例 15.1 已知动点 P 在曲线 $y=x^3$ 上运动，记坐标原点与点 P 间的距离为 l. 若点 P 的横坐标对时间的变化率为常数 v_0，则当点 P 运动到点 $(1,1)$ 时，l 对时间的变化率是________.

例 15.2 曲线 $\begin{cases} x=\cos^3 t, \\ y=\sin^3 t \end{cases}$ 在 $t=\dfrac{\pi}{4}$ 对应点处的曲率为________.

例 15.3 设地球的质量为 M,半径为 R. 将地面上的质量为 m 的物体举高 H 米,求克服重力所做的功.

例 15.4 有一倒圆锥形容器，高 10 m，上底半径 4 m，水面高 8 m. 求将容器中的水全部从容器顶部抽出所做的功（水的密度为 1 000 kg/m^3，重力加速度 g 为 9.8 m/s^2）.

例 15.5 洒水车上的水箱是一个横放的椭圆柱体，椭圆的尺寸如图 15-15 所示. 当水箱装满水时，计算水箱的一个端面所受的压力(水的密度为 1 000 kg/m^3，重力加速度 g 为 9.8 m/s^2).

例 15.6 设曲线 L 的方程为 $y=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}\ln x, 1\leqslant x\leqslant \mathrm{e}$，$D$ 是由曲线 L，直线 $x=1$，$x=\mathrm{e}$ 及 x 轴围成的平面图形，求 D 的形心的横坐标.

例 15.7 计算曲线 $y=\ln(1-x^2)$ 上相应于 $0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$ 的一段弧的长度.

例 15.8 求心形线 $r=a(1+\cos\theta)$ 的全长,其中 $a>0$ 是常数.

例 15.9 求星形线 $x=\cos^3 t, y=\sin^3 t(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ 的弧长.

例 15.10 设有曲线 $y=\sqrt{x-1}$，过原点作其切线，求由此曲线、切线及 x 轴围成的平面图形绕 x 轴

旋转一周所得到的旋转体的表面积.

例 15.11 某种飞机在机场降落时，为了减少滑行距离，在触地的瞬间，飞机尾部张开减速伞，以增大阻力，使飞机迅速减速并停下.

现有一质量为 9 000 kg 的飞机，着陆时的水平速度为 700 km/h. 经测试，减速伞打开后，飞机所受的总阻力与飞机的速度成正比(比例系数为 $k=6.0\times10^{6}$). 问从着陆点算起，飞机滑行的最长距离是多少？(kg 表示千克，km/h 表示千米/时)

例 15.12 已知高温物体置于低温介质中，任一时刻该物体温度对时间的变化率与该时刻物体和介质的温差成正比. 现将一初始温度为 120 ℃的物体在 20 ℃恒温介质中冷却，30 min后该物体温度降至 30 ℃，若要将该物体的温度继续降至 21 ℃，还需冷却多长时间？

例 15.13 欧拉方程 $x^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+4x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2y=0(x>0)$的通解为________.

例 15.14 设 $f(x)=\begin{cases} x, & 0\leqslant x\leqslant \dfrac{1}{2}, \\ 2-2x, & \dfrac{1}{2}<x\leqslant 1, \end{cases}$ $S(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos n\pi x$, $-\infty<x<+\infty$，其中 $a_n=2\int_0^1 f(x)\cos n\pi x\mathrm{d}x\,(n=0,1,2,\cdots)$，求 $S\left(-\dfrac{5}{2}\right)$.

例 15.15 将函数 $f(x)=1-x^2(0\leqslant x\leqslant\pi)$ 展开成余弦级数,并求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$.

习题

15.1 甲车以 24 km/h 的速度向北行驶,同时正东 10 km 处有乙车以20 km/h的速度向东行驶.从这一时刻起经过 1 小时后,求两车间的距离对时间的变化率.

15.2 设 $\rho=\rho(x)$ 是抛物线 $y=\sqrt{x}$ 上任一点 $M(x,y)(x\geqslant 1)$ 处的曲率半径，$s=s(x)$ 是该抛物线上介于点 $A(1,1)$ 与 M 之间的弧长，计算 $3\rho\dfrac{\mathrm{d}^2\rho}{\mathrm{d}s^2}-\left(\dfrac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}s}\right)^2$ 的值.

15.3 在某一人群中推广新技术是通过其中已掌握新技术的人进行的. 设该人群的总人数为 N，在 $t=0$ 时刻已掌握新技术的人数为 x_0，在任意时刻 t 已掌握新技术的人数为 $x(t)$（将 $x(t)$ 视为连续可微变量），其变化率与已掌握新技术人数和未掌握新技术人数之积成正比，比例常数 $k>0$，求 $x(t)$.

15.4 有一半径为 4 m 的半球形水池蓄满了水，现在要将水全部抽到距水池原水面6 m高的水箱中，求需做多少功（水的密度为 1 000 kg/m^3，重力加速度 $g=9.8\ m/s^2$，$\pi=3.14$）.

15.5 求摆线$\begin{cases}x=a(t-\sin t),\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$$(a>0)$的一拱$(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$的弧长.

15.6 求阿基米德螺线 $r=a\theta(a>0)$ 上相应于 θ 从 0 到 2π 一段的弧长.