基础例题精解

1. 介值定理的使用

例 6.1 **（平均值定理）**设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$a<x_1<x_2<\cdots<x_n<b$，证明存在 $\xi\in[x_1,x_n]$，使得

$$f(\xi)=\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}.$$

例 6.2 （**定理 10　积分中值定理**）设 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续，证明存在 $\xi \in [a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a).$$

例 6.3 设 $f(x)$ 在$[0,1]$上具有一阶连续导数，$f(0)=0$，证明：存在 $\xi \in [0,1]$，使得

$$f'(\xi) = 2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x.$$

例 6.4 设函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，在开区间(a,b)内可导，且 $f(a)=f(b)=0$. 证明：对任意实数 α，都存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)+\alpha f(\xi)=0$.

例 6.5 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=f(1)=0$，$f\left(\frac{1}{2}\right)=1$，证明：

(1)存在 $\eta\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，使得 $f(\eta)=\eta$；

(2)对于任意实数 λ，必存在 $\xi\in(0,\eta)$，使得 $f'(\xi)-\lambda[f(\xi)-\xi]=1$.

例 6.6 设函数 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上连续，在 $(0,3)$ 内有二阶导数，且

$$2f(0)=\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=f(2)+f(3),$$

证明：(1) 存在 $\eta\in(0,2)$，使得 $f(\eta)=f(0)$；(2) 存在 $\xi\in(0,3)$，使得 $f''(\xi)=0$.

例 6.7 （**导数零点定理**）设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，证明当 $f'_+(a)\cdot f'_-(b)<0$ 时，存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=0$.

例 6.8 设 $a>b>0, n>1$，证明：$nb^{n-1}(a-b)<a^n-b^n<na^{n-1}(a-b)$.

例 6.9 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，证明：至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $f(1)=3\xi^2 f(\xi)+\xi^3 f'(\xi)$.

例 6.10 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0$，$f(1)=1$，证明存在不同的 $\xi_1,\xi_2\in(0,1)$，使得 $\dfrac{1}{f'(\xi_1)}+\dfrac{1}{f'(\xi_2)}=2$.

例 6.11 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，$0<a<b$，证明：至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(b)-f(a)=\xi\ln\dfrac{b}{a}f'(\xi)$.

例 6.12 设 $f(x)$在区间$[-a,a](a>0)$上具有二阶连续导数，$f(0)=0$.

(1)写出 $f(x)$的带拉格朗日余项的一阶麦克劳林公式；

(2) 证明：存在 $\eta\in[-a,a]$，使得 $a^3 f''(\eta)=3\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x$.

习题

6.1 设在$[0,1]$上 $f''(x)>0$,则 $f'(0)$,$f'(1)$,$f(1)-f(0)$的大小顺序为(　　).

(A)$f'(1)>f'(0)>f(1)-f(0)$　　(B)$f'(1)>f(1)-f(0)>f'(0)$

(C)$f(1)-f(0)>f'(1)>f'(0)$　　(D)$f(1)-f(0)>f'(0)>f'(1)$

6.2 设 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上连续，在 $(0,3)$ 内可导，且 $f(0)+f(1)+f(2)=3$，$f(3)=1$. 证明必存在 $\xi\in(0,3)$，使得 $f'(\xi)=0$.

6.3 设 $f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，且 $f(1)=k\int_0^{\frac{1}{k}} x\mathrm{e}^{1-x}f(x)\mathrm{d}x(k>1)$. 证明至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=(1-\xi^{-1})f(\xi)$.

6.4 设函数 $f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内二阶可导，过点 $A(0,f(0))$与 $B(1,f(1))$的直线与曲线 $y=f(x)$相交于点 $C(c,f(c))$，其中 $0<c<1$，证明存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f''(\xi)=0$.

6.5 （**导数介值定理**）设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，若 $f'_+(a)\neq f'_-(b)$，证明对于任意的介于 $f'_+(a)$ 与 $f'_-(b)$ 之间的 μ，存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=\mu$.

6.6 已知 $f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，且 $f(0)=0, f(1)=1$. 证明：

(1)存在$\xi\in(0,1)$，使得 $f(\xi)=1-\xi$；

(2)存在 $\eta,\tau\in(0,1)$，$\eta\neq\tau$，使得 $f'(\eta)f'(\tau)=1$.

6.7 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[-1,1]$ 上具有三阶连续导数，且 $f(-1)=0, f(1)=1, f'(0)=0$，**证明：**在开区间 $(-1,1)$ 内至少存在一点 ξ，使 $f'''(\xi)=3$.