4.4

a) $V = \mathbb{R}^2 = \text{span}\left\{ \underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}}_{=:e_1}, \underbrace{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}}_{=:e_2} \right\} = \text{span}\{e_1, e_2\}$ ausgestattet mit $b(x,y) = \langle x, y\rangle$

$$O(V) = \left\{ A : V \to V, x \mapsto A(x) \;\middle|\; \left(\forall x \in V : A(x) = Ax,\ A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}\right) \wedge \left(\forall x,y \in V : \langle x,y\rangle = \langle Ax, Ay\rangle\right) \right\}$$

---

1. Charakteristik von $A \in \mathbb{R}^{2\times2}$ mit $\langle x,y\rangle = \langle Ax, Ay\rangle$:

setze $x = e_i$, $y = e_j$

$$\Rightarrow \underbrace{\langle e_i, e_j\rangle}_{=\delta_{ij}} = \langle Ae_i, Ae_j\rangle = \langle A^T A e_i, e_j\rangle = (A^T A)_{ij} \qquad i,j = 1,2.$$

$$\Rightarrow \quad A^T A = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} \Rightarrow \det(A^T A) = \det(A^T)\det(A) = (\det(A))^2 = 1 .$$

$\Rightarrow$ A sind alle Matrizen mit $(\det A = a_{11}\cdot a_{22} - a_{12}a_{21} = \pm 1)$.

2. Explizite Bestimmung der Einträge .

setze $x = e_i$, $y = e_j$

$$\Rightarrow \underbrace{\langle e_i, e_j\rangle}_{=\delta_{ij}} = \langle Ae_i, Ae_j\rangle = a_{1i}\cdot a_{1j} + a_{2i}a_{2j} = \delta_{ij} \qquad i,j = 1,2$$

Also erhalten wir zusammen mit der Bedingung $\det(A) = \pm 1$ vier Gleichungen, denen die Einträge genügen müssen:

I) $a_{11}^2 + a_{21}^2 = 1$
II) $a_{22}^2 + a_{12}^2 = 1$ } Kreisgleichungen.
III) $a_{11}a_{12} + a_{22}a_{21} = 0$
IV) $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 1 \quad \vee \quad a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = -1$

I) $(a_{11})^2 = \cos(\alpha) \wedge (a_{21})^2 = \sin(\alpha) \Rightarrow |a_{11}| = |\cos(\alpha)| \wedge |a_{21}| = |\sin(\alpha)|$

II) $(a_{22})^2 = \cos(\beta) \wedge (a_{12})^2 = \sin(\beta) \Rightarrow |a_{22}| = |\cos(\beta)| \wedge |a_{12}| = |\sin(\beta)|$

III) mit I) und II) folgt $|\cos(\alpha)||\sin(\beta)| \overset{!}{=} |\cos(\beta)||\sin(\alpha)|$

$$\Rightarrow \alpha = \beta + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \qquad \text{O.E.d.A}: \alpha = \beta .$$

Zwischenergebnis:

$\forall \alpha \in \mathbb{R} : |a_{11}| = |a_{22}| = |\cos(\alpha)| \wedge |a_{12}| = |a_{21}| = |\sin(\alpha)|$

$\rightsquigarrow$ Benutze IV, um die Vorzeichen festzulegen! $\longrightarrow$

IV) wir wissen $\forall \alpha \in \mathbb{R}: \; |a_{11}| = |a_{22}| = |\cos(\alpha)| \wedge |a_{12}| = |a_{21}| = |\sin(\alpha)|$.

es soll $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ gelten, dass

Fall 1: $\det(A) = 1 \Rightarrow a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} = 1 \; (*)$

Für $\alpha = \frac{\pi}{2}$: $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0 \Rightarrow (*) \Leftrightarrow a_{11} = a_{22}$

Für $\alpha = 0$: $\sin(\frac{\pi}{2}) = 0 \Rightarrow (*) \Leftrightarrow a_{12} = -a_{21}$

$\Rightarrow A: V \to V, x \mapsto Ax$ mit $\det(A) = 1$

$$\Leftrightarrow A_1 = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Fall 2: $\det(A) = -1 \Rightarrow a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} = -1 \; (**)$

Für $\alpha = \frac{\pi}{2}$: $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0 \Rightarrow (**) \Leftrightarrow a_{11} = -a_{22}$

Für $\alpha = 0$: $\sin(\frac{\pi}{2}) = 0 \Rightarrow (**) \Leftrightarrow a_{12} = a_{21}$

$\Rightarrow A: V \to V, x \mapsto Ax$ mit $\det(A) = -1$

$$\Leftrightarrow A_2 = \begin{pmatrix} -\cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Zusammen folgt:

$SO(V) = \{ A: V \to V, x \mapsto Ax \mid A = A_1 \text{ mit } \alpha \in \mathbb{R} \}$

$O(V) = \{ A: V \to V, x \mapsto Ax \mid A = A_1 \vee A = A_2 \text{ mit } \alpha \in \mathbb{R} \}$

4.4

b) $V = \mathbb{R}^2 = \operatorname{span}\{e_1, e_2\}$ mit $b(x,y) = \langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x, y \rangle$

gesucht: $A: V \to V,\ x \mapsto Ax,\ \forall x,y \in V: \langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x, y \rangle = \langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} Ax, Ay \rangle$.

Vorgehen: analog zu a) $\rightsquigarrow$ Anwendung auf Basis $\{e_1, e_2\}$, Ableiten v. GL.

Es gilt $\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 1 & i=j=1 \\ -1 & i=j=2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$, da

$\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle = 1$ $\quad$ $\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = \langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle = 0$.

$\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = -1$

Also

$$\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} Ae_i, Ae_j \rangle = \langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \end{pmatrix} \rangle = a_{1i} a_{1j} - a_{2i} a_{2j} = \begin{cases} 1, & i=j=1 \\ -1, & i=j=2 \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

I) $(a_{11})^2 - (a_{21})^2 = 1 \implies a_{11}^2 = \cosh^2(\alpha) \wedge (a_{21})^2 = \sinh^2(\alpha) \quad \alpha \in \mathbb{R}$

II) $-(a_{22})^2 + (a_{12})^2 = -1 \implies a_{22}^2 = \cosh^2(\beta) \wedge (a_{12})^2 = \sinh^2(\beta) \quad \beta \in \mathbb{R}$.

III) $a_{11} a_{12} - a_{21} a_{22} = 0 \overset{I)+II)}{\implies} |\cosh(\alpha)|\,|\sinh(\beta)| = |\cosh(\beta)|\,|\sinh(\alpha)|$

$\implies \alpha = \beta$ da sinh bijektiv auf $\mathbb{R}$.

IV) $\det(A^t G A) = \det(G) \implies \det(A) = \pm 1$

Zwischenergebnis:

$|a_{11}| = |a_{22}| = |\cosh(\alpha)| \wedge |a_{12}| = |a_{21}| = |\sinh(\alpha)|, \quad \alpha \in \mathbb{R}$

Idee: betrachte zuerst die Elemente in $SO(V)$. Für die gilt $\det A = 1$.

IV) $a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} = 1 \quad (*)$

Speziell für $\alpha = 0$: $\sinh(0) = 0 \implies a_{11} = a_{22}$

$(*)$ gilt für alle $\alpha \in \mathbb{R} \implies a_{11} = a_{22} \wedge a_{21} = a_{12}$

$$\implies SO(V) = \left\{ A: V \to V, x \mapsto Ax \;\middle|\; A = \begin{pmatrix} \cosh(\alpha) & \sinh(\alpha) \\ \sinh(\alpha) & \cosh(\alpha) \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

IV) $a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} a_{21} = -1 \quad (**)$

Speziell für $\alpha = 0$: $\sinh(0) = 0 \implies a_{11} = -a_{22}$

$(**)$ gilt für alle $\alpha \in \mathbb{R} \implies a_{11} = -a_{22} \wedge a_{21} = -a_{12}$

$$\implies O(V) = \left\{ A: V \to V, x \mapsto Ax \;\middle|\; A = \begin{pmatrix} \cosh(\alpha) & \sinh(\alpha) \\ \sinh(\alpha) & \cosh(\alpha) \end{pmatrix} \vee A = \begin{pmatrix} -\cosh(\alpha) & \sinh(\alpha) \\ -\sinh(\alpha) & \cosh(\alpha) \end{pmatrix} \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$