1.

Vorüberlegung Drehachse:

- Angenommen, man wendet eine Drehmatrix D, $D \in R^{3\times 3}, D = D^{-1}$ auf einen Vektor $u \in R^3$ an, der auf der Drehachse liegt, dann verändert die Drehmatrix weder seine Richtung noch seine Länge, also $Du = u$.
- Mit anderen Worten: gesucht ist der Eigenvektor von D zum Eigenwert $\lambda = 1$.
- Der Eigenvektor (also die Drehachse) wird durch Lösen des linearen Gleichungssystems $(D - I)u = 0$ bestimmt.

Vorüberlegung Drehwinkel:

- Angenommen wir kennen die Drehachse u einer Drehung im Raum. Dann kann man eine orthonormale Basis für R^3 konstruieren, die u als Richtungsvektor enthält: $\{e_1, e_2, \hat{u}\}$
- Jeder Vektor lässt sich bzgl. dieser Basis zerlegen und eine Drehung um den Winkel α um die Drehachse $\hat{u}$ besitzt die Abbildungsmatrix D= $\begin{pmatrix} cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- Anwendung von D auf die Basisvektoren führt auf die folgenden drei Gleichungen:
  $$De_1 = d_{11} = \cos(\alpha) \quad \wedge \quad De_2 = d_{22} = \cos(\alpha) \quad \wedge \quad D\hat{u} = d_{33} = 1$$
  Also gilt
  $$d_{11} + d_{22} + d_{33} = 2\cos(\alpha) + 1 \Rightarrow \cos(\alpha) = \frac{1}{2}(\text{Spur}(D) - 1)$$

1.2)

$$d_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, d_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, d_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, d_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tau = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Bestimmung der Drehachse für $\sigma = d_3 \circ d_2$

$$(\sigma - I_3)u = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} u = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} u = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow u = \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \beta \in R$$

Bestimmung der Drehachse für $\tau = d_1^{-1} \circ d_2 \circ d_1$

$$(\tau - I_3)u = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} u = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow u = \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \beta \in R$$

Ergebnis:

Drehachse der Drehung σ wird vom Eigenvektor $u = (1, -1, 1)^\intercal$ erzeugt.

Drehachse der Drehung τ wird vom Eigenvektor $u = (0,0,1)^\intercal$ erzeugt.

1.3) Die Drehwinkel der Drehungen σ und τ können mit Hilfe von Geogebra ermittelt werden. Gemäß Hinweis habe ich zwei Parameter für die gesuchten Winkel erzeugt (α_1 und α_2). Mit dem Befehl

„Drehe“ lasse ich Drehungen des Ausgangsdreiecks um die Drehachsen aus 1.2) anzeigen (sogenannte Hilfsobjekte). Wenn die Hilfsobjekte die gedrehten Dreiecke identisch überlagern, hat man den gesuchten Drehwinkel gefunden und kann ihn ablesen.

Ergebnis:

σ: Drehachse $(1,-1,1)^{\top}$ mit Drehwinkel $\alpha_1 \approx 4{,}18$

τ: Drehachse $(0,0,1)^{\top}$ mit Drehwinkel $\alpha_2 = 1{,}57$

1.4) Rechnerische Bestimmung der Drehwinkel im Intervall $[0,2\pi)$:

Drehwinkel für $\sigma = d_3 \circ d_2$: $\cos(\alpha_1) = \frac{1}{2}(\mathrm{Spur}\sigma - 1) = \frac{1}{2}(0+1) = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha_1 = 4/3\pi$

Drehwinkel für $\tau = d_1^{-1} \circ d_2 \circ d_1$: $\cos(\alpha_2) = \frac{1}{2}(\mathrm{Spur}\, \tau - 1) = \frac{1}{2}(1+1) = 1 \Rightarrow \alpha_2 = \pi/2$