例 4.1 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $f(0)=0$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2 f(x)-f(x^3)}{x^3}=(\quad)$.

(A) $-2f'(0)$ (B) $-f'(0)$ (C) $f'(0)$ (D) 0

例 4.2 设函数 $y=f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，$f(0)=0$，$\lim\limits_{x\to\infty} x f\left(\dfrac{1}{2x+3}\right)=1$，则 $f'(0)=(\quad)$.

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5

例 4.3 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，则下列命题错误的是（　　）.

(A) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在，则 $f(0)=0$

(B) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+f(-x)}{x}$ 存在，则 $f(0)=0$

(C) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在，则 $f'(0)$ 存在

(D) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(-x)}{x}$ 存在，则 $f'(0)$ 存在

例 4.4　证明:(1)若 $f(x)$是可导的偶函数,则 $f'(x)$是奇函数;
(2)若 $f(x)$是可导的奇函数,则 $f'(x)$是偶函数.

例 4.5　证明：若 $f(x)$ 是可导的周期为 T 的周期函数，则 $f'(x)$ 也是以 T 为周期的周期函数.

例 4.6　设 $f(x)$ 是二阶可导的以 2 为周期的奇函数，且 $f\left(\frac{1}{2}\right)>0$，$f'\left(\frac{1}{2}\right)>0$，记 $M=f\left(-\frac{1}{2}\right)$，$N=f'\left(\frac{3}{2}\right)$，$K=f''(0)$. 则（　　）.

(A) $M<N<K$　　(B) $M>N>K$　　(C) $M<K<N$　　(D) $M>K>N$

例 4.7 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导，且 $f'(x_0)\neq 0$. 当自变量有增量 Δx 时，函数 $y=f(x)$ 的增量为 Δy，则极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y-\mathrm{d}y}{\mathrm{d}y}$ 为(　　).

(A) -1　　(B) 0　　(C) 1　　(D) 2

例 4.8 设函数 $f(u)$ 可导，且 $y=f(x^2)$，当自变量 x 在 $x=-1$ 处取得增量 $\Delta x=-0.1$ 时，相应的函数增量 Δy 的线性主部为 0.1，则 $f'(1)=($　　$)$.

(A) -1　　(B) 0.1　　(C) 0.5　　(D) 1

例 4.9 设 $f(x) = \prod_{n=1}^{100}\left(\tan\frac{\pi x^n}{4} - n\right)$，则 $f'(1) =$ ________.

例 4.10 设 $y=\ln|x|, x\neq 0$，求 y'.

例 4.11 设函数

$$f(x)=\begin{cases} e^{ax}, & x\leqslant 0, \\ b(1-x^2), & x>0 \end{cases}$$

在 $x=0$ 处可导，则 a 与 b 的值分别为(　　).

(A) $a=0,b=0$　　(B) $a=1,b=0$　　(C) $a=0,b=1$　　(D) $a=1,b=1$

例 4.12 求函数 $f(x)=2^{|x-a|}$ 的导数.

例 4.13 设 $y=\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})(a\neq 0)$，求 $y'\big|_{x=0}$.

例 4.14　设函数 $f(x)=\begin{cases}\ln\sqrt{x}, & x\geqslant 1,\\ 2x-1, & x<1,\end{cases}$ 且 $y=f[f(x)]$，则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=e}=$ ________.

例 4.15 设 $y = e^{\sin(\ln x)}$，求 dy 及 $\frac{dy}{dx}$.

例 4.16 求下列函数的导数.

(1) $y=\arcsin x, -1<x<1$;

(2) $y=\arctan x$.

例 4.17 设 $y=f(x)$的反函数是 $x=\varphi(y)$，且 $f(x)=\int_{1}^{2x} e^{t^2}\,dt+1$，则 $\varphi''(1)=$ ________.

例 4.18 设 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=\sin t, \\ y=t\sin t+\cos t \end{cases}$ 确定，则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=$ ________.

例 4.19 设 $y=y(x)$ 是由方程 $\sin(xy)=\ln\dfrac{x+\mathrm{e}}{y}+1$ 确定的隐函数，求 $y'(0)$ 的值.

例 4.20 设 $y=\dfrac{\sqrt{x+2}(3-x)^4}{(x+1)^3}$,则 $y'\Big|_{x=2}=($　　$)$.

(A) $\dfrac{13}{36}$　　(B) $\dfrac{11}{36}$　　(C) $\dfrac{7}{36}$　　(D) $-\dfrac{13}{36}$

例 4.21 求函数 $y=x^x(x>0)$ 的导数.

例 4.22 求函数 $y=x^{\frac{1}{x}}(x>0)$ 的导数.

例 4.23 求 $y=\dfrac{1}{x}$ 的 n 阶导数.

例 4.24 求 $y=\sin x$ 的 n 阶导数.

例 4.25 已知函数 $f(x)$ 具有任意阶导数,且 $f'(x)=[f(x)]^2$,求 $f^{(n)}(x)$,其中 n 为正整数.

例 4.26 设 $y=\dfrac{1-x}{1+x}$,则 $y^{(n)}(0)=(\qquad)$.

(A) $(-1)^n 2\cdot n!$　　(B) $-2^n\cdot n!$　　(C) $2^n\cdot(n-1)!$　　(D) $-2^n\cdot(n-1)!$

例 4.27 设 $y=x^3\sin x$，求 $y^{(6)}(0)$.

习题

4.1 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x^2)}{x^2}=1$，则(　　).

(A) $f(0)=0$ 且 $f'_-(0)$ 存在　　(B) $f(0)=1$ 且 $f'_-(0)$ 存在

(C) $f(0)=0$ 且 $f'_+(0)$ 存在　　(D) $f(0)=1$ 且 $f'_+(0)$ 存在

4.2 设函数 $f(x)=|x^3-1|\varphi(x)$,其中 $\varphi(x)$ 在 $x=1$ 处连续,则 $\varphi(1)=0$ 是 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导的(　　).

(A)充分必要条件　　　　(B)充分但非必要条件

(C)必要但非充分条件　　　　(D)既非充分又非必要条件

4.3 设 $\delta>0$，$f(x)$在$[-\delta,\delta]$上有定义，$f(0)=1$，且满足

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-2x)+2xf(x)}{x^2}=0,$$

证明 $f(x)$在 $x=0$ 处可导，并求 $f'(0)$.

4.4 设 $y=f(\ln^2 x)\mathrm{e}^{f^2(x)}$，其中 f 可微，计算$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

4.5 设函数 $f(x)$在 $x=2$ 的某邻域内具有任意阶导数，且 $f'(x)=\mathrm{e}^{f(x)}$，$f(2)=1$，计算 $f^{(n)}(2)$，其中 n 为正整数.

4.6 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $y=x\ln y$ 所确定，求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

4.7 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $xe^{f(y)}=e^{y}\ln 29$ 确定，其中 f 具有二阶导数，且 $f'\neq 1$，则 $\frac{d^2y}{dx^2}=$________.

4.8 已知 $f'(x)=Ae^x$（A 为正常数），求 $f(x)$的反函数的二阶导数.

4.9 设 $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{\pi}{x}, & x<0, \\ A, & x=0, \\ ax^2+b, & x>0, \end{cases}$ 求常数 A,a,b 的值,使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导,并求 $f'(0)$.

4.10 设函数 $y=y(x)$ 由 $\begin{cases} x=\ln(1+t^2)+1, \\ y=2\arctan t-(t+1)^2 \end{cases}$ 确定，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$.

4.11 设 $f(x)$ 满足 $f(0)=0$，且 $f'(0)$ 存在，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1-\sqrt{\cos x})}{\ln(1-x\sin x)}$.