例 11.1 已知 $f(x,y)=\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}$,则(　　).

(A) $f'_x(0,0)$,$f'_y(0,0)$都存在

(B) $f'_x(0,0)$存在,$f'_y(0,0)$不存在

(C) $f'_x(0,0)$不存在,$f'_y(0,0)$存在

(D) $f'_x(0,0)$,$f'_y(0,0)$都不存在

例 11.2 已知函数 $f(x,y)=x\ln(x+\ln y)$,求 $f'_x(1,\mathrm{e})$,$f'_y(1,\mathrm{e})$.

例 11.3 设 $z=f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$ 则下列四个结论中，

①$f(x,y)$在$(0,0)$处连续；

②$f_x'(0,0)$，$f_y'(0,0)$存在；

③$f_x'(x,y)$，$f_y'(x,y)$在$(0,0)$处连续；

④$f(x,y)$在$(0,0)$处可微.

正确结论的个数为（　　）.

(A)1　　(B)2　　(C)3　　(D)4

例 11.4 设函数 $z=f\left(\frac{y}{x},\frac{x}{y}\right)$ 具有连续偏导数，则 $x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}=$（　　）.

(A) $2\left(\frac{y}{x}f_1'+\frac{x}{y}f_2'\right)$　　(B) $2\left(\frac{y}{x}f_1'-\frac{x}{y}f_2'\right)$

(C) $-2\left(\frac{y}{x}f_1'+\frac{x}{y}f_2'\right)$　　(D) $-2\left(\frac{y}{x}f_1'-\frac{x}{y}f_2'\right)$

例 11.5 设 $z=f(e^x\sin y, x^2+y^2)$，其中 f 具有二阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

例 11.6 设有三元方程 $xy-z\ln y+e^{xz}=1$，根据隐函数存在定理，存在点 $(0,1,1)$ 的一个邻域，在此邻域内该方程（　　）.

(A) 只能确定一个具有连续偏导数的隐函数 $z=z(x,y)$

(B) 可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $y=y(x,z)$ 和 $z=z(x,y)$

(C) 可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $x=x(y,z)$ 和 $z=z(x,y)$

(D) 可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $x=x(y,z)$ 和 $y=y(x,z)$

例 11.7 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $\sin xy-\dfrac{1}{y-x}=1$ 确定，求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$.

例 11.8 设 $y=y(x)$,$z=z(x)$是由方程 $z=xf(x+y)$和 $F(x,y,z)=0$ 所确定的函数,其中 f 和 F 分别具有一阶连续导数和一阶连续偏导数,求$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$.

例 11.9 设 $z=f(x,y)$是由方程 $z-y-x+xe^{z-y-x}=0$ 所确定的二元函数,求 dz.

例 11.10 求方程$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=x+y$ 满足条件 $z(x,0)=x$,$z(0,y)=y^2$的解 $z=z(x,y)$.

例 11.11　设 $z_1=|x+y|$，$dz_2=(3x^2+6x)dx-(3y^2-6y)dy$，则点$(0,0)$(　　).

(A)不是 z_1 的极值点，也不是 z_2 的极值点

(B)是 z_1 的极大值点，也是 z_2 的极大值点

(C)是 z_1 的极大值点，是 z_2 的极小值点

(D)是 z_1 的极小值点，也是 z_2 的极小值点

例 11.12 设 $z=x^4+y^4-x^2-2xy-y^2$，则（　　）.

(A) z 的极小值点为 $(-1,-1)$，$(1,1)$

(B) z 的极大值点为 $(-1,-1)$，$(0,0)$；极小值点为 $(1,1)$

(C) z 的极小值点为 $(0,0)$，$(1,1)$，$(-1,-1)$

(D) z 的极小值点为 $(0,0)$；极大值点为 $(1,1)$

例 11.13 设 $z=z(x,y)$ 是由 $x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+18=0$ 确定的函数，则 $z=z(x,y)$（　　）.

(A)极大值点为$(-9,-3)$，极大值为-3；没有极小值

(B)极小值点为$(-9,-3)$，极小值为-3；没有极大值

(C)极大值点为$(9,3)$，极大值为 3；极小值点为$(-9,-3)$，极小值为-3

(D)极小值点为$(9,3)$，极小值为 3；极大值点为$(-9,-3)$，极大值为-3

例 11.14 求函数 $u=x^2+y^2+z^2$ 在约束条件 $\begin{cases} z=x^2+y^2, \\ x+y+z=4 \end{cases}$ 下的最大值与最小值.

例 11.15 求函数 $f(x,y)=x^2+2y^2-x^2y^2$ 在区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 4, y\geqslant 0\}$ 上的最大值与最小值.

习题

11.1 设 $f(x,y)=\begin{cases}(x+y)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0),\end{cases}$ 则 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处(　　).

(A)连续,且偏导数存在　　(B)连续,但偏导数不存在

(C)不连续,但偏导数存在　　(D)不连续,偏导数也不存在

11.2 函数 $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$ 在点(0,0)处(　　).

(A)偏导数不存在　　(B)偏导数存在,但不可微

(C)可微,但偏导数不连续　　(D)偏导数连续

11.3 设函数 $f(x)$ 可微,且 $f'(0)=\frac{1}{2}$,则 $z=f(4x^2-y^2)$ 在点(1,2)处的全微分 $\mathrm{d}z\Big|_{(1,2)}=$________.

11.4 设 $z=f(x^2y^2,\mathrm{e}^{xy})$，其中 $f(u,v)$有二阶连续偏导数，求 z''_{xx}，z''_{yy}，z''_{xy}.

11.5 用变换$\begin{cases} u=x-2y, \\ v=x+ay \end{cases}$可把方程 $6\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ 化简为$\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$，其中 z 有二阶连续偏导数，求 a 的值.

11.6 设函数 $u=f(x^2, xy, xz)$具有一阶连续偏导数，又函数 $y=y(x)$，$z=z(x)$分别由

$$\sin xy = y, \quad e^z = \int_0^{xz} \sin t\,dt$$

确定，求$\frac{du}{dx}$.

11.7 求 $f(x,y)=x^2-y^2+2$ 在椭圆域 $D=\left\{(x,y)\,\middle|\,x^2+\frac{y^2}{4}\leqslant 1\right\}$ 上的最大值和最小值.

11.8 求函数 $u=xyz$ 在约束条件 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{a}$ $(x>0,y>0,z>0,a>0)$ 下的最小值.

11.9 已知函数 $z=f(x,y)$ 的全微分 $\mathrm{d}z=2x\mathrm{d}x+\sin y\mathrm{d}y$,且 $f(1,0)=2$,求 $f(x,y)$.