

BRU: Brückenschaltung

Riedel Lisa, Wegmann Peter
Gruppe 6

19. August 2019

1 EINLEITUNG

Dieser Versuch kann im Allgemeinen in zwei Teile unterteilt werden. Im ersten Teil wird mittels Wheatstonescher Brückenschaltung Widerstände von verschiedenen elektronischen Bauteilen gemessen. Unter anderem werden die Widerstände von verschiedenen Spulen, eines Potentiometers und einer Glühlampe bestimmt.

Im zweiten Teil werden anschließend, mittels Wechselspannungsbrücke, Induktivitäten von Spulen und Kapazitäten von Kondensatoren gemessen.

2 VERWENDETE METHODEN

2.1 Wheatstonesche Brücke

Hierbei handelt es sich um eine elektronische Schaltung wie in Abbildung 4 der Anleitung (anl 2018) aufgeführt. Für die korrekte Versuchsdurchführung muss hierbei lediglich die oben genannte Schaltung aufgebaut werden. Anschließend können die Messungen unternommen und aufgezeichnet werden. Hierbei verwendet man nach Abgleichen der Schaltung, Formel 1 zur Berechnung der Widerstände. Um die Schaltung abzugleichen, wird das Potentiometer so lange verändert, bis das Nullinstrument keinen Ausschlag mehr anzeigt.

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4} = \frac{A}{10 - A} \quad (1)$$

Bei A handelt es sich um die Anzahl der Umdrehungen am Zehngangpotentiometer. R_1 bis R_4 sind die verwendeten Widerstände.

2.2 Wechselspannungsbrücke

Auch hierbei handelt es sich um eine elektronische Schaltung wie in Abbildung 5 der Anleitung (anl 2018) aufgeführt. Dabei ist diese Schaltung besonders nützlich um Kapazitäten und Induktivitäten mittels Abgleichbedingung 7 und Bestimmungsgleichung 8 zu bestimmen.

Um mit den Messungen der Bauteile zu beginnen wird die oben genannte Schaltung aufgebaut. Man beachte hierbei, dass mittels Funktionsgenerator eine Wechselspannung $U(t)$

mit kleiner Amplitude ($\leq 2,0V$) angelegt wird. Diese dient anschließend, zusammen mit der Spannung $U_g(t)$ zwischen Punkten b und d (anl 2018), zur Visualisierung des Phasenverschiebung beider Spannungen. Die somit dargestellten Lissajous-Figur dient anschließend dem Ausgleich der Schaltung. Über Gleichung 2 lassen sich dann die gesuchten Induktivitäten und Kapazitäten berechnen.

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{A}{10 - A} \quad (2)$$

Bei Z_1 und Z_2 handelt es sich um komplexe Widerstände. Für unterschiedliche Bauteile werden hierbei unterschiedliche Werte für Z_1 und Z_2 gewählt.

Man beachte die Verwendung der in der Anleitung angeführten Reaktanzbrücke. Diese ist in Abbildung 5 der Anleitung (anl 2018) durch ein liegendes Dreieck dargestellt. Dabei handelt es sich um ein elektronisches Bauteil, welches zur Darstellung der Lissajous-Figuren verwendet wird. Würde diese nicht verwendet werden, so könnte das Oszilloskop $U_g(t)$ zu $U(t)$ nicht visualisieren, da das direkte Abgreifen von $U_g(t)$ einem kurzschließen des Oszilloskop gleichkommt. Dabei verwendet man für das Abgleichen der Brücke eine Vergleichsspule L_v , sowie Vergleichskondensator C_v . L_v wird bei Messung von L_x verwendet, C_v bei der Messung von C_x .

Für die Berechnung der verbrauchten Leistung P an der Lampe, wird Formel 3 verwendet.

$$P = U \cdot I \quad (3)$$

Hier bezeichnet U die Spannung und I den Strom.

2.3 Abgleichbedingung

Man beachte, dass in allen folgenden Kapitel die imaginäre Einheit durch j dargestellt wird.

Die allgemeine Abgleichbedingung einer Brückenschaltung lautet wie folgt.

$$\frac{Z_2}{Z_1} = \frac{Z_4}{Z_3} \quad (4)$$

Dabei lauten die komplexen Widerstände der Schaltung 3

(anl 2018): $\frac{1}{Z_1} = \frac{1}{R_1} + j\omega C_1$, $Z_2 = R_2 - \frac{j}{\omega C_2}$, $Z_3 = R_3$ sowie $Z_4 = R_4$, mit ω als Kreisfrequenz. Einsetzen in die Abgleichbedingung 4 liefert

$$\left(R_2 - \frac{j}{\omega C_2}\right) \cdot \left(\frac{1}{R_1} + j\omega C_x\right) = \frac{R_4}{R_3} \Leftrightarrow \frac{C_1}{C_2} + \frac{R_2}{R_1} - j\left(\frac{1}{\omega C_2 R_1} - \frac{C_x \omega}{R_2}\right) = \frac{R_4}{R_3} \quad (5)$$

Da für die rechte Seite $\text{Im}\left(\frac{R_4}{R_3}\right) = 0$, gilt dies auch für die linke Seite.

$$\frac{1}{\omega C_2 R_1} = \frac{C_x \omega}{R_2} \Rightarrow R_1 = \frac{1}{\omega^2 C_x C_2 R_2} \quad (6)$$

Die Abgleichbedingung für den Imaginärteil ist gleich Null, die des Realteil wie folgt.

$$\frac{R_2}{R_2} + \frac{C_x}{C_2} = \frac{R_4}{R_3} \quad (7)$$

Umstellen der Abgleichbedingung 7 und einsetzen der Gleichung 1 liefert die Bestimmungsgleichung der unbekannten Kapazität.

$$C_x = \frac{10 - A}{A} \frac{C_2}{R_2^2 \omega^2 C_2^2 + 1} \quad (8)$$

3 EXPERIMENTELLES VORGEHEN

Bei dem Versuch wurde ein Zehngangpotentiometer mit einem Gesamtwiderstand von 1 k Ω und einer Gesamtlänge der Potentiometerwendel von 10 Umdrehungen verwendet. Die Anzahl der Umdrehungen wird mit A angegeben. In den weiteren Kapiteln folgt eine spezifischere Beschreibung je Versuchsteil.

3.1 Wheatstonesche Brücke

In diesem Teil wurde der Widerstand der folgenden elektrischen Bauteile gemessen.

Bei der ersten Messung sollten die Studenten mit dem Umgang des Potenziometers vertraut gemacht werden. Dafür wurde der Widerstand eines bekannten Widerstandes bei konstanter Spannung $U = 1$ V gemessen. Als Vergleichswiderstände R_V benutze man 10 Ω , 30 Ω und 100 Ω .

Beim nächsten Versuch sollte der ohmsche Widerstand bei konstanter Spannung $U = 1$ V einer Spule und einer Kupferspule bestimmt werden. Hierfür wurde zuerst der unbekannte Widerstand der Bauteilspule bestimmt. Danach wurde der Widerstand der ganzen Kupferspule gemessen. Es folgte die Messung an den beiden Abgriffen A - M und M - E.

Bei der Messung des ohmschen Widerstandes einer Glühlampe wurde zuerst die Spannung $U = 1$ V konstant gehalten. Es wurden die Vergleichswiderstände 10 Ω , 30 Ω , 100 Ω und 200 Ω verwendet.

R_V	A	Ergebnis
10 Ω	9,15	(107, 92 \pm 8, 03) Ω
30 Ω	7,76	(103, 93 \pm 4, 03) Ω
100 Ω	5,10	(104, 08 \pm 3, 12) Ω

Tabelle 1. Messwerte eines bekannten Widerstandes $R = 100$ Ω

Danach erfolgte die Messung bei verschiedenen Spannungen von 2 V, 3 V, 4 V, 5 V und 6 V. Die verwendeten Vergleichswiderstände waren 10 Ω , 30 Ω und 200 Ω .

3.2 Wechselspannungsbrücke

Für die Messung mit der Wechselspannungsbrücke wurde der Versuchsaufbau umgeändert. Hierbei orientiere man sich an Abbildung 5 der Versuchsanleitung (anl 2018). Es wurde ein Oszilloskop mit eingebautem Funktionsgenerator verwendet. Bei diesem wurde eine Sinusspannung mit einer Frequenz von 1 kHz und einer maximalen Amplitude von ≤ 2 V eingestellt. Der Oszillator wurde zudem für die Darstellung der Lissajous-Figur verwendet. Diese stellte die Phasenverschiebung von $U_g(t)$ zu $U(t)$ dar. Die dargestellte Lissajous-Figur fand, zusammen mit dem verstellbaren R_V , Anwendung in der Abgleichung der Brücke. Um die Brücke abzugleichen, mussten zudem das Potentiometer und R_V so eingestellt werden, dass die Lissajous-Figur eine waagrechte Linie bildete. Hierfür wurden die eingestellten Werte von A notiert. Die Induktivität einer unbekannten Kupferdrahtspule L_x konnte anschließend durch Gleichung 2 berechnet werden. Die Berechnung der Kapazität eines unbekannten Kondensators C_x erfolgte durch Gleichung 8.

4 ERGEBNISSE

4.1 Wheatstonesche Brücke

Die Messung des bekannten Widerstandes werden in Tabelle 1 veranschaulicht. Als Unsicherheit von A wurde 0,05 angenommen. Dieser Wert beinhaltet sowohl die Ablesegenauigkeit, als auch die Unsicherheit des Potenziometers. Die Unsicherheiten der Vergleichswiderstände waren jeweils 1% ihres angegebenen Widerstandes. Der gewichtete Mittelwert ergab **(104, 18 \pm 5, 55) Ω** .

Die Messung des ohmschen Widerstandes der Spulen ergab folgenden Ergebnisse.

Die Spule hatte einen Widerstand von **(10, 92 \pm 1, 31) Ω** und die komplette Kupferdrahtspule **(0, 65 \pm 0, 06) Ω** . Die beiden Abgriffe ergaben bei A - M **(0, 34 \pm 0, 06) Ω** und bei M - E **(0, 38 \pm 0, 06) Ω** . Summiert man beide Abgriffe miteinander und errechnet die Unsicherheit kommt man auf einen Gesamtwiderstand von **(0, 72 \pm 0, 08) Ω** .

R_V	Ergebnis		
	$R_X [\Omega]$	$I [\text{mA}]$	$P [\text{mW}]$
10	$46,81 \pm 2,08$	$20 \pm 3,05$	$20 \pm 7,05$
30	$37,72 \pm 1,14$	$20 \pm 1,97$	$20 \pm 4,75$
100	$20,48 \pm 0,93$	$40 \pm 0,95$	$40 \pm 4,13$
200	$12,76 \pm 1,25$	$70 \pm 0,52$	$70 \pm 8,77$

Tabelle 2. Errechneter Widerstand, Strom und Leistung unter Betrachtung einer Glühlampe bei $U = 1 \text{ V}$. Gut erkennbar ist der lineare Zusammenhang zwischen I und P .

Bei der letzten Messung wurde anstelle eines unbekannten Widerstandes eine Glühlampe verwendet. Bei einer konstanten Spannung $U = 1 \text{ V}$ wurde für R_V 10 Ω , 30 Ω , 100 Ω und 200 Ω verwendet. Es sollten der Widerstand, der Strom und die verbrauchte Leistung der Glühlampe berechnet werden. Ergebnisse sind in Tabelle 2 dargestellt¹.

4.2 Wechselspannungsbrücke

Zuerst wurde die Induktivität der unbekannten Spule ermittelt. Diese beträgt $(1,58 \pm 0,09) \text{ mH}$. Die Spule wird nun als Vergleichsspule verwendet, um die Induktivitäten der beiden Abgleiche A-M und M-E der Kupferspule zu bestimmen. Hierbei ergab sich für A-M $(0,61 \pm 0,05) \text{ mH}$ und für M-E $(0,84 \pm 0,07) \text{ mH}$. Die Unsicherheit der Kupferdrahtspule war mit $(2,7 \pm 0,1) \text{ mH}$ gegeben.

4.2.1 Abgleichbedingung

Unter Verwendung der Abgleichbedingung 4 und Bestimmungsgleichung 8 kann die unbekannte Kapazität C_X berechnet werden. Dabei setzt man $C_V = 1 \mu\text{F}$ und $R_V = 42 \Omega$, wobei R_V abgelesen wurde. Damit ergibt sich ein Wert von

$$C_X = (209,40 \pm 7,00) \text{ nF}.$$

5 DISKUSSION

5.1 Wheatstonesche Brücke

Bei der Messung des bekannten Widerstandes $R = 100 \Omega$ stimmten die Ergebnisse mit dem gewünschten Wert größtenteils überein. Die Unsicherheit beim Vergleichswiderstand von 100 Ω ist etwas zu klein. Der Grund dafür könnte eine zu klein gewählte Unsicherheit von A sein. Es könnte auch sein, dass die Unsicherheit des Vergleichswiderstandes von 100 Ω größer als 1% ist. Um eine genauere Aussage treffen zu können, hätte man mehr Messungen durchführen müssen.

¹ Der Sourcecode zur Berechnung von R_X , P , I , sowie der Fehler findet sich unter <https://github.com/Wegii/AP2-SS19>

Sieht man sich jedoch den gewichteten Mittelwert an, befindet sich das Ergebnis um den gewünschten Wert.

Die beiden Werte bei den halben Abgriffen, A-M und M-E, der Kupferdrahtspule ergeben zusammen etwas mehr als den Gesamtwiderstand der vollen Kupferdrahtspule. Mit der berücksichtigten Unsicherheit enthält die Summe jedoch den tatsächlichen Widerstand. Die Addition der beiden Abgriffe ist gerechtfertigt, da diese sich, theoretisch, in einer Serienschaltung befinden. Ein weiterer Grund, weswegen der Widerstand der beiden Abgriffe höher ist, kann der Aufbau der Spule sein. Es muss eine Verbindungslinie zwischen den Kontaktpunkten bestehen. Das heißt, bei der Messung der beiden Abgriffe wird diese Linie doppelt gezählt.

5.1.1 Kennlinien

Im Folgenden werden die zwei Kennlinien in Abbildung 1 diskutiert. Aufgrund mangelnder Referenzwerte ist es nicht möglich die Ergebnisse der Glühlampe zu vergleichen. Aus Abbildung 1A ist zu erkennen, dass bei zunehmender Spannung der Widerstand der Glühlampe fast linear zur Stromstärke steigt. Dieser Zusammenhang geht bei dem Vergleichswiderstand von 200 Ω verloren. Aus dem Diagramm 1B lässt sich der lineare Zusammenhang zwischen Leistung und Widerstand der Birne ablesen. Je höher die Leistung ist, desto größer wird der Widerstand. Die Steigung ist abhängig vom verwendeten Vergleichswiderstand. Bei größerem R_V wird die Steigung größer. Da es sich dabei jedoch um eine doppelt-logarithmische Auftragung handelt, ist der Zusammenhang von Leistung zu Widerstand logarithmisch. Bei niedrigem Strom und großen Widerstand R_X verhält sich die Glühlampe wie ein Ohmscher Widerstand und erhält den oben genannten linearen Zusammenhang zwischen Strom und Widerstand. Sobald die Glühlampe anfängt zu glühen, wird der Widerstand zusätzlich durch die Wärmeentwicklung verändert. Bei der Durchführung des Versuchs konnte ein glühen der Glühlampe bei $R_V = 200 \Omega$ festgestellt werden. Aufgrund des großen R_V konnte zur Glühlampe mehr Strom fließen, als die Glühwendel abgeben konnte. Infolgedessen erhöht sich die Reibung und Widerstand in der Glühwendel. Der lineare Zusammenhang zwischen Strom und Widerstand ist nicht mehr erhalten. Die bekannte Kennlinie einer Glühlampe, welche einem logarithmischen Zusammenhang folgt, entsteht (Tipler & Mosca 2015). Dabei erhitzt sich der Draht, bis ein konstante Temperatur angenommen wird. Aufgrund der konvexen Kennlinie handelt es sich bei der Glühlampe um einen Kaltleiter. Selbiges sollte auch in den Kennlinien der anderen R_V sichtbar werden, sobald eine höhere Spannung $U > 6$

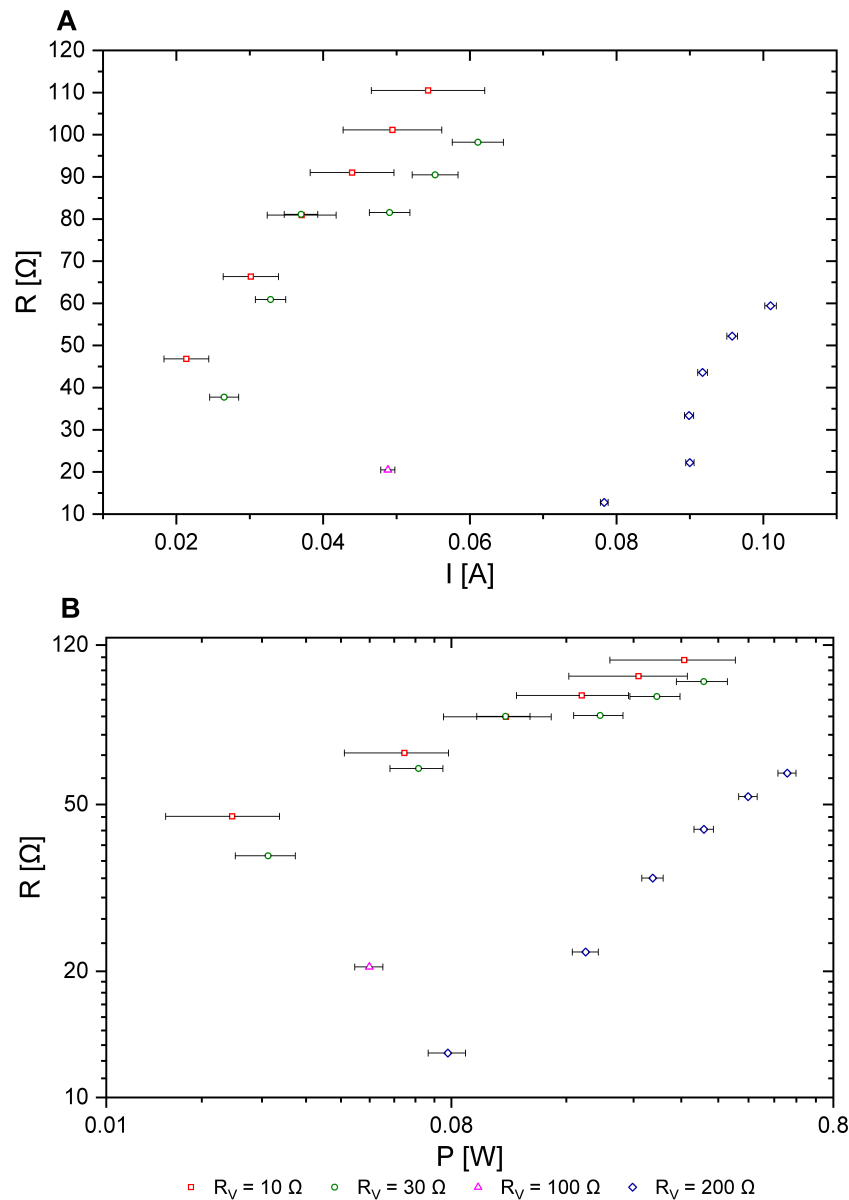


Abbildung 1. A I-R-Diagramm in linearer Auftragung. Erkennbarer linearer Anstieg des Widerstands R_x bei Abnahme von R_V . Aufgrund des niedrigen resultierenden Widerstands R_x , resultiert dies, im Verhältnis zu anderen Vergleichswiderständen, in einen großen Strom I . B P-R-Diagramm in doppelt-logarithmischer Auftragung. Linearer Anstieg der Leistung P bei Anstieg von R_x . Auch hier resultiert ein kleiner R_x bei der Wahl eines großen R_V . Die Wahl eines kleinen R_V führt somit zu einer größeren verbrauchten Leistung P der Glühlampe.

angelegt wird. Da für diese R_V grundsätzlich weniger Strom fließt, geschieht dies jedoch langsamer als mit $R_V = 200 \Omega$.

wie folgt berechnet werden.

5.2 Wechselspannungsbrücke

Eine Spule erzeugt ein magnetisches Feld. Da in der Schaltung eine Wechselspannung angelegt wurde, erzeugt die somit kontinuierliche Änderung des Magnetfeldes eine weitere Spannung. Da beide Effekte von der Windungszahl proportional abhängen, folgt für die Induktivität L_h der halben Spule

$$L_h = \frac{L}{4} \quad .$$

Dabei ist L die Induktivität der gesamten Spule und kann

$$L = N^2 \cdot \frac{\mu_0 A}{l}$$

Hierbei ist N die Anzahl der Windungen, l die Länge der Spule, A die Querschnittsfläche der Spule und $\mu_0 = 1,2566 \cdot 10^{-6} \frac{N}{A^2}$ die magnetische Feldkonstante. Die Induktivität einer halben Spule sollte nur ein viertel der gesamten Spule sein. Auf die im Versuch angewendete Spule bedeutet das also 0,675 mH. Diesen Wert wird nur von dem Abgriff M - E beinhaltet. Der Wert liegt leicht außerhalb des Wertes vom Abgriff A - M. Die Erklärung ist wieder, dass eine zu kleine Unsicherheit des Potentiometers angenommen

Gerät	Unsicherheit
Multimeter ΔU	0,1 V
Kupferdrahtspule R_v	$(2,1 \pm 0,1) \text{ mH}$
Potentiometer ΔA	1%
	0,05

Tabelle A1. Systematische Unsicherheiten verwendet in der Fehlerrechnung und den Ergebnissen.

wurde, oder der gegebene Wert für die Unsicherheit der Kupferdrahtspule zu klein war. Die Fehlerquelle können auch Rundungsfehler sein. Dieser Fehler würde durch mehrmaliges Messen wahrscheinlich nicht auftreten.

6 ZUSAMMENFASSUNG

Es stellte sich heraus, dass mit Hilfe von Brückenschaltungen und der richtigen Einstellung Widerstände, Kapazitäten und Induktivitäten relativ simpel berechnet werden können. Über die Wheatstonesche Brückenschaltung kann ein unbekannter Widerstand bei dem Vorhandensein von 3 bekannten Widerständen einfach über eine Verhältnisrechnung bestimmt werden. Dabei ist zu beachten, dass der Spannungsabfall zwischen zwei Punkten innerhalb der Schaltung gleich Null sein muss. Diese Art der Messung ist bei genauer Beachtung der Messungssicherheiten eine gute und einfache Methode um Widerstände zu bestimmen.

Bei der Messung mit der Wechselspannungsbrücke können Induktivitäten und Kapazitäten bestimmt werden. Mit Hilfe der Lissajous-Figur, war es möglich die Phasenverschiebung der Spannungen zu negieren. Damit konnte man über eine vereinfachte Form die Induktivitäten der Spulen berechnen. Zur Berechnung der Kapazität eines unbekannten Kondensators wurde die Formel 8 hergeleitet und verwendet. Für genauere Messergebnisse und Unsicherheiten hätten die Messversuche öfters wiederholt werden sollen.

Literatur

Tipler P. A., Mosca G., 2015, Physik, 7. Aufl. 2015 edn. Springer Spektrum, Berlin, Heidelberg
 2018, Brückenschaltung
 2009, Hinweise zur Beurteilung von Messungen, Messergebnissen und Messunsicherheiten

APPENDIX A: FEHLERRECHNUNG

Da bei allen Versuchen die Messung nicht wiederholt wurde, handelt es sich bei allen Unsicherheiten von systematischer Natur. Alle Unsicherheiten wurden mittels linearer Addition ermittelt. Die Werte der Unsicherheiten können aus der Tabelle A1 entnommen werden.

Alle genannten Formeln und Methoden sind im Skript zur Fehlerrechnung (feh 2009) vorzufinden¹.

Um den gewichteten Mittelwertes bei der ersten Messung zu erhalten, wurde zuerst die systematische Unsicherheit jeder Messung berechnet.

Die im Diagramm angegebene Unsicherheiten wurden wie folgt berechnet.

$$\Delta I = \left| \Delta U \cdot \frac{1}{R_v + R_x} \right| + \left| \Delta R_v \cdot \frac{-U}{(R_v + R_x)^2} \right| + \left| \Delta R_x \cdot \frac{-U}{(R_v + R_x)^2} \right| \quad (\text{A1})$$

$$\Delta P = |\Delta I \cdot 2I \cdot R_x| + |\Delta R_x \cdot I^2| \quad (\text{A2})$$

Die Unsicherheit des unbekannten Kondensators C_x berechnet sich wie folgt.

$$\begin{aligned} \Delta C_x = & \left| \Delta A \cdot \frac{C_v}{R_v^2 \omega^2 C_v^2 + 1} \frac{-10}{A^2} \right| \\ & + \left| \Delta C_v \cdot \frac{10 - A}{A} \frac{1 - R_v^2 \omega^2 C_v^2}{(R_v^2 \omega^2 C_v^2 + 1)^2} \right| \\ & + \left| \Delta R_v \cdot \frac{10 - A}{A} \frac{-2C_v^3 \omega^2 R_v}{(C_v^2 \omega^2 R_v^2 + 1)^2} \right| \end{aligned} \quad (\text{A3})$$