第二章　离散时间信号和系统

(The Discrete Time Signal&System)

本章习题（第3版课本P87）

- 2.1, 2.3(2), 2.4, 2.5, 2.7(1)(3)(4)
- 2.13, 2.14(9)(10), 2.15, 2.19, 2.21(3)(5)
- 2.23(4), 2.29(2), 2.31, 2.33, 2.35
- 选做：2.41

主要内容：

§2.1　引言

§2.2　离散时间信号—序列

§2.3　离散时间系统

§2.4　线性常系数差分方程

§2.5　离散时间信号和系统的频域描述

§2.6　连续时间信号的取样

§2.7　Z变换

§2.8　系统函数

§2.1 引言（Introduction）

- **2.1.1 信号分类**

  连续信号和离散信号；

  模拟信号和数字信号；

  确定性信号和随机信号。

时间 / 幅度	连 续	离散
连 续	模 拟	抽 样
离 散	量 化	数 字

信号：传载信号的函数。

数学上表示为一个或多个自变量的函数。

- **2.1.2　数字信号处理的范围**

　　对幅度和时间都离散的信号进行变换。

　本课程只讨论数字信号处理。

- **2.1.3　几个基本概念**

　　连续时间系统、离散时间系统；

　　模拟系统、数字系统。

§2.2　离散时间信号—序列(Sequence)

• 2.2.1　离散时间信号的表示

1. 数字表示

如果一个序列 x 的第 n 个数字表示为 $x(n)$，则全部信号序列表示为：

$$x = \{x(n)\}, -\infty < n < +\infty$$

其中n为整数，对于n的非整数点，$x(n)$没有定义。

为方便，将其称为序列 $x(n)$，如：

$$x(n)=\{2,3,4,5,6.3,7.9\};n=0,1,2,3,4,5$$

$$x(n)=\begin{cases}2,3,4,5,6.3,7.9; n=0,1,2,3,4,5\\ 0, others\end{cases}$$

- 注意：

①有的书上也表示为 x_n ，注意n的取值范围。

②当采用5bits量化时，取样信号和数字信号的区别如下：

取样信号：

$$x(n)=\begin{cases} 0.3767, 0.2604, 0.1721, 0.6883, 0.5809, 0.2904, & n=0,1,2,3,4,5 \\ 0, & others \end{cases}$$

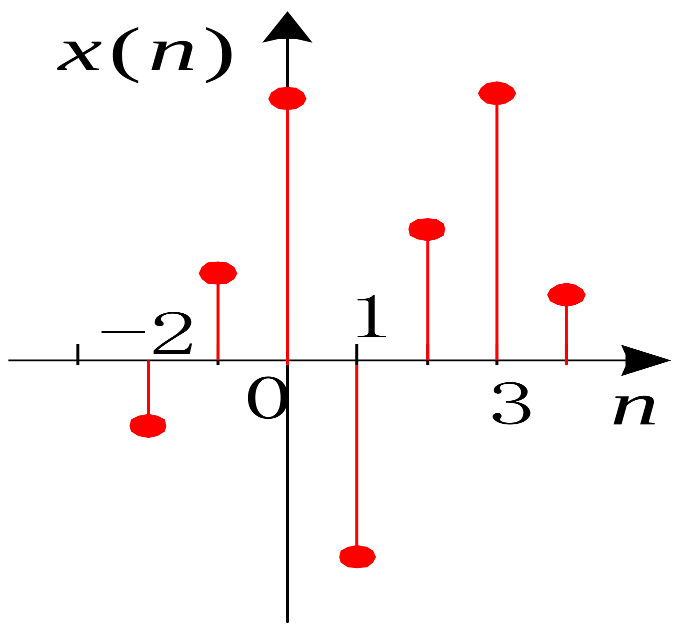
数字信号：

$$x(n)=\begin{cases} 0.375, 0.25, 0.125, 0.6875, 0.5625, 0.25; & n=0,1,2,3,4,5 \\ 0, & others \end{cases}$$

2. 图形表示

$$x(n)=\begin{cases}-0.5,0.75,2,-1.5,1,2,0.5, n=-2,-1,0,1,2,3,4\\ 0, others\end{cases}$$

序列图形如下图所示:

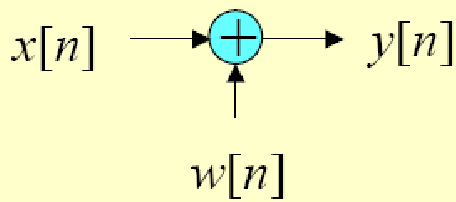


- **2.2.2 序列间的运算—用于产生同抽样率新序列**

有6种基本运算，对于两个序列 $x(n)$**，** $\mathrm{w(n)}$ **和** $y(n)$**：**

1. 加运算:

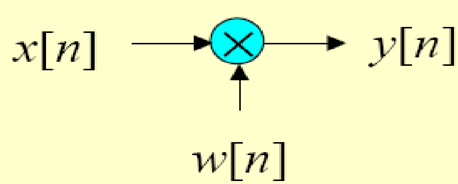
- **Addition** operation:
  - Adder



$$y[n] = x[n] + w[n]$$

2. 积运算—调制:

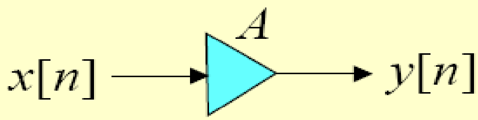
- **Product (modulation)** operation:
  - Modulator



$$y[n] = x[n] \cdot w[n]$$

3. 常数乘:

- **Multiplication** operation
  - Multiplier

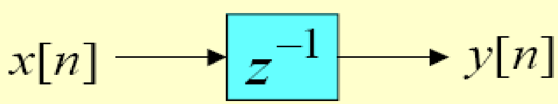


$$y[n] = A \cdot x[n]$$

- **Time-shifting** operation: $y[n] = x[n-N]$
  where N is an integer

4. 单位延时:

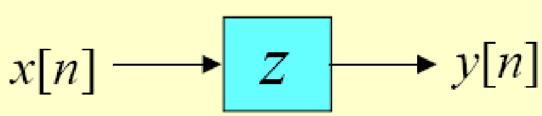
- If $N > 0$, it is **delaying** operation
  - Unit delay



$$y[n] = x[n-1]$$

5. 单位超前:

- If $N < 0$, it is an **advance** operation

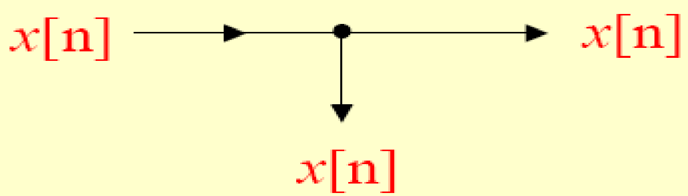


$$y[n] = x[n+1]$$

  - Unit advance

6.复制

- **Branching** operation: Used to provide multiple copies of a sequence

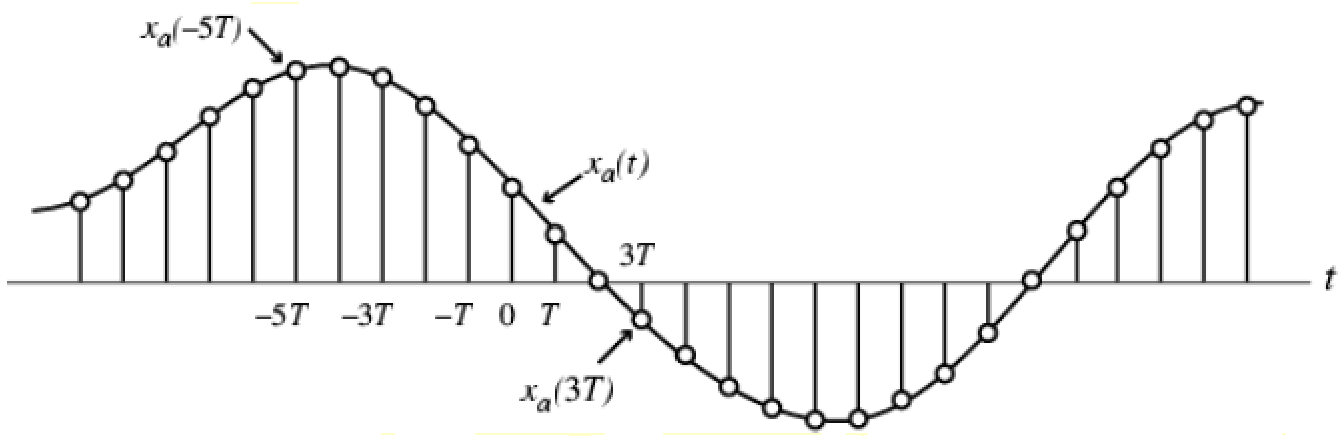


- 另外一种产生新序列运算：时间反转运算：

- **Time-reversal (folding)** operation:

$$y[n] = x[-n]$$

数字信号与对应模拟信号的关系：



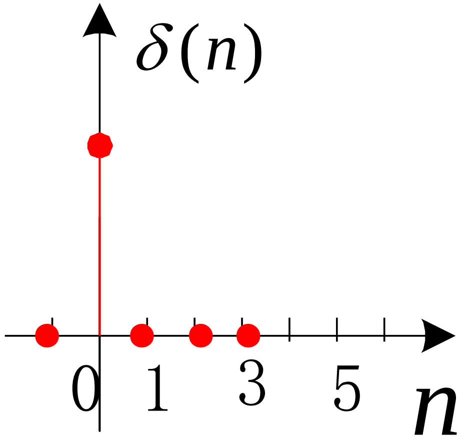
$$x(n) = x_a(t)\big|_{t=nT} = x_a(nT),\ n = \ldots,-2,-1,0,1,\ldots$$

•2.2.3 常见序列

1. 单位取样序列（Unit-sampling sequence）

$$\delta(n)=\begin{cases}1, n=0\\0, n\neq 0\end{cases}\qquad\qquad \delta(n-n_0)=\begin{cases}1, n=n_0\\0, n\neq n_0\end{cases}$$

$\delta(n)$ **的波形如右图所示：**



- **注意：**

① $\delta(n)$ **是一个确定的物理量，**

$\delta(t)$ **而是一种数学抽象；**

$$x(n)\delta(n) = x(0)\delta(n) \qquad \delta(t) = \begin{cases} \infty, t = 0 \\ 0, t \neq 0 \end{cases}$$

② 只有一个 n0 时刻的非零样本值的数字序列

$$x(n)\delta(n-n_0) = x(n_0)\delta(n-n_0)$$

仅在 n=0 时刻存在非零冲激值的模拟函数；

$$x(t)\delta(t) = x(0)\delta(t)$$

③ **序列的加权表示：**

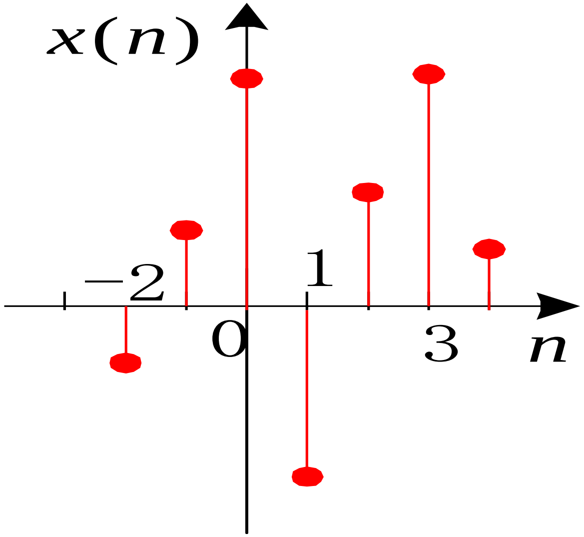
任何序列 x（n）都可以表示为单位取样序列及其延迟序列的加权和。

$x(0)\delta(n) \quad x(k)\delta(n-k)$

$$\therefore x(n)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\delta(n-k)$$

因此，讨论线性移不变系统的特性时只需讨论系统在单位取样序列作用下的响应即可。

例2.2.1 如下图所示的序列用序列$\delta(n)$表示则为：



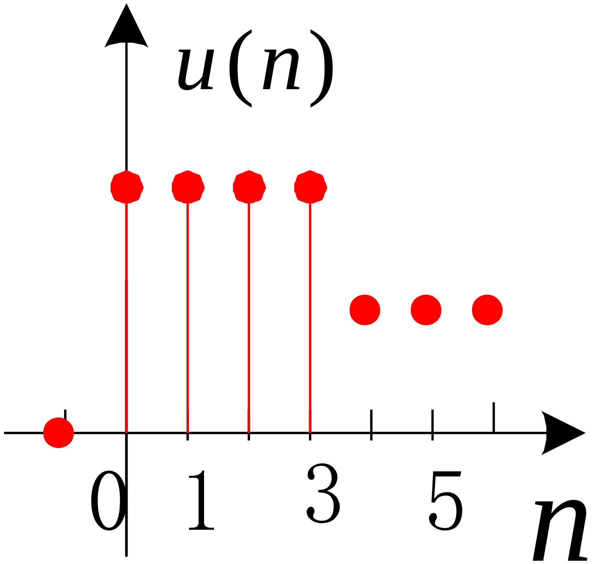
$$x(n)=-0.5\delta(n+2)+0.75\delta(n+1)+2\delta(n)-1.5\delta(n-1)$$

$$+\delta(n-2)+2\delta(n-3)+0.5\delta(n-4)$$

2. 单位阶跃序列（Unit-step sequence）

$$u(n)=\begin{cases}1, n\geq 0\\ 0, n<0\end{cases}$$

其波形如右图所示：



- 注意：

① $\delta(n)=u(n)-u(n-1)$

② $u(n)=\sum_{k=-\infty}^{n}\delta(k)$ $\quad$ $u(n)=\sum_{k=0}^{\infty}\delta(n-k)$

（令m＝n－k可完成两式之间的推导）

③

$$u(t)=\begin{cases}1, t>0\\0, t<0\end{cases} \qquad u(t)=\begin{cases}1, t<0\\ \frac{1}{2}, t=0\\0, t<0\end{cases}$$

请考虑：

$\delta(-n)$、$\delta(3-n)$、$\delta(-3-n)$、$u(-n)$、$u(3-n)$和 $u(-3-n)$

以上各种序列的图形该如何表示？

3. 矩形序列（Rectangle sequence）

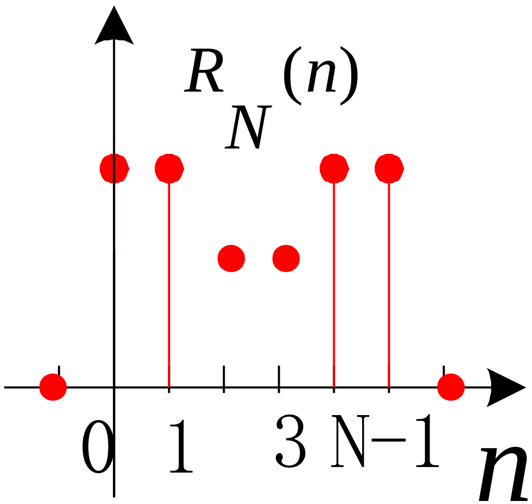
$$R_N(n)=\begin{cases}1,0\le n\le N-1\\ \quad 0,others\end{cases}$$

$$R_N(n)=u(n)-u(n-N)$$

在（0, N-1）区间的N个值为1，

其它整数点为0；

其波形如右图所示：



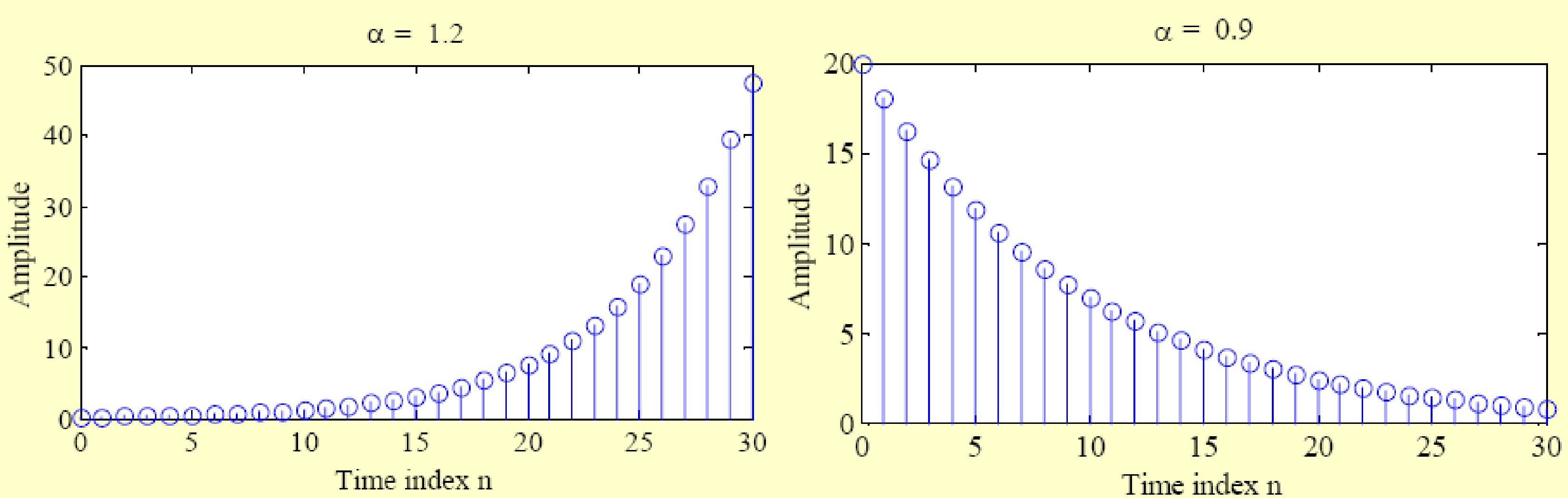
4. 实指数序列（Real exponential sequence）

$$x(n) = A\alpha^n, \ -\infty < n < \infty$$

其中，A，α为实数.

如果 $n < 0$， $x(n) = 0$

$$x(n) = a^n u(n) = \begin{cases} a^n, n \geq 0 \\ 0, n < 0 \end{cases}$$



5. 复指数序列和正弦序列

$$e^{j\theta}=\cos\theta+j\sin\theta$$

(Complex exponential sequence)

- **复指数序列**

$$x(n)=A\alpha^{n},\ -\infty<n<\infty$$

其中，A，α为复数. $\alpha=e^{(\sigma_o+j\omega_o)}, A=|A|e^{j\phi},$

$$x(n)=|A|e^{j\phi}e^{(\sigma_o+j\omega_o)n}=x_{re}(n)+j\,x_{im}(n),$$

$$x_{re}(n)=|A|e^{\sigma_o n}\cos(\omega_o n+\phi),$$

$$x_{im}(n)=|A|e^{\sigma_o n}\sin(\omega_o n+\phi)$$

$x_{re}(n)$,$x_{im}(n)$ **都是实序列，分别称为：实部序列，虚部序列.**

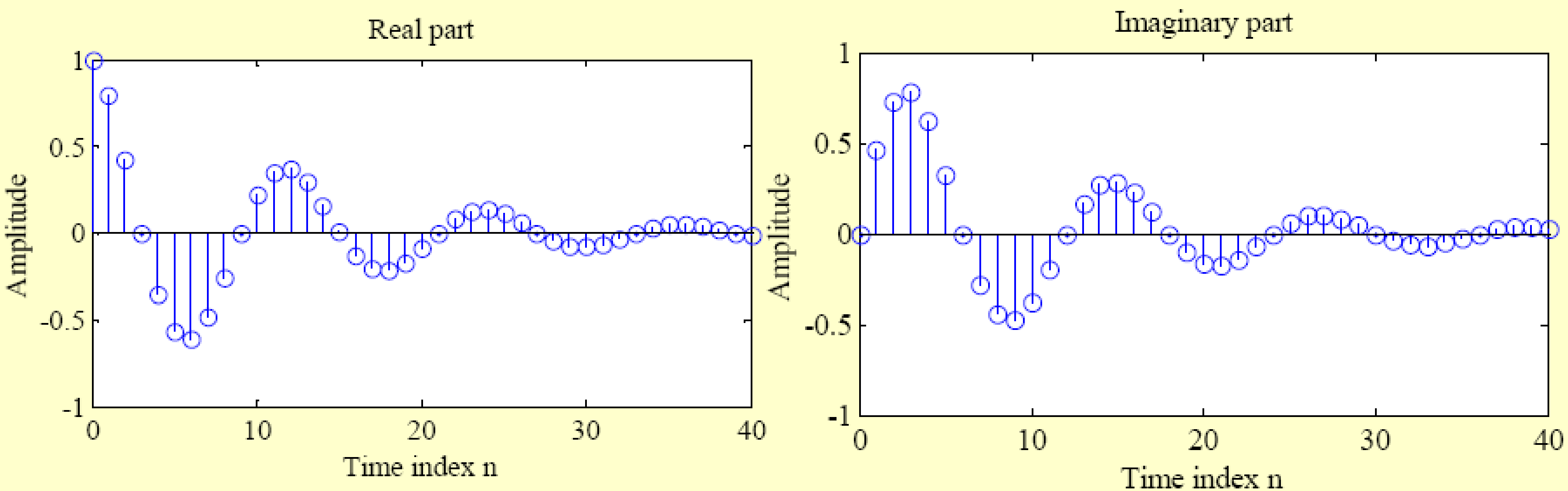
$$x(n) = e^{(\sigma_o + j\omega_o)n} = x_{re}(n) + j\,x_{im}(n),$$

$$x_{re}(n) = e^{\sigma_o n}\cos(\omega_o n),$$

$$x_{im}(n) = e^{\sigma_o n}\sin(\omega_o n)$$

$n > 0$ 时，**实部序列与虚部序列随n不变** $(\sigma_o = 0)$**，递增** $(\sigma_o > 0)$**，递减** $(\sigma_o < 0)$.

举例：

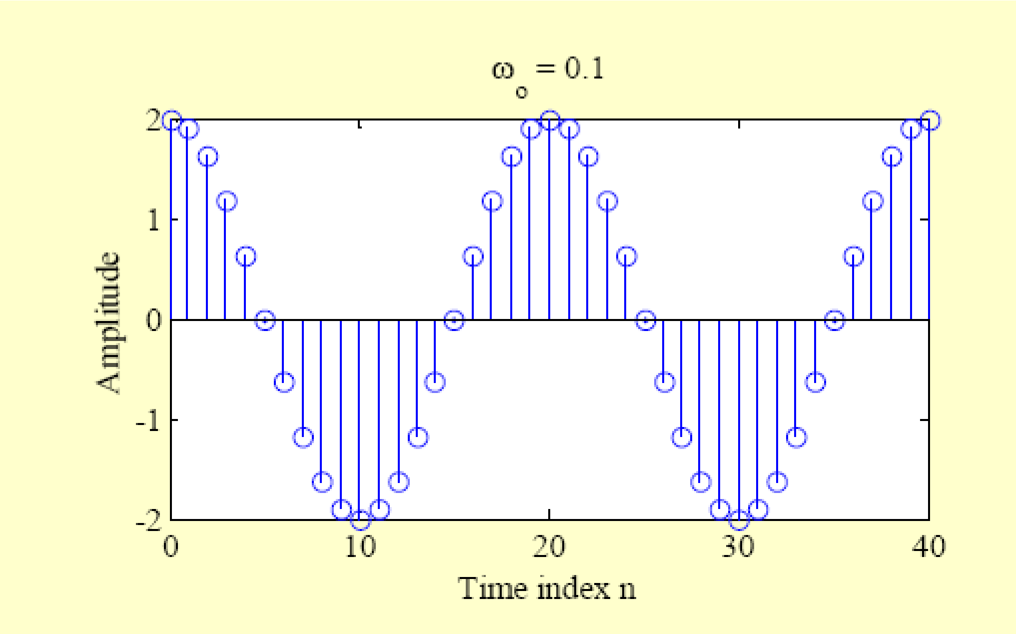


$$x(n) = \exp(-\frac{1}{12} + j\frac{\pi}{6})n$$

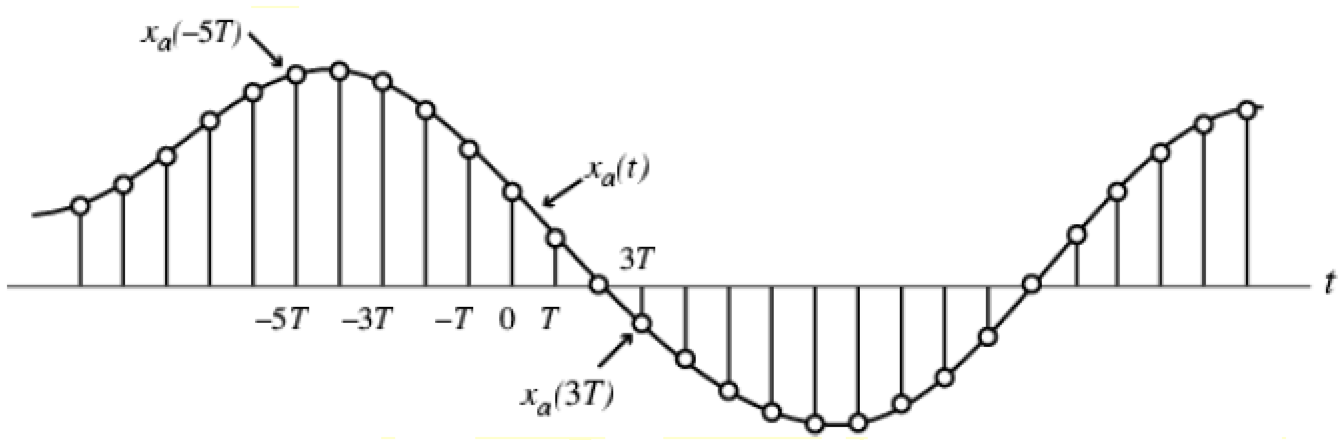
•**正弦序列** $x(n) = A\sin(\omega n + \phi)$

$$x(n) = A\cos(\omega_o n + \phi)$$

其中：A **为振幅，**ϕ **为相位，**ω **为角频率**



数字信号与对应模拟信号的关系：



$$x(n) = x_a(t)\big|_{t=nT} = x_a(nT),\ n = \ldots, -2, -1, 0, 1, \ldots$$

正弦序列与对应模拟正弦函数角频率之间关系：

- 模拟正弦函数

$$x(t) = A\cos(2\pi f_o t + \phi) = A\cos(\Omega_o t + \phi)$$

其中：Ω_o - 模拟角频率，单位为rad/s；

- 对应数字正弦序列，其抽样周期为T

$$x(n) = A\cos(\Omega_o nT + \phi) = A\cos(\frac{2\pi\Omega_o}{\Omega_T} n + \phi)$$
$$= A\cos(\omega_o n + \phi)$$

其中：ω_o - 数字角频率，单位为rad/sample；

$$\omega_o = 2\pi\Omega_o / \Omega_T = \Omega_o T$$

- 注意：

① $e^{j\omega n} = e^{j(\omega+2\pi m)n}$ $\cos(\omega n) = \cos((\omega + 2\pi m)n)$

$e^{j\Omega t} \neq e^{j(\Omega+2\pi m)t}$ $\cos(\Omega t) \neq \cos((\Omega + 2\pi m)t)$

$\sigma = 0$

即：正弦序列和复指数序列对 ω 变化以为 2π 周期。

在时域考虑问题时，取数字角频率的主值区间为：$[-\pi, \pi]$

$[-\pi, \pi]$ **或者** $[0,2\pi]$ **用于离散时间信号和系统的DTFT**

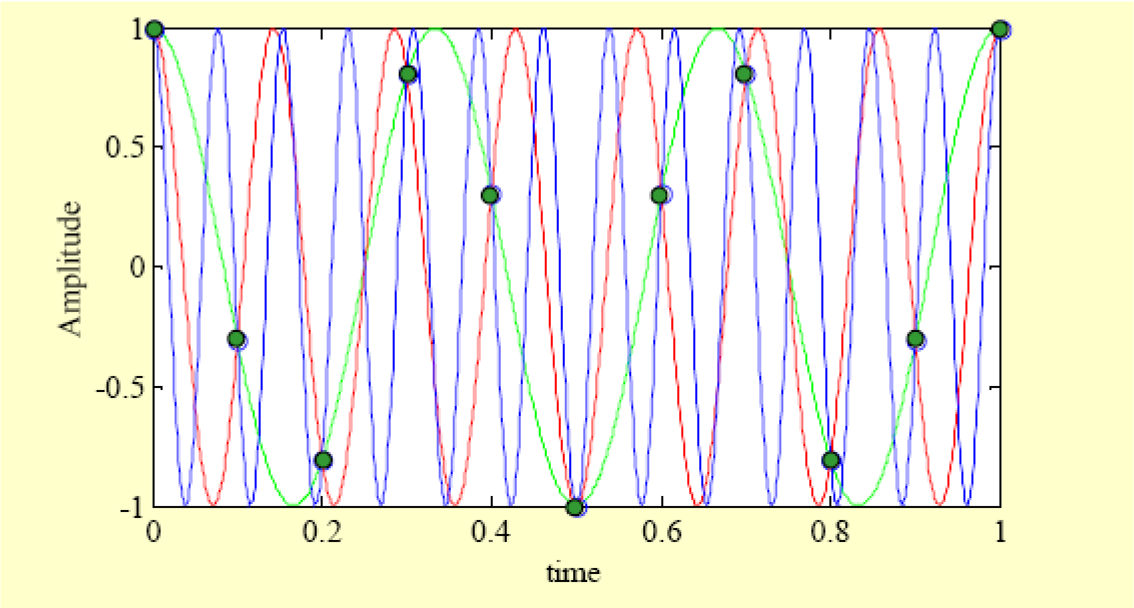
$[0,2\pi]$ **用于DFT**

数字正弦序列的角频率以 2π 为周期：

举例1：如下三个模拟信号，以频率10HZ抽样，求对应数字序列：

$$g_1(t) = \cos(6\pi t)$$
$$g_2(t) = \cos(14\pi t)$$
$$g_3(t) = \cos(26\pi t)$$

$$g_1(n) = \cos(0.6\pi n) \qquad g_2(n) = \cos(1.4\pi n)$$
$$g_3(n) = \cos(2.6\pi n)$$



$$g_2(n) = \cos(1.4\pi n) = \cos\big((2\pi - 0.6\pi)n\big) = \cos(0.6\pi n)$$

$$g_3(n) = \cos(2.6\pi n) = \cos\big((2\pi + 0.6\pi)n\big) = \cos(0.6\pi n)$$

$\omega_0 = \frac{2\pi}{\Omega_T}\Omega_0$

●当 $\Omega_T > 2\Omega_o$， $\omega_o = \frac{2\pi\Omega_o}{\Omega_T}$ $-\pi < \omega_o < \pi$ 对模拟信号抽样有唯一数字信号对应.

已知模拟角频率 Ω_o，数字角频率的主值区间 $-\pi < \omega_o < \pi$，选择 Ω_T

$$-\pi < \omega_o = \frac{2\pi\Omega_o}{\Omega_T} < \pi \qquad \left|\frac{2\pi\Omega_o}{\Omega_T}\right| < \pi \qquad 2\Omega_o < \Omega_T$$

举例2：以抽样率为200HZ，对如下模拟信号 va(t)进行抽样，得到数字正弦序列x[n].

$$v_a(t) = 6\cos(60\pi t) + 3\sin(300\pi t) + 2\cos(340\pi t) + 4\cos(500\pi t) + 10\sin(660\pi t)$$

正弦子信号频率：

30 Hz, 150 Hz, 170 Hz, 250 Hz and 330 Hz

抽样周期：

$$T = \frac{1}{200} = 0.005 \text{ sec}$$

$$
\begin{aligned}
v[n] &= 6\cos(0.3\pi n) + 3\sin(1.5\pi n) + 2\cos(1.7\pi n) \\
&\quad + 4\cos(2.5\pi n) + 10\sin(3.3\pi n) \\
&= 6\cos(0.3\pi n) + 3\sin\big((2\pi - 0.5\pi)n\big) + 2\cos\big((2\pi - 0.3\pi)n\big) \\
&\quad + 4\cos\big((2\pi + 0.5\pi)n\big) + 10\sin\big((4\pi - 0.7\pi)n\big) \\
&= 6\cos(0.3\pi n) - 3\sin(0.5\pi n) + 2\cos(0.3\pi n) + 4\cos(0.5\pi n) \\
&\quad - 10\sin(0.7\pi n) \\
&= 8\cos(0.3\pi n) + 5\cos(0.5\pi n + 0.6435) - 10\sin(0.7\pi n)
\end{aligned}
$$

② 当 $\omega = 0$ 时，$\cos(\omega n)$ 变化最慢（不变化）；

当 $\omega = \pi$ 时，$\cos(\omega n)$ 变化最快。

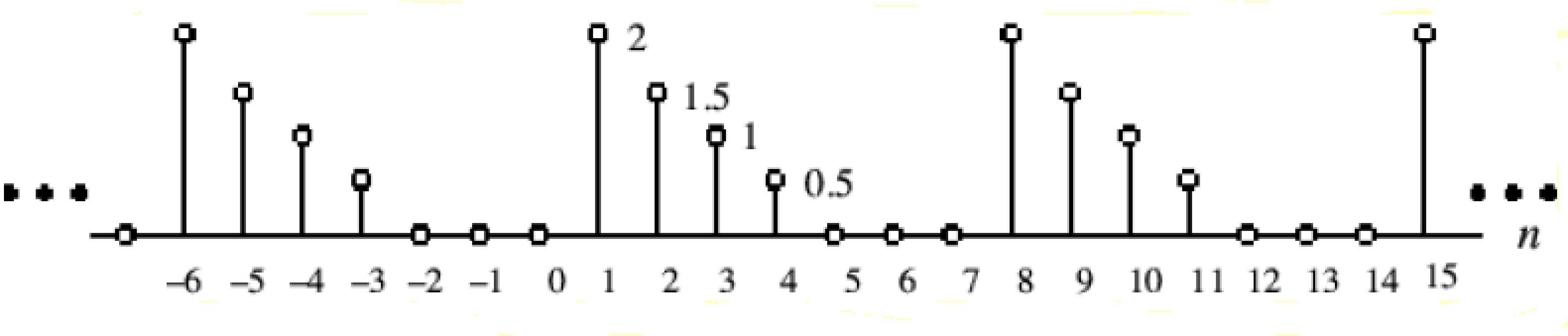
在DSP中，在主值区间上，将 $\omega = 0$ 附近称为 数字低频；而将 $\omega = \pi$ 附近称为数字高频。

这一特点与模拟正弦信号 $x_a(t) = \cos(\Omega t)$ 截然不同，Ω 越大，$\cos(\Omega t)$ 变化越快，注意其中t连续取值，而n只取整数值。

•2.2.4 周期序列(Periodic sequence)

如果对所有的n序列都满足： $x(n)=x(n+N)$

其中 **N 为整数**，则称序列 $x(n)$ 为周期序列，且最小周期为N，记为 $\tilde{x}(n)$



- $\sigma=0$ **时的指数序列和正弦序列的周期：**

①当 $\frac{2\pi}{\omega}$ =整数时，序列为周期性的，且周期 $\frac{2\pi}{\omega}$ 。

如： $x(n)=A\cos(\frac{\pi}{4}n), N=8$ $\quad \frac{\pi}{4}N=2\pi k \quad N=\frac{2\pi k}{\pi/4}$

② 当 $\frac{2\pi}{\omega}=$ 有理数时，序列为周期的，且周期大于 $\frac{2\pi}{\omega}$

如： $x(n)=A\sin(\frac{3\pi}{7}n+\phi), N=14$

③当 $\frac{2\pi}{\omega}=$ 无理数时，序列为非周期的。

如： $x(n)=A\sin(\frac{3}{7}n+\phi)$

•2.2.5 序列的能量（Energy of sequence）

$$E=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|x(n)|^2$$

有限能量信号称为能量信号.

•2.2.6 序列的平均功率（Average power of sequence）

●非周期序列的平均功率：

$$P_x=\lim_{K\to\infty}\frac{1}{2K+1}\sum_{n=-K}^{K}\left|x[n]\right|^2$$

$$\mathcal{E}_{x,K}=\sum_{n=-K}^{K}\left|x[n]\right|^2$$

$$P_x=\lim_{K\to\infty}\frac{1}{2K+1}\mathcal{E}_{x.K}$$

●周期序列的平均功率：

$$P_x=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\left|\tilde{x}[n]\right|^2$$

无限能量信号，但平均功率有限，称为功率信号.

能量信号的平均功率为0.

举例：

$$x[n]=\begin{cases}3(-1)^n, & n\ge 0\\ 0, & n<0\end{cases}$$

无限长度的信号，其能量是无限的，平均功率有限。

$$P_x=\lim_{K\to\infty}\frac{1}{2K+1}\left(9\sum_{n=0}^{K}1\right)=\lim_{K\to\infty}\frac{9(K+1)}{2K+1}=4.5$$

=>X(n)是功率信号。

§2.3 离散时间系统 (Discrete Time System)

- 2.3.0 离散时间系统概述

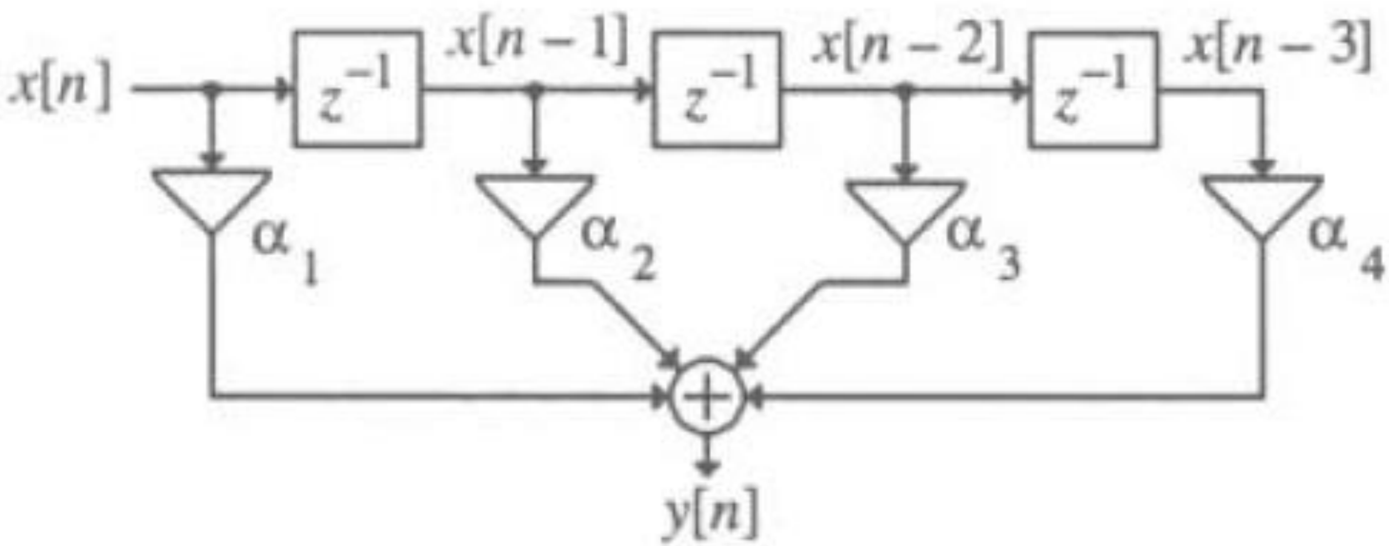
(Discrete Time System)

对于系统$T[\ ]$，把系统定义为将输入序列映射成输出序列的唯一变换，表示为：$y(n)=T[x(n)]$。

$$x(n) \longrightarrow \boxed{T[\ ]} \longrightarrow y(n)$$

- **按照输入信号及输出信号的个数,对基本数字处理器分类：**
  - **2输入，1输出的DSP系统：调制器，累加器；**
  - **1输入，1输出的DSP系统：常数乘法器，单位延迟器，单位超前器；**
  - **1输入，多输出的DSP系统：分流器.**

举例：单输入单输出DSP系统



●常见3种离散时间系统：

1．累加器：

- **Accumulator -** $y[n]=\sum_{\ell=-\infty}^{n} x[\ell]$

$$=\sum_{\ell=-\infty}^{n-1} x[\ell]+x[n]=y[n-1]+x[n]$$

表示为因果系统：

$$y[n]=\sum_{\ell=-\infty}^{-1} x[\ell]+\sum_{\ell=0}^{n} x[\ell]$$

$$=y[-1]+\sum_{\ell=0}^{n} x[\ell],\ n\geq 0$$

y[-1]为系统初始条件.

2.M点滑动平均滤波器

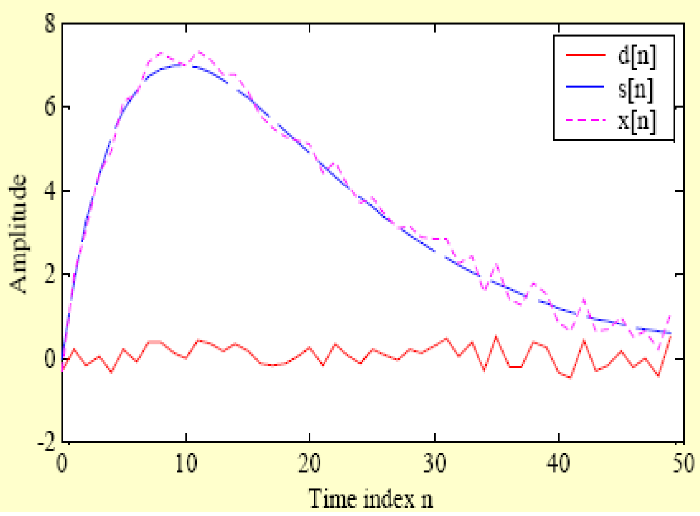
- **M-point moving-average system** -

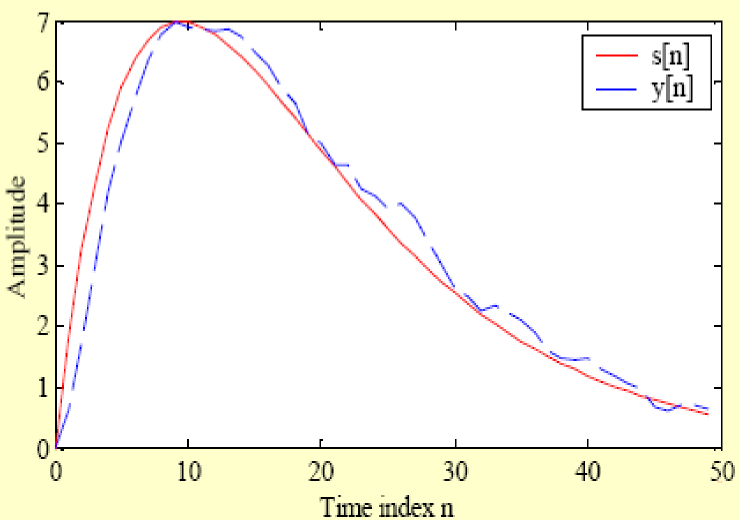
$$y[n]=\frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1}x[n-k]$$

应用举例： 去除数字信号x[n]的叠加噪声d[n],

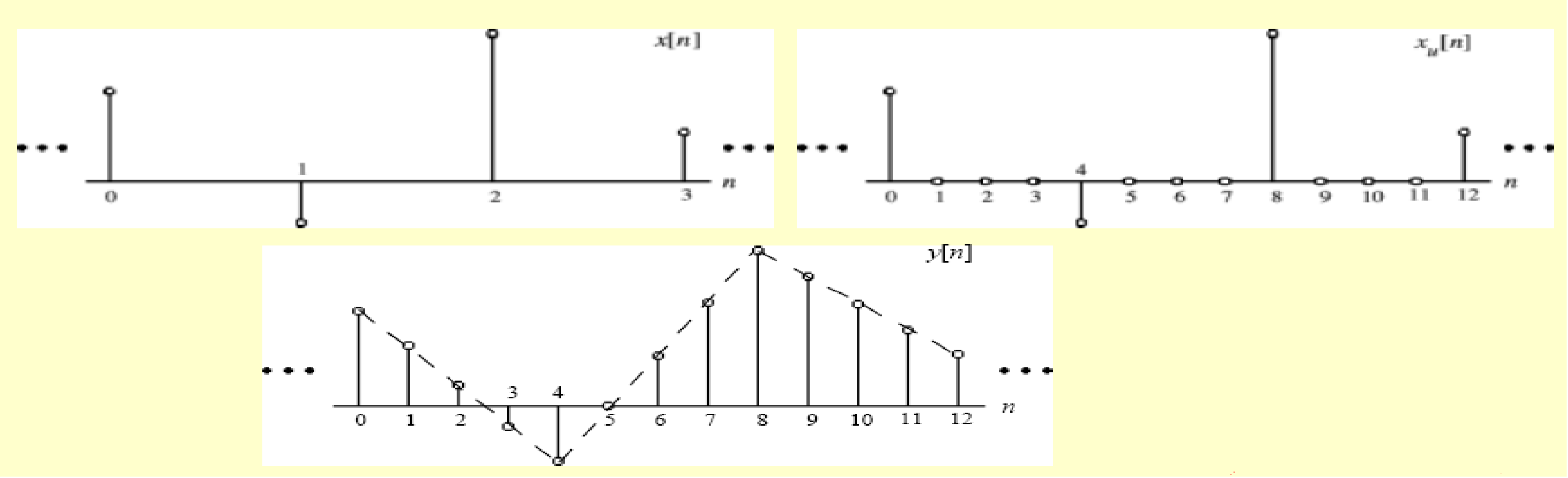
$$x[n]=s[n]+d[n],$$

$$s[n]=2[n(0.9)^n],\ d[n]$$ - random signal





3.线性插值器



- Factor-of-2 interpolator -

$$y[n]=x_u[n]+\frac{1}{2}(x_u[n-1]+x_u[n+1])$$

- Factor-of-3 interpolator -

$$y[n]=x_u[n]+\frac{1}{3}(x_u[n-2]+x_u[n+2])$$
$$+\frac{2}{3}(x_u[n-1]+x_u[n+1])$$

2.3.1 线性非移变系统 (Linear shift-invariant systems)

1. 对于系统 $T[\ ]$，把系统定义为将输入序列映射成输出序列的唯一变换，表示为：$y(n)=T[x(n)]$ 。

$$x(n) \longrightarrow \boxed{T[\ ]} \longrightarrow y(n)$$

2. 线性系统（Linear System）：
设 $y_1(n)$ 和 $y_2(n)$ 分别是系统对 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 的响应, 则:
线性系统满足:

$$\begin{aligned} T[ax_1(n)+bx_2(n)] &= a\cdot T[x_1(n)]+b\cdot T[x_2(n)] \\ &= ay_1(n)+by_2(n) \end{aligned}$$

(a，b是任意常数)

举例：累加器

1.如果 $$y_1[n]=\sum_{\ell=-\infty}^{n}x_1[\ell],\quad y_2[n]=\sum_{\ell=-\infty}^{n}x_2[\ell]$$

输入信号为：$$x[n]=\alpha x_1[n]+\beta x_2[n]$$

输出信号为：$$y[n]=\sum_{\ell=-\infty}^{n}\left(\alpha x_1[\ell]+\beta x_2[\ell]\right)$$
$$=\alpha\sum_{\ell=-\infty}^{n}x_1[\ell]+\beta\sum_{\ell=-\infty}^{n}x_2[\ell]=\alpha y_1[n]+\beta y_2[n]$$

所以，累加器是线性系统。

2.如果 $$y_1[n]=y_1[-1]+\sum_{\ell=0}^{n}x_1[\ell]\qquad y_2[n]=y_2[-1]+\sum_{\ell=0}^{n}x_2[\ell]$$

输入信号为：$$x[n]=\alpha x_1[n]+\beta x_2[n]$$

输出信号为：$$y[n]=y[-1]+\sum_{\ell=0}^{n}(\alpha x_1[\ell]+\beta x_2[\ell])$$

$$\alpha\, y_1[n] + \beta\, y_2[n]$$

$$= \alpha(y_1[-1] + \sum_{\ell=0}^{n} x_1[\ell]) + \beta(y_2[-1] + \sum_{\ell=0}^{n} x_2[\ell])$$

$$= (\alpha\, y_1[-1] + \beta\, y_2[-1]) + (\alpha \sum_{\ell=0}^{n} x_1[\ell] + \beta \sum_{\ell=0}^{n} x_2[\ell])$$

对任意 α ，β ，如果 $y[-1] = \alpha\, y_1[-1] + \beta\, y_2[-1]$

累加器才是线性系统.
所以，线性系统的初始条件为0.

3.如果 $y[n] = y[n-1] + x[n]$

$$y_1[n] = y_1[n-1] + x_1[n] \qquad y_2[n] = y_2[n-1] + x_2[n]$$

输入信号为：$x[n] = \alpha x_1[n] + \beta x_2[n]$

$$\alpha y_1[n] + \beta y_2[n] = \alpha y_1[n-1] + \beta y_2[n-1] + \alpha x_1[n] + \beta x_2[n]$$

输出信号为：$y[n] = y[n-1] + \alpha x_1[n] + \beta x_2[n]$

所以：$y[n] = \alpha y_1[n] + \beta y_2[n]$

3. 非移变系统（Shift-invariant System）：

如果输入信号 与 输出信号关系为 $y(n)=T[x(n)]$ **，**

且 k **为整数，则** $y(n-k)=T[x(n-k)]$ **为非移变系统。**

例2.3.1 证明 $y(n)=T[x(n)]=nx(n)$不是非移变系统。

证明：

由于 $T[x(n-k)]=nx(n-k)$

和 $y(n-k)=(n-k)x(n-k)$

所以 $T[x(n-k)]\neq y(n-k)$

故该系统不是非移变系统。

4. **线性非移变系统：**

①系统既满足线性条件，又满足非移变条件，

即为线性非移变系统。设 $x(n)$ **为线性非移变系统的输入，** $y(n)=T[x(n)]$ **；**

当输入为 $\delta(n)$ **时，** $h(n)=T[\delta(n)]$ **—单位取样响应；**

当输入为 $\delta(n-k)$ **时，** $h(n-k)=T[\delta(n-k)]$

$$\because x(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)\delta(n-k)$$

$$\therefore y(n)=T[x(n)]=T[\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)\delta(n-k)]$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x(k)T[\delta(n-k)]$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)h(n-k)$$

$$=x(n)*h(n)$$

即：对线性非移变系统，输入和输出满足卷积关系。

②离散卷积运算步骤：折叠移位、相乘、相加。

举例：单位取样响应h(n). $x[n]=\delta[n]$

1. $$y[n]=\alpha_1 x[n]+\alpha_2 x[n-1]+\alpha_3 x[n-2]+\alpha_4 x[n-3]$$

$$h[n]=\alpha_1\delta[n]+\alpha_2\delta[n-1]+\alpha_3\delta[n-2]+\alpha_4\delta[n-3]$$

$$h[n]=\{\underset{\uparrow}{\alpha_1},\quad \alpha_2,\quad \alpha_3,\quad \alpha_4\}$$

2. $$y[n]=\sum_{\ell=-\infty}^{n} x[\ell] \quad\Longrightarrow\quad h[n]=\sum_{\ell=-\infty}^{n}\delta[\ell]=\mu[n]$$

3. $$y[n]=x_u[n]+\frac{1}{2}(x_u[n-1]+x_u[n+1])$$

$$h[n]=\delta[n]+\frac{1}{2}(\delta[n-1]+\delta[n+1])$$

$$\{h[n]\}=\{0.5,\quad \underset{\uparrow}{1}\quad 0.5\}$$

例2.3.2 已知线性非移变系统的单位取样响应为：

$h(n)=u(n)-u(n-4)$ ，输入为： $x(n)=\begin{cases} n, 0\le n\le 3 \\ 0, others \end{cases}$

求输出 $y(n)$ 。

解： $\because y(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$

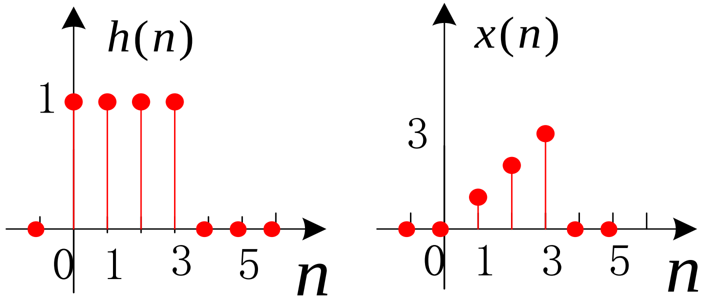
$\therefore y(0)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(-k)=0$ ，如图2. 3. 1 (a) 所示；

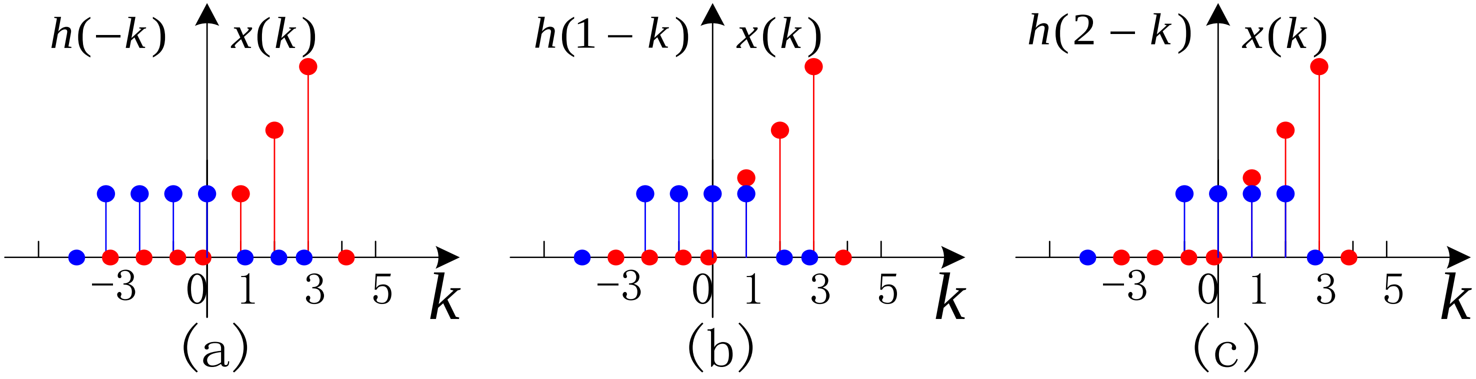
$y(1)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(1-k)=1$ ，如图2. 3. 1 (b) 所示；

$y(2)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(2-k)=3$ ，如图2. 3. 1 (c) 所示；

$$y(n)=\begin{cases}1,3,6,6,5,3; n=1,2,3,4,5,6\\ 0, others\end{cases}$$

整个卷积过程如下图所示。





5. **离散卷积运算的基本规律：**

①交换律

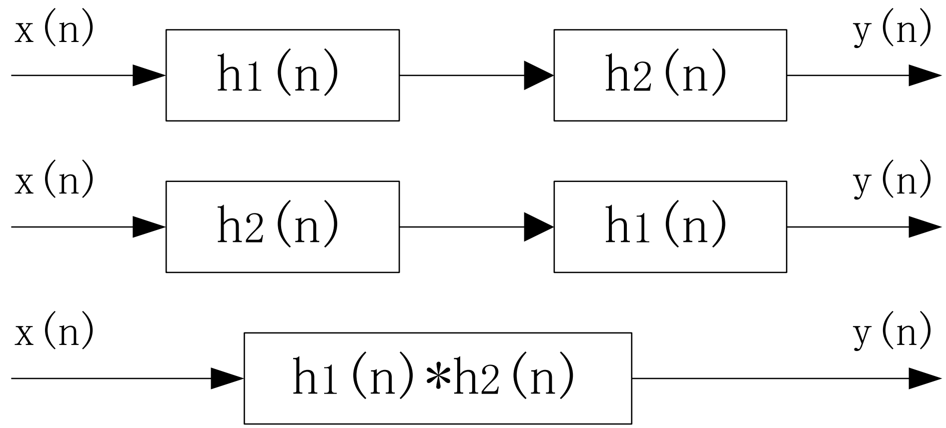
$$y(n)=x(n)*h(n)=h(n)*x(n)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}h(k)x(n-k)$$

②结合律

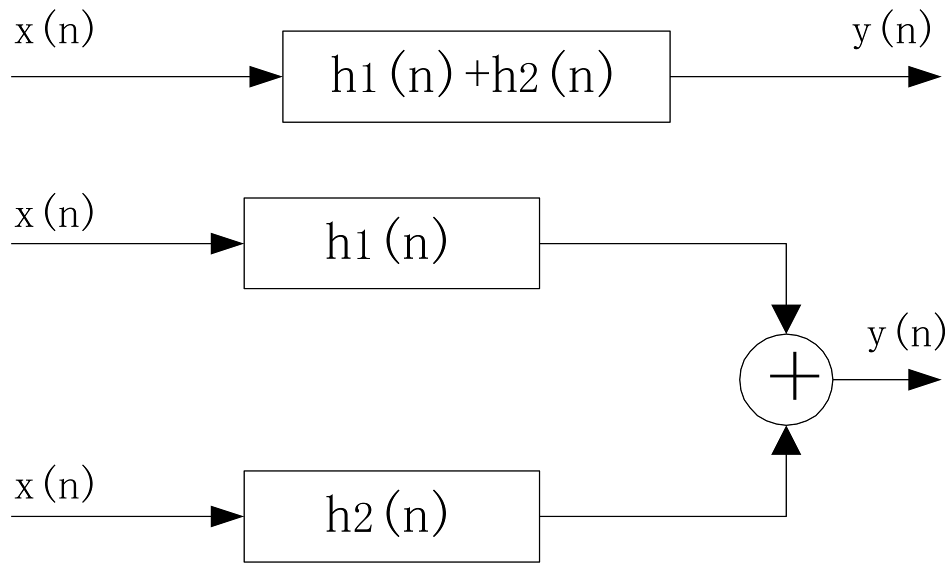
$$\begin{aligned}y(n)&=[x(n)*h_1(n)]*h_2(n)\\&=[x(n)*h_2(n)]*h_1(n)\\&=x(n)*[h_1(n)*h_2(n)]\end{aligned}$$

③分配律

$$\begin{aligned}y(n)&=x(n)*[h_1(n)+h_2(n)]\\&=x(n)*h_1(n)+x(n)*h_2(n)\end{aligned}$$


x(n)
h1(n)
h2(n)
y(n)
x(n)
h2(n)
h1(n)
y(n)
x(n)
h1(n)*h2(n)
y(n)

（a）串联组合


x(n)
h1(n)+h2(n)
y(n)
x(n)
h1(n)
y(n)
x(n)
h2(n)

（b）并联组合

举例：级联系统的应用---逆系统（输入信号与输出信号相同）

$$x[n] \longrightarrow \underset{\text{channel}}{\boxed{h_1[n]}} \xrightarrow{\hat{x}[n]} \underset{\text{inverse system}}{\boxed{h_2[n]}} \longrightarrow x[n]$$

$$h_1[n] \circledast h_2[n] = \delta[n]$$

1.求累加器的逆系统.

累加器的单位取样序列h(n)= $\mu[n]$

逆系统h2(n): $\mu[n] \circledast h_2[n] = \delta[n]$

$n < 0 \qquad h_2[n] = 0$

$h_2[0] = 1$

$$\sum_{\ell=0}^{n} h_2[\ell] = 0 \quad \text{for} \quad n \ge 1$$

$$h_2[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$$

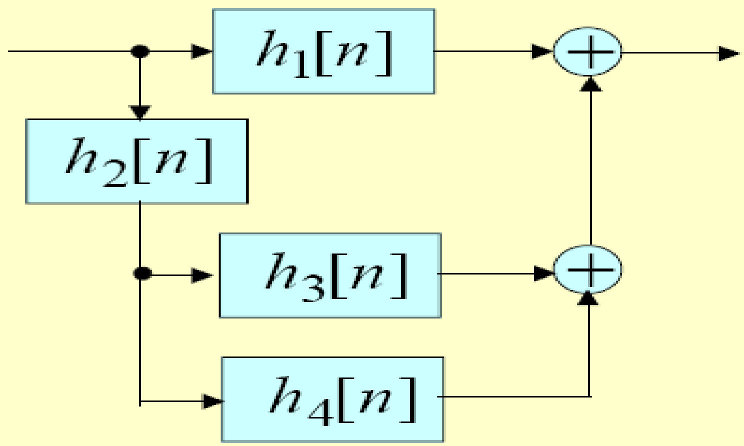
举例：并联系统

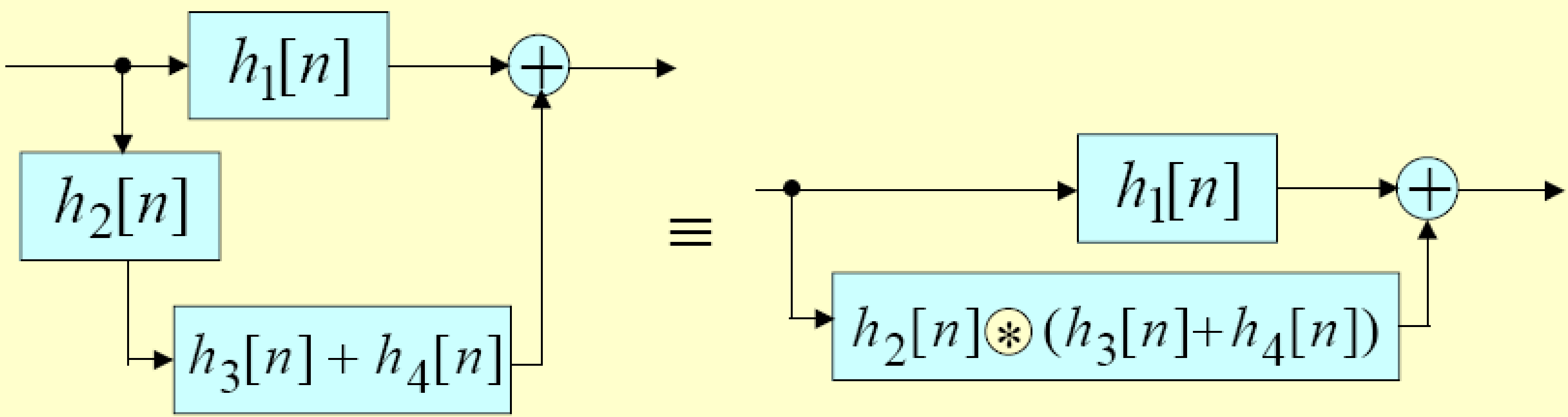
$$h_1[n] = \delta[n] + 0.5\delta[n-1],$$

$$h_2[n] = 0.5\delta[n] - 0.25\delta[n-1],$$

$$h_3[n] = 2\delta[n],$$

$$h_4[n] = -2(0.5)^n \mu[n]$$





$$h[n] = \delta[n]$$

- **2.3.2　系统的稳定性和因果性**

（**The Stability & Causality of System**）

1.　稳定系统（Stable System）：

①对于一个有界的输入 $x(n)$，产生有界输出 $y(n)$ 的系统。

即对于稳定系统，如果 $|x(n)|\le M$（**M** 是常数），则有：$|y(n)|<\infty$

例：判断系统 $y(n)=T[x(n)]=e^{x(n)}$ 的稳定性？

解：设 $|x(n)|\le M$，则：$|y(n)|=|e^{x(n)}|=e^{|M|}<\infty$，系统稳定。

②一个线性非移变系统稳定的充要条件是：其单位取样响应绝对可和，即：

$$S \stackrel{\Delta}{=} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h(k)| < \infty$$

证明：

a.充分性：设上式成立并设为一个有界输入序列，即： $|x(n)| \le M$

$$|y(n)| = \left|\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n-k)h(k)\right| \le \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x(n-k)||h(k)|$$

$$\le M \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| < \infty$$

$$\therefore |y(n)| < \infty$$

b.必要性：假设系统的单位取样响应不绝对可和，

即：$S \overset{\Delta}{=} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h(k)| = \infty$

定义一个有界的输入：
$$x(n) = \begin{cases} \dfrac{h^*(-n)}{|h(-n)|}, h(n) \neq 0 \\ 0, h(n) = 0 \end{cases}$$

式中 $h^*(n)$ 是 $h(n)$ 的复共轭，

$$\therefore y(0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(-k)h(k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{|h(k)|^2}{|h(k)|} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h(k)| = S$$

$\therefore y(0)$ **不是有界的。**

2. 因果系统（Causal System）：

① 输出的变化不会领先于输入的变化的系统。

即：系统的输出值 $y(n)$ 不取决于输入 $x(n)$ 的将来值，$y(n)$ 只与 $x(n)$ 的现在值及过去值 $x(n-1), x(n-2), \ldots$ 等有关，与将来值 $x(n+1), x(n+2), \ldots$ 无关。

例2.3.3： $y(n)=T[x(n)]=x(n-1)$ 是因果系统；

$y(n)=T[x(n)]=x(n+1)$ 是非因果系统。

②一个线性非移变系统为因果系统的充要条件为：

$h(n)\equiv 0, n<0$ ，应注意：系统的“稳定性”和“因果性”与系统的输入 $x(n)$ 无关，而取决于系统本身的结构 $h(n)$ 。

例2.3.4：请判断系统 $T[x(n)]=\sum_{k=n-n_0}^{n+n_0} x(k)$ 是否为：

①稳定系统，②因果系统，③线性系统，④非时变系统？

解：① **if** $|x(n)|\le M$ ，**then** $|T[x(n)]|\le \sum_{k=n-n_0}^{n+n_0} |x(k)| \le |(2n_0+1)|M$

则该系统为稳定系统。

②$\because T[x(n)]$取决于$x(n)$的将来值，该系统不是因果系统；

③ $\because T[ax_1(n)+bx_2(n)]=\sum_{k=n-n_0}^{n+n_0}[ax_1(k)+bx_2(k)]$

$$=a\sum_{k=n-n_0}^{n+n_0} x_1(k)+b\sum_{k=n-n_0}^{n+n_0} x_2(k)=aT[x_1(n)]+bT[x_2(n)]$$

则该系统为线性系统。

④ $T[x(n-m)]=\sum_{k=n-m-n_0}^{n-m+n_0} x(k)=y(n-m)$

则该系统为非移变系统。

非因果系统可由因果系统实现.

举例：因子为2的线性插值器.

$$y[n]=x_u[n]+\frac{1}{2}\left(x_u[n-1]+x_u[n+1]\right)$$

延迟1个样本输出，即令y(n-1)在n时刻输出.

$$y[n]=x_u[n-1]+\frac{1}{2}\left(x_u[n-2]+x_u[n]\right)$$

§2.4 线性常系数差分方程

(Linear Constant-coefficient Difference Equations）

- 2.4.1 函数序列的差分描述
- 2.4.2 线性常系数差分方程

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^{M} b_r x(n-r)$$

①线性非移变离散系统，输入和输出满足上述方程；

②上述方程描述的系统不一定是因果的，假定（除非另作说明）在一般情况下，上述方程描述一个因果系统。

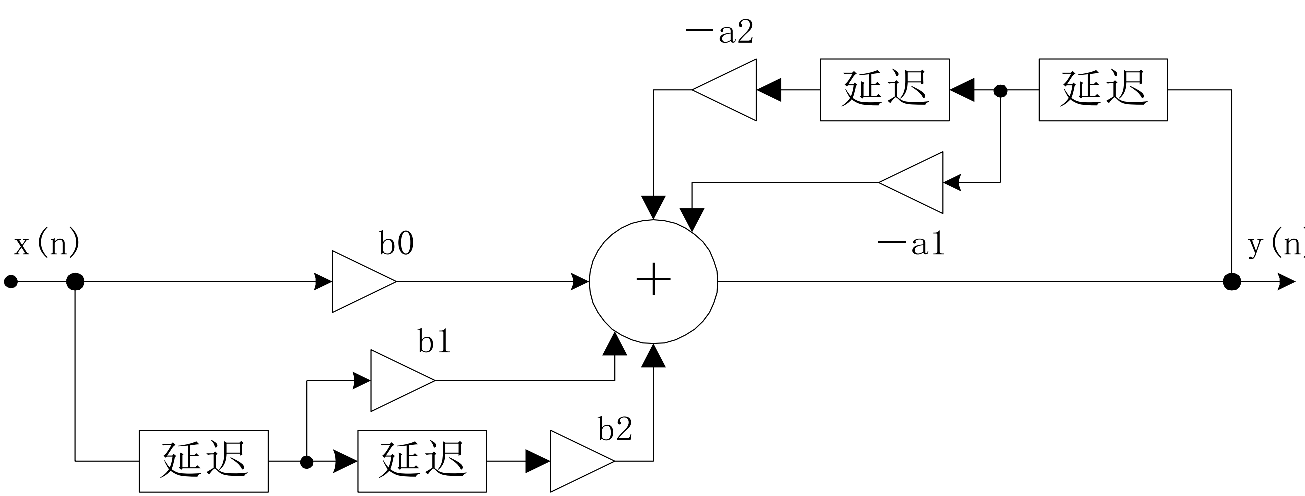
- **2.4.3 FIR系统和IIR系统**

（1）FIR：Finite Impulse Response(有限冲激响应)；

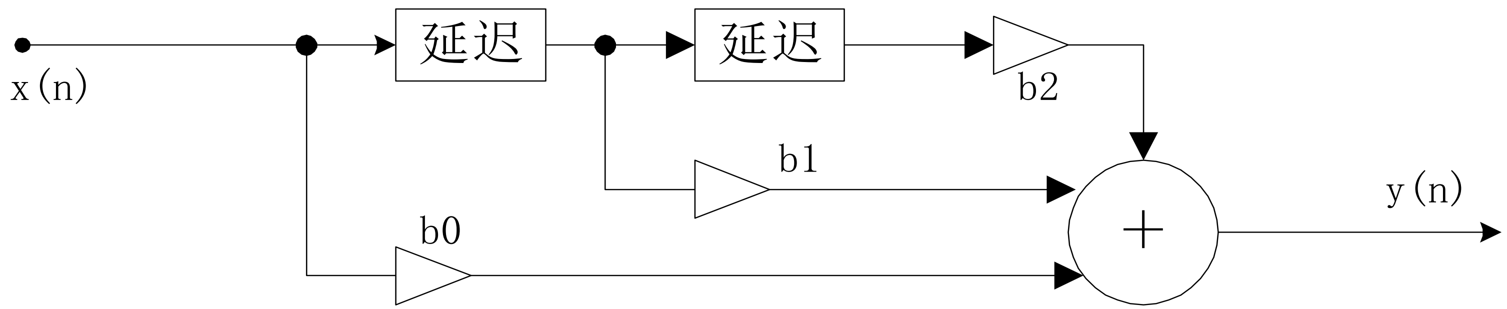
IIR：Infinite Impulse Response(无限冲激响应)；

（2）数字系统的表示：差分方程、框图或流图、系统函数。

（3）FIR和IIR系统：



（a）二阶IIR系统



（b）二阶FIR系统

例2.4.1：请写出上图所示系统(a)和(b)的差分方程。

解：二阶IIR系统：

$$y(n)=-a_1y(n-1)-a_2y(n-2)+b_0x(n)+b_1x(n-1)+b_2x(n-2)$$

二阶FIR系统： $y(n)=b_0x(n)+b_1x(n-1)+b_2x(n-2)$

举例：一阶差分系统实现积分运算

$$y(t) = \int_0^t x(\tau)d\tau$$

$$t = nT$$

$$y(nT) = \int_0^{nT} x(\tau)d\tau \quad y(nT) = y((n-1)T) + \int_{(n-1)T}^{nT} x(\tau)d\tau$$

$$\int_{(n-1)T}^{nT} x(\tau)d\tau = \frac{T}{2}\{x((n-1)T) + x(nT)\}$$

$$y(nT) = y((n-1)T) + \frac{T}{2}\{x((n-1)T) + x(nT)\}$$

$$\Rightarrow \quad y[n] = y[n-1] + \frac{T}{2}\{x[n] + x[n-1]\}$$

§2.5 离散时间信号和系统的频域表示
(The Frequency Prosperties of The Discrete Time Signal & System)

- **2.5.1 离散时间信号的Fourier变换**

1. 连续时间信号的Fourier变换为：

$$\begin{cases} X(j\Omega) = FT[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\Omega t} dt \\ x(t) = IFT[X(j\Omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega \end{cases}$$

式中，表示角频率（rad/s）。

2. 离散时间信号的Fourier变换定义为：

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

在物理意义上， $X(e^{j\omega})$ **表示序列** $x(n)$ **的频谱，** ω **为数字域频率（rad）。**

注意:

a.一般情况下， $X(e^{j\omega})$ **为复数，故：**

$$X(e^{j\omega}) = X_R(e^{j\omega}) + jX_I(e^{j\omega})$$

$$X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})| e^{j\arg[X(e^{j\omega})]} = X(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

$$X(\omega)=|X(e^{j\omega})|=\sqrt{X_R^2(e^{j\omega})+X_I^2(e^{j\omega})}$$

应注意取值范围

$$\varphi(\omega)=\arg[X(e^{j\omega})]=arctg[\frac{X_I(e^{j\omega})}{X_R(e^{j\omega})}]$$

b. $X(e^{j\omega})$ **是以** 2π **为周期的** ω **的连续函数；而** $X(j\Omega)$ **是角频率** Ω **的非周期连续函数；** $\because X(e^{j(\omega+2\pi)})=X(e^{j\omega})$

$$X(e^{j(\omega_o+2\pi k)})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]e^{-j(\omega_o+2\pi k)n}$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]e^{-j\omega_o n}e^{-j2\pi kn}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]e^{-j\omega_o n}=X(e^{j\omega_o})$$

c.在区间 $0\le\omega\le 2\pi$ **内,当** $x(n)$ **为实序列时，**

$X(e^{j\omega})$ **的幅值** $|X(e^{j\omega})|$ **是偶对称函数，**

相位 $\arg[X(e^{j\omega})]$ **是奇对称函数。**

证明：在 $[0,2\pi]$ 范围内，

如果 $|X(e^{j\omega})|$ 关于 π 偶对称，所以：$|X(e^{j\omega})|=|X(e^{j(2\pi-\omega)})|$

如果 $\arg[X(e^{j\omega})]$ 关于 π 奇对称

所以：$\arg[X(e^{j\omega})]=-\arg[X(e^{j(2\pi-\omega)})]$.

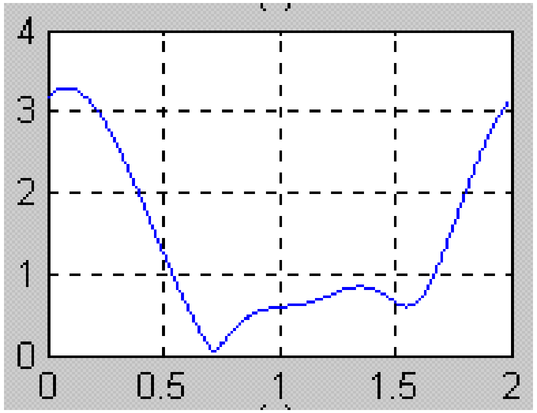
$$\because X^*(e^{j\omega})=[\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\omega n}]^* = \sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{j\omega n} = X(e^{-j\omega})$$

$$\therefore X_R(e^{j\omega})-jX_I(e^{j\omega})=X_R(e^{-j\omega})+jX_I(e^{-j\omega})$$

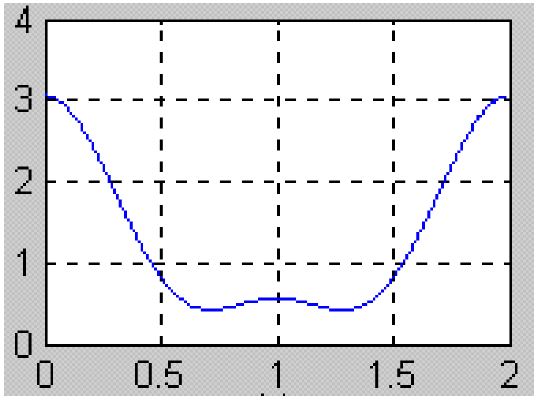
即：$X_R(e^{j\omega})$ 偶对称，$X_I(e^{j\omega})$ 奇对称。

所以 $x(n)$ 为实序列时，$[0,2\pi]$ 或 $[0,\pi]$ 内的 $X(e^{j\omega})$ 即代表其频率特性。

c.当$x(n)$不为实序列时，上述结论不正确，如下图所示。



(a)复序列的幅频特性



(b)实序列的幅频特性

图(a)的序列为：

$$x(n)=\begin{cases}1,1,0.75+j0.5,0.25+j0.3,0.0625; n=0,1,2,3,4\\ 0; others\end{cases}$$

图(b)的序列为：

$$x(n)=\begin{cases}1,1,0.75,0.25,0.0625; n=0,1,2,3,4\\ 0; others\end{cases}$$

e．$x(n)$ **的FT存在的条件：**

1、绝对可和： $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x(n)|<\infty$

2、平方可和： $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|x(n)|^2<\infty$

3、复指数信号和正弦信号 $e^{j\alpha n}$, $\cos(\omega_0 n)$: $\delta(\omega)$

f. $x(n)$ **的DTFT** $X(e^{j\omega})$ **代表信号的频域特性。**

g. 从序列Fourier变换的公式可知：

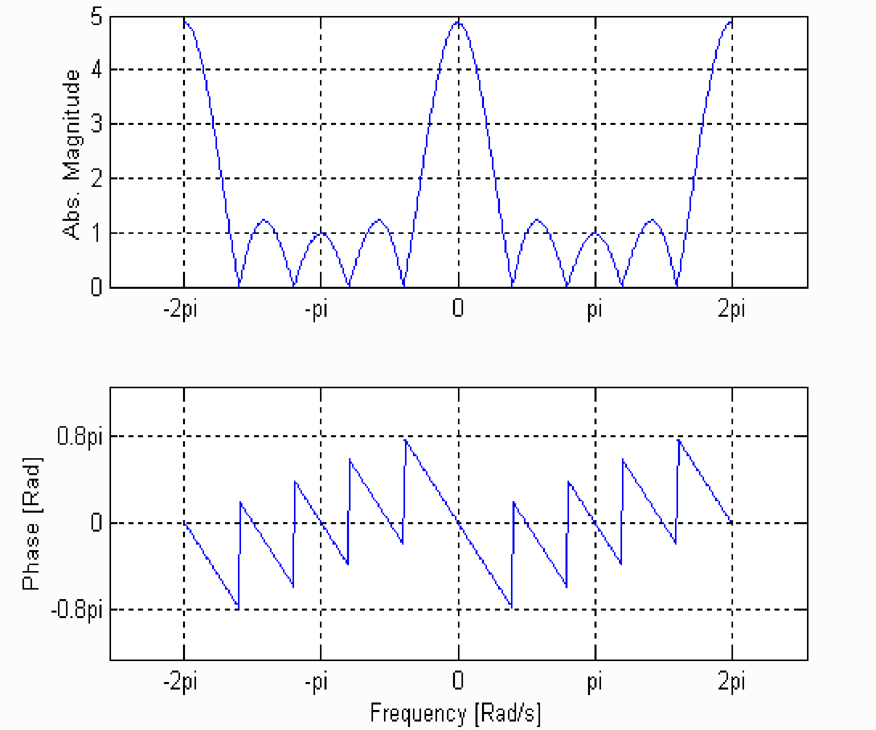
离散信号，即可用时域形式 $x(n)$ **表示，也可用频域形式** $X(e^{j\omega})$ **表示。**

例2.5.1：求具有下列单位取样响应的系统频率响应。

$$h(n)=\begin{cases}1, 0\le n\le N-1\\ 0, \quad others\end{cases}$$

解：右图画出的是 $N=5$ 时，

$H(e^{j\omega})$ 的幅度和相位特性。



$$H(e^{j\omega})=\sum_{n=0}^{N-1}e^{-j\omega n}=\frac{1-e^{-j\omega N}}{1-e^{-j\omega}}$$

$$=\frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)}e^{-j(N-1)\omega/2}$$

注：

$$\sum_{n=0}^{N-1}\alpha^n=\frac{1-\alpha^N}{1-\alpha}$$

- ## 2.5.2 离散时间信号的Fourier变换的性质

	Type of Property	Sequence	Discrete-Time Fourier Transform
		$g[n]$ $h[n]$	$G(e^{j\omega})$ $H(e^{j\omega})$
线性	Linearity	$\alpha g[n]+\beta h[n]$	$\alpha G(e^{j\omega})+\beta H(e^{j\omega})$
序列的时移	Time-shifting	$g[n-n_o]$	$e^{-j\omega n_o}G(e^{j\omega})$
	Frequency-shifting	$e^{j\omega_o n}g[n]$	$G\left(e^{j(\omega-\omega_o)}\right)$
	Differentiation in frequency	$ng[n]$	$j\dfrac{dG(e^{j\omega})}{d\omega}$
	Convolution	$g[n]\circledast h[n]$	$G(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$
	Modulation	$g[n]h[n]$	$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}G(e^{j\theta})H(e^{j(\omega-\theta)})\,d\theta$
	Parseval's relation	$\sum_{n=-\infty}^{\infty}g[n]h^*[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}G(e^{j\omega})H^*(e^{j\omega})\,d\omega$	

举例：计算DTFT

$$y[n]=(n+1)\alpha^{n}\mu[n],\ |\alpha|<1$$

$$x[n]=\alpha^{n}\mu[n],\ |\alpha|<1 \Rightarrow X(e^{j\omega})=\frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}}$$

$$nx[n]$$

$$\Downarrow$$

$$j\frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}=j\frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}}\right)=\frac{\alpha e^{-j\omega}}{(1-\alpha e^{-j\omega})^{2}}$$

$$Y(e^{j\omega})=\frac{\alpha e^{-j\omega}}{(1-\alpha e^{-j\omega})^{2}}+\frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}}=\frac{1}{(1-\alpha e^{-j\omega})^{2}}$$

举例：求数字信号的能量---根据 Parseval's

$$\mathrm{E}_g = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| g[n] \right|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| G(e^{j\omega}) \right|^2 d\omega$$

energy density spectrum

$$S_{gg}(\omega) = \left| G(e^{j\omega}) \right|^2$$

计算 $h_{LP}[n]$ **能量**.

$$h_{LP}[n] = \frac{\sin \omega_c n}{\pi n}, \quad -\infty < n < \infty$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| h_{LP}[n] \right|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| H_{LP}(e^{j\omega}) \right|^2 d\omega$$

$$H_{LP}(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & 0 \le |\omega| \le \omega_c \\ 0, & \omega_c < |\omega| \le \pi \end{cases}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h_{LP}[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} d\omega = \frac{\omega_c}{\pi} < \infty$$

$h_{LP}[n]$ 是有限能量序列.

9．序列的FT的对称性：

①定义： $x[n]=x^*[-n]$ 共轭对称序列

$x[n]=-x^*[-n]$ 共轭反对称序列

注意：

a.变换区间 $-\infty<n<+\infty$

b.以 原点 为对称点

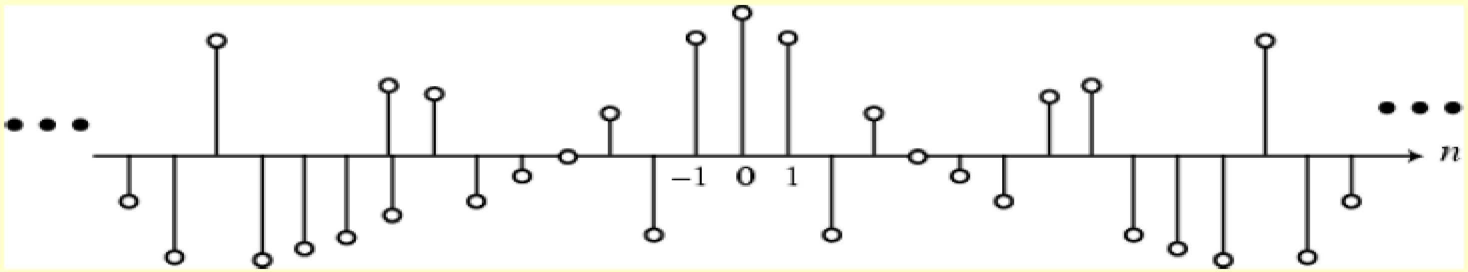
c.频域定义： $X_e(e^{j\omega})=X_e^*(e^{-j\omega})$ 共轭对称函数

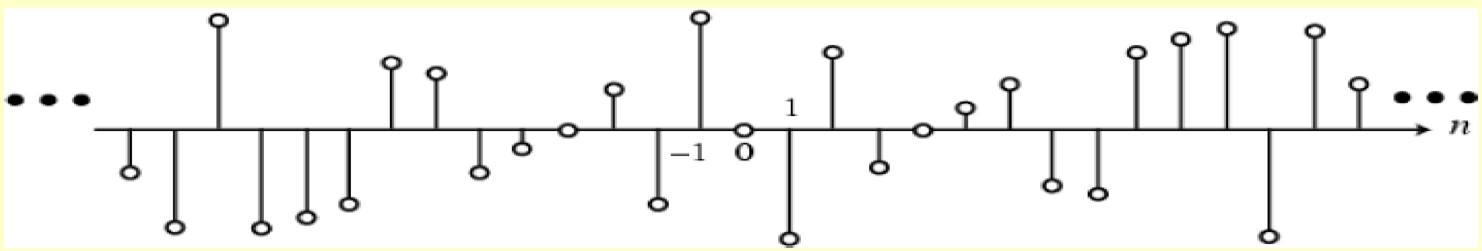
$X_o(e^{j\omega})=-X_o^*(e^{-j\omega})$ 共轭反对称函数

d. $x_e(n)=x_{er}(n)+jx_{ei}(n)$ $x_o(n)=x_{or}(n)+jx_{oi}(n)$

$x_{er}(n),x_{oi}(n)$ 是偶序列，$x_{or}(n),x_{ei}(n)$ 是奇序列。

如果x(n) 共轭对称序列是实序列，x(n)称 偶序列。
如果x(n) 反共轭对称序列是实序列， x(n)称 奇序列。





任意数字序列x(n):

$$x[n]=x_{cs}[n]+x_{ca}[n]$$

$$x_{cs}[n]=\frac{1}{2}\left(x[n]+x^*[-n]\right)$$

$$x_{ca}[n]=\frac{1}{2}\left(x[n]-x^*[-n]\right)$$

举例：求数字信号g(n)的共轭对称序列和共轭反对称序列.

$$\{g[n]\} = \{0,\ 1+j4,\ -2+j3,\ \underset{\uparrow}{4-j2},\ -5-j6,\ -j2,\ 3\}$$

$$\{g^*[n]\} = \{0,\ 1-j4,\ -2-j3,\ \underset{\uparrow}{4+j2},\ -5+j6,\ j2,\ 3\}$$

$$\{g^*[-n]\} = \{3,\ j2,\ -5+j6,\ \underset{\uparrow}{4+j2},\ -2-j3,\ 1-j4,\ 0\}$$

$$\{g_{cs}[n]\} = \frac{1}{2}\{g[n] + g^*[-n]\}$$

$$= \{1.5,\ 0.5+j3,\ -3.5+j4.5,\ \underset{\uparrow}{4},\ -3.5-j4.5,\ 0.5-j3,\ 1.5\}$$

$$\{g_{ca}[n]\} = \frac{1}{2}\{g[n] - g^*[-n]\}$$

$$= \{-1.5,\ 0.5+j,\ 1.5-j1.5,\ \underset{\uparrow}{-j2},\ -1.5-j1.5,\ -0.5+j,\ 1.5\}$$

$$g_{cs}[n] = g_{cs}^*[-n] \qquad g_{ca}[n] = -g_{ca}^*[-n]$$

②序列分解：

a. $x(n) = x_e(n) + x_o(n)$ **(任意长)**

其中：$x_e(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x^*(-n)]$ $x_o(n) = \frac{1}{2}[x(n) - x^*(-n)]$

b. $x(n) = x_r(n) + jx_i(n)$

其中：$x_r(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x^*(n)]$ $x_i(n) = \frac{1}{2}[x(n) - x^*(n)]$

c. $X(e^{j\omega}) = X_e(e^{j\omega}) + X_o(e^{j\omega})$

其中：$X_e(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}[X(e^{j\omega}) + X^*(e^{-j\omega})]$

$$X_o(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}[X(e^{j\omega}) - X^*(e^{-j\omega})]$$

$$X(e^{j\omega}) = X_R(e^{j\omega}) + jX_I(e^{j\omega})$$

例2.5.2：已知序列 $x(n)=u(n)$，请画出$x_o(n)$和 $x_e(n)$的图形？

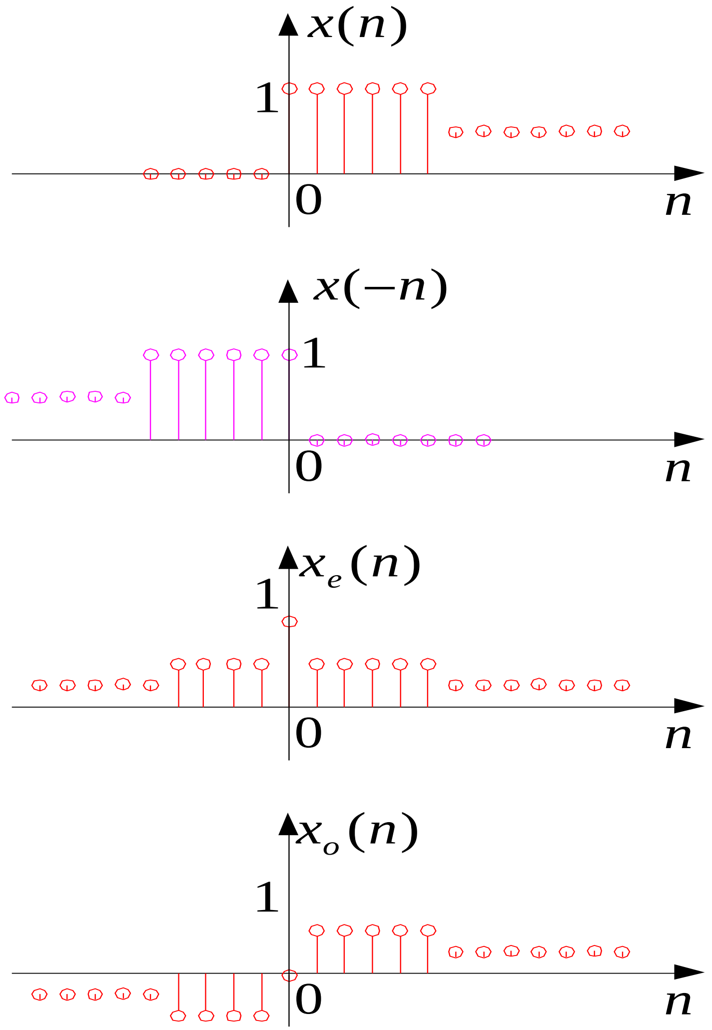
解：

当 $x(n)$为实序列时，有：

$$x_o(n)=\frac{1}{2}[x(n)-x(-n)]$$

$$x_e(n)=\frac{1}{2}[x(n)+x(-n)]$$

其图形如右图所示。



③FT的共轭对称性：

a. $x(n)=x_r(n)+jx_i(n)$

$$X(e^{j\omega})=X_e(e^{j\omega})+X_o(e^{j\omega})$$

$$FT[x_r(n)]=X_e(e^{j\omega})$$

$$FT[jx_i(n)]=X_o(e^{j\omega})$$

证明：

$$\because x_r(n)=\frac{1}{2}[x(n)+x^*(n)]$$

$$\therefore FT[x_r(n)]=\frac{1}{2}[X(e^{j\omega})+X^*(e^{-jw})]=X_e(e^{j\omega})$$

b. $x(n)=x_e(n)+x_o(n)$

$$X(e^{j\omega})=X_R(e^{j\omega})+jX_I(e^{j\omega})$$

$$FT[x_e(n)]=X_R(e^{j\omega})$$

$$FT[x_o(n)]=jX_I(e^{j\omega})$$

证明：

$$\because x_o(n)=\frac{1}{2}[x(n)-x^*(-n)]$$

$$\therefore FT[x_o(n)]=\frac{1}{2}[X(e^{j\omega})-X^*(e^{j\omega})]=jX_I(e^{j\omega})$$

其中 $FT[x^*(-n)]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x^*(-n)e^{-j\omega n}=[\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(-n)e^{j\omega n}]^*$

$$\underline{\underline{m=-n}}[\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)e^{-j\omega m}]^*=X^*(e^{j\omega})$$

c. 当$x(n)$为实序列（任意长），且$X(e^{j\omega})=FT[x(n)]$则：

①$X(e^{j\omega})$ 共轭对称，即： $X(e^{j\omega})=X^*(e^{-j\omega})$

$\because x_i(n)=0 \qquad \therefore FT[jx_i(n)]=X_o(e^{j\omega})=0$

② 如$x(n)$ 为实偶序列，则$X(e^{j\omega})$为实偶函数，即：

若 $x(n)=x(-n)$，则 $X(e^{j\omega})=X(e^{-j\omega})$

$\because x_o(n)=0 \qquad x_i(n)=0$

$\therefore FT[x_o(n)]=jX_I(e^{j\omega})=0$

$FT[jx_i(n)]=X_o(e^{j\omega})=0$

③ 如$x(n)$ 为实奇序列，则 $X(e^{j\omega})$为纯虚奇对称函数，

即：若 $x(n)=x(-n)$ ，则 $X(e^{j\omega})=-X(e^{-j\omega})$

④ 如果$x(n)$ 为实因果序列，$x(n)=x_e(n)+x_o(n)$

$$x(n)=\begin{cases}2x_e(n), n>0\\ x_e(n), n=0\\ 0, n<0\end{cases}\qquad x(n)=\begin{cases}2x_o(n), n>0\\ x(0), n=0\\ 0, n<0\end{cases}$$

$$x_e(n)=\begin{cases}x(0), n=0\\ \dfrac{1}{2}x(n), n>0\\ \dfrac{1}{2}x(-n), n<0\end{cases}\qquad x_o(n)=\begin{cases}0, n=0\\ \dfrac{1}{2}x(n), n>0\\ -\dfrac{1}{2}x(-n), n<0\end{cases}$$

注：$x(n)\equiv 0, n<0$

- **2.5.3 离散时间系统的频率响应**

1. 定义：

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-j\omega n}$$，其中 $h(n)$ 是系统的单位取样响应

$$H(e^{j\omega}) = H_R(e^{j\omega}) + jH_I(e^{j\omega})$$

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{j\arg[H(e^{j\omega})]} = H(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

$$H(\omega) = |H(e^{j\omega})| = \sqrt{H_R^2(e^{j\omega}) + H_I^2(e^{j\omega})}$$ 为系统的幅度响应

$$\varphi(\omega) = \arg[H(e^{j\omega})] = arctg[\frac{H_I(e^{j\omega})}{H_R(e^{j\omega})}]$$ 为系统的相位响应

2. 正弦信号或复指数信号通过线性非移变系统：

设 $x(n)=e^{j\omega_0 n}$，则有：

$$\because y(n)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}h(m)x(n-m)$$

$$=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}h(m)e^{j\omega_0(n-m)}$$

$$=e^{j\omega_0 n}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}h(m)e^{-j\omega_0 m}$$

$$\therefore y(n)=e^{j\omega_0 n}H(e^{j\omega_0})$$

其中$H(e^{j\omega 0})$是系统在 ω_0 处的频率响应。

设 $x(n) = A\cos(\omega_0 n + \phi)$，

如为 $h(n)$ 实序列，则系统对 $x(n)$ 的响应为：

$$x(n) = A\cos(\omega_0 n + \phi) = \frac{A}{2}(e^{j(\omega_0 n+\phi)} + e^{-j(\omega_0 n+\phi)})$$
$$= \frac{A}{2}(e^{j\phi} \cdot e^{j\omega_0 n} + e^{-j\phi} \cdot e^{-j\omega_0 n})$$

$$y(n) = \frac{A}{2}[e^{j\phi} \cdot e^{j\omega_0 n} H(e^{j\omega_0}) + e^{-j\phi} \cdot e^{-j\omega_0 n} H(e^{-j\omega_0})]$$
$$= \frac{A}{2}[e^{j\phi} \cdot e^{j\omega_0 n} H(e^{j\omega_0}) + e^{-j\phi} \cdot e^{-j\omega_0 n} H^*(e^{j\omega_0})]$$

当 $h(n)$ 为实序列时，有：$H(e^{-j\omega_0}) = H^*(e^{j\omega_0})$

$$\therefore y(n) = A\,|H(e^{j\omega_0})|\cos(\omega_0 n + \phi + \theta)$$

其中，$\theta = \arg[H(e^{j\omega_0})]$是系统在 ω_0 处的相位响应。

例2.5.3：求一个因果的线性非移变系统，其系统的频率响应为：$H(e^{j\omega})=\dfrac{e^{-j\omega}+\beta}{1-\beta\cdot e^{-j\omega}}$ ，$\beta<1$ 。求系统对下列输入信号的响应：$x(n)=\cos(\frac{\pi}{2}n+\frac{\pi}{4})$ 。

解：该系统对输入 $x(n)=\cos(\frac{\pi}{2}n+\frac{\pi}{4})$ 的响应为：

$$y(n)=A\,|H(e^{j\omega_0})|\cos(\omega_0 n+\phi+\theta)$$

$$y(n)=|H(e^{j\frac{\pi}{2}})|\cdot\cos(\frac{\pi}{2}n+\frac{\pi}{4}+\theta)$$

$$H(e^{j\frac{\pi}{2}})=\frac{\beta-j}{1+j\beta}=-j$$

$$|H(e^{j\frac{\pi}{2}})|=1 \qquad \theta=-\frac{\pi}{2}$$

$$\therefore\ y(n)=\cos(\frac{\pi}{2}n-\frac{\pi}{4})$$