例 3.1 已知$\lim\limits_{x \to 1} f(x)$存在，且函数 $f(x)=x^2+x-2\lim\limits_{x \to 1} f(x)$，则$\lim\limits_{x \to 1} f(x)=($　　$)$.

(A) $\frac{3}{2}$　　(B) $-\frac{2}{3}$　　(C) $-\frac{3}{2}$　　(D) $\frac{2}{3}$

例 3.2　当 $x\to 1$ 时，函数 $\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$ 的极限(　　).

(A)等于 1　　(B)等于 0

(C)为∞　　(D)不存在且不为∞

例 3.3　在下列区间内，函数 $f(x)=\frac{x\sin(x-3)}{(x-1)(x-3)^2}$ 有界的是(　　).

(A)$(-2,1)$　　(B)$(-1,0)$　　(C)$(1,2)$　　(D)$(2,3)$

例 3.4　极限$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sqrt{x}}{x-\mathrm{e}^{2\sqrt{x}}+1}=($　　$)$.

(A)∞　　(B)2　　(C)1　　(D)$-\dfrac{1}{2}$

例 3.5 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\ln(1+x)-x^2}$.

例 3.6　求极限 $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}$.

例 3.7 求极限 $\lim\limits_{x \to -\infty} x(\sqrt{x^2+100}+x)$.

例 3.8 求极限$\lim\limits_{x\to 1^-}\ln x\ln(1-x)$.

例 3.9 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x-\arctan x}{\sin x-\tan x}$.

例 3.10 求 $I=\lim\limits_{x \to 0} x\left[\dfrac{10}{x}\right]$,其中$[\cdot]$为取整符号.

例 3.11 极限$\lim\limits_{x \to 0}\left[\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right]=($ $)$.

(A)2 (B)$\frac{3}{2}$ (C)1 (D)$\frac{1}{2}$

例 3.12　求极限 $\lim\limits_{x \to +\infty}\left[x^2\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)-x\right]$.

例 3.13 求极限 $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^{\frac{1}{x}}$.

例 3.14 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^x+e^{2x}+e^{3x}}{3}\right)^{\frac{e}{x}}$.

例 3.15 求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\tan\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$（$n$ 为正整数）.

例 3.16　已知极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 2x+xf(x)}{\sin x^3}=0$，则$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2+f(x)}{x^2}=$(　　).

(A)$\dfrac{13}{9}$　　(B)4　　(C)$\dfrac{10}{3}$　　(D)$-\dfrac{8}{3}$

例 3.17 设$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-(ax+bx^2)}{x^2}=2$,求常数 a,b.

例 3.18 设当 $x \to 0$ 时，$e^x-(ax^2+bx+1)$是比 x^2 高阶的无穷小，则(　　).

(A)$a=\frac{1}{2},b=1$　　(B)$a=1,b=1$　　(C)$a=-\frac{1}{2},b=-1$　　(D)$a=-1,b=1$

例 3.19 设 $x\to 0$ 时，$e^{\tan x}-e^{x}$ 与 x^{n} 是同阶无穷小，则 n 为(　　).

(A)1　　(B)2　　(C)3　　(D)4

例 3.20 设 $\alpha_1=x(\cos\sqrt{x}-1)$，$\alpha_2=\sqrt{x}\ln(1+\sqrt[3]{x})$，$\alpha_3=\sqrt[3]{x+1}-1$. 当 $x\to0^+$ 时，以上 3 个无穷小量按照从低阶到高阶的排序是(　　).

(A)$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$　　(B)$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_1$　　(C)$\alpha_2,\alpha_1,\alpha_3$　　(D)$\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1$

例 3.21 设 $f(x)=\begin{cases}2x+a, & x\leqslant 0,\\ e^x(\sin x+\cos x), & x>0\end{cases}$ 在$(-\infty,+\infty)$内连续，则 $a=$________.

例 3.22 设函数 $f(x)=\dfrac{\ln|x|}{|x-1|}\sin x$，则 $f(x)$有(　　).

(A)1 个可去间断点，1 个跳跃间断点

(B)1 个可去间断点，1 个无穷间断点

(C)2 个跳跃间断点

(D)2 个无穷间断点

例 3.23 函数 $f(x)=\frac{x^2-x}{x^2-1}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$ 的无穷间断点的个数为(　　).

(A)0　　(B)1　　(C)2　　(D)3

例 3.24　求极限$\lim\limits_{t \to x}\left(\dfrac{\sin t}{\sin x}\right)^{\frac{x}{\sin t - \sin x}}$，记此极限为 $f(x)$，求函数 $f(x)$ 的间断点并指出其类型.

习题

3.1 求极限$\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{100}}$.

3.2 已知 $I=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\ln(1+e^{\frac{2}{x}})}{\ln(1+e^{\frac{1}{x}})}+a[x]\right)$存在,[·]为取整函数,求 I,a.

3.3 已知 $a>0,b>0$,则 $\lim\limits_{x\to+\infty} x(a^{\frac{1}{x}}-b^{\frac{1}{x}})=$ __________.

3.4 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^{x}+xe^{x}}{e^{x}-1}-\dfrac{1}{x}\right)$.

3.5 设 $a\neq\frac{1}{2}$，计算$\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left[\frac{n-2na+1}{n(1-2a)}\right]^{n}$.

3.6 求极限$\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x^x - (\sin x)^x}{x^2 \ln(1+x)}$.

3.7 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{n}{x}}$,其中 $a_i>0,i=1,2,\cdots,n$.

3.8 设$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left[1+\dfrac{f(x)}{\sin x}\right]}{2^x-1}=2$，求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}$.

3.9 设 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内有定义，且$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=a$，$g(x)=\begin{cases} f\left(\dfrac{1}{x}\right), & x\neq 0, \\ 0, & x=0, \end{cases}$ 则(　　).

(A)$x=0$ 必是 $g(x)$的第一类间断点

(B)$x=0$ 必是 $g(x)$的第二类间断点

(C)$x=0$ 必是 $g(x)$的连续点

(D)$g(x)$在点 $x=0$ 处的连续性与 a 的取值有关

3.10 设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x}{1+x^{2n}}$，讨论函数的间断点，其结论为(　　).

(A)不存在间断点　(B)存在间断点 $x=1$　(C)存在间断点 $x=0$　(D)存在间断点 $x=-1$