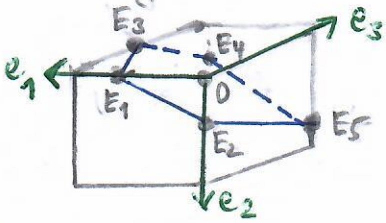
3.b) Fünfeck.

Es sei ein 5-Eck als Schnittfläche einer Ebene mit dem Einheitswürfel gegeben.



o.B.d.A.: $\exists\ \lambda_i \in (0,1)$, $i=1,2,3,4$: und $\lambda_5 \in (0,1]$:

$\overrightarrow{OE_1} =: \vec{v}_1 = \lambda_1 \vec{e}_1$

$\overrightarrow{OE_2} =: \vec{v}_2 = \lambda_2 \vec{e}_2$

$\overrightarrow{OE_3} =: \vec{v}_3 = \vec{e}_1 + \lambda_3 \vec{e}_3$

$\overrightarrow{OE_4} =: \vec{v}_4 = \vec{e}_1 + \lambda_4 \vec{e}_2 + \vec{e}_3$

$\overrightarrow{OE_5} =: \vec{v}_5 = \lambda_5 \vec{e}_2 + \vec{e}_3$

Im gleichmäßigen Fünfeck sind die Richtungsvektoren $\overrightarrow{E_1E_4}$ und $\overrightarrow{E_2E_5}$ parallel: $\overrightarrow{E_1E_4} \times \overrightarrow{E_2E_5} = \vec{0}$

Annahme E_1, E_2, E_3, E_4, E_5 sind die Ecken eines gleichmäßigen Fünfecks.

$$\overrightarrow{E_1E_4} = \vec{v}_4 - \vec{v}_1 = \vec{e}_1 + \lambda_4 \vec{e}_2 + \vec{e}_3 - \lambda_1 \vec{e}_1 = (1-\lambda_1)\vec{e}_1 + \lambda_4 \vec{e}_2 + \vec{e}_3$$

$$\overrightarrow{E_2E_5} = \vec{v}_5 - \vec{v}_2 = \lambda_5 \vec{e}_2 + \vec{e}_3 - \lambda_2 \vec{e}_2 = (\lambda_5 - \lambda_2)\vec{e}_2 + \vec{e}_3$$

$$\vec{0} = (\overrightarrow{E_1E_4}) \times (\overrightarrow{E_2E_5}) = (1-\lambda_1)(\lambda_5-\lambda_2)\underbrace{\vec{e}_1 \times \vec{e}_2}_{=\vec{e}_3} + (1-\lambda_1)\underbrace{\vec{e}_1 \times \vec{e}_3}_{=\vec{e}_2} + \big(\lambda_4 - (\lambda_5 - \lambda_2)\big)\underbrace{\vec{e}_2 \times \vec{e}_3}_{=\vec{e}_1}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (1-\lambda_1)(\lambda_5-\lambda_2) = 0 \\ 1-\lambda_1 = 0 \\ \lambda_4 - \lambda_5 + \lambda_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda_1 = 1$$ im Widerspruch zur Voraussetzung dass $\lambda_1 < 1$.

$\Rightarrow$ $E_1, E_2; E_3, E_4, E_5$ kann kein gleichmäßiges Fünfeck aufspannen.