例 12.1 设 $I_1=\iint\limits_D \sin\left|\frac{x-y}{2}\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}y, I_2=\iint\limits_D \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y, I_3=\iint\limits_D \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 $D=\{(x,y)\mid (x-1)^2+(y-1)^2\leqslant 2\}$,则(　　).

(A)$I_1<I_2<I_3$　　(B)$I_2<I_3<I_1$　　(C)$I_3<I_1<I_2$　　(D)$I_3<I_2<I_1$

例 12.2 计算$\iint\limits_D y\left(1+xe^{\frac{x^2+y^2}{2}}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中平面区域 D 由直线 $y=x, y=-1$ 及 $x=1$ 所围成.

例 12.3 计算$\iint\limits_D |y-x^2|\max\{x,y\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中

$$D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1\}.$$

例 12.4 设区域 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leqslant R^2\}$,计算$\iint\limits_D\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

例 12.5 计算二重积分 $I = \iint\limits_{D} r^2 \sin\theta \sqrt{1 - r^2 \cos 2\theta}\, \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$,其中

$$D = \left\{ (r,\theta) \,\middle|\, 0 \leqslant r \leqslant \sec\theta, 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{4} \right\}.$$

例 12.6 计算 $I=\int_0^1 \mathrm{d}x \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{x+y}{x^2+y^2} \mathrm{d}y$.

例 12.7 计算 $\int_{1}^{2} \mathrm{d}x \int_{\sqrt{x}}^{x} \sin \frac{\pi x}{2y} \mathrm{d}y + \int_{2}^{4} \mathrm{d}x \int_{\sqrt{x}}^{2} \sin \frac{\pi x}{2y} \mathrm{d}y$.

例 12.8 设 $f(x)=\int_x^1 \sin(\pi u^2)\mathrm{d}u$，求$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

例 12.9 设 $f(x)$ 为恒大于零的连续函数，证明$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \cdot \int_0^1 \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x \geqslant 1$.

例 12.10 计算$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$.

习题

12.1 按两种不同积分次序化二重积分$\iint\limits_{D} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$为累次积分，其中 D 为：

(1) 直线 $y=x$，抛物线 $y^2=4x$ 所围闭区域；

(2) 直线 $y=0$，曲线 $y=\sin x(0\leqslant x\leqslant \pi)$ 所围闭区域；

(3) $(x-1)^2+(y+1)^2\leqslant 1$ 所确定的闭区域.

12. 2 累次积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^{\cos\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r \mathrm{d}r$ 可以写成(　　).

(A) $\int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^{\sqrt{y-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x$

(B) $\int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x$

(C) $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}y$

(D) $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{x-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y$

12.3 证明：$\iint\limits_{D}(e^{\sin y}+e^{-\sin x})\mathrm{d}x\mathrm{d}y \geqslant 2\pi^2$，其中 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant \pi, 0\leqslant y\leqslant \pi\}$.

12.4 交换积分次序：$\int_{0}^{\frac{1}{4}} \mathrm{d}y \int_{y}^{\sqrt{y}} f(x,y)\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}y \int_{y}^{\frac{1}{2}} f(x,y)\mathrm{d}x =$ ________.

12.5 计算二重积分$\iint\limits_{D} e^{\max\{x^2, y^2\}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 $D=\{(x,y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1\}$.

12.6 计算 $I=\iint\limits_D \frac{2e^{x^2}+3e^{y^2}}{e^{x^2}+e^{y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$.

12.7 设区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1,x\geqslant 0\}$,计算二重积分 $I=\iint\limits_D \frac{1+xy}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

12.8 设 $F(t)=\iint\limits_{x+y\leqslant t} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 $f(x,y)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ 求 $F(t)$ 的表达式.