AGLA II / Geometrie

Stefan Wiedmann / Verena Spratte – Sommersemester 2021

Aufgabenblatt 4

Vorname	Nachname	1	2	3	4	Σ

Gruppenabgabe im Stud.IP: Mittwoch 05.05.2021 bis 18 Uhr.

Geben Sie bitte jede Aufgabe in einzelnen Dateien in den zugehörigen Abgabeordner im Stud.IP ab. Verwenden Sie

- ein pdf-Dokument der Form **NachnameBlatt3A1.pdf** für Aufgabe 1,
- je ein pdf-Dokument der Form **NachnameNachnameNachnameBlatt4A3.pdf** bzw. **NachnameNachnameNachnameBlatt4A2uA4.pdf** für die Aufgaben 2,3 und 4.

Andere Formate und/oder mehr Dateien pro Aufgabe werden nicht akzeptiert.

Aufgabe 4.1. (20 Punkte + 5 Bonuspunkte, Einzelabgabe!)
Sei auf $\mathbb{R}^2$ eine symmetrische Bilinearform B mit zugehöriger Gram-Matrix $G = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ gegeben.

1) Zeichnen Sie die Menge

$$Q := \{x = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2 \mid B(x, x) = 0\}.$$

(Hinweis: Verwenden Sie z.B. den Befehl *ImpliziteKurve*.)

2) Wählen Sie ein Element F_1 von Q und bestimmen Sie mit Geogebra alle Elemente $F_2 \in \mathbb{R}^2$, die mit F_1 bezüglich B eine hyperbolische Basis bilden.

3) Variieren Sie die Parameter und gewählten Punkte (Tipp: Schieberegler!) und stellen Sie Vermutungen auf, wann eine hyperbolische Basis zu B existiert.

Mindestanforderung: Fertigen Sie Screenshots von je 3 verschiedenartigen Beispiele, in denen eine hyperbolische Basis existiert / nicht existiert und eine Hypothese. Abzugeben ist eine pdf-Datei mit den Screenshots und Ihren Ausführungen. Eine ausführliche Bearbeitung gibt bis zu 5 Bonuspunkte.

Aufgabe 4.2. (20 Punkte)
Sei $V = \mathrm{Mat}(2, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ der Vektorraum der 2×2-Matrixen über dem Körper mit 3 Elementen $K = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Sei

$$\begin{aligned} b\colon V \times V &\to K \\ (M, N) &\mapsto \mathrm{Spur}(M^T N). \end{aligned}$$

1) Finden Sie eine möglichst einfache Basis B von V.

2) Zeigen Sie, dass (V, b) eine metrische Struktur ist.

3) Zeigen Sie, dass b nicht ausgeartet ist, indem Sie die Gram-Matrix zu Ihrer Basis B betrachten.

4) Zerlegen Sie V in hyperbolische Ebenen und einen anisotropen Rest $V = H_1 \perp H_2 \perp \ldots \perp H_k \perp V^{\mathrm{ani}}$.

Aufgabe 4.3. (20 Punkte) Sei $V = (\mathbb{R}^3, \langle\ ,\ \rangle)$ der euklidische Raum. Wir betrachten Schnitte eines Würfels mit einer Ebene. Ohne Beschränklung der Allgemeinheit können wir uns auf den Einheitswürfel beschränken, i.e. den Würfel mit Kantenlänge 1, der mit einer Ecke im Ursprung $(0, 0, 0)^T$ liegt und mit einer anderen Ecke in $(1, 1, 1)^T$. Zeigen Sie:

1) Die Schnittfläche kann kein rechtwinkliges Dreieck sein.

   (Hinweis: Parametrisieren Sie die Kanten, die an die Ecke $(0,0,0)^T$ grenzen, und die Ecken des Dreiecks als Punkte auf diesen Kanten.)

2) Die Schnittfläche kann kein regelmäßiges Fünfeck sein.

3) Das einzig mögliche Drachenviereck, das als Schnittfläche auftritt, ist eine Raute.

4) Die Schnittfläche kann die Form eines regelmäßigen Sechsecks annehmen.

5) Die Schnittfläche kann die Form eines Parallelogramms annehmen, das weder Raute noch Rechteck ist.

Aufgabe 4.4. (8+12)

1) Sei $V = \mathbb{R}^2$ und sei $b(x, y) = \langle x, y\rangle$ das Standard-Skalarprodukt zur Standard-Basis. Die Gram-Matrix ist also
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
   Berechnen Sie explizit die orthogonale Gruppe $\mathrm{O}(V, b)$ und die spezielle orthogonale Gruppe $\mathrm{SO}(V, b)$ bezüglich der Standardbasis. Hinweis: Benutzen Sie zur Darstellung die Funktionen $\sin(t)$ und $\cos(t)$.

2) Sei $V = \mathbb{R}^2$ und sei $b(x, y)$ die Biliniearform zur Gram-Matrix
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$
   bezüglich der Standard-Basis. Berechnen Sie explizit die orthogonale Gruppe $\mathrm{O}(V, b)$ und die spezielle orthogonale Gruppe $\mathrm{SO}(V, b)$ bezüglich der Standardbasis. Hinweis: Benutzen Sie zur Darstellung die Funktionen $\sinh(t)$ und $\cosh(t)$.

Hinweis: Die spezielle orthogonale Gruppe besteht aus allen orthogonalen Elementen mit Determinante gleich 1.