AGLA II / Geometrie

Stefan Wiedmann / Verena Spratte – Sommersemester 2021

Aufgabenblatt 3

Vorname	Nachname	1	2	3	4	Σ

Gruppenabgabe im Stud.IP: Mittwoch 28.4.2020 bis 18 Uhr.

Geben Sie bitte jede Aufgabe in einzelnen Dateien in den zugehörigen Abgabeordner im Stud.IP ab. Verwenden Sie

- ein pdf-Dokument der Form **NachnameBlatt3A1.pdf** für Aufgabe 1,
- pdf-Dokumente der Form **NachnameNachnameNachnameBlatt3A3.pdf** bzw. **NachnameNachnameNachnameBlatt3A2uA4.pdf** für die Aufgaben 2,3 und 4.

Aufgabe 3.1. (20 Punkte, Einzelabgabe!)
Schneiden Sie mit Geogebra

1) eine Kugel,

2) einen Doppelkegel,

3) einen Würfel

mit einer Ebene und lassen Sie die Schnittflächen anzeigen. Erstellen Sie Screenshots Ihrer Ergebnisse und klassifizieren Sie die möglichen Schnittflächen. (Tipp: Verwenden Sie Grafikansicht und 3D-Ansicht nebeneinander und nutzen Sie Schieberegler, um die Ebenen zu verschieben.) Abzugeben ist ein pdf-Dokument mit Screenshots zu allen verschiedenartigen Schnittflächen, die Sie gefunden haben.

Aufgabe 3.2. (20 Punkte)
Sei $V = \mathbb{R}^3$. Sei b die zur Gram-Matrix

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 4 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

gehörende Bilinearform bezüglich der Basis $[e_1, e_2, e_3]$. Sei $W_1 = \mathrm{Span}(e_1, e_2)$, $W_2 = \mathrm{Span}(e_1, e_3)$, $W_3 = \mathrm{Span}(e_2, e_3)$ und $W_4 = \mathrm{Span}(e_1 + e_2, e_1 - e_3)$.

1) Zeigen Sie: (V, b) ist nicht ausgeartet.

2) Bestimmen Sie die Gram-Matritzen zu $(W_1, b|_{W_1}), (W_2, b|_{W_2}), (W_3, b|_{W_3}), (W_4, b|_{W_4})$.

3) Untersuchen Sie für $i = 1, \dots, 4$ ob $(W_i, b|_{W_i})$ ausgeartet ist.

4) Zeigen Sie: $(W_2, b|_{W_2})$ besitzt keinen nicht trivialen Vektor der Länge Null, d.h. ist $w \in W_2$ mit $b(w, w) = 0$, dann ist $w = 0$.

5) Finden Sie eine Basis $[f_1, f_2]$ von W_3 mit $b(f_1, f_1) = b(f_2, f_2) = 0$ und $b(f_1, f_2) = 1$.

6) Zerlegen Sie $V = W_3 \perp L$ orthogonal durch Angabe eines Basisvektors für L.

Hinweis: Betrachten Sie in 4)-6) Produkte der Form $b(e_i + \lambda e_j, e_i + \lambda e_j)$

Aufgabe 3.3. (20 Punkte)

1) Wir betrachten ein Parallelogramm mit Seiten a, b und Diagonalen e, f im euklidschen Raum $\mathbb{R}^2$ mit dem Standard-Skalarprodukt. Zeigen Sie elementargeometrisch die Parallelogrammgleichung: $2\,(a^2 + b^2) = e^2 + f^2$.

2) Sei (V, b) eine metrische Struktur und sei q die quadratische Form zu b.

   a) Zeigen Sie, dass für alle $x, y \in V$ gilt: $q(x+y) + q(x-y) = 2q(x) + 2q(y)$. Warum ist dies eine Verallgemeinerung der Parallelogrammgleichung?

   b) Beweisen Sie: Für alle $x, y \in V$ gilt: Wenn $q(x+y) = q(x) + q(y)$, dann stehen x und y senkrecht bezüglich b. Interpretieren Sie diese Aussage elementargeometrisch.

Aufgabe 3.4. (20 Punkte)
Sei $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum.
Für $x_1, \dots, x_k \in V$ setzen wir

$$G(x_1, \dots, x_k) = \begin{pmatrix} \langle x_1, x_1 \rangle & \dots & \langle x_1, x_k \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle x_k, x_1 \rangle & \dots & \langle x_k, x_k \rangle \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie:

1) Die Vektoren $x_1, \dots, x_k \in V$ sind genau dann linear unabhängig, wenn $\det(G(x_1, \dots, x_k)) \neq 0$ ist.

2) Der Rang von $G(x_1, \dots, x_k)$ entspricht der Dimension von $\mathrm{Span}(x_1, \dots, x_k)$.