基础例题精解

1. 介值定理的使用

例 6.1 (平均值定理)设 f(x)在 [a,b]上连续, $a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < b$,证明存在 $\xi \in [x_1,x_n]$,使得

$$f(\xi) = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)}{n}$$

例 6.2 (定理 10 积分中值定理) 设 f(x) 在 [a,b] 上连续,证明存在 $\xi \in [a,b]$,使得 $\int_a^b f(x) dx = f(\xi) (b-a).$

例 6.3 设 f(x) 在 [0,1] 上具有一阶连续导数,f(0)=0,证明:存在 $\xi \in [0,1]$,使得 $f'(\xi)=2\int_0^1 f(x) \, \mathrm{d}x.$

例 6.4 设函数 f(x) 在闭区间[a,b]上连续,在开区间(a,b)内可导,且 f(a)=f(b)=0. 证明:对任意实数 a,都存在 $\xi \in (a,b)$,使得 $f'(\xi)+af(\xi)=0$.

例 6.5 设函数 f(x)在[0,1]上连续,在(0,1)内可导,且 f(0)=f(1)=0, $f(\frac{1}{2})=1$,证明:

(1)存在 $\eta \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$,使得 $f(\eta) = \eta$; (2)对于任意实数 λ ,必存在 $\xi \in (0, \eta)$,使得 $f'(\xi) - \lambda [f(\xi) - \xi] = 1$.

例 6.6 设函数 f(x)在[0,3]上连续,在(0,3)内有二阶导数,且

$$2f(0) = \int_0^2 f(x) dx = f(2) + f(3),$$

证明:(1)存在 $\eta \in (0,2)$,使得 $f(\eta) = f(0)$;(2)存在 $\xi \in (0,3)$,使得 $f''(\xi) = 0$.

例 6.7 (导数零点定理)设 f(x)在[a,b]上可导,证明当 $f'_+(a) \cdot f'_-(b)$ <0 时,存在 $\xi \in (a,b)$,使得 $f'(\xi) = 0$.

例 6.8 设 a>b>0,n>1,证明: $nb^{n-1}(a-b) < a^n-b^n < na^{n-1}(a-b)$.

例 6.9 设 f(x)在[0,1]上连续,在(0,1)内可导,证明:至少存在一点 $\xi \in (0,1)$,使得 $f(1) = 3\xi^2 f(\xi) + \xi^2 f'(\xi)$.

例 6.10 设函数 f(x)在[0,1]上连续,在(0,1)内可导,且 f(0)=0,f(1)=1,证明存在不同的 ξ_1 , ξ_2 \in (0,1),使得 $\frac{1}{f'(\xi_1)} + \frac{1}{f'(\xi_2)} = 2$.

例 6.11 设 f(x)在[a,b]上连续,在(a,b)内可导,0<a<b,证明:至少存在一点 $\xi \in (a,b)$,使得 $f(b)-f(a)=\xi \ln \frac{b}{a}f'(\xi).$

例 6.12 设 f(x) 在区间 [-a,a](a>0) 上具有二阶连续导数, f(0)=0.

- (1)写出 f(x)的带拉格朗日余项的一阶麦克劳林公式;
- (2) 证明:存在 $\eta \in [-a,a]$,使得 $a^3 f''(\eta) = 3 \int_{-a}^a f(x) dx$.

习题

6.1 设在[0,1]上 f''(x) > 0,则 f'(0), f'(1), f(1) - f(0)的大小顺序为().

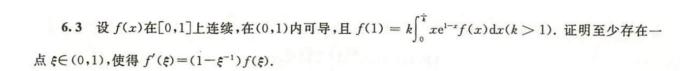
(A) f'(1) > f'(0) > f(1) - f(0)

(B) f'(1) > f(1) - f(0) > f'(0)

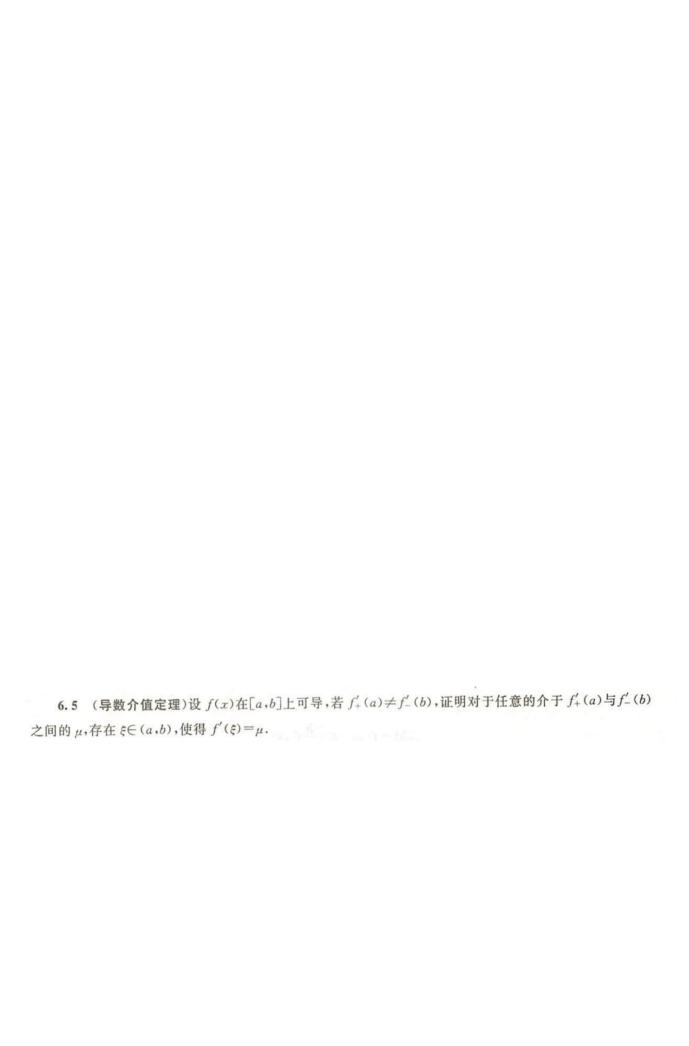
(C) f(1) - f(0) > f'(1) > f'(0)

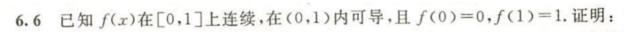
(D)f(1)-f(0)>f'(0)>f'(1)

6.2 设 f(x)在[0,3]上连续,在(0,3)内可导,且 f(0)+f(1)+f(2)=3, f(3)=1. 证明必存在 $\xi \in (0,3)$,使得 $f'(\xi)=0$.



6.4 设函数 f(x)在[0,1]上连续,在(0,1)内二阶可导,过点 A(0,f(0))与 B(1,f(1))的直线与曲线 y=f(x)相交于点 C(c,f(c)),其中 0 < c < 1,证明存在 $\xi \in (0,1)$,使得 $f''(\xi)=0$.





- (1)存在 $\xi \in (0,1)$,使得 $f(\xi) = 1 \xi$;
- (2)存在 $\eta, \tau \in (0,1), \eta \neq \tau$, 使得 $f'(\eta)f'(\tau) = 1$.

6.7 设函数 f(x)在闭区间[-1,1]上具有三阶连续导数,且 f(-1)=0,f(1)=1,f'(0)=0,证明:在 开区间(-1,1)内至少存在一点 ξ ,使 $f'''(\xi)=3$.