



基础例题精解

一、方程根的问题(函数的零点问题)

例 7.1 证明方程 $x + p + q \cos x = 0$ 恰有一个实根, 其中 p, q 为常数, 且 $0 < q < 1$.

例 7.2 若函数 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$, 则 $f'(x)$ 的零点的个数为().

- (A)1 (B)2 (C)3 (D)4

例 7.3 若 $3a^2-5b<0$, 则方程 $x^5+2ax^3+3bx+4c=0$ ().

- (A) 无实根 (B) 有唯一实根 (C) 有三个不同实根 (D) 有五个不同实根

例 7.4 设常数 $k > 0$, 函数 $f(x) = \ln x - \frac{x}{e} + k$ 在 $(0, +\infty)$ 内的零点个数为().

(A) 3

(B) 2

(C) 1

(D) 0

例 7.5 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内, 方程 $|x|^{\frac{1}{4}} + |x|^{\frac{1}{2}} - \cos x = 0$ ().

(A) 无实根

(B) 有且仅有一个实根

(C) 有且仅有两个实根

(D) 有无穷多个实根

例 7.6 讨论曲线 $y = x \ln x$ 与直线 $y = -A$ 的交点个数.

例 7.7 求方程 $k \arctan x - x = 0$ 的不同实根的个数, 其中 k 为参数.

例 7.8 证明当 $x > 0$ 时, $\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) < \frac{1}{\sqrt{x(x+1)}}$.

例 7.9 证明当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时, 有 $\sin x > \frac{2x}{\pi}$.

例 7.10 证明 $1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})\geqslant\sqrt{1+x^2}, -\infty<x<+\infty.$

例 7.11 设 $0 < a < b$, 证明: $\ln \frac{b}{a} > 2 \frac{b-a}{a+b}$.

例 7.12

设 $0 < a < b < 1$, 证明不等式 $\arctan b - \arctan a < \frac{b-a}{2ab}$.

例 7.13 设 $f(x)$ 在闭区间 $[0, c]$ 上连续, 其导数 $f'(x)$ 在开区间 $(0, c)$ 内存在且单调减少, 又 $f(0)=0$, 应用拉格朗日中值定理证明不等式 $f(a+b) \leq f(a) + f(b)$, 其中常数 a, b 满足条件 $0 \leq a \leq b \leq a+b \leq c$.

例 7.14 设 $f(x)$ 在 (a, b) 内二阶可导, 且 $f''(x) > 0$, 证明对于任意的 $x_1, x_2 \in (a, b)$, 且 $x_1 \neq x_2$ 及 $\lambda (0 < \lambda < 1)$, 恒有 $f[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2] < \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$.

习题

7.1 设当 $x > 0$ 时, 方程 $kx + \frac{1}{x^2} = 1$ 有且仅有一个根, 求 k 的取值范围.

7.2 设 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上连续, 且当 $x > a$ 时, $f'(x) > k > 0$, 其中 k 为常数. 若 $f(a) < 0$, 证明方程 $f(x) = 0$ 在 $\left[a, a - \frac{f(a)}{k}\right]$ 内有且仅有一个实根.

7.3 证明对任意常数 a, b , 且 $a < b$, 都有 $\sin b - \sin a \leq b - a$.

7.4 证明对任意 $x \in (-\infty, +\infty)$, 都有 $x - x^2 < \frac{1}{e}$.

7.5 设 $b > a > e$, 证明 $a^b > b^a$.

7.6 证明: $\left(\ln \frac{1+x}{x} - \frac{1}{1+x}\right)^2 < \frac{1}{x(1+x)^2} (x > 0).$