例 10.1　设 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且 $g(x)$ 不变号，证明：至少存在一点 $\xi\in[a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x .$$

例 10.2　设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上不恒为 0 且二阶可导，$f(a)>0$，$f(b)>0$，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$，证明：

(1)存在不同的 $\xi_1,\xi_2\in(a,b)$，使得 $f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$；

(2)存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f''(\xi)>0$.

例 10.3 求$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\mathrm{d}x$.

例 10.4　(1)比较 $\int_0^1 |\ln t|[\ln(1+t)]^n dt$ 与 $\int_0^1 t^n |\ln t| dt(n=1,2,\cdots)$的大小,说明理由.

(2)记 $u_n=\int_0^1 |\ln t|[\ln(1+t)]^n dt(n=1,2,\cdots)$,求 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$.

例 10.5 设 $f(x)$ 是连续的偶函数，且是以 T 为周期的周期函数.

(1)证明 $\int_0^{nT} xf(x)\mathrm{d}x = \frac{n^2 T}{2}\int_0^T f(x)\mathrm{d}x (n = 1,2,3,\cdots)$；

(2)利用(1)的结论计算 $I = \int_0^{n\pi} x \mid \sin x \mid \mathrm{d}x$.

例 10.6 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x)>0$，证明：$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \cdot \int_a^b \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x \geqslant (b-a)^2$.

例 10.7 设函数 $f(x),g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x)$ 单调增加，$0\leqslant g(x)\leqslant 1$. 证明：

(1) $0\leqslant \int_a^x g(t)\mathrm{d}t \leqslant x-a, x\in[a,b]$；

(2) $\int_a^{a+\int_a^b g(t)\mathrm{d}t} f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$.

例 10.8 设 $f(x)$在$[0,1]$上具有一阶连续导数,且 $f(0)=f(1)=0$. 证明:

$$\left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{1}{4}\max_{x\in[0,1]}\{|f'(x)|\}.$$

例 10.9 设 $f(x)$在$[0,2]$上二阶导数连续,且 $f(1)=0$. 当 $x\in[0,2]$时,记 $M=\max\{|f''(x)|\}$,证明$\left|\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{1}{3}M$.

例 10.10 设 $f(x)$ 的二阶导数 $f''(x)$ 在$[0,1]$上连续，且 $f(0)=f(1)=0$，证明：

(1) $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^1 x(x-1)f''(x)\mathrm{d}x$；

(2) $\left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{1}{12}\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}\{|f''(x)|\}$.

10.1 设 $f(x)$，$g(x)$在$[a,b]$上连续，证明至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得

$$f(\xi)\int_{\xi}^{b}g(x)\mathrm{d}x = g(\xi)\int_{a}^{\xi}f(x)\mathrm{d}x.$$

10.2 设 $\varphi(x)$是可微函数 $f(x)$的反函数，且 $f(1)=0$，证明：

$$\int_0^1\left[\int_0^{f(x)}\varphi(t)\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x = 2\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x.$$

10.3 设 $f(x)$在$[a,b]$上连续且严格单调增加，证明

$$(a+b)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x < 2\int_a^b xf(x)\,\mathrm{d}x.$$

10.4 设 $f(x)$在$[0,1]$上连续且单调减少,证明:当 $0<\lambda<1$ 时,$\int_0^\lambda f(x)\mathrm{d}x \geqslant \lambda\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

10.5 证明：$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+x^2}\mathrm{d}x \geqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+x^2}\mathrm{d}x$.