AGLA II / Geometrie

Stefan Wiedmann / Verena Spratte – Sommersemester 2021

Aufgabenblatt 10

Vorname	Nachname	1	2	3	4	Σ

Gruppenabgabe im Stud.IP: Mittwoch 16.06.2021 bis 18 Uhr.

Geben Sie bitte jede Aufgabe in einzelnen Dateien in den zugehörigen Abgabeordner im Stud.IP ab. Verwenden Sie außschließlich die Formate

- **NachnameBlatt10A1.pdf** und **NachnameBlatt10A1.ggb** für Aufgabe 1.
- **NachnameNachnameNachnameBlatt10A3.pdf** bzw. **NachnameNachnameNachnameBlatt10A2uA4.pdf** für die Aufgaben 2,3 und 4.

Bevor Sie eine .ggb-Datei abgeben, prüfen Sie im Konstruktionsprotokoll und an der Objektliste, ob Sie unnötige Objekte gelöscht haben. Diese Blatt gibt 10 Punkte mehr als sonst und holt damit ausgelassene Punkte von Blatt 6 nach.

Aufgabe 10.1. (20 Punkte, Einzelabgabe)
Wir betrachten die Schar von Kegelschnitten

$$Q(u) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 2uxy + 3y^2 = 1\},$$

mit $-10 \leq u \leq 10$.

a) Stellen Sie die Schar über einen Schieberegler für u in Geogebra dar. Welche Typen von Kegelschnitten ergeben sich in Abhängigkeit von u?

b) Betrachten Sie $u = 1$.

   (a) Informieren Sie sich über die Hauptachsen dieses Kegelschnitts und zeichnen Sie sie möglichst genau ein. Verwenden Sie Eigenschaften der Hauptachsen zur Überprüfung Ihrer Zeichnung.

   (b) Drehen Sie den Kegelschnitt so, dass die Hauptachsen mit den Koordinatenachsen übereinstimmen. Geben Sie die Drehmatrix und eine Gleichung des gedrehten Kegelschnitts in der Form $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$ für $a, b \in \mathbb{R}$.

c) Betrachten Sie $u = 3$.

   (a) Informieren Sie sich über die Hauptachsen dieses Kegelschnitts und zeichnen Sie sie möglichst genau ein. Verwenden Sie Eigenschaften der Hauptachsen zur Überprüfung Ihrer Zeichnung.

   (b) Drehen Sie den Kegelschnitt so, dass eine Hauptachse das Bild der anderen unter Spiegelung an der y-Achse ist. Geben Sie die Drehmatrix und eine Gleichung des gedrehten Kegelschnitts in der Form $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$ für $a, b \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 10.2. (20 Punkte)
Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 2 & i & 0 \\ -i & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1) Zeigen Sie, dass A hermitesch und B symmetrisch ist.

2) Bestimmen Sie eine unitäre Matrix, die A diagonalisiert.

3) Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix, die B diagonalisiert.

4) Deuten Sie Ihre Ergebnisse im Hinblick auf die Signatur von A und B.

Aufgabe 10.3. (30 Punkte)
Ein pythagoreisches Tripel (a, b, c) besteht aus drei natürliche Zahlen, so dass $a^2 + b^2 = c^2$ und $0 < a \leq b \leq c$. Es heißt primitiv, wenn $\mathrm{ggT}(a, b, c) = 1$.

1) Finden Sie das kleinste pythagoreische Tripel.

2) Für den Schulkontext bietet z.B. `https://www.schule-bw.de/faecher-und-schularten/mathematisch-naturwissenschaftliche-faecher/mathematik/unterrichtsmaterialien/sekundarstufe1/geometrie/pyth/pyth_tripel.html` eine Animation zur Erzeugung pythagoreischer Tripel. Zeigen Sie, dass für alle $u, v \in \mathbb{N}$ mit $u > v$ die Zahlen $a = u^2 - v^2$, $b = 2uv$ und $c = u^2 + v^2$ tatsächlich ein pythagoreisches Tripel bilden.

3) Zeigen Sie, dass für jedes primitive pythagoreische Tripel (a, b, c) zwei natürliche Zahlen $u, v \in \mathbb{N}$ mit $u > v$ gefunden werden können, so dass das Tripel der Darstellung aus Teil 2) entspricht.

   (a) Finden Sie einen Punkt $(x, y)^T$ auf dem Einheitskreis in $\mathbb{R}^2$, so dass $x > 0$, $y > 0$ und $\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$.

   (b) Bestimmen Sie den y-Achsenabschnitt t der Gerade, die durch $(-1, 0)^T$ und $(x, y)^T$ verläuft. Zeigen Sie, dass $t = \frac{v}{u}$ für geeignete $u, v \in \mathbb{N}$ mit $u > v$.

   (c) Drücken Sie x und y durch u, v aus.

   (d) Fügen Sie die Überlegungen zu einem Beweis der Aussage zusammen.

4) Finden Sie ein pythagoreisches Tripel, das sich nicht in dieser Form darstellen lässt.

Aufgabe 10.4. (10+10 Punkte)

1) Sei (V, b) ein K-Vektorraum mit nicht ausgearteter symmetrischer Bilinearform b, es sei weiter die Quadrik
$$Q := \{x \in V \mid b(x, x) = 1\}$$
gegeben. Es sei $b(y, y) \neq 0$ für alle $y \in V, y \neq 0$, d.h. (V, b) ist total anisotrop.

   a) Sei $x_0 \in Q$. Zu betrachten für $y \in V, y \neq 0$ die Gerade $G(y) := \{x_0 + \lambda y \mid \lambda \in K\}$. Zu berechnen $G(y) \cap Q$.

   b) Interpretieren Sie die verschiedenen Fälle.

2) Sei nun $(V = \mathbb{R}^3, b)$ eine nichtausgeartete symmetrische Bilinearform auf dem Standardvektorraum $\mathbb{R}^3$. Sei $Q := \{x \in V \mid b(x, x) = 1\}$ eine Quadrik, weiter sei $x_0 \in Q$.

   a) Sei $G = \{x_0 + \lambda y \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ eine Gerade mit Richtungsvektor $0 \neq y \in V$. Zu zeigen: Es ist $G \subset Q$ genau dann, falls $b(x_0, y) = 0$ und $b(y, y) = 0$.

   b) Zu zeigen: Gibt es, wie in Teil a) oben eine Gerade G durch x_0, $G \subset Q$, so gibt es eine weitere Gerade G' durch x_0, $G' \subset Q$, $G' \neq G$.

   c) Berechnen Sie G' für die Bilinearform $b(x, x) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$ und $x_0 = (1, 1, 1)$ und $y = (1, 0, 1)$.