第四章 数字滤波器的原理和设计

（The Principle and Design of the Digital Filter）

本章习题（课本P243）

- 4.1，4.3，4.4(1)，4.6(1)，4.8，
- 4.10(1)， 4.12，4.14，4.17，4.18
- 选做：4.25

主要内容：

§4.1 引言

§4.2 IIR数字滤波器的基本网络结构

§4.3 FIR数字滤波器的基本网络结构

§4.4 IIR数字滤波器的设计方法

§4.5 IIR数字滤波器的频率变换

§4.6 FIR数字滤波器的设计方法

§4.7 FIR数字滤波器与IIR数字滤波器的比较

§4.1 引言（Introduction）

4.1.1 滤波原理

对输入信号起到滤波作用。对线性非移变系统(如图4.1所示)，有：

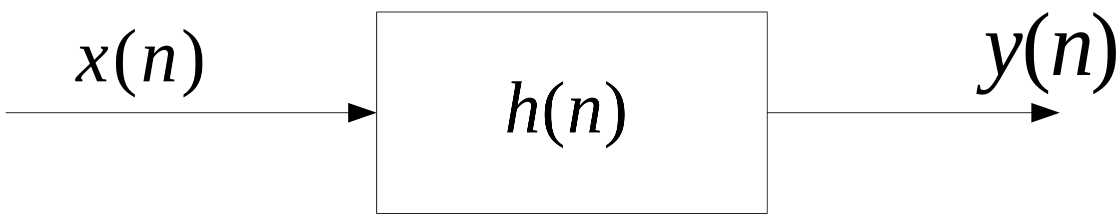


图4.1 线性非移变系统的输入和输出

时域： $y(n)=x(n)*h(n)$

频域： $Y(e^{j\omega})=X(e^{j\omega})\cdot H(e^{j\omega})$

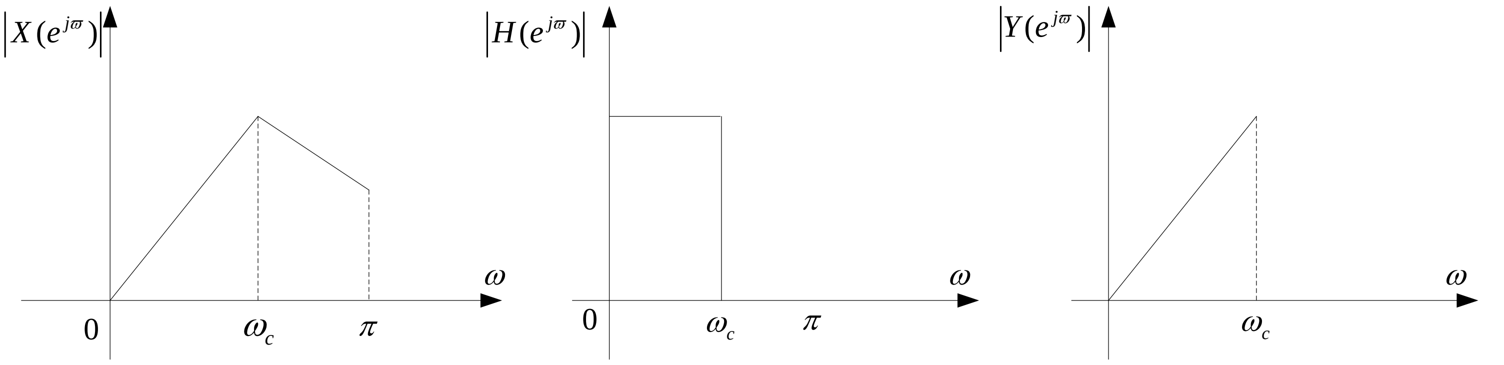


图4.2 线性非移变系统的滤波作用

4.1.2 滤波器的实现方法

模拟滤波器（Analog Filter-AF）：

只能硬件实现 - R、L、C、Op、开关电容。

数字滤波器（Digital Filter-DF）：

硬件实现 - 延迟器、乘法器和加法器；

软件实现 - 线性卷积的程序。

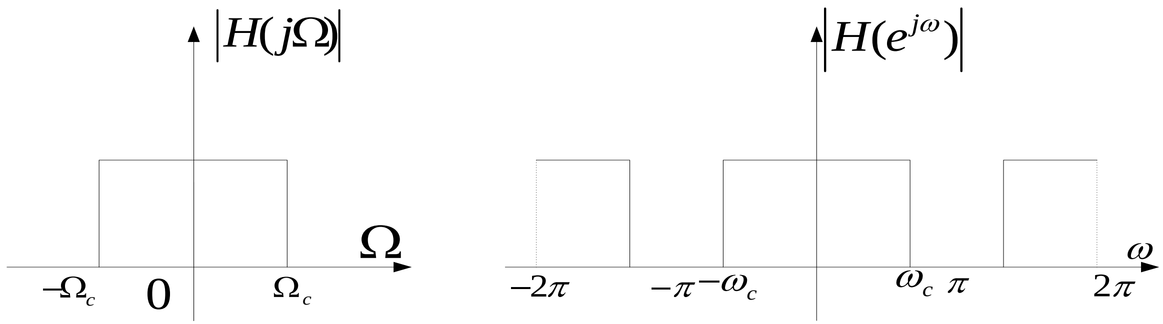
4.1.3 滤波器的分类

(1)一般分为**经典滤波器**和**现代滤波器**：

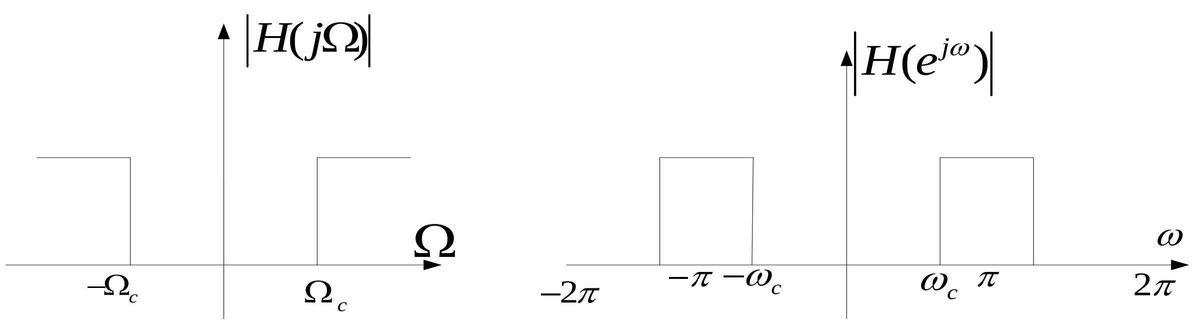
经典滤波器：**假定**输入信号中的**有用成分和希望去除的成分**各自**占有不同的频带**。如果信号和噪声的频谱相互重迭，经典滤波器无能为力。

现代滤波器：从含有噪声的时间序列中**估计**出信号的某些**特征或信号本身**。现代滤波器**将信号和噪声都视为随机信号**。包括Wiener Filter、Kalman Filter、线性预测器、自适应滤波器等。

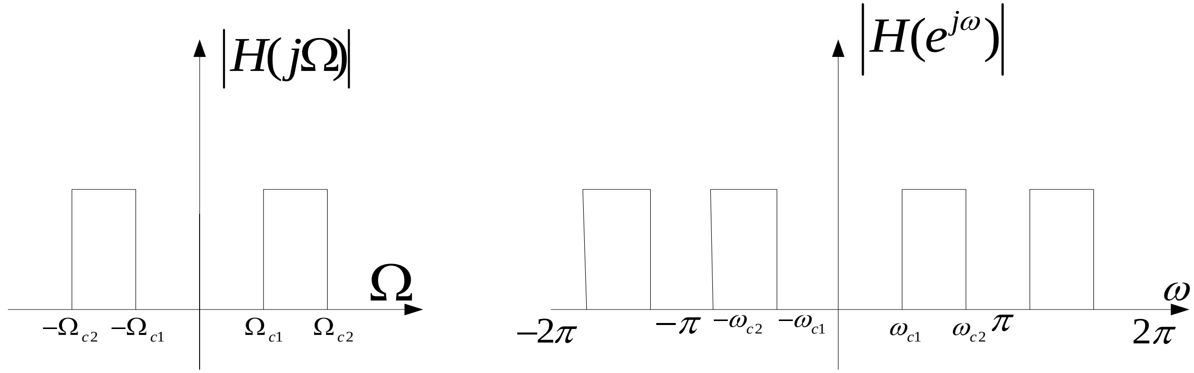
(2)经典滤波器从功能上分：低通(LP)、高通(HP)、带通(BP)、带阻(BS)，均有AF和DF之分。AF和DF的四种滤波器的理想幅频响应如下图所示。



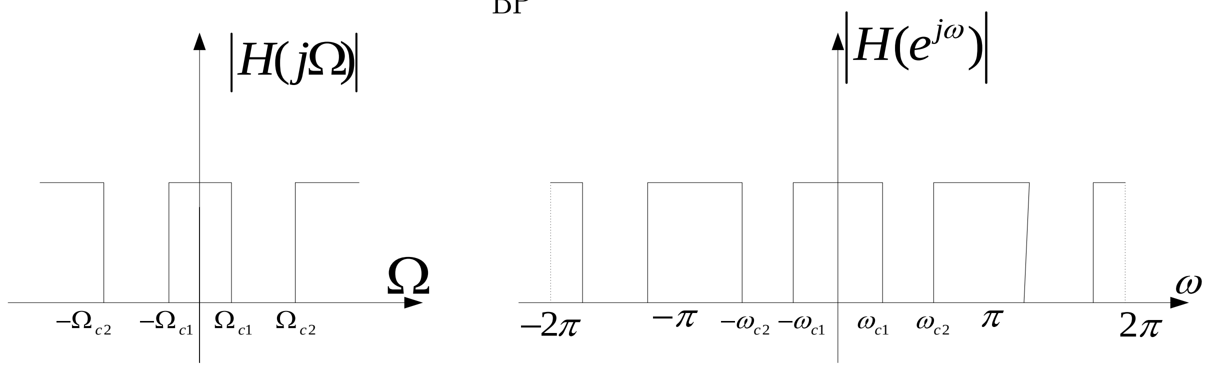
LP



HP



BP



BS

(3)从设计方法上分：

AF：Butterworth Filter，Chebyshev Filter，Ellipse Filter， Bessel Filter；

DF：FIR - 根据给定的频率特性直接设计；

IIR - 利用已经成熟的AF的设计方法设计。

4.1.4 滤波器的技术要求

数字滤波器的传输函数： $H(e^{j\omega}) = \left|H(e^{j\omega})\right| e^{j\varphi(\omega)}$

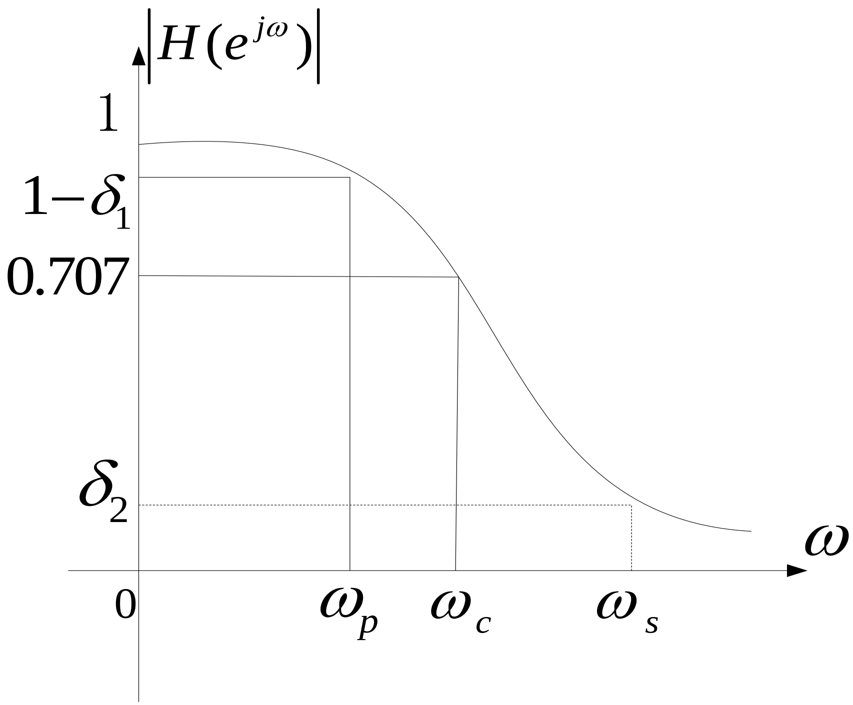


图4.4 数字低通滤波器的技术要求

ω_p ：通带截止频率， α_p ：通带允许的最大衰减；

ω_s ：阻带截止频率， α_s ：阻带允许的最小衰减；

ω_c ：3dB通带截止频率，

$\delta_1 . \delta_2$ ：通带、阻带的容限（允许误差），

$\alpha_p . \alpha_s$ 分别定义为：（P-Pass，S-Stop）

$$\alpha_p = 20\lg \frac{|H(e^{j0})|}{|H(e^{j\omega_p})|} = -20\lg |H(e^{j\omega_p})| (dB)$$

$$\alpha_s = 20\lg \frac{|H(e^{j0})|}{|H(e^{j\omega_s})|} = -20\lg |H(e^{j\omega_s})| (dB)$$

式中均假定 $|H(e^{j0})| = 1$ （归一化）。

当 $\omega_p = \omega_c$ 时，$\alpha_p = 3dB$

4.1.5 模拟滤波器的技术要求

模拟低通滤波器的设计指标

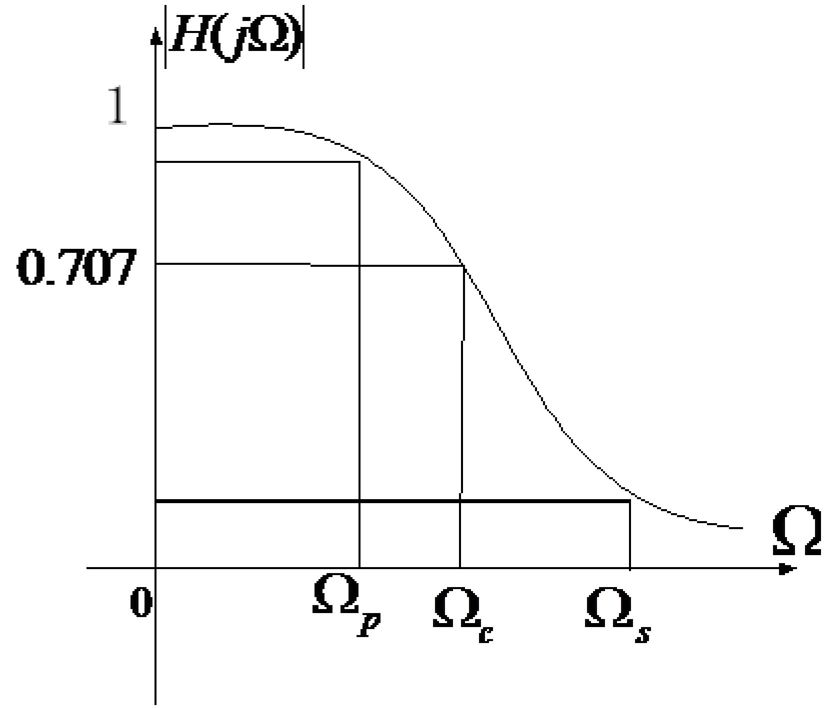
有：$\alpha_p, \Omega_p, \alpha_s, \Omega_s$

Ω_p ：**通带截止频率**

Ω_s ：**阻带截止频率**

α_p ：**通带** $\Omega(=0 \sim \Omega_p)$ **中的最大衰减系数**

α_s ：**阻带** $\Omega \geq \Omega_s$ **的最小衰减系数**



$$\alpha_p = 10\lg\frac{|H_a(j0)|^2}{|H_a(j\Omega_p)|^2}$$

$$\alpha_s = 10\lg\frac{|H_a(j0)|^2}{|H_a(j\Omega_s)|^2}$$

如 $\Omega = 0$**处幅度已归一化到1，即**$|H_a(j0)| = 1$**，则有：**

$$\alpha_p = -10\lg|H_a(j\Omega_p)|^2$$

$$\alpha_s = -10\lg|H_a(j\Omega_s)|^2$$

4.1.6 数字滤波器的基本运算

- 基本运算：相乘，延迟，相加；
- 表示方法：线性差分方程、系统函数、框图或流图。
- 差分方程： $y(n)=\sum_{k=1}^{N}a_k\cdot y(n-k)+\sum_{k=0}^{M}b_k\cdot x(n-k)$
- 系统函数：

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{\sum_{k=0}^{M}b_k\cdot z^{-k}}{1-\sum_{k=1}^{N}a_k\cdot z^{-k}}=\frac{B(z)}{A(z)}$$

- 由上式得: $Y(z)=\frac{B(z)}{A(z)}X(z)$

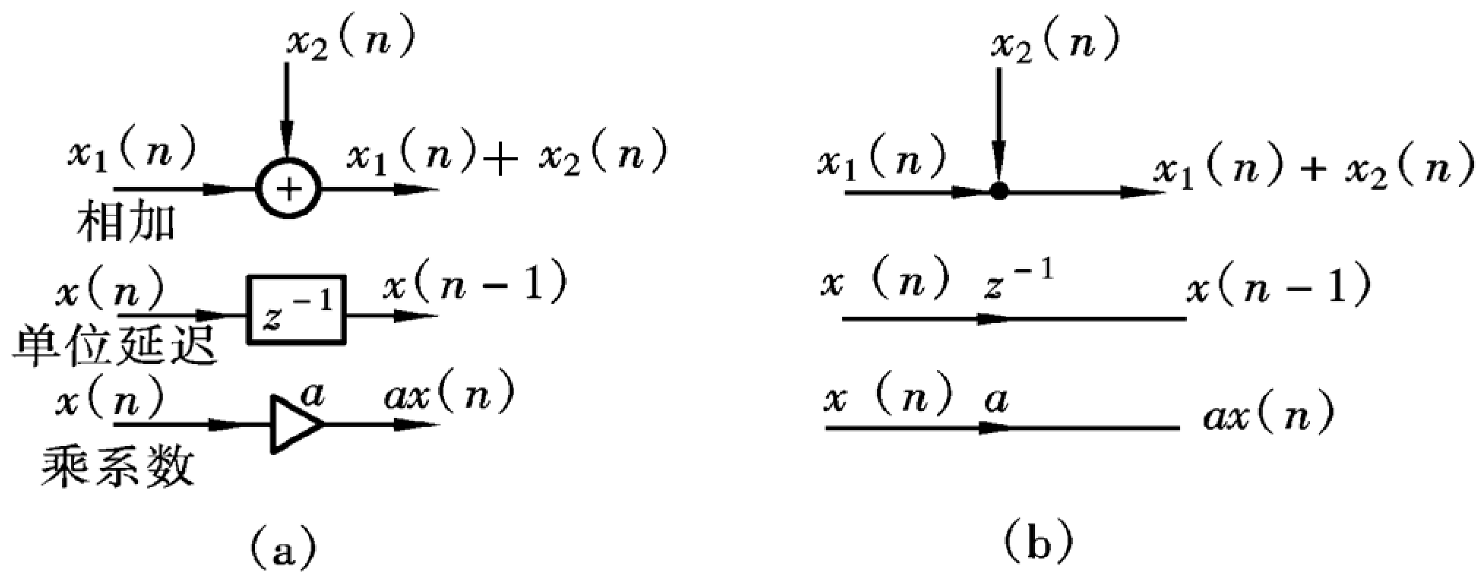


图4.6 数字滤波器的框图和流程图表示

实现方法：

IIR： $$H(z)=\sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r} /[1+\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}]$$

N阶IIR，常采用递归结构；

FIR： $$H(z)=\sum_{n=0}^{N} h(n) z^{-n}$$ **N阶FIR，常采用非递归结构。**

§4.2 IIR数字滤波器的基本网络结构
(The Structure of IIR Filter)

4.2.1 直接I型

系统函数：

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{\sum_{k=0}^{M} b_k\cdot z^{-k}}{1-\sum_{k=1}^{N} a_k\cdot z^{-k}}=H_1(z)\cdot H_2(z)$$

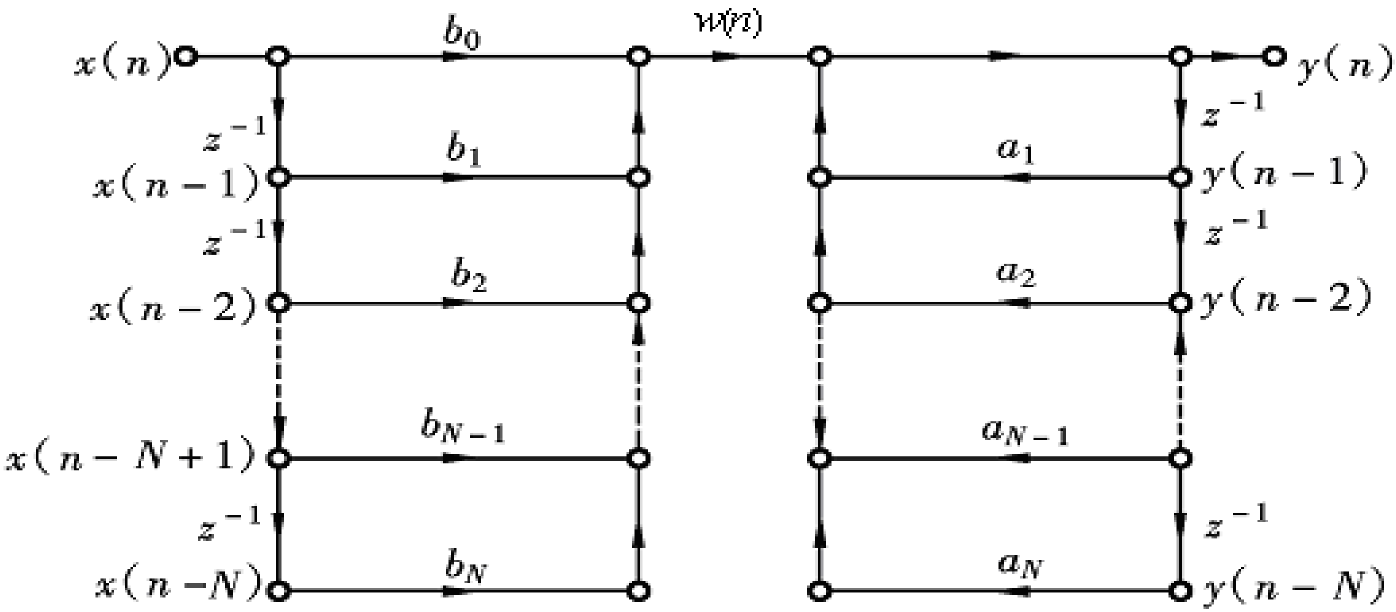


图4.7 N阶IIR滤波器的直接I型流程图

其中：$H_1(z)=\sum_{k=0}^{M} b_k \cdot z^{-k}$ ， $H_2(z)=1-\sum_{k=1}^{N} a_k \cdot z^{-k}$

直接I型，先实现 $H_1(z)$，再实现 $H_2(z)$。

特点：先实现系统函数的零点，再实现极点；

需要2N个延迟器和2N个乘法器。

4.2.2 直接II型

当IIR数字滤波器是线性非移变系统时，有：

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=H_2(z)\cdot H_1(z)$$

直接II型，先实现 $H_2(z)$ ，再实现 $H_1(z)$ 。

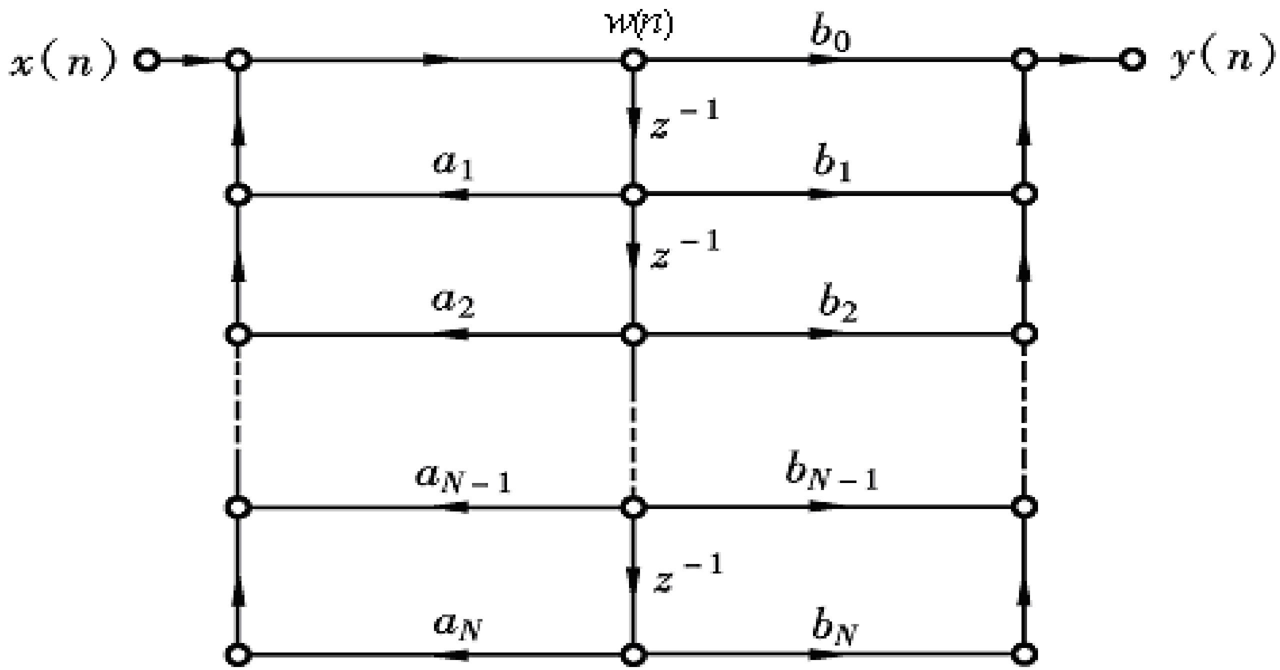


图4.8 N阶IIR滤波器的直接II型流程图

特点：先实现系统函数的极点，再实现零点；

需要N个延迟器和2N个乘法器。

证明：由上图可知：

$$\begin{cases} w(n)=x(n)+a_1w(n-1)+a_2w(n-2)+\cdots+a_Nw(n-N) \\ y(n)=b_0w(n)+b_1w(n-1)+b_2w(n-2)+\cdots+b_Nw(n-N) \end{cases}$$

上述方程两边同时进行ZT，得：

$$\begin{cases} W(z)=X(z)+a_1z^{-1}W(z)+a_2z^{-2}W(z)+\cdots+a_Nz^{-N}W(z) \\ Y(z)=b_0W(z)+b_1z^{-1}W(z)+b_2z^{-2}W(z)+\cdots+b_Nz^{-N}W(z) \end{cases}$$

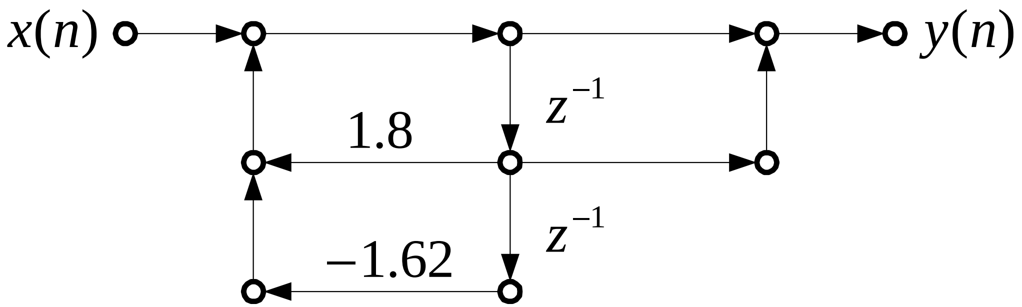
整理上式得：

$$\begin{cases} W(z)(1-a_1z^{-1}-a_2z^{-2}-\cdots-a_Nz^{-N})=X(z) \\ W(z)(b_0+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}+\cdots+b_Nz^{-N})=Y(z) \end{cases}$$

所以直II型结构的系统函数为：

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{\sum_{k=0}^{M}b_k\cdot z^{-k}}{1-\sum_{k=1}^{N}a_k\cdot z^{-k}}=H_2(z)\cdot H_1(z)$$

例4.2.1 数字滤波器的结构如下图所示。



（1）写出它的差分方程和系统函数；

（2）判断该滤波器是否因果稳定。

解: (1) $H(z)=\dfrac{1+z^{-1}}{1-1.8\cdot z^{-1}+1.62\cdot z^{-2}}$ (直II型结构的二阶基本节)

$$y(n)=1.8y(n-1)-1.62y(n-2)+x(n)+x(n-1)$$

(2) $\lim\limits_{z->\infty}H(z)=1$，故系统为因果系统。

极点：极点 $z_{1,2}=0.9\pm j0.9$ 均位于单位园外，系统不稳定。

举例：

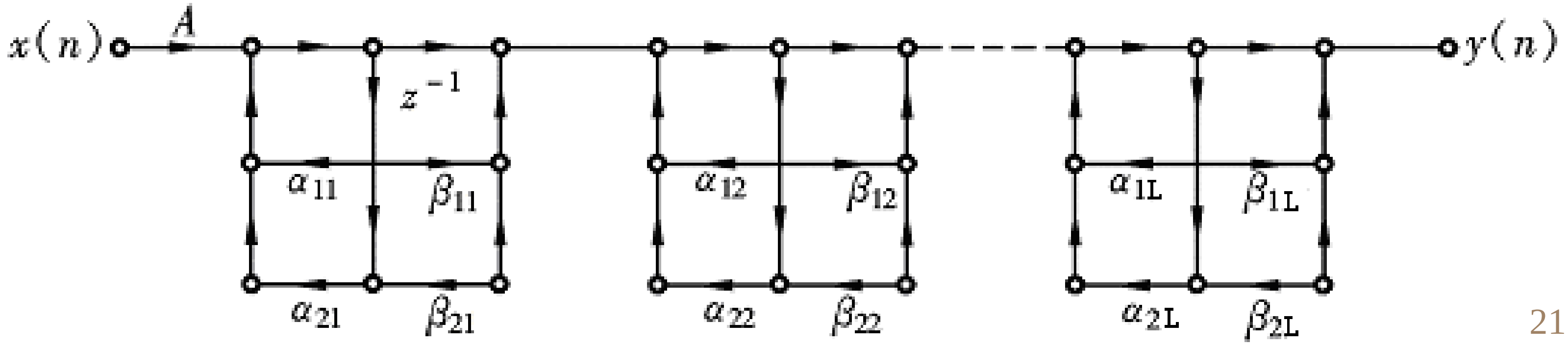
4.2.3级联型

系统函数：$H(z)=A\prod_{k=1}^{L}\frac{\beta_{0k}+\beta_{1k}\cdot z^{-1}+\beta_{2k}\cdot z^{-2}}{1-\alpha_{1k}\cdot z^{-1}-\alpha_{2k}\cdot z^{-2}}$

$$=A\prod_{k=1}^{L}H_k(z)$$

其中：$h(n)$ 为实系数，

$H_k(z)=\frac{\beta_{0k}+\beta_{1k}\cdot z^{-1}+\beta_{2k}\cdot z^{-2}}{1-\alpha_{1k}\cdot z^{-1}-\alpha_{2k}\cdot z^{-2}}$ 称为滤波器的二阶基本节。



基本结构：二阶基本节，“田字型”结构。

特点：

1、二阶基本节搭配灵活，可调换次序；

2、可直接控制零极点；

3、存储器最少；

4、误差较大。

4.2.3 并联型

系统函数：$H(z)=c_0+\sum_{k=1}^{P}\frac{A_k}{1-c_k\cdot z^{-1}}+\sum_{k=1}^{Q}\frac{\gamma_{0k}+\gamma_{1k}}{1-\alpha_{1k}\cdot z^{-1}-\alpha_{2k}\cdot z^{-2}}$

其中：$h(n)$ 为实系数，

$$H_k(z)=\frac{\beta_{0k}+\beta_{1k}\cdot z^{-1}+\beta_{2k}\cdot z^{-2}}{1-\alpha_{1k}\cdot z^{-1}-\alpha_{2k}\cdot z^{-2}}$$ 称为滤波器的二阶基本节。

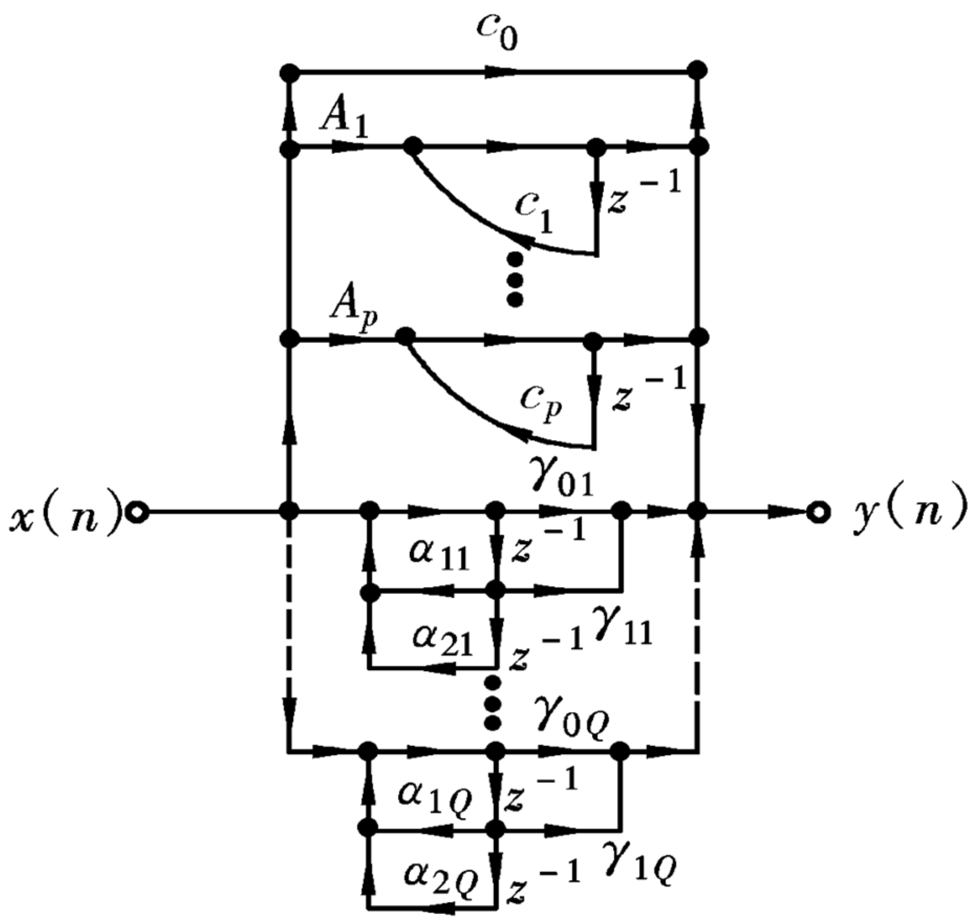
基本结构：一阶基本节和二阶基本节。

特点：1、可单独调整极点，不能直接控制零点；

2、误差小，各基本节的误差不相互影响；

3、速度快。

IIR滤波器并联结构图



§4.3 FIR数字滤波器的基本网络结构
(The Structure of FIR Filter)

FIR数字滤波器是一种非递归结构，其冲激相应 $h(n)$ **是有限长序列。**

$$H(z)=\sum_{n=0}^{N-1}h(n)z^{-n}$$

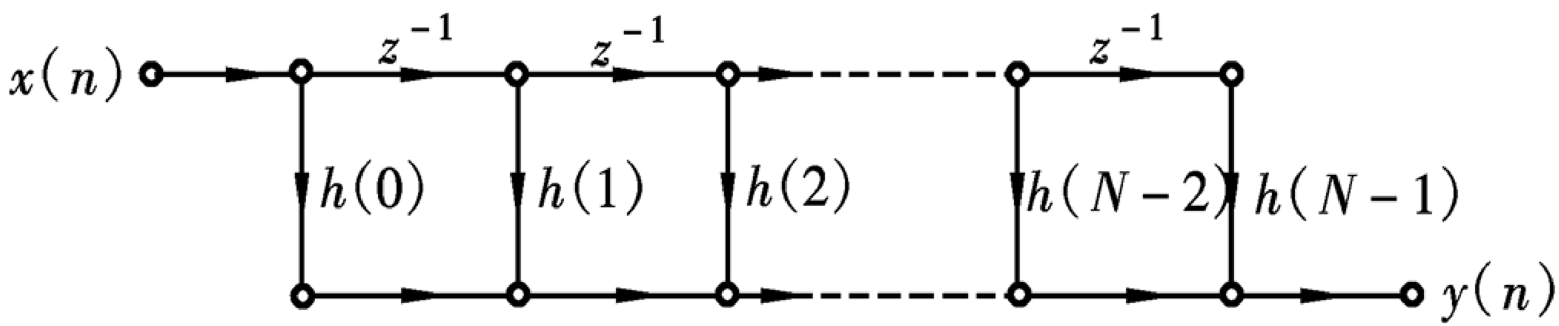
FIR系统仅在 $z=0$ **处有N-1阶极点，在其它地方没有极点，有(N-1)个零点分布在有限Z平面内的任何位置上。**

4.3.1直接型

差分方程： $y(n)=\sum_{k=0}^{N-1}h(k)x(n-k)$

系统函数：$H(z)=\sum_{n=0}^{N-1}h(n)z^{-n}$

$$=h(0)+h(1)z^{-1}+h(2)z^{-2}+\ldots++h(N-1)z^{-(N-1)}$$



FIR滤波器直接型结构图

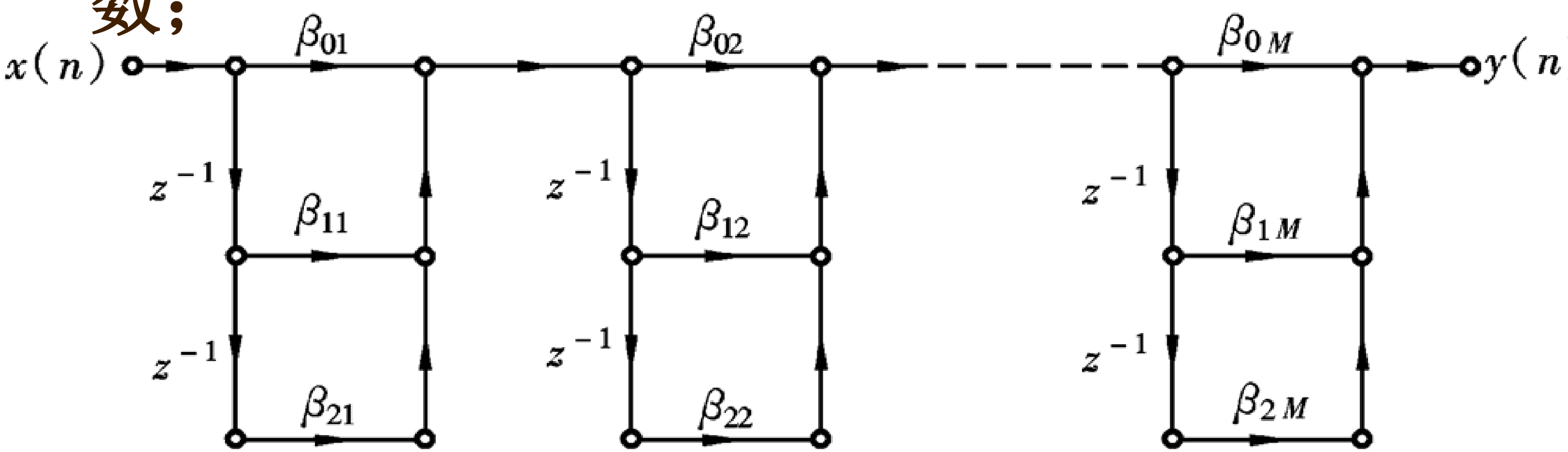
特点：只含前向通路。

4.3.2 级联型

系统函数：$H(z)=\sum_{k=0}^{N-1}h(k)z^{-k}$

$$=\prod_{k=1}^{M}(\beta_{0k}+\beta_{1k}\cdot z^{-1}+\beta_{2k}\cdot z^{-2})$$

$h(n)$ 为实系数；



FIR滤波器级联型结构图

特点：

1、每一个基本节控制一对零点；

2、乘法器较多；

3、遇到高阶时 $H(z)$ 难分解。

4.3.3 快速卷积型

已知两个长度为**N**的序列的线性卷积，可用**2N-1**点的循环卷积来代替。

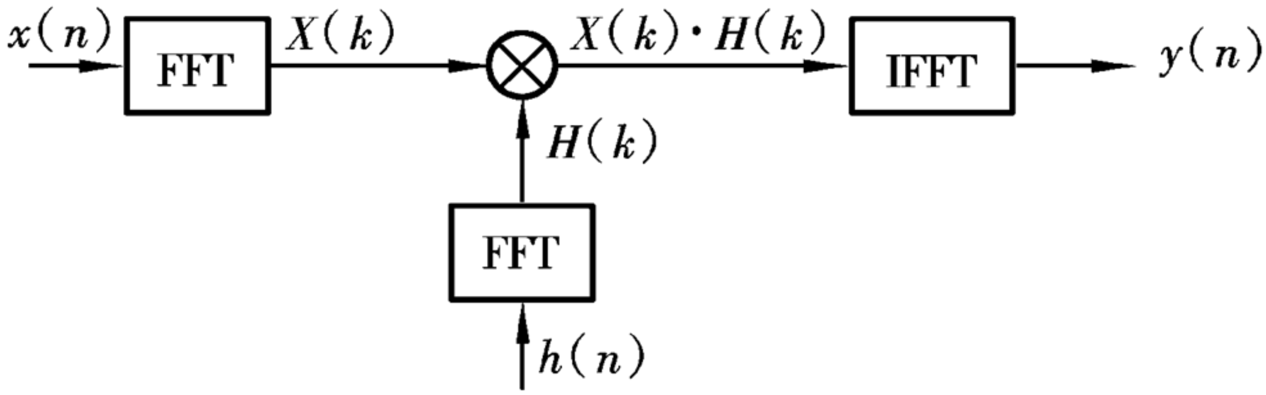
FIR滤波器输出：$y(n)=x(n)*h(n)$ 。

1.延长 $x(n)$ 、$h(n)$ 使：$x(n)*h(n)=x(n)\,\text{Ⓝ}\,h(n)$

2.计算：$X(k)=FFT[x(n)],H(k)=FFT[h(n)]$ ；

3.计算：$Y(k)=X(k)*H(k)$ ；

4.计算：$y(n)=IFFT\{X(k)*H(k)\}$ 。



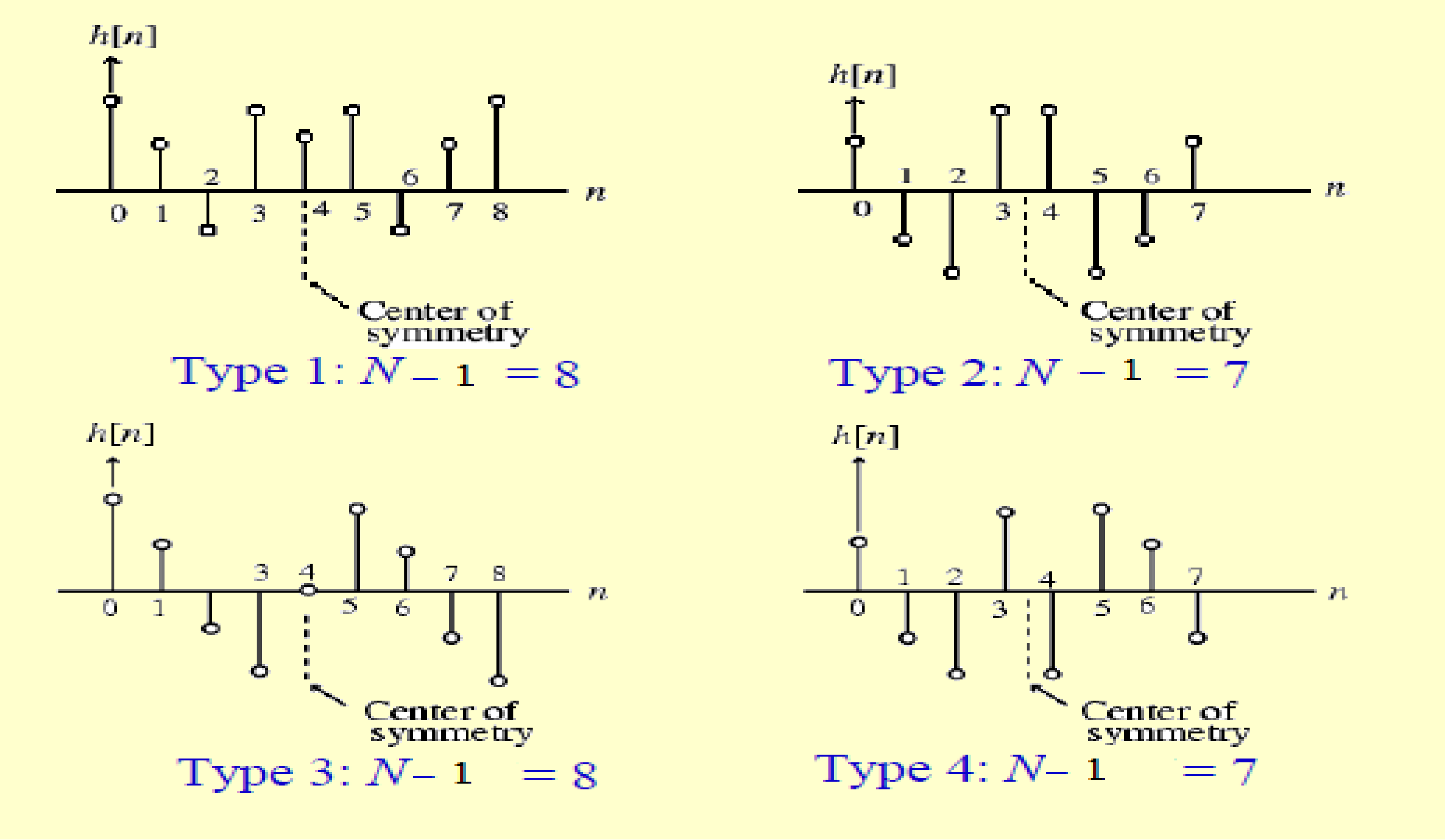
FIR滤波器快速卷积型结构图

特点：能对信号进行高速处理。需要实时处理时采用此结构。

4.3.4 线性相位型

A.线性相位FIR DF的条件：

单位取样响应：$h(n)=\pm h(N-1-n)$ ；



4.3.4 线性相位型

考虑 $h(n)=h(N-1-n)$ 时：

$h(n)$ 的Z变换为

$$H(z)=\sum_{n=0}^{N-1}h(n)z^{-n}=\sum_{n=0}^{N/2-1}h(n)z^{-n}+\sum_{n=N/2}^{N-1}h(n)z^{-n}$$

$$=\sum_{n=0}^{N/2-1}h(n)z^{-n}+\sum_{n=0}^{N/2-1}h(N-1-n)z^{-(N-1-n)}$$

1.当N为偶数时：

$$H(z)=\sum_{n=0}^{N/2-1} h(n)z^{-n}+\sum_{n=0}^{N/2-1} h(n)z^{-(N-1-n)}$$

$$=\sum_{n=0}^{N/2-1} h(n)[z^{-n}+z^{-(N-1-n)}]$$

令 $z=e^{j\omega}$，则系统的频率响应为：

$$H(e^{j\omega})=\sum_{n=0}^{N/2-1} h(n)[e^{-j\omega n}+e^{-j\omega(N-1-n)}]$$

$$=e^{-j\omega(N-1)/2}\{\sum_{n=0}^{N/2-1} h(n)\cos[\omega(n-\frac{N-1}{2})]\}$$

令 $a(n)=h(\frac{N}{2}-n)$ ，$n=1,2,\ldots,\frac{N}{2}$,则上式可写为：

$$H(e^{j\omega})=e^{-j\omega(N-1)/2}\{\sum_{n=0}^{N/2}a(n)\cos[\omega(n-\frac{1}{2})]\}$$

所以系统的幅度响应和相位响应为：

$$\begin{cases} H(\omega)=\sum_{n=0}^{N/2}a(n)\cos[\omega(n-\frac{1}{2})] \\ \phi(\omega)=-\omega(N-1)/2 \end{cases}$$

①幅度函数 $H(\omega)$ 是一个标量函数，可以包括正值和负值;

② $H(\omega)$ 对 π 呈奇对称;

③相位特性是广义线性的。

2.当N为奇数时： $H(z)=\sum_{n=0}^{N-1}h(n)z^{-n}$

$$=\sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}-1}h(n)z^{-n}+\sum_{n=\frac{N-1}{2}+1}^{N-1}h(n)z^{-n}+h(\frac{N-1}{2})z^{-\frac{N-1}{2}}$$

$$=\sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}-1}h(n)[z^{-n}+z^{-(N-1-n)}]+h(\frac{N-1}{2})z^{-(N-1)/2}$$

令 $z=e^{j\omega}$**，则系统的频率响应为：**

$$H(e^{j\omega})=e^{-j\omega(N-1)/2}\{h(\frac{N-1}{2})+\sum_{n=0}^{\frac{N-3}{2}}2h(n)\cos[\omega(\frac{N-1}{2}-n)]\}$$

$$=e^{-jw\frac{N-1}{2}}\left\{h\left(\frac{N-1}{2}\right)+\sum_{m=1}^{\frac{N-1}{2}}2h\left(\frac{N-1}{2}-m\right)\cos(wm)\right\}\quad m=\frac{N-1}{2}-\mathrm{n}$$

令 $b(0)=h(\frac{N-1}{2}), b(n)=2h(\frac{N-1}{2}-n)$ $n=1,2,\ldots,\frac{N-1}{2}$

则上式可写为： $H(e^{j\omega})=e^{-j\omega(N-1)/2}\{\sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}} b(n)\cos(\omega n)\}$

所以系统的幅度响应和相位响应为：

$$\begin{cases} H(\omega)=\sum_{n=0}^{(N-1)/2} b(n)\cos(\omega n) \\ \phi(\omega)=-\omega(N-1)/2 \end{cases}$$

① $H(\omega)$ 对$0,\pi,2\pi$ 呈偶对称；

②相位特性是广义线性的。

可以证明，当$h(n)=-h(N-1-n)$ 时，滤波器的相位响应为：

$$\varphi(\omega)=-\frac{N-1}{2}\omega+\frac{\pi}{2}$$

B.线性相位FIR DF系统函授的零点分布；

零点分布：两组共轭对，$z, \frac{1}{z}, z^*, \frac{1}{z^*}$ ；

因为：$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} h(N-1-n) z^{-n}$$

$$= \sum_{m=0}^{N-1} h(m) z^{-(N-1-m)}$$

$$= z^{-(N-1)} \sum_{m=0}^{N-1} h(m) z^{m}$$

所以：$H(z) = z^{-(N-1)} H(z^{-1})$ ，

即：当 z 为零点时，$\frac{1}{z}$ 也为零点。

当 $h(n)$ 为实序列时，有：

$$H(z^*)=\sum_{n=0}^{N-1}h(n)(z^*)^{-n}=[\sum_{n=0}^{N-1}h(n)z^{-n}]^*=H^*(z)$$

即：当 z 为零点时，z^* 也为零点。

例4.3.1 已知线性相位FIR滤波器的单位取样响应

$h(n)$ 为实序列， $z=-\frac{1}{2}-j\frac{1}{2}$ 为$H(z)$一个零点，

求 $H(z)$ 的其它零点？

解：若滤波器的单位取样响应 $h(n)$ 为实序列，

当 $z=-\frac{1}{2}-j\frac{1}{2}$ 为其零点时，

则 $z=-\frac{1}{2}+j\frac{1}{2},-1+j,-1-j$ 也为零点。

Z=1,-1的零点判断：

Type 2 FIR filter $H(z)=z^{-(N-1)}H(z^{-1})$

- Hence $H(-1)=(-1)^{-(N-1)}H(-1)=-H(-1)$

$H(-1)=0$,

zero at $z=-1$

Type 3 or 4 FIR filter $H(z) = -z^{-(N-1)}H(z^{-1})$

$H(1)=-(1)^{-(N-1)}H(1)=-H(1)$

$H(z)$ must have a zero at $z=1$

Type 3 FIR filter

- Hence $H(-1)=-(-1)^{-(N-1)}H(-1)=-H(-1)$

$H(-1)=0$,

zero at $z=-1$

零点对设计滤波器的限制：

- A Type 2 FIR filter cannot be used to design a highpass filter since it always has a zero $z = -1$
- A Type 3 FIR filter has zeros at both $z = 1$ and $z = -1$, and hence cannot be used to design either a lowpass or a highpass or a bandstop filter

零点对设计滤波器的限制：

- A Type 4 FIR filter is not appropriate to design a lowpass filter due to the presence of a zero at $z = 1$
- Type 1 FIR filter has no such restrictions and can be used to design almost any type of filter

C.实线性相位FIR DF系统函授的系数特点；

系统函数多项式的系数是镜像多项式或反镜像多项式：

实数偶对称序列： $h(n)=h(N-1-n)$

系统函数： $H(z)=z^{-(N-1)}H(z^{-1})$

mirror-image polynomial (MIP)

实数奇对称序列： $h(n)=-h(N-1-n)$

系统函数： $H(z)=-z^{-(N-1)}H(z^{-1})$

antimirror-image polynomial (AIP)

如一个四阶系统 $H(z)$ 的的形式是：

$$a+bz^{-1}+cz^{-2}+bz^{-3}+az^{-4}$$

C.实线性相位FIR DF系统函授的系数特点

例4.3.2 已知线性相位FIR滤波器的单位取样响应为：$h(n)=2\delta(n)-4\delta(n-1)+a\cdot\delta(n-2)+b\cdot\delta(n-3)$，则 a,b 的值分别为多少？

解：线性相位FIR滤波器的单位取样响应的系数具有奇对称或偶对称的性质，即：

$$a=-4, b=2 \quad \text{或} \quad a=4, b=-2$$

C.实线性相位FIR DF系统函授的系数特点

举例：设计具有线性相位的滤波器

4.3.3 已知输入信号为 $x(n) = \cos(0.1n) + \cos(0.4n)$ **设计一个高通FIR滤波器，使得输出信号** $y(n)$ **仅保留输入信号的高频分量。**

解：输入：$x(n) = \cos(0.1n) + \cos(0.4n)$

输出：$y(n) = \cos(0.4n)$

$$\left|H(e^{j0.1})\right| = 0$$

$$\left|H(e^{j0.4})\right| = 1$$

举例：设计具有线性相位的滤波器

选择：type1 $\mathrm{h}(n)=\{\alpha,\beta,\alpha\}\ n=0,1,2$

$$
\begin{aligned}
H(e^{j\omega}) &= h[0]+h[1]e^{-j\omega}+h[2]e^{-j2\omega} \\
&= \alpha(1+e^{-j2\omega})+\beta e^{-j\omega} \\
&= 2\alpha\left(\frac{e^{j\omega}+e^{-j\omega}}{2}\right)e^{-j\omega}+\beta e^{-j\omega} \\
&= (2\alpha\cos\omega+\beta)e^{-j\omega}
\end{aligned}
$$

$$
\left|H(e^{j\omega})\right| = 2\alpha\cos\omega+\beta
$$

$$
\theta(\omega) = -\omega
$$

举例：设计具有线性相位的滤波器

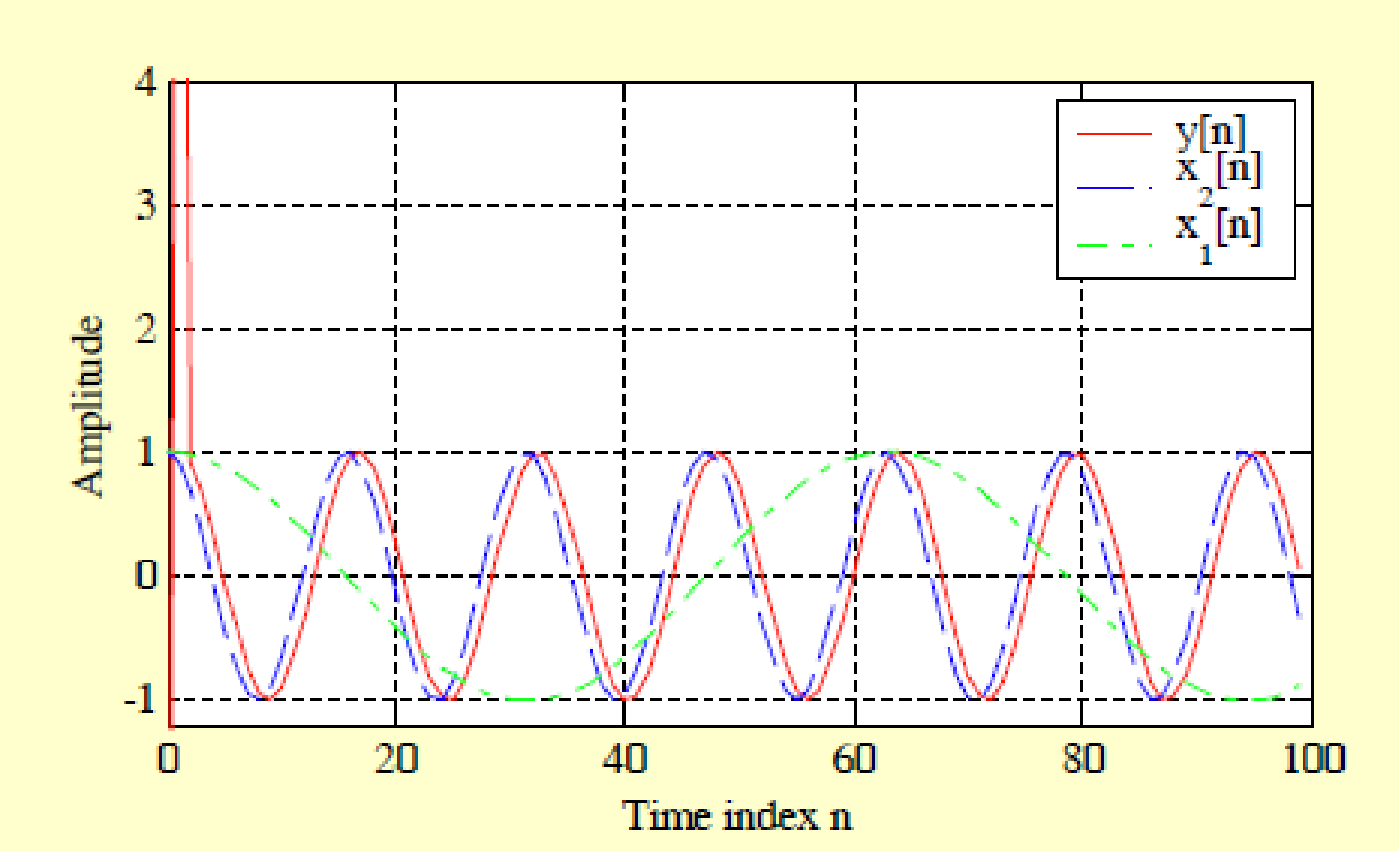
$$\left|H(e^{j0.1})\right| = 2\alpha\cos(0.1) + \beta = 0$$
$$\left|H(e^{j0.4})\right| = 2\alpha\cos(0.4) + \beta = 1$$

$$\alpha = -6.76195$$
$$\beta = 13.456335$$

$$y[n] = -6.76195\left(x[n] + x[n-2]\right) + 13.456335\,x[n-1]$$

$$x[n] = \{\cos(0.1n) + \cos(0.4n)\}\mu[n]$$

举例：设计具有线性相位的滤波器



举例：设计具有线性相位的滤波器

n	$\cos(0.1n)$	$\cos(0.4n)$	$x[n]$	$y[n]$
0	1.0	1.0	2.0	−13.52390
1	0.9950041	0.9210609	1.9160652	13.956333
2	0.9800665	0.6967067	1.6767733	0.9210616
3	0.9553364	0.3623577	1.3176942	0.6967064
4	0.9210609	−0.0291995	0.8918614	0.3623572
5	0.8775825	−0.4161468	0.4614357	−0.0292002
6	0.8253356	−0.7373937	0.0879419	−0.4161467

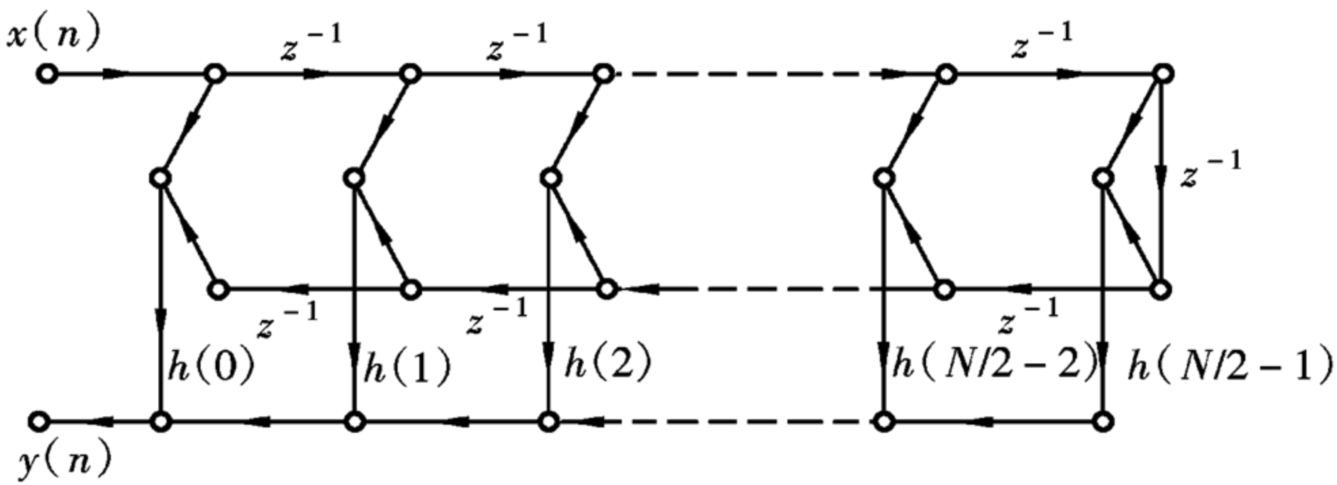
D.线性相位FIR DF的网络结构

当 $h(n)=h(N-1-n)$**，且N为偶数时：**

$$H(z)=\sum_{n=0}^{N/2-1} h(n)[z^{-n}+z^{-(N-1-n)}]$$

$$H(z)=h(0)[z^{0}+z^{-(N-1)}]+\ldots+h(\frac{N}{2}-1)[z^{-(N/2-1)}+z^{-(N/2-2)}]$$

结构流图如下所示：



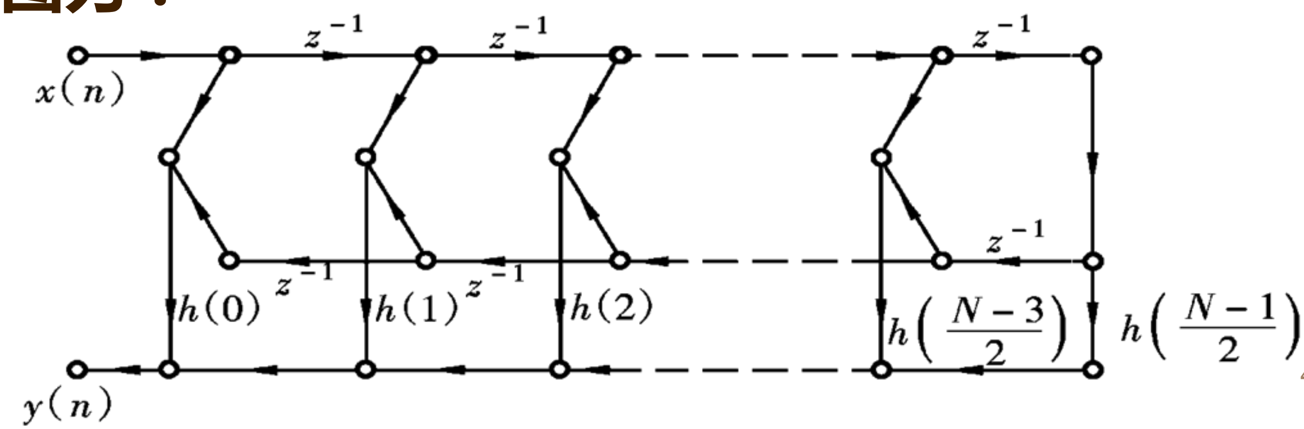
当 $h(n)=h(N-1-n)$ **，且N为奇数时：**

$$H(z)=\sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}-1} h(n)[z^{-n}+z^{-(N-1-n)}]+h(\frac{N-1}{2})z^{-(N-1)/2}$$

$$=h(0)\left[z^{0}+z^{-(N-1)}\right]+h(1)\left[z^{1}+z^{-(N-2)}\right]+\cdots$$

$$+h\left(\frac{N-1}{2}-1\right)\left[z^{-(\frac{N-1}{2}-1)}+z^{-(\frac{N-1}{2}+1)}\right]+h\left(\frac{N-1}{2}\right)z^{-(\frac{N-1}{2})}$$

其结构流图为：



4.3.5 频率取样型

上章已证明：长度为N的有限长序列的z变换可用围绕单位圆上的N个等间隔的取样值来表示。即：

$$X(z)=\frac{1-z^{-N}}{N}\mathrm{g}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{X(k)}{1-W_N^{-k}\cdot z^{-1}}$$

对FIR系统，其冲激相应$h(n)$是有限长的（长度为N），根据上述的插值公式，FIR系统的系统函数可表示为：$H(z)=\frac{1-z^{-N}}{N}\mathrm{g}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{H(k)}{1-W_N^{-k}\cdot z^{-1}}$

其中$H(k)$是$h(n)$ 的z变换在各点上的取样值，

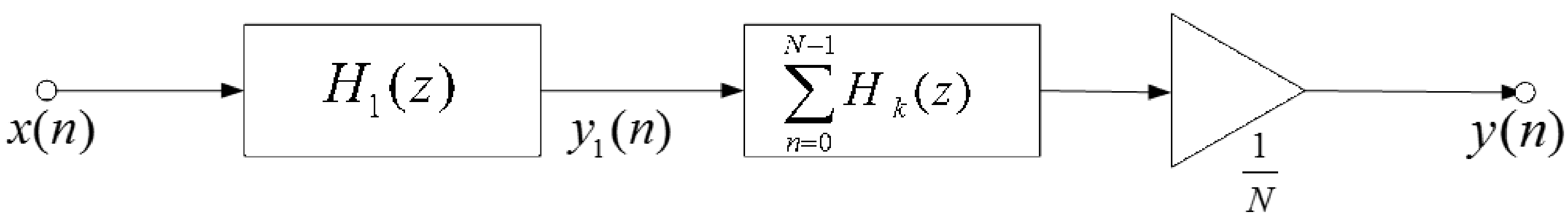
即 $H(k)=H(z)\big|_{z=W_N^{-k}}$

上式为实现FIR滤波器提供了另一种结构，由两个串联网络组成，即：

$$H(z)=\frac{1}{N}H_1(z)\cdot H_2(z)=\frac{1-z^{-N}}{N}\cdot\sum_{k=0}^{N-1}\frac{H(k)}{1-W_N^{-k}\cdot z^{-1}}$$

$$=\frac{1}{N}H_1(z)\cdot\sum_{k=0}^{N-1}H_k(z)$$

其串联网络如下图所示：



第一节网络 $H_1(z)$ 是由**N**节延迟线组成的梳状滤波器。

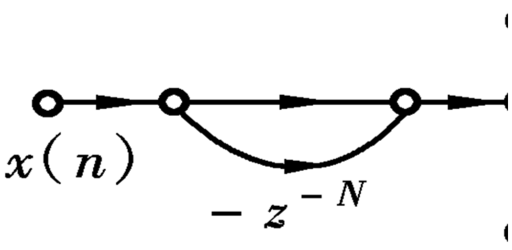
$H_1(z)=1-z^{-N}$ 相应的差分方程为：$y_1(n)=x(n)-x(n-N)$

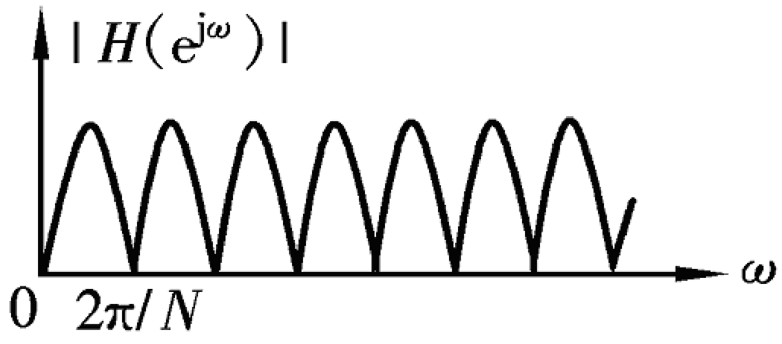
$H_1(z)$ 在单位圆上有**N**个等分零点，

即： $z_k=e^{j\frac{2\pi}{N}k},k=0,1,2\ldots N-1$

其频率响应为：$H_1(e^{j\omega})=1-e^{-j\omega N}$ $\left|H_1(e^{j\omega})\right|=2\left|\sin(\frac{N\omega}{2})\right|$

$H_1(z)$ 的流图和幅频特性表示如图：





第二个网络 $H_2(z)$ 是并联的一阶网络：$H_2(z)=\sum_{k=0}^{N-1}H_k(z)$

每个一阶网络 $H_k(z)$ 是一个谐振器：$H_k(z)=\dfrac{H(k)}{1-W_N^{-k}\cdot z^{-1}}$

每个一阶网络在单位圆上有一个极点：

$$1-W_N^{-k}\cdot z^{-1}=0\rightarrow z_k=W_N^{-k}=e^{j\frac{2\pi}{N}k}$$

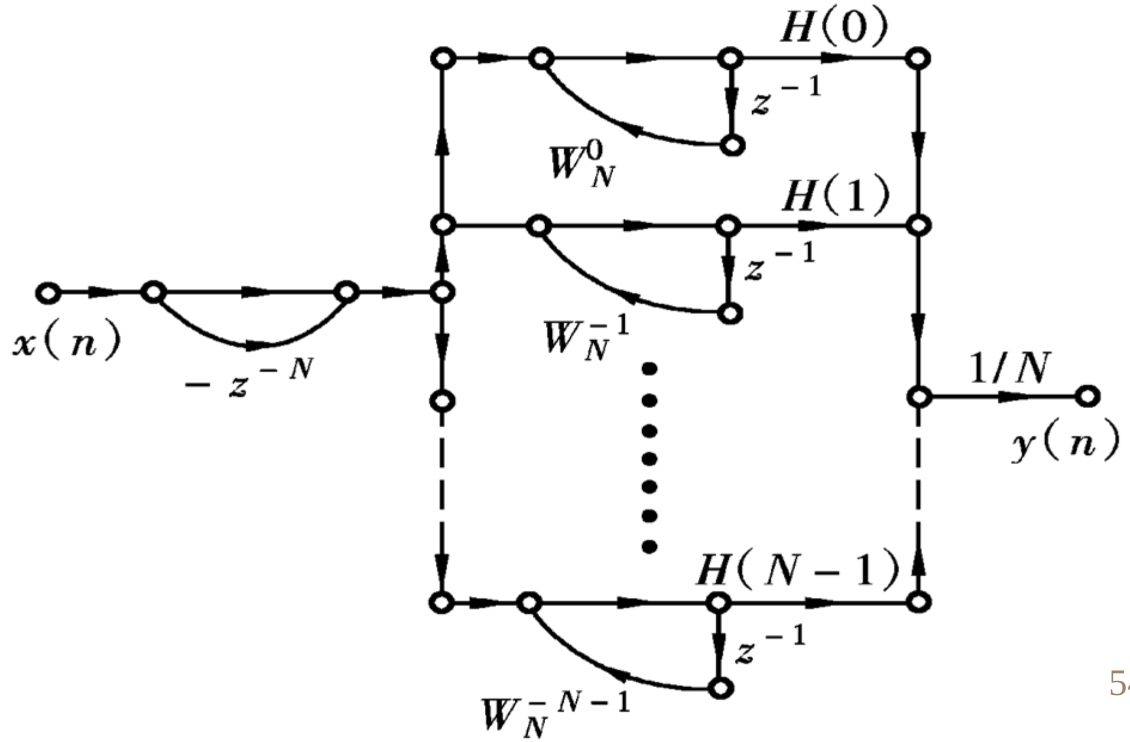
结论：

1.由**N**个谐振器并联的网络有**N**个极点；

2.网络对 $\omega=\dfrac{2\pi}{N}k$ **k＝0，1，2，……（N－1）**的响应为无穷大；

3.并联谐振器的极点正好各自与梳状滤波器的零点相抵消，从而使这个频率上的响应等于**H(k)**。

由$H_1(z)$ 和$H_2(z)$ 联接起来的网络（频率取样结构）如下图所示：



FIR系统频率取样结构的主要特点是：并联谐振器的系数 $H(k)$ 就是滤波器在$\omega=\frac{2\pi}{N}k$ 处的响应，因此控制其响应是很直接的。

缺点：

1.所有的相乘系数 $H(k)$和 W_N^{-k}都是复数，复数乘法比较麻烦；

2.所有谐振器的极点均在单位圆上，如果滤波器的系数稍有误差，极点就可能移到单位圆外，系统不容易稳定。

为克服上述缺点，采取两项措施：

1.将谐振器的极点从单位圆上向内收缩，使极点处在半径为**r**的圆上，**r**稍微小于**1**，则 $H(z)$ 为：

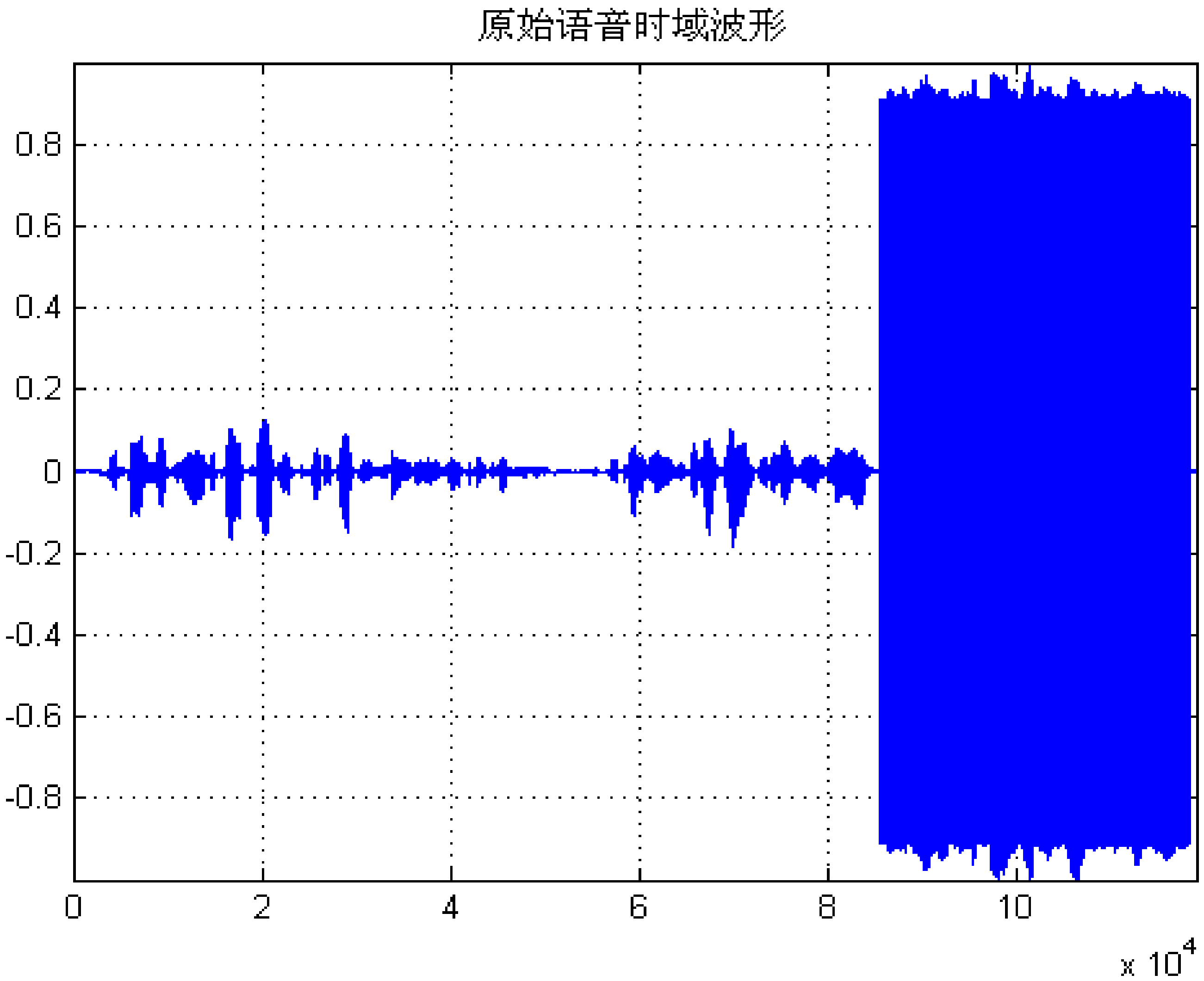
$$H(z)=\frac{1-r^{N}z^{-N}}{N}\mathrm{g}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{H_{r}(k)}{1-r\cdot W_{N}^{-k}\cdot z^{-1}}$$

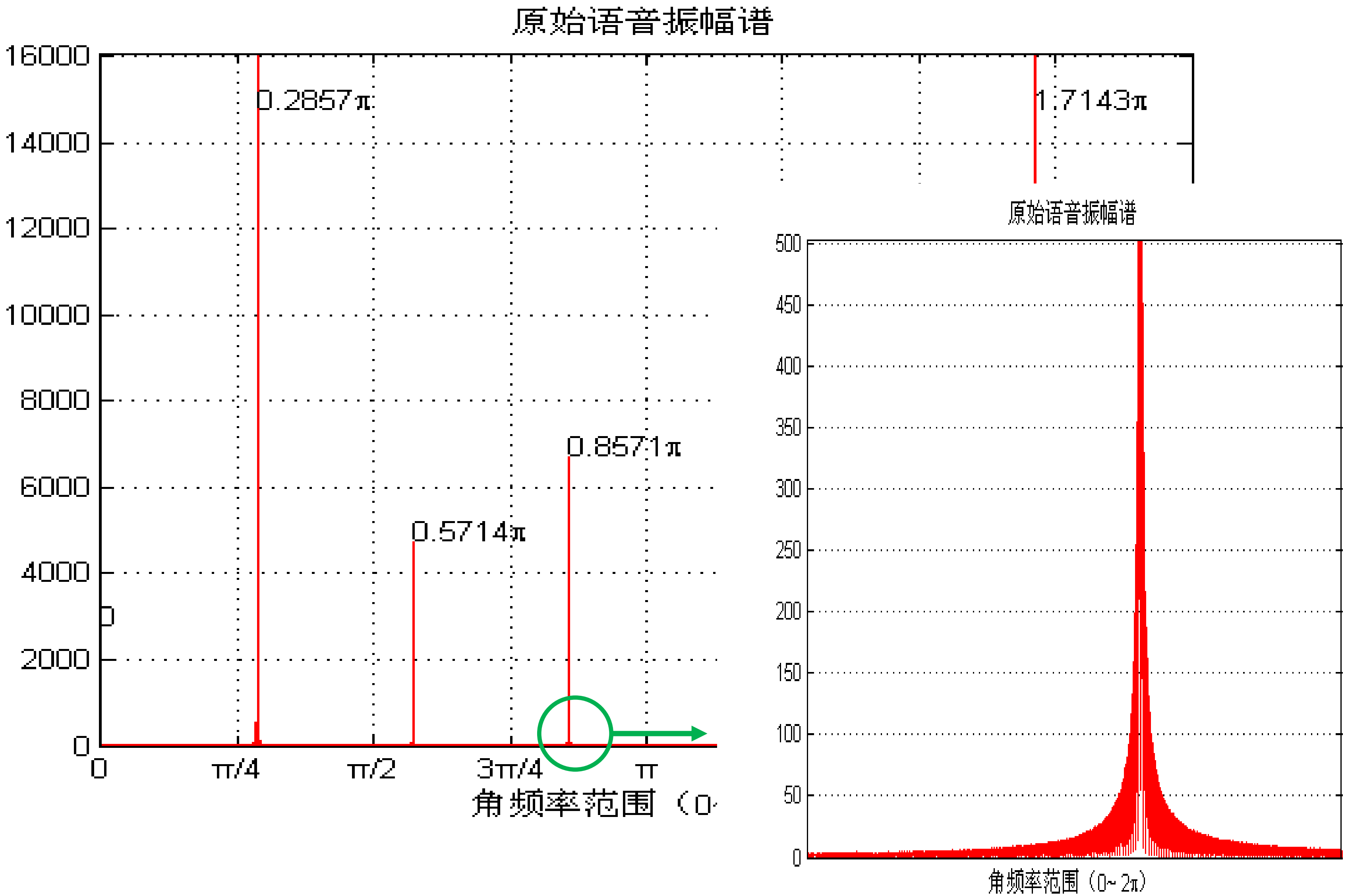
2.使系数的复乘法运算变成实数相乘，可使复一阶网络用实系数的二阶网络来实现。

如果 $h(n)$为实数序列，则 $H(k)$具有共扼对称性，

即：
$$\begin{cases}|H(k)|=|H(N-k)| \\ \theta(k)=-\theta(N-k)\end{cases}\qquad k=0,1,2,\ldots,N-1$$

补充 2.7 系统零极点位置对系统频率响应的影响实现信号滤波

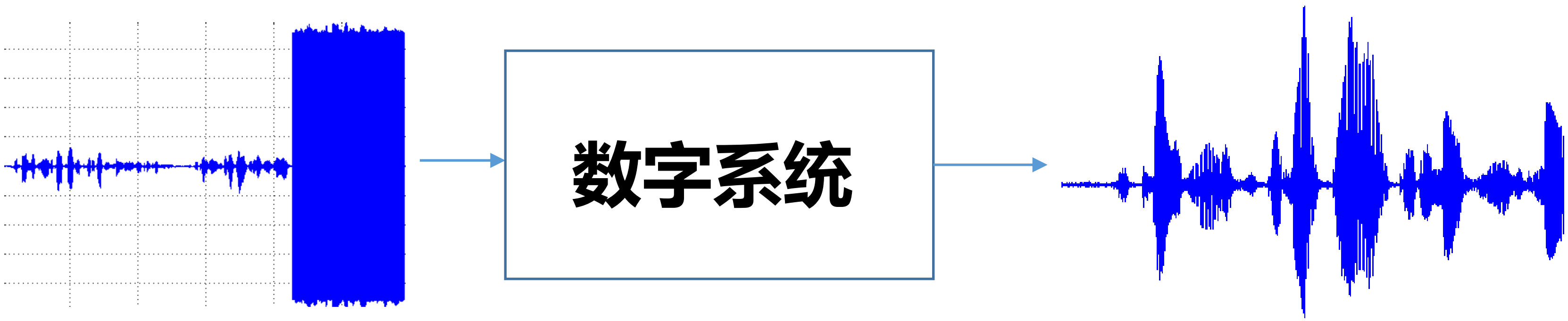




问题：如何 衰减 特定角频率 的信号分量？

补充 2.7 利用零极点向量实现信号滤波

回顾：



$$X(e^{i\omega}) \rightarrow \boxed{H(e^{i\omega})} \rightarrow Y(e^{i\omega})$$

$$\boxed{\mathbf{Y(e^{i\omega}) = X(e^{i\omega}) * H(e^{i\omega})}}$$

$$\left|Y(e^{i\omega})\right| = \left|X(e^{i\omega})\right| * \left|H(e^{i\omega})\right|$$

2.7 利用零极点向量实现信号滤波

- **零极点向量**表示系统的频率响应 $\mathbf{H}(e^{i\omega})$:

零点向量

$$\mathrm{H}(e^{i\omega})=\frac{\boxed{\left(e^{i\omega}-r_1e^{i\omega_1}\right)}*\cdots*\left(e^{i\omega}-r_Me^{i\omega_M}\right)}{\boxed{\left(e^{i\omega}-d_1e^{i\tau_1}\right)}*\cdots*\left(e^{i\omega}-d_Ne^{i\tau_N}\right)}*\mathbf{p}*e^{i\omega(N-M)}$$

极点向量

- **仅零点向量**的系统频率响应 $\mathbf{H}(e^{i\omega})$:

$$\mathrm{H}(e^{i\omega})=\left(e^{i\omega}-r_1e^{i\omega_1}\right)*\cdots*\left(e^{i\omega}-r_Me^{i\omega_M}\right)*\mathbf{p}*e^{-i\omega M}$$

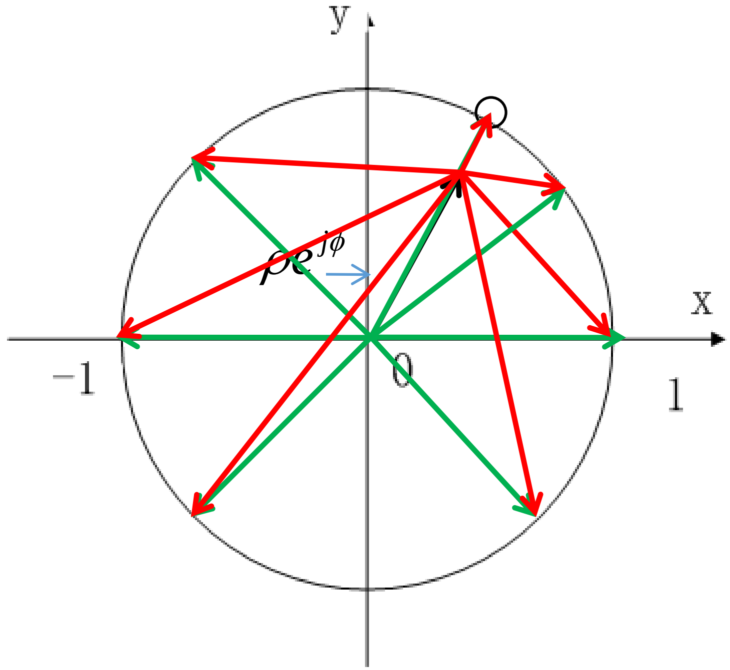
2.7.1 单零点向量的槽口滤波器

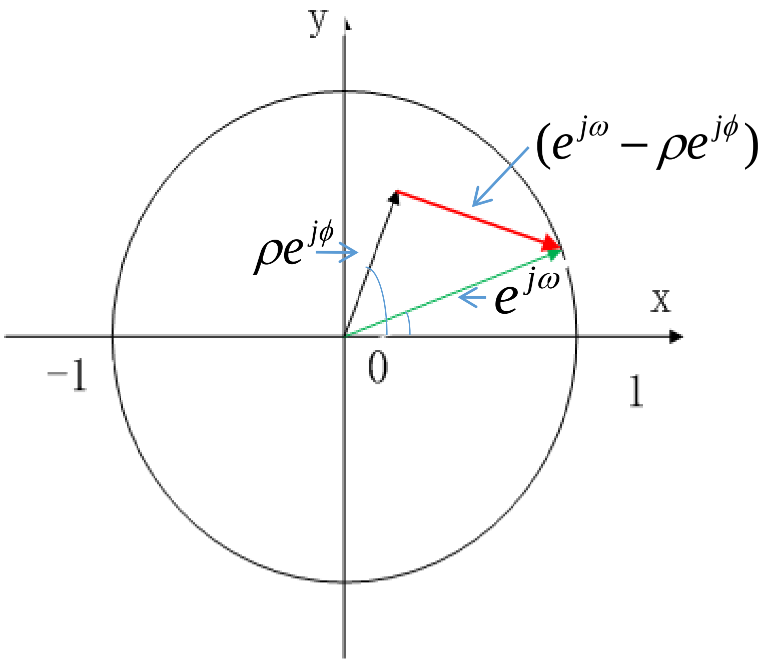
$$X(e^{i\omega}) \rightarrow \boxed{H(e^{i\omega})=e^{i\omega}-\rho e^{i\phi}} \rightarrow Y(e^{i\omega})$$

系统幅度响应函数：

$$\left|H(e^{i\omega})\right|=\left|e^{i\omega}-\rho e^{i\phi}\right|$$

$$\left|H(e^{i\phi})\right|=\left|e^{i\phi}-\rho e^{i\phi}\right|=\left|1-\rho\right|$$

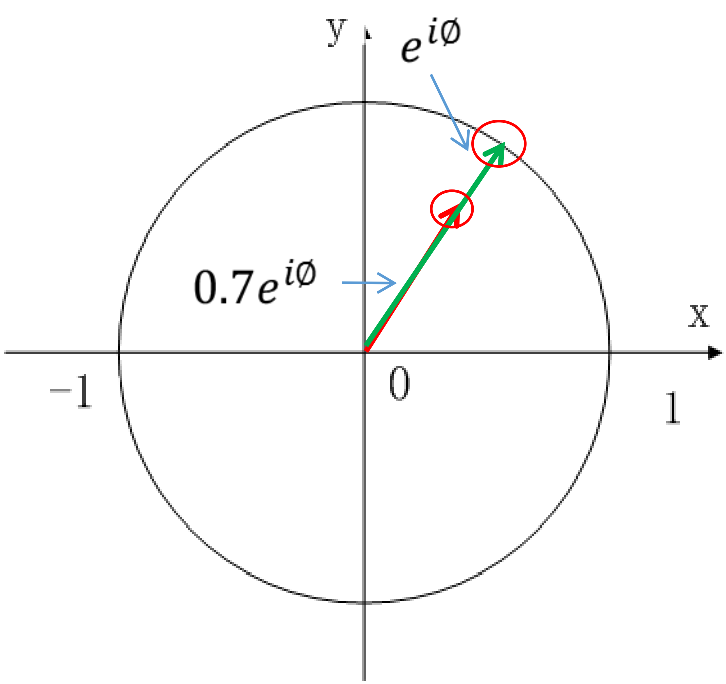


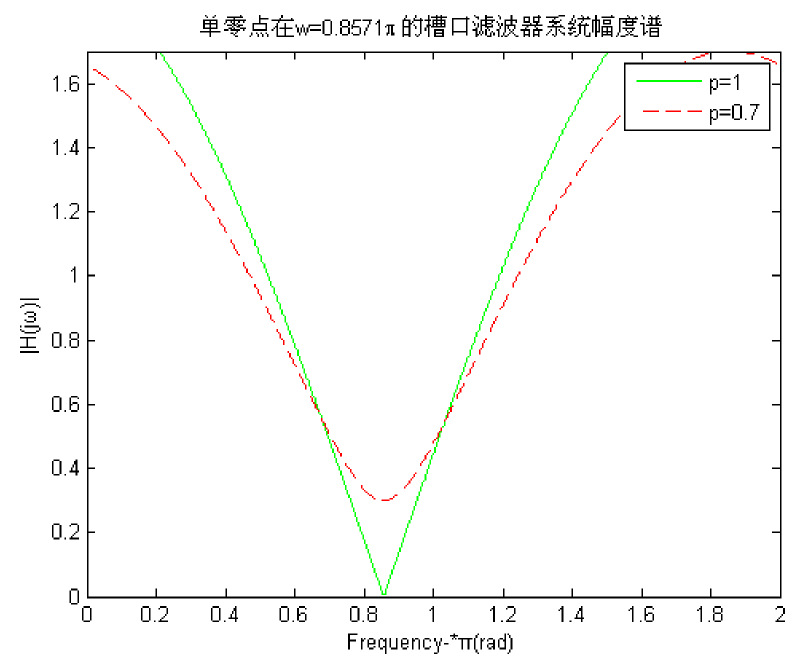


2.7.1 单零点向量的槽口滤波器

$$X(e^{i\omega}) \longrightarrow \boxed{H(e^{i\omega})=e^{i\omega}-\rho e^{i\emptyset}} \longrightarrow Y(e^{i\omega})$$

当零点在单位圆上，系统振幅响应为0.

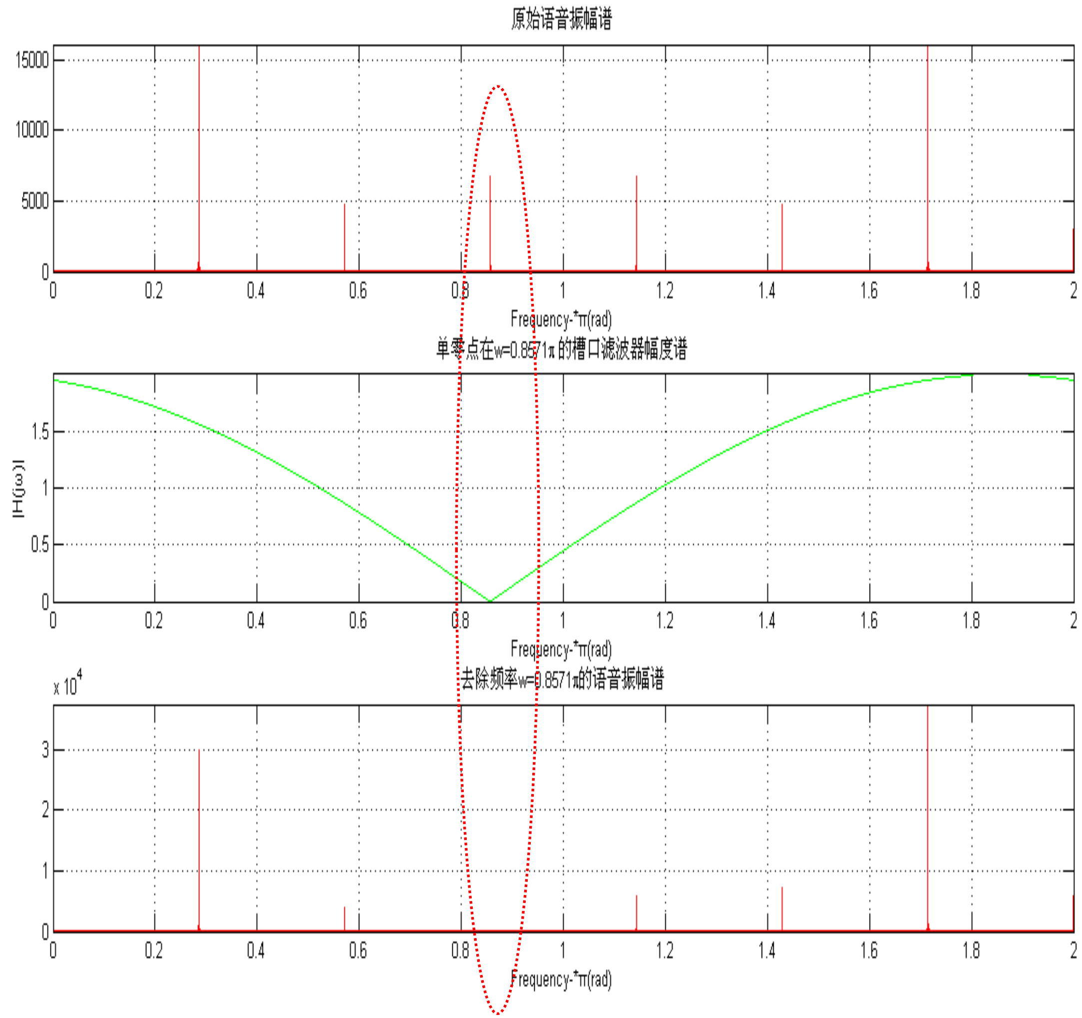




2.7.1 单零点向量的槽口滤波器

$$H(e^{jw}) = 1 - e^{j0.8571\pi} * e^{-j\omega}$$

y[n]



2.7.1 多零点向量的槽口滤波器

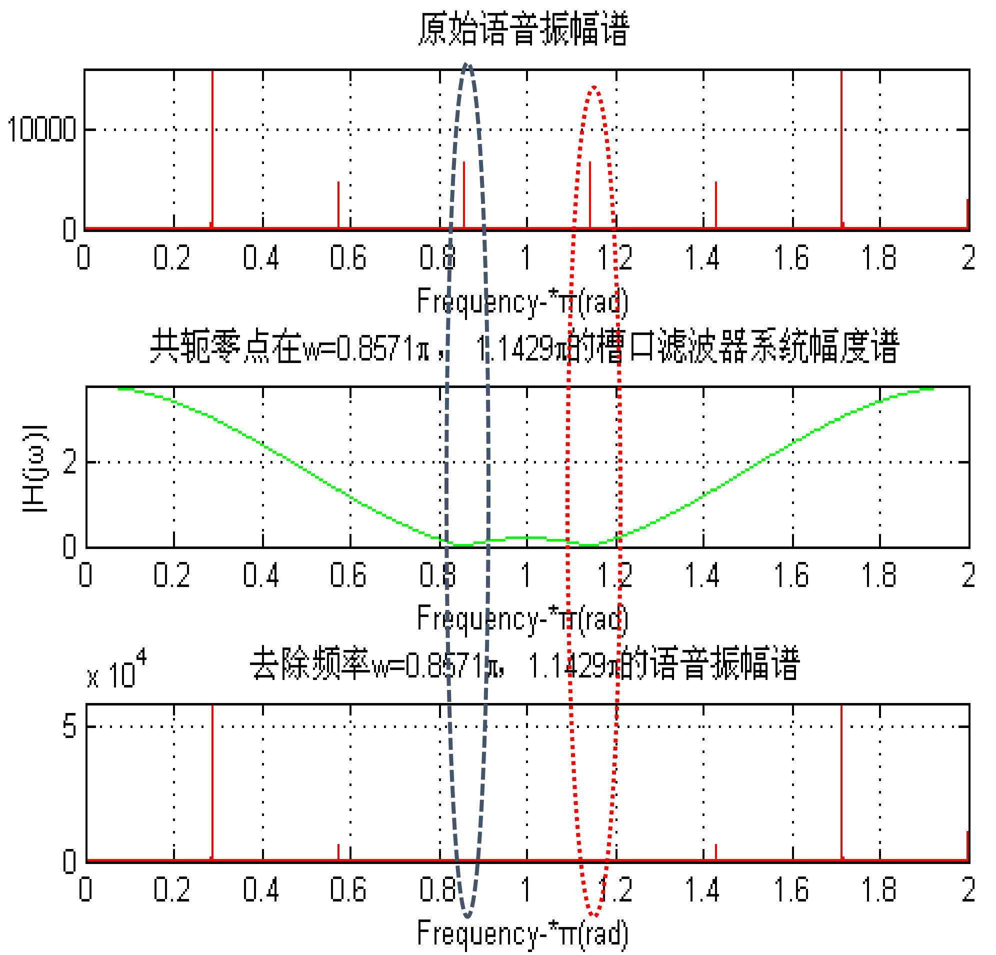
问题：如何 衰减 多个 指定角频率 的信号分量？

x[n]

$$H(e^{jw})=1-e^{j1.1429\pi}*e^{-j\omega}$$

$$H(e^{jw})=1-e^{j0.8571\pi}*e^{-j\omega}$$

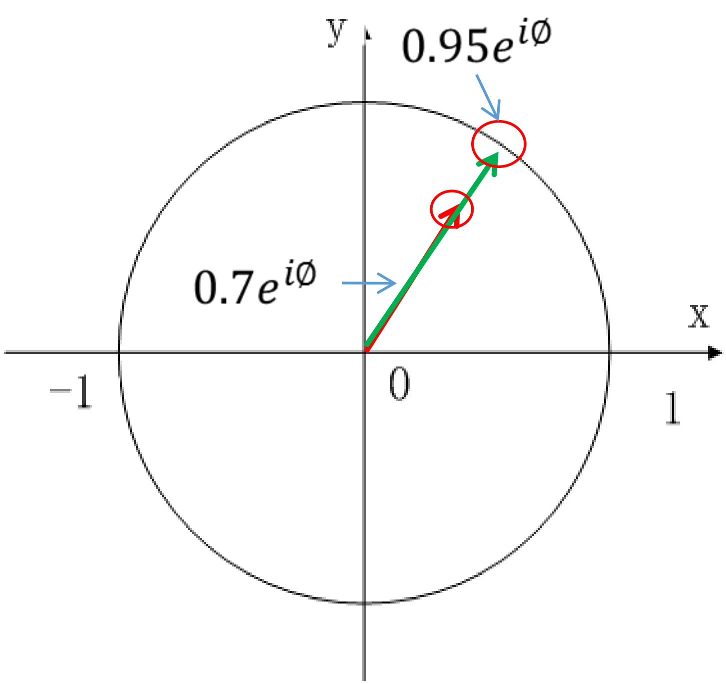
y[n]

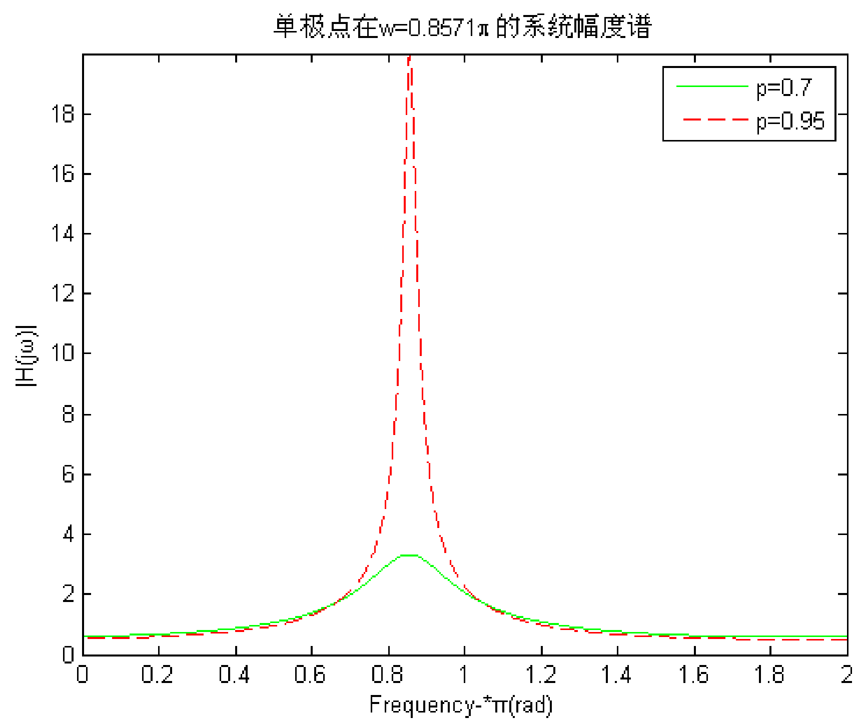


2.7.2 单**极点向量**的系统函数分析

$X(e^{i\omega}) \rightarrow \boxed{H(e^{i\omega})=\frac{1}{e^{i\omega}-\rho e^{i\phi}}} \rightarrow Y(e^{i\omega})$

当极点在单位圆内，且靠近单位圆，系统振幅响应 远大于1.

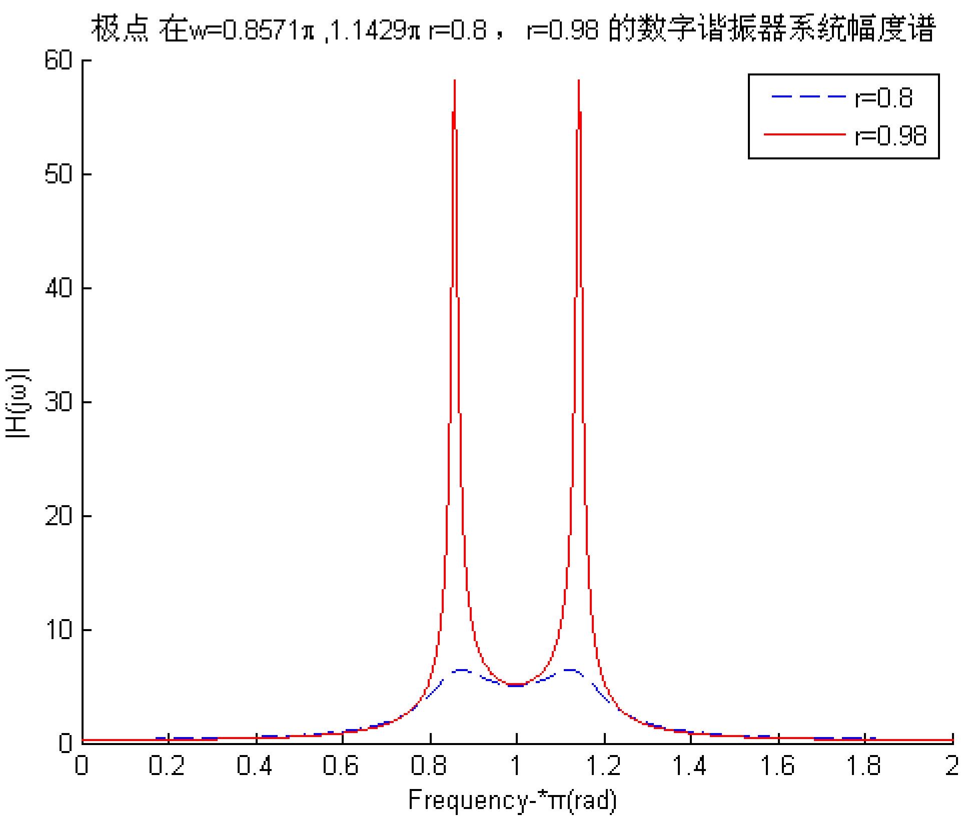




2.7.2 共轭极点向量的数字谐振器

$X(e^{i\omega})$ → $$H(e^{i\omega})=\frac{1}{\left(1-re^{i\emptyset}e^{-i\omega}\right)\left(1-re^{-i\emptyset}e^{-i\omega}\right)}$$ → $Y(e^{i\omega})$

- 两极点带通滤波器，共振频率$w=\emptyset$或附近

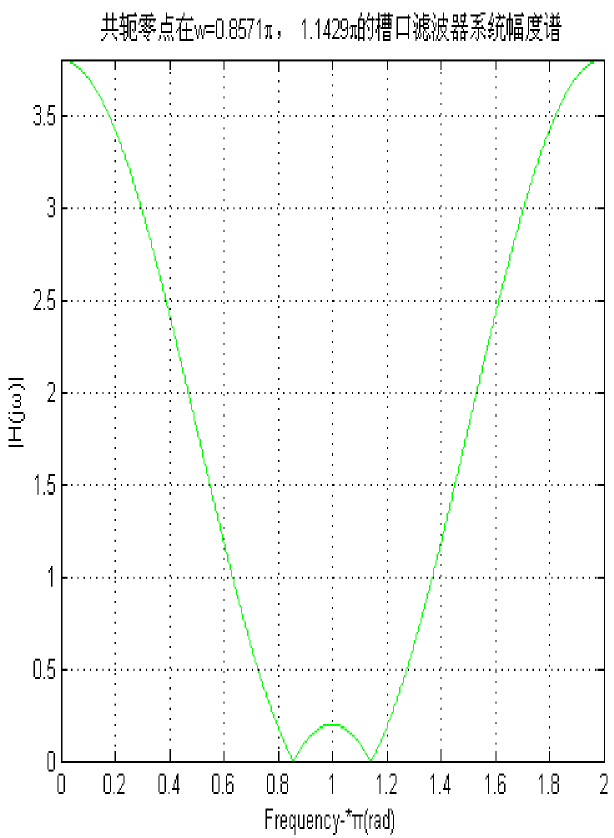


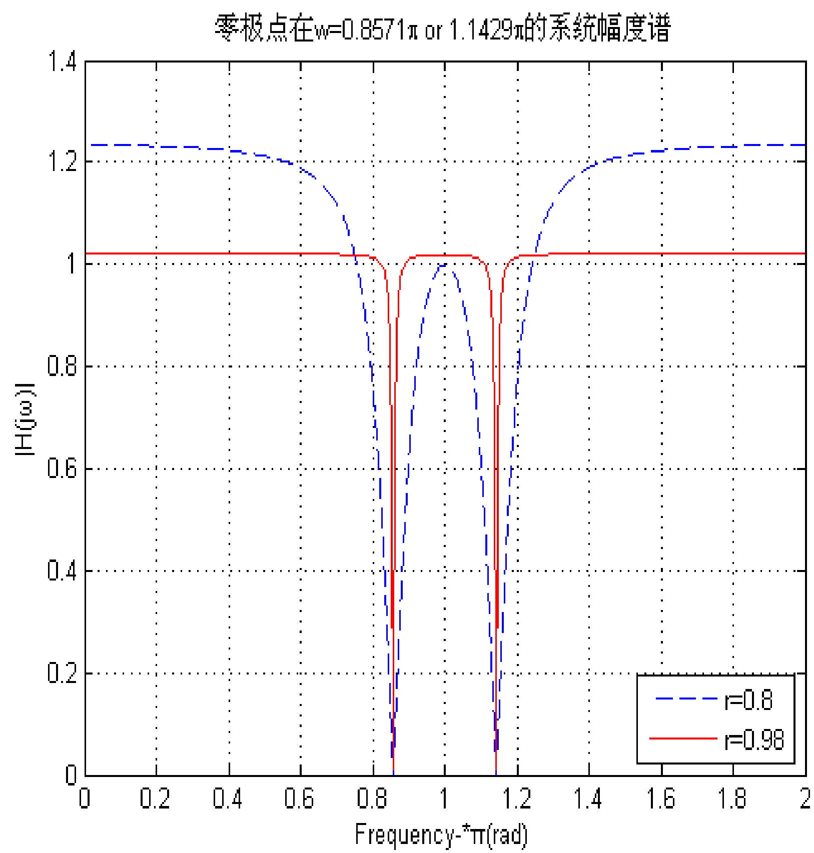
2.7.3 共轭零点槽口滤波器+共轭极点向量的数字谐振器

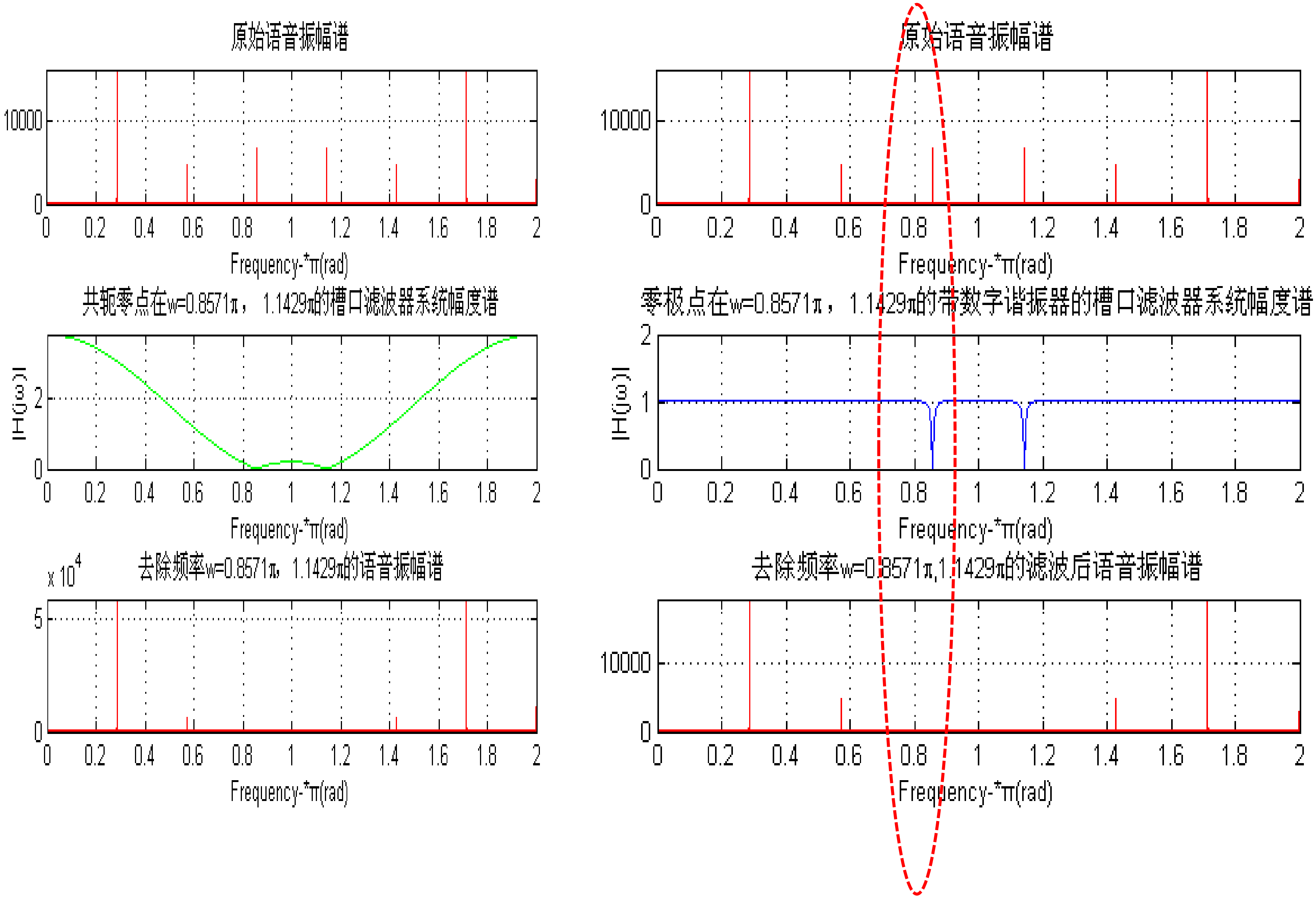
$X(e^{i\omega})$

$$H(e^{i\omega})=\frac{\left(1-e^{i\emptyset}e^{-i\omega}\right)\left(1-e^{-i\emptyset}e^{-i\omega}\right)}{\left(1-re^{i\emptyset}e^{-i\omega}\right)\left(1-re^{-i\emptyset}e^{-i\omega}\right)}$$

$Y(e^{i\omega})$

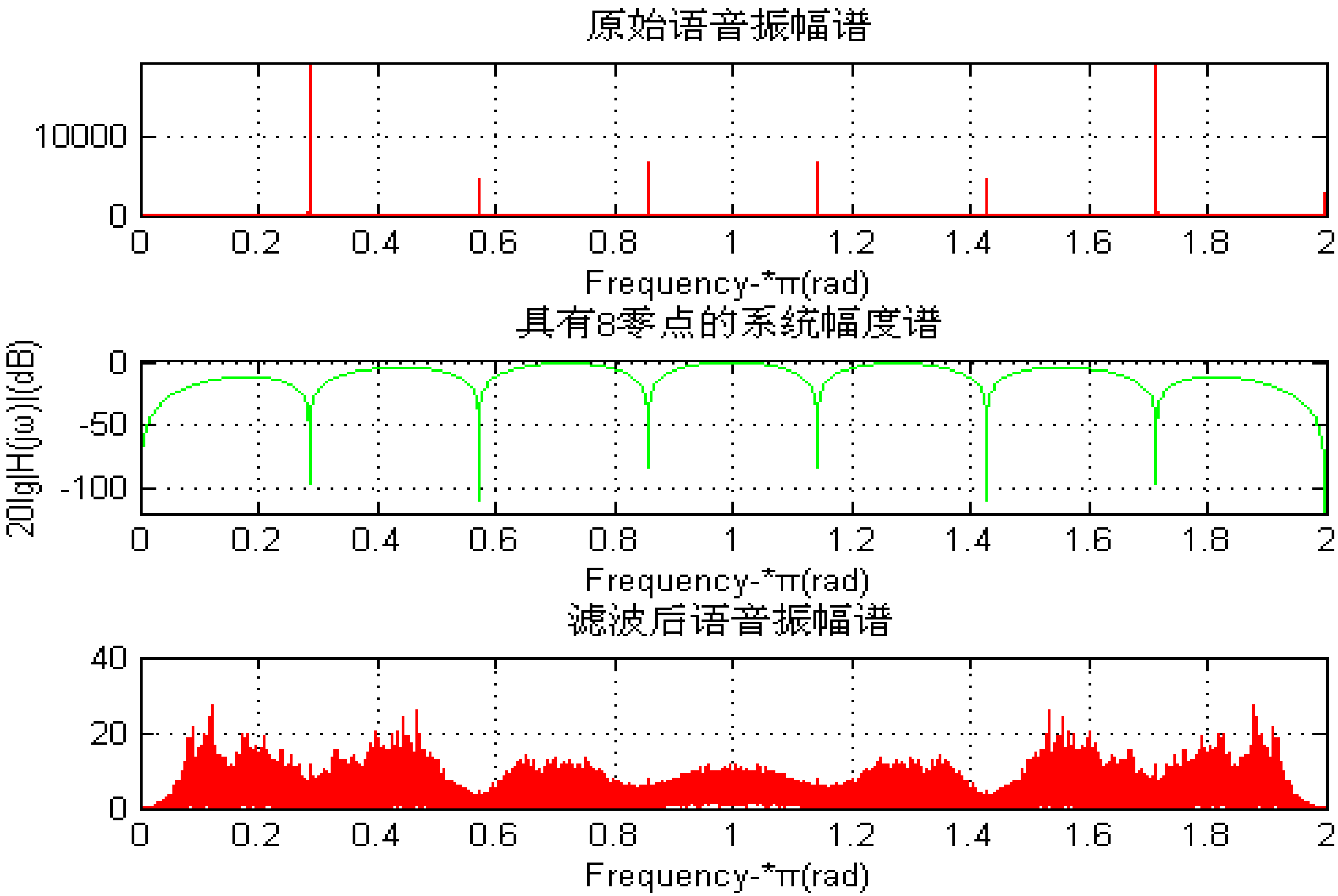





原始语音振幅谱
Frequency-*π(rad)
原始语音振幅谱
Frequency-*π(rad)
共轭零点在w=0.8571π，1.1429π的槽口滤波器系统幅度谱
|H(jω)|
Frequency-*π(rad)
零极点在w=0.8571π，1.1429π的带数字谐振器的槽口滤波器系统幅度谱
|H(jω)|
Frequency-*π(rad)
x 10^4
去除频率w=0.8571π，1.1429π的语音振幅谱
Frequency-*π(rad)
去除频率w=0.8571π,1.1429π的滤波后语音振幅谱
Frequency-*π(rad)

2.7.4 利用零极点向量实现信号滤波

问题：如何 衰减 多个 特定角频率 的信号分量？



2.7.4 利用零极点向量实现信号滤波

小结：

问题：如何 衰减 多个 特定角频率 的信号分量？

方法：在特定角频率处，设置零点，极点，来设计槽口滤波器。

零点与极点位置对系统幅度响应的影响：

1. 若衰减输入信号的某频率范围内的信号分量，

则在此频率范围周围设置零点,且零点靠近单位圆；

2. 若放大输入信号的某频率范围内的信号分量，

则在此频率范围周围设置极点,且极点靠近单位圆；

3.若去掉输入信号的频率为w0的信号分量，

则在单位圆上设置频率为w0的零点exp(jw0).

§4.4 IIR数字滤波器的设计方法 (The Design Methods of IIR Filter)

4.4.1 IIR数字滤波器的设计方法

1. 技术指标

数字滤波器的传输函数：

$$H(e^{j\omega}) = \left|H(e^{j\omega})\right| e^{j\varphi(\omega)}$$

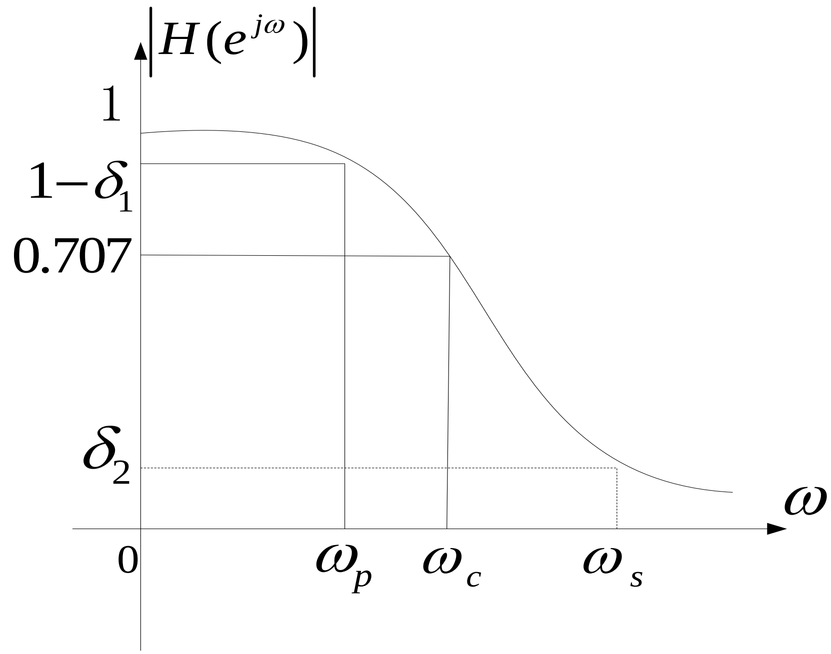


图4.4 数字低通滤波器的技术要求

ω_p ：通带截止频率，α_p ：通带允许的最大衰减；

ω_s ：阻带截止频率，α_s ：阻带允许的最小衰减；

ω_c ：3dB通带截止频率，

$\delta_1 . \delta_2$ ：通带、阻带的容限（允许误差），

$\alpha_p . \alpha_s$ 分别定义为：（P-Pass，S-Stop）

$$\alpha_p = 20\lg \frac{|H(e^{j0})|}{|H(e^{j\omega_p})|} = -20\lg |H(e^{j\omega_p})| (dB)$$

$$\alpha_s = 20\lg \frac{|H(e^{j0})|}{|H(e^{j\omega_s})|} = -20\lg |H(e^{j\omega_s})| (dB)$$

通带波纹幅度： $\alpha = -20\lg(1-\delta_1) \quad (dB)$

阻带波纹幅度： $\beta = -20\lg\delta_2 \quad (dB)$

2. 设计步骤

①根据实际需要给定滤波器的技术指标；

②由技术指标计算滤波器的系统函数 $H(z)$ 或单位取样响应 $h(n)$ ，即用一个稳定的因果系统逼近这些指标；

③用有限精度的运算实现 $H(z)$ 或$h(n)$ ，包括选择运算结构、进行误差分析和选择存储单元的字长。

3. IIR数字滤波器的常用设计方法

第一种：将IIR模拟滤波器映射成数字滤波器:

$H(z)=H_a(s)|_{s=m(z)}$ **映射函数** $s=m(z)$ **应具有下列性质：**

①将s平面的虚轴 $j\Omega$ **映射成z平面上的单位圆周** $|z|=1$ **，以保持模拟滤波器的幅度响应在映射后不发生失真；**

②将s平面左半平面映射成z平面单位圆的内部，以保证稳定的模拟滤波器能够映射成稳定的数字滤波器；

③ $m(z)$ **是有理函数，将有理函数** $H_a(s)$ **映射成有理函数** $H(z)$ **。**

第二种：计算机辅助设计方法。

4.4.2 冲激响应不变法

1. 冲激响应不变法设计数字滤波器的准则

- 使数字滤波器的单位取样响应与所参照的模拟滤波器的冲激响应的取样值一样，即： $h(n)=h_a(nT)$ ；

复频域： $H(z)|_{z=e^{sT}}=\frac{1}{T}\sum_{r=-\infty}^{\infty}H_a(s-j\frac{2\pi}{T}r)$ ；

- DF与AF的频率特性：

$$H(e^{j\omega})|_{\omega=T\cdot\Omega}=\frac{1}{T}\sum_{r=-\infty}^{\infty}H_a(j\frac{\omega}{T}-j\frac{2\pi}{T}r)$$ ；

数字滤波器的频率响应是模拟滤波器频率响应的周期延拓。

- 在冲激响应不变法中，数字滤波器的频率响应产生混迭失真；数字域频率和模拟域频率之间是线性关系，即： $\omega=T\cdot\Omega$ 频率之间不产生失真。

2. 冲激响应不变法设计数字滤波器的设计步骤；

$$H_a(s) \quad -> \quad h_a(t) \quad -> \quad h(n) = h_a(nT) \quad -> \quad H(z)$$

(1)假设模拟滤波器的传递函数 $H_a(s)$ 具有单阶极点，且分母的阶数高于分子的阶数，将 $H_a(s)$ 展开成部分分式得：

$$H_a(s) = \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{s - s_k} \qquad \text{......}(a)$$

式中 s_k 为极点。对 $H_a(s)$ 求 *Laplace* 变换得：

$$h_a(t) = \sum_{k=1}^{N} A_k e^{s_k t} \cdot u(t) \qquad \text{......}(b)$$

(2)使用冲激不变法求数字滤波器的冲激响应 $h(n)$ 。

令 $t = nT$ ，代入上式得：

$$h(n) = h_a(nT) = \sum_{k=1}^{N} A_k e^{S_k nT} \cdot u(nT) \qquad \text{……}(c)$$

(3)求 $h(n)$ 的 z 变换得 $H(z)$ ：

$$H(z) = Z[h(n)] = \sum_{n=0}^{\infty}[\sum_{k=1}^{N} A_k e^{s_k nT}] \cdot z^{-n}$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{1 - e^{s_k T} z^{-1}} \qquad \text{……}(d)$$

3. 冲激响应不变法的应用范围

能够设计的滤波器：LP、BP;

例4.4.0 已知模拟滤波器的系统函数为：

$$H_a(s)=\frac{2}{s^2+4s+3}$$

用冲激响应不变法将它转换成数字滤波器的系统函数 $H(z)$ **(假设T=1),并画出其流程图。**

解：将 $H_a(s)$ **分解得：** $s_1=-1, s_2=-3$ **，故有：**

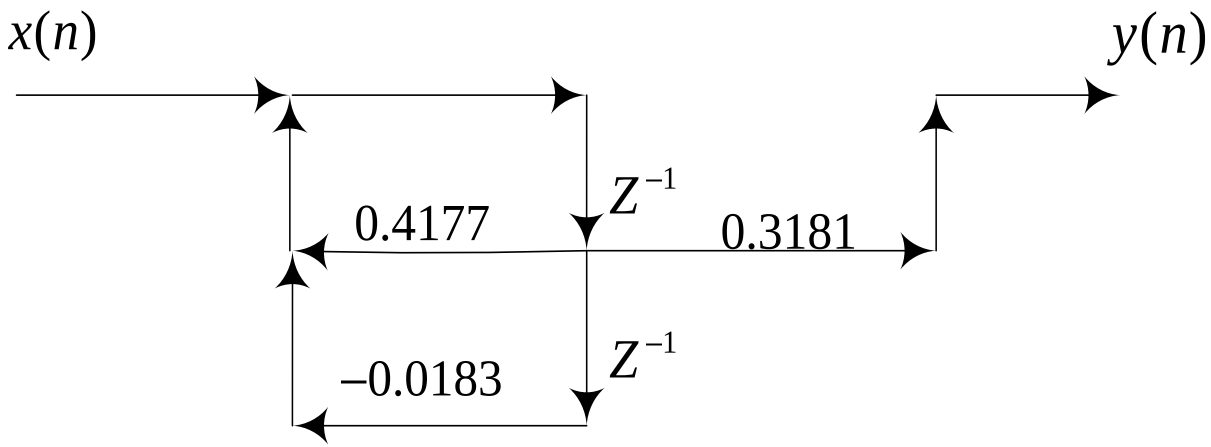
$$H(z)=\frac{1}{1-e^{-T}z^{-1}}-\frac{1}{1-e^{-3T}z^{-1}},\quad \mathbf{T=1}$$

$$=\frac{1}{1-e^{-1}z^{-1}}+\frac{-1}{1-e^{-3}z^{-1}}$$

$$=\frac{(e^{-1}-e^{-3})z^{-1}}{1-(e^{-1}+e^{-3})z^{-1}+e^{-4}z^{-2}}$$

$$=\frac{0.3181z^{-1}}{1-0.4177z^{-1}+0.0183z^{-2}}$$

其流程图如下：



直II型、级联型

举例4.4.1： 若**模拟低通**滤波器的传递函数 $H(s)=\dfrac{1}{(s-s_0)^2}$

求：采用冲激响应不变法得到的数字滤波器的系统函数H(z).

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{s_0 t}u(t)e^{-st}dt=\int_{0}^{\infty} e^{-(s-s_0)t}dt=-\frac{1}{s-s_0}*e^{-(s-s_0)t}\Big|_0^{\infty}=\frac{1}{s-s_0}\qquad \therefore \mathcal{L}\left(e^{s_0 t}u(t)\right)=\frac{1}{s-s_0}$$

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s-s_0}\right)=\frac{d}{ds}\int_0^{\infty} e^{-(s-s_0)t}dt\qquad -\frac{1}{(s-s_0)^2}=\int_0^{\infty}-te^{-(s-s_0)t}dt\qquad \frac{1}{(s-s_0)^2}=\int_0^{\infty} te^{s_0 t}e^{-st}dt$$

$$\therefore \mathcal{L}\left(te^{s_0 t}u(t)\right)=\frac{1}{(s-s_0)^2}$$

$$h(n)=h_a(nT)=nTe^{s_0 Tn}u(nT)=T*ne^{s_0 Tn}u(n)$$

$$\mathcal{Z}\left(e^{s_0 Tn}u(n)\right)=H_0(z)=\frac{1}{1-e^{s_0 T}z^{-1}}\quad |z|>e^{s_0 T}$$

$$\mathcal{Z}\left(ne^{s_0 Tn}u(n)\right)=-z\frac{d}{dz}H_0(z)=\frac{e^{s_0 T}z^{-1}}{(1-e^{s_0 T}z^{-1})^2}$$

$$\therefore H(z)=\frac{Te^{s_0 T}z^{-1}}{(1-e^{s_0 T}z^{-1})^2}$$

4.4.2 双线性变换法

1、双线性变换法设计数字滤波器

双线性变换法是一种s平面到z平面的映射过程，

定义为： $s=\frac{2}{T}\cdot\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$ **……(a)**

故有： $H(z)=H_a(s)|_{s=\frac{2}{T}\cdot\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}=H_a(\frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}})$ **……(b)**

将 $z=e^{j\omega}$ **和** $s=j\Omega$ **带入得** $s=\frac{2}{T}\cdot\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$ **：**

$$j\Omega=\frac{2}{T}\cdot\frac{1-e^{-j\omega}}{1+e^{-j\omega}}=\frac{2}{T}\cdot j\tan(\omega/2)$$

即： $\omega=2arc\tan(\frac{T\Omega}{2})$ **……(c)**

双线性变换是一种稳定的变换。由(a)式得：

令 $s=\sigma+j\Omega$得：

$$z=1+\frac{sT}{2}\Big/1-\frac{sT}{2} \quad \text{......(e)}$$

$$|z|=\sqrt{\frac{(1+\frac{\sigma T}{2})^2+(\frac{\Omega T}{2})^2}{(1-\frac{\sigma T}{2})^2+(\frac{\Omega T}{2})^2}} \quad \text{......(f)}$$

由式(f)可得：当 $\sigma=0$ 时，$|z|=1$；当$\sigma<0$ 时，$|z|<1$；当 $\sigma>0$ 时，$|z|>1$。

(1)双线性变换是简单映射；

(2)双线性变换是稳定的变换；即模拟滤波器在s平面左半平面的所有极点经映射后均在z平面的单位圆内。

(1)数字域频率和模拟域频率之间是非线性关系，当 Ω 从 $0->+\infty$ ，ω 从 $0->\pi$ 。即：**AF**的全部频率特性，被压缩成等效于**DF**在频率 $0<\omega<\pi$ 之间的特性。

(2)幅度上无混迭失真。双线性变换的频率标度的非线性失真可以通过预畸变的方法来补偿。设所求的数字滤波器的通带和阻带的截止频率分别为 ω_p 和 ω_s ，

则：

$$\begin{cases} \Omega_p = \dfrac{2}{T} tg(\dfrac{\omega_p}{2}) \\ \Omega_s = \dfrac{2}{T} tg(\dfrac{\omega_s}{2}) \end{cases} \qquad \text{……(d)}$$

模拟滤波器就按这两个预畸变了的频率 Ω_p 和 Ω_s 来设计。

2. 双线性变换法设计数字滤波器的设计步骤：

模拟低通滤波器->双线性变换映射成数字低通滤波器->数字低通滤波器的频率响应。

3. 双线性变换法的应用范围：

能够设计的滤波器—LP、HP、BP、BS。

4. 冲激响应不变法和双线性变换法比较：

相同点：首先设计AF，再将AF转换为DF。

不同点：

冲激响应不变法	双线性变换法
幅频响应有失真	幅频响应无混迭
频率之间呈线性	频率之间有失真

例4.4.2 二阶巴特沃斯模拟低通滤波器的系统函数为：$H_a(s)=\dfrac{1}{s^2+\sqrt{2}\cdot s+1}$

采样间隔 $T=2s$ ，$3dB$ 截止频率$\Omega_c=1rad/s$ ，用双线性变换法将该模拟滤波器转换成数字滤波器 $H(z)$ 。

（1）求出 $H(z)$；

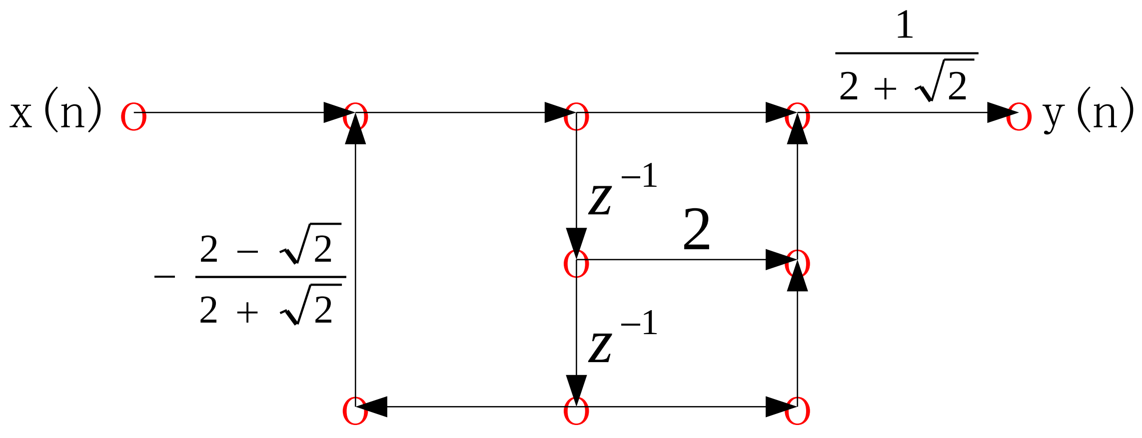
（2）画出数字滤波器的直II型结构流图。

解：

(1) $H(z)=H_a(s)|_{s=\frac{2}{T}\cdot\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}=\dfrac{1}{s^2+\sqrt{2}\cdot s+1}|_{s=\frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$

$$=\frac{(1+z^{-1})^2}{(2+\sqrt{2})+(2-\sqrt{2})z^{-2}}=\frac{1+2z^{-1}+z^{-2}}{1+\dfrac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}z^{-2}}\cdot\frac{1}{2+\sqrt{2}}$$

(2)DF的直II结构图如下：

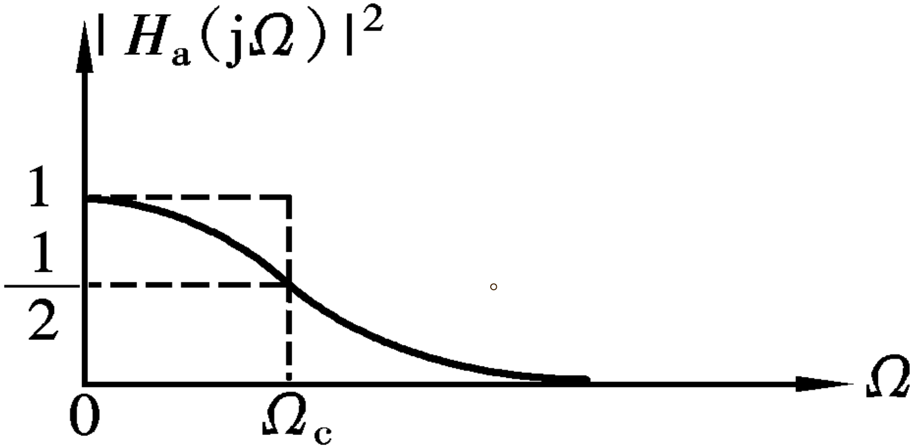


4.4.3 数字Butterworth滤波器

1. 模拟Butterworth滤波器的幅度平方函数:

$$|H_a(j\Omega)|^2=\frac{1}{1+(\Omega/\Omega_c)^{2N}} \qquad \text{……(a)}$$

下图为其频谱响应图：



其中：Ω 是角频率，**N**是滤波器阶数，

Ω_c 是**3dB**截止频率；当 $\Omega=0$ 时，$|H_a(j\Omega)|=1$ 。

特点：

- 通带内幅度响应最平坦；
- 通带和阻带内幅度特性单调下降；
- N增大，通带和阻带的近似性越好，过渡带越窄；
- 存在极点，零点在。

Butterworth滤波器极点分布特点：

令 $s = j\Omega$ ，则幅度平方函数可写为：

$$H_a(s)H_a(-s) = \frac{1}{1+\left(s/j\Omega_c \right)^{2N}} \qquad \text{……(b)}$$

令 $1+\left(s/j\Omega_c \right)^{2N} = 0$ ，得：

$$s_k = \Omega_c e^{j\left(\frac{\pi}{2N}+\frac{\pi}{2}+\frac{k\pi}{N}\right)}, k = 0,1,\ldots,(2N-1)$$

特点：

- 在s平面上共有2N个极点等角距地分布在半径为Ω_c的圆上；
- 极点对称于虚轴，虚轴上无极点；

  N为奇数，实轴上两个极点；

  N为偶数，实轴上无极点；
- 各极点间的角度为$\dfrac{\pi}{N}$。

2. 根据滤波器的指标求模拟滤波器的系统函数；为得到稳定的系统，由S平面左半平面的极点构成传递函数Ha(s)，将式(b)重写为：

$$H_a(s) \cdot H_a(-s) = \frac{1}{1+(s/j\Omega c)^{2N}} = \frac{A}{\prod_{k=1}^{N}(s-s_k)} \cdot \frac{B}{\prod_{k=1}^{N}(s-s_r)}$$

其中，s_k 为左半平面极点，s_r 为右半平面极点；A、B均为常数。

$$\therefore H_a(s) = \frac{A}{\prod_{k=1}^{N}(s-s_k)} = \frac{A}{\prod_{k=1}^{N/2}(s-s_k)(s-s_k^*)} \qquad \text{……(c)}$$

式中：s_k 为左半平面的极点，s_k^* 是s_k 的共扼极点，且设N为偶数。A由滤波器在$\Omega=0$ 处的单位响应来确定，即：

$$H_a(0)=\frac{A}{\prod_{k=1}^{N/2} s_k s_k^*}=1 \rightarrow A=\prod_{k=1}^{N/2}|s_k|^2=\Omega_c{}^N$$

当N为奇数时，也可得到同样的结果。

模拟Butterworth滤波器传递函数为：

$$\therefore H_a(s)=\frac{\Omega_c^N}{\prod_{k=1}^{N/2}(s-s_k)(s-s_k^*)} \qquad \text{……（d）}$$

式中为 s_k 左半平面极点，s_k^* 为s_k 的共扼极点，N为偶数。

当N奇数时，$H_a(s)$ 的公式为：

$$H_a(s)=\frac{\Omega_c^N}{(s-s_p)\prod_{k=1}^{(N-1)/2}(s-s_k)(s-s_k^*)}$$ ……（e）

式中，s_p 为实轴上的极点。

3. 设计数字Butterworth滤波器的步骤；

A. 根据实际需要确定滤波器在数字临界频率 ω_p 和 ω_T (单位为分贝处)衰减；

;

B. 确定模拟Butterworth滤波器的阶数N和截止频率Ω_c ；

(3)求模拟Butterworth滤波器的极点，并由s平面左半平面的极点构成传递函数 $H_a(s)$ 。

极点： $s_k = \Omega_c e^{j(\frac{\pi}{2N}+\frac{k\pi}{N}+\frac{\pi}{2})}$ **k = 0，1，2，……N - 1**

传递函数：

$$H_a(s) = \frac{\Omega_c^N}{\prod_{k=1}^{N/2}(s-s_k)(s-s_k^*)}$$ **（N为偶数）**

$$H_a(s) = \frac{\Omega_c^N}{(s-s_p)\prod_{k=1}^{(N-1)/2}(s-s_k)(s-s_k^*)}$$ **（N为奇数）**

(4)使用冲激不变法或双线性变换法将 $H_a(s)$ 转换成数字滤波器的系统函数 $H(z)$ 。

例4.4.3 设计一个数字Butterworth低通滤波器，在通带截止频率 $\omega_p=0.2\pi$ 处的衰减不大于 $1dB$ ，在阻带截止频率 $\omega_T=0.3\pi$ 处衰减不小于 $15dB$ 。

解：(1)根据滤波器的指标得：

$$\begin{cases} 20\lg\left|H(e^{j0.2\pi})\right| \ge -1 \\ 20\lg\left|H(e^{j0.3\pi})\right| \le -15 \end{cases}$$

设 $T=1$ ，将数字域指标转换成模拟域指标得：

$$\begin{cases} 20\lg\left|H_a(j\Omega_p)\right| \ge -1 \\ 20\lg\left|H_a(j\Omega_T)\right| \le -15 \end{cases} \xrightarrow[\omega_T=\Omega_T T]{\omega_p=\Omega_p T} \begin{cases} 20\lg\left|H_a(j0.2\pi)\right| \ge -1 \\ 20\lg\left|H_a(j0.3\pi)\right| \le -15 \end{cases}$$

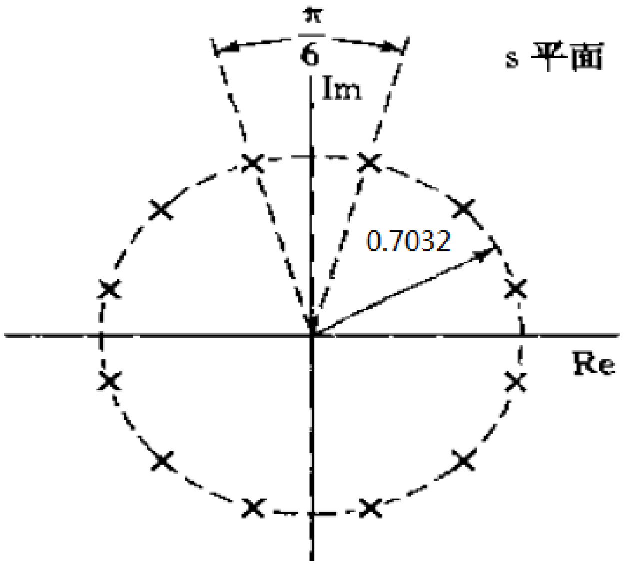
将Butterworth滤波器的幅度平方函数代入以上两式得：

$$1+\left(\frac{0.2\pi}{\Omega_c}\right)^{2N}=10^{0.1}$$

$$1+\left(\frac{0.3\pi}{\Omega_c}\right)^{2N}=10^{1.5}$$

解这两个方程得：$N=5.8858$ **，取整** $N=6, \Omega_c=0.7032$ **。**

按此值设计的滤波器满足通带指标要求，阻带指标将超过给定值。



(2)由 N 和 Ω_c 求得s平面左半平面的3对极点分别为：

极点对1： $-0.1820 \pm j0.6792$

极点对2： $-0.4972 \pm j0.4972$

极点对3： $-0.6792 \pm j0.1820$

由这3对极点构成的滤波器的传递函数为：

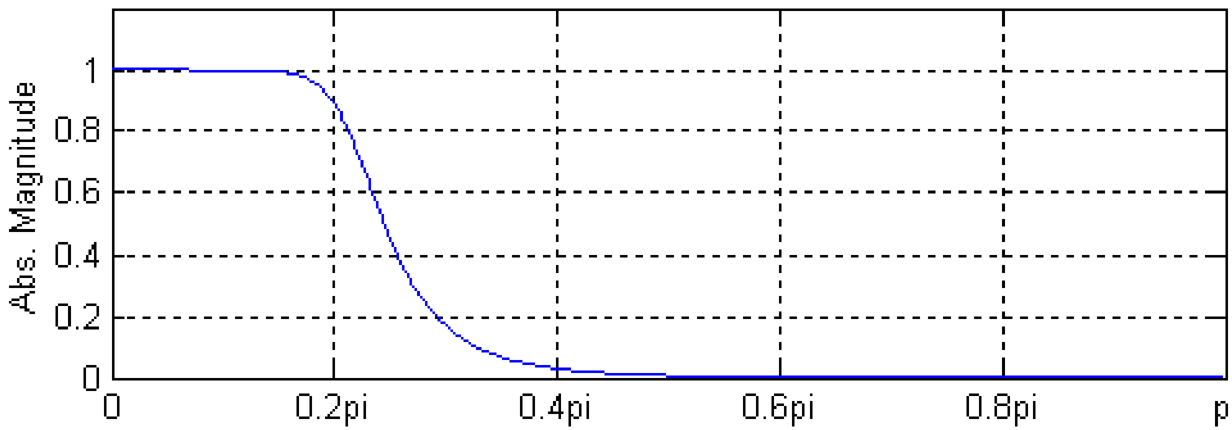
$$H_a(s) = \frac{\Omega_c^N}{\prod_{k=1}^{N/2}(s-s_k)(s-s_k^*)}$$

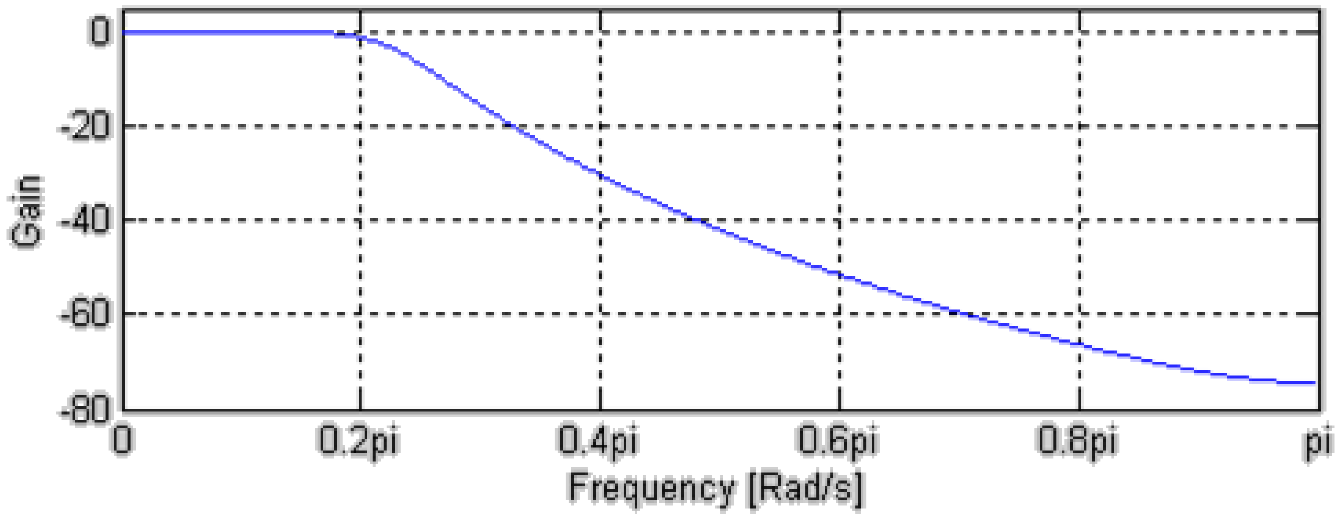
$$= \frac{0.12093}{(s^2+0.3640s+0.4945)(s^2+0.9945s+0.9945)(s^2+1.3585s+0.4945)}$$

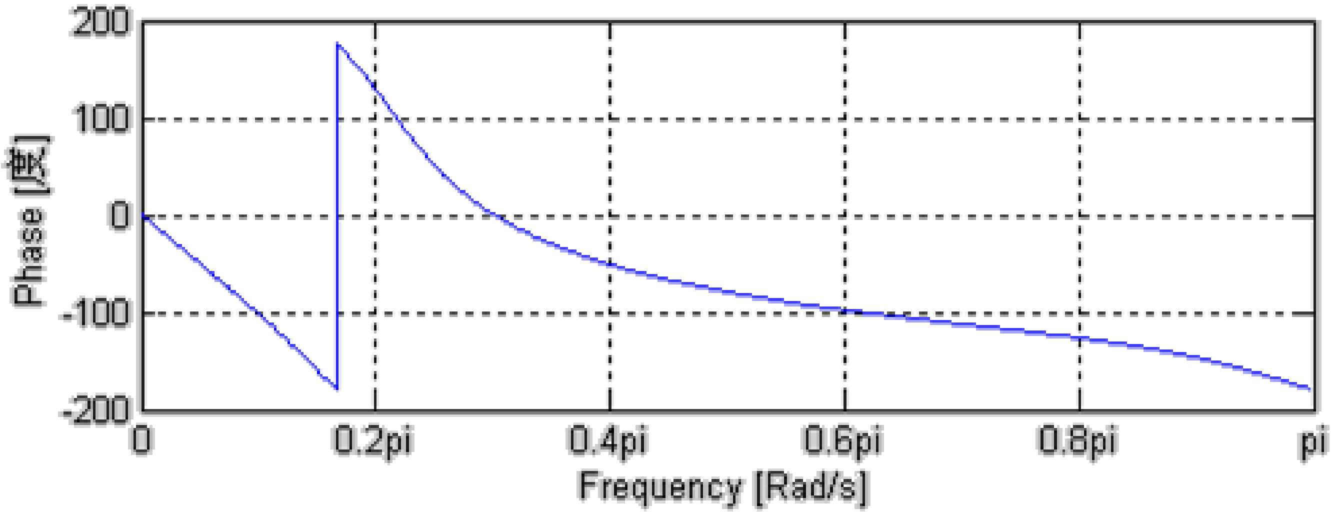
(3)将$H_a(s)$用部分分式展开，由冲激响应不变法求得数字滤波器的系统函数为：

$$H(z)=\frac{0.2871-0.4463z^{-1}}{1-1.2972z^{-1}+0.6949z^{-2}}+\frac{-2.1428+1.1454z^{-1}}{1-1.0691z^{-1}+0.3699z^{-2}}+\frac{1.8557-0.6304z^{-1}}{1-0.9973z^{-1}+0.2570z^{-2}}$$

(4)验证所设计的数字滤波器是否达到指标




0
-20
-40
-60
-80
Gain
0
0.2pi
0.4pi
0.6pi
0.8pi
pi
Frequency [Rad/s]


200
100
0
-100
-200
Phase [度]
0
0.2pi
0.4pi
0.6pi
0.8pi
pi
Frequency [Rad/s]

例4.4.3 设计一个数字Butterworth低通滤波器，在通带截止频率 $f_p = 1kHz$ 处的衰减不大于 $1dB$，在阻带截止频率 $f_T = 1.5kHz$ 处衰减不小于 $15dB$。采样频率为 $f_s = 10kHz$。

解：(1)将模拟截止频率转换成数字截止频率：

因为 $\Omega_p = 2\pi f_p = 2000\pi, \Omega_T = 2\pi f_T = 3000\pi, T = \dfrac{1}{f_s} = 0.0001$

所以 $\omega_p = T\Omega_p = 0.2\pi$，$\omega_T = T\Omega_T = 0.3\pi$

数字低通滤波器指标为：$\begin{cases} 20\lg\left|H(e^{j0.2\pi})\right| \ge -1 \\ 20\lg\left|H(e^{j0.3\pi})\right| \le -15 \end{cases}$

对应模拟低通滤波器指标为：$\begin{cases} 20\lg\left|H_a(j\Omega_p)\right| \ge -1 \\ 20\lg\left|H_a(j\Omega_T)\right| \le -15 \end{cases}$

(2)计算 N 和 Ω_c ：

将模拟截止频率进行预畸变，即：

$$\begin{cases} \Omega_p = \dfrac{2}{T}\tan(\dfrac{\omega_p}{2}) \\ \Omega_T = \dfrac{2}{T}\tan(\dfrac{\omega_T}{2}) \end{cases} \qquad \cdots\cdots(a)$$

于是得到：

$$\begin{cases} 20\lg\left|H(e^{j0.2\pi})\right| \geq -1 \\ 20\lg\left|H(e^{j0.3\pi})\right| \leq -15 \end{cases}$$

将式(a)代入以上两式得:

T 是无关紧要的参数，为计算方便。令 $T=1$ ，则有:

$$\begin{cases} 20\lg\left|H_a(j2\tan(\frac{0.2\pi}{2}))\right| \geq -1 \\ 20\lg\left|H_a(j2\tan(\frac{0.3\pi}{2}))\right| \leq -15 \end{cases}$$

将Butterworth滤波器的幅度平方函数代入以上两式得到:

$$1+[\frac{2\tan(\frac{0.2\pi}{2})}{\Omega_c}]^{2N}=10^{0.1} \qquad \text{……（b）}$$

$$1+[\frac{2\tan(\frac{0.3\pi}{2})}{\Omega_c}]^{2N}=10^{1.5} \qquad \text{……（c）}$$

解以上两个方程得:

$$N=\frac{1}{2}\frac{\lg[(10^{1.5}-1)/(10^{0.1}-1)]}{\lg[\tan(0.15\pi)/\tan(0.1\pi)]}=5.30466$$

取 $N=6$ **，并代入式（c）解得:** $\Omega_c=0.76622$

可以验算这个 Ω_c **值所对应的阻带指标刚好满足要求，而通带指标已经超过要求。**

(3)由 N **和** Ω_c **求模拟Butterworth滤波器的极点，并由左半平面的极点构成** $H_a(s)$

由 N 和 Ω_c 求得平面左半平面的3对极点分别为：

极点对1： $-\Omega_c\cos 15^{\mathrm{o}} \pm j\Omega_c \sin 15^{\mathrm{o}}$

极点对2： $-\Omega_c\cos 45^{\mathrm{o}} \pm j\Omega_c \sin 45^{\mathrm{o}}$

极点对3： $-\Omega_c\cos 75^{\mathrm{o}} \pm j\Omega_c \sin 75^{\mathrm{o}}$

由此得传递函数为：

$$H_a(s) = \frac{0.20238}{(s^2+0.3960s+0.5871)(s^2+1.0835s+0.5871)} \times \frac{1}{(s^2+1.4802s+0.5871)}$$

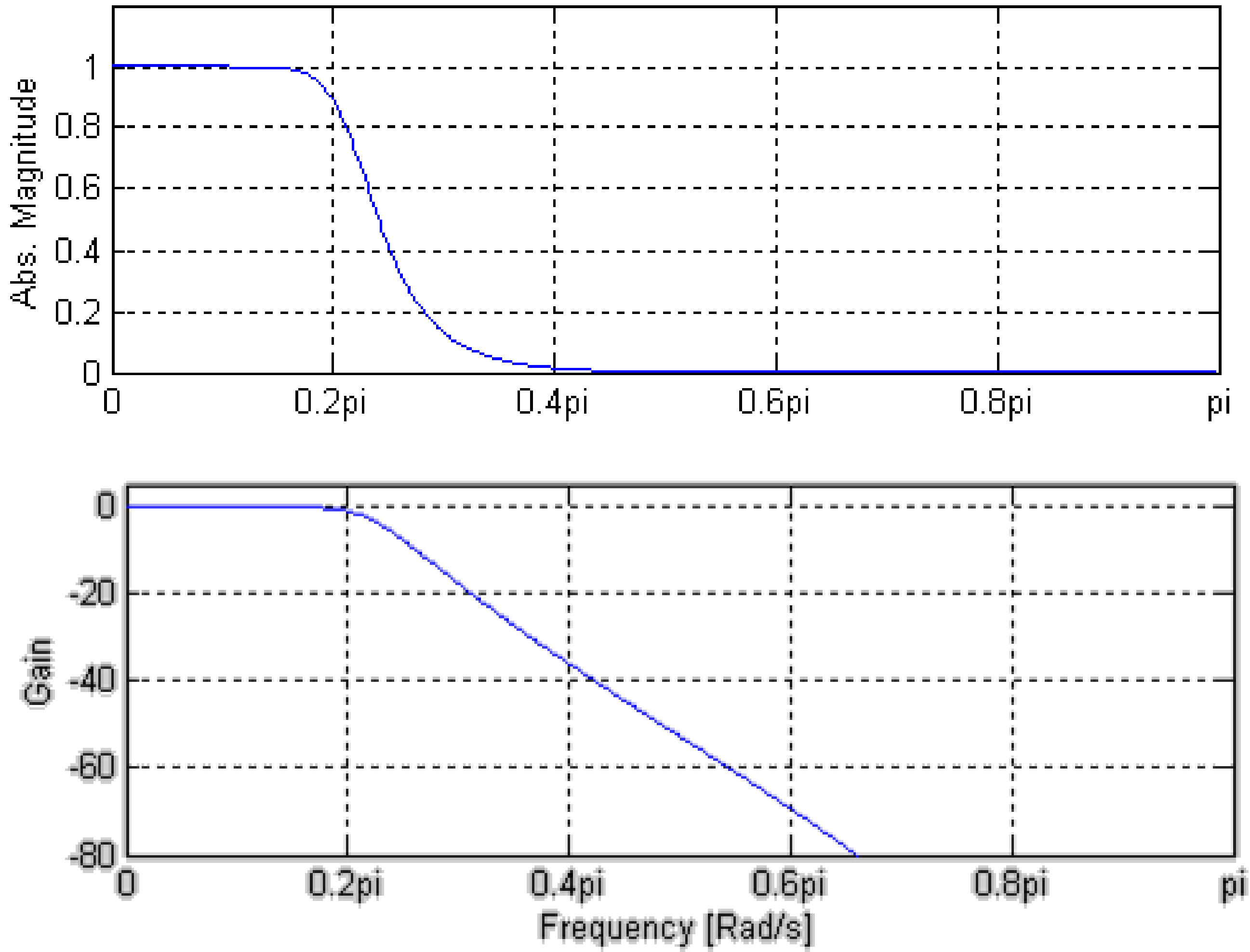
(4)使用双线性变换求得数字Butterworth滤波器的系统函数为：

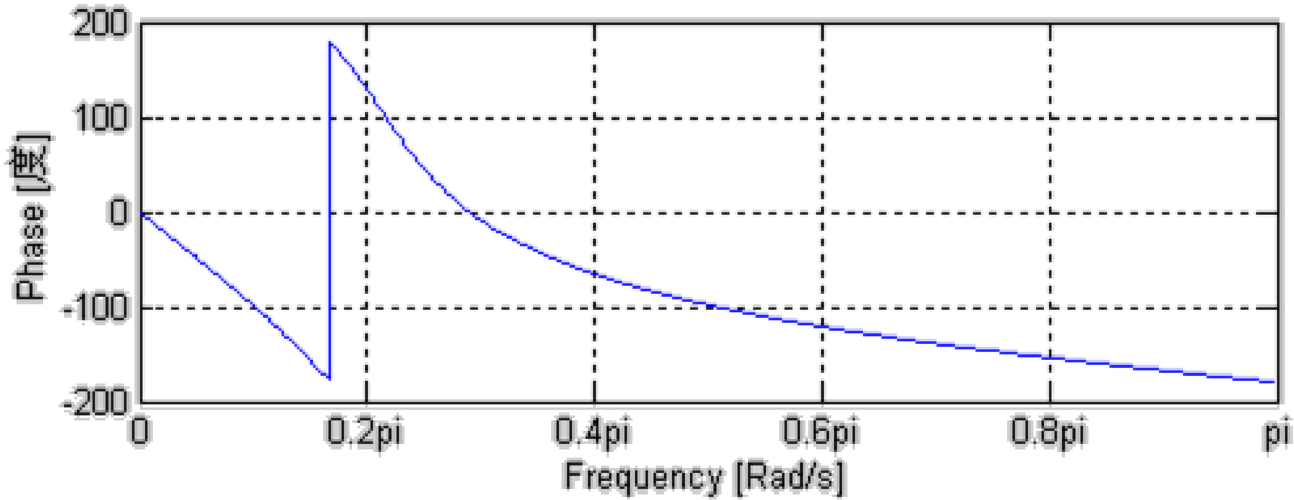
$$H(z)=H_a(s)\Big|_{s=2\cdot\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}=5.7969\times10^{-4}\times\frac{1+2.0183z^{-1}+1.0186z^{-2}}{1-0.9459z^{-1}+0.2342z^{-2}}$$

$$\times\frac{1+1.9814z^{-1}+0.9817z^{-2}}{1-1.0541z^{-1}+0.3753z^{-2}}$$

$$\times\frac{1+2.004z^{-1}+z^{-2}}{1-1.3143z^{-1}+0.7149z^{-2}}$$

(5)验证所设计的数字滤波器是否达到指标





200
100
0
-100
-200
Phase [度]
0
0.2pi
0.4pi
0.6pi
0.8pi
pi
Frequency [Rad/s]

§4.5 IIR数字滤波器的频率变换

(The Frequency Transformation of IIR Filter)

4.5.1 IIR数字滤波器的两种常用设计方法

1. 数字滤波器的指标→模拟低通滤波器的指标→模拟低通滤波器 $H_a(s)$ → 映射成数字低通滤波器 $H(z)$ → 通过频率变换求数字HP/BP/BS滤波器。

2. 数字滤波器的指标→模拟低通滤波器的指标→求模拟低通滤波器 $H_a(s)$ → 模拟低通 $H_a(s)$ 转换成模拟HP/BP/BS滤波器→ 将模拟HP/BP/BS滤波器映射成所求的数字滤波器。

本教材采用第一种方法设计HP/BP/BS等数字滤波器。

4.5.2 IIR数字滤波器的频率变换

设$H(v)$是数字**原型低通**滤波器的系统函数，$H_d(z)$是所要求的滤波器（LP、HP、BP、BS）的系统函数。为了**将稳定、因果**的$H(v)$**变换成稳定、因果**的$H_d(z)$，要求：

1. v平面到z平面的映射$v^{-1}=F(z^{-1})$是z^{-1}的**有理函数**；
2. v平面的**单位圆内部映射**成z平面的**单位圆内部**。

设 θ 和 ω 分别表示v平面和z平面的频率变量，

即：$v=e^{j\theta}$ **，**$z=e^{j\omega}$ **；则：**

$$e^{-j\theta}=|F(e^{-j\omega})|e^{j\arg[F(e^{-j\omega})]}$$

故要求：$|F(e^{-j\omega})|=1$ **及** $\theta=-\arg[F(e^{-j\omega})]$

满足上面要求的函数就是全通函数，可表示为：

$$v^{-1}=F(z^{-1})=\prod_{k=1}^{N}\frac{z^{-1}-\alpha_k}{1-\alpha_k\cdot z^{-1}}$$

其中 α_k **是** $F(z^{-1})$ **的极点，为满足稳定性，要求** $|\alpha_k|<1$

最简单的映射：把一个LPF变换成另一个LPF，

如： $v^{-1} = F(z^{-1}) = \dfrac{z^{-1} - \alpha}{1 - \alpha \cdot z^{-1}}$

将 $v = e^{j\theta}$ **，** $z = e^{j\omega}$ **代入上式得：**

$$e^{-j\omega} = \frac{e^{-j\theta} + \alpha}{1 + \alpha e^{-j\theta}}$$

$$e^{-j\omega} + 1 = \frac{e^{-j\theta} + \alpha}{1 + \alpha e^{-j\theta}} + 1 = (1 + \alpha) \cdot \frac{e^{-j\theta} + 1}{1 + \alpha e^{-j\theta}}$$

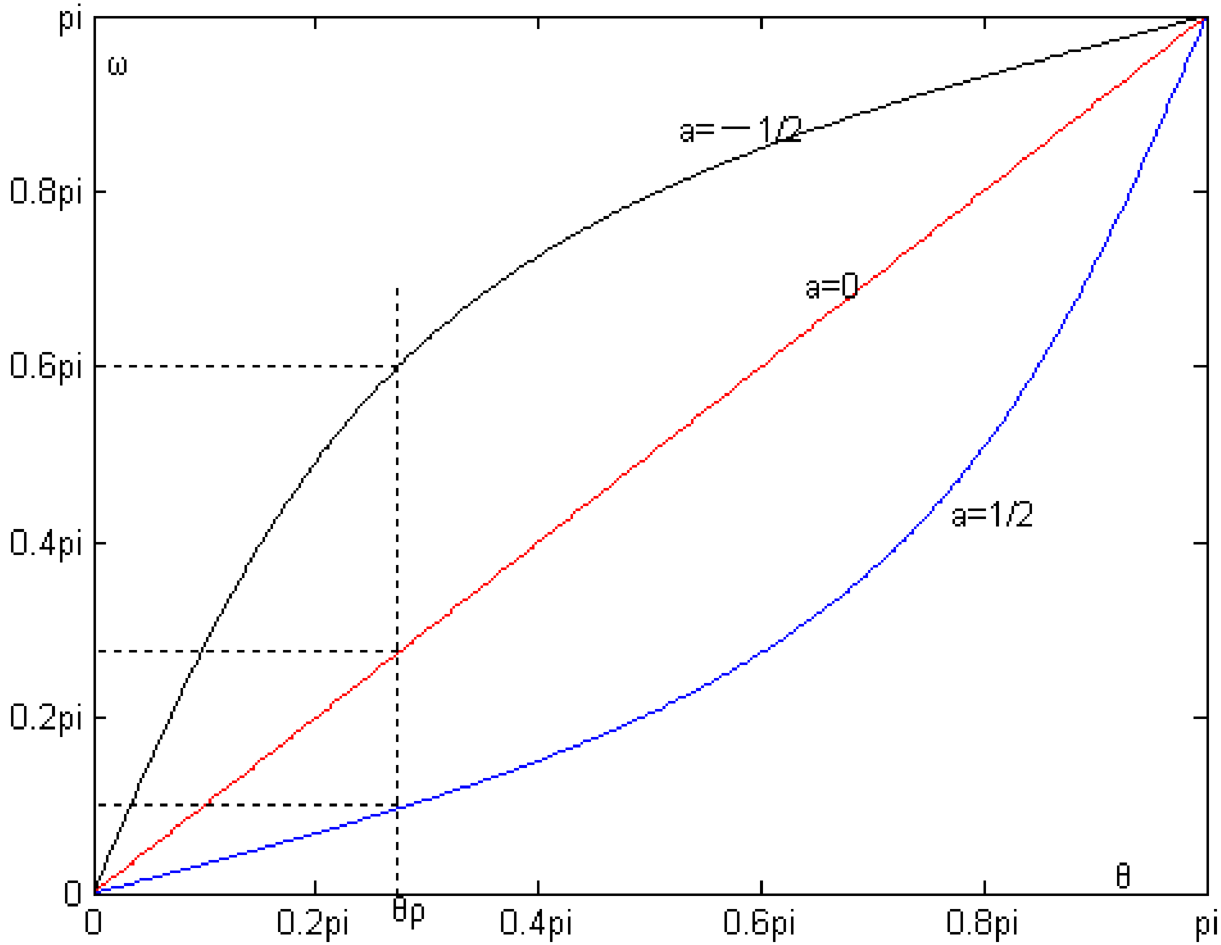
$$e^{-j\omega} - 1 = \frac{e^{-j\theta} + \alpha}{1 + \alpha e^{-j\theta}} - 1 = (1 - \alpha) \cdot \frac{e^{-j\theta} - 1}{1 + \alpha e^{-j\theta}}$$

$$\tan(\omega / 2) = \left(\frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \right) \tan(\theta / 2)$$

$$\alpha = \frac{\sin\left(\dfrac{\theta_p - \omega_p}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{\theta_p + \omega_p}{2}\right)}$$

$$\omega = arctg\left[\frac{(1 - \alpha^2)\sin\theta}{2\alpha + (1 + \alpha^2)\cos\theta} \right]$$

由图可见，除$\alpha=0$外，频率标度有明显的扭曲。



如果**数字原型**低通滤波器的截止频率为 θ_p，

要求的数字低通滤波器的截止频率为ω_p，

则有：

$$\alpha = \frac{\sin\left(\frac{\theta_p - \omega_p}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta_p + \omega_p}{2}\right)}$$

由此得到所要求的低通滤波器的系统函数为：

$$H_d(z) = H(v)\Big|_{v^{-1}=\frac{z^{-1}-\alpha}{1-\alpha z^{-1}}}$$

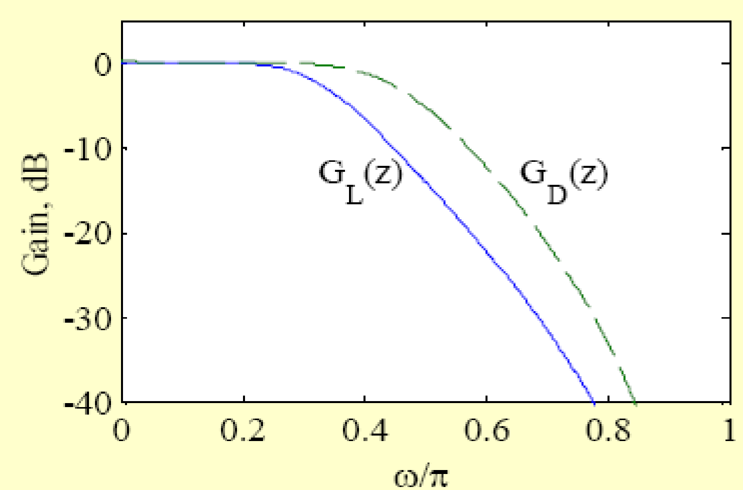
举例：已知数字低通滤波器的系统函数 $G_L(z)$ ，

其在通带截止频率处 $\omega_p = 0.25\pi$ 衰减0.5dB ，将通带截止频率移到 $\omega_p = 0.35\pi$ 求新数字低通滤波器的系统函数。

$$G_L(z) = \frac{0.0662(1+z^{-1})^3}{(1-0.2593z^{-1})(1-0.6763z^{-1}+0.3917z^{-2})}$$

$$\alpha = -\frac{\sin(0.05\pi)}{\sin(0.3\pi)} = -0.1934$$

$$G_D(\hat{z}) = G_L(z)\Big|_{z^{-1}=\frac{\hat{z}^{-1}+0.1934}{1+0.1934\hat{z}^{-1}}}$$



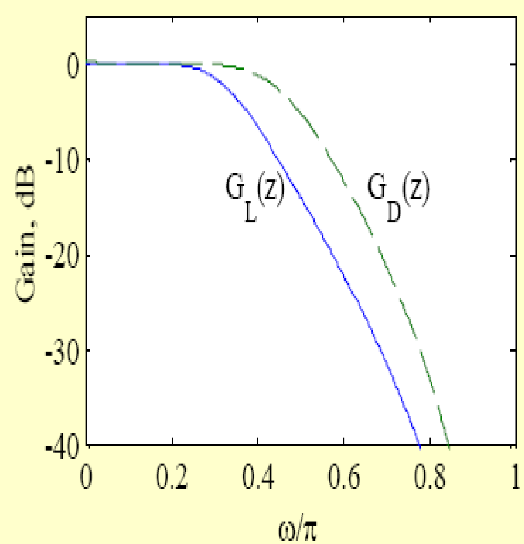
举例：已知数字低通滤波器的系统函数 $G_L(z)$ ，其在通带截止频率处 $\omega_p = 0.25\pi$ 衰减0.5dB ，得到一个数字高通滤波器，其通带截止频率处 $\omega_p = 0.55\pi$ 衰减0.5dB ,求新数字高通滤波器的系统函数。

$$G_L(z) = \frac{0.0662(1+z^{-1})^3}{(1-0.2593z^{-1})(1-0.6763z^{-1}+0.3917z^{-2})}$$

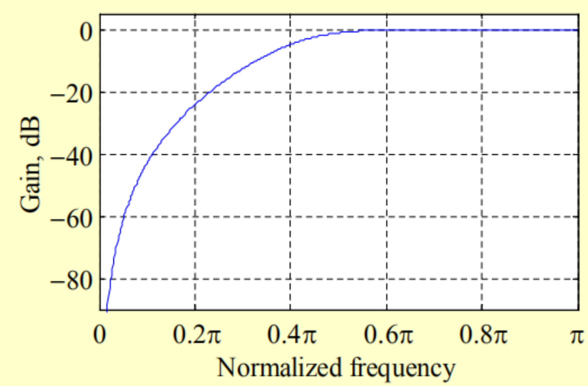
$$\alpha = -\cos(0.4\pi)/\cos(0.15\pi) = -0.3468$$

$$z^{-1} = -\frac{\hat{z}^{-1}-0.3468}{1-0.3468\hat{z}^{-1}}$$

$$G_D(\hat{z}) = G_L(z)\Big|_{z^{-1}=\frac{\hat{z}^{-1}+0.1934}{1+0.1934\hat{z}^{-1}}}$$



$$G_D(\hat{z}) = G(z)\Big|_{z^{-1}=-\frac{\hat{z}^{-1}-0.3468}{1-0.3468\hat{z}^{-1}}}$$



4.5.3 频率变换的设计公式

1. LP ->LP： ω_p **：要求的截止频率；**

$$v^{-1}=\frac{z^{-1}-\alpha}{1-\alpha z^{-1}} \qquad \alpha=\frac{\sin\left(\frac{\theta_p-\omega_p}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta_p+\omega_p}{2}\right)}$$

2. LP ->HP： ω_p **：要求的截止频率；**

$$v^{-1}=-\frac{z^{-1}+\alpha}{1+\alpha z^{-1}} \qquad \alpha=-\frac{\cos\left(\frac{\omega_p+\theta_p}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\omega_p-\theta_p}{2}\right)}$$

3. LP->BP： ω_1,ω_2： 要求的上、下截止频率；

$$v^{-1}=\frac{z^{-2}-\frac{2\alpha k}{k+1}z^{-1}+\frac{k-1}{k+1}}{\frac{k-1}{k+1}z^{-2}-\frac{2\alpha k}{k+1}z^{-1}+1}$$

$$\alpha=\frac{\cos(\frac{\omega_1+\omega_2}{2})}{\cos(\frac{\omega_1-\omega_2}{2})}$$

$$k=ctg(\frac{\omega_2-\omega_1}{2})\mathrm{t}g(\frac{\theta_p}{2})$$

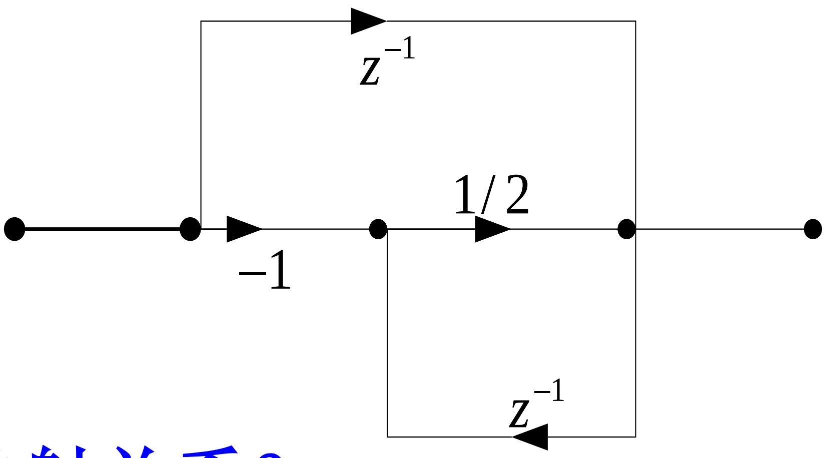
4. LP->BS： ω_1,ω_2： 要求的上、下截止频率；

$$v^{-1}=\frac{z^{-2}-\frac{2\alpha}{k+1}z^{-1}+\frac{1-k}{1+k}}{\frac{1-k}{1+k}z^{-2}-\frac{2\alpha}{1+k}z^{-1}+1}$$

$$\alpha=\frac{\cos(\frac{\omega_1+\omega_2}{2})}{\cos(\frac{\omega_1-\omega_2}{2})}$$

$$k=tg(\frac{\omega_2-\omega_1}{2})\mathrm{t}g(\frac{\theta_p}{2})$$

例4.5.1：已知一个数字低通滤波器的系统函数为 $H_1(v)$ ，若用下图中所示结构代替 $H_1(v)$ 中的每一个延时单元 v^{-1}，所得到的系统函数为 $H(z)$，求：



1. v 与 z 的映射关系？

2. $H(z)$是一个低通、高通还是带通滤波器？为什么？

解：

(1)设图的输入为$x(n)$ **，输出为** $y(n)$ **，则有：**

$$y(n)=x(n-1)+\frac{1}{2}[y(n-1)-x(n)]$$

系统函数为： $\dfrac{-\frac{1}{2}+z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$

即： $v^{-1}=\dfrac{-1+2z^{-1}}{2-z^{-1}}$

(2)设$v=e^{j\theta}$ ，$z=e^{j\omega}$ ，则有：$e^{-j\theta}=\dfrac{-1+2e^{-j\omega}}{2-e^{-j\omega}}$

当时$\theta=0$ ，$\omega=0$ ；

当时$\theta=\pi$ ，$\omega=\pi$ ；

当时$\theta=\theta_c$ ，$\omega_c=arctg\left[\dfrac{0.75\sin\theta_c}{1+1.25\cos\theta_c}\right]$ 。

所以$H(z)$ 是一个低通滤波器。

§4.6 FIR数字滤波器的设计方法

(The Design Methods of FIR Filter)

基本特性：

1. FIR滤波器永远是稳定的（极点均位于原点）；

2. FIR滤波器的冲激响应$h(n)$ 是有限长序列；

3. FIR滤波器的系统函数为多项式；

4. FIR滤波器具有线性相位。

设计的基本方法：

窗函数法，频率抽样法和等波纹逼近法等。

4.6.1 窗函数法

1．窗函数法原理

- 将理想低通滤波器（LPF）无限长单位取样响应序列 $h_d(n)$ 截断（等效于加矩形窗），用得到有限长序列逼近理想低通滤波器。
- 理想低通滤波器的频率响应：

$$H_d(e^{j\omega})=\begin{cases}1, & |\omega|\le\omega_c\\ 0, & \omega_c<|\omega|<\pi\end{cases}$$

其冲激响应为：

$$h_d(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c}e^{j\omega n}d\omega=\frac{\sin\omega_c n}{\pi n}\quad(-\infty<n<\infty)\qquad\cdots\cdots\ (a)$$

特点：

1. 理想低通滤波器的冲激响应序列 $h_d(n)$ 无限长；

2. 非因果（ $\Theta\ h_d(n) \neq 0, n < 0$ ）；

3. $\dfrac{\sin \omega_c n}{\pi n}$ 不是绝对可和。

$\therefore$ 理想LPF是不稳定的，也是不可实现的。

可以对理想LPF进行逼近：截断无限长时间冲激响应序列得到一个有限长序列。即：用有限长的冲激响应序列 $h(n)$ 来逼近无限长的冲激响应序列 $h_d(n)$ 。

- **无限长序列**$h(n)$ $\xrightarrow{\text{加矩形窗截取}}$ **有限长序列**$h_d(n)$ **滤波器的冲激响应。**
- **设一理想低通滤波器的截止频率为** ω_c **，时延为** α

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega\alpha}, |\omega| \le \omega_c \\ 0, \omega_c < |\omega| \le \pi \end{cases}$$

即 ，FIR **其单位冲激响应为：**

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{-j\omega\alpha} \cdot e^{j\omega n} d\omega = \frac{\sin[\omega_c(n-\alpha)]}{\pi(n-\alpha)}$$

$h_d(n)$ **是以** α **为中心的无限长非因果序列。寻找有限长** $h(n) \xrightarrow{\text{逼近}} h_d(n)$ **,** $h(n)$ **应满足：**

1. $h(n)$ **应满足** FIR **滤波器的基本条件；**

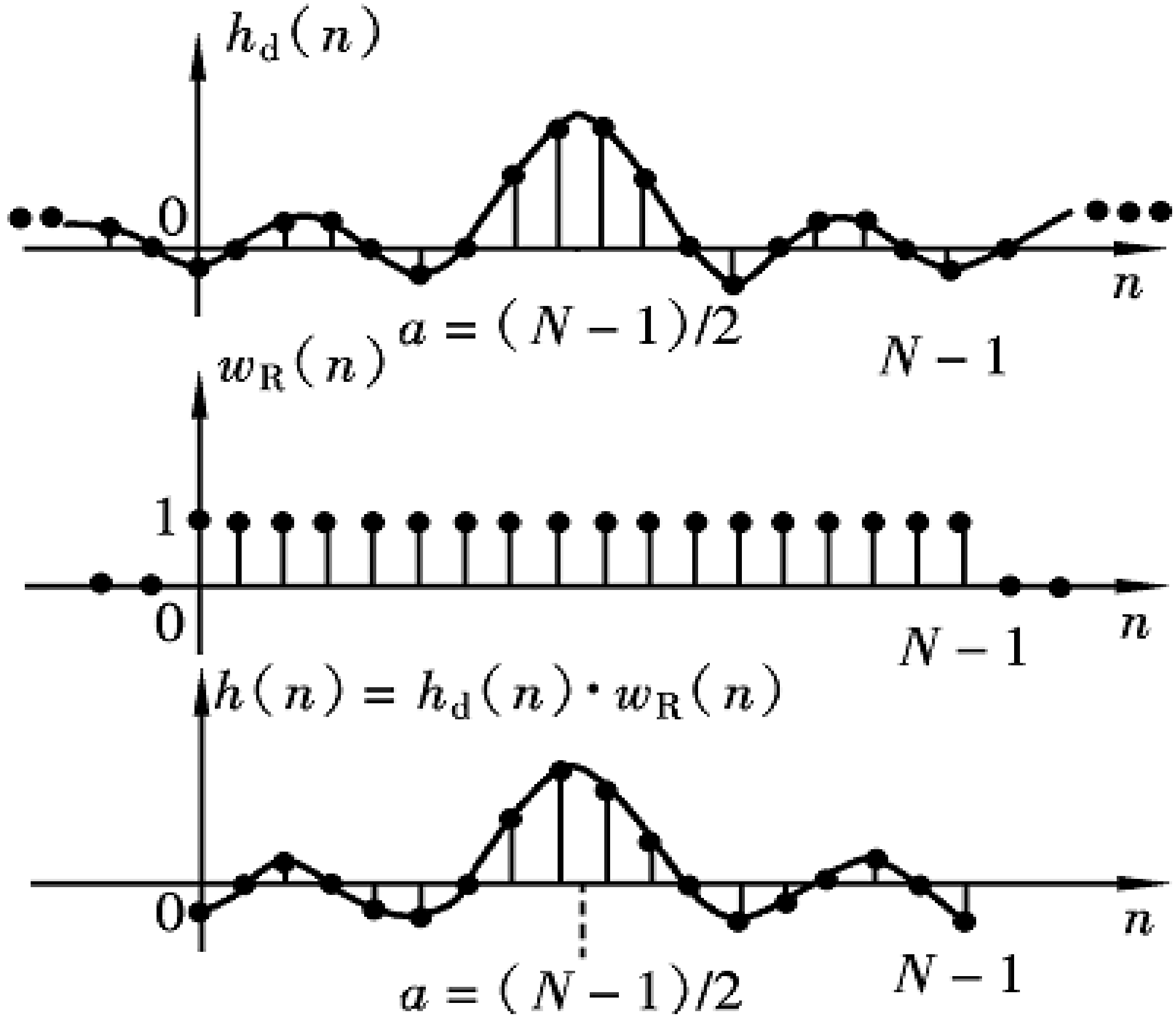
2. $h(n)$ **应为偶对称或奇对称以满足线性相位的条件；**

3. $h(n)$ **应为因果序列。**

$$h(n) = \begin{cases} h_d(n), 0 \le h \le N-1 \\ 0, \text{其它} \end{cases}$$

而 $\alpha = \dfrac{N-1}{2}$ **（为满足偶对称）**

$$h(n) = h_d(n) \cdot W_R(n) \qquad \ldots\ldots \ (b)$$



$h_d(n)$
0
n
$a=(N-1)/2$
$N-1$
$w_R(n)$
1
0
n
$N-1$
$h(n)=h_d(n)\cdot w_R(n)$
0
n
$a=(N-1)/2$
$N-1$

其中：$W_R(n)=\begin{cases}1, 0\le n\le N-1\\ 0, \text{其它}\end{cases}$ ——窗函数（矩形窗）

$\therefore h(n)$ 的频谱为：

$$H(e^{j\omega})=\frac{1}{2\pi}H_d(e^{j\omega})*W(e^{j\omega}) \qquad \cdots\cdots(c)$$

结论：

1. FIR 数字滤波器的频谱是理想LPF的频谱与窗函数频谱的卷积；

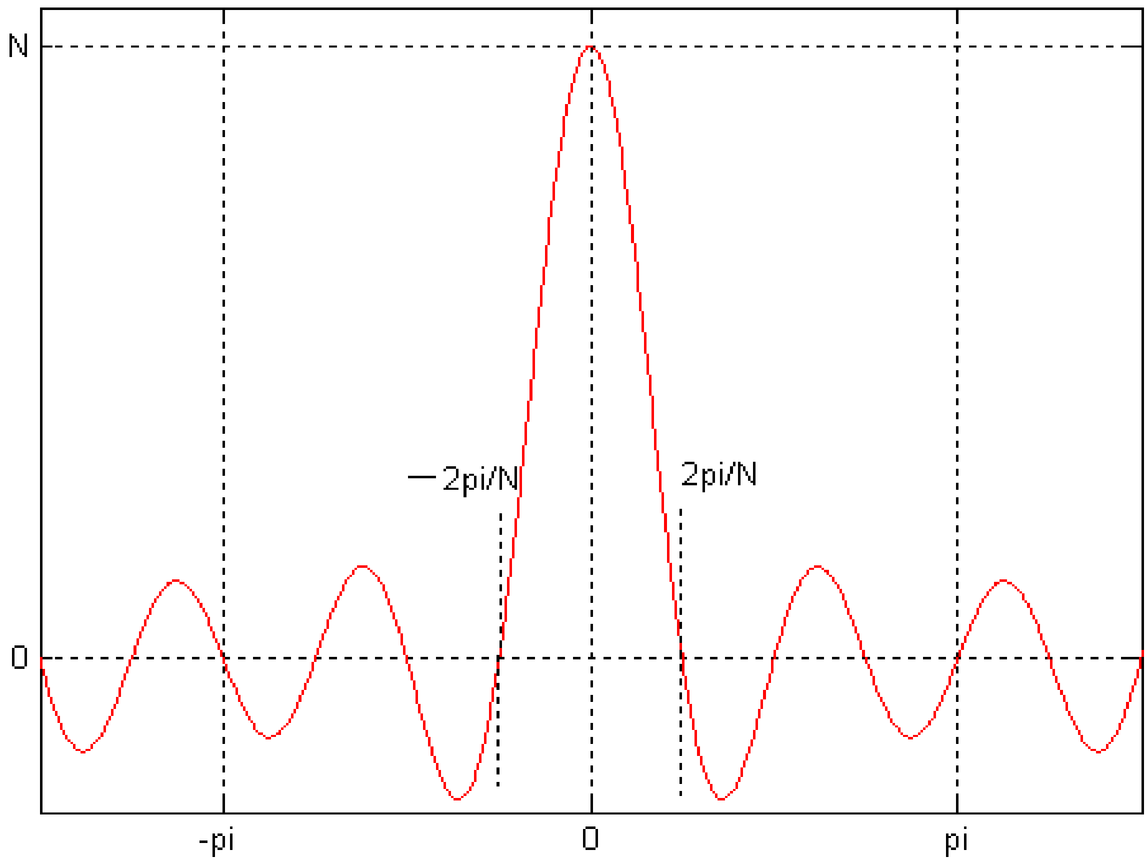
2. 采用不同的窗函数，$H(e^{j\omega})$ 就有不同的形状。

$W_R(n)$ **矩形窗的频谱为：**

$$W_R(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\omega n} = \frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)} \cdot e^{-j\omega\frac{N-1}{2}} = W_R(\omega) \cdot e^{-j\omega\alpha}$$

其中： $\begin{cases} W_R(\omega) = \dfrac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)} \\ \alpha = \dfrac{N-1}{2} \end{cases}$ ……（d）

$W_R(n)$ 的图形如下所示。图中 $-\frac{2\pi}{N} \sim \frac{2\pi}{N}$ 之间的部分称为窗函数的主瓣，主瓣两侧呈衰减振荡部分称为旁瓣。



理想LPF的频率响应为：

$$H_d(e^{j\omega}) = H_d(\omega)e^{-j\omega\alpha}$$

其幅度函数 $H_d(\omega)$ **为：** $H_d(\omega) = \begin{cases} 1, |\omega| \le \omega_c \\ 0, \omega_c < |\omega| \le \pi \end{cases}$

FIR数字滤波器的频率响应为：

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} H_d(e^{j\omega}) * W_R(e^{j\omega})$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\theta}) \cdot W_R(e^{j(\omega-\theta)})d\theta$$

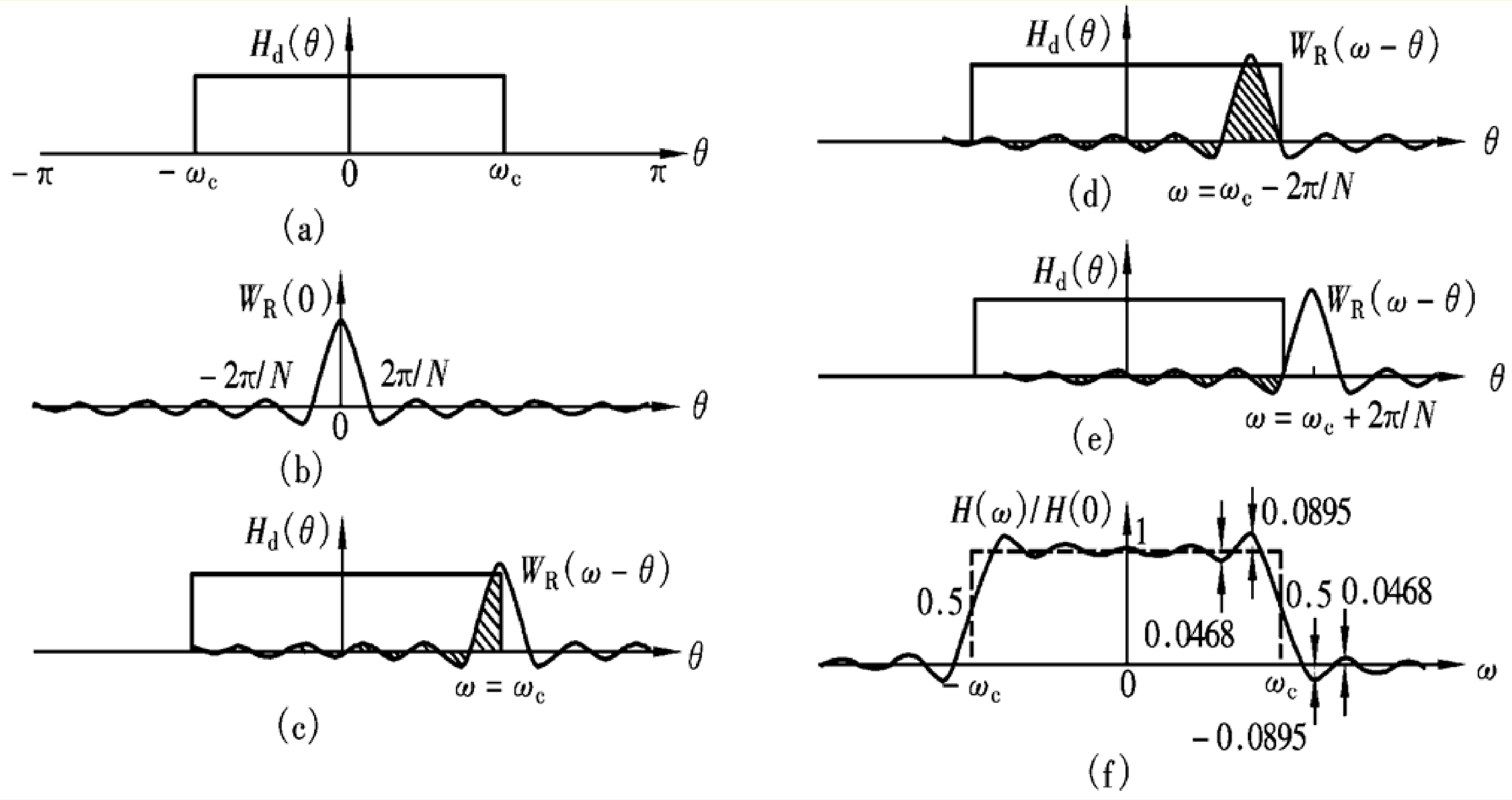
$$= e^{-j\omega\alpha}[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_d(\theta) \cdot W_R(\omega-\theta)d\theta]$$

FIR滤波器的幅度函数为：

$$H(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}H_d(\theta)\cdot W_R(\omega-\theta)d\theta \qquad \cdots\cdots (e)$$

由(e)式可知：

由理想LPF的时间函数加窗后得到的FIR滤波器的幅度函数是理想LPF的幅度函数与窗函数幅度函数的周期卷积。其过程如下图。


$H_d(\theta)$
$-\pi$
$-\omega_c$
0
ω_c
π
θ
(a)
$W_R(0)$
$-2\pi/N$
$2\pi/N$
0
θ
(b)
$H_d(\theta)$
$W_R(\omega-\theta)$
θ
$\omega=\omega_c$
(c)
$H_d(\theta)$
$W_R(\omega-\theta)$
θ
(d)
$\omega=\omega_c-2\pi/N$
$H_d(\theta)$
$W_R(\omega-\theta)$
θ
$\omega=\omega_c+2\pi/N$
(e)
$H(\omega)/H(0)$
1
0.0895
0.5
0.5
0.0468
0.0468
$-\omega_c$
0
ω_c
ω
-0.0895
(f)

2. 加窗的影响

理想LPF加窗后：

(1)使滤波器的频率响应**在不连续点出现了过渡带**，它主要是**由窗函数频谱的主瓣**引起的，其宽度取决于主瓣的宽度。而**主瓣的宽度与N成反比**，宽度 $\Delta\omega = 4\pi / N$ 。

(2)使滤波器在通带和阻带产生了一些起伏振荡的波纹—**吉布斯现象**，主要**由旁瓣造成**。

在一般情况下，对窗函数的要求是：

(1)尽量减少窗函数频谱的旁瓣高度，使能量集中在主瓣，减少通带/阻带中的波纹。

(2)主瓣的宽度尽量窄，获得较陡的过渡带。

以上两条标准相矛盾，为了达到上述要求，采取的措施为：采用不同的窗函数。采用窗函数法设计出来的FIR数字低通滤波器的频率响应，它对理想低通滤波器的频率响应的逼近程度，取决于窗函数的频谱的主瓣宽度和旁瓣衰减的大小。

3．几种常用的窗函数

(1)Bartlett窗：

$$w(n)=\begin{cases}\dfrac{2n}{N-1}, & 0\le n\le \dfrac{N-1}{2}\\[2ex] 2-\dfrac{2n}{N-1}, & \dfrac{N-1}{2}\le n\le N-1\end{cases}$$

其谱函数为：

$$W(\omega)=\frac{1}{M}\left|\frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)}\right|^2, M=\frac{N-1}{2}$$

(2)Hanning窗：

(3)Hamming窗：

(4)Blackman窗：

(5)Kaiser窗：

4．窗函数的一般性质

①窗函数的宽度N越大，窗函数的频谱的主瓣越窄，因而过渡带也越窄。

②窗函数的频谱的最大旁瓣高度和阻带最小衰减只取决于窗函数的种类，与窗函数的宽度N无关。

5．对窗函数的要求

为减小通带和阻带中的波纹幅度，应选择最大旁瓣高度尽可能小的窗函数，这将使更多的能量集中于主瓣内。

为获得尽可能窄的过渡带，应选择主瓣宽度尽量窄的窗函数。

对于一个固定宽度的确定窗函数，这两个要求不可能同时满足，只能在波纹幅度和过渡带两个指标之间折中。

6．用窗函数法设计FIR数字滤波器的步骤

(1)给出希望设计的滤波器的频率响应函数 $H_d(e^{j\omega})$ **；**

(2)根据允许的过渡带宽度和阻带衰减，选择窗函数和它的宽度N；

(3)计算希望设计的滤波器的单位取样响应 $h_d(n)$

$$h_d(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}H(e^{j\omega})\cdot e^{j\omega n}d\omega \qquad h_d(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}H(e^{j\omega})\cdot e^{j\omega n}d\omega$$

(4)计算FIR数字滤波器的单位取样响应

$$h(n) = h_d(n) \cdot w(n)$$

其中 $w(n)$ 是所选择的窗函数；

(5)计算FIR数字滤波器的频率响应，验证是否达到所要求的指标，即：

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cdot e^{j\omega n} \qquad H(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} H_d(e^{j\omega}) * W(e^{j\omega})$$

(6)计算幅度响应 $H(\omega)$ 和相位响应 $\varphi(\omega)$ 。

例4.6.1 设计一个低通FIR数字滤波器。已知模拟理想LPF的幅度响应为:

$$|H_a(j\Omega)| = \begin{cases} 1, & |f| \le 125Hz \\ 0, & 125Hz < |f| < 500Hz \end{cases}$$

取样频率为1kHz，冲激响应的时延 $\alpha = 10$ **。**

解：

模拟理想LPF的截止频率 $f_c = 125$ **Hz,将它转换成数字理想LPF的截止频率** ω_c **，即:**

$$\omega_c = T\Omega_c = 2\pi f_c T$$

$$= \pi \times 125 / 1 \times 10^3 = 0.25\pi$$

∴ 数字理想LPF为：

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega\alpha}, |\omega| \le 0.25\pi \\ 0 \qquad 0.25\pi < |\omega| \le \pi \end{cases}$$

$$\mathrm{Q}\ \alpha = 10, \qquad \therefore \mathrm{N} = 21 \qquad \left(\alpha = \frac{\mathrm{N}-1}{2}\right)$$

故数字理想LPF的冲激响应为:

$$\mathrm{h_d}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-0.25\pi}^{0.25\pi} e^{-j\omega\alpha} \cdot e^{j\omega n}\, d\omega = \frac{\sin[0.25\pi(n-\alpha)]}{\pi(n-\alpha)}$$

因此,所要求的FIR滤波器的冲激响应为:

$$h(n) = h_d(n)\omega(n) = \frac{\sin[0.25\pi(n-10)]}{\pi(n-10)} \cdot \omega(n)$$

其系统函数为：

$$H(z) = \sum_{n=0}^{20} h(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{20} \frac{\sin[0.25\pi(n-\alpha)]}{\pi(n-\alpha)} \; z^{-n}$$

4.6.2 频率取样法

- **将** $H(e^{j\omega})$ **在** $0\sim 2\pi$ **之间作等间隔采样得：**

$$H_d(k)=H_d(e^{j\omega})\big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k}$$

作为 $H(k)$ **。**

- **一个FIR滤波器即可由冲激响应**$h(n)$ **确定，也可由** $h(n)$ **的DFT的系数** $H(k)$ **确定，即：**

$$\begin{cases} H(k)=\sum\limits_{n=0}^{N-1}h(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \\ h(n)=\dfrac{1}{N}\sum\limits_{k=0}^{N-1}H(k)e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \end{cases}$$

故一个FIR滤波器可用频率取样来表示：

$$H(k)=H(z)\big|_{z=e^{j\frac{2\pi}{N}k}}=\sum_{n=0}^{N-1}h(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$H(z)$ **可用取样值** $H(k)$ **表示：**

$$H(z)=\frac{1-z^{-N}}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{H(k)}{1-e^{j\frac{2\pi}{N}k}z^{-1}} \qquad \text{…(a)}$$

同样，系统的频率响应也可用取样值$H(k)$表示：

$$H(e^{j\omega})=\sum_{k=0}^{N-1}H(k)\varphi(\omega-\frac{2\pi}{N}k) \qquad \text{...(b)}$$

其中$\varphi(\omega)$为内插函数。

$$\varphi(\omega)=\frac{\sin(\omega N/2)}{N\sin(\omega/2)}e^{-j\omega(\frac{N-1}{2})}$$

式(a)和式(b)是频率取样法设计FIR数字滤波器的理论基础。

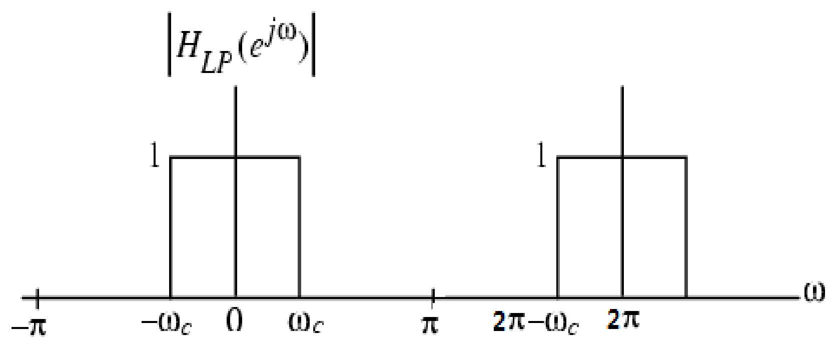
举例：利用频率取样法设计一个长度为9的实系数线性相位FIR低通数字滤波器，其通带截止频率为 $\omega_p=0.5\pi$（rad）。

假设要求的低通数字波器的幅频响应为 $\left|H_d(e^{j\omega})\right|=\begin{cases}1, \left|\omega\right|\le\omega_p \\ 0, \omega_p<\left|\omega\right|<\pi\end{cases}$，

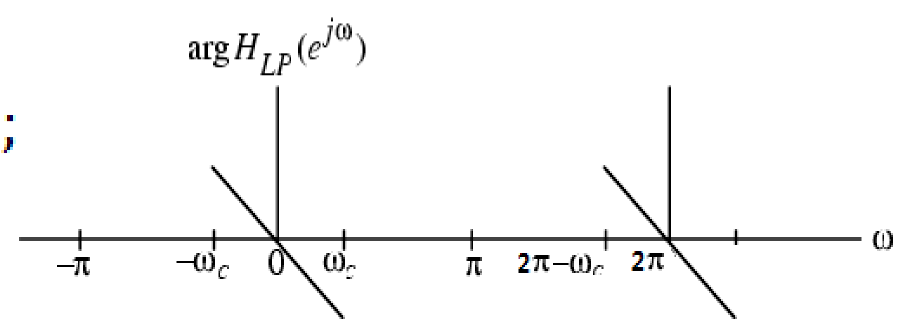
则该数字滤波器在通带内频率样本值 $H(k)=$

- 设线性相位FIR低通滤波器的截止频率为 ω_c，时延为 α

$$H_d(e^{j\omega})=\begin{cases}e^{-j\omega\alpha}, \left|\omega\right|\le\omega_c \\ 0, \omega_c<\left|\omega\right|\le\pi\end{cases}$$



$$\frac{2\pi}{9}k=0.5\pi \quad k=2.25;$$



$$\frac{2\pi}{9}k=2\pi-0.5\pi=1.5\pi \quad k=6.75;$$

$$k=0,1,2,7,8 \quad H(k)=e^{-j\frac{2\pi}{9}k\cdot 4}$$

举例： IIR低通模拟滤波器的系统函数 $H_{LP}(s)$，有一极点 s_k

1. 采用 $s=\dfrac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$ 将其变换到IIR低通数字滤波器系统函数 $H_d(z)$，

   求变换后对应极点位置。 $z=\dfrac{1+s_k}{1-s_k}$

2. 采用冲激响应不变法，将其变换到IIR低通数字滤波器系统函数 $H_d(z)$ ，

   求变换后对应极点位置。 $z=e^{s_k T}$

§4.7 FIR数字滤波器与IIR数字滤波器的比较 (The Comparision between FIR Filter and IIR Filter)

1、系统函数

IIR DF的系统函数是有理分式，常用递归结构实现；当所有极点在单位圆内时，滤波器是稳定的，有限字长效应有可能使滤波器变得不稳定。

FIR DF的系统函数是多项式，常用非递归结构实现；系统总是稳定的，有限字长效应对滤波器的影响较小。

2、阶数

为了达到相同的技术指标，IIR DF的阶数比FIR DF的阶数少；FIR DF可用FFT来实现。

3、线性相位

FIR DF可以得到广义的线性相位；IIR DF的选频特性越好，其相位的非线性就越严重，为使IIR数字滤波器具有线性相位，须用一个全通网络进行相位补偿。

4、设计方法

IIR DF可以利用现成的模拟滤波器设计公式、数

据和表格，计算量小，对计算工具的要求不高；FIR DF无现成的设计公式，窗函数法只给出窗函数的计算，计算通带和阻带衰减仍无闭式表达式，对计算工具的要求较高。

5、应用范围

IIR DF主要是设计规格化的、频率特性为分段常数的标准低通、高通、带通、带阻和全通滤波器；FIR DF可设计出理想正交变换器、理想微分器等网络。

举例1： 若模拟低通滤波器的传递函数 $H(s)=\dfrac{1}{(s-s_0)^2}$

求：采用冲激响应不变法得到的数字滤波器的系统函数H(z).

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{s_0 t}u(t)e^{-st}dt=\int_{0}^{\infty} e^{-(s-s_0)t}dt=-\frac{1}{s-s_0}*e^{-(s-s_0)t}\Big|_0^{\infty}=\frac{1}{s-s_0} \qquad \therefore \mathcal{L}\left(e^{s_0 t}u(t)\right)=\frac{1}{s-s_0}$$

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s-s_0}\right)=\frac{d}{ds}\int_0^{\infty} e^{-(s-s_0)t}dt \qquad -\frac{1}{(s-s_0)^2}=\int_0^{\infty}-te^{-(s-s_0)t}dt \qquad \frac{1}{(s-s_0)^2}=\int_0^{\infty} te^{s_0 t}e^{-st}dt$$

$$\therefore \mathcal{L}\left(te^{s_0 t}u(t)\right)=\frac{1}{(s-s_0)^2}$$

$$h(n)=h(nT)=nTe^{s_0 Tn}u(nT)=T*ne^{s_0 Tn}u(n)$$

$$\mathcal{Z}\left(e^{s_0 Tn}u(n)\right)=H_0(z)=\frac{1}{1-e^{s_0 T}z^{-1}} \qquad |z|>e^{s_0 T}$$

$$\mathcal{Z}\left(ne^{s_0 Tn}u(n)\right)=-z\frac{d}{dz}H_0(z)=\frac{e^{s_0 T}z^{-1}}{(1-e^{s_0 T}z^{-1})^2}$$

$$\therefore H(z)=\frac{Te^{s_0 T}z^{-1}}{(1-e^{s_0 T}z^{-1})^2}$$