2.1 $X(t)=Vt+b$, $V\sim N(0,1)$

$EX(t)=E(Vt+b)=b$ 　则 $X(t)$ 服从正态分布

$DX(t)=D(Vt+b)=t^2$

故 X_t 的一维概率密度为 $f_t(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}|t|}e^{-\frac{(x-b)^2}{2t^2}}$, $x\in R$

均值函数 $m(t)=EX(t)=b$.

相关函数 $R(t_1,t_2)=EX(t_1)X(t_2)=E(Vt_1+b)(Vt_2+b)=t_1t_2+b^2$

2.3. 硬币出现正,反面的概率均为 $\frac12$.

(1) 当 $t=\frac12$ 时, $X(\frac12)$ 的分布列为 $P(X(\frac12)=0)=P(X(\frac12)=1)=\frac12$.

分布函数为 $F(\frac12;x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \frac12, & 0\le x<1\\ 1, & x\ge 1.\end{cases}$

当 $t=1$ 时 $X(1)$ 分布列为 $P(X(1)=-1)=P(X(1)=2)=\frac12$.

分布函数为 $F(1;x)=\begin{cases}0, & x<-1\\ \frac12, & -1\le x<2\\ 1, & x\ge 2.\end{cases}$

(2) 在 $t=\frac12$, $t=1$ 时 联合分布列为

$P(X(\frac12)=0,X(1)=-1)=P(X(\frac12)=0,X(1)=2)=\frac14$.

故二维联合分布函数

$$F(\tfrac12,1;x_1,x_2)=\begin{cases}0, & x_1<0 \text{ 或 } x_2<-1\\ \frac14, & 0\le x_1<1 \text{ 且 } -1\le x_2<2\\ \frac12, & 0\le x_1<1 \text{ 且 } x_2\ge 2 \text{ 或 } x_1\ge 1 \text{ 且 } -1\le x_2<2\\ 1, & x_1\ge 1 \text{ 且 } x_2\ge 2\end{cases}$$

(3) $m_X(t)=\cos(\pi t)\cdot\frac12+2t\cdot\frac12=\frac12(\cos(\pi t)+2t)$, $m_X(1)=\frac12$.

$\sigma_X^2(t)=EX^2(t)=[m_X(t)]^2=[\frac12\cos(\pi t)-t]^2$.

2.12. $EX(t)=E\sum_{k=1}^{N}A_k e^{i(\omega t+\phi_k)}=\sum_{k=1}^{N}EA_k\cdot Ee^{i(\omega t+\phi_k)}$

由 $\phi_k\sim U(0,2\pi)$, 故 $Ee^{i(\omega t+\phi_k)}=\int_0^{2\pi}e^{i(\omega t+\varphi)}\frac{1}{2\pi}d\varphi=0$

即 $EX(t)=\sum_{k=1}^{N}EA_k\cdot 0=0$.

$B_X(t_1,t_2)=EX(t_1)\overline{X(t_2)}=\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}EA_kA_j\cdot Ee^{i[\omega(t_1-t_2)}$

当 $k\ne j$ 时 ϕ_k 与 ϕ_j 独立 $Ee^{i[\omega(t_1-t_2)+(\phi_k-\phi_j)]}=0$.

当 $k=j$ 时 $Ee^{i[\omega(t_1-t_2)+(\phi_k-\phi_k)]}=e^{i\omega(t_1-t_2)}$.

故 $B_X(t_1,t_2)=e^{i\omega(t_1-t_2)}\sum_{k=1}^{N}EA_k^2$.

$$R_X(t_1, t_2) = E(Y\cos(\alpha t_1) + Z\sin(\alpha t_1))(Y\cos(\alpha t_2) + Y\sin(\alpha t_2))$$

$$= \cos\alpha(t_2 - t_1).$$

$$EX^2(t) = R_X(t, t) = 1 < \infty$$

即 $\{X(t), -\infty < t < \infty\}$ 为广义平稳过程，不是严平稳过程。