## 基础例题精解

**例 2.1** 用定义证明$\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$（$q$ 为常数且$|q|<1$）.

**例 2.2** 证明：若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$，则$\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=|A|$.

**例 2.3** 证明数列$\{n^{(-1)^n}\}$极限不存在.

例 2.4　设 $x_n=\begin{cases}\dfrac{n^2+\sqrt{n}}{n}, & n\text{ 为正奇数},\\ \dfrac{1}{n}, & n\text{ 为正偶数},\end{cases}$ 则当 $n\to\infty$ 时，变量 $x_n$ 为(　　).

(A)无穷大量　　(B)无穷小量

(C)有界变量但不是无穷小量　　(D)无界变量但不是无穷大量

**例 2.5** 设$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=1$,$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=3$,证明$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的极限存在,并求出它们的极限值.

例 2.6 极限$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+3\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}})=($ $)$.

(A)2 (B)$\frac{3}{2}$ (C)1 (D)$\frac{2}{3}$

**例 2.7** 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}\right)$.

**例 2.8** 设数列$\{a_n\}$满足 $a_1=a(a>0)$，$a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{2}{a_n}\right)$，证明极限$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在，并求其值.

**例 2.9** 设数列$\{x_n\}$满足 $0<x_1<\pi$，$x_{n+1}=\sin x_n(n=1,2,\cdots)$. 证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求该极限.

**例 2.10** 设数列$\{a_n\}$满足 $a_0=0, a_1=1, 2a_{n+1}=a_n+a_{n-1}, n=1,2,\cdots$.

## 习题

**2.1** 用定义证明$\lim\limits_{n\to\infty}\left[1+\frac{(-1)^n}{n}\right]=1.$

**2.2** 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$.

**2.3** 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\right)$.

**2.4** 设 $a_n=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}(n=1,2,\cdots)$. 证明数列 $\{a_n\}$ 收敛.

**2.5** 设 $x_1=2, x_n+(x_n-4)x_{n-1}=3(n=2,3,\cdots)$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.