabe 1 ,
- pdf-Dokumente der Form **NachnameNachnameNachnameBlatt2A2.pdf** etc für Aufgaben 2-4.

Andere Formate und/oder mehrere Dateien pro Aufgabe werden nicht akzeptiert. Bevor Sie eine .ggb-Datei abgeben, prüfen Sie im Konstruktionsprotokoll und an der Objektliste, ob Sie unnötige Objekte gelöscht haben.
Mehrere Bilder lassen sich z.B. unter Android mit Image to PDF Converter zu einer pdf-Datei umwandeln. Ansonsten einfach Google fragen (Mehrere Bilder zu pdf umwandeln – jeweiliges Betreibsystem). Es reicht in der Regel auf Grauwerte (grayscale) umzuwandeln.

Aufgabe 2.1. (20 Punkte + 3 Bonuspunkte, Einzelabgabe!)
Machen Sie sich mit dem Programm *Geogebra* (zu finden unter `https://www.geogebra.org`) vertraut. Es gibt eine Online-Version, das Programm lässt sich aber auch auf jeder Plattform installieren (empfohlen: Geogebra Classic 6). Geogebra stellt online Tutorials und Hilfefunktionen zur Verfügung, zum Beispiel hier: `https://wiki.geogebra.org/de/Handbuch`.

1) Zeichnen Sie drei Punkte A, B, C, die nicht auf einer Geraden liegen. Zeichnen Sie mit Geogebra auf 3 verschiedene Weisen die Winkelhalbierende des Winkels $\measuredangle ABC$. Benennen Sie die Winkelhalbierenden $w1, w2, w3$. (Zwei Weisen sind verschieden, wenn Sie verschiedene Geogebra-Befehle verwendet haben.)

2) Zeichnen Sie drei Punkte A,B,C, die nicht auf einer Geraden liegen. Konstruieren Sie nur mit „Zirkel und Lineal“ das Lot von C auf AB.

   (i) Bestimmen Sie in Geogebra den Abstand von B zum Lotpunkt von C sowie die Längen der Strecken AB und BC.

   (ii) Zeichnen Sie die Vektoren $\overrightarrow{BA}$ und $\overrightarrow{BC}$ und bestimmen Sie in Geogebra deren Skalarprodukt.

   (iii) (3 Bonuspunkte): Welchen Zusammenhang erkennen Sie? Notieren Sie Ihre Hypothese in einem Textfeld.

Aufgabe 2.2. (20 Punkte)
Den $\mathbb{C}$-Vektorraum aller komplexen Folgen $x = (x_j)_{j\in\mathbb{N}}$, für die die Quadratsumme aller Folgenglieder endlich ist, nennen wir den ℓ^2-Folgenraum:

$$\ell^2 = \left\{ x \,\middle|\, x_j \in \mathbb{C} \text{ für alle } j \in \mathbb{N} \text{ und } \sum_{j=0}^{\infty} |x_j|^2 < \infty \right\}$$

1) Zeigen Sie, dass die Abbildung $b : \ell^2 \times \ell^2 \to \mathbb{C}$ mit $b(x, y) = \sum_{j=0}^{\infty} x_j y_j$ eine Bilinearform auf ℓ^2 definiert. (Hinweis: Dazu gehört auch, die Konvergenz zu begründen – siehe Diff I!)

2) Ist b symmetrisch, antisymmetrisch oder keins von beidem?

3) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir nun die Folgen $x(n) \in \ell^2$ mit $x(n)_j = \begin{cases} n & \text{für } j = 2n \\ 0 & \text{für } j \neq 2n. \end{cases}$

   Gibt es $0 \neq y \in \ell^2$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $b(x(n), y) = 0$?

4) Geben Sie die zu b gehörige quadratische Form q an. Bestimmen Sie $q(x)$ für die Folge $x \in \ell^2$ mit $x_j = \left(\frac{\sqrt{-1}}{2}\right)^j$.

Aufgabe 2.3. (20 Punkte)
Analog zur Beschreibung von Geraden im $\mathbb{R}^2$ aus der Vorlesung beschreiben wir Ebenen im $\mathbb{R}^3$ als Mengen $\{\lambda v_1 + \mu v_2 + w \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$ für $v_1, v_2, w \in \mathbb{R}^3$.

1) Sei $(V = \mathbb{R}^3, \langle\ ,\ \rangle)$ zusammen mit dem Standard-Skalarprodukt der euklidische Raum. Sei E eine Ebene im $\mathbb{R}^3$ und $n \in \mathbb{R}^3$ ein (nicht notwendigerweise normierter) Normalenvektor von E sowie $p \in E$ beliebig.

   Zeigen Sie: Ein Punkt $x \in \mathbb{R}^3$ liegt genau dann auf E, wenn $\langle x, n\rangle = \langle p, n\rangle$.

2) Seien $l_1 = v_1 + \mathbb{R}w_1$ und $l_2 = v_2 + \mathbb{R}w_2$ mit $v_1, v_2, w_1, w_2 \in V$ zwei Geraden in V. Sie heißen *windschief*, wenn es keine Ebene E gibt, sodass l_1 und l_2 in E liegen.

   Zeigen Sie: l_1 und l_2 sind windschief genau dann, wenn die Vektoren $v_2 - v_1, w_1, w_2$ linear unabhängig sind.

Aufgabe 2.4. (20 Punkte)

Sei V ein endlich dimensionaler Vektoraum der Dimension n über dem Körper K und sei $V^* = \mathrm{Hom}(V, K)$ der duale Raum.

1) Zeigen Sie, dass die Paarung

$$V \times V^* \to K, \quad (v, \varphi) \mapsto \varphi(v)$$

   bilinear ist, also ebenfalls die Axiome einer Bilinearform erfüllt.

2) Wir nennen einen Untervektorraum $H \subset V$ mit $\dim(H) = n - 1$ eine Hyperebene von V. Zeigen Sie, dass es eine Bijektion zwischen der Menge aller Hyperebenen von V und aller nicht trivialen Elemente von V^* bis auf skalare Vielfache gibt.