第七章

功率谱估计的经典方法

7.1概述

7.2 功率谱估计的经典方法

7.1概述

功率谱估计,

- 是估计平稳随机过程的功率谱,
- 根据随机过程的一个取样序列的一段数据,即有限长数据来估计。
- 假定信号是遍历的,建立在时间平均基础上。

估计目的:

- 发现时域隐含特征:信号周期性,谱峰识别;
- 滤波,信号分离,识别。

7.1概述

谱估计方法：

经典方法（非参数法），现代方法（参数法）

- **经典方法：**以傅里叶变换为基础，

  方法：周期图法 和 Blackman-Tukey(BT)法 (自相关序列估计法)；

  适用范围：数据多，对频率分辨率要求不高。

- **现代方法：**以随机过程的参数模型为基础，

  又称参数方法或模型方法；

  最基本的方法： 自回归模型法，线性预测法，最大熵法；

  适用范围：数据少，对频率分辨率要求高。

  优劣：参数方法较优，利用了“随机过程是如何产生的”信息，摈弃了“加窗效应”。

- **(Wiener-Khinchin)** 维纳–辛坎定律：零均值的，广义平稳随机过程的功率谱 $S_{xx}(e^{jw})$ ，定义为：该随机过程的自相关序列的傅里叶变换。

$$S_{xx}(e^{jw}) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} R_{xx}(m)e^{-jwm}$$

- 自相关序列 $R_{xx}(m)$ 定义为滞后积的数学期望。

$$R_{xx}(m) = E[x(n)x^*(n+m)]$$

- 对于自相关遍历性随机过程，集合平均可以用随机过程的一个取样序列的滞后积的时间平均来代替。

$$R_{xx}(m) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} x(n)x^*(n+m)$$

7.2 功率谱估计的经典方法

- 功率谱估计的两种方法：周期图法（直接法）和 BT法（自相关函数估计法，间接法）

7.2.1 周期图的定义

- 设 $\{x(n)\}$ 是零均值的广义平稳随机过程，$x(n)$ 是它的一个取样序列，$x_N(n)$ 是取样序列 $x(n)$ 中的一段数据。

$$x_N(n)=W_N(n)x(n)=\begin{cases} x(n), 0\le n\le N-1 \\ 0, \quad others \end{cases}$$

$$W_N(n)=\begin{cases} 1, 0\le n\le N-1 \\ 0, \quad others \end{cases}$$

7.2 功率谱估计的经典方法------周期图法

- $\{x(n)\}$ 的自相关序列 $R_{xx}(m)$ 的有偏估计 $R_N(m)$ ，可用 $x_N(n)$ 表示为：

$$R_N(m)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1-|m|}x(n)x^*(n+m)$$
$$=\frac{1}{N}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x_N(n)x_N{}^*(n+m),\quad |m|\le N-1$$

- $R_N(m)$ 看成是序列 $x_N(n)$ 与 $x_N(-n)$ 的线性卷积乘以 $\frac{1}{N}$ 。
- $R_N(m)$ 的傅里叶变换 $S_{per}(e^{jw})$ 为：

$$S_{per}(e^{jw})=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}R_N(m)e^{-jwm}=\sum_{m=-(N-1)}^{N-1}R_N(m)e^{-jwm}$$

- $x_N(m)$ 的傅里叶变换 $X(e^{jw})$ 为：

$$X(e^{jw})=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}x_N(m)e^{-jwm}=\sum_{m=0}^{N-1}x_N(m)e^{-jwm}$$

7.2 功率谱估计的经典方法------周期图法

- $S_{per}(e^{jw})$ 可用 $X_N(e^{jw})$ 表示为：

$$S_{per}(e^{jw}) = \sum_{m=-(N-1)}^{N-1} R_N(m)e^{-jwm} =$$

$$\sum_{m=-(N-1)}^{N-1} [\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1-|m|} x_N(n)x_N^*(n+m)]e^{-jwm} = \frac{1}{N} X_N(e^{jw})X_N^*(e^{jw})$$

$$= \frac{1}{N} \left| X_N(e^{jw}) \right|^2$$

- $S_{per}(e^{jw})$ ，称为周期图，是 $S_{xx}(e^{jw})$ 估计。
- 直接计算 $x_N(n)$ 的傅里叶变换来得到周期图，故称为周期图的直接方法，简称周期图法。