



第7章数字带通传输系统

- 7.1 二进制数字调制原理
- 7.2 二进制数字调制系统的抗噪声性能
- 7.3 二进制数字调制系统的性能比较

- 7.4 多进制数字调制原理
 - 7.4.1 多进制振幅键控 (MASK)
 - 7.4.2 多进制频移键控 (MFSK)
 - 7.4.3 多进制相移键控 (MPSK)
 - 7.4.4 多进制差分相移键控 (MDPSK)
 - 7.4.5 QPSK的其它变化体制

- 7.5 多进制数字调制系统的抗噪声性能



7.4 多进制数字调制原理

● 多进制数字调制:

● 幅度调制: MASK、QAM

● 频率调制: MFSK、MSK/GMSK

● 相位调制: MPSK/MDPSK及其变化体制

7.4.1 多进制振幅键控(MASK)

又称多电平幅度调制 (MPAM)

一、信号时间函数表达式

多电平数字基带信号:
$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_m g(t - kT_s)$$

则MASK信号:
$$e_{MASK}(t) = s(t) \cos \omega_0 t$$

一个码元时间内的信号为
$$s_m(t) = A_m g(t) \cos \omega_0 t, \quad 0 \leq t \leq T_s$$

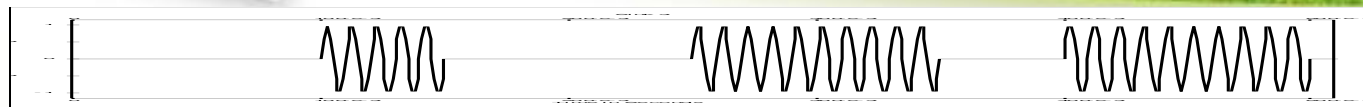
式中 A_m 取M个幅值, 对应不同的基带码型, 可以是单极性或双极性的。对于双极性信号, 有:

$$A_m = (2m - 1 - M)d, (1 \leq m \leq M)$$

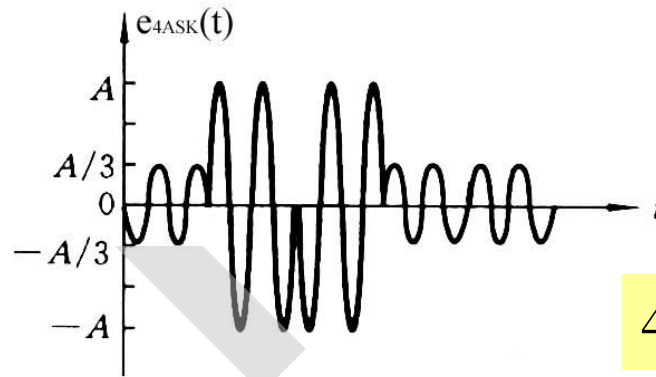
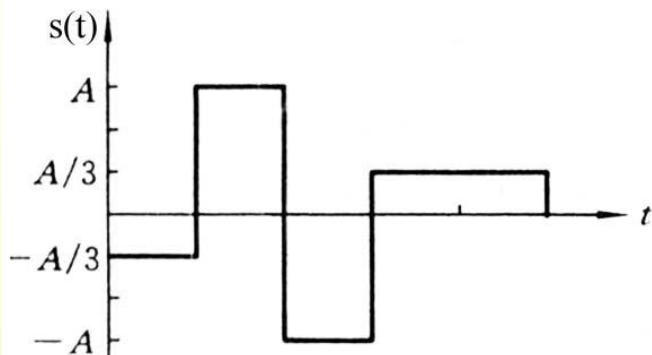
d 表示两相邻幅值的间距单位。

$M = 2^k$, 表示每个电平代表的比特位数。

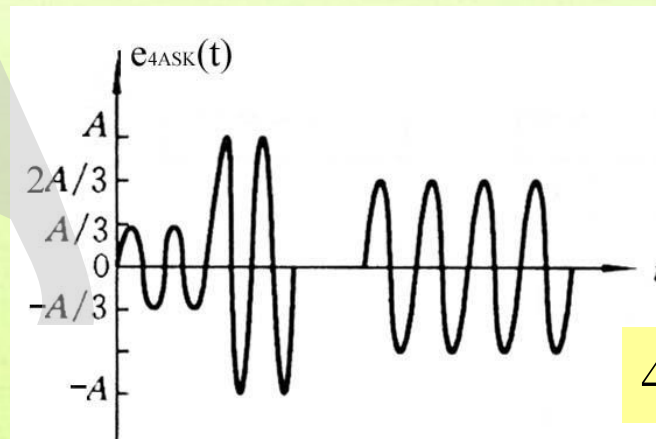
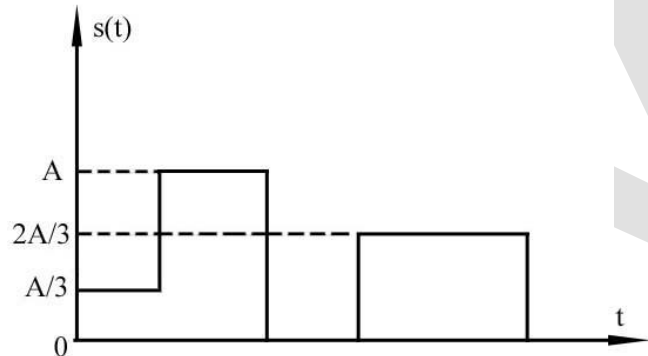
单极性与双极性信号与基带的对应关系



2ASK(单极性)

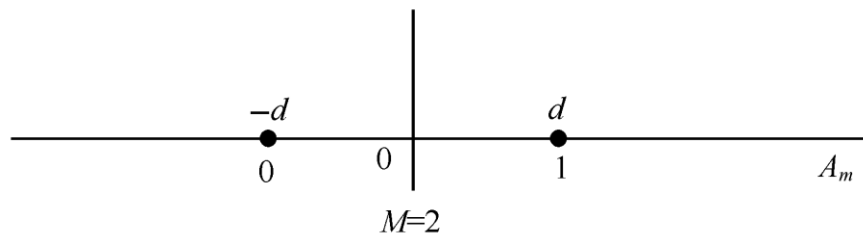


4ASK(双极性)



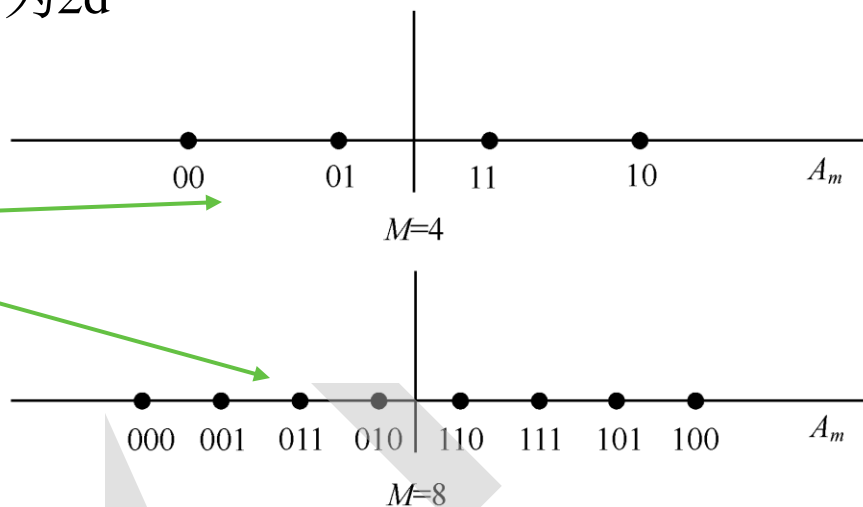
4ASK(单极性)

二、信号星座图



信号间最小欧氏距离为 $2d$

图中表示的是格雷码



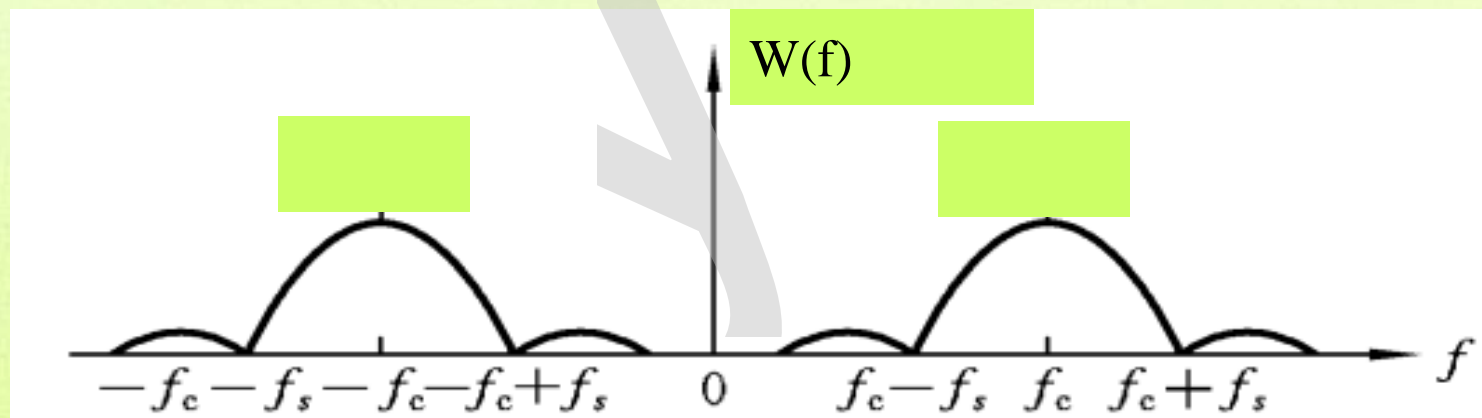
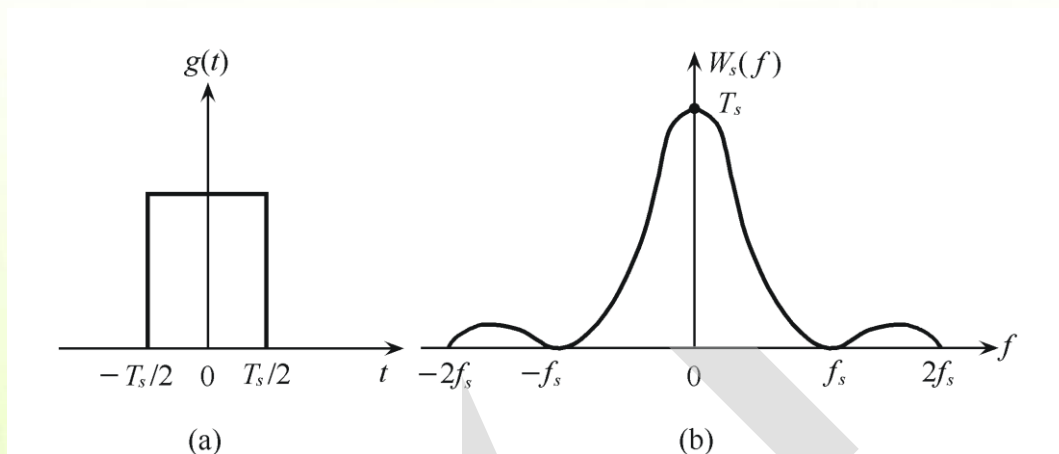
三、码元能量

$$E = \int_0^T s_m^2(t) dt = \frac{1}{2} A_m^2 \int_0^T g^2(t) dt = \frac{1}{2} A_m^2 \cdot E_g$$

E_g 表示码元波形脉冲 $g(t)$ 的能量。

四、带宽与频带利用率

例：双极性2ASK信号的功率谱密度





基带信号的频带利用率（余弦滚降特性下）：

$$\eta = \frac{R_B}{B} = \frac{2}{1+\alpha} \quad \text{Baud / Hz}$$

$$\eta_b = \frac{R_b}{B} = \frac{2 \log_2 M}{1+\alpha} \quad \text{bps / Hz}$$

MASK信号的频带利用率（余弦滚降特性下）：

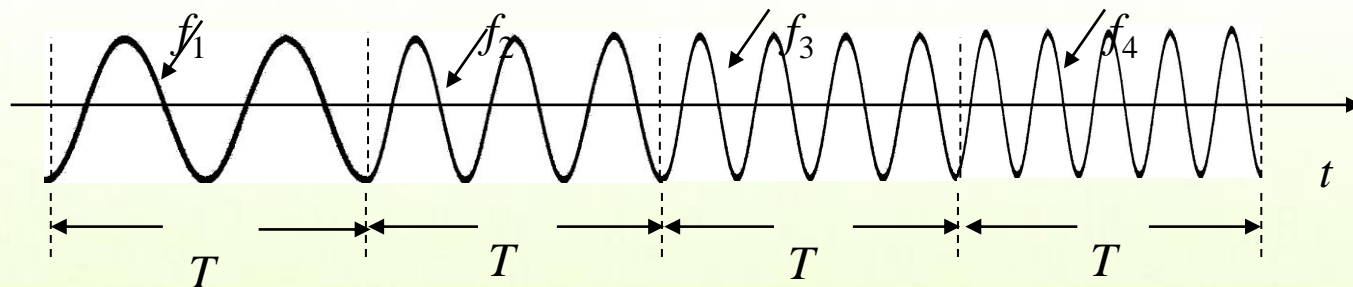
$$\Delta F = 2B$$

$$\eta = \frac{R_B}{\Delta F} = \frac{1}{1+\alpha} \quad \text{Baud / Hz}$$

$$\eta_b = \frac{R_b}{\Delta F} = \frac{\log_2 M}{1+\alpha} \quad \text{bps / Hz}$$

7.4.2 多进制频移键控 (MFSK)

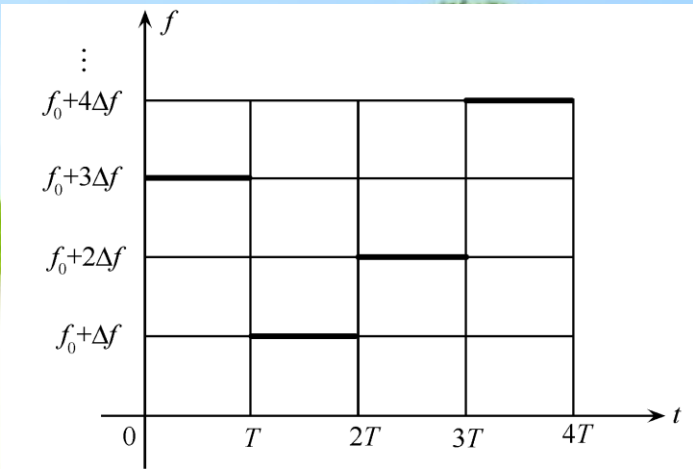
4FSK信号波形举例



(a) 4FSK信号波形

f_1	f_2	f_3	f_4
00	01	10	11

(b) 4FSK信号的取值



🌳 MFSK的数学表达式

🌳 M个频率通常是等间隔的，相邻两个频率的间隔为 Δf 。

🌳 则一个码元时间内的MFSK信号为

$$s_m(t) = g(t) \cdot \cos[2\pi f_0 t + 2\pi f_m t + \phi_0] = g(t) \cos[2\pi f_0 t + 2\pi m \Delta f t + \phi_0]$$

$(m = 1, 2, \dots, M, 0 \leq t \leq T)$

🌳 码元能量:

$$E = \int_0^T s_m^2(t) dt = \frac{1}{2} E_g$$

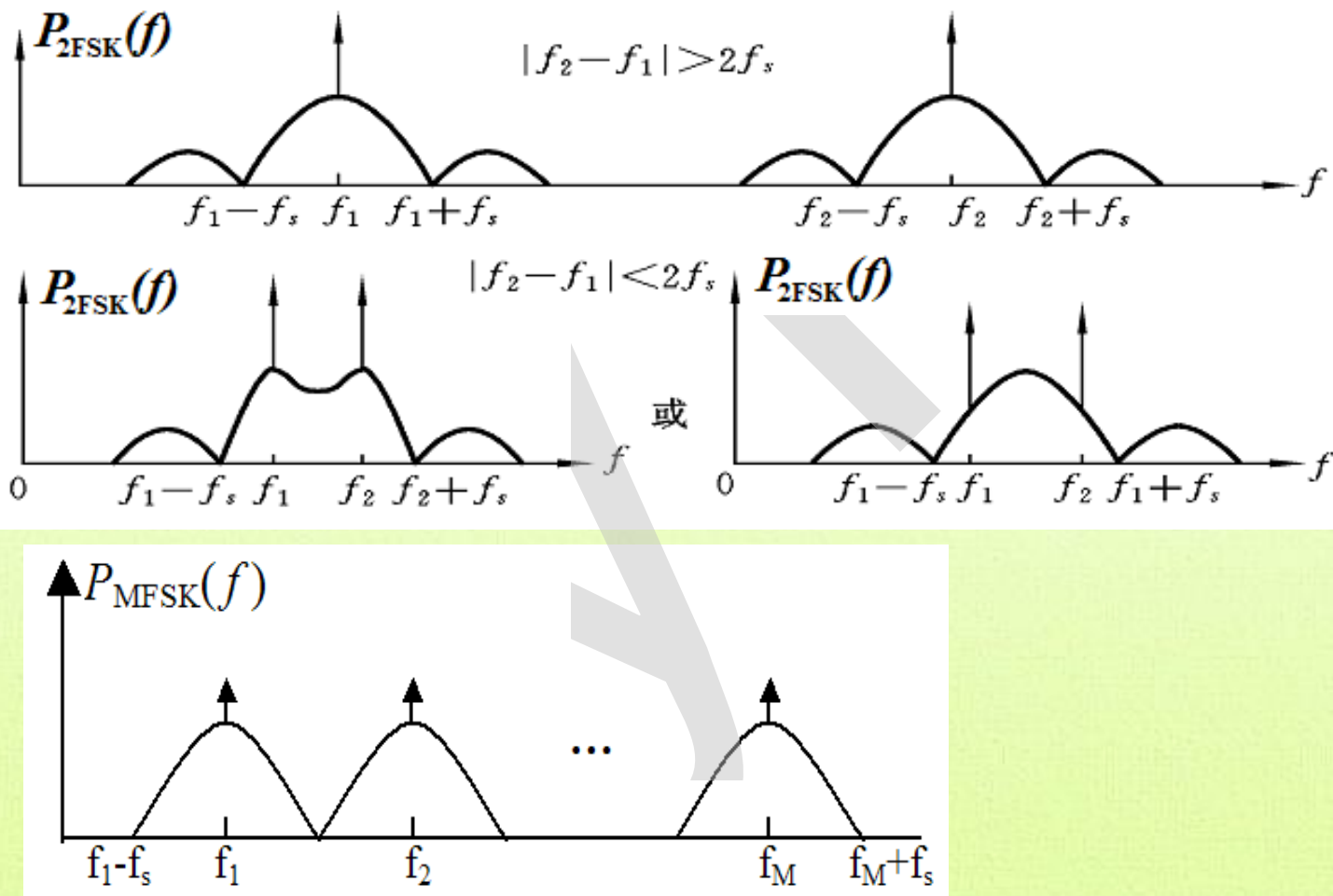
🌳 设 $g(t)$ 为矩形脉冲，并令初相位为0，得简化后的表达式为:

$$s_m(t) = \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos[2\pi f_0 t + 2\pi m \Delta f t] \quad (m = 1, 2, \dots, M, 0 \leq t \leq T)$$

MFSK功率谱与带宽

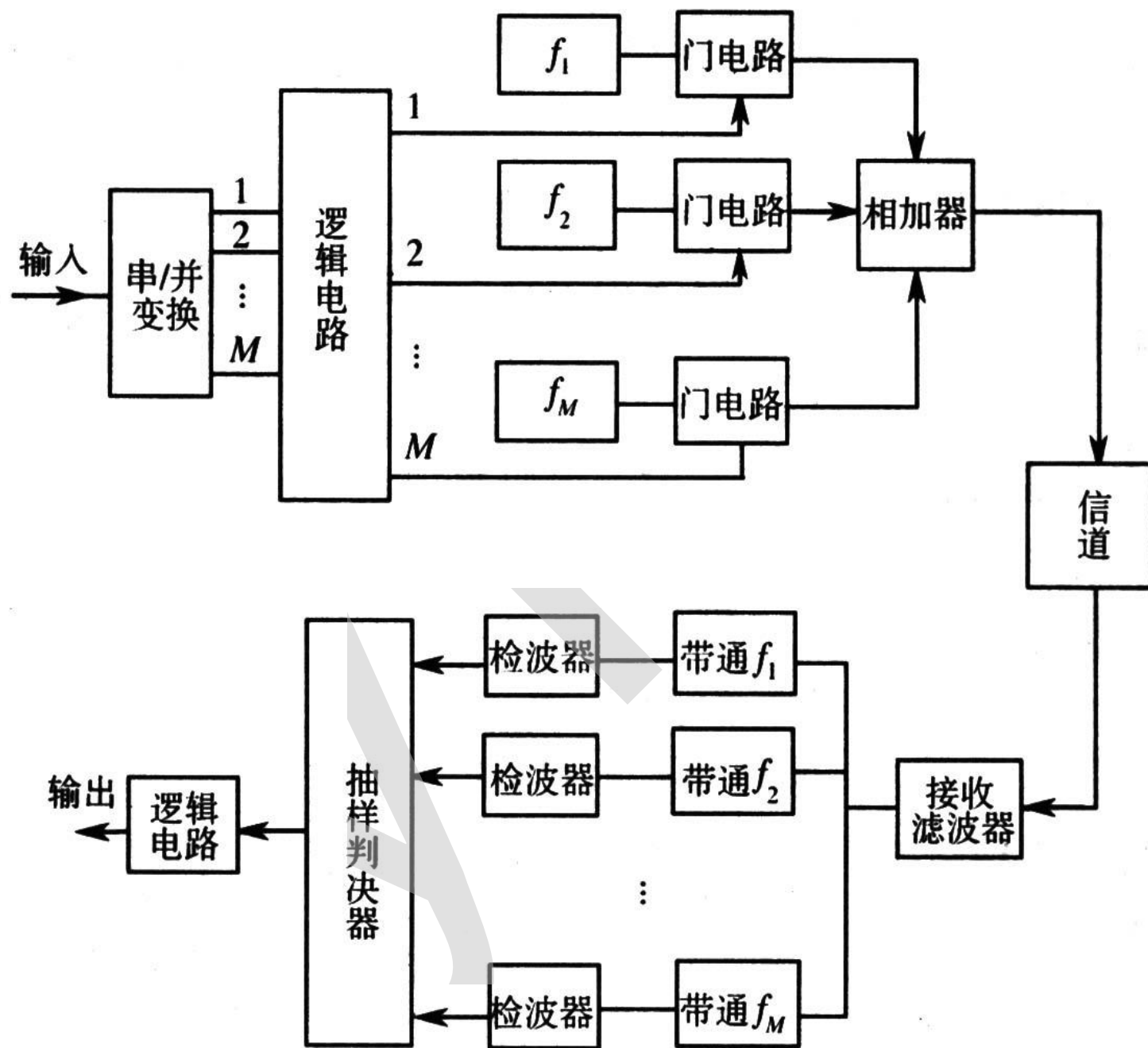
设FSK波形函数 $g(t)$ 为矩形，码元宽度为 T ，则2FSK的带宽为： $B_{2FSK} = \Delta f + 2/T$

MFSK的带宽为： $B_{MFSK} = (M-1)\Delta f + 2/T$





MFSK 调制与解调



7.4.3 多进制相移键控(MPSK)

一个MPSK信号码元可以表示为

$$s_m(t) = g(t) \cos(\omega_0 t + \theta_m) \Rightarrow s_m(t) = A \cos(\omega_0 t + \theta_m) \quad 0 \leq t \leq T$$

其中 $\theta_m = 2\pi \cdot \frac{m-1}{M} + \theta_0 \quad m=1, 2, \dots, M$ $g(t)$ 取为矩形脉冲

例：对于8PSK，当发送信号的相位为 $\theta_1 = 0$ 时，能够正确接收的相位范围在 $\pm\pi/8$ 内。

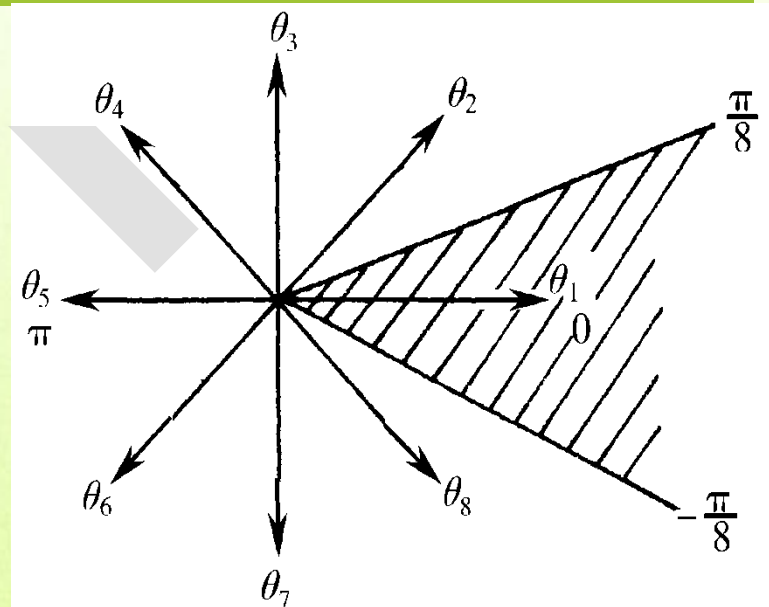


图7-34 8PSK信号相位



- ❁ MPSK信号不能简单地采用一个相干载波进行相干解调。例如，若用 $\cos 2\pi f_0 t$ 作为相干载波时，因为 $\cos \theta_k = \cos (2\pi - \theta_k)$ ，使解调存在模糊。

- ❁ MPSK可以用两个正交的相干载波进行调制和解调。

$$\begin{aligned} s_m(t) &= A \cos(\omega_0 t + \theta_m) = A \cos \theta_m \cdot \cos \omega_0 t - A \sin \theta_m \cdot \sin \omega_0 t \\ &= a_m \cdot \cos \omega_0 t - b_m \cdot \sin \omega_0 t \end{aligned}$$

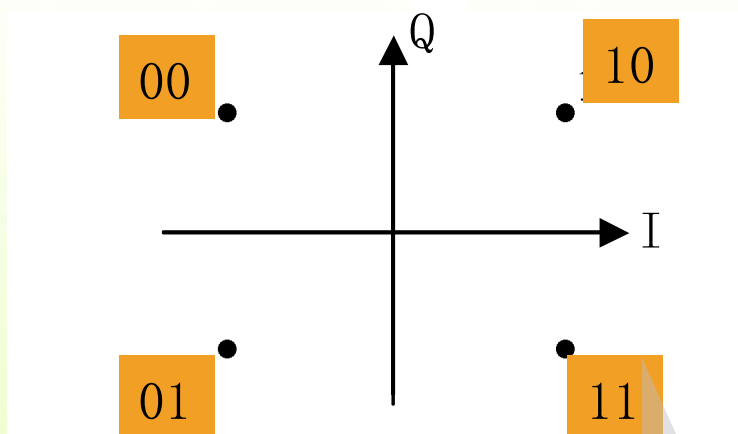
- ❁ 由于MPSK可以看作是两路MASK信号的叠加，其**带宽和MASK信号的带宽相同**。

- ❁ 由于 $M > 4$ 时，MQAM信号比MPSK信号的抗噪性能好，故目前常用的多进制相位调制信号是4PSK (QPSK)。

QPSK

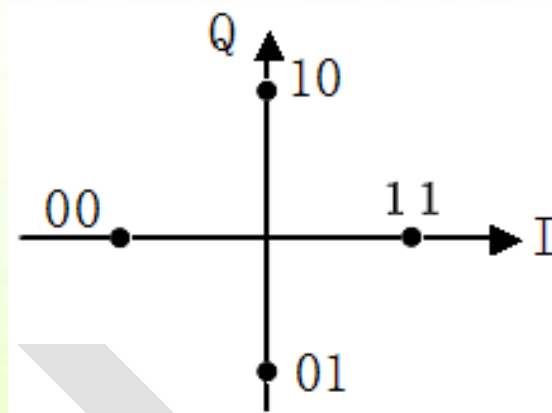
一、QPSK星座图与格雷码映射

CCITT推荐的两种方式:



B方式

$$\theta_m = 45^\circ, 135^\circ, 225^\circ, 315^\circ$$



A方式

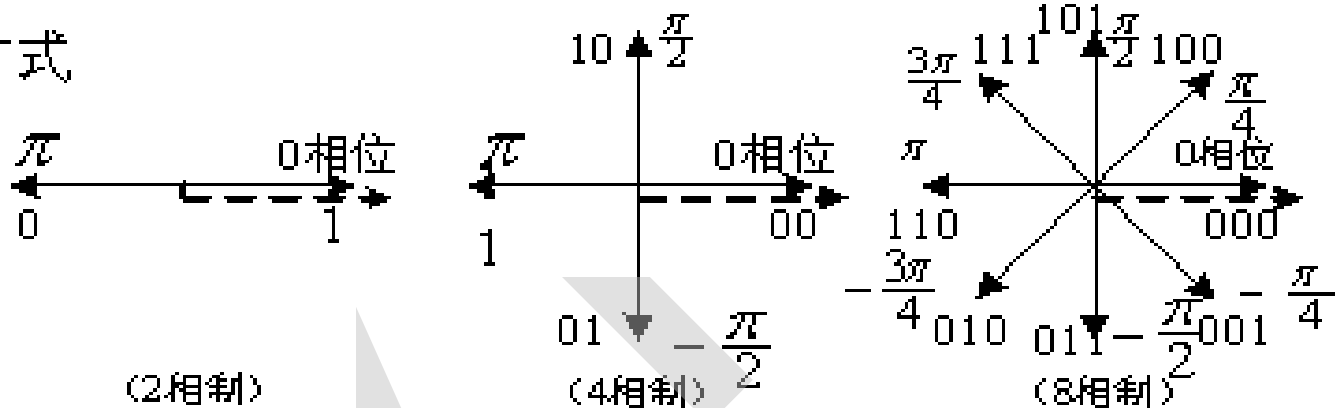
$$\theta_m = 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$$



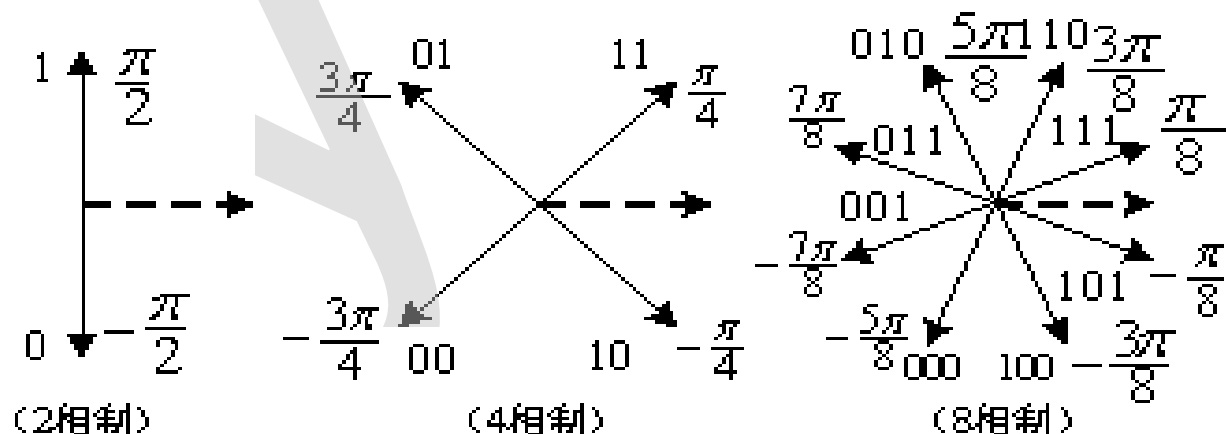
● PSK信号相位配置的A方式和B方式

● 根据CCITT的建议如下图。对MPSK而言，参考相位为载波的初相。

(a) A方式



(b) B方式





❁ 正交相移键控 (QPSK)，其星座点与数据比特间采用**格雷码映射**。

❁ 格雷 (Gray) 码的编码原则是：使相邻信号点对应的数据比特只有一位不同。

❁ 被噪声污染的接收信号，相邻信号点最容易混淆而造成错判，格雷码映射使这种错判只造成一个比特的误码，从而大大减小误码率。

❁ 多位格雷码的编码方法如右：

表7.4.2 格雷码编码规则

序号	格雷码	二进制
0	0 0 0 0	0000
1	0 0 0 1	0001
2	0 0 1 1	0010
3	0 0 1 0	0011
4	0 1 1 0	0100
5	0 1 1 1	0101
6	0 1 0 1	0110
7	0 1 0 0	0111
8	1 1 0 0	1000
9	1 1 0 1	1001
10	1 1 1 1	1010
11	1 1 1 0	1011
12	1 0 1 0	1100
13	1 0 1 1	1101
14	1 0 0 1	1110
15	1 0 0 0	1111

二、QPSK调制方法

1) 相位选择法

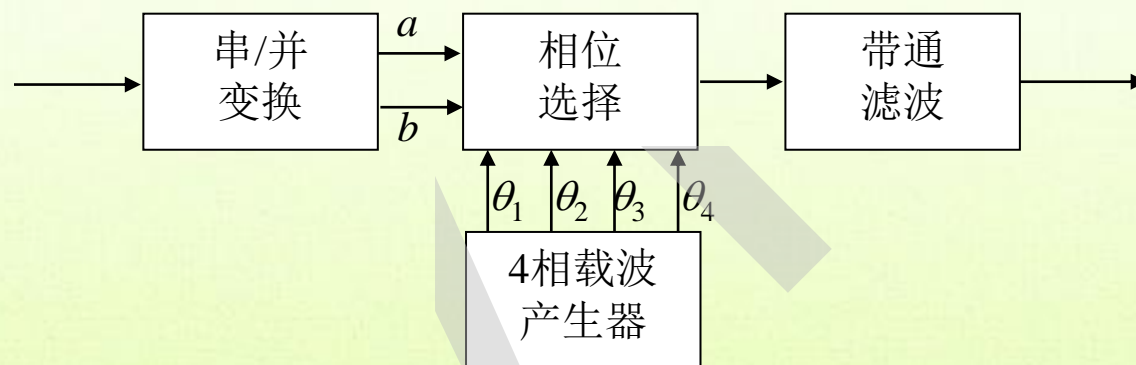
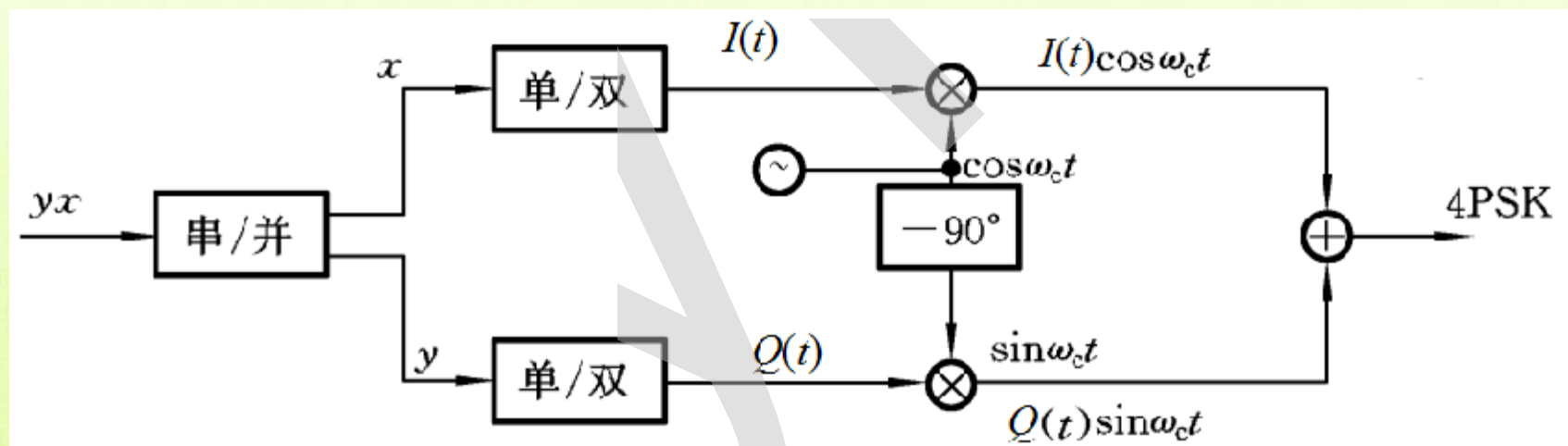


图7-40 选择法产生QPSK信号



2) 两路正交BPSK调制

在B方式下，由星座图和MPSK展开式可知，QPSK调制相当于两路正交的BPSK调制，而其解调由两路正交的BPSK解调器完成。



正交调制_B方式

三、QPSK的解调

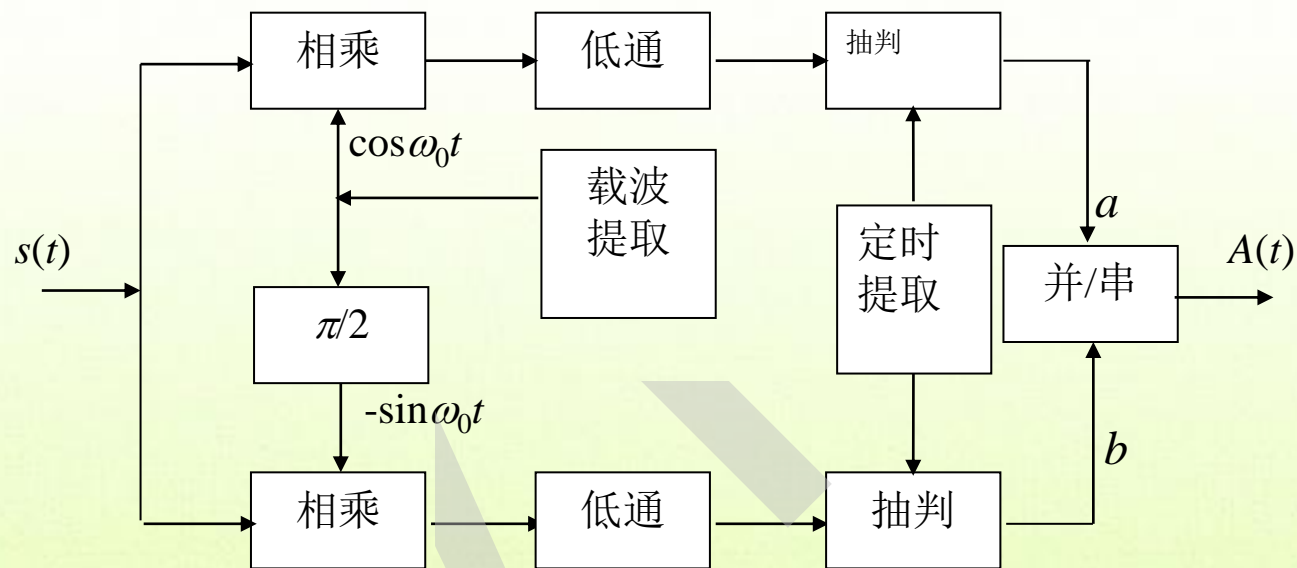


图7-41 QPSK信号解调原理方框图

解调_B方式

若同步载波有相位模糊，则QPSK解调出错。



7.4.4 多进制差分相移键控(MDPSK)

- MPSK系统在解调时都存在相位模糊现象。
- 克服相位模糊的方法是采用MDPSK。
- 以下以4进制信号为例讨论**QDPSK**。

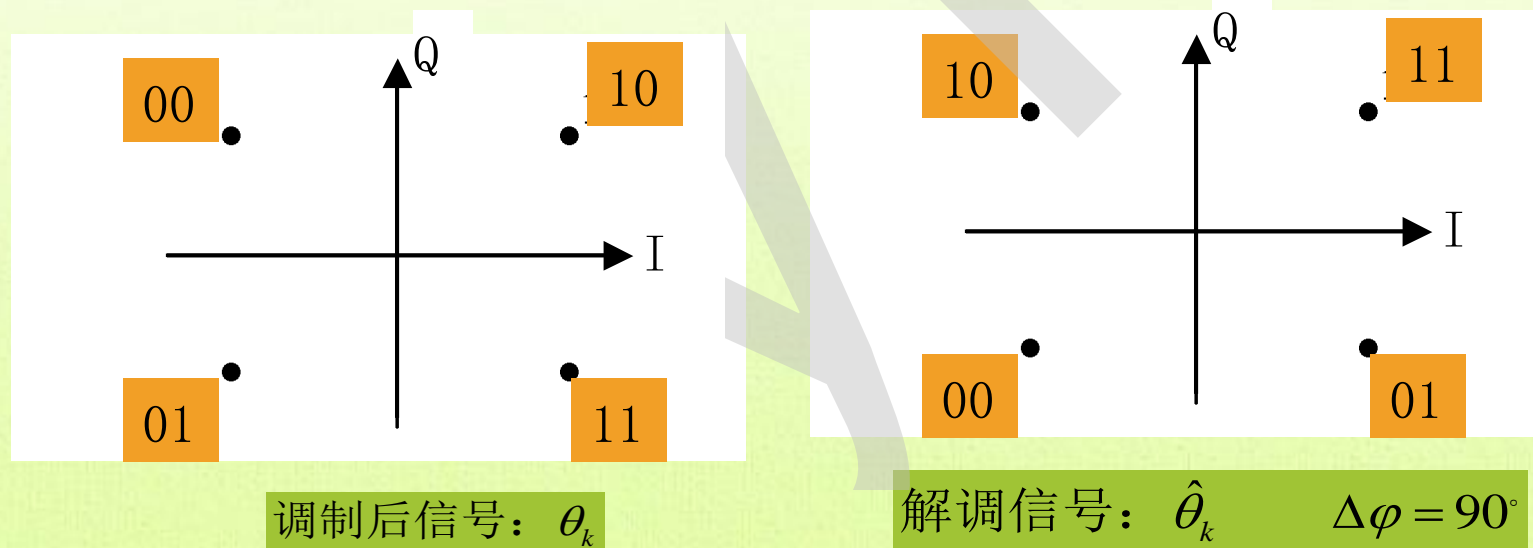
QPSK的载波相位模糊现象

QPSK的相位模糊使同步载波具有四个可能的相位之一：

$$\left. \begin{array}{l} \text{I 支路载波: } \cos(\omega_0 t + \Delta\varphi) \\ \text{Q 支路载波: } \sin(\omega_0 t + \Delta\varphi) \end{array} \right\} \Delta\varphi = 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$$

载波的相位改变造成解调信号对应星座点的相位改变：

$$\hat{\theta}_k = \theta_k + \Delta\varphi$$



QDPSK克服相位模糊的原理

QDPSK克服相位模糊的方法同样是采用差分相位编码，其原理如下：

由 $c_k d_k$ 码完成绝对移相，对应 θ_k ，解调后有相位模糊：

$$\hat{\theta}_k = \theta_k + \Delta\varphi$$

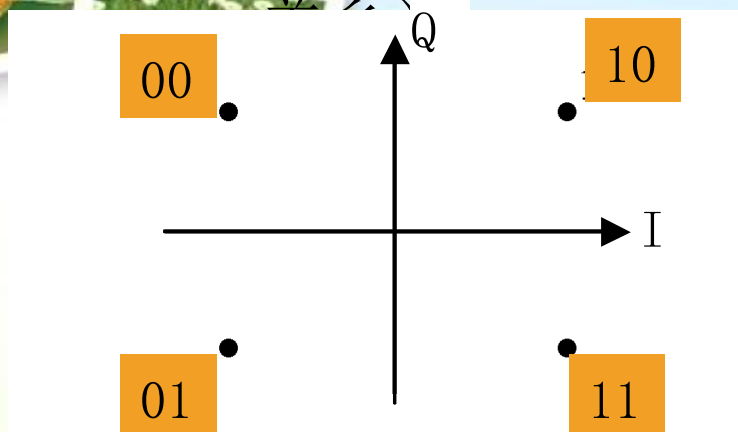
而 $a_k b_k$ 码完成相对移相，对应 $\Delta\theta_k$ ：

$$\Delta\theta_k = \theta_k - \theta_{k-1}$$

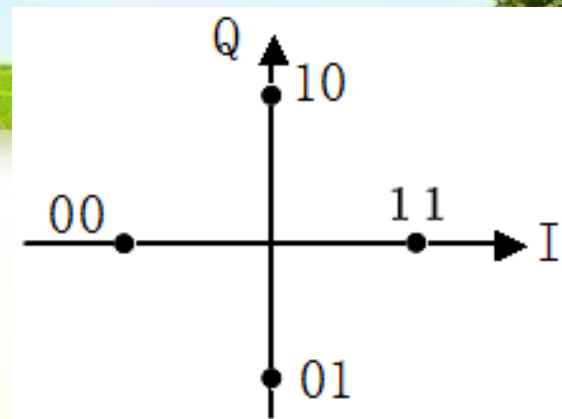
则相对移相不受相位模糊的影响，解调后有：

$$\hat{\Delta\theta}_k = \hat{\theta}_k - \hat{\theta}_{k-1} = \theta_k - \theta_{k-1}$$

发送端调制后的星座图（相位与码的对应）



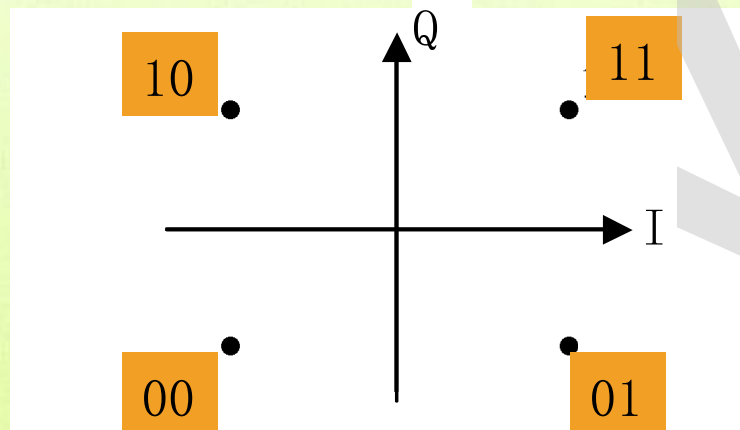
绝对移相: $c_k d_k \sim \theta_k$



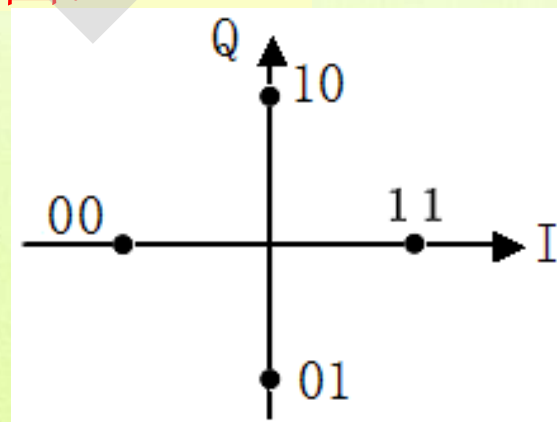
相对移相: $a_k b_k \sim \Delta\theta_k$

相位模糊造成解调后的绝对移相信号对应星座点的相位改变: $\hat{\theta}_k = \theta_k + \Delta\varphi$
 而相对移相信号则没有相位改变: $\Delta\theta_k = \Delta\theta_k$

接收端解调后的星座图:

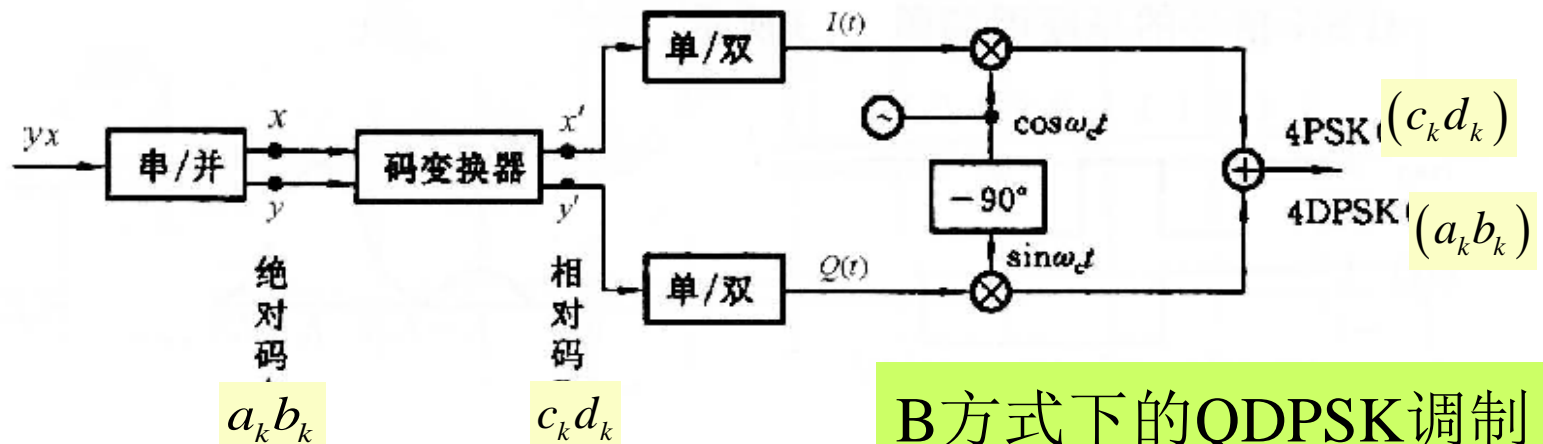


$\hat{c}_k \hat{d}_k \sim \hat{\theta}_k$ ($\Delta\varphi = 90^\circ$ 时)

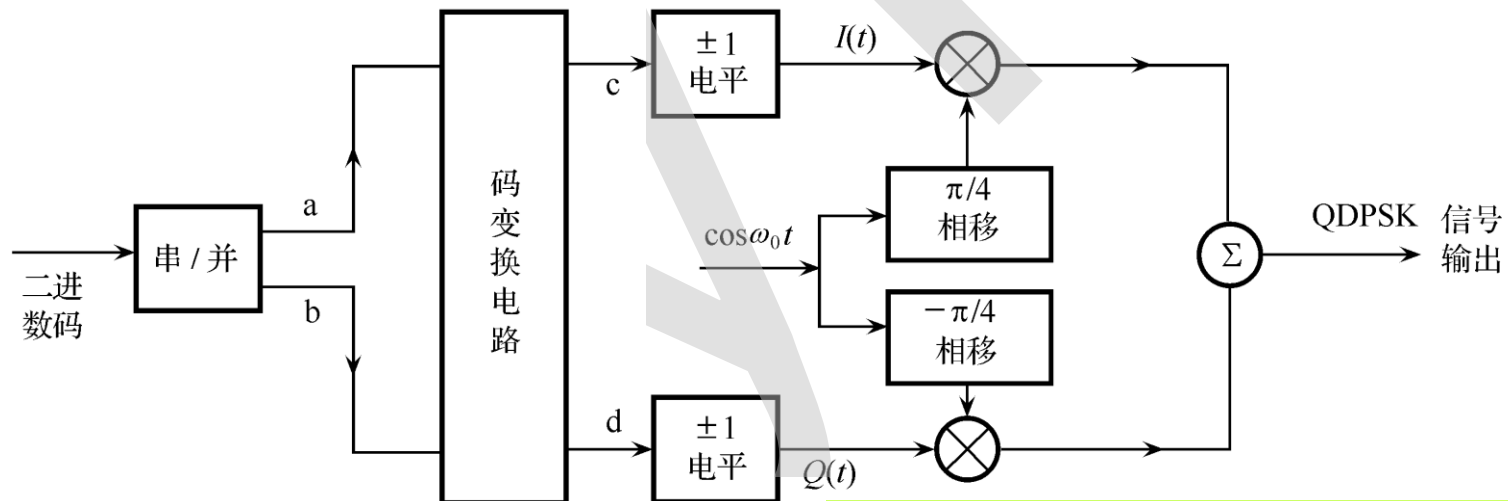


$\hat{a}_k \hat{b}_k \sim \Delta\theta_k$

QDPSK的调制



B方式下的QDPSK调制

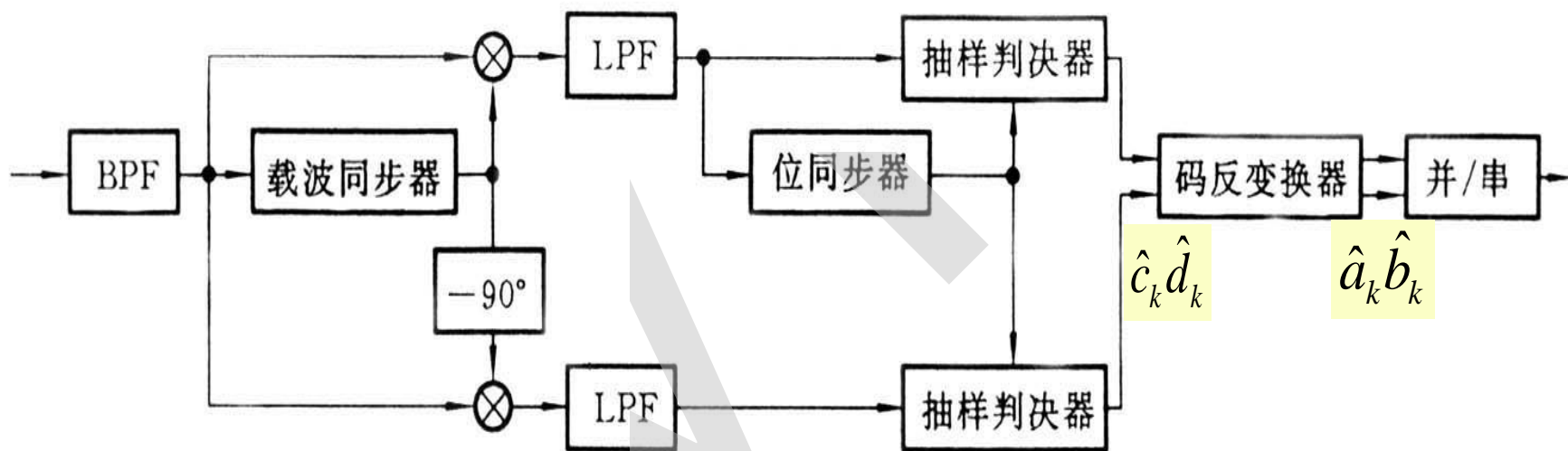


A方式下的QDPSK调制

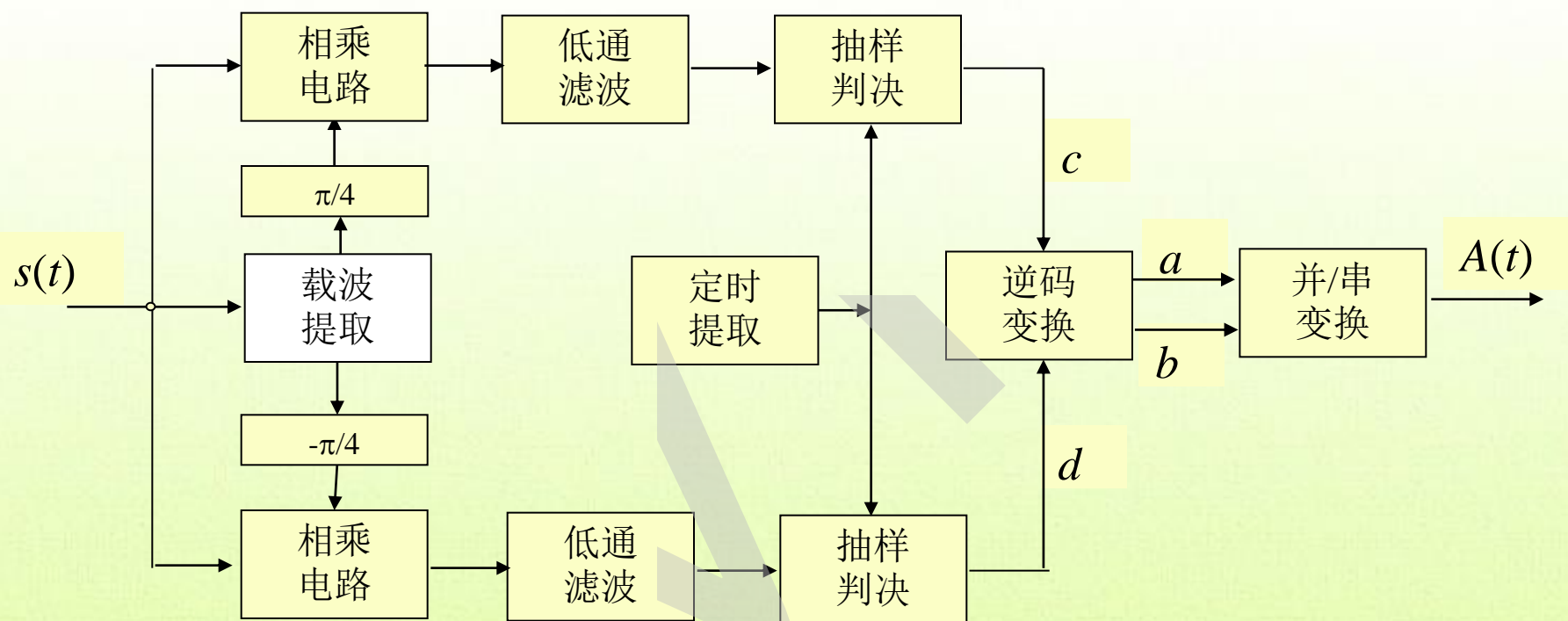
QDPSK的解调

QDPSK的解调方法：

- 1) 相干解调（极性比较法）
- 2) 差分相干解调（相位比较法）



相干解调_B方式



相干解调—A方式



2) 相干解调_A方式 过程

设第 k 个接收信号码元可以表示为

相干载波： 上支路：

$$s_k(t) = \cos(\omega_0 t + \theta_k), \quad kT < t \leq (k+1)T$$

$$\cos(\omega_0 t + \frac{\pi}{4})$$

下支路：

$$\cos(\omega_0 t - \frac{\pi}{4})$$

信号和载波相乘的结果：

上支路：

$$\cos(\omega_0 t + \theta_k) \cos(\omega_0 t + \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2} \cos \left[2\omega_0 t + (\theta_k + \frac{\pi}{4}) \right] + \frac{1}{2} \cos(\theta_k - \frac{\pi}{4})$$

下支路：

$$\cos(\omega_0 t + \theta_k) \cos(\omega_0 t - \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2} \cos \left[2\omega_0 t + (\theta_k - \frac{\pi}{4}) \right] + \frac{1}{2} \cos(\theta_k + \frac{\pi}{4})$$

低通滤波后： 上支路：

$$\frac{1}{2} \cos(\theta_k - \frac{\pi}{4})$$

下支路：

$$\frac{1}{2} \cos(\theta_k + \frac{\pi}{4})$$



低通滤波后，上支路： $\frac{1}{2}\cos(\theta_k - \frac{\pi}{4})$
下支路： $\frac{1}{2}\cos(\theta_k + \frac{\pi}{4})$

🌿 判决规则

🌿 按照 θ_k 的取值不同，此电压可能为正，也可能为负，故是双极性电压。

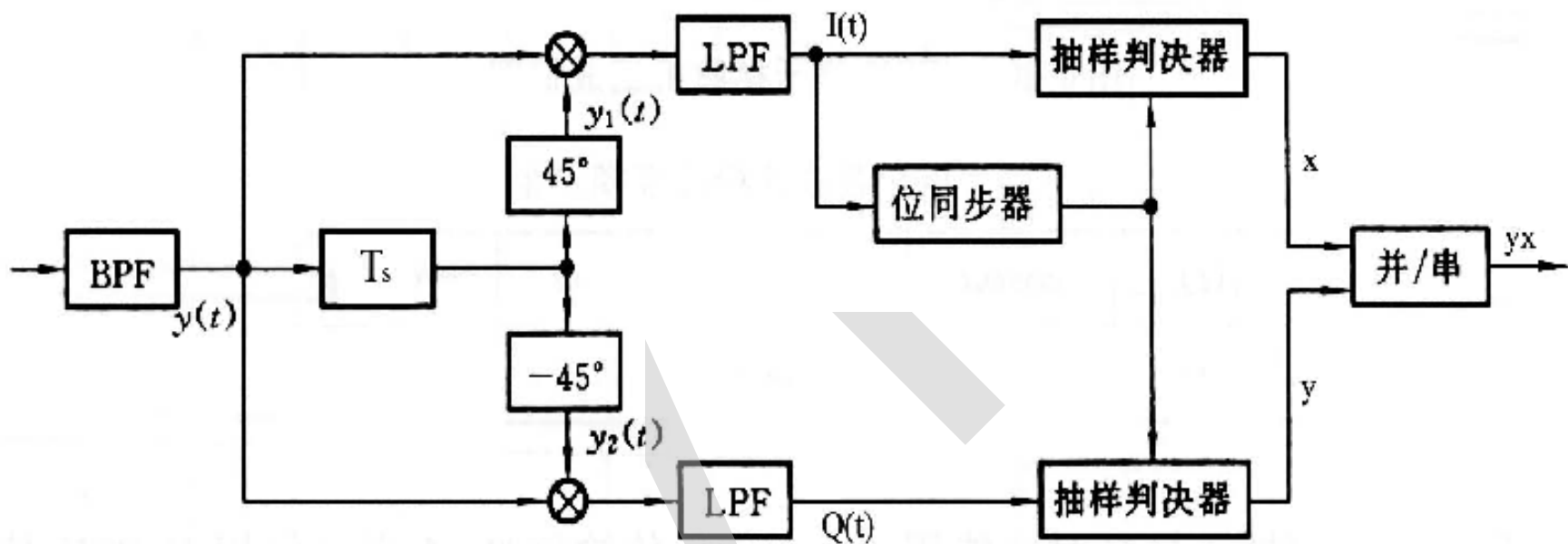
判决规则如下表。

信号码元相位 θ_k	上支路输出	下支路输出	判决器输出	
			c	d
0°	+	+	0	0
90°	+	-	1	0
180°	-	-	1	1
270°	-	+	0	1



3) 码反变换器

- 设码反变换器的当前输入码元为 c_k 和 d_k ，当前输出码元为 a_k 和 b_k ，前一输入码元为 c_{k-1} 和 d_{k-1} 。
- 为了正确地进行码反变换，这些码元之间的关系应该符合码变换时的规则。

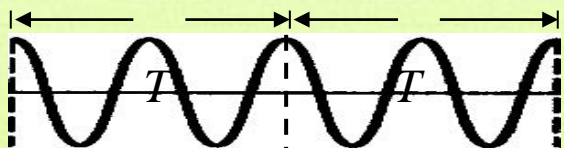


QDPSK差分相干解调

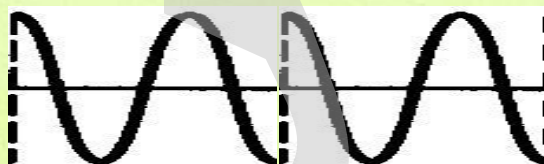
7.4.5 QPSK的其它变化体制

相位不连续问题

- 对于MPSK和MFSK，只有当一个码元宽度中包含整数个载波周期，且初始相位相同时，相邻码元的波形和瞬时相位才是连续的，如图(a)。此前的讨论都是假设满足相位连续的条件。
- 若以上条件不成立，则波形和瞬时相位可能不连续，如图(b)；或者波形连续而相位不连续，如图(c)。
- 当相位不连续时，信号的频谱将展宽，限带后接收信号的包络也将出现起伏。为减小这种影响，产生了QPSK的各种变化体制，如OQPSK和 $\pi/4$ -DQPSK。



(a) 波形和相位连续



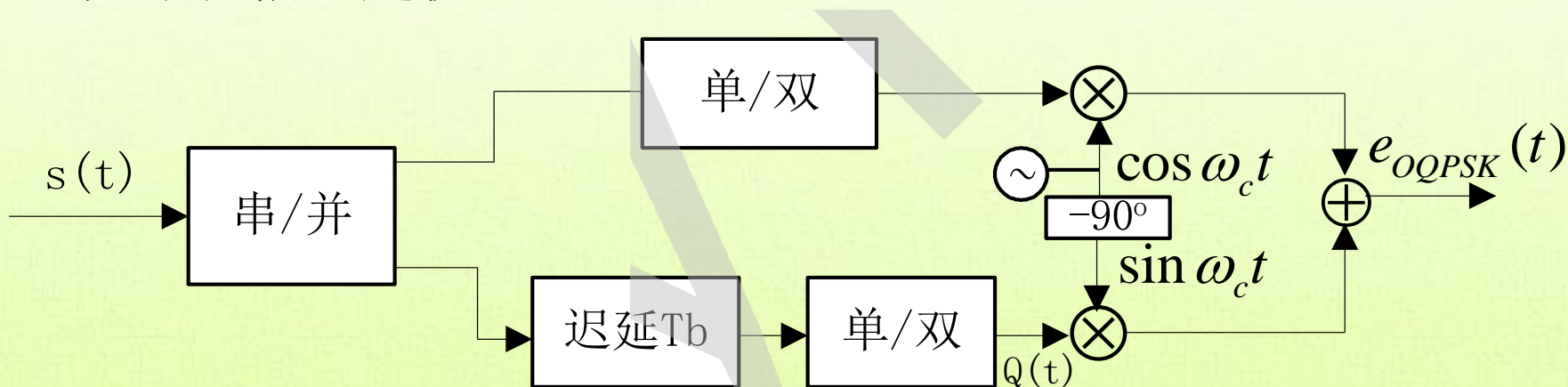
(b) 波形和相位不连续



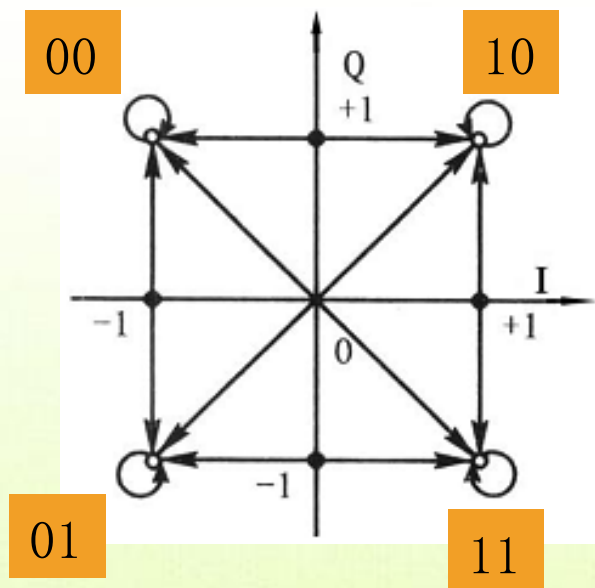
(c) 波形连续相位不连续

偏置QPSK (OQPSK)

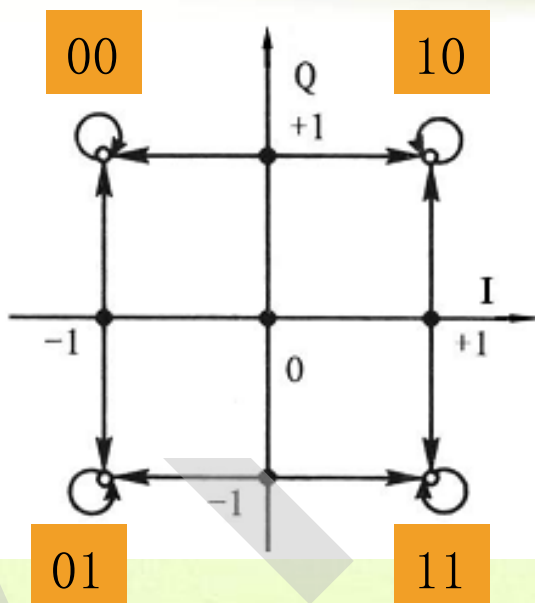
- 当相位不连续时，QPSK的相邻码元最大相位差达到 180° ，这在频带受限的系统中会引起信号包络的很大起伏。
- OQPSK的改进：**为了减小此相位突变，将两个正交分量的两个比特a和b在时间上错开半个码元，使之不可能同时改变。这样安排后相邻码元相位差的最大值仅为 90° ，从而减小了信号振幅的起伏。



OQPSK调制器



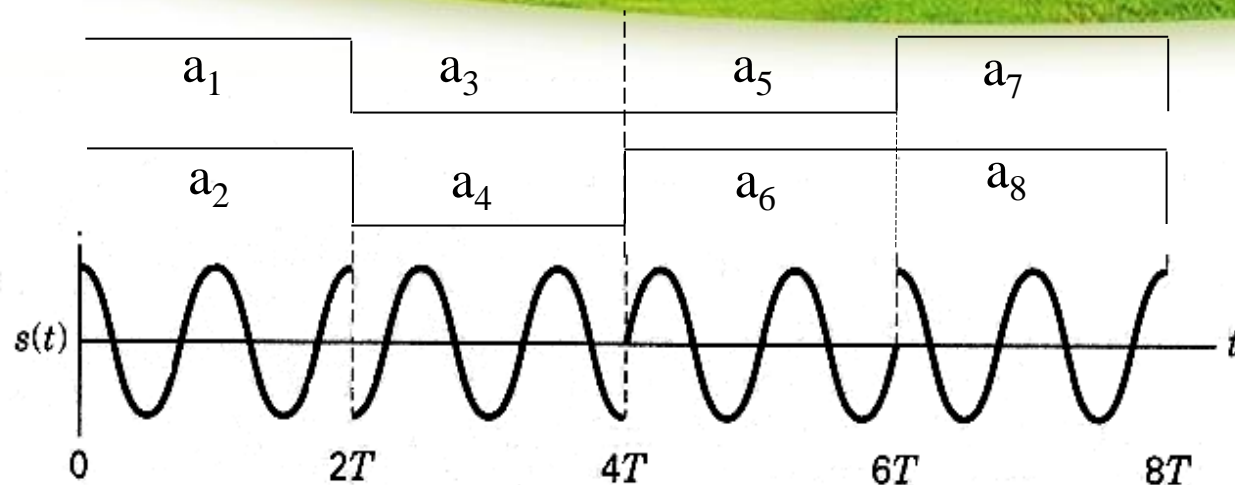
QPSK相位转移图



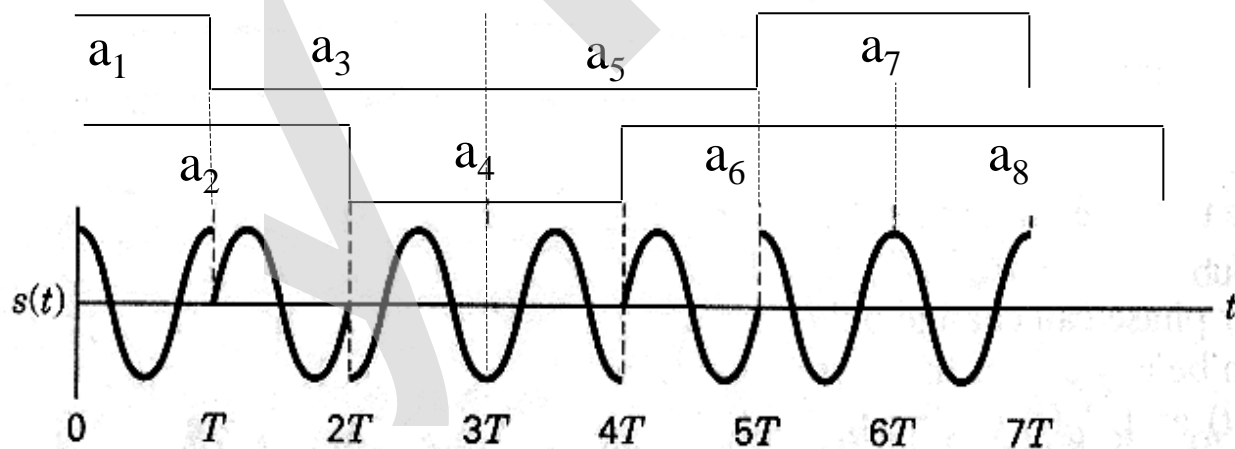
OQPSK的相位转移图



OOKPSK 信号与 QPSK 信号波形的比较



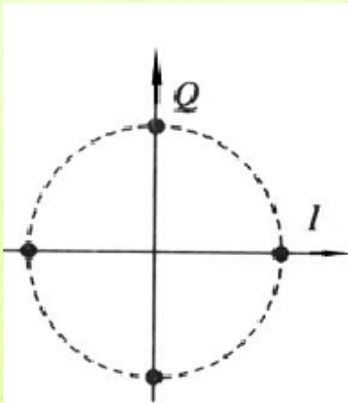
(a) QPSK



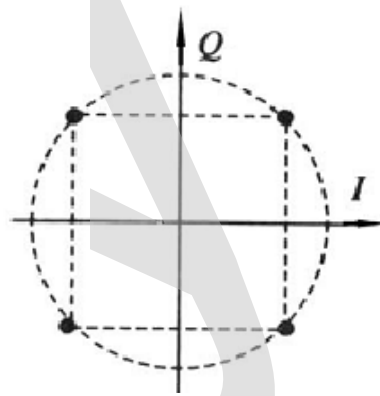
(b) OOKPSK

$\pi/4$ -QDPSK

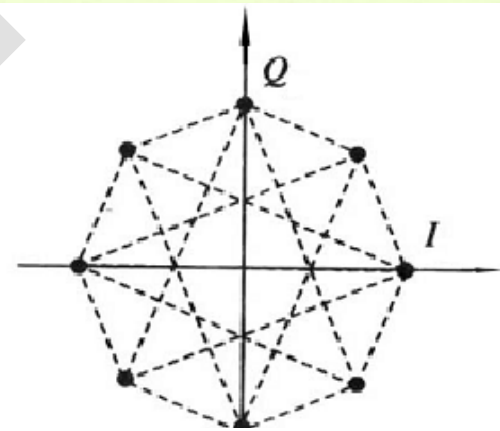
- $\pi/4$ -QDPSK信号是由两个相差 $\pi/4$ 的QPSK星座图交替产生的。
- 当前码元的相位相对于前一码元的相位改变 $\pm 45^\circ$ 或 $\pm 135^\circ$ 。例如，若连续输入“11 11 11 11...”，则信号码元相位为“ 45° 90° 45° 90° ...”
- 优点：这种体制中相邻码元间总有相位改变、最大相移为 $\pm 135^\circ$ ，比QPSK的最大相移小。



A方式QPSK



B方式QPSK



$\pi/4$ -DQPSK

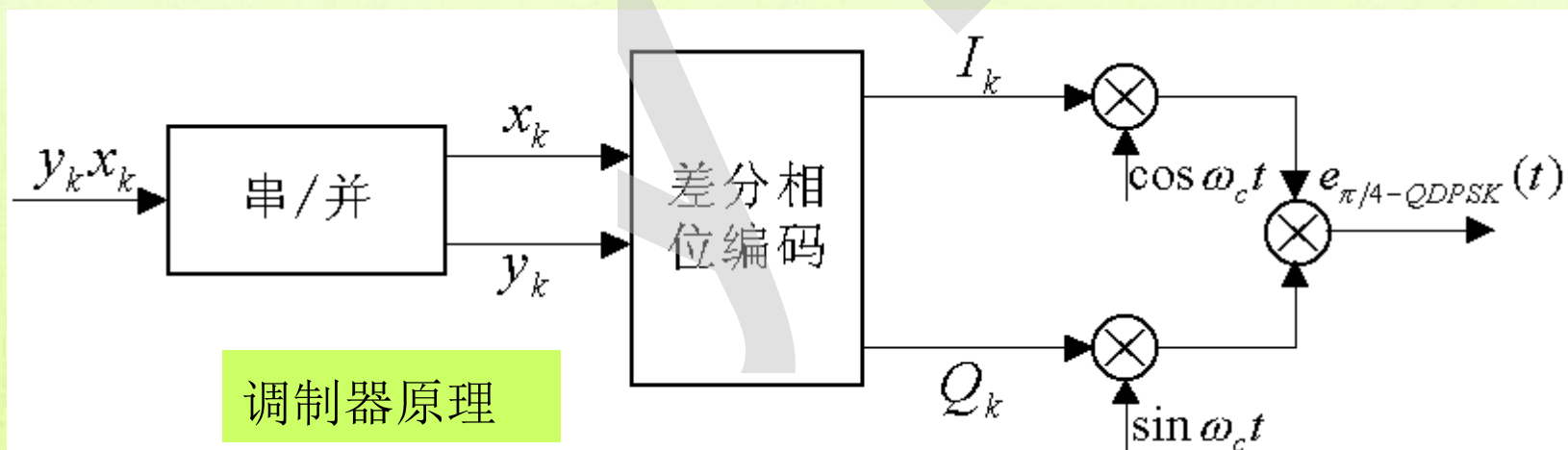


● $\pi/4$ -DQPSK调制原理

$$s(t) = \cos(\omega_0 t + \theta_k) = I_k \cdot \cos \omega_0 t + Q_k \cdot \sin \omega_0 t$$

由 $\theta_k = \theta_{k-1} + \Delta\theta_k$

有
$$\begin{cases} I_k = \cos \theta_k = I_{k-1} \cos \Delta\theta_k + Q_{k-1} \sin \Delta\theta_k \\ Q_k = -\sin \theta_k = Q_{k-1} \cos \Delta\theta_k - I_{k-1} \sin \Delta\theta_k \end{cases}$$

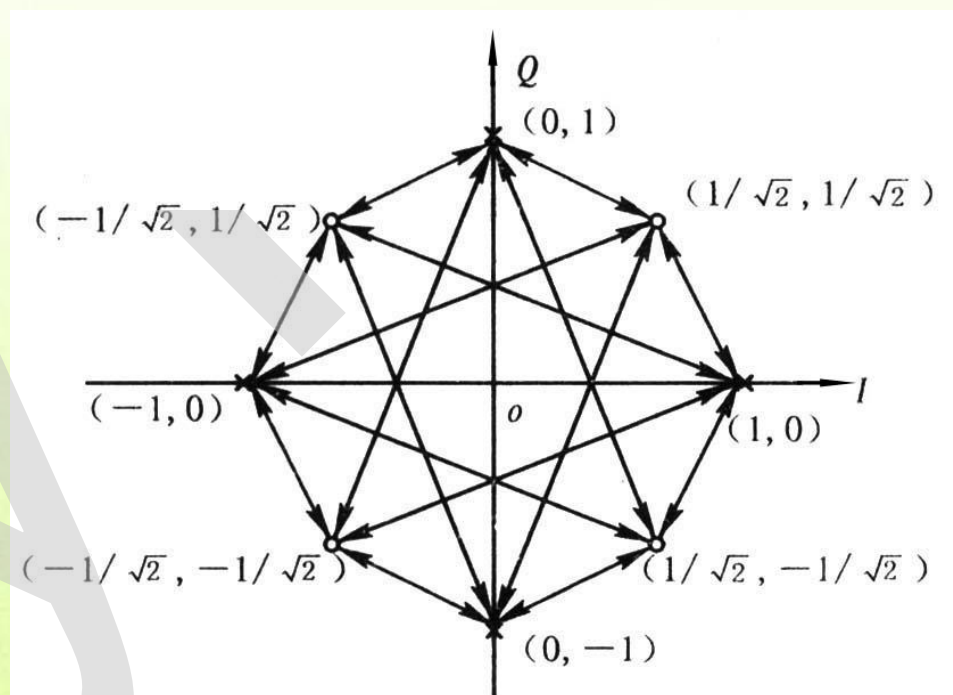




🌿 $\pi/4$ -DQPSK 信号相位跳变规则和相位转移图

$\pi/4$ -DQPSK 的相位跳变规则

y_k	x_k	$\Delta\theta_k$	$\cos \Delta\theta_k$	$\sin \Delta\theta_k$
1	1	$\pi/4$	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$
1	-1	$3\pi/4$	$-1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$
-1	-1	$-3\pi/4$	$-1/\sqrt{2}$	$-1/\sqrt{2}$
-1	1	$-\pi/4$	$1/\sqrt{2}$	$-1/\sqrt{2}$



相位转移图



第7章数字带通传输系统

- 7.1 二进制数字调制原理
- 7.2 二进制数字调制系统的抗噪声性能
- 7.3 二进制数字调制系统的性能比较
- 7.4 多进制数字调制原理
- 7.5 多进制数字调制系统的抗噪声性能
 - 7.5.1 MASK系统的抗噪声性能
 - 7.5.2 MFSK系统的抗噪声性能
 - 7.5.3 MPSK系统的抗噪声性能
 - 7.5.4 MDPSK系统的抗噪声性能



7.5 多进制数字调制系统的抗噪声性能

- 本节讨论四种多进制数字调制系统：双极性MASK、MFSK、MPSK和MDPSK的抗噪声性能
- 它们的误码率都决定于码元的平均信噪功率比 r , 对于MFSK和MPSK, 有：
$$r = a^2 / 2\sigma_n^2$$
- 一个 M 进制码元中包含 k 比特信息, 有 $k = \log_2 M$
- 平均每比特的信噪功率比为
$$r_b = \frac{r}{k}$$

7.5.1 MASK系统的抗噪声性能

- 设MASK对应的基带调制码元有 M 个电平，如图

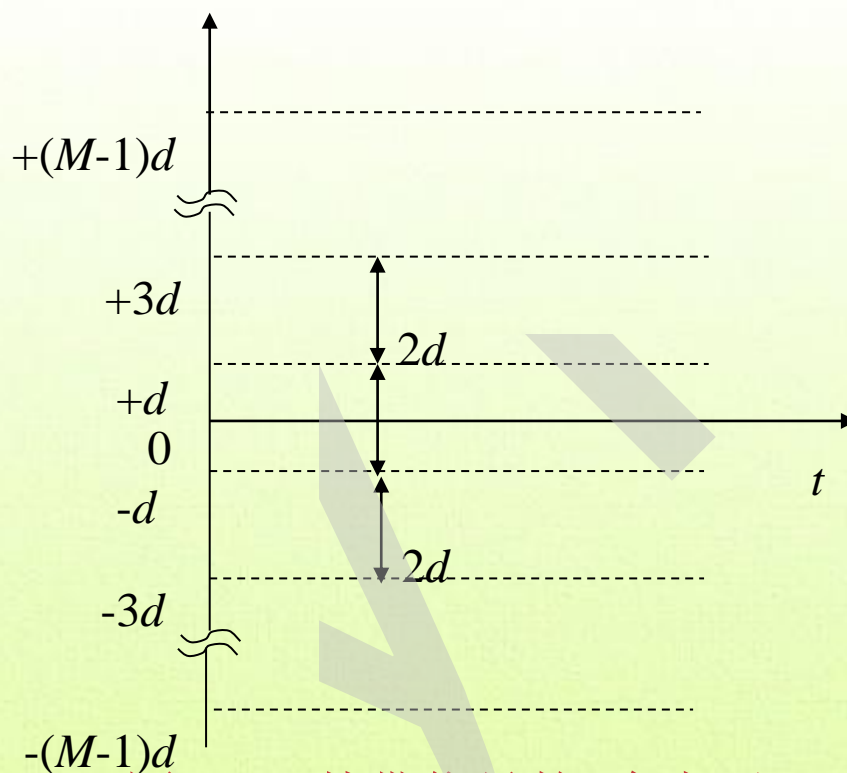


图7-48 基带信号的 M 个电平



MASK信号的表示式可以写为

$$s(t) = \begin{cases} \pm d \cos 2\pi f_0 t & \text{当发送电平 } \pm d \text{ 时} \\ \pm 3d \cos 2\pi f_0 t & \text{当发送电平 } \pm 3d \text{ 时} \\ \dots & \dots \\ \pm (M-1)d \cos 2\pi f_0 t & \text{当发送电平 } \pm (M-1)d \text{ 时} \end{cases}$$

若接收端在解调前信号无失真，仅附加有窄带高斯噪声，则在忽略常数衰减因子后，解调前的接收信号可以表示为

$$s(t) = \begin{cases} \pm d \cos 2\pi f_0 t + n(t) & \text{当发送电平 } \pm d \text{ 时} \\ \pm 3d \cos 2\pi f_0 t + n(t) & \text{当发送电平 } \pm 3d \text{ 时} \\ \dots & \dots \\ \pm (M-1)d \cos 2\pi f_0 t + n(t) & \text{当发送电平 } \pm (M-1)d \text{ 时} \end{cases}$$

式中

$$n(t) = n_c(t) \cos 2\pi f_0 t - n_s(t) \sin 2\pi f_0 t$$



设接收机采用相干解调，信号和噪声在相干解调器中相乘，并滤除高频分量之后，得到解调器输出电压为

$$v(t) = \begin{cases} \pm d + n_c(t) & \text{当发送电平 } \pm d \text{ 时} \\ \pm 3d + n_c(t) & \text{当发送电平 } \pm 3d \text{ 时} \\ \dots & \dots \\ \pm (M-1)d + n_c(t) & \text{当发送电平 } \pm (M-1)d \text{ 时} \end{cases}$$

这个电压将被抽样判决。



等概率发送时，对于MASK信号，**判决门限**应该选择在 0 、 $\pm 2d$ 、 \dots 、 $\pm(M-2)d$ 。当噪声抽样值 $|n_c|$ 超过 d 时，会发生错误判决。

两个例外情况：当信号电平等于 $+(M-1)d$ 时，若 $n_c > +d$ ，不会发生错判；同理，当信号电平等于 $-(M-1)d$ 时，若 $n_c < -d$ ，也不会发生错判。

当MASK信号以等概率 $1/M$ 发送时，**平均误码率**等于

$$P_e = \frac{1}{M} \cdot \left[(M-2) \cdot P(|n_c| > d) + 2 \cdot \frac{1}{2} P(|n_c| > d) \right] = \left(1 - \frac{1}{M} \right) \cdot P(|n_c| > d)$$

式中 $P(|n_c| > d)$ — 噪声抽样绝对值大于 d 的概率。

因为 n_c 是均值为 0 ，方差为 σ_n^2 的正态随机变量，故有

$$P(|n_c| > d) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \int_d^{\infty} e^{-x^2/2\sigma_n^2} dx$$



将

$$P(|n_c| > d) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \int_d^\infty e^{-x^2/2\sigma_n^2} dx$$

代入上式，得到

$$P_e = \left(1 - \frac{1}{M}\right) \cdot \frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \int_d^\infty e^{-x^2/2\sigma_n^2} dx = \left(1 - \frac{1}{M}\right) \cdot \operatorname{erfc}\left(\frac{d}{\sqrt{2}\sigma_n}\right)$$

式中

$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-z^2} dz$$



对于等概率的MASK信号，其平均功率等于

$$P_s = \frac{1}{M} \cdot 2 \cdot \sum_{i=1}^{M/2} \frac{1}{2} [d(2i-1)]^2 = \frac{M^2-1}{6} \cdot d^2$$

由上式得到

$$d^2 = \frac{6P_s}{M^2-1}$$

将上式代入误码率公式，得到误码率

$$P_e = \left(1 - \frac{1}{M}\right) \cdot \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{3}{M^2-1} \cdot \frac{P_s}{\sigma_n^2}} \right)$$

上式中的 P_s/σ_n^2 就是信噪比 r ，所以上式可以改写为

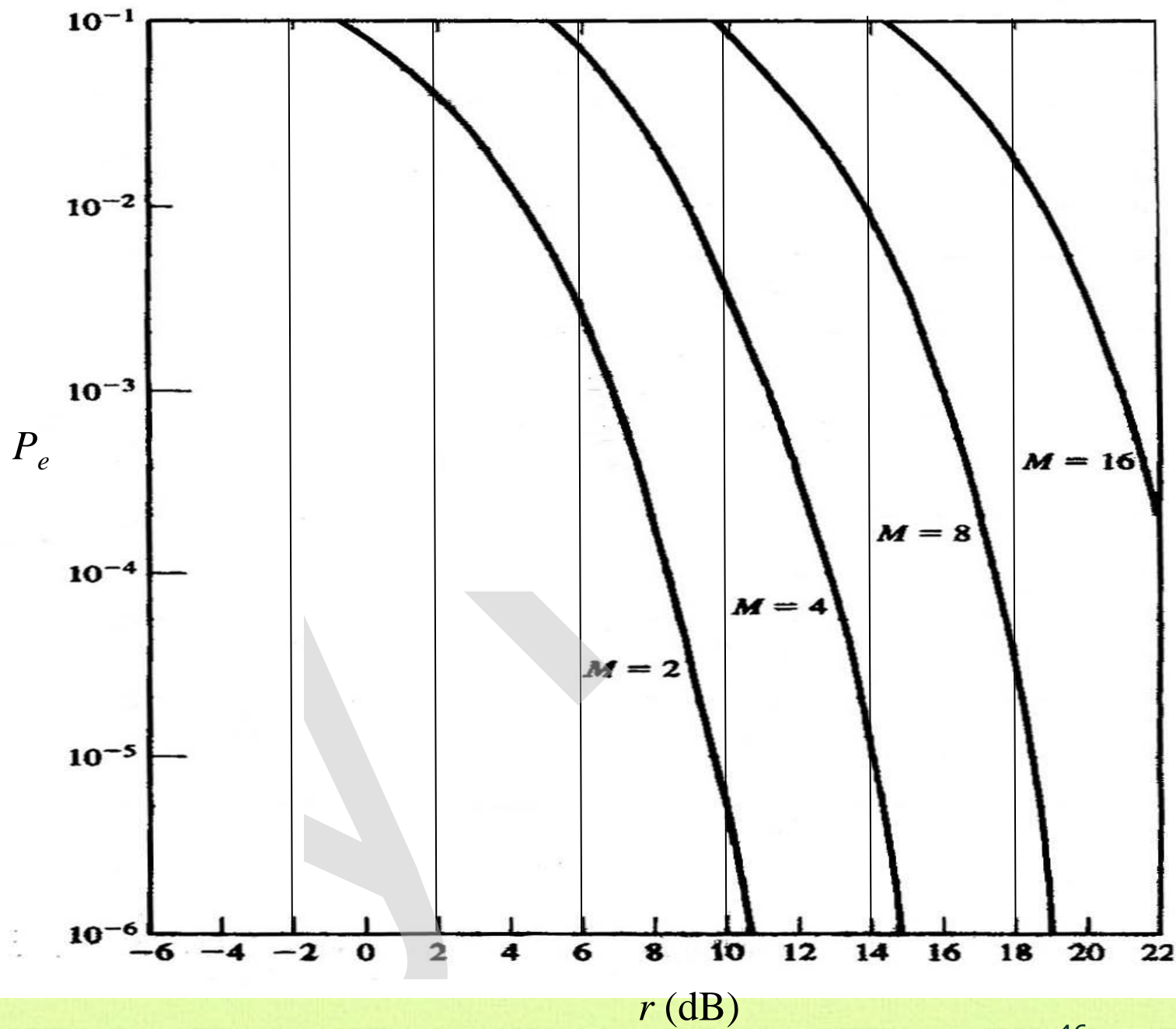
$$P_e = \left(1 - \frac{1}{M}\right) \cdot \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{3}{M^2-1} r} \right)$$

当 $M = 2$ 时，即为2PSK的误码率

$$P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}(\sqrt{r})$$



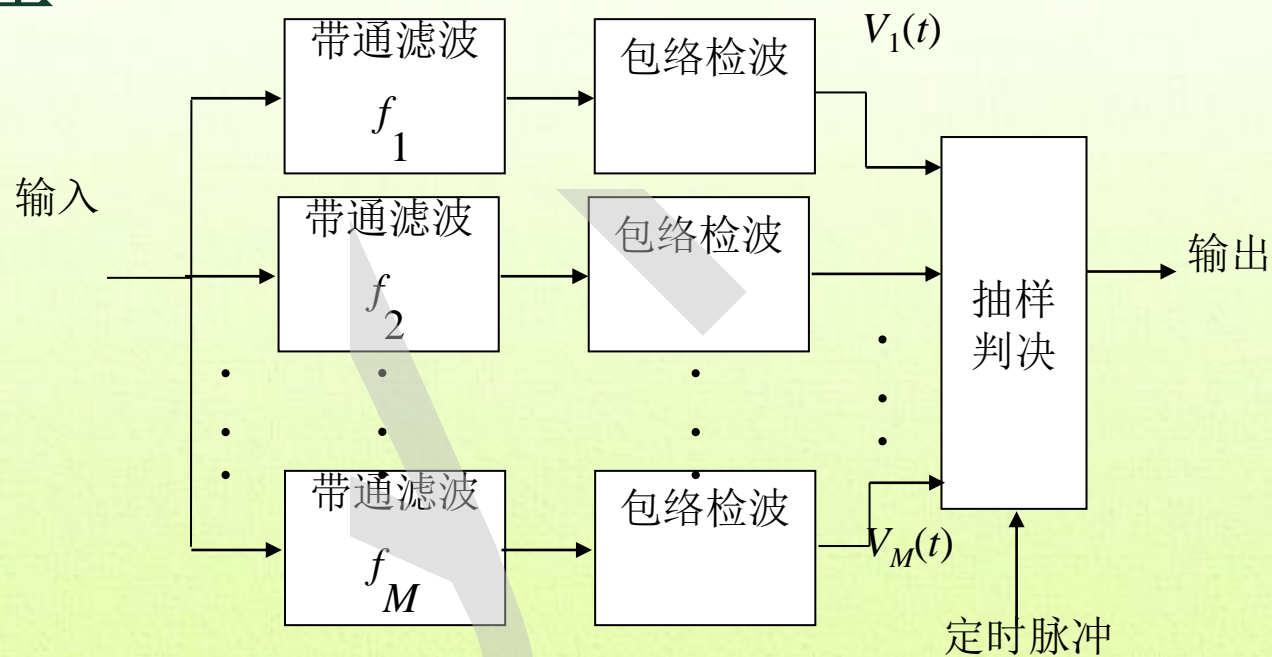
MASK 的 误 码 率 曲 线



7.5.2 MFSK系统的抗噪声性能

一、MFSK非相干解调时的误码率

分析模型





1) 当某个码元输入时， M 个带通滤波器的输出中仅有一路是信号加噪声，其他各路都只有噪声。

2) M 路带通滤波器中的噪声是互相独立的窄带高斯噪声，不含信号的 $M-1$ 路，其包络均服从瑞利分布。故这 $(M-1)$ 路噪声的包络都不超过某个门限电平 h 的概率等于 $[1 - P(h)]^{M-1}$

其中 $P(h)$ 是一路滤波器的输出噪声包络超过门限 h 的概率，由瑞利分布公式知为

$$P(h) = \int_h^{\infty} \frac{N}{\sigma_n^2} e^{-N^2 / 2\sigma_n^2} dN = e^{-h^2 / 2\sigma_n^2}$$

式中， N — 滤波器输出噪声的包络；

σ_n^2 — 滤波器输出噪声的功率。



假设这 $(M-1)$ 路噪声都不超过此门限电平 h 就不会发生错误判决，则式 $[1 - P(h)]^{M-1}$

的概率就是不发生错判的概率。因此，有任意一路或一路以上噪声输出的包络超过此门限就将发生错误判决，此错判的概率将等于

$$\begin{aligned} P_e(h) &= 1 - [1 - P(h)]^{M-1} \\ &= 1 - \left[1 - e^{-h^2/2\sigma_n^2} \right]^{M-1} = \sum_{n=1}^{M-1} (-1)^{n-1} \binom{M-1}{n} e^{-nh^2/2\sigma_n^2} \end{aligned}$$

显然，它和门限值 h 有关。下面就来讨论 h 值如何决定。



有信号码元输出的带通滤波器的输出电压包络服从广义瑞利分布：

$$p(x) = \frac{x}{\sigma_n^2} I_0 \left(\frac{Ax}{\sigma_n^2} \right) \exp \left[-\frac{1}{2\sigma_n^2} (x^2 + A^2) \right], \quad x \geq 0$$

式中， $I_0(\bullet)$ — 第一类零阶修正贝赛尔函数；

x — 输出信号和噪声之和的包络；

A — 输出信号码元振幅；

σ_{n2} — 输出噪声功率。

其他路中任何路的输出电压值超过了有信号这路的输出电压值 x 就将发生错判。因此，这里的输出信号和噪声之和的包络 x 就是上面的门限值 h ，

而发生错误判决的概率是 $P_e = \int_0^\infty p(h) P_e(h) dh$



将前面两式代入上式，得到计算结果如下：

$$\begin{aligned} P_e &= e^{-\frac{A^2}{2\sigma_n^2}} \cdot \sum_{n=1}^{M-1} (-1)^{n-1} \binom{M-1}{n} \cdot \int_0^\infty \frac{h}{\sigma_n^2} \cdot I_0\left(\frac{Ah}{\sigma_n^2}\right) \cdot e^{-(1+n)h^2/2\sigma_n^2} dh \\ &= \sum_{n=1}^{M-1} (-1)^{n-1} \cdot \binom{M-1}{n} \cdot \frac{1}{n+1} \cdot e^{-nA^2/2(n+1)\sigma_n^2} \end{aligned}$$

上式是一个正负项交替的多项式，在计算求和时，随着项数增加，其值起伏振荡，但是可以证明它的第1项是它的上界，即有

$$P_e \leq \frac{M-1}{2} e^{-A^2/4\sigma_n^2} = \frac{M-1}{2} e^{-r/2}$$



将 $r = kr_b$ 代入
$$P_e \leq \frac{M-1}{2} e^{-A^2/4\sigma_n^2} = \frac{M-1}{2} e^{-r/2}$$

得出

$$P_e \leq \frac{M-1}{2} \exp(-kr_b / 2)$$

在上式中若用 M 代替 $(M-1)/2$ ，不等式右端的值将增大，但是此不等式仍然成立，所以有

$$P_e < M \exp(-kr_b / 2)$$

这是一个比较弱的上界，但是它可以用来说明下面的问题。



因为

$$M = 2^k = e^{\ln 2^k}$$

所以上式可以改写为

$$P_e < \exp \left[-k \left(\frac{r_b}{2} - \ln 2 \right) \right]$$

由上式可以看出，当 $k \rightarrow \infty$ 时， P_e 按指数规律趋近于0，但要保证

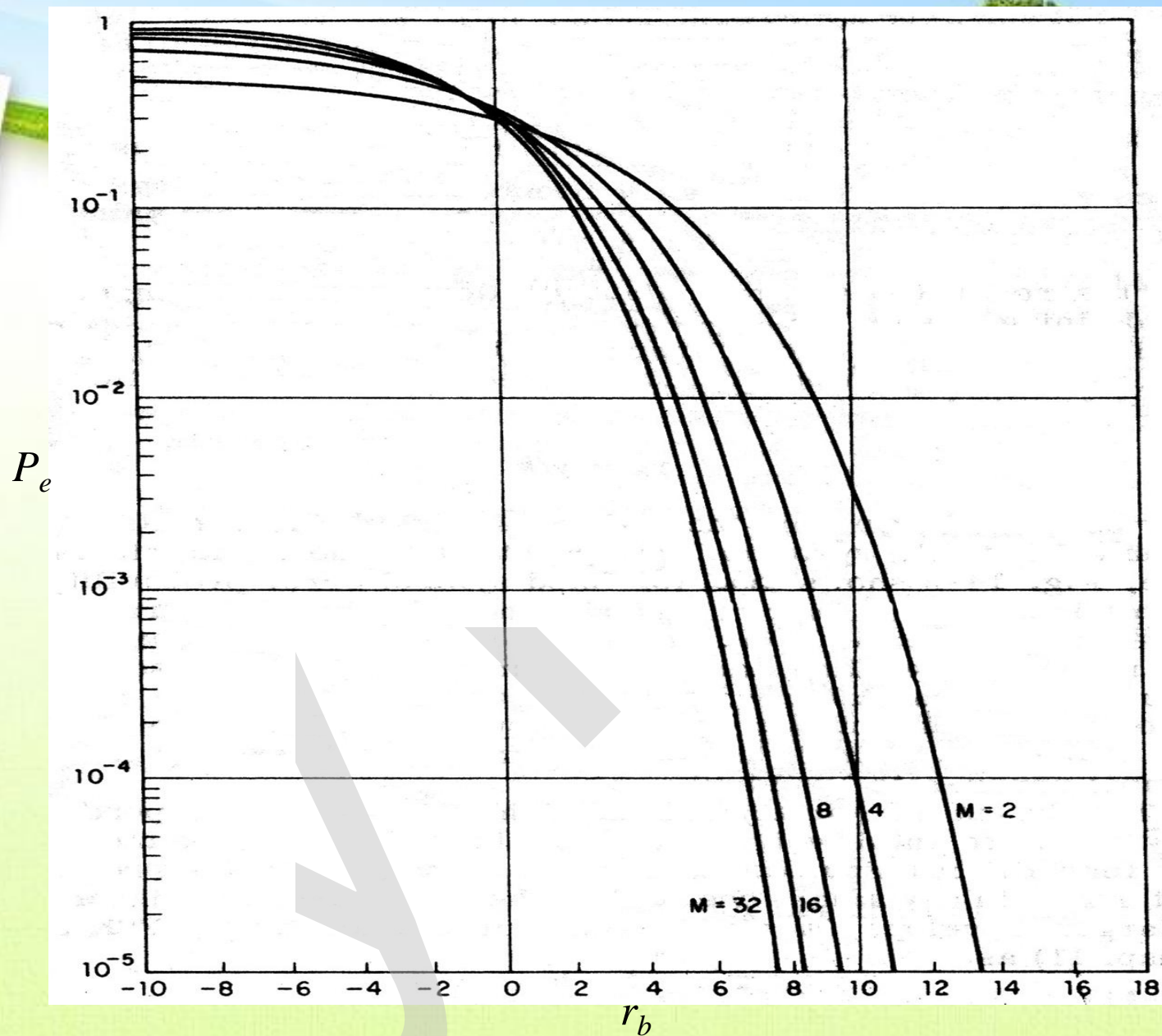
$$\frac{r_b}{2} - \ln 2 > 0, \quad \text{即} \quad r_b > 2 \ln 2$$

上式条件表示，只要保证每比特的平均信噪功率比 r_b 大于 $2 \ln 2 = 1.39 = 1.42$ dB，则不断增大 k ，就能得到任意小的误码率。

对于 **MFSK** 体制而言，就是以增大占用带宽换取误码率的降低。但是，随着 k 的增大，设备的复杂程度也按指数规律增大。所以 k 的增大是受到实际应用条件的限制的。



误码率曲线



(a) 非相干解调



二、MFSK相干解调时的误码率

- 误码率计算结果如下：

$$P_e = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-A^2/2} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{A+\sqrt{2}r} e^{-u^2/2} du \right]^{M-1} dA$$

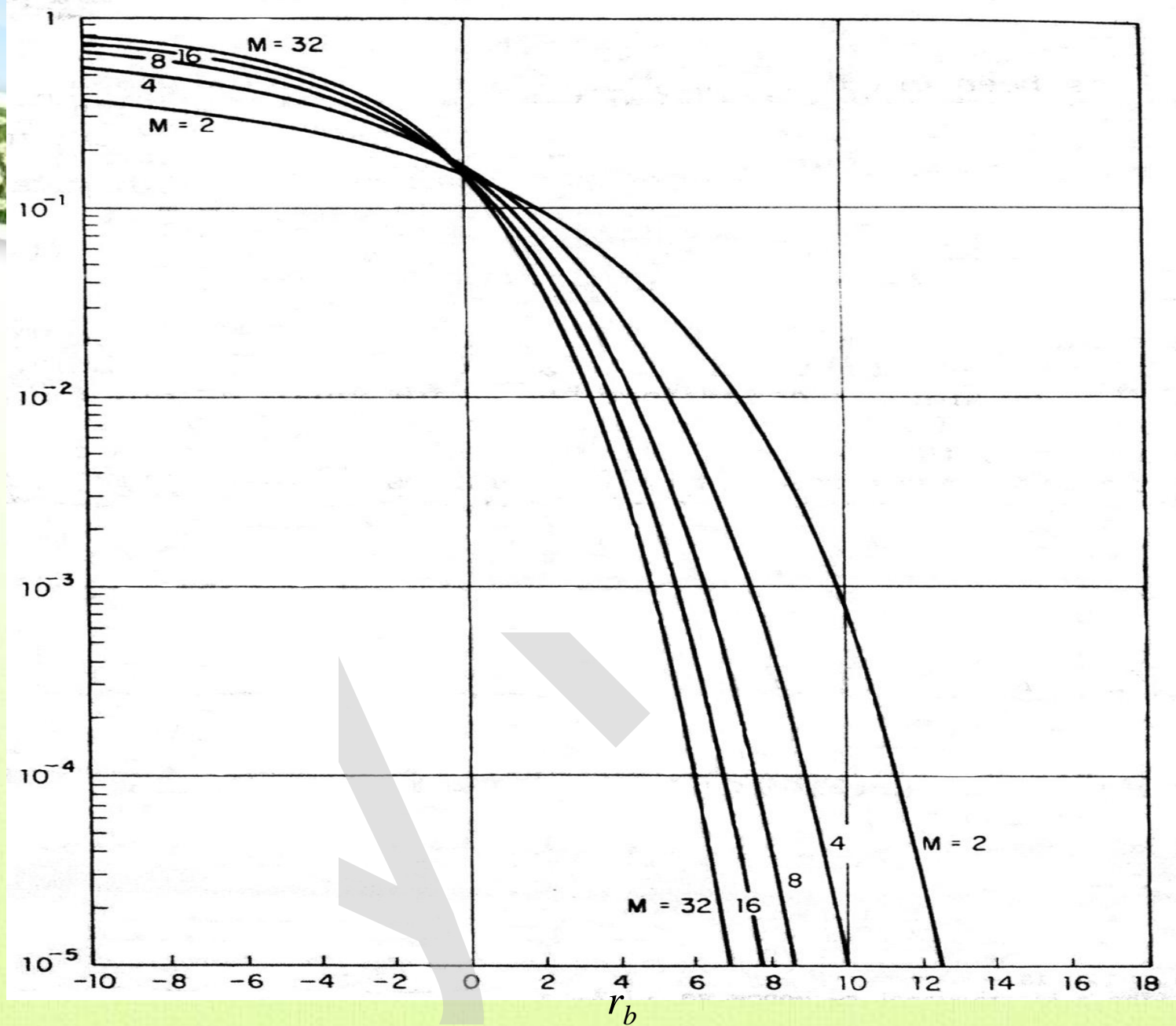
- 上式较难作数值计算，为了估计相干解调时MFSK信号的误码率，可以采用下式给出的误码率上界公式：

$$P_e \leq (M-1) \cdot \text{erfc}(\sqrt{r})$$



误码率曲线

P_e



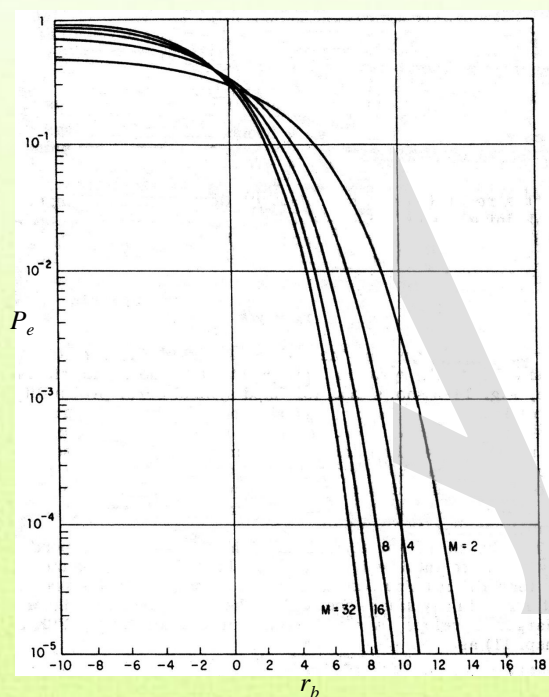
(b) 相干解调



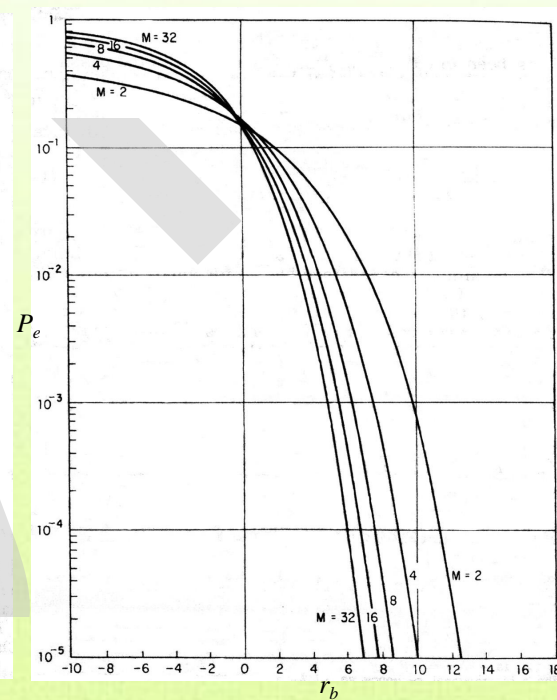
比较相干和非相干解调的误码率:

由误码率曲线图可见, 当 $k > 7$ 时, 两者的区别可以忽略。这时相干和非相干解调误码率的上界都可以用下式表示:

$$P_e \leq \frac{M-1}{2} e^{-A^2 / 4\sigma_n^2}$$



(a) 非相干解调

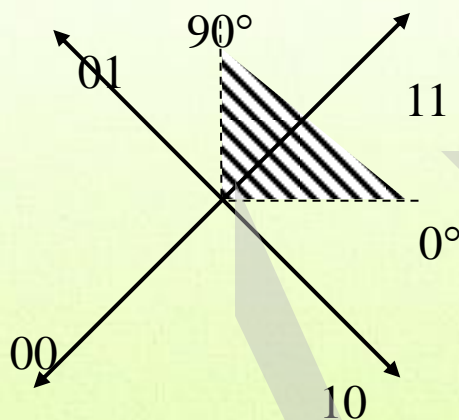


(b) 相干解调

7.5.3 MPSK系统的抗噪声性能

一、QPSK系统的抗噪声性能

● 噪声容限



● 误码率：设 $f(\theta)$ 为接收矢量（包括信号和噪声）相位的概率密度，则发生错误的概率等于

$$P_e = 1 - \int_0^{\pi/2} f(\theta) d\theta$$



B方式下QPSK信号表示式为

$$s_k(t) = \cos(\omega_c t + \theta_k) = a_k \cos \omega_c t - b_k \sin \omega_c t$$

式中 $a_k = \cos \theta_k$ $b_k = \sin \theta_k$

可知，当QPSK码元的相位 θ_k 等于 45° 时， $a_k = b_k = 1/\sqrt{2}$

故信号码元相当于是互相正交的两个2PSK码元，其幅度分别为接收信号幅度的 $1/2^{1/2}$ 倍，功率为接收信号功率的 $(1/2)$ 倍。

另一方面，接收信号与噪声之和为

$$r(t) = A \cos(\omega_c t + \theta) + n(t)$$

式中 $n(t) = n_c(t) \cos \omega_c t - n_s(t) \sin \omega_c t$

并且， $n(t)$ 的方差为 σ_n^2 ，噪声的两个正交分量的方差为

$$\sigma_c^2 = \sigma_s^2 = \sigma_n^2$$



B方式下QPSK解调相当于两个2PSK信号分别在上下两路的两个正交的相干检测器中解调，每一路中只有和2PSK信号同相的噪声才对误码率有影响。

在7.2节中已经给出2PSK相干解调的误码率为

$$P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}(\sqrt{r})$$

设输入噪声功率为 σ_n^2 ，则QPSK解调器输入端的信噪比为 $r=S/\sigma_n^2$ 。而每一路2PSK的信号功率为 $S/2$ ，噪声功率仍为 σ_n^2 ，则每个2PSK解调器输入端的信噪比将为 $r/2$ 。

因此每路2PSK解调器的误码率为

$$P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{r}{2}}\right)$$

每路2PSK解调器的正确概率为

$$\left[1 - \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{r}{2}}\right)\right]$$



只有两路正交的2PSK相干检测都正确，才能保证QPSK信号的解调输出正确。
而两路正交2PSK相干检测都正确的概率为

$$\left[1 - \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{r}{2}}\right)\right]^2$$

所以QPSK信号解调错误的概率为

$$P_e = 1 - \left[1 - \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{r}{2}}\right)\right]^2$$

上式计算出的是QPSK信号的误码率。若考虑其误比特率，则由于正交的两路相干解调方法和2PSK中采用的解调方法一样。所以其误比特率的计算公式和2PSK的误码率公式一样。



二、MPSK系统的抗噪声性能

- 对于任意 M 进制PSK信号，其误码率公式为

$$P_e = 1 - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/M}^{\pi/M} e^{-r} \left[1 + \sqrt{4\pi r} \cos \theta e^{r \cos^2 \theta} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\sqrt{2r} \cos \theta} e^{-x^2/2} dx \right] d\theta$$

- 当 M 大时，MPSK误码率公式可以近似为

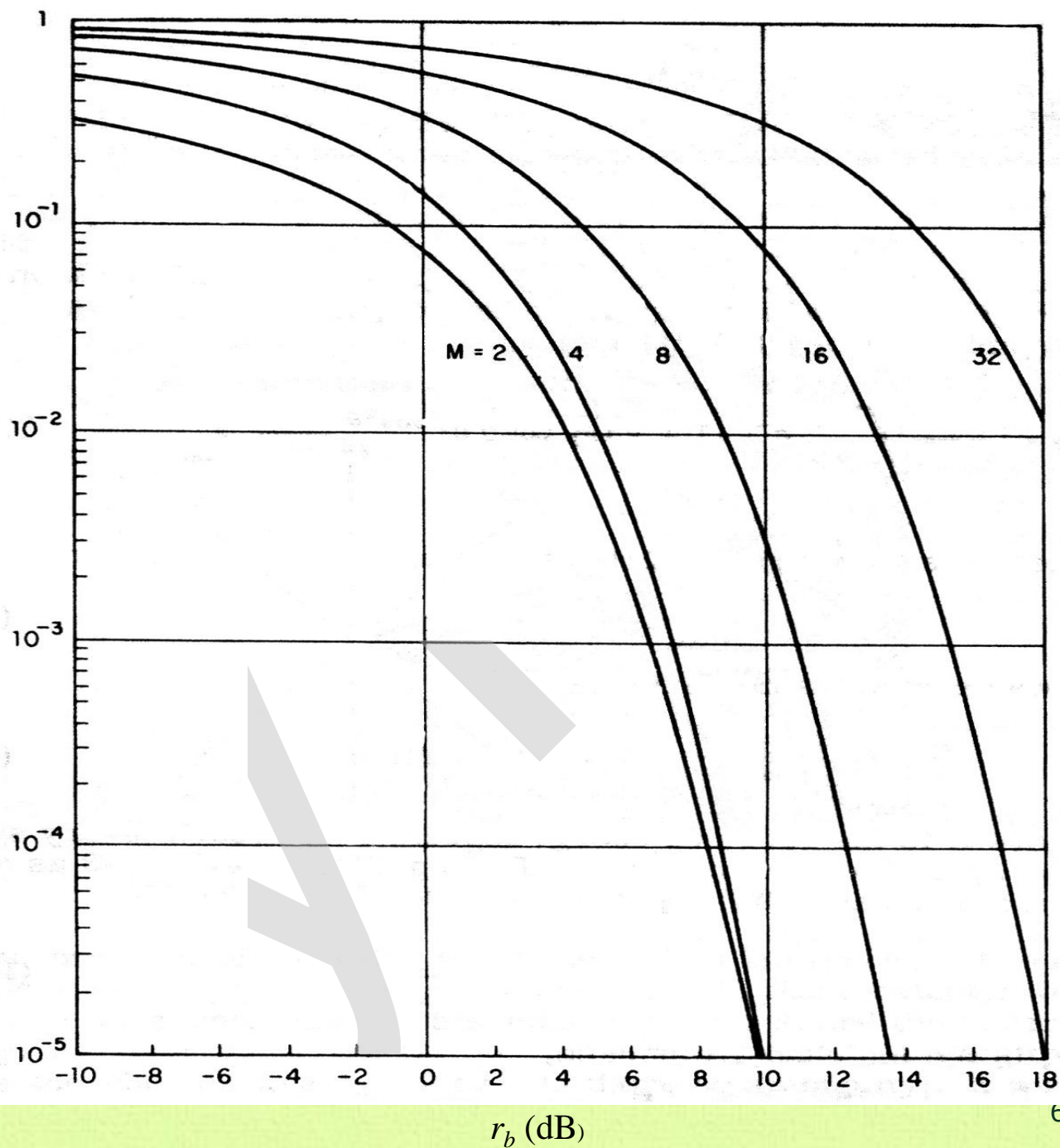
$$P_e = \operatorname{erfc} \left(\sqrt{r} \sin \frac{\pi}{M} \right)$$

- 0QPSK的抗噪声性能和QPSK完全一样。



MPSK的误码率曲线

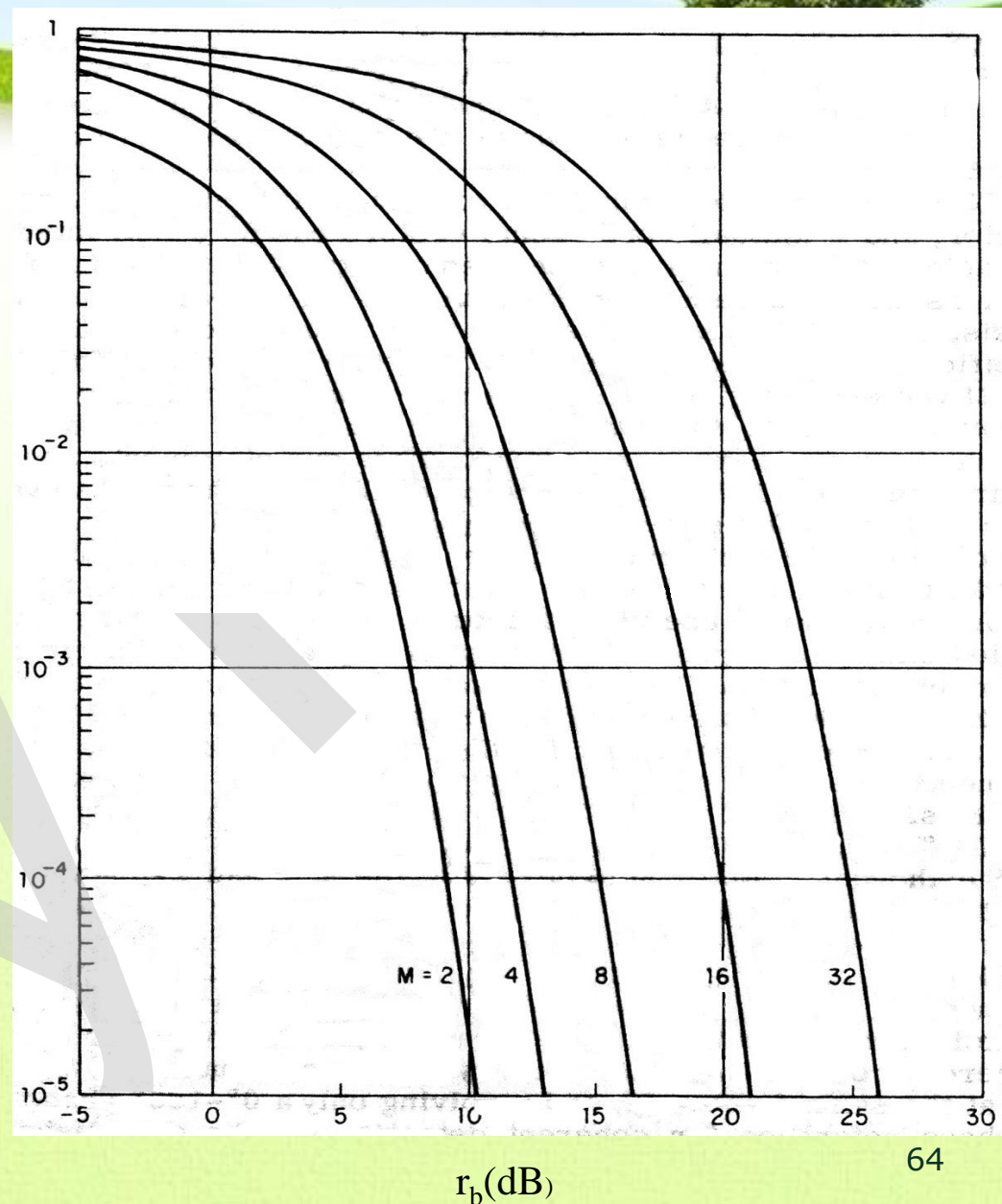
P_e

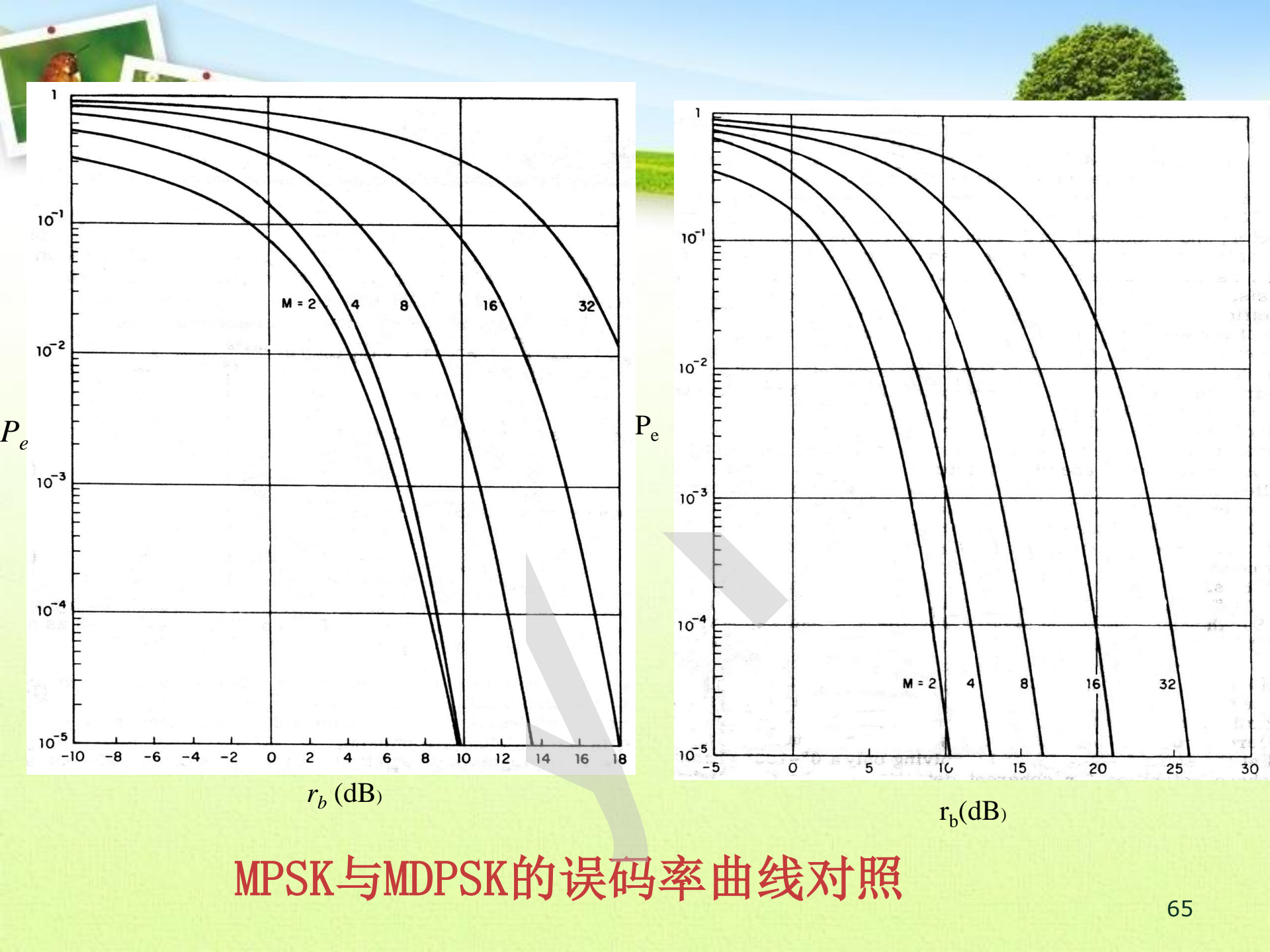


7.5.4 MDPSK系统的抗噪声性能

MDPSK误码率
近似公式为

$$P_e \approx \operatorname{erfc}\left(\sqrt{2r} \sin \frac{\pi}{2M}\right) P_e$$





MPSK与MDPSK的误码率曲线对照



P_e 和 P_b 之间的关系

● 二进制调制:

● 码元错误概率 P_e =比特错误概率 P_b

● M进制调制: 取决于码与星座点的映射

● 1) 采用格雷码时:

● 星座点间距离不等时, 可以假设误判都发生在相邻星座点之间。

● 采用格雷码时相邻星座点的码只有1比特不同, 则有:

$$P_b = P_e / k$$



● M进制调制:

● 2) 采用自然二进制码时:

● 假定星座点间距离相等, 则对某一个 M 进制码元发生错误判决时, 将等概率地错判成其他 $(M-1)$ 个码元之一。由于每个码元中含有 k 个比特, $M = 2^k$, 所以每次错判可能造成的错误比特数从1到 k 都有可能。此时有:

$$P_b = \frac{2^{k-1}}{2^k - 1} P_e = \frac{P_e}{2[1 - (1/2^k)]}$$

● k 很大时, 有: $P_b \approx P_e / 2$



分花拂柳，渐到春深处，
且回首，细数来时路。

本章结束

🌳 思考题：7-8、7-10、7-11、7-16

🌳 习题：7-2、7-4、7-10、7-12、7-15、7-16