一、简答题和填空题（每小题 5 分，共 40 分）：

1、已知序列 $x(n)=R_3(n)$，其共轭对称序列为 $x_e(n)$，则序列 $x_e(n)=$ ______________________________。

已知序列 $x(n)=\{1,2,3,4,5,6,7\}, n=0,1,2,3,4,5,6$，对其进行 N=2 点取样后的序列 $x_p(n)=$ ______________________________。

答案：$x_e(n)=0.5\delta(n+2)+0.5\delta(n+1)+\delta(n)+0.5\delta(n-1)+0.5\delta(n-2)$

$x_p(n)=\{1,0,3,0,5,0,7\}, n=0,1,2,3,4,5,6$

2、已知两个序列 $x_1(n)=\delta(n)+2\delta(n-2)+\delta(n-3)$ 和 $x_2(n)=\delta(n-1)+a\delta(n-3)$，其中变量 a 表示未知数。已知 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 的 4 点循环卷积 $y_1(n)$ 为 $y_1(n)=x_1(n)④x_2(n)=\delta(n)-\delta(n-1)-\delta(n-2)+\delta(n-3)$，则 $a=$ ______，并计算 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 的线性卷积 $y_2(n)=x_1(n)*x_2(n)=$ ______________________________。

答案：$a=-1$，$y_2(n)=\delta(n-1)+\delta(n-3)+\delta(n-4)-2\delta(n-5)-\delta(n-6)$

或 $y_2(n)=\{0,1,0,1,1,-2,-1\}$。

3、已知 8 点实序列 $x(n)=\{x(0),x(1),x(2),x(3),x(4),x(5),x(6),x(7)\}$ 及其 8 点 DFT 为 $X(k), 0\le k\le 7$。另有 8 点序列 $y(n)$ 满足 $y(n)=x(n)⑧x(7-n), 0\le n\le 7$，则用 $X(k)$ 表示 $y(n)$ 的 8 点 DFT 为 $Y(k)=$ ______________________________。

答案：$Y(k)=W_8^{7k}X^*(k)\cdot X(k)=W_8^{7k}|X(k)|^2, 0\le k\le 7$。

4、采用矩形窗来设计 FIR 数字滤波器，若想减小滤波器的过渡带带宽，可采用的方法是____________________，若想增大滤波器的阻带衰减，可采用的方法是____________________。

答案：增大窗长，更换窗型

5、如图 P1.5 所示数字滤波器，其对应的系统函数为____________________

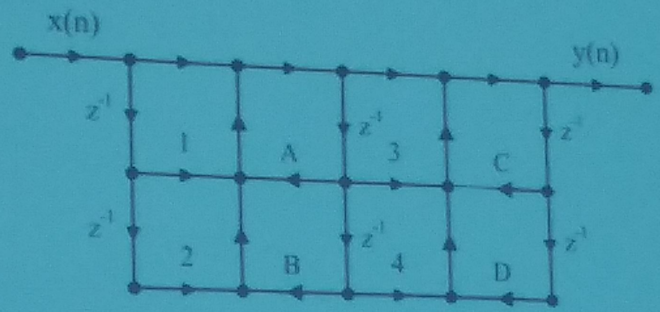
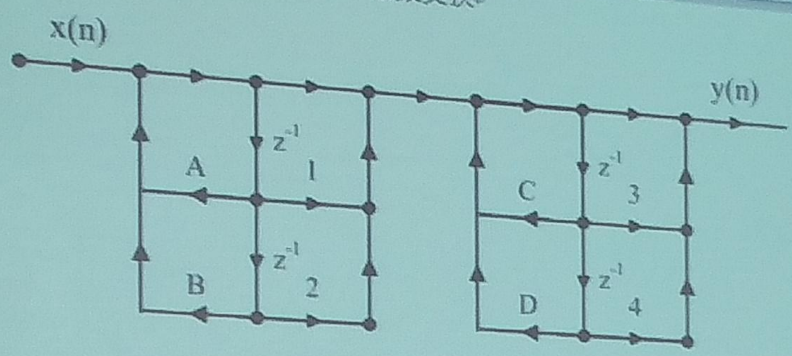


图 P1.5

答案：$H(z)=\dfrac{(1+z^{-1}+2z^{-2})(1+3z^{-1}+4z^{-2})}{(1-Az^{-1}-Bz^{-2})(1-Cz^{-1}-Dz^{-2})}$

级联型流图如下所示，或者二阶节系数交换。



6、设方差为 σ_x^2 的零均值白噪声序列 $x(n)$，经过单位取样响应为

$h(n)=\delta(n)-a\cdot\delta(n-1)$ 的数字滤波器，输出随机序列为 $y(n)$。则 $y(n)$ 的功率谱

$S_{yy}(e^{j\omega})=$ ________________________，自相关序列

$R_{yy}(m)=$ ________________________。

答案：

$$S_{yy}(e^{j\omega})=S_{xx}(e^{j\omega})\left|H(e^{j\omega})\right|^2=\sigma_x^2(1-ae^{-j\omega})(1-ae^{j\omega})=\sigma_x^2[1-2a\cos(\omega)+a^2]$$

二、（15分）请完成下列两题：

(1) 已知数字系统的系统函数 $H(z)=\dfrac{z^{-1}-0.4}{1-0.5z^{-1}}$，系统 $H_1(z)$ 的幅频响应 $\left|H_1(e^{j\omega})\right|=\left|H(e^{j\omega})\right|$，系统 $H_1(z)$ 的时延和系统 $H(z)$ 相比最小，求系统函数

$H_1(z)=$？

(2) 在满足取样定律的条件下，将模拟信号 $x_a(t)$ 取样得到数字信号 $x(n)=x_a(nT),0\le n\le 15$，$T$ 为取样周期，$x(n)$ 的 16 点 DFT 为 $X(k)$，其幅度相应

$x(n)$ 的 16 点 DFT 为 $X(k)$，其幅度相应 $|X(k)| \sim k$ 如图 P2 所示，请画出模拟信号 $x_a(t)$ 的幅频响应 $|X_a(j\Omega)| \sim \Omega$ 示意图(手工画出即可)。

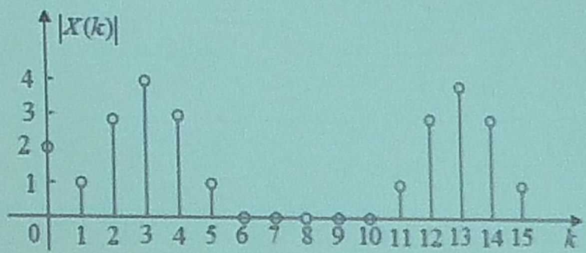


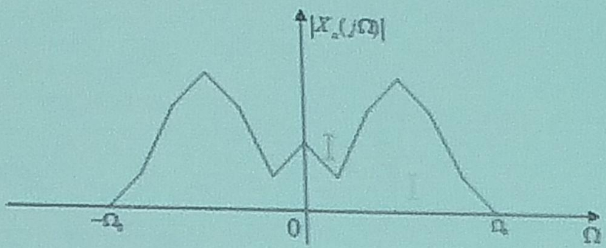
图 P2

答案：

(1) $H(z)=\dfrac{z^{-1}-0.4}{1-0.5z^{-1}}=\dfrac{1-0.4z^{-1}}{1-0.5z^{-1}}\cdot\dfrac{z^{-1}-0.4}{1-0.4z^{-1}}=H_{\min}(z)H_{ap}(z)=H_1(z)H_{ap}(z)$

$H_1(z)=H_{\min}(z)=\dfrac{1-0.4z^{-1}}{1-0.5z^{-1}}$ （5 分）

(2) 模拟信号 $x_a(t)$ 的幅频响应 $|X_a(j\Omega)| \sim \Omega$ 示意图如下：（手工画出即可）



（10 分）

三、（15 分）序列 $x_1(n)$、$x_2(n)$、$x_3(n)$ 和 $x_4(n)$ 分别表示 4 个长度为 N 的实序列，且其对应的 DFT 分别为 $X_1(k)$、$X_2(k)$、$X_3(k)$ 和 $X_4(k)$。假定 $x_1(n)$ 和 $x_3(n)$ 是对称的，而 $x_2(n)$ 和 $x_4(n)$ 是反对称的，即对于 $n=1,2,\cdots,N-1$，满足 $x_1(n)=x_1(N-n)$，

$x_2(n)=-x_2(N-n)$，$x_3(n)=x_3(N-n)$，$x_4(n)=-x_4(N-n)$ 以及 $x_2(0)=x_4(0)=0$。

（1）若实序列 $y_1(n)=x_1(n)+x_2(n)$，其 DFT 为 $Y_1(k)$，请用 $Y_1(k)$ 分别表示 $X_1(k)$ 和 $X_2(k)$。

（2）若实序列 $y_1(n)=x_1(n)+x_2(n)$，实序列 $y_2(n)=x_3(n)+x_4(n)$，其 DFT 为 $Y_2(k)$，复序列 $y_3(n)=y_1(n)+jy_2(n)$，其 DFT 为 $Y_3(k)$；请用 $Y_3(k)$ 表示 $Y_1(k)$ 和 $Y_2(k)$，并用 $Y_3(k)$ 来表示 $X_1(k)$、$X_2(k)$、$X_3(k)$ 和 $X_4(k)$。

答案：

（1）因为 $Y_1(k)=X_1(k)+X_2(k)$，$X_1(k)=X_1^*(k)$，$X_2(k)=-X_2^*(k)$，

那么 $Y_1^*(k)=X_1^*(k)+X_2^*(k)=X_1(k)-X_2(k)$，

所以 $X_1(k)=\dfrac{Y_1(k)+Y_1^*(k)}{2}=\mathrm{Re}[Y_1(k)]$，$X_2(k)=\dfrac{Y_1(k)-Y_1^*(k)}{2}=j\,\mathrm{Im}[Y_1(k)]$。（5 分）

（2）同理有 $X_3(k)=\dfrac{Y_2(k)+Y_2^*(k)}{2}=\mathrm{Re}[Y_2(k)]$，$X_4(k)=\dfrac{Y_2(k)-Y_2^*(k)}{2}=j\,\mathrm{Im}[Y_2(k)]$，

因为 $y_1(n)=\mathrm{Re}[y_3(n)]$，$y_2(n)=\mathrm{Im}[y_3(n)]$，

四、（15 分）已知一个模拟滤波器的系统函数为 $H_a(s)=\frac{3s^2+2}{4s+1}$，则有：

（1）该模拟滤波器幅度响应的峰值出现的频率位置 $\Omega=?$

（2）若用双线性变换法或冲激响应不变法转换将它转换成数字滤波器，请问该数字滤波器幅度响应的峰值分别应出现在 $\omega=?$

（3）若采用 s 平面到 z 平面的映射为 $s=\frac{z+1}{z-1}$，那么由该映射所得到的数字滤波器幅度响应的峰值应出现在 $\omega=?$

答案：

（1）模拟滤波器的极点 s=-1/4，对应的频点为 Ω=0（rad/s），滤波器幅度响应的峰值出现在极点处；

（2）双线性变换得到的数字滤波器的极点对应 $\omega=2\arctan(\frac{T\Omega}{2})=0$(rad)；冲激响应不变法得到的数字滤波器的极点对应 $\omega=T\Omega=0$(rad)；

（3）因为 $s=\frac{z+1}{z-1}$，令 $s=j\Omega$ 和 $z=e^{j\omega}$ 代入可得：

$$j\Omega=\frac{e^{j\omega}+1}{e^{j\omega}-1}=\frac{e^{j\frac{\omega}{2}}+e^{-j\frac{\omega}{2}}}{e^{j\frac{\omega}{2}}-e^{-j\frac{\omega}{2}}}=\frac{\cos\frac{\omega}{2}}{j\sin\frac{\omega}{2}}=-jctg\frac{\omega}{2}$$

所以 $\Omega=-ctg\frac{\omega}{2}$，当 $\Omega=0$（rad/s）时，对应于 $\omega=\pi$ (rad/s)。

五、（15 分）设 $x(n),v(n)$ 为两个独立的实平稳随机过程，它们的自相关序列分别为 $R_{xx}(m),R_{vv}(m)$，则：

（1）请用 $x(n),v(n)$ 构造一个随机过程 $g(n)$，其自相关序列满足 $R_{gg}(m)=R_{xx}(m)\cdot R_{vv}(m)$；

（2）设稳定因果线性非移变（LTI）系统的差分方程为 $x(n)-Ax(n-1)=Bw(n)$，其中 A,B 为实系数，零均值实平稳随机过程 $w(n)$ 是系统的输入，其自相关序列为 $R_{ww}(m)=\delta(m)$，系统的输出为 $x(n)$，其自相关序列是 $R_{xx}(m)=2\alpha^{|m|}, |\alpha|<1$；请确定 A,B 的值。

答案：

（1）因为 $R_{zz}(m)=R_{xx}(m)\cdot R_{vv}(m)$

所以 $R_{zz}(m)=R_{xx}(m)\cdot R_{vv}(m)=E[x(n)x(n+m)]E[v(n)v(n+m)]$

$$=E[x(n)x(n+m)v(n)v(n+m)]=E[x(n)v(n)x(n+m)v(n+m)]=E[g(n)g(n+m)]$$

故：$g(n)=x(n)\cdot v(n)$　　　（5 分）

（2）LTI 系统函数为：$H(z)=\dfrac{B}{1-Az^{-1}}$

系统的输出随机过程 $x(n)$ 的功率谱为：$S_{xx}(z)=ZT[R_{xx}(m)]=\dfrac{1-\alpha^2}{1-\alpha(z+z^{-1})+\alpha^2}$

又因为：$S_{xx}(z)=S_{ww}(z)H(z)H(z^{-1})=H(z)H(z^{-1})$

所以：$\dfrac{1-\alpha^2}{1-\alpha(z+z^{-1})+\alpha^2}=\dfrac{B}{1-Az^{-1}}\cdot\dfrac{B}{1-Az}$，$A=\alpha, B=\sqrt{1-\alpha^2}$　　　（10 分）