例 13.1　微分方程 $y'=\dfrac{y(1-x)}{x}$ 的通解是________.

例 13.2　求微分方程 $\mathrm{d}y=\sin(x+y+100)\mathrm{d}x$ 的通解.

例 13.3 设 L 是一条平面曲线,其上任意一点 $P(x,y)(x>0)$ 到坐标原点的距离恒等于该点处的切线在 y 轴上的截距,且 L 经过点 $\left(\frac{1}{2},0\right)$. 求曲线 L 的方程.

例 13.4 设 $F(x)=f(x)g(x)$，其中函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内满足以下条件：

$$f'(x)=g(x),\ g'(x)=f(x),\text{且 } f(0)=0,\ f(x)+g(x)=2e^{x}.$$

(1)求 $F(x)$ 所满足的微分方程；

(2)求出 $F(x)$ 的表达式.

例 13.5 求 $y\mathrm{d}x=(1+x\ln y)x\mathrm{d}y\,(y>0)$ 的通解.

例 13.6 求 $y''=\dfrac{2xy'}{1+x^2}$ 的通解.

例 13.7 求微分方程 $2yy''+(y')^2=0$ 的通解，其中 $y>0$.

例 13.8 设 A,B,C 为待定常数，微分方程 $y''-2y'+5y=2e^x\sin^2 x$ 的特解形式为（　　）.

(A) $Ae^x+xe^x(B\cos 2x+C\sin 2x)$　　(B) $Ae^x\sin^2 x$

(C) $Ae^x+e^x(B\cos 2x+C\sin 2x)$　　(D) $Ae^x\cos^2 x$

例 13.9 已知某 n 阶常系数齐次线性微分方程有特解 $y_1(x)=e^x\cos 2x, y_2(x)=x$，且方程中 $y^{(n)}$ 前的系数为 1，则最小的 $n=$________，该方程为________.

例 13.10 设 y_1,y_2 是一阶非齐次线性微分方程 $y'+p(x)y=q(x)$ 的两个特解，若常数 λ,μ 使 $\lambda y_1+\mu y_2$ 是该方程的解，$\lambda y_1-\mu y_2$ 是该方程对应的齐次方程的解，则(　).

(A) $\lambda=\frac{1}{2},\mu=\frac{1}{2}$　　(B) $\lambda=-\frac{1}{2},\mu=-\frac{1}{2}$

(C) $\lambda=\frac{2}{3},\mu=\frac{1}{3}$　　(D) $\lambda=\frac{2}{3},\mu=\frac{2}{3}$

例 13.11 设 $y=f(x)$ 是方程 $y''-2y'+4y=0$ 的一个解，若 $f(x_0)>0$，且 $f'(x_0)=0$，则函数 $f(x)$ 在点 x_0(　　).

(A)取得极大值　　　　(B)取得极小值

(C)某个邻域内单调增加　　　　(D)某个邻域内单调减少

13.1 求微分方程$\left(x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-y\right)\arctan\frac{y}{x}=x$的通解.

13.2 微分方程 $y\mathrm{d}x+(x-3y^2)\mathrm{d}y=0$ 满足条件 $y\Big|_{x=1}=1$ 的解为 $y=$________.

13.3 求微分方程 $y'+1=e^{-y}\sin x$ 的通解.

13.4 设函数 $f(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，且满足方程 $f(t)=e^{4\pi t^2}+\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4t^2} f\left(\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，求 $f(t)$.

13.5（仅数学一） 求$(x+2)y''+x(y')^2=y'$的通解.

13.6 求 $y''-3y'+2y=2\mathrm{e}^{-x}\cos x+\mathrm{e}^{2x}(4x+5)$的通解.

13.7 设二阶常系数线性微分方程 $y''+\alpha y'+\beta y=\gamma e^x$ 的一个特解为 $y^*=e^{2x}+(1+x)e^x$. 确定常数 α, β, γ, 并求该方程的通解.

13.8 设 $y=y(x)$ 是二阶常系数线性微分方程 $y''+py'+qy=e^{3x}$ 满足初始条件 $y(0)=y'(0)=0$ 的特解，则当 $x\to 0$ 时，函数 $\dfrac{\ln(1+x^2)}{y(x)}$ 的极限（　　）.

(A)不存在　　(B)等于 1　　(C)等于 2　　(D)等于 3

13.9 设函数 $y(x)$ 是微分方程 $y'-xy=\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\frac{x^2}{2}}$ 满足条件 $y(1)=\sqrt{e}$ 的特解.

(1)求 $y(x)$；

(2)设平面区域 $D=\{(x,y)\mid 1\leqslant x\leqslant 2,0\leqslant y\leqslant y(x)\}$，求 D 绕 x 轴旋转所得旋转体的体积.