1. $K_1 = \{ (x,y)^T \mid (x-12)^2 + (y-5)^2 = 25 \}$ $\quad M_1 = (12,5) \quad R_1 = 5$

$K_2 = \{ (x,y)^T \mid (x-2)^2 + (y+\frac{5}{2})^2 = \frac{25}{4} \}$ $\quad M_2 = (2,-\frac{5}{2}) \quad R_2 = \frac{5}{2}$.

Bem.: K_1 und K_2 schneiden sich nicht, da $\quad |M_1 - M_2| > R_1 + R_2 \quad (*)$:

$$|M_1-M_2| = \left((12-2)^2 + (5+\tfrac{5}{2})^2\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{25}{2} = 12{,}5 > \frac{15}{2} = 7{,}5.$$

1.1)

d_1: Abstand der Mittelpunkte der Kreise

$$d_1 = |M_1 - M_2| = 12{,}5$$

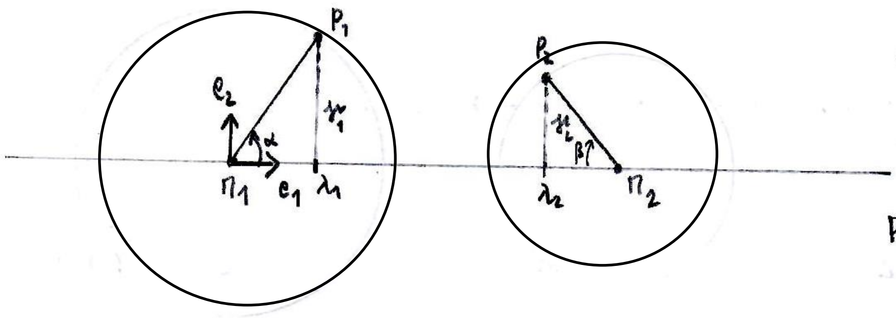
d_3: Summe der Abstände der Mittelpunkte zum Ursprung

$$d_3 = |M_1| + |M_2| = \sqrt{(12)^2 + 5^2} + \sqrt{(2)^2 + (\tfrac{5}{2})^2} = 13 + \frac{\sqrt{41}}{2}$$

d_2: Länge der kürzesten Strecke zwischen den Kreislinien

Zeige: für den Fall zweier Kreise, die sich nicht schneiden, liegt die kürzeste Strecke auf einer Geraden durch die Mittelpunkte der Kreise.

[Bem.: für den Fall zweier Kreise, die sich schneiden stimmt das nicht!]



$$e_1 = \frac{M_2 - M_1}{|M_2 - M_1|} = \frac{2}{25}\begin{pmatrix}10\\ \frac{15}{2}\end{pmatrix}$$

$e_2 \perp e_1$

$P_1 = \begin{pmatrix}\lambda_1\\ \gamma_1\end{pmatrix} \quad P_2 = \begin{pmatrix}\lambda_2\\ \gamma_2\end{pmatrix}$

$P_1 = M_1 + \lambda_1 e_1 + \gamma_1 e_2 \;, \quad \lambda_1 > 0 \qquad e_1 = \frac{2}{25}\begin{pmatrix}10\\ 15/2\end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix}4\\ 3\end{pmatrix} \quad e_2 \parallel \begin{pmatrix}-3\\ 4\end{pmatrix}$

$P_2 = M_1 + \lambda_2 e_1 + \gamma_2 e_2 \;, \quad \lambda_2 > 0$

$$|P_1 - P_2|^2 = |(M_1 + \lambda_1 e_1 + \gamma_1 e_2) - (M_1 + \lambda_2 e_1 + \gamma_2 e_2)|^2 = |(\lambda_1 - \lambda_2) e_1 + (\gamma_1 - \gamma_2) e_2|^2$$

$$= (\lambda_1 - \lambda_2)^2 + (\gamma_1 - \gamma_2)^2 \geq (\lambda_1 - \lambda_2)^2 \Rightarrow \gamma_1 = \gamma_2 \Rightarrow P_1 - P_2 \parallel e_1 .$$

$P_1 - P_2 \parallel e_1 \Rightarrow \quad |P_1 - P_2| = |M_1 - M_2| - |\lambda_1| - |\lambda_2| \overset{(*)}{\geq} |M_1 - M_2| - R_1 - R_2$

P_1 und P_2 haben minimalen Abstand, wenn $|\lambda_1| = R_1 \wedge |\lambda_2| = R_2$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{für } \lambda_1 = \pm R_1 \text{ folgt } & \alpha = 0 \vee \alpha = \pi \\ \text{für } \lambda_2 = \pm R_2 \text{ folgt } & \beta = 0 \vee \beta = \pi \end{cases}$$

P_1 und P_2 liegen also auf auf der Geraden g, die durch die Kreismittelpunkte verläuft.

Im kronkreten Fall sind die Kreise gegeben durch:

K_1 mit $M_1 = (12, 5)$ $\quad R_1 = 5$

K_2 mit $M_2 = (2, -\frac{5}{2})$ $\quad R_2 = \frac{5}{2}$

Die Gerade g ist durch den Richtungsvektor e_1 eindeutig bestimmt und g kann wie folgt parametrisiert werden. Erste Parametrisierung nehme ich zur Bestimmung der Schnittpunkte mit $g \cap K_1$ und die zweite Parametrisierung zur Bestimmung der Schnittpunkte $g \cap K_2$:

$$g = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5/2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

K_1: $\quad (12 + 4\lambda - 12)^2 + (5 + 3\lambda - 5)^2 = 25 \Leftrightarrow 25\lambda^2 = 25 \quad \lambda = \pm 1$

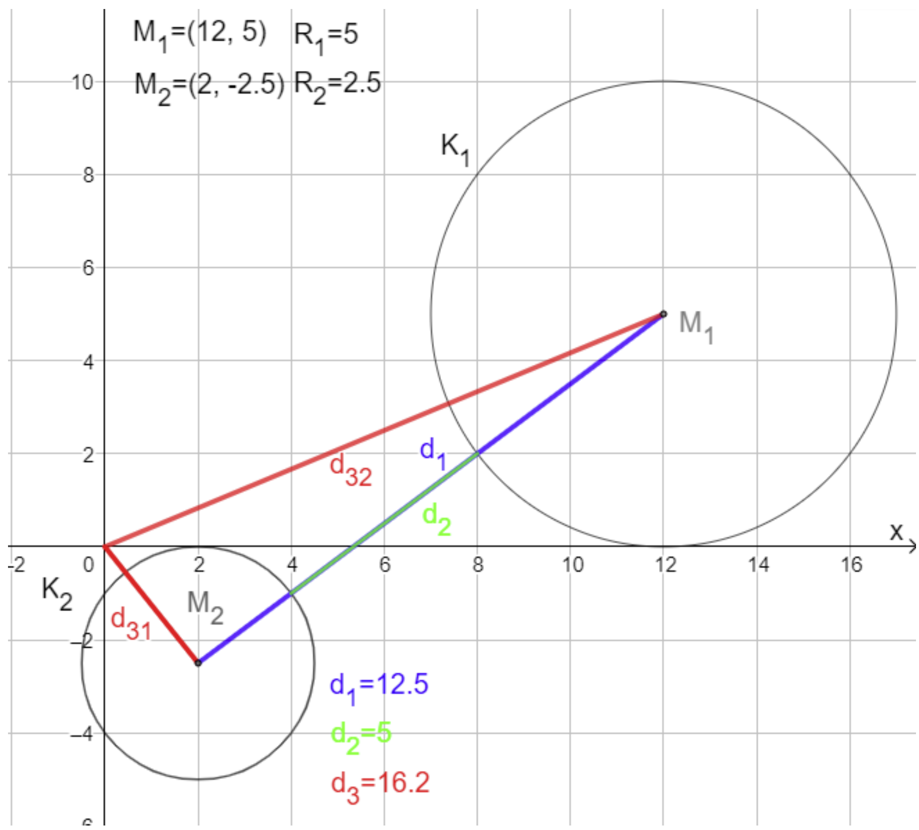
$P_1 = \begin{pmatrix} 16 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \tilde{P}_1 = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}$

K_2: $\quad (2 + 4\lambda - 2)^2 + (-\frac{5}{2} + 3\lambda + \frac{5}{2})^2 = \frac{25}{4} \Leftrightarrow 25\lambda^2 = \frac{25}{4} \quad \lambda = \pm \frac{1}{2}$

$P_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \tilde{P}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}$

$d_2 = |\tilde{P}_1 - P_2| = |(8-4)^2 + (2+1)^2| = (16+9)^{\frac{1}{2}} = 5.$

1.2) Geogebra-Screenshot



1.3) Ein sinnvoller Abstandbegriff d für zwei Objekte sollte

1. symmetrisch sein: $d(K_1, K_2) = d(K_2, K_1)$
2. null liefern, wenn die Schnittmenge der Objekte nicht die leere Menge ist.

Jetzt zur Begutachtung der gegebenen Abstandsbegriffe unter diesen Gesichtspunkten:

1. die gegebenen Abbildungen d_1 und d_2 sind symmetrisch, weil den Kreisen der Euklidische Abstand zwischen zwei Punkten zugeordnet wird und der Euklidische Abstand ist symmetrisch. Die Abbildung d_3 ordnet den Kreisen die Summe zweier Abstände zu und ist damit auch symmetrisch.
2. Positiv-Definitheit: der Bildbereich aller gegebenen Abbildungen ist $[0, \infty)$. Keine der gegebenen Abbildungen erfüllt für $K_i \neq 0$ $d(K_1, K_2) = 0 \Leftrightarrow K_1 = K_2$. Geometrisch sinnvoll ist ein Abstandsbegriff, wenn die Schnittmenge der Kreise nicht null ist. Das heißt insbesondere, wenn
   a. $K_1 = K_2$ (Kreise gleich), dann gilt $d(K_1, K_2) = 0$,
   b. $K_1 \subsetneq K_2$ (ein Kreis im anderen enthalten), dann gilt $d(K_1, K_2) \neq 0$,
   c. $K_1 \cap K_2 \neq$ (Schnittmenge nicht leer), dann gilt $d(K_1, K_2) = 0$,
   d. $R_1 = 0$ (ein Kreis entartet), dann gilt $d(K_1, K_2) = 0$.

Das Ergebnis der Analyse ist in der Tabelle aufgelistet. Erfüllt eine der Abbildungen die Erwartung, dann steht im entsprechenden Tabelleneintrag ein +, wenn nicht ein -. Die Abbildungen zeigen die entsprechende Situation.

Das Fazit ist: nur der zweite Abstandsbegriff ist geometrisch sinnvoll.

Testfrage	a.	b.	c.	d.
Abbildung	1, 2	3, 4, 5	6	7
d_1	+	-	-	+
d_2	+	+	+	+
d_3	-	-	-	-

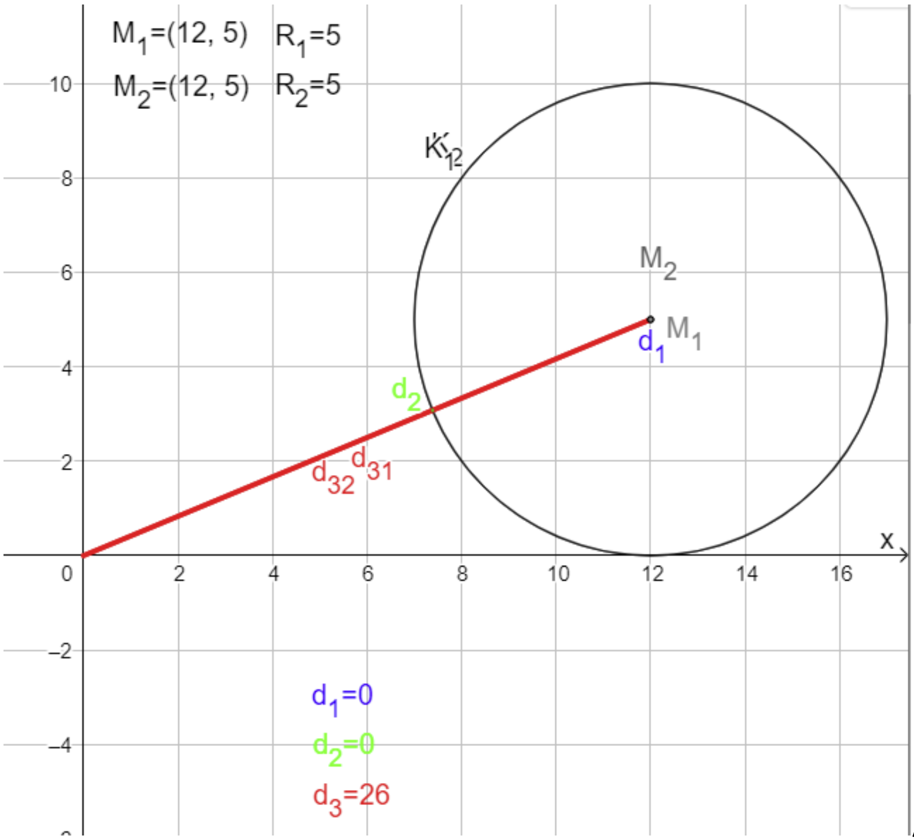


Abbildung 1: Test a.

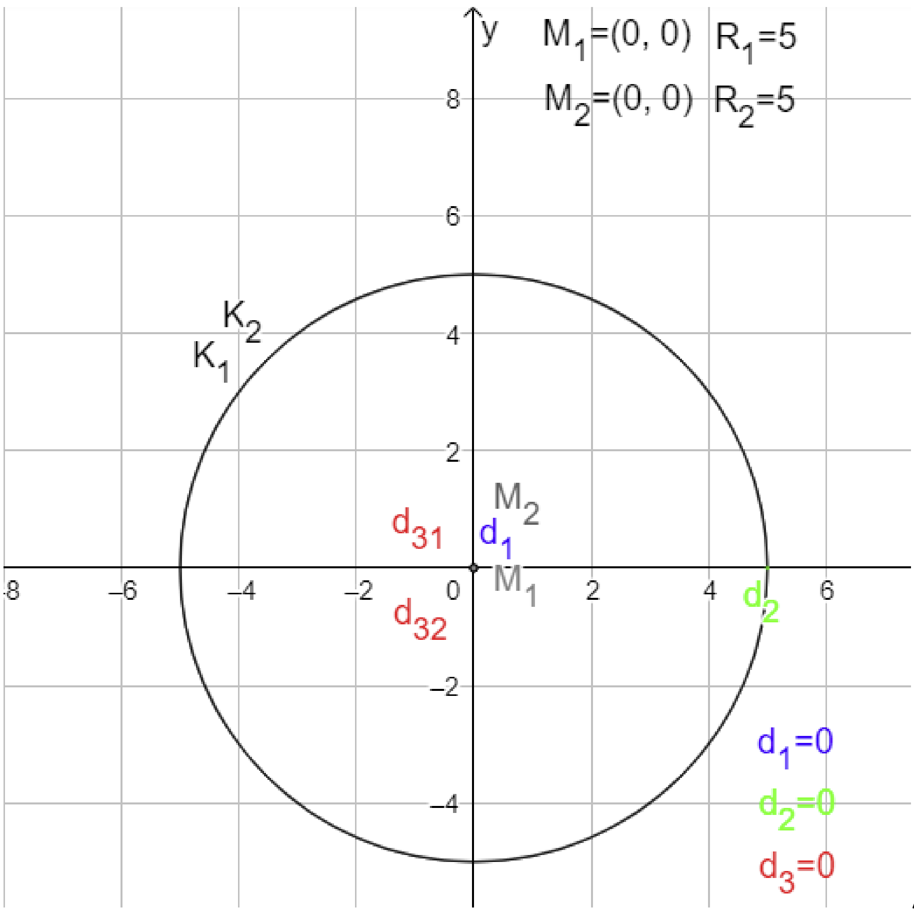


Abbildung 2: Test a.

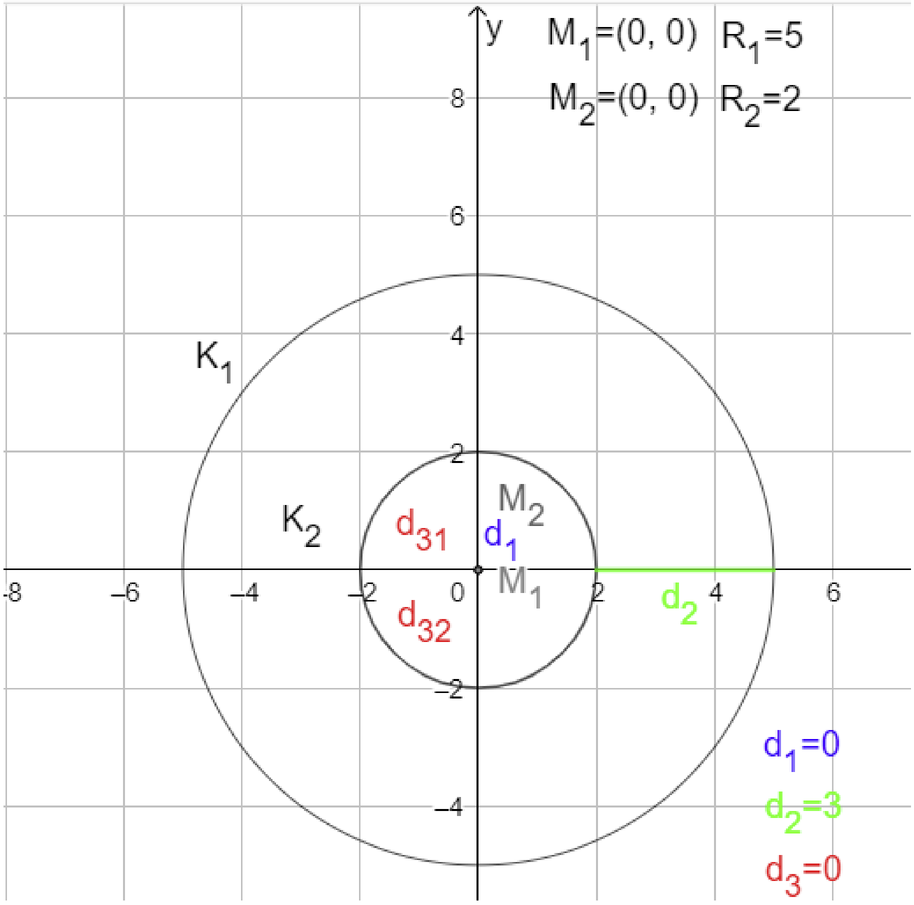


Abbildung 3: Test b.

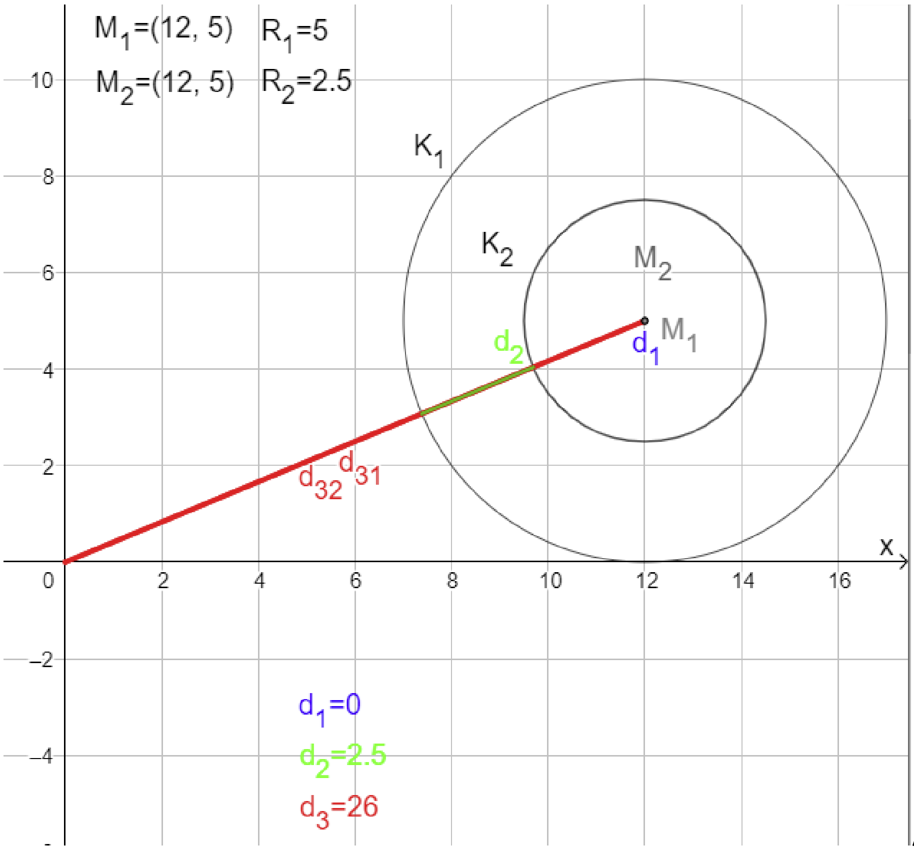


Abbildung 4: Test b.

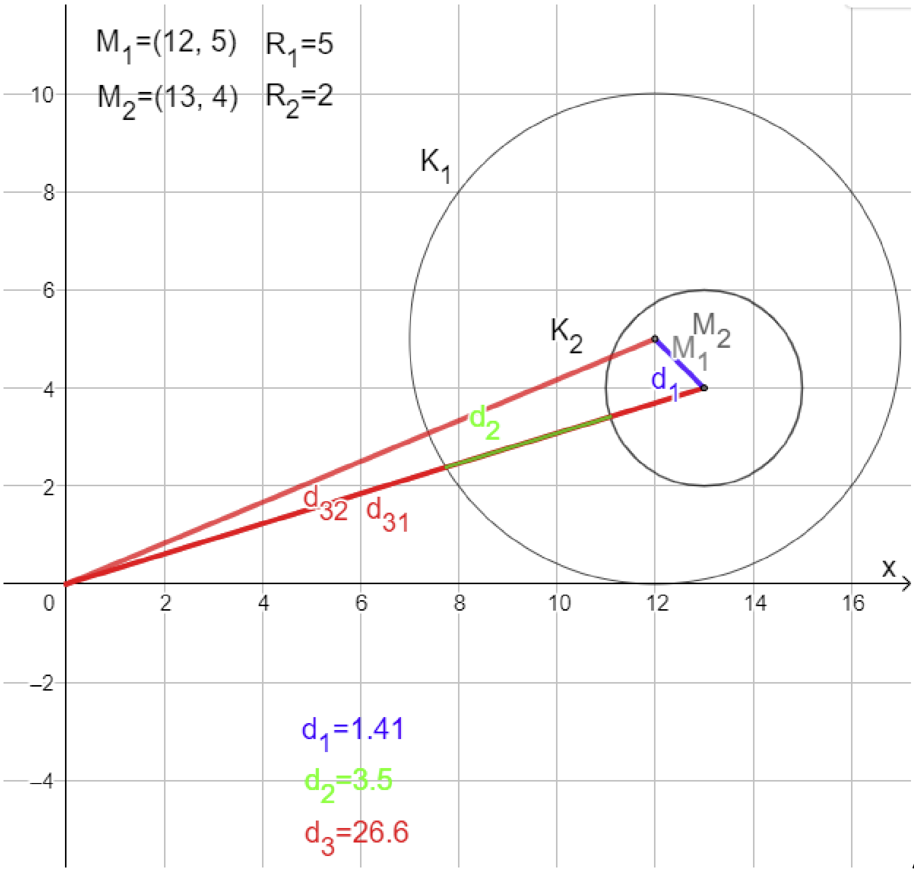


Abbildung 5: Test b.

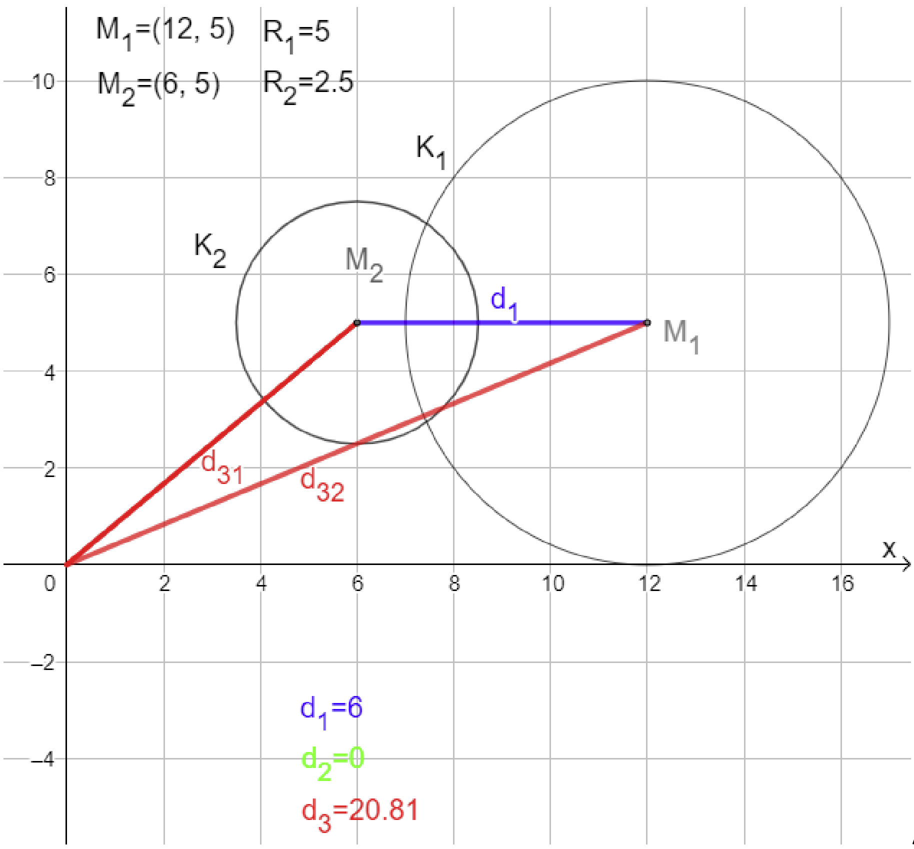


Abbildung 6: Test c.

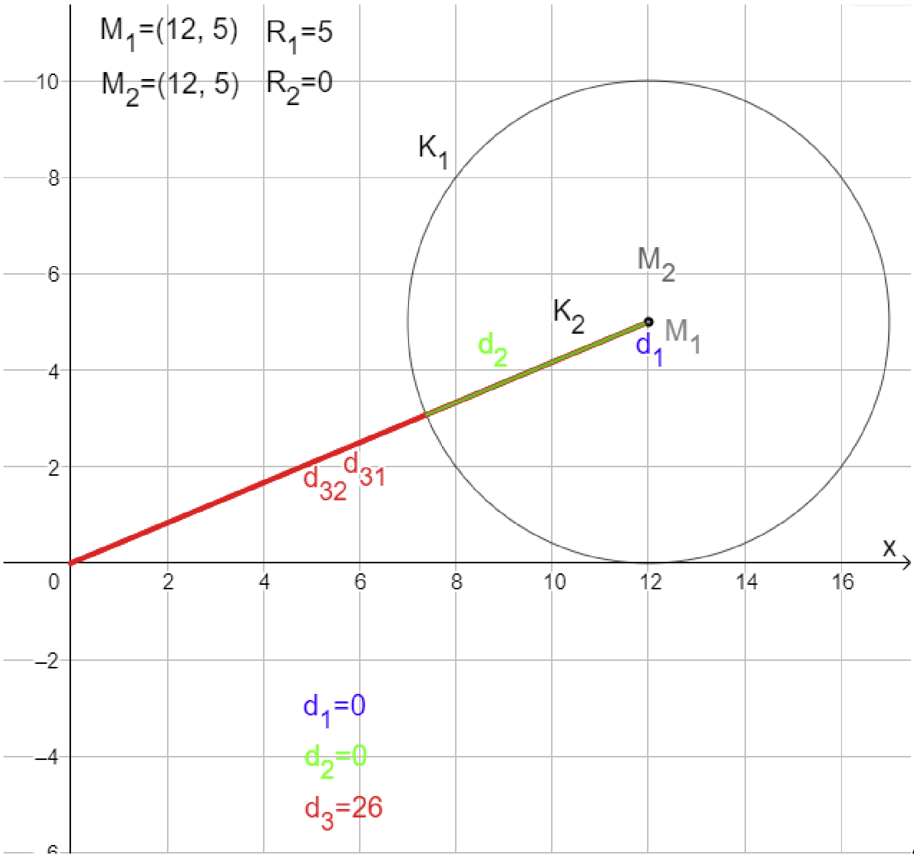


Abbildung 7: Test d.