AGLA II / Geometrie

Stefan Wiedmann / Verena Spratte – Sommersemester 2021

Aufgabenblatt 7

Vorname	Nachname	1	2	3	4	Σ

Gruppenabgabe im Stud.IP: Mittwoch 26.05.2021 bis 18 Uhr.

Geben Sie bitte jede Aufgabe in einzelnen Dateien in den zugehörigen Abgabeordner im Stud.IP ab. Verwenden Sie außschließlich die Formate

- **NachnameBlatt6A1.pdf** für Aufgabe 1.
- **NachnameNachnameNachnameBlatt6A3.pdf** bzw. **NachnameNachnameNachnameBlatt6A2uA4.pdf** für die Aufgaben 2,3 und 4.

Aufgabe 7.1. (20 Punkte, Einzelabgabe)
Wir betrachten die beiden Kreise $K_1 = \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid (x-12)^2 + (y-5)^2 = 25\}$ und $K_2 = \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid (x-2)^2 + \left(y+\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}\}$ im euklidschen Raum $\mathbb{R}^2$. Wir betrachten drei potentielle Abstandsbegriffe für zwei Kreise K, K':

- $d_1(K,K')$ sei der Abstand der Mittelpunkte.
- $d_2(K,K')$ sei die Länge der kürzesten Strecke zwischen den beiden Kreislinien.
- $d_3(K,K')$ sei die Summe der Abstände der Mittelpunkte vom Ursprung.

1) Bestimmen Sie d_1, d_2 und d_3 für die beiden gegebenen Kreise.

   (Hinweis: Zeigen Sie für d_2 zunächst, dass die Endpunkte dieser kürzesten Strecke immer auf einer Geraden mit den beiden Mittelpunkten liegen.)

2) Überprüfen Sie Ihr Ergebnis durch eine entsprechende Zeichnung in Geogebra und binden Sie einen Screenshot in Ihre Lösung ein.

3) Welche der drei Begriffe sind sinnvolle Abstandsbegriffe? Betrachten Sie verschiedene Konstellationen in Geogebra und erörtern Sie unter Einbindung von Screenshots.

Aufgabe 7.2. (20 Punkte)
Sei $V = \mathbb{R}^4$ versehen mit dem Standard-Skalarprodukt und der Standard-Basis (e_1, e_2, e_3, e_4).

Sei

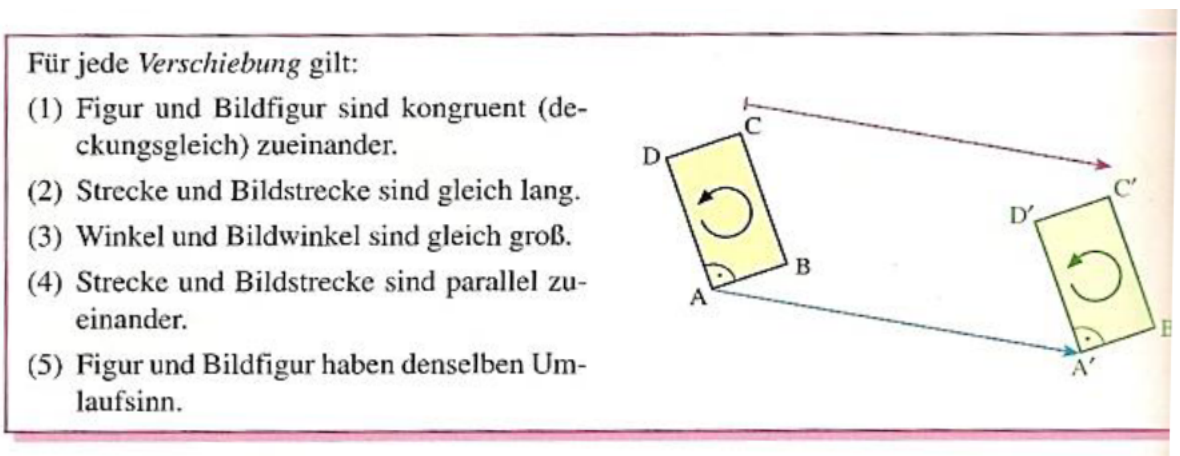
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

1) Zeigen Sie, dass $A \in \mathrm{O}(4)$ ist.

2) Zerlegen Sie A in ein Produkt von Spiegelungen, d.h. finden Sie Vektoren $a, b, c, \ldots \in V$, sodass $L_A = S_a \circ S_b \circ S_c \circ \cdots$ ist.

Hinweis: Sind $x \neq y \in V \setminus \{0\}$ mit $\|x\| = \|y\|$, dann gilt für die Spiegelung s_{x-y}, dass $s_{x-y}(x) = y$. Verfolgen Sie nun die Bilder der Basisvektoren unter der Abbildung L_A und machen Sie deren Wirkung durch entsprechende Spiegelungen rückgängig.

Aufgabe 7.3. (20 Punkte)
Der folgende Auszug stammt aus dem Schulbuch *Elemente der Mathematik, Klasse 7.*


Für jede *Verschiebung* gilt:

(1) Figur und Bildfigur sind kongruent (deckungsgleich) zueinander.

(2) Strecke und Bildstrecke sind gleich lang.

(3) Winkel und Bildwinkel sind gleich groß.

(4) Strecke und Bildstrecke sind parallel zueinander.

(5) Figur und Bildfigur haben denselben Umlaufsinn.

Sei (V, b) eine metrische Struktur. Ein **affiner Unterraum** $A \subseteq V$ ist eine Teilmenge der Form $A = v + U = \{v + u \mid u \in U\}$ für ein $v \in V$ und einen Untervektorraum U. Zwei affine Unterräume $A = v + U$, $B = w + W$ heißen **parallel**, wenn $U \subseteq W$ oder $W \subseteq U$ gilt. Wir betrachten für beliebiges $a \in V$ die Abbildung $\varphi_a \colon V \to V$ mit $\varphi_a(x) = x + a$.

1) Zeigen Sie, dass für einen affinen Unterraum $A \subseteq V$ der zugehörige Untervektorraum U eindeutig ist und daher $\dim A := \dim U$ und *parallel* wohldefiniert sind.

2) Zeigen Sie, dass das Bild eines affinen Unterraums unter der Abbildung φ_a wieder ein affiner Unterraum ist und dass Eigenschaft (4) für die Abbildung φ_a gilt.

3) Längen und Winkel werden im euklidischen Fall über $b(x, y)$, bzw. $q(x) = b(x, x)$ definiert. Zeigen Sie, dass mit diesen Begriffen Eigenschaften (2) und (3) für φ_a gelten.

4) Zeigen Sie: $b(\varphi_a(x), \varphi_a(y)) = b(x, y)$ für alle $x, y \in V$, genau dann wenn $a \in \mathrm{Rad}(V, b)$.

Aufgabe 7.4. (20 Punkte)
Sei (V, b) ein nicht ausgearteter n-dimensionaler Vektorraum und sei $[v_1, \cdots, v_n]$ eine orthogonale Basis.

1) Zeigen Sie: $s_{v_n} \circ \cdots \circ s_{v_1} = -\mathrm{id}$

2) Zeigen Sie: Ist $\sigma \in \mathrm{O}(V, b)$ und ist $\sigma = s_1 \circ \cdots \circ s_m$ eine Zerlegung in $m < n$ Spiegelungen, dann gibt es $0 \neq x \in V$ mit $\sigma(x) = x$.

3) Folgern Sie, dass jede Zerlegung von $\sigma = -\mathrm{id}$ in Spiegelungen immer mindestens n Spiegelungen erfordert.