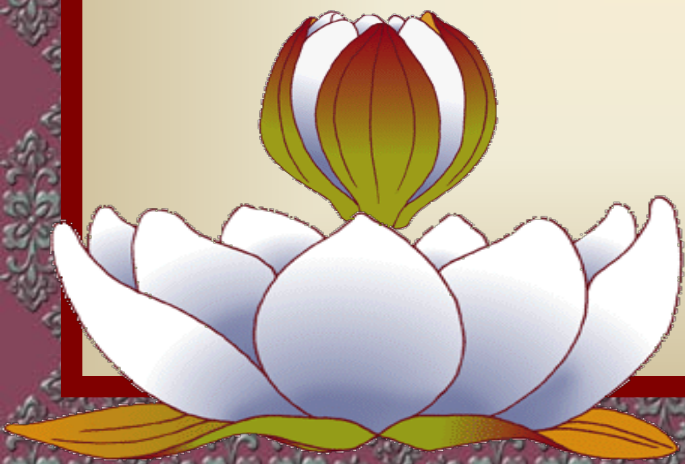


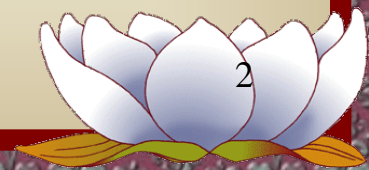
通信原理

第9章 数字信号最佳接收



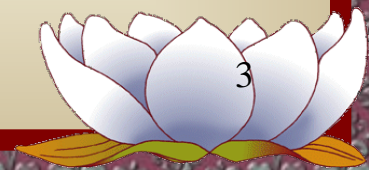
什么是最佳接收？

- 造成数字信号失真的主要原因是码间串扰和信道噪声引起的误码。最佳接收研究在无码间串扰条件下如何使误码率最小。
 - 数字信号的最佳接收，是包括高频解调(基带系统无)、信号检测、估值和判决的总的环节。
- 最佳接收的核心问题：
 - 1) 最佳接收理论：
 - 即采用何种检测与判决方法或设计，能最好地恢复被噪声和多径干扰恶化了的信号，尽可能地降低误码率；
 - 2) 评价各种调制制度，计算采用最佳检测时不同调制制度下的误码率。

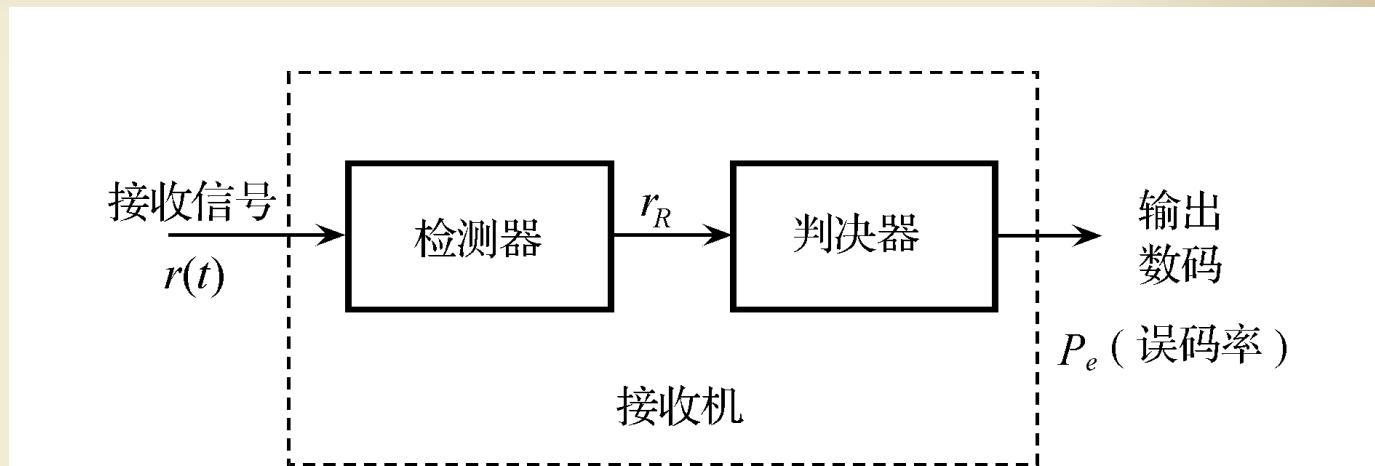


本章讨论的主要内容

- 本章在假定信道是加性高斯白噪声信道的条件下讨论数字信号的最佳接收。主要内容：
 - 最佳接收的基本理论
 - 最佳检测：相关检测、匹配滤波
 - 信号的判决准则
 - 对无记忆的确知信号的最佳接收机
 - 最佳接收下的误码率分析
 - 无记忆、随机相位信号的最佳接收
 - 基带最佳传输系统
 - 数字信号的性能比较



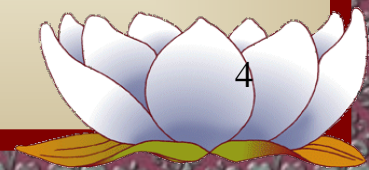
接收机模型



$$r(t) = s_m(t) + n(t)$$

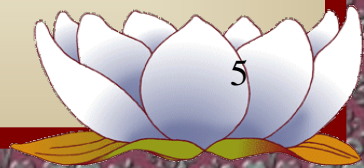
$$N(f) = n_0 / 2$$

- 信道：加性高斯白噪声信道
- 检测器：利用相关检测或匹配滤波将信号从噪声中提取出来。
 - 最佳：输出信噪比最高
- 判决器：根据检测器所提取的信号，依据一定判决准则，判决发送的是哪一个信号。
 - 最佳：使误码率最小



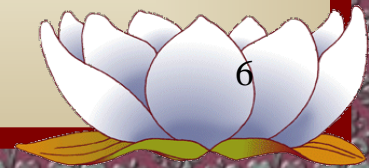
第9章 数字信号的最佳接收

- 9.1 数字接收信号的统计特性
- 9.2 数字信号最佳接收的判决准则
- 9.3 确知信号的最佳接收机—相关接收
- 9.4 确知信号最佳接收下的误码率
- 9.8 数字信号的匹配滤波接收
- 9.5 随机相位信号的最佳接收
- 9.6 起伏信号的最佳接收
- 9.7 实际接收机和最佳接收机的性能比较
- 9.9 最佳基带传输系统



9. 1 数字接收信号的统计特性

- 假设信道是高斯白噪声加性信道。
 - 接收信号: $r(t) = s(t) + n(t)$
 - 噪声 $n(t)$ 是均值为0的高斯白噪声, 其单边功率谱密度为 n_0 ;
 - 设信号 $s(t)$ 频带为: $B = f_H - f_L$, 即最高频率为 f_H 。
- 将接收信号用其抽样值表示。
 - 根据低通信号抽样定理, 以 $2f_H$ 的抽样速率进行抽样, 信号 $s(t)$ 可无失真恢复。
 - 在一个码元持续时间 T_s 内以 $2f_H$ 的速率抽样, 共得到 k 个抽样值:
$$k = 2f_H T_s$$
 - 此时噪声为带限高斯白噪声。高斯噪声通过带限线性系统后仍为高斯分布。其均值为0, 单边功率谱密度为 n_0 , 且各抽样值之间是互不相关、互相独立的。



- 每个噪声抽样值都是正态分布的随机变量，其一维概率密度为

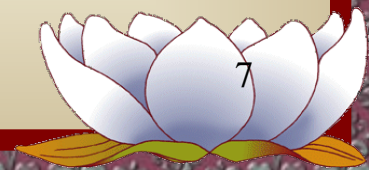
$$f(n_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \exp\left(-\frac{n_i^2}{2\sigma_n^2}\right), i=1,2,\dots,k$$

- 式中, σ_n — 噪声的标准偏差;

σ_n^2 — 噪声的方差, 即噪声平均功率;

- 各噪声抽样值之间是互不相关、互相独立的。则噪声的 k 个抽样值的 k 维联合概率密度函数为

$$f_k(n_1, n_2, \dots, n_k) = f(n_1)f(n_2)\cdots f(n_k) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma_n)^k} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_n^2} \sum_{i=1}^k n_i^2\right)$$



$$f_k(n_1, n_2, \dots, n_k) = f(n_1)f(n_2) \cdots f(n_k) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma_n)^k} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_n^2} \sum_{i=1}^k n_i^2\right)$$

- 当 k 很大时，有：

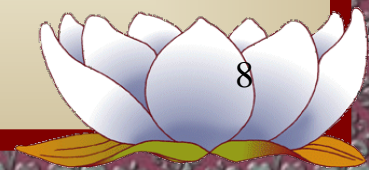
$$\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k n_i^2 = \frac{1}{T_s} \int_0^{T_s} n^2(t) dt$$

则**噪声的联合概率密度函数**可以改写为：

$$f(\mathbf{n}) = f_k(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma_n)^k} \exp\left[-\frac{1}{n_0} \int_0^{T_s} n^2(t) dt\right]$$

式中 $\sigma_n^2 = n_0 f_H$ $k = 2f_H T_s$

$\mathbf{n} = (n_1, n_2, \dots, n_k)$ 是 k 维矢量，表示一个码元内噪声的 k 个抽样值，它可以看作是 k 维空间中的一个点。

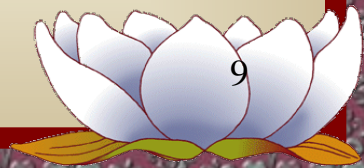


- 接收信号: $r(t) = s(t) + n(t)$

- 对于确定的某一发送码元信号 $s(t) = s_j(t)$, 接收电压 $r(t)$ 的随机性将完全由噪声决定, 它仍服从高斯分布, 其方差仍为 σ_n^2 , 但是均值变为 $s_j(t)$ 。
- 若通信系统传输的是 M 进制码元, 即可能发送 $s_1, s_2, \dots, s_j, \dots, s_M$ 之一, 则当发送码元是 s_i 时, 接收信号 $r(t)$ 的 k 维联合概率密度函数为

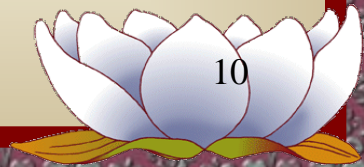
$$f_j(\mathbf{r}) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma_n)^k} \exp\left\{-\frac{1}{n_0} \int_0^{T_s} [r(t) - s_j(t)]^2 dt\right\}, j = 1, 2, \dots, M$$

$\mathbf{r} = \mathbf{s} + \mathbf{n}$ 是 k 维矢量, 表示一个码元内接收信号的 k 个抽样值。
 \mathbf{s} 也是 k 维矢量, 表示一个码元内码元信号的 k 个抽样值。



第9章 数字信号的最佳接收

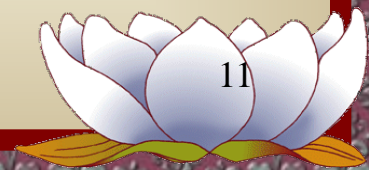
- 9.1 数字接收信号的统计特性
- 9.2 数字信号最佳接收的判决准则
- 9.3 确知信号的最佳接收机—相关接收
- 9.4 确知信号最佳接收下的误码率
- 9.8 数字信号的匹配滤波接收
- 9.5 随机相位信号的最佳接收
- 9.6 起伏信号的最佳接收
- 9.7 实际接收机和最佳接收机的性能比较
- 9.9 最佳基带传输系统



9.2 数字信号最佳接收的判决准则

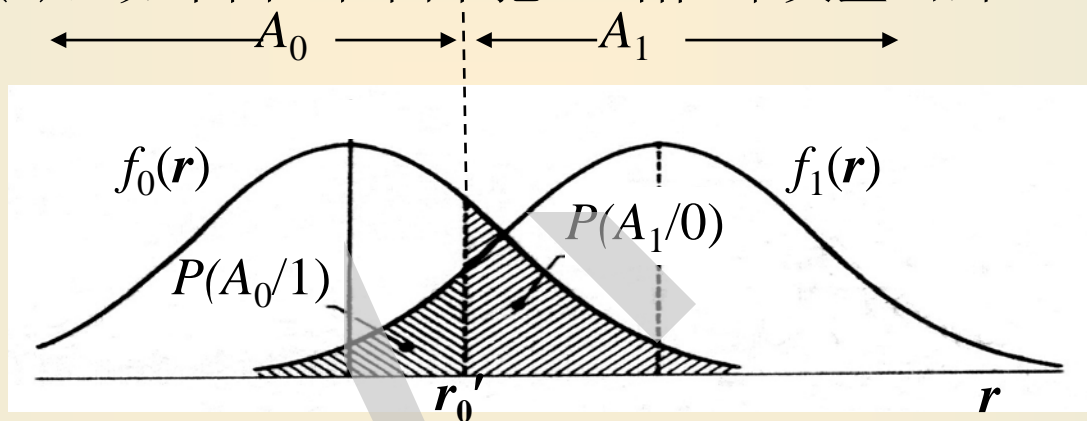
- 前提：不考虑失真的影响，只讨论如何使高斯噪声引起的错误概率最小。本节针对二进制数字通信系统进行讨论。
- “最佳”判决准则：使错误概率最小
- 二进制数字系统的错误概率
 - 设发送“1”的概率为 $P(1)$ ，发送码元“0”的概率为 $P(0)$ 。
 - 错误转移概率：
 - $P_{e1} = P(0/1)$ — 发送“1”时，错误判决为“0”的条件概率；
 - $P_{e0} = P(1/0)$ — 发送“0”时，错误判决为“1”的条件概率；
 - 总误码率 P_e （错误概率）：

$$P_e = P(1)P_{e1} + P(0)P_{e0}$$



由上一节知，在一个码元持续时间内的接收信号可以用一个 k 维矢量表示。接收设备对接收矢量作判决，判定它是发送码元“0”，还是“1”。

发送码元“0”或“1”时接收矢量的两个联合概率密度函数为 $f_0(\mathbf{r})$ 和 $f_1(\mathbf{r})$ ，如下图（在图中把 \mathbf{r} 当作1维矢量画出。）：



可以将此空间划分为两个区域 A_0 和 A_1 ，其边界是 r_0' ，并将**判决规则**规定为：

若接收矢量落在区域 A_0 内，则判为发送码元是“0”；

若接收矢量落在区域 A_1 内，则判为发送码元是“1”。

- 按此判决规则，总误码率可以写为

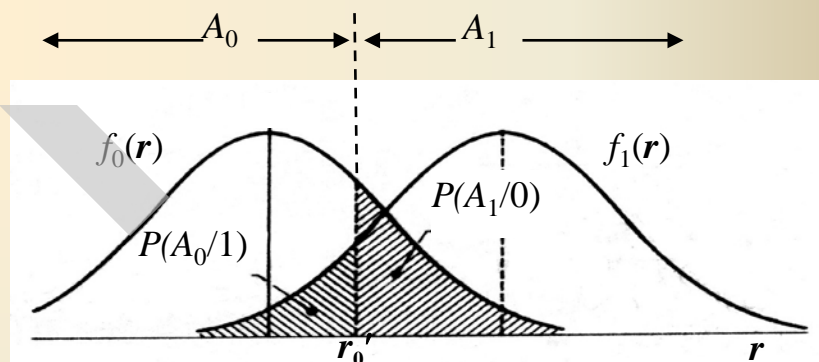
$$P_e = P(1)P(A_0/1) + P(0)P(A_1/0)$$

式中， $P(A_0/1)$ 表示发送“1”时，矢量 \mathbf{r} 落在区域 A_0 的条件概率
 $P(A_1/0)$ 表示发送“0”时，矢量 \mathbf{r} 落在区域 A_1 的条件概率

- 这两个条件概率可以写为：

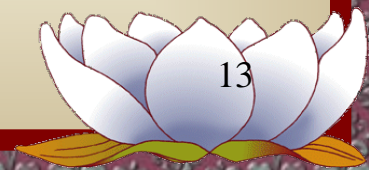
$$P(A_0/1) = \int_{A_0} f_1(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \int_{-\infty}^{r_0'} f_1(\mathbf{r}) d\mathbf{r}$$

$$P(A_1/0) = \int_{A_1} f_0(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \int_{r_0'}^{\infty} f_0(\mathbf{r}) d\mathbf{r}$$



- 则总误码率为：

$$P_e = P(1) \int_{-\infty}^{r_0'} f_1(\mathbf{r}) d\mathbf{r} + P(0) \int_{r_0'}^{\infty} f_0(\mathbf{r}) d\mathbf{r}$$



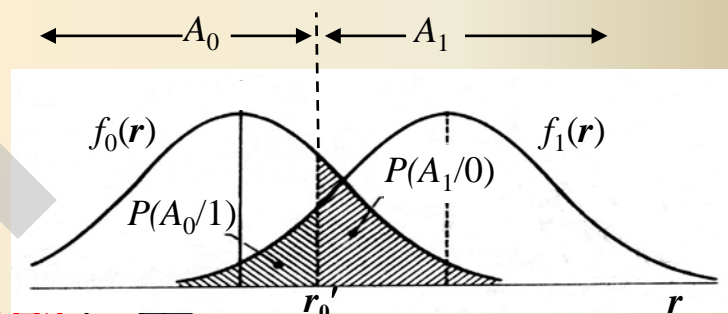
最佳判决准则—最小错误概率准则（最大后验概率准则）

- 总误码率为：
$$P_e = P(1) \int_{-\infty}^{r_0'} f_1(r) dr + P(0) \int_{r_0'}^{\infty} f_0(r) dr$$
 - 为了求出使 P_e 最小的判决分界点 r_0' ，将上式对 r_0' 求导，并令导函数等于0

$$\frac{\partial P_e}{\partial r_0'} = P(1) f_1(r_0') - P(0) f_0(r_0') = 0$$

- ✓ 得出最佳分界点 r_0 的条件： $P(1) f_1(r_0) - P(0) f_0(r_0) = 0$

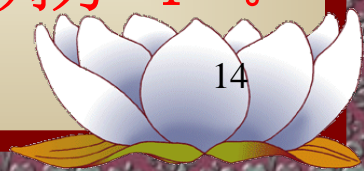
- ✓ 即
$$\frac{P(1)}{P(0)} = \frac{f_0(r_0)}{f_1(r_0)}$$



- 则按照**最佳判决准则**，**判决规则**如下：

- ✓ 若接收矢量 r 落在区域 A_0 ，即：
$$\frac{f_0(r)}{f_1(r)} > \frac{P(1)}{P(0)}$$
 则判为“0”；

- ✓ 若接收矢量 r 落在区域 A_1 ，即：
$$\frac{f_0(r)}{f_1(r)} < \frac{P(1)}{P(0)}$$
 则判为“1”。



最大似然判决准则

$$P(1)f_1(\mathbf{r}_0) - P(0)f_0(\mathbf{r}_0) = 0$$

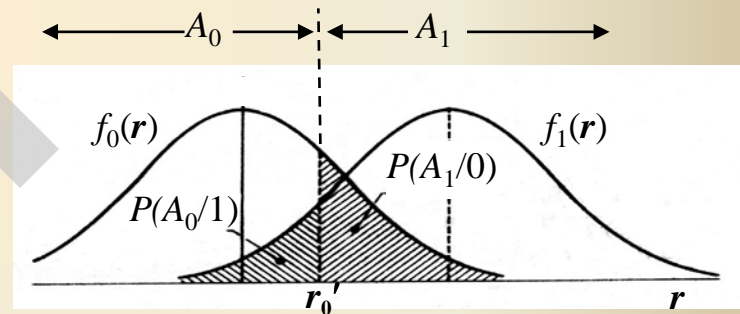
当先验概率相等时，即 $P(1) = P(0)$ 时，有：

$$f_0(\mathbf{r}_0) = f_1(\mathbf{r}_0)$$

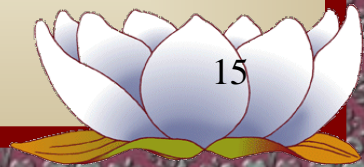
所以最佳分界点位于图中两条曲线交点处的 \mathbf{r} 值上。

此时判决准则简化为：

$$\begin{cases} \text{若 } f_0(\mathbf{r}) > f_1(\mathbf{r}), \text{ 则判为 "0"} \\ \text{若 } f_0(\mathbf{r}) < f_1(\mathbf{r}), \text{ 则判为 "1"} \end{cases}$$



这个判决准则称为**最大似然准则**。



对于二进制最佳接收准则的分析，可以推广到多进制信号的情况。

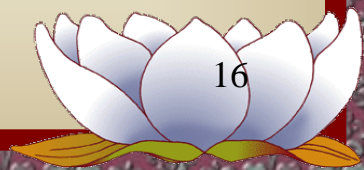
设在一个 M 进制数字通信系统中，可能的发送码元是 $s_1, s_2, \dots, s_i, \dots, s_M$ 之一，当发送码元是 s_i 时，接收电压的 k 维联合概率密度函数为

$$f_j(\mathbf{r}) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma_n)^k} \exp\left\{-\frac{1}{n_0} \int_0^{T_s} [r(t) - s_j(t)]^2 dt\right\}, j=1, 2, \dots, M$$

若发送码元的先验概率是等概率分布的，且各码元信号的能量相等。则依据**最大似然准则**：

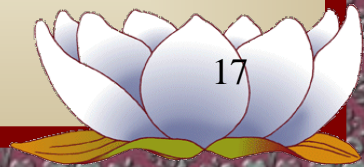
若 $f_i(\mathbf{r}) > f_j(\mathbf{r}), j \neq i, j=1, 2, \dots, M$

则判为 $s_i(t)$ 。



第9章 数字信号的最佳接收

- 9.1 数字接收信号的统计特性
- 9.2 数字信号最佳接收的判决准则
- 9.3 确知信号的最佳接收机—相关接收
- 9.4 确知信号最佳接收下的误码率
- 9.8 数字信号的匹配滤波接收
- 9.5 随机相位信号的最佳接收
- 9.6 起伏信号的最佳接收
- 9.7 实际接收机和最佳接收机的性能比较
- 9.9 最佳基带传输系统



9.3 确知信号的最佳接收—相关接收

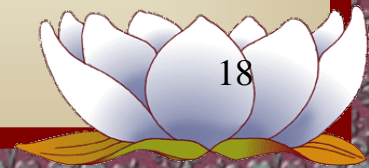
- **确知信号：**指发送的各种码元信号的幅度、相位、频率等信息对接收端都是确定的、可以预知的。
- 本节讨论二元码的最佳接收机，并设两个码元信号的能量相等。
- **二元码接收信号的概率密度**

- 当发送码元为“0”，波形为 $s_0(t)$ ，有

$$f_0(\mathbf{r}) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma_n)^k} \exp\left\{-\frac{1}{n_0} \int_0^{T_s} [r(t) - s_0(t)]^2 dt\right\}$$

- 当发送码元为“1”，波形为 $s_1(t)$ ，有

$$f_1(\mathbf{r}) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma_n)^k} \exp\left\{-\frac{1}{n_0} \int_0^{T_s} [r(t) - s_1(t)]^2 dt\right\}$$



最佳判决门限为:

$$P(1) \exp \left\{ -\frac{1}{n_0} \int_0^{T_s} [r_0(t) - s_1(t)]^2 dt \right\} = P(0) \exp \left\{ -\frac{1}{n_0} \int_0^{T_s} [r_0(t) - s_0(t)]^2 dt \right\}$$

将上两式的两端分别取对数, 得到:

$$n_0 \ln P(1) - \int_0^{T_s} [r_0(t) - s_1(t)]^2 dt = n_0 \ln P(0) - \int_0^{T_s} [r_0(t) - s_0(t)]^2 dt$$

已经假设两个码元的能量相同, 即

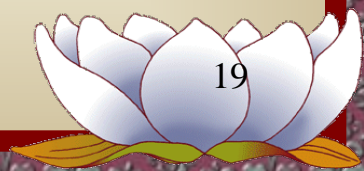
$$\int_0^{T_s} s_0^2(t) dt = \int_0^{T_s} s_1^2(t) dt$$

并令

$$W_0 = \frac{n_0}{2} \ln P(0) \quad W_1 = \frac{n_0}{2} \ln P(1)$$

则最佳判决门限简化为

$$W_1 + \int_0^{T_s} r_0(t) s_1(t) dt = W_0 + \int_0^{T_s} r_0(t) s_0(t) dt$$

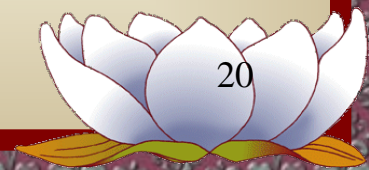


根据最小错误概率准则，可得到**判决规则**：

若 $W_1 + \int_0^{T_s} r(t)s_1(t)dt < W_0 + \int_0^{T_s} r(t)s_0(t)dt$
则判为发送码元是 $s_0(t)$ ；

若 $W_1 + \int_0^{T_s} r(t)s_1(t)dt > W_0 + \int_0^{T_s} r(t)s_0(t)dt$
则判为发送码元是 $s_1(t)$ 。

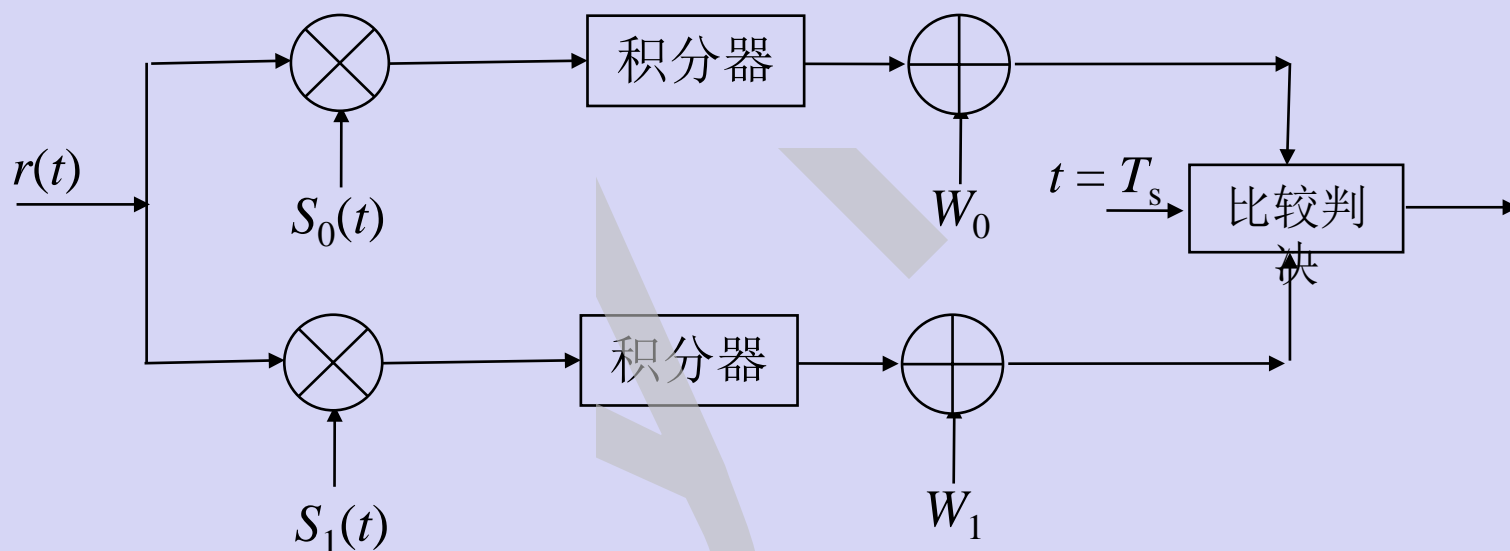
式中 $W_0 = \frac{n_0}{2} \ln P(0)$ $W_1 = \frac{n_0}{2} \ln P(1)$
 W_0 和 W_1 可以看作是由先验概率决定的加权因子。



最小错误概率准则下的最佳接收机

按照下式画出的最佳接收机原理方框图如下：

$$W_1 + \int_0^{T_s} r(t)s_1(t)dt < W_0 + \int_0^{T_s} r(t)s_0(t)dt$$

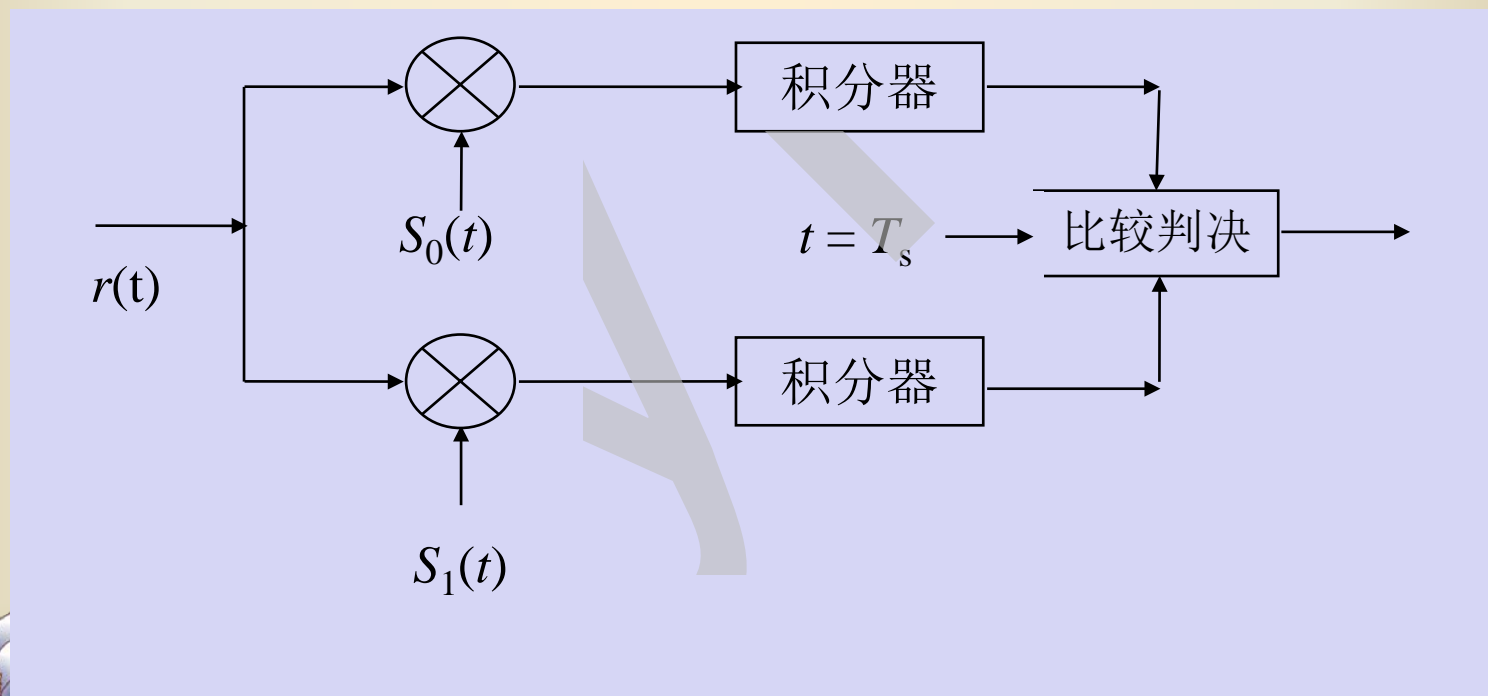


最大似然准则下的最佳接收机

若二元码的先验概率相等，则判决式简化为

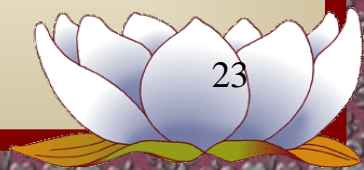
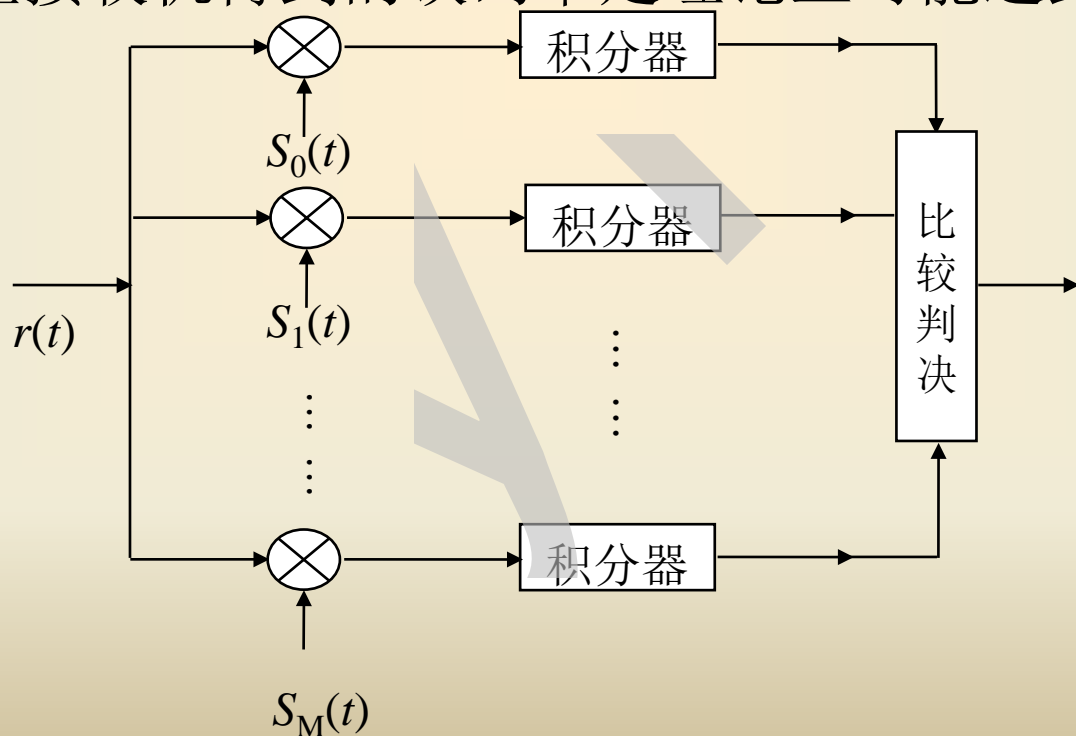
$$\int_0^{T_s} r(t)s_1(t)dt < \int_0^{T_s} r(t)s_0(t) dt$$

此时得到最大似然准则下的最佳接收机的原理方框图



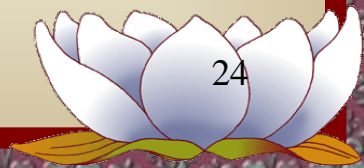
M元码在最大似然准则下的最佳接收机

- 若M元码等概率分布，且各码元信号能量相等，则不难推出M 进制通信系统的最佳接收机结构
- 由于最佳接收机的核心是相关运算，所以常称最佳接收为相关接收。
- 由最佳接收机得到的误码率是理论上可能达到的最小值。



第9章 数字信号的最佳接收

- 9.1 数字接收信号的统计特性
- 9.2 数字信号最佳接收的判决准则
- 9.3 确知信号的最佳接收机——相关接收
- 9.4 确知信号最佳接收下的误码率
- 9.8 数字信号的匹配滤波接收
- 9.5 随机相位信号的最佳接收
- 9.6 起伏信号的最佳接收
- 9.7 实际接收机和最佳接收机的性能比较
- 9.9 最佳基带传输系统

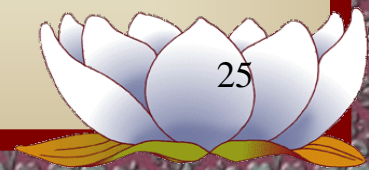


9.4 确知数字信号最佳接收的误码率

- 本节主要讨论二元码在最佳接收下的误码率，假设二元码的先验概率相等，两个码元信号能量相等。
- 依据最小错误概率准则的最佳接收机中，若

$$n_0 \ln \frac{1}{P(1)} + \int_0^{T_s} [r(t) - s_1(t)]^2 dt > n_0 \ln \frac{1}{P(0)} + \int_0^{T_s} [r(t) - s_0(t)]^2 dt$$

则判为发送码元是 $s_0(t)$ 。此时若实际发送的码元为 $s_1(t)$ ，则将发生错误判决，发生错误判决的条件概率为 $P(0/1)$ 。



$$P(0/1) = P(\xi < a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\xi} \int_{-\infty}^a e^{-\frac{x^2}{2\sigma_\xi^2}} dx$$

式中

$$a = \frac{n_0}{2} \ln \frac{P(0)}{P(1)} - \frac{1}{2} \int_0^{T_s} [s_1(t) - s_0(t)]^2 dt$$

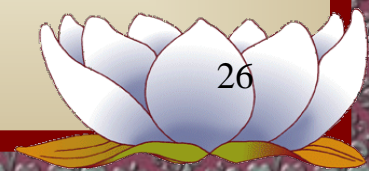
$$\sigma_\xi^2 = D(\xi) = \frac{n_0}{2} \int_0^{T_s} [s_1(t) - s_0(t)]^2 dt$$

同理，可以求出发送 $s_0(t)$ 时，判决为收到 $s_1(t)$ 的条件错误概率

$$P(1/0) = P(\xi < b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\xi} \int_{-\infty}^b e^{-\frac{x^2}{2\sigma_\xi^2}} dx$$

式中

$$b = \frac{n_0}{2} \ln \frac{P(1)}{P(0)} - \frac{1}{2} \int_0^{T_s} [s_0(t) - s_1(t)]^2 dt$$



- 则总误码率为

$$P_e = P(1)P(0/1) + P(0)P(1/0)$$

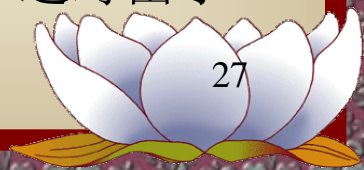
$$= P(1) \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\xi} \int_{-\infty}^a e^{-\frac{x^2}{2\sigma_\xi^2}} dx \right] + P(0) \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\xi} \int_{-\infty}^b e^{-\frac{x^2}{2\sigma_\xi^2}} dx \right]$$

- 当 $P(0) = P(1)$ 时，有 $a = b$ 。上式可以化简为

$$P_e = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\xi} \int_{-\infty}^c e^{-\frac{x^2}{2\sigma_\xi^2}} dx$$

$$c = -\frac{1}{2} \int_0^{T_s} [s_0(t) - s_1(t)]^2 dt$$

- 此时，对于给定的噪声功率 σ_ξ^2 ，误码率仅和两种码元波形之差 $[s_0(t) - s_1(t)]$ 的能量有关，而与波形本身无关。差别越大， c 值越小，误码率 P_e 也越小。
- 计算表明，先验概率不等时的误码率将略小于先验概率相等时的误码率。即先验概率相等是误码率最坏的情况。
 - 两个极端情况：当 $P(0) = 0$ 时， $a = -\infty$ ， $b = \infty$ ，则 $P_e = 0$ 。同理，若 $P(1) = 0$ ，总误码率也为零。在物理意义上，这时由于发送码元只有一种可能性，因此不会发生错误。



码元信号的相关系数 ρ

(正交性概念参见8.2节)

- 两个码元信号间的相关系数 ρ 定义如下:

$$\rho = \frac{\int_0^{T_s} s_0(t)s_1(t)dt}{\sqrt{\left[\int_0^{T_s} s_0^2(t)dt\right]\left[\int_0^{T_s} s_1^2(t)dt\right]}} = \frac{\int_0^{T_s} s_0(t)s_1(t)dt}{\sqrt{E_0E_1}}$$

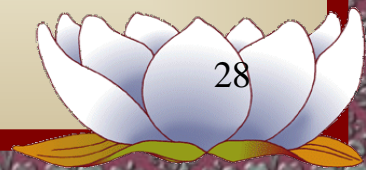
式中 E_0 、 E_1 为信号码元的能量。

$$E_0 = \int_0^{T_s} s_0^2(t)dt \quad E_1 = \int_0^{T_s} s_1^2(t)dt$$

当 $s_0(t) = s_1(t)$ 时, $\rho=1$, 为最大值;

当 $s_0(t) = -s_1(t)$ 时, $\rho=-1$, 为最小值。

所以 ρ 的取值范围为: $-1 \leq \rho \leq +1$ 。



二元等能量信号的误码率计算

当两码元的能量相等时，令 $E_0 = E_1 = E_b$ ，则有

$$\rho = \frac{\int_0^{T_s} s_0(t)s_1(t)dt}{E_b}$$

并且有

$$c = -\frac{1}{2} \int_0^{T_s} [s_0(t) - s_1(t)]^2 dt = -E_b(1 - \rho)$$

$$\sigma_\xi^2 = \frac{n_0}{2} \int_0^{T_s} [s_1(t) - s_0(t)]^2 dt = n_0 E_b(1 - \rho)$$

代入误码率公式，得到

$$P_e = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\xi} \int_{-\infty}^c e^{-\frac{x^2}{2\sigma_\xi^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\xi} \int_{-\infty}^{-E_b(1-\rho)} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_\xi^2}} dx$$

对误码率公式作如下的代数变换：

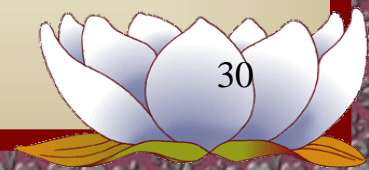
$$\text{令 } z = x / \sqrt{2}\sigma_{\xi} \quad z^2 = x^2 / 2\sigma_{\xi}^2 \quad dz = dx / \sqrt{2}\sigma_{\xi}$$

则有

$$\begin{aligned} P_e &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{-E_b(1-\rho)/\sqrt{2}\sigma_{\xi}} e^{-z^2} dz = \frac{1}{2} \left[\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{E_b(1-\rho)/\sqrt{2}\sigma_{\xi}}^{\infty} e^{-z^2} dz \right] \\ &= \frac{1}{2} \left\{ 1 - \operatorname{erf} \left[\frac{E_b(1-\rho)}{\sqrt{2}\sigma_{\xi}} \right] \right\} = \frac{1}{2} \left[1 - \operatorname{erf} \left(\sqrt{\frac{E_b(1-\rho)}{2n_0}} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left[\sqrt{\frac{E_b(1-\rho)}{2n_0}} \right] \end{aligned}$$

最终得到二元等能量信号的误码率公式：

$$P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left[\sqrt{\frac{E_b(1-\rho)}{2n_0}} \right]$$



$$P_e = \frac{1}{2} \left[1 - \operatorname{erf} \left(\sqrt{\frac{E_b(1-\rho)}{2n_0}} \right) \right] = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left[\sqrt{\frac{E_b(1-\rho)}{2n_0}} \right]$$

式中误差函数 $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-z^2} dz$

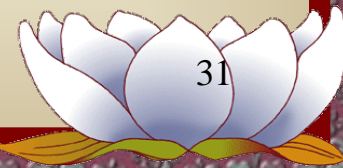
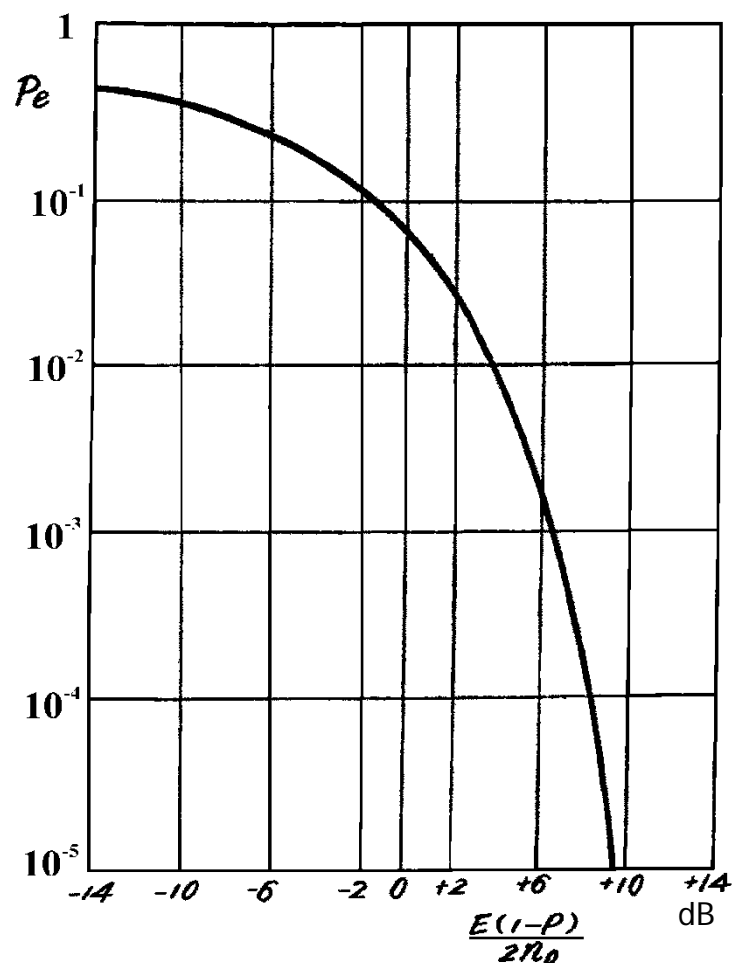
补误差函数 $\operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x)$

E_b — 码元能量;

ρ — 码元相关系数;

n_0 — 噪声功率谱密度。

以上公式给出了理论上二进制等能量数字信号误码率的最佳值。实际通信系统中得到的误码率只可能比它差，不可能超过它。



相关系数对误码率的影响

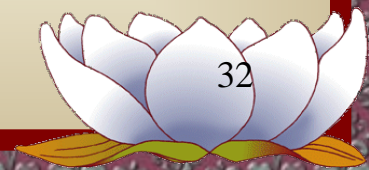
- 当两种码元的波形相同时，相关系数最大，有 $\rho = 1$ 。此时误码率达到最大，为 $P_e = 1/2$ 。
- 当两种码元的波形相反时（例如**2PSK信号**），相关系数最小，有 $\rho = -1$ 。此时误码率最小，为

$$P_e = \frac{1}{2} \left[1 - \operatorname{erf} \left(\sqrt{\frac{E_b}{n_0}} \right) \right] = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{E_b}{n_0}} \right)$$

- 当两种码元正交时， $\rho = 0$ ，误码率等于

$$P_e = \frac{1}{2} \left[1 - \operatorname{erf} \left(\sqrt{\frac{E_b}{2n_0}} \right) \right] = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left[\sqrt{\frac{E_b}{2n_0}} \right]$$

- 例如，**2FSK信号**的相关系数就等于或近似等于零。
- 2FSK信号的性能比2PSK信号的性能差3dB。

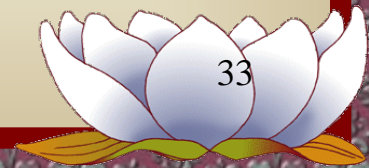


- 单极性的2ASK信号，其一种码元的能量为零，则

$$c = -\frac{1}{2} \int_0^{T_s} [s_0(t)]^2 dt$$

- 误码率为

$$P_e = \frac{1}{2} \left(1 - \operatorname{erf} \sqrt{\frac{E_b}{4n_0}} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{E_b}{4n_0}} \right)$$



M元等能量正交信号的误码率

- 对M进制系统，若不同码元的信号正交，且先验概率相等，能量相等，则其最佳误码率计算结果如下：

$$P_e = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{y + \left(\frac{2E}{n_0}\right)^{1/2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right]^{M-1} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

式中， M — 进制数；

E — M 进制码元能量；

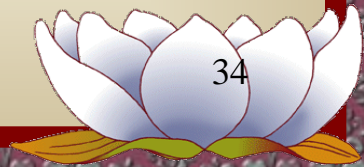
n_0 — 单边噪声功率谱密度。

由于一个 M 进制码元中含有的比特数 k 等于 $\log_2 M$ ，故每个比特的能量等于

$$E_b = E / \log_2 M$$

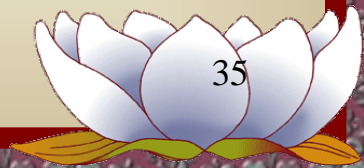
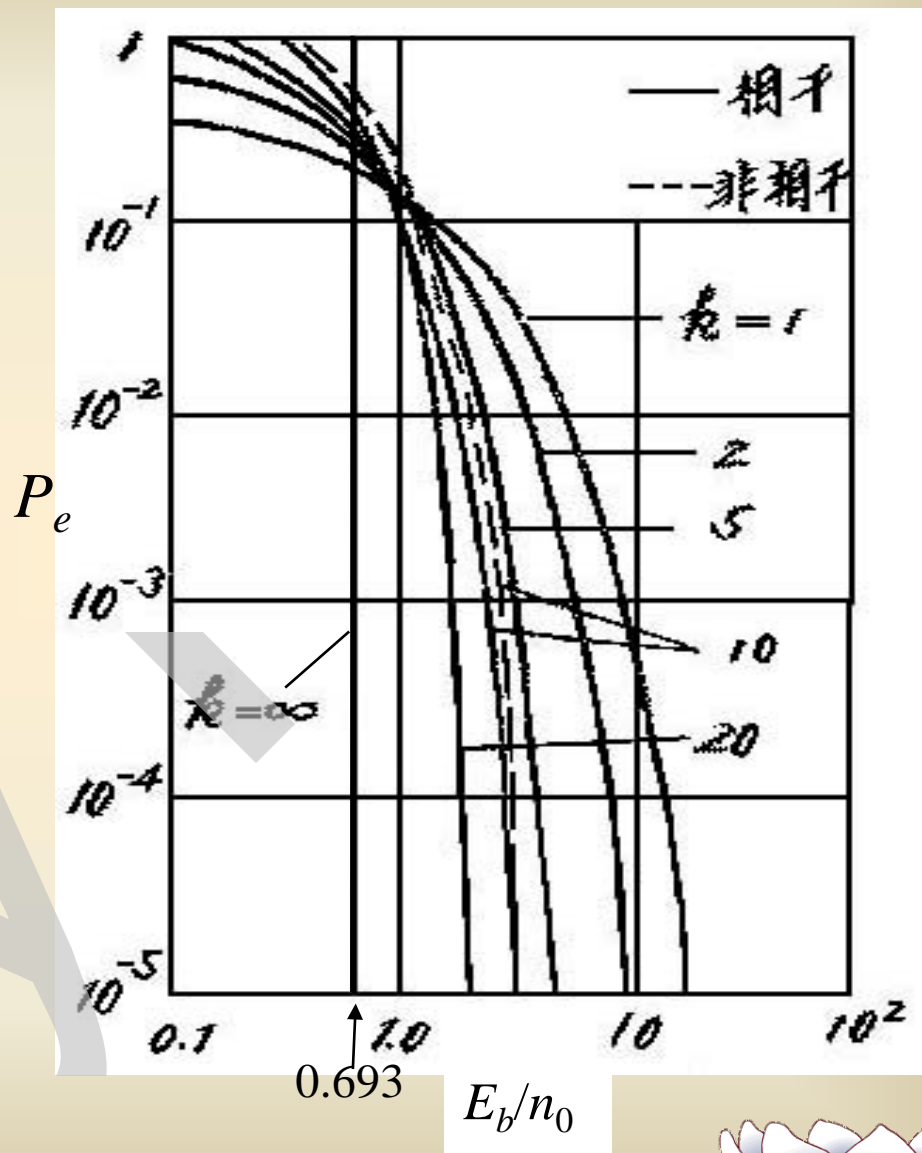
比特信噪比为

$$\frac{E_b}{n_0} = \frac{E}{n_0 \log_2 M} = \frac{E}{n_0 k}$$



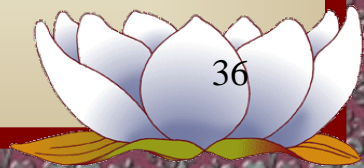
• M元误码率 P_e 与 E_b/n_0 关系曲线如图。

- 对于给定的误码率，当 k 增大时，需要的信噪比 E_b/n_0 减小。
- 当 k 增大到 ∞ 时，误码率曲线变成一条垂直线；这时只要 E_b/n_0 等于0.693 (-1.6 dB)，就能得到无误码的传输。



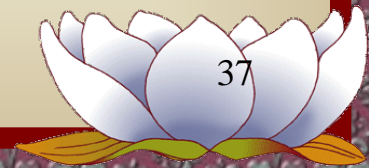
第9章 数字信号的最佳接收

- 9.1 数字接收信号的统计特性
- 9.2 数字信号最佳接收的判决准则
- 9.3 确知信号的最佳接收机—相关接收
- 9.4 确知信号最佳接收下的误码率
- 9.8 数字信号的匹配滤波接收
- 9.5 随机相位信号的最佳接收
- 9.6 起伏信号的最佳接收
- 9.7 实际接收机和最佳接收机的性能比较
- 9.9 最佳基带传输系统



9.8 数字信号的匹配滤波接收

- 对接收信号滤波时，使抽样时刻上输出信噪比最大的线性滤波器是最佳的。
- 可以证明：匹配滤波器是最佳接收滤波器。



一、寻找最佳接收滤波器

- 接收滤波器的输入是信号和噪声之和 $r(t)$ ，为：

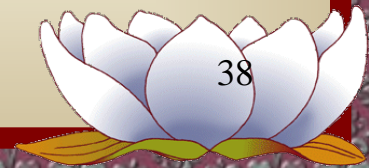
$$r(t) = s(t) + n(t), \quad 0 \leq t \leq T_s$$

- 设信号码元 $s(t)$ 的频谱为 $S(f)$ ，噪声 $n(t)$ 的双边功率谱密度为 $P_n(f) = n_0/2$ 。

- 接收滤波器的传输函数为 $H(f)$ ，冲激响应为 $h(t)$ 。假定滤波器是线性的，则滤波器的输出电压 $y(t)$ 为

$$y(t) = s_o(t) + n_o(t)$$

- 式中 $s_o(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f)S(f)e^{j2\pi ft} df$



• 输出噪声功率

由 $P_Y(f) = H^*(f)H(f)P_R(f) = |H(f)|^2 P_R(f)$

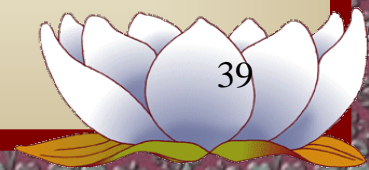
可知，接收滤波器的输出噪声功率 N_o 等于

$$N_o = \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 \cdot \frac{n_0}{2} df = \frac{n_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df$$

• 输出信噪比

- 在抽样时刻 t_0 上，输出信号瞬时功率与噪声平均功率之比为

$$r_0 = \frac{|s_o(t_0)|^2}{N_o} = \frac{\left| \int_{-\infty}^{\infty} H(f)S(f)e^{j2\pi ft_0} df \right|^2}{\frac{n_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df}$$



- 施瓦兹不等式

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_2(x) dx \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f_1(x)|^2 dx \int_{-\infty}^{\infty} |f_2(x)|^2 dx$$

- 上式的等号成立的条件是: $f_1(x) = k f_2^*(x)$

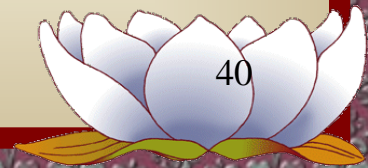
- 令 $f_1(x) = H(f)$, $f_2(x) = S(f) e^{j2\pi f t_0}$

- 利用施瓦兹不等式, 则有

$$r_0 \leq \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 df}{\frac{n_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 df}{\frac{n_0}{2}} = \frac{2E}{n_0}$$

- 式中

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 df$$



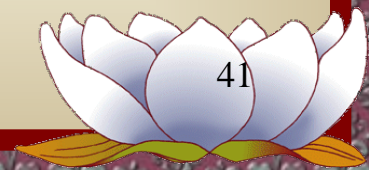
$$r_0 \leq \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 df}{\frac{n_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 df}{\frac{n_0}{2}} = \frac{2E}{n_0}$$

当

$$H(f) = kS^*(f)e^{-j2\pi ft_0}$$

时，上式的等号成立，即得到**最大输出信噪比** $2E/n_0$ 。

上式表明， $H(f)$ 就是我们要找的最佳接收滤波器传输特性。它等于信号码元频谱的复共轭（除了常数因子外）。故称此滤波器为**匹配滤波器**。



二、匹配滤波器的传输特性

- 匹配滤波器可获得最大输出信噪比 $2E/n_0$
- 匹配滤波器的频率响应函数：

$$H(f) = kS^*(f)e^{-j2\pi ft_0}$$

- 匹配滤波器的冲激响应函数：

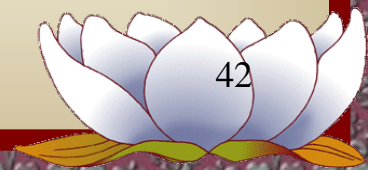
$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f)e^{j2\pi ft} df = \int_{-\infty}^{\infty} kS^*(f)e^{-j2\pi ft_0} e^{j2\pi ft} df$$

$$= k \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} s(\tau)e^{-j2\pi f\tau} d\tau \right]^* e^{-j2\pi f(t_0-t)} df$$

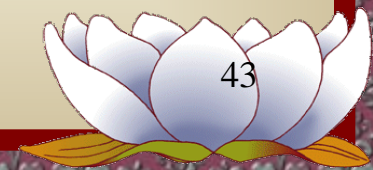
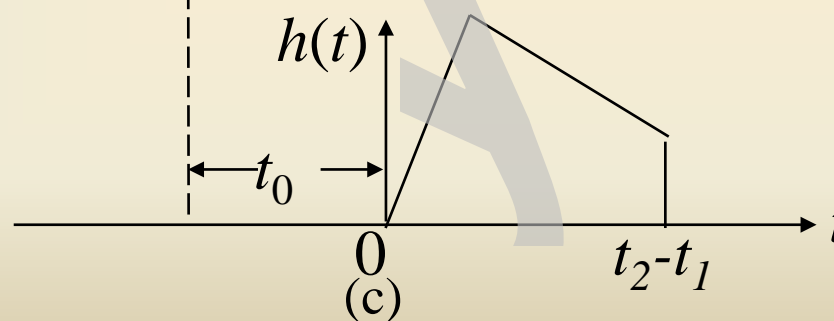
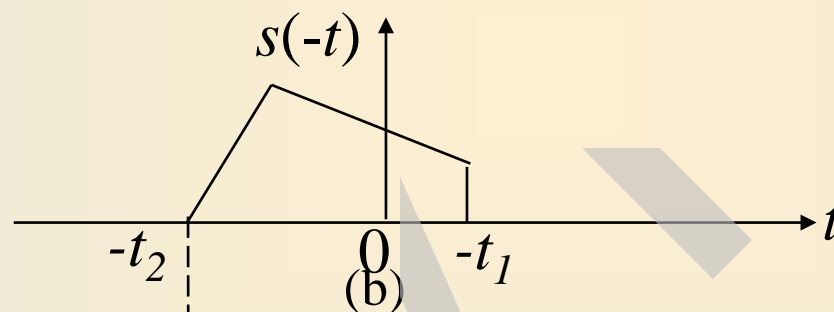
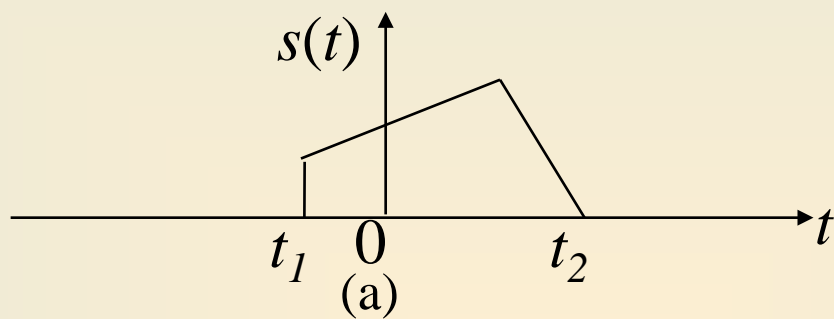
$$= k \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi f(\tau-t_0+t)} df \right] s(\tau) d\tau$$

$$= k \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau)\delta(\tau-t_0+t) d\tau = ks(t_0-t)$$


$$h(t) = ks(t_0-t)$$



- 由信号 $s(t)$ 求取匹配滤波器 $h(t)$ 的图解过程



• 实际的匹配滤波器

- 实际的匹配滤波器应该是物理可实现的，其冲激响应必须符合因果关系，在输入冲激脉冲之前不应该有冲激响应出现，即必须有：

$$h(t) = 0, \quad \text{当 } t < 0$$

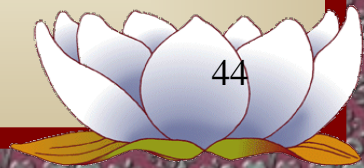
即要求满足条件 $s(t_0 - t) = 0$, 当 $t < 0$

相当于满足条件 $s(t) = 0$, 当 $t > t_0$

- 上式的条件说明，接收滤波器输入端的信号码元 $s(t)$ 在抽样时刻 t_0 之后必须为零，故通常选择在码元末尾抽样，即选 $t_0 = T_s$ 。则匹配滤波器的冲激响应可以写为

$$h(t) = ks(T_s - t)$$

- k 是一个任意常数，与 r_0 的最大值无关；通常取 $k = 1$ 。



三、匹配滤波器与相关检测的等效

- 匹配滤波器可得到最大输出信噪比，是最佳接收滤波器。
- 在 $t=T$ 时匹配滤波器的输出采样值与相关检测器等效
 - 匹配滤波器输出电压的波形 $y(t)$

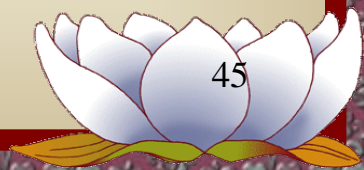
$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} r(u)h(t-u)du = k \int_{t-T_s}^t r(u)s(T_s-t+u)du$$

- 在抽样时刻 T_s ，输出电压等于

$$y(T_s) = k \int_0^{T_s} r(u)s(u)du$$

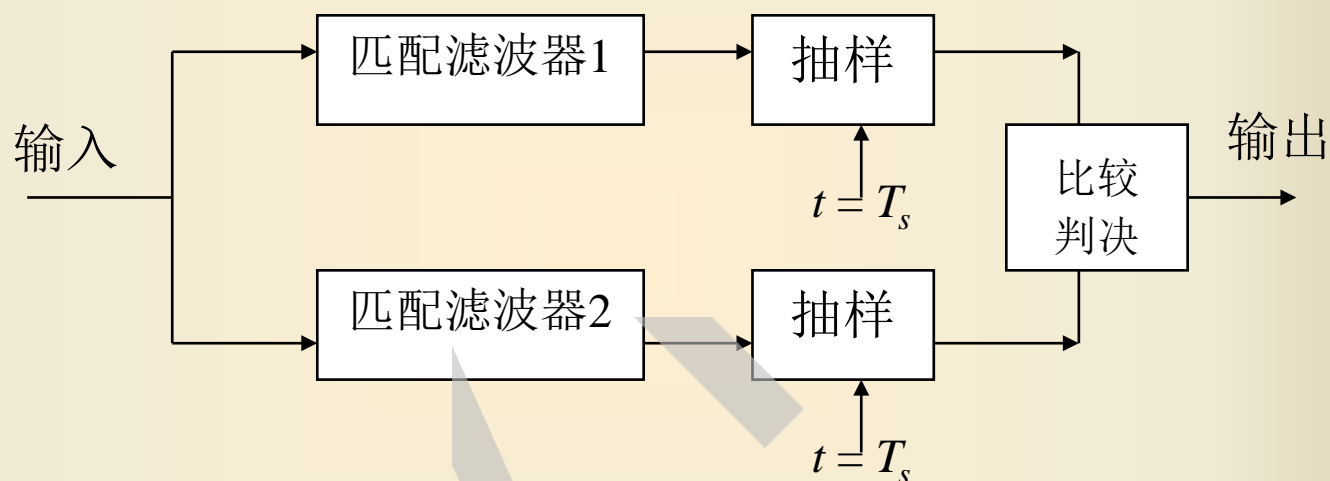
- 可见，在时刻 $t = T_s$ 进行采样，则匹配滤波器的输出 = 相关检测器的输出。

- 采用相关检测的接收机与采用匹配滤波器的接收机等效，都是最佳的。

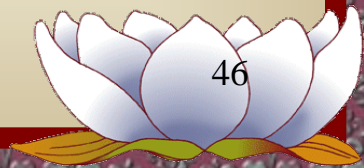


数字信号最佳接收机—匹配滤波器

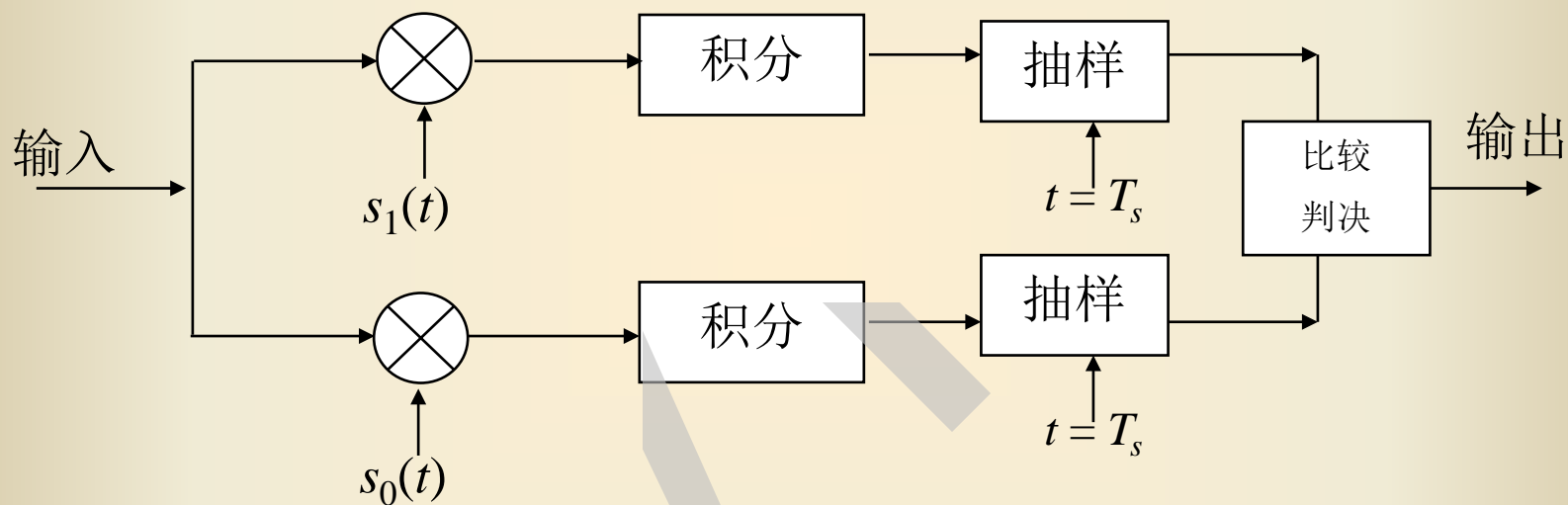
- 对于二进制确知信号，在最大似然准则下使用匹配滤波器构成的接收电路如下图。



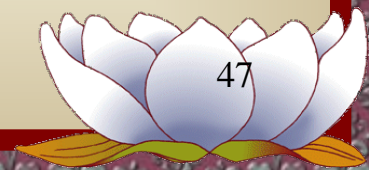
- 两个匹配滤波器分别匹配于两种信号码元。在抽样时刻对抽样值进行比较判决。哪个匹配滤波器的输出抽样值更大，就判决那个为输出。
- 若二进制等能量信号的先验概率相等，则上图为最佳接收机，能给出最小的总误码率。



下图为相关接收法方框图。



匹配滤波法和相关接收法完全等效，都是最佳接收方法。



- 【例10.1】 设接收信号码元 $s(t)$ 的表示式为

$$s(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq T_s \\ 0, & \text{其他}t \end{cases}$$

试求其匹配滤波器的特性和输出信号码元的波形。

【解】 信号波形是一个矩形脉冲，其频谱为

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-j2\pi ft} dt = \frac{1}{j2\pi f} (1 - e^{-j2\pi f T_s})$$

令 $k = 1$ ，由 $H(f) = kS^*(f)e^{-j2\pi f t_0}$

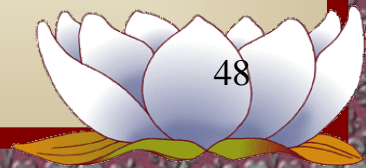
可得其匹配滤波器的传输函数为

$$H(f) = \frac{1}{j2\pi f} (e^{j2\pi f T_s} - 1)e^{-j2\pi f T_s}$$

由 $h(t) = ks(t_0 - t)$

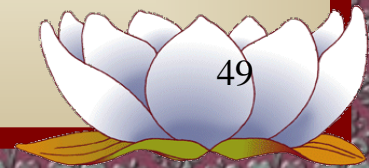
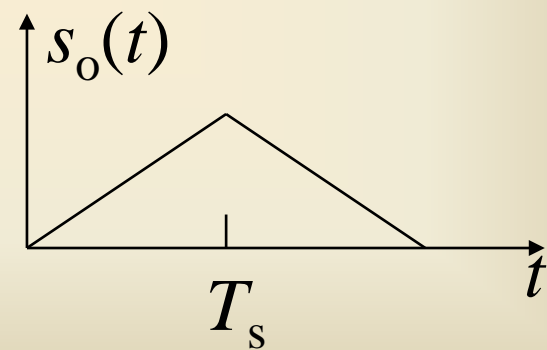
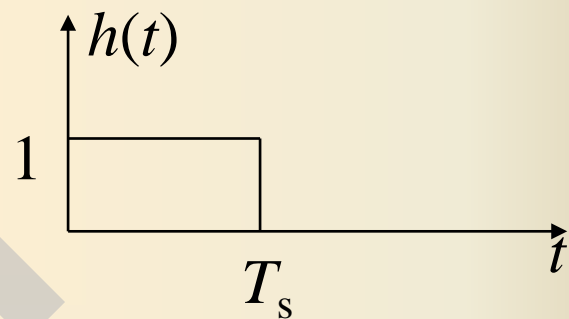
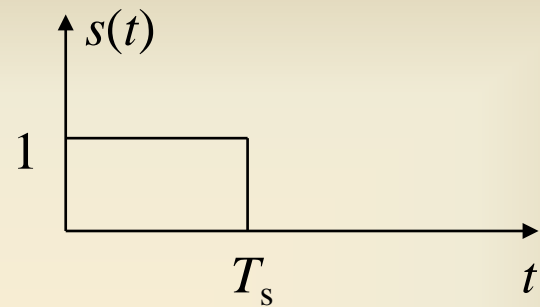
可得匹配滤波器的冲激响应为

$$h(t) = s(T_s - t), \quad 0 \leq t \leq T_s$$



由式 $s_o(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(u)h(t-u)du$

可以求出此匹配滤波器的
的输出信号波形如图



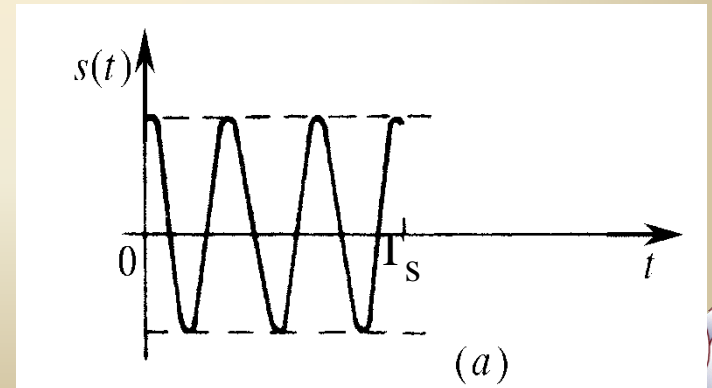
- **【例10.2】** 设信号的表示式为

$$s(t) = \begin{cases} \cos 2\pi f_0 t, & 0 \leq t \leq T_s \\ 0, & \text{其他} t \end{cases}$$

试求其匹配滤波器的特性和匹配滤波器输出的波形。

【解】 信号波形的频谱为

$$\begin{aligned} S(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j2\pi f t} dt = \int_0^{T_s} \cos 2\pi f_0 t e^{-j2\pi f t} dt \\ &= \frac{1 - e^{-j2\pi(f-f_0)T_s}}{j4\pi(f-f_0)} + \frac{1 - e^{-j2\pi(f+f_0)T_s}}{j4\pi(f+f_0)} \end{aligned}$$



因此，其匹配滤波器的传输函数为

$$\begin{aligned} H(f) &= S^*(f)e^{-j2\pi ft_0} = S^*(f)e^{-j2\pi fT_s} \\ &= \frac{[e^{j2\pi(f-f_0)T_s} - 1]e^{-j2\pi fT_s}}{j4\pi(f-f_0)} + \frac{[e^{j2\pi(f+f_0)T_s} - 1]e^{-j2\pi fT_s}}{j4\pi(f+f_0)} \end{aligned}$$

上式中已令 $t_0 = T_s$ 。

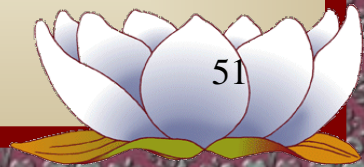
此匹配滤波器的冲激响应为：

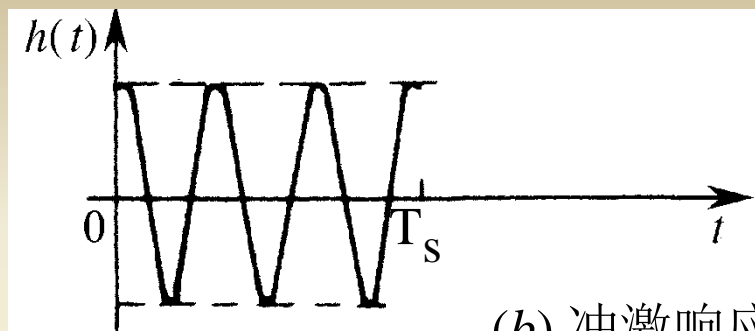
$$h(t) = s(T_s - t) = \cos 2\pi f_0(T_s - t), \quad 0 \leq t \leq T_s$$

为了便于画出波形简图，令 $T_s = n / f_0$

式中， $n =$ 正整数。这样，上式可以化简为

$$h(t) = \cos 2\pi f_0 t, \quad 0 \leq t \leq T_s$$





(b) 冲激响应

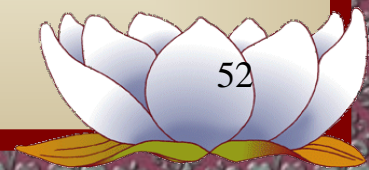
这时的匹配滤波器输出波形可以由卷积公式求出：

$$s_o(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

由于现在 $s(t)$ 和 $h(t)$ 在区间 $(0, T_s)$ 外都等于零，故上式中的积分可以分为如下几段进行计算：

$$t < 0, \quad 0 \leq t < T_s, \quad T_s \leq t \leq 2T_s, \quad t > 2T_s$$

显然，当 $t < 0$ 和 $t > 2T_s$ 时，式中的 $s(\tau)$ 和 $h(t-\tau)$ 不相交，故 $s_o(t)$ 等于零。



当 $0 \leq t < T_s$ 时, 上式等于

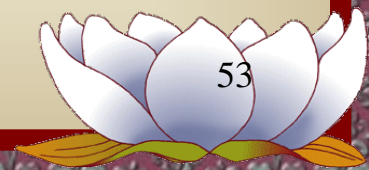
$$\begin{aligned} s_o(t) &= \int_0^t \cos 2\pi f_0 \tau \cos 2\pi f_0 (t - \tau) d\tau \\ &= \int_0^t \frac{1}{2} [\cos 2\pi f_0 t + \cos 2\pi f_0 (t - 2\tau)] d\tau = \frac{t}{2} \cos 2\pi f_0 t + \frac{1}{4\pi f_0} \sin 2\pi f_0 t \end{aligned}$$

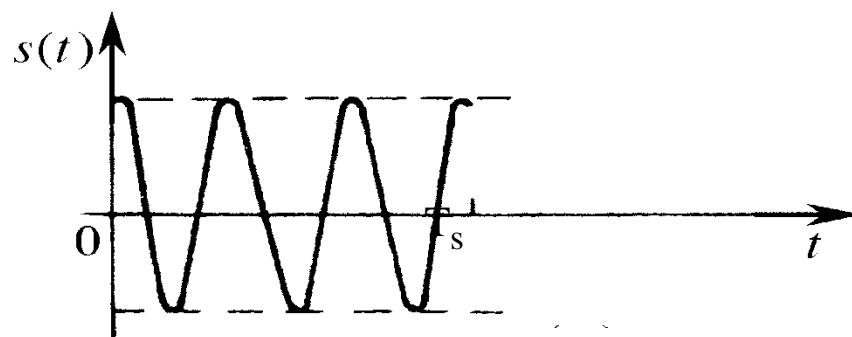
当 $T_s \leq t \leq 2T_s$ 时, 上式等于

$$s_o(t) = \int_{t-T_s}^{T_s} \cos 2\pi f_0 \tau \cos 2\pi f_0 (t - \tau) d\tau = \frac{2T_s - t}{2} \cos 2\pi f_0 t - \frac{1}{4\pi f_0} \sin 2\pi f_0 t$$

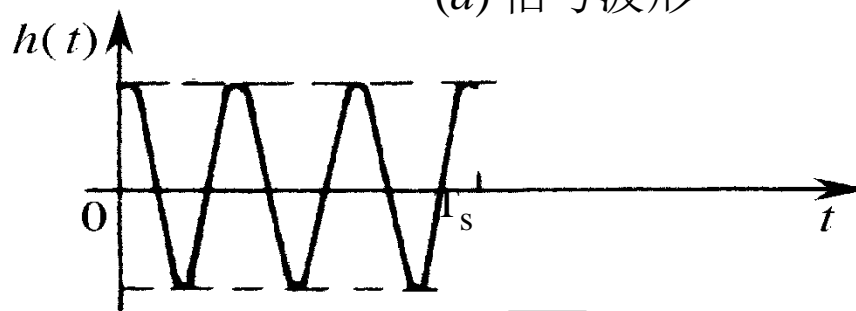
因 f_0 很大而使 $(1/4\pi f_0)$ 可以忽略, 则最后得到

$$s_o(t) = \begin{cases} \frac{t}{2} \cos 2\pi f_0 t, & 0 \leq t < T_s \\ \frac{2T_s - t}{2} \cos 2\pi f_0 t, & T_s \leq t \leq 2T_s \\ 0, & \text{其他 } t \end{cases}$$

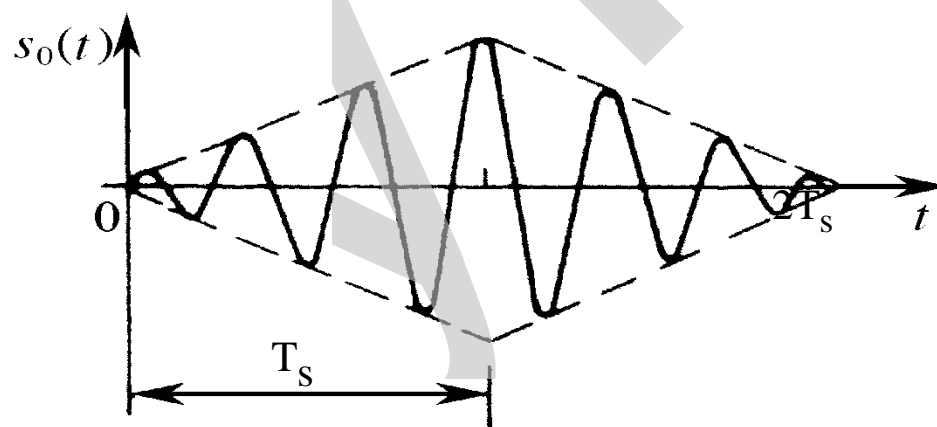




(a) 信号波形

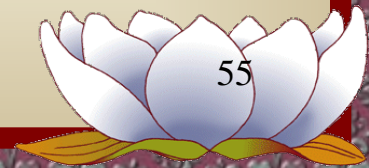


(b) 冲激响应



(c) 输出波形

- 在推导匹配滤波器的公式的讨论中，并不关心信号波形的形式，也就是说最大输出信噪比和信号波形无关，只决定于信号能量 E 与噪声功率谱密度 n_0 之比。所以这种匹配滤波法对于任何一种数字信号波形都适用，不论是基带数字信号还是已调数字信号。例10.1中给出的是基带数字信号的例子；而例10.2中给出的信号则是已调数字信号的例子。
- 因此，数字信号的第二种最佳接收机为匹配滤波器。

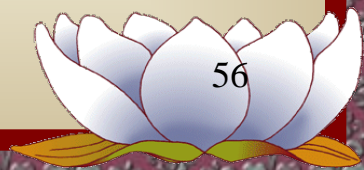
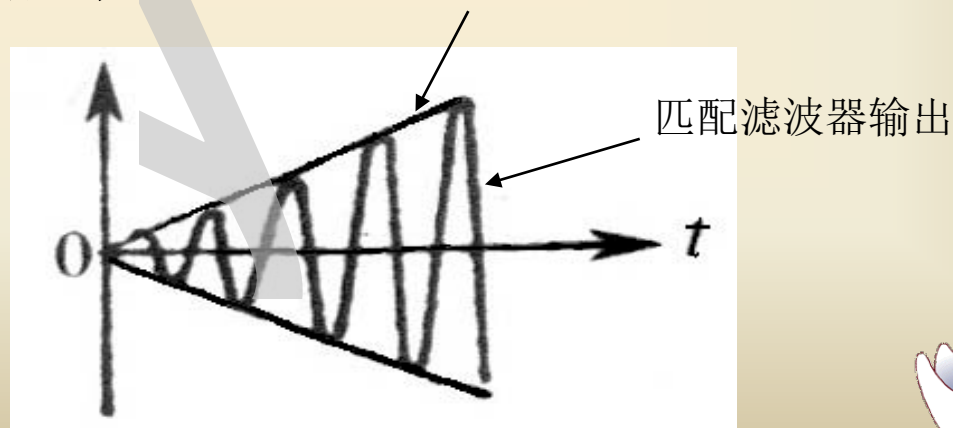


- **【例10.3】** 设有一个信号码元如例10.2中所给出的 $s(t)$ 。
试比较它分别通过匹配滤波器和相关接收器时的输出波形。

【解】 此信号码元通过相关接收器后，输出信号波形等于

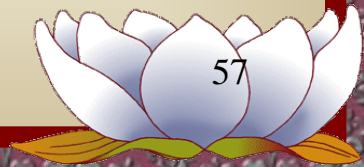
$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^t s(t)s(t)dt = \int_0^t \cos 2\pi f_0 t \cdot \cos 2\pi f_0 t dt = \int_0^t \cos^2 2\pi f_0 t dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^t (1 + \cos 4\pi f_0 t) dt = \frac{1}{2} t + \frac{1}{8\pi f_0} \sin 4\pi f_0 t \approx \frac{t}{2} \end{aligned}$$

上式中已经假定 f_0 很大，从而结果可以近似等于 $t / 2$ ，即与 t 成直线关系。由下图可见，只有当 $t = T_s$ 时，两者的抽样值才相等。



第9章 数字信号的最佳接收

- 9.1 数字接收信号的统计特性
- 9.2 数字信号最佳接收的判决准则
- 9.3 确知信号的最佳接收机—相关接收
- 9.4 确知信号最佳接收下的误码率
- 9.8 数字信号的匹配滤波接收
- 9.5 随机相位信号的最佳接收
- 9.6 起伏信号的最佳接收
- 9.7 实际接收机和最佳接收机的性能比较
- 9.9 最佳基带传输系统



9.5 随机相位信号的最佳接收

- 随相信号：接收的码元信号相位带有随机性
- 假设：
 - 信道噪声为高斯白噪声；
 - 接收信号码元相位的概率密度分布为均匀分布；
 - 讨论随相 2FSK信号的最佳接收，其先验概率相等，能量相等、信号互不相关。
- 可以将此信号表示为：

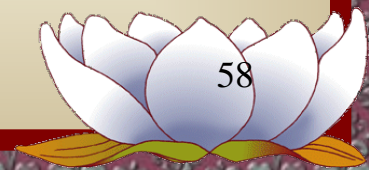
$$s_0(t, \varphi_0) = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$s_1(t, \varphi_1) = A \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$$

其随机相位的概率密度为：

$$f(\varphi_0) = \begin{cases} 1/2\pi, & 0 \leq \varphi_0 < 2\pi \\ 0, & \text{其他处} \end{cases}$$

$$f(\varphi_1) = \begin{cases} 1/2\pi, & 0 \leq \varphi_1 < 2\pi \\ 0, & \text{其他处} \end{cases}$$



- 对于先验概率相等的确知信号，最佳接收时按下式作判决：

若接收矢量 \mathbf{r} 使 $f_1(\mathbf{r}) < f_0(\mathbf{r})$ ，则判发送码元是“0”；

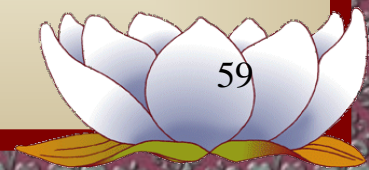
若接收矢量 \mathbf{r} 使 $f_0(\mathbf{r}) < f_1(\mathbf{r})$ ，则判发送码元是“1”。

- 随相信号的接收矢量具有随机相位，故上式中的 $f_0(\mathbf{r})$ 和 $f_1(\mathbf{r})$ 分别可以表示为：

$$f_0(\mathbf{r}) = \int_0^{2\pi} f(\varphi_0) f_0(\mathbf{r}/\varphi_0) d\varphi_0$$

$$f_1(\mathbf{r}) = \int_0^{2\pi} f(\varphi_1) f_1(\mathbf{r}/\varphi_1) d\varphi_1$$

经推导，根据最大似然准则，类似地可以得出随相信号最终的判决条件。



二元随相信号的最终判决条件:

若接收矢量 r 使 $M_1^2 < M_0^2$, 则判为发送码元是“0”;

若接收矢量 r 使 $M_0^2 < M_1^2$, 则判为发送码元是“1”。

其中:

$$M_0 = \sqrt{X_0^2 + Y_0^2}, \quad M_1 = \sqrt{X_1^2 + Y_1^2},$$

$$X_0 = \int_0^{T_s} r(t) \cos \omega_0 t dt \quad Y_0 = \int_0^{T_s} r(t) \sin \omega_0 t dt$$

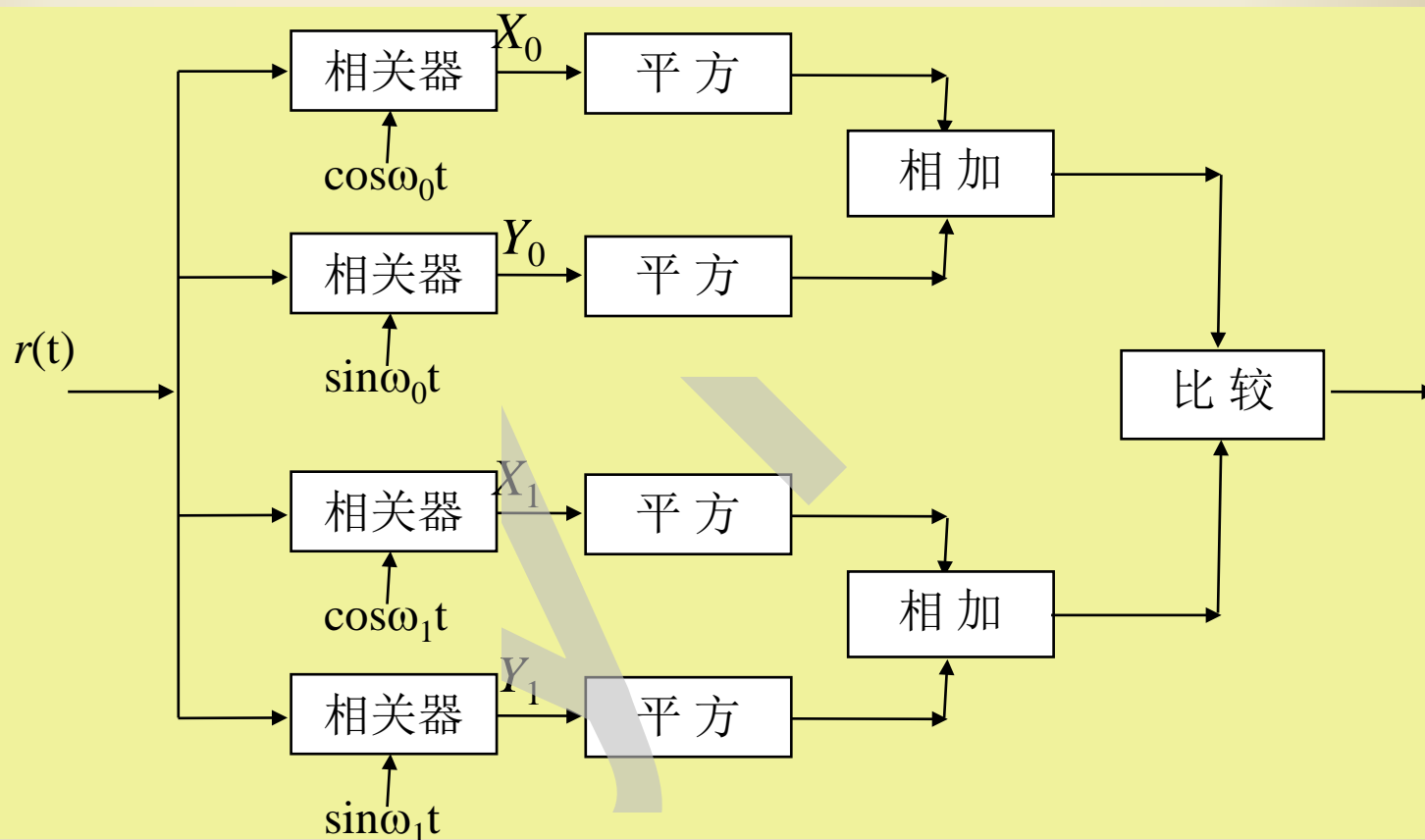
$$X_1 = \int_0^{T_s} r(t) \cos \omega_1 t dt \quad Y_1 = \int_0^{T_s} r(t) \sin \omega_1 t dt$$

按照上面判决准则构成的二元随相信号最佳接收机的结构示于下图中。

二元随相信号最佳接收机的误码率为:

$$P_e = \frac{1}{2} \exp(-E_b / 2n_0)$$

二元正交随相信号的最佳相关接收机

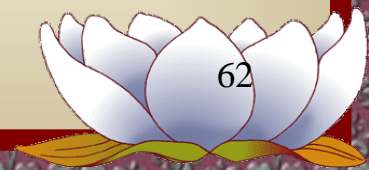


二元随相信号的最佳匹配滤波接收

- 匹配滤波器的冲激响应 $h(t)$ 应该和信号波形 $s(t)$ 严格匹配，包括对相位也有要求。对于随相信号，不可能使信号的随机相位和 $h(t)$ 的相位匹配，但仍可用匹配滤波器对随相信号进行最佳接收，分析如下。
- 设接收信号为 $r(t)$ 。
- 匹配于二元信号的两个匹配滤波器特性为

$$h_0(t) = s_0(T_s - t) = \cos 2\pi f_0(T_s - t), \quad 0 \leq t \leq T_s$$

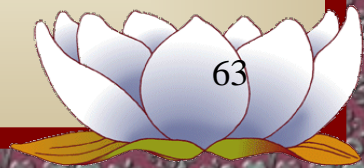
$$h_1(t) = s_1(T_s - t) = \cos 2\pi f_1(T_s - t), \quad 0 \leq t \leq T_s$$

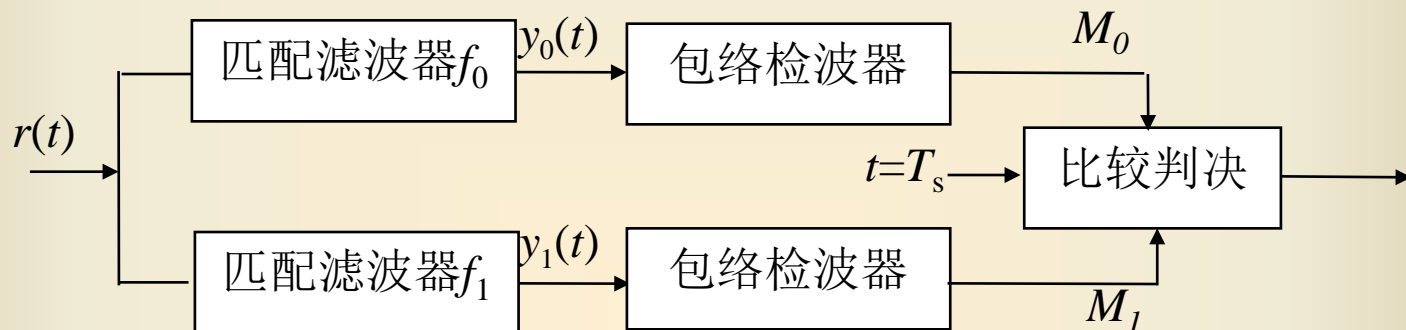


则匹配滤波器的输出为：

$$\begin{aligned}y_0(t) &= \int_0^t r(\tau) \cos 2\pi f_0(T_s - t + \tau) d\tau \\&= \cos 2\pi f_0(T_s - t) \int_0^t r(\tau) \cos 2\pi f_0 \tau d\tau - \sin 2\pi f_0(T_s - t) \int_0^t r(\tau) \sin 2\pi f_0 \tau d\tau \\&= \sqrt{\left[\int_0^t r(\tau) \cos 2\pi f_0 \tau d\tau \right]^2 + \left[\int_0^t r(\tau) \sin 2\pi f_0 \tau d\tau \right]^2} \cdot \cos[2\pi f_0(T_s - t) + \theta] \\ \theta &= \tan^{-1} \left[\frac{\int_0^t r(\tau) \sin 2\pi f_0 \tau d\tau}{\int_0^t r(\tau) \cos 2\pi f_0 \tau d\tau} \right]\end{aligned}$$

由上式看出，当 $t = T_s$ 时， $y(t)$ 的包络和随相信号最佳相关接收判决条件式中的 M_0 和 M_1 形式相同。所以，随相信号采用匹配滤波器的最佳接收判决就是比较两个包络的大小。

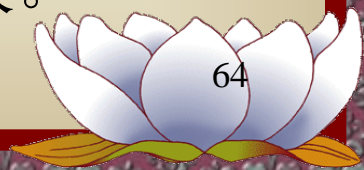




二元随相信号的匹配滤波接收机如图。

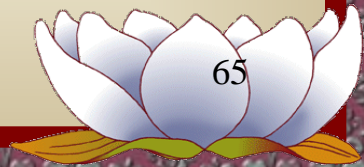
图中的两个匹配滤波器分别对二进制的两种码元匹配。匹配滤波器的输出经过包络检波，然后作比较判决。

由于起伏信号最佳接收机的结构和随相信号的相同，所以上图同样适用于对起伏信号作最佳接收。



第9章 数字信号的最佳接收

- 9.1 数字接收信号的统计特性
- 9.2 数字信号最佳接收的判决准则
- 9.3 确知信号的最佳接收机——相关接收
- 9.4 确知信号最佳接收下的误码率
- 9.8 数字信号的匹配滤波接收
- 9.5 随机相位信号的最佳接收
- 9.6 起伏信号的最佳接收
- 9.7 实际接收机和最佳接收机的性能比较
- 9.9 最佳基带传输系统

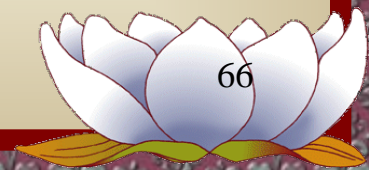


9.6 起伏数字信号的最佳接收

- **起伏信号：**接收信号中的码元信号，其包络和相位都随机变化。
- 仍以正交2FSK信号为例讨论其最佳接收问题。假设：
 - 信道噪声是高斯白噪声；
 - 信号是互不相关的等能量、等先验概率的2FSK信号。
- 2FSK信号的表示式

$$s_0(t, \varphi_0, A_0) = A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$s_1(t, \varphi_1, A_1) = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$$



- A_0 和 A_1 是由于多径效应引起的随机起伏振幅，它们服从同一瑞利分布：

$$f(V_i) = \frac{A_i}{\sigma_s^2} \exp\left(-\frac{A_i^2}{2\sigma_s^2}\right), \quad A_i \geq 0, \quad i = 1, 2$$

- σ_s^2 为信号的功率。由于 A_i 是余弦波的振幅，所以信号 $s_i(t, \varphi_i, A_i)$ 的功率 σ_s^2 和其振幅 A_i 的均方值之间的关系为

$$E[A_i^2] = 2\sigma_s^2$$

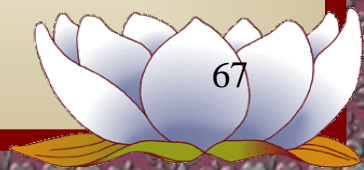
- φ_0 和 φ_1 的概率密度服从均匀分布：

$$f(\varphi_i) = 1/2\pi, \quad 0 \leq \varphi_i < 2\pi, \quad i = 1, 2$$

- 由于接收矢量不但具有随机相位，还具有随机起伏的振幅，故接收信号的概率密度 $f_0(\mathbf{r})$ 和 $f_1(\mathbf{r})$ 分别可以表示为：

$$f_0(\mathbf{r}) = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty f(A_0)f(\varphi_0)f_0(\mathbf{r}/\varphi_0, A_0)dA_0d\varphi_0$$

$$f_1(\mathbf{r}) = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty f(A_1)f(\varphi_1)f_1(\mathbf{r}/\varphi_1, A_1)dA_1d\varphi_1$$



可以计算出这两个概率密度公式，如下：

$$f_0(\mathbf{r}) = K' \frac{n_0}{n_0 + T_s \sigma_s^2} \exp \left[\frac{2\sigma_s^2 M_0^2}{n_0 (n_0 + T_s \sigma_s^2)} \right]$$

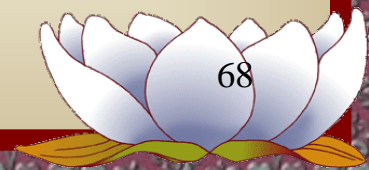
$$f_1(\mathbf{r}) = K' \frac{n_0}{n_0 + T_s \sigma_s^2} \exp \left[\frac{2\sigma_s^2 M_1^2}{n_0 (n_0 + T_s \sigma_s^2)} \right]$$

式中

$$K' = \frac{\exp \left[-\frac{1}{n_0} \int_0^{T_s} r^2(t) dt \right]}{(\sqrt{2\pi} \sigma_n)^k}$$

n_0 — 噪声功率谱密度；

σ_n^2 — 噪声功率。



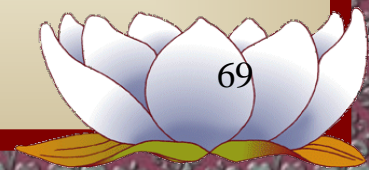
- 误码率:

- 实质上, 和随相信号最佳接收时一样, 比较 $f_0(\mathbf{r})$ 和 $f_1(\mathbf{r})$ 仍然是比较 M_0^2 和 M_1^2 的大小。所以, 不难推论, 起伏信号最佳接收机的结构和随相信号最佳接收机的一样。
- 但是, 这时的最佳误码率则不同于随相信号的误码率。这时的误码率等于

$$P_e = \frac{1}{2 + (\bar{E} / n_0)}$$

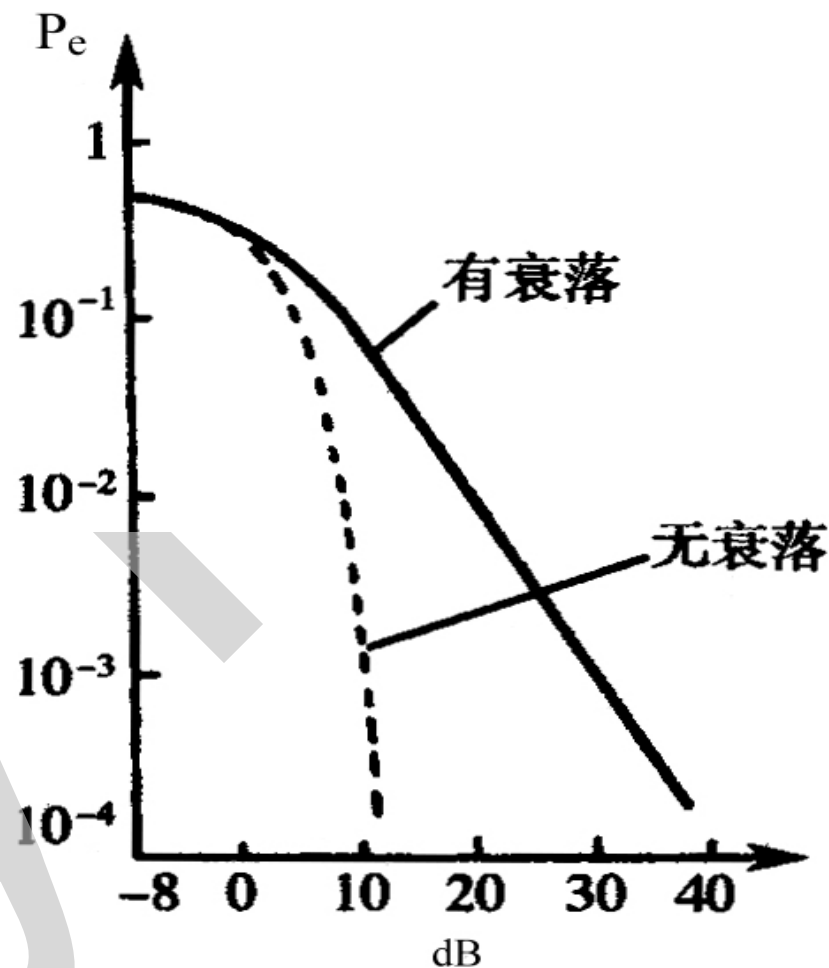
式中,

\bar{E} — 接收码元的统计平均能量。



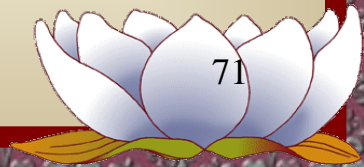
- 误码率曲线

- 由图可见，在有衰落时，性能随误码率下降而迅速变坏。当误码率等于 10^{-2} 时，衰落使性能下降约10 dB；当误码率等于 10^{-3} 时，下降约20 dB。



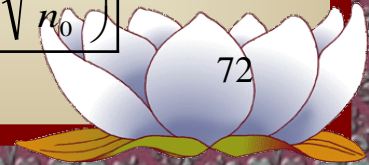
第9章 数字信号的最佳接收

- 9.1 数字接收信号的统计特性
- 9.2 数字信号最佳接收的判决准则
- 9.3 确知信号的最佳接收机—相关接收
- 9.4 确知信号最佳接收下的误码率
- 9.8 数字信号的匹配滤波接收
- 9.5 随机相位信号的最佳接收
- 9.6 起伏信号的最佳接收
- 9.7 实际接收机和最佳接收机的性能比较
- 9.9 最佳基带传输系统



• 实际接收机和最佳接收机的性能比较

	实际接收机的 P_e	最佳接收机的 P_e
相干OOK信号	$\frac{1}{2} \operatorname{erfc} \sqrt{r/4}$	$\frac{1}{2} \operatorname{erfc} \sqrt{E_b / 4n_0}$
非相干OOK信号	$\frac{1}{2} \exp(-r/4)$	$\frac{1}{2} \exp(-E_b / 4n_0)$
相干2FSK信号	$\frac{1}{2} \operatorname{erfc} \sqrt{r/2}$	$\frac{1}{2} \operatorname{erfc} \sqrt{E_b / 2n_0}$
非相干2FSK信号	$\frac{1}{2} \exp(-r/2)$	$\frac{1}{2} \exp(-E_b / 2n_0)$
相干2PSK信号	$\frac{1}{2} \operatorname{erfc} \sqrt{r}$	$\frac{1}{2} \operatorname{erfc} \sqrt{E_b / n_0}$
差分相干2DPSK信号	$\frac{1}{2} \exp(-r)$	$\frac{1}{2} \exp(-E_b / n_0)$
同步检测2DPSK信号	$\operatorname{erfc} \sqrt{r} \left(1 - \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \sqrt{r} \right)$	$\operatorname{erfc} \sqrt{\frac{E_b}{n_0}} \left(1 - \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \sqrt{\frac{E_b}{n_0}} \right)$

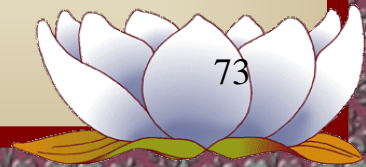


信噪比 r

VS

比特（能量）信噪比 E_b / n_0

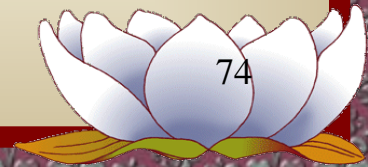
P259之式（9.4-16）前后文字段落
的辨析



比特（能量）信噪比 E_b / n_0

- 二元码最佳接收时的误码率仅和 E_b / n_0 以及相关系数 ρ 有关，与信号波形及噪声功率无直接关系。
- 一般接收机的误码率取决于信噪比 $r = P_s / P_n$ 。若系统带宽为 B ，则有

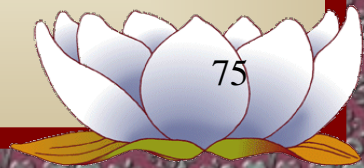
$$\frac{E_b}{n_0} = \frac{P_s \cdot T_s}{P_n / B} = \frac{P_s}{P_n} \cdot BT_s = r \cdot \frac{1}{\eta_b}$$



第9章 数字信号的最佳接收

- 9.1 数字接收信号的统计特性
- 9.2 数字信号最佳接收的判决准则
- 9.3 确知信号的最佳接收机—相关接收
- 9.4 确知信号最佳接收下的误码率
- 9.8 数字信号的匹配滤波接收
- 9.5 随机相位信号的最佳接收
- 9.6 起伏信号的最佳接收
- 9.7 实际接收机和最佳接收机的性能比较

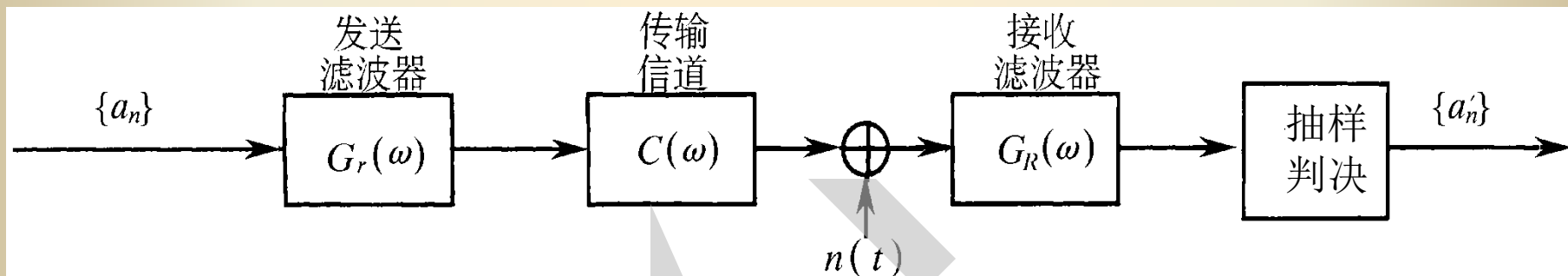
• 9.9 最佳基带传输系统



9.9 最佳基带传输系统

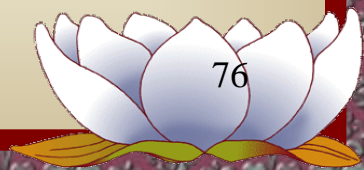
- 什么是最佳基带传输系统？

- 消除了码间串扰并且误码率最小的基带传输系统称为最佳基带传输系统。



- 数字基带传输系统由发送滤波器、信道和接收滤波器组成，其传输函数分别为 $G_T(f)$ 、 $C(f)$ 和 $G_R(f)$ 。基带总传输函数 $H(f)$ 表示为：

$$H(f) = G_T(f) \cdot C(f) \cdot G_R(f)$$

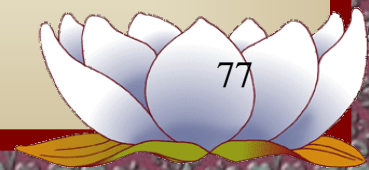


• 最佳基带传输系统

- 为了消除码间串扰，要求 $H(f)$ 必须满足奈奎斯特第一准则。
- 在 $H(f)$ 满足消除码间串扰的条件之后，设计 $G_T(f)$ 、 $C(f)$ 和 $G_R(f)$ ，以使系统在加性白色高斯噪声条件下误码率最小。
 - 最佳接收机应为匹配滤波器或相关接收机。

• 设计最佳基带传输系统的两种情况

- 假设信道具有理想特性，即假设 $C(f) = 1$ 。设计 $G_T(f)$ 和 $G_R(f)$ 。
- 考虑信道的非理想特性（信道的传输特性 $C(f)$ 往往不易得知，并且还可能是时变的）。
 - 加入均衡器，设计 $G_T(f)$ 和 $G_R(f)$ 及均衡器。



9.9.1 理想信道的最佳基带传输系统

• 一、最佳基带传输系统的设计

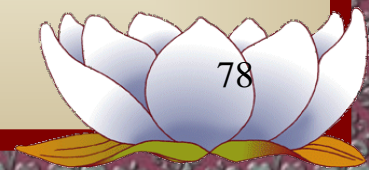
- 理想信道传输函数 $C(f) = 1$ ，则基带系统的传输特性为

$$H(f) = G_T(f) \cdot G_R(f)$$

- $H(f)$ 按照消除码间串扰的条件确定之后，设计 $G_T(f)$ 和 $G_R(f)$ ，以使系统在加性白色高斯噪声条件下误码率最小。
- 设传输系统的输入为冲激脉冲，则发送滤波器的传输特性 $G_T(f)$ 就是信号码元的频谱 $S(f)$ 。由于 $S(f) = G_T(f)$ ，所以要求接收匹配滤波器的传输函数为：

$$G_R(f) = G_T^*(f) e^{-j2\pi f t_0}$$

上式中已经假定 $k = 1$ 。



由 $H(f) = G_T(f) \cdot G_R(f)$

有 $G_T^*(f) = H^*(f) / G_R^*(f)$

又匹配滤波器 $G_R(f) = G_T^*(f) e^{-j2\pi f t_0}$

则得到 $G_R(f) G_R^*(f) = H^*(f) e^{-j2\pi f t_0}$

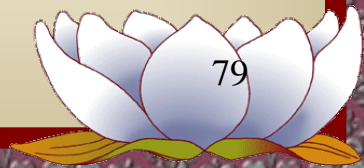
即 $|G_R(f)|^2 = H^*(f) e^{-j2\pi f t_0}$

上式左端是一个实数，所以上式右端也必须是实数。因此，上式可以写为

$$|G_R(f)|^2 = |H(f)|$$

所以得到接收匹配滤波器应满足的条件为

$$|G_R(f)| = |H(f)|^{1/2}$$

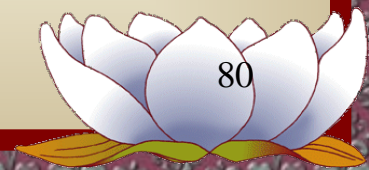


$$|G_R(f)| = |H(f)|^{1/2}$$

由于上式条件没有限定对接收滤波器的相位要求，
所以可以选用 $G_R(f) = H^{1/2}(f)$

这样，由 $H(f) = G_T(f) \cdot G_R(f)$ ，得到发送滤波器的
传输特性为 $G_T(f) = H^{1/2}(f)$

以上两式就是最佳基带传输系统对于收发滤波器传输函数的要求。



• 二、最佳基带传输系统的误码率性能

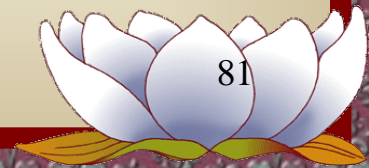
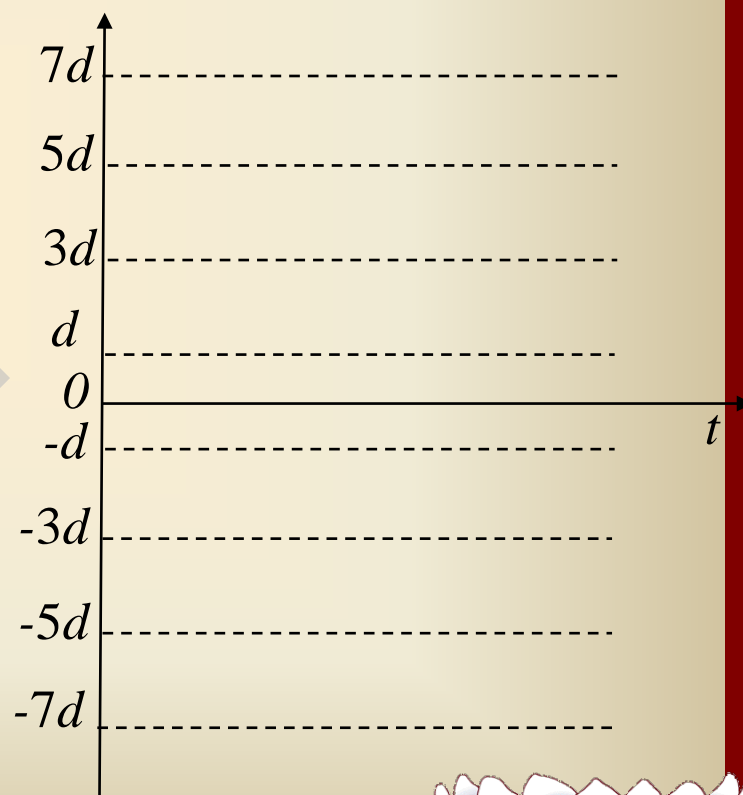
设基带信号码元为 M 进制的多电平信号。一个码元可以取下列 M 种电平之一：

$$\pm d, \pm 3d, \dots, \pm (M-1)d$$

其中 d 为相邻电平间隔的一半，如下图所示。图中的 $M = 8$ 。

在接收端，判决电路的判决门限值则应当设定在：

$$0, \pm 2d, \pm 4d, \dots, \pm (M-2)d$$



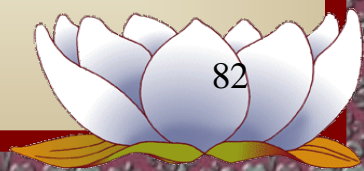
在接收端抽样判决时刻，若噪声值不超过 d ，则不会发生错误判决。特例是最外侧的两个电平，当噪声值大于最高信号电平值或小于最低电平值时，不会发生错误判决；即只在一个方向有出错的可能。这种情况的出现占有所有可能的 $1/M$ 。所以，错误概率为

$$P_e = \left(1 - \frac{1}{M}\right) P(|\xi| > d)$$

式中， ξ 是噪声的抽样值，而 $P(|\xi| > d)$ 是噪声抽样值大于 d 的概率。

现在来计算上式中的 $P(|\xi| > d)$ 。设接收滤波器输入端高斯白噪声的单边功率谱密度为 n_0 ，接收滤波器输出的带限高斯噪声的功率为 σ^2 ，则有

$$\sigma^2 = \frac{n_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |G_R(f)|^2 df = \frac{n_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |H^{1/2}(f)|^2 df$$



$$\sigma^2 = \frac{n_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |G_R(f)|^2 df = \frac{n_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |H^{1/2}(f)|^2 df$$

上式中的积分值是一个实常数，我们假设其等于1，即假设

$$\int_{-\infty}^{\infty} |H^{1/2}(f)|^2 df = 1$$

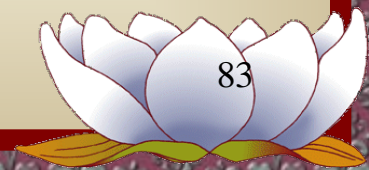
故有

$$\sigma^2 = \frac{n_0}{2}$$

这样假设并不影响对误码率性能的分析。由于接收滤波器是一个线性滤波器，故其输出噪声的统计特性仍服从高斯分布。因此输出噪声 ξ 的一维概率密度函数等于

$$f(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2\sigma^2}\right)$$

对上式积分，就可以得到抽样噪声值超过 d 的概率：



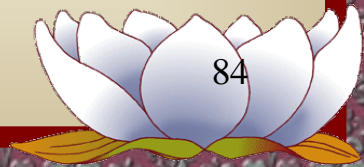
$$\begin{aligned} P(|\xi| > d) &= 2 \int_d^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2\sigma^2}\right) d\xi \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{d/\sqrt{2}\sigma}^\infty \exp(-z^2) dz = \operatorname{erfc}\left(\frac{d}{\sqrt{2}\sigma}\right) \end{aligned}$$

上式中已作了如下变量代换：

$$z^2 = \xi^2 / 2\sigma^2$$

将上式代入误码率公式，得到

$$P_e = \left(1 - \frac{1}{M}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{d}{\sqrt{2}\sigma}\right)$$



$$P_e = \left(1 - \frac{1}{M}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{d}{\sqrt{2}\sigma}\right)$$

现在，再将上式中的 P_e 和 d/σ 的关系变换成 P_e 和 E/n_0 的关系。在 M 进制基带多电平最佳传输系统中，发送码元的频谱形状由发送滤波器的特性决定：

$$G_T(f) = H^{1/2}(f)$$

发送码元多电平波形的最大值为

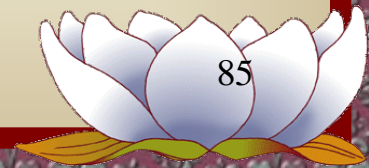
$$\pm d, \pm 3d, \dots, \pm (M-1)d$$

等。这样，利用巴塞伐尔定理

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df$$

计算码元能量时，设多电平码元的波形为 $Ax(t)$ ，其中 $x(t)$ 的最大值等于1，以及

$$A = \pm d, \pm 3d, \dots, \pm (M-1)d$$



则有码元能量等于 $A^2 \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = A^2 \int_{-\infty}^{\infty} |H^{1/2}(f)|^2 df = A^2$
因此，对于 M 进制等概率多电平码元，求出其平均码元能量 E 等于

$$\begin{aligned} E &= \frac{2}{M} \sum_{i=1}^{M/2} [d(2i-1)]^2 = d^2 \frac{2}{M} [1 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (M-1)^2] \\ &= \frac{d^2}{3} (M^2 - 1) \end{aligned}$$

因此有

$$d^2 = \frac{3E}{M^2 - 1}$$

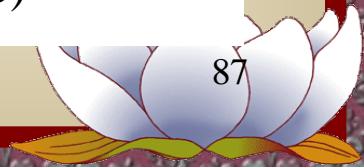
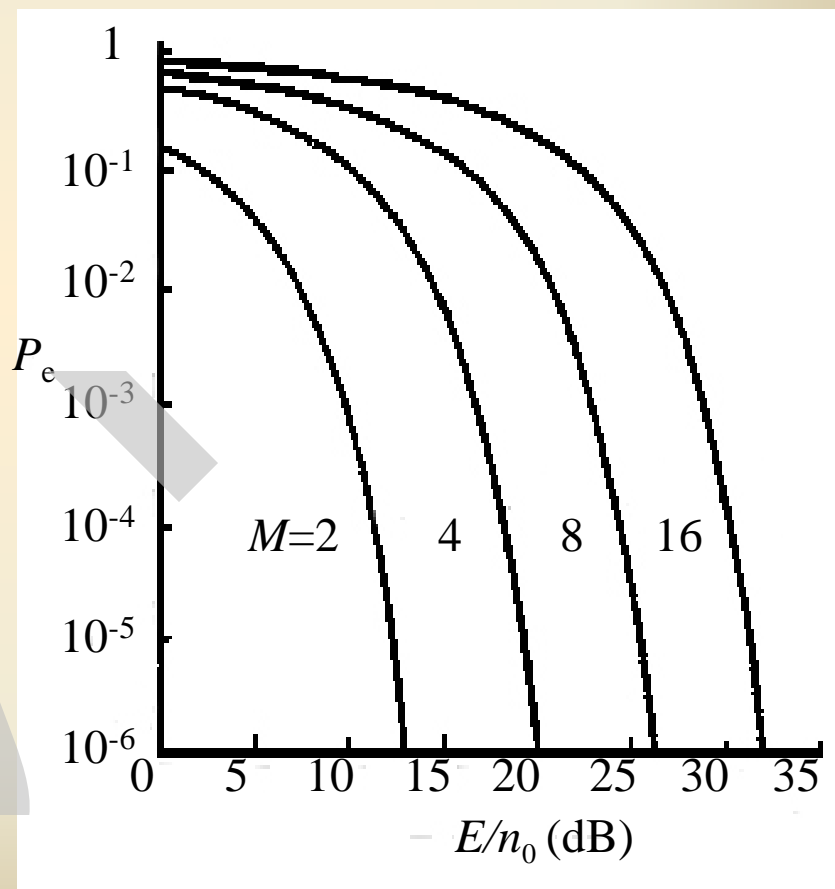
于是得到误码率的最终表示式：

$$P_e = \left(1 - \frac{1}{M}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{d}{\sqrt{2}\sigma}\right) = \left(1 - \frac{1}{M}\right) \operatorname{erfc}\left[\left(\frac{3}{M^2 - 1} \cdot \frac{E}{n_0}\right)^{1/2}\right]$$

当 $M=2$ 时,
$$P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}(\sqrt{E/n_0})$$

上式是在理想信道中，
消除码间串扰条件下，
二进制双极性基带信号
传输的最佳误码率。

由 M 进制多电平信号的
误码率曲线图可见，
当误码率较低时，为保
持误码率不变， M 值增
大到2倍，信噪比大约需
要增大7 dB。



9.9.2 非理想信道的最佳基带传输系统

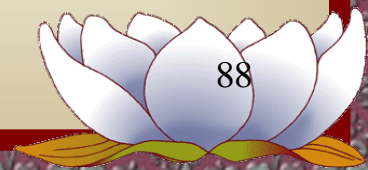
• 匹配滤波器设计

- 接收信号码元的频谱等于 $G_T(f) \cdot C(f)$ 。为了使高斯白噪声条件下的接收误码率最小，在接收端可以采用一个匹配滤波器。
- 为使此匹配滤波器的传输函数 $G_R'(f)$ 和接收信号码元的频谱匹配，要求

$$G_R'(f) = G_T^*(f) \cdot C^*(f)$$

- 基带传输系统的总传输特性为

$$\begin{aligned} H(f) &= G_T(f) \cdot C(f) \cdot G_R'(f) = G_T(f) \cdot C(f) \cdot G_T^*(f) \cdot C^*(f) \\ &= |G_T(f)|^2 |C(f)|^2 \end{aligned}$$



• 均衡器设计

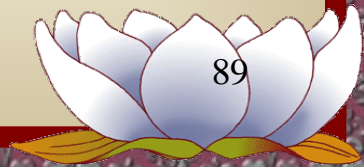
- 总传输特性 $H(f)$ 能使高斯白噪声信道下误码率最小，但是还没有满足消除码间串扰的条件。为了消除码间串扰， $H(f)$ 必须满足：

$$\sum_i H\left(f + \frac{i}{T_s}\right) = T_s \quad |f| \leq \frac{1}{2T_s}$$

- 为此，可以在接收端级联一个横向均衡滤波器 $T(f)$ ，使系统总传输特性满足上式要求。故从上两式可以写出对 $T(f)$ 的要求：

$$T(f) = \frac{T_s}{\sum_i |G_T^{(i)}(f)|^2 |C^{(i)}(f)|^2} \quad |f| \leq \frac{1}{2T_s}$$

式中 $G_T^{(i)}(f) = G_T\left(f + \frac{i}{T_s}\right) \quad C^{(i)} = C\left(f + \frac{i}{T_s}\right)$



学而时习之，不亦乐乎？

- 思考题：

- 9-1、9-5、9-12

- 习题：

- 9-3、9-4、9-5、9-10

