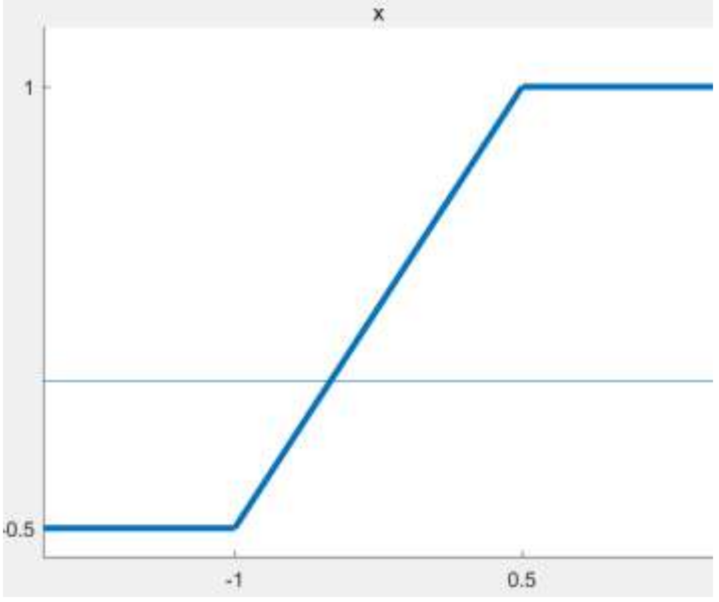
一、求信号 $x(t)=\begin{cases}-\dfrac{1}{2}, & t<-1\\ t+\dfrac{1}{2}, & -1\le t\le\dfrac{1}{2}\\ 1, & t>\dfrac{1}{2}\end{cases}$ 的傅里叶变换 $X(j\omega)$ 。



解： $a_0=\lim\limits_{T\to\infty}\dfrac{1}{2T}\displaystyle\int_{-T}^{T}x(t)dt=\lim\limits_{T\to\infty}\dfrac{1}{2T}\left[0.5T+0.375\right]=0.25\neq 0$

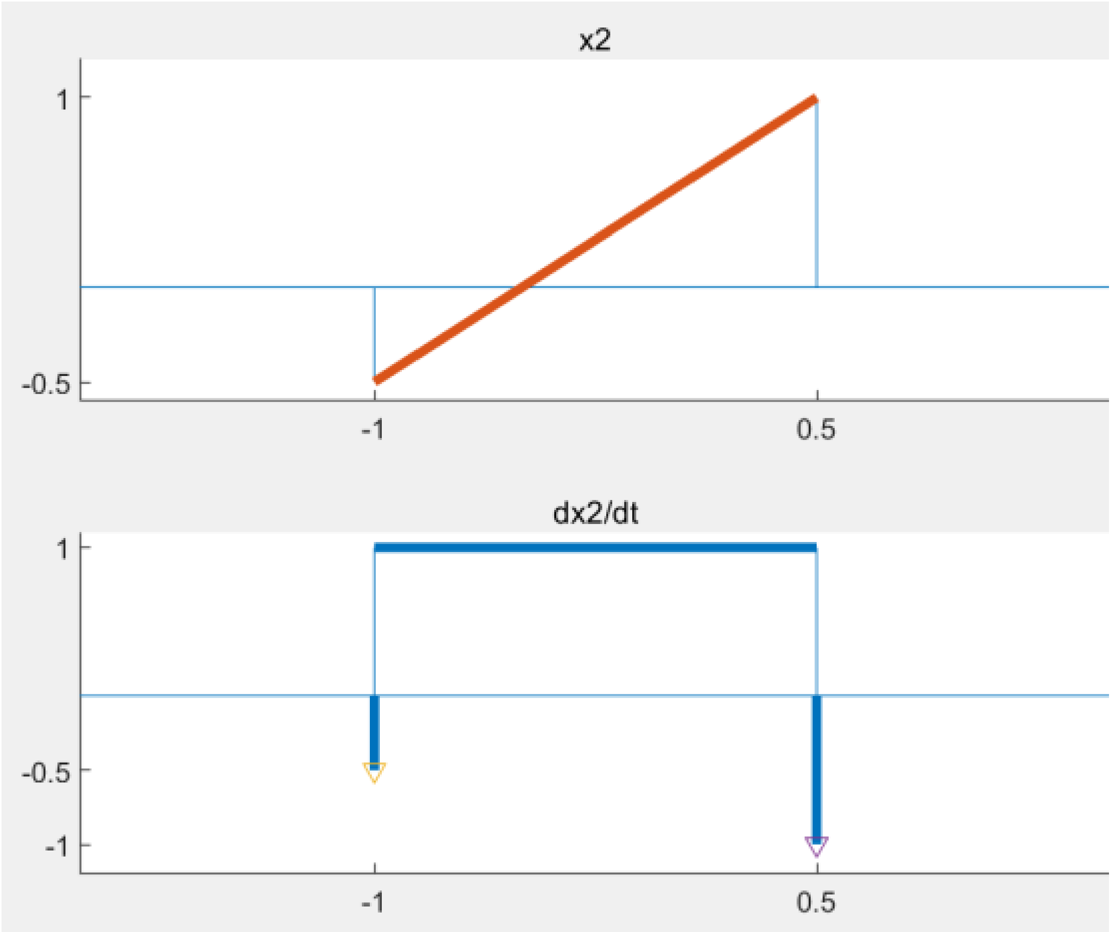
该信号绝对不可积，不能用分析式计算其傅里叶变换！

方法一：分段计算：

$$x(t)=-0.5u(-t-1)+(t+0.5)[u(t+1)-u(t-0.5)]+u(t-0.5)$$
$$=x1+x2+x3$$

$$X1(j\omega)=-0.5\left[\pi\delta(-\omega)+\frac{1}{j(-\omega)}\right]e^{-j(-\omega)}=-0.5\left[\pi\delta(\omega)-\frac{1}{j\omega}\right]e^{j\omega}$$
$$=-0.5\pi\delta(\omega)+0.5\cdot\frac{1}{j\omega}e^{j\omega}$$

$$X3(j\omega)=\left[\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}\right]e^{-j0.5\omega}=\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}e^{-j0.5\omega}$$

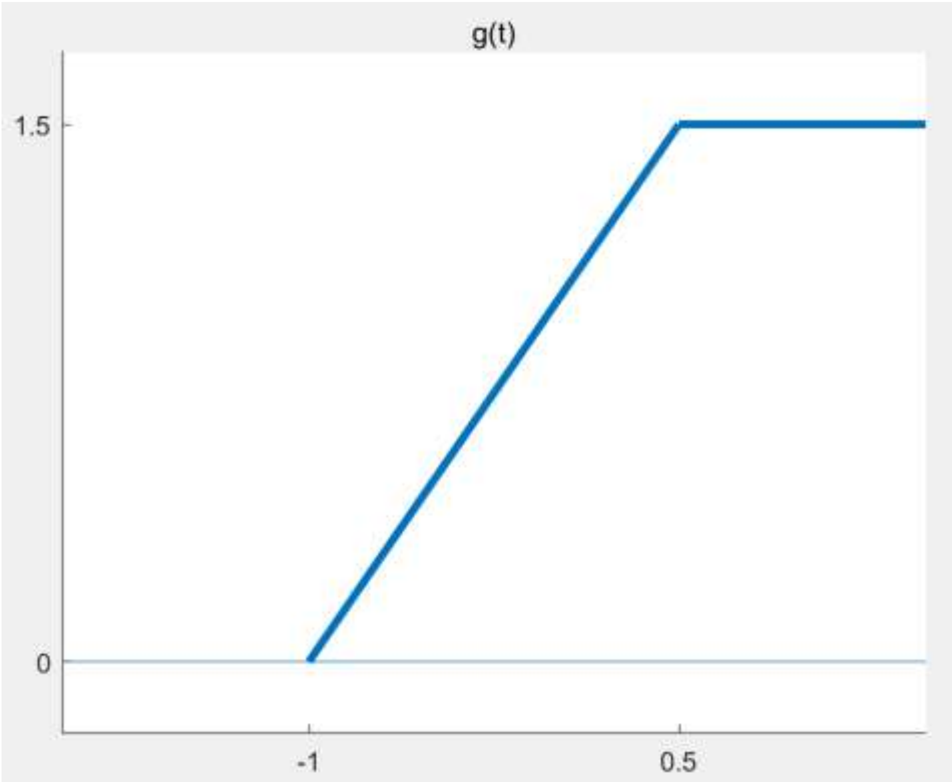


$$\frac{dx2(t)}{dt} = u(t+1) - u(t-0.5) - 0.5\delta(t+1) - \delta(t-0.5)$$
$$= G_{1.5}(t+0.25) - 0.5\delta(t+1) - \delta(t-0.5)$$

$$j\omega X2(j\omega) = 1.5 \cdot \frac{\sin(0.75\omega)}{0.75\omega} e^{j0.25\omega} - 0.5e^{j\omega} - e^{-j0.5\omega}$$
$$X2(j\omega) = \frac{2\sin(0.75\omega)}{j\omega^2} e^{j0.25\omega} - \frac{0.5e^{j\omega} + e^{-j0.5\omega}}{j\omega}$$

$$X(j\omega) = X1(j\omega) + X2(j\omega) + X3(j\omega) = \frac{2\sin(0.75\omega)}{j\omega^2} e^{j0.25\omega} + 0.5\pi\delta(\omega)$$

方法二：考虑 $g(t)=x(t)+0.5$，其中



对 g(t) 应用微积分性质可得

$$G(j\omega)=\frac{2\sin(0.75\omega)}{j\omega^2}e^{j0.25\omega}+1.5\pi\delta(\omega)$$

最终有

$$X(j\omega)=G(j\omega)-\pi\delta(\omega)=\frac{2\sin(0.75\omega)}{j\omega^2}e^{j0.25\omega}+0.5\pi\delta(\omega)$$

二、已知 $x(t)=\begin{cases}0, & |t|>1\\ (t+1)/2, & -1\le t\le 1\end{cases}$，则其奇部的傅里叶变换为（ ）。

要点： $x_o(t)=0.5[x(t)-x(-t)]\xleftrightarrow{FT} j\operatorname{Im}X(j\omega)$

三、设实值信号 $x(t)$ 的傅里叶变换为 $X(j\omega)$， 已知 $x(t)=0, t\le 0$ 且 $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\operatorname{Re}\{X(j\omega)\}e^{j\omega t}d\omega=|t|e^{-|t|}$，则 $x(t)$ 的闭式表达式为（　　）。

要点： $x_e(t)=0.5[x(t)+x(-t)]\xleftrightarrow{FT}\operatorname{Re}X(j\omega)$

四、由 RLC 电路表示的因果 LTI 系统的频率响应为 $H(j\omega)=\frac{1}{-\omega^2+j\omega+1}$，则该系统的单位冲激响应为（　　）。

提示：可用拉氏变换求逆。

五、　考虑一连续时间理想低通滤波器 S，其频率响应是 $H(j\omega)=\begin{cases}1, & |\omega|\le 150\\ 0, & |\omega|>150\end{cases}$。当该滤波器的输入是基波周期为 $T=\pi/6$ 和傅里叶级数系数为 a_k 的信号 $x(t)$ 时有 $x(t)\xrightarrow{S}y(t)=x(t)$，由此可推断出当（ ）时 $a_k=0$。

提示：输出信号等于输入信号，则二者的频谱也相同！