例 9.1 求由曲线 $y=\sin x$,$y=\cos x$ 及直线 $x=0$,$x=\frac{\pi}{2}$所围平面图形的面积.

例 9.2 求由摆线$\begin{cases}x=a(t-\sin t),\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$$(a>0)$的一拱(见图 9-3)与 x 轴所围平面图形的面积.

解 当 $t=0,2\pi$ 时，$y=0$. 故当 t 由 0 变到 2π 时，曲线正好成一拱. 所以

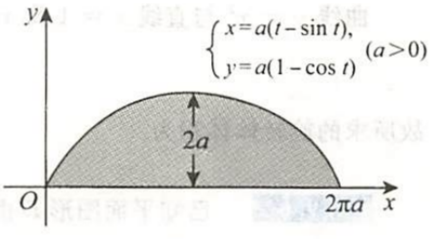

图 9-3

例 9.3 求心形线 $r=a(1+\cos\theta)(a>0)$ 所围平面图形的面积.

例 9.4 求伯努利双纽线 $r^2 = a^2\cos 2\theta$ 围成的图形面积.

例 9.5 设平面图形由曲线 $y=x^2$ 与直线 $x=1$ 及 x 轴围成,求此平面图形绕 x 轴旋转一周所得的旋转体体积.

例 9.6　已知平面图形 D 由椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 围成，求 D 绕 x 轴旋转一周所得的旋转体（旋转椭球体）体积.

例 9.7 曲线 $y=(x-1)(x-2)$ 和 x 轴围成一平面图形，求此平面图形绕 y 轴旋转一周所成的旋转体的体积.

例 9.8 计算由摆线$\begin{cases}x=a(t-\sin t),\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$$(a>0)$的一拱与 x 轴所围平面图形分别绕 x 轴及 y 轴旋转一周所得旋转体的体积.

例 9.9 过坐标原点作曲线 $y=\mathrm{e}^x$ 的切线，该切线与曲线 $y=\mathrm{e}^x$ 以及 x 轴围成的向 x 轴负向无限伸展的平面图形记为 D. 求

(1) D 的面积 A；

(2) D 绕直线 $x=1$ 旋转一周所成的旋转体的体积 V.

例 9.10 函数 $y=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ 在 $\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$ 上的平均值为( ).

(A) $2+\sqrt{3}$ (B) $2+\sqrt{2}$ (C) $2-\sqrt{2}$ (D) $2-\sqrt{3}$

习题

9.1 已知曲线 $y=a\sqrt{x}(a>0)$ 与曲线 $y=\ln\sqrt{x}$ 在点 (x_0,y_0) 处有公共切线，求：

(1)常数 a 及切点 (x_0,y_0)；

(2)两曲线与 x 轴围成的平面图形的面积 S.

9.2 设曲线 $y=x^2-2x(1\leqslant x\leqslant 3)$，$y=0$，$x=1$，$x=3$ 围成一平面图形 A，求：

(1)A 的面积 S；

(2)该平面图形绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积 V.

9.3 已知一抛物线经过 x 轴上两点 $A(1,0)$,$B(3,0)$.

(1)证明两坐标轴与该抛物线所围图形的面积等于 x 轴与该抛物线所围图形的面积;

(2)计算(1)中两个平面图形绕 x 轴旋转一周所得的两个旋转体的体积之比.

9.4 求圆域 $x^2+(y-b)^2\leqslant k^2(0<k<b)$ 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积 V.

9.5 设 D_1 是由抛物线 $y=2x^2$ 和直线 $x=a,x=2$ 及 $y=0$ 所围成的平面区域；D_2 是由抛物线 $y=2x^2$ 和直线 $y=0,x=a$ 所围成的平面区域，其中 $0<a<2$.

(1)求 D_1 绕 x 轴旋转一周而成的旋转体体积 V_1，D_2 绕 y 轴旋转一周而成的旋转体体积 V_2；

(2)问当 a 为何值时，V_1+V_2 取得最大值？并求此最大值.

9.6 设直线 $y=ax$ 与抛物线 $y=x^2$ 所围成图形的面积为 S_1，它们与直线 $x=1$ 所围成图形的面积为 S_2，并且 $a<1$.

(1)求 a 的值，使 S_1+S_2 达到最小，并求出最小值；

(2)求该最小值所对应的平面图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.