第三章 离散傅里叶变换

（Discrete Fourier Transform）

主要内容：

§3.1 引言

§3.2 离散傅里叶级数及其性质

§3.3 离散傅里叶变换及其性质

§3.4 利用循环卷积计算线性卷积

§3.5 频率取样

§3.6 快速傅里叶变换

§3.7 FFT应用

§3.1 引言(Introduction)

3.1.1 四种傅里叶变换

时间函数	频域函数
连续和非周期	非周期和连续
连续和周期 (T_p)	非周期和离散 ($\Omega_0=\frac{2\pi}{T_p}$)
离散 (T)和非周期	周期 ($\Omega_s=\frac{2\pi}{T}$)和连续
离散 (T)和周期	周期 ($\Omega_0=\frac{2\pi}{T}$)和离散

① **连续时间傅里叶变换(CTFT)：连续时间,连续频率的傅里叶变换；**

② **傅里叶级数(FS)：连续时间,离散频率的傅里叶变换；**

③ 序列的离散时间傅里叶变换(DTFT):离散时间,连续频率的傅里叶变换;

④ 离散傅里叶变换(DFT):离散时间,离散频率 的 傅 里叶变换。

3.1.2 傅里叶变换回顾

《信号与线性系统》：连续时间信号的傅里叶变换(CTFT)和傅里叶级数(FS)；本教材第二章：离散时间信号的傅里叶变换(DTFT)。

共同的缺点：前三种变换至少总有一个域不是离散的，计算机不能直接计算;

希望的变换：不仅在时间域上离散，在频率域上也离散。

3.1.3 连续时间信号的傅里叶级数

任意**周期为** T_0 的信号 $x_a(t)$ 均可表示为：

$$x_a(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_k e^{j\frac{2\pi}{T_0}kt}$$

$$x_k = \frac{1}{T_0}\int_{\alpha}^{\alpha+T_0} x_a(t) e^{-j\frac{2\pi}{T_0}kt} dt$$

其中：$\Omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ 为**基波角频率**，$f_0 = \frac{1}{T_0}$ 为**基频**，

$f_k = kf_0$ 是 k 次谐波（离散非周期性频谱）

其中：$\alpha = 0$ 或 $\alpha = -\frac{T_0}{2}$

§3.2 离散傅立叶级数及其性质

（Discrete Fourier Series）

3.2.1 离散傅里叶级数（DFS）

周期序列：

- **性质1** $\tilde{x}(n) = \tilde{x}(n + kN)$
- **性质2** $\tilde{x}(n) = x((n))_N$
- **性质3** $\tilde{x}(n) = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} x(n - rN)$

其中：k、r - 任意整数,N - 周期；

其ZT不收敛，不能进ZT。

对周期为N的复指数序列或正弦序列：

$e_1(n) = e^{j\frac{2\pi}{N}n}$ **—基波** $e_k(n) = e^{j\frac{2\pi}{N}nk} = e^{j\frac{2\pi}{N}(k+mN)n} = e_{k+mN}(n)$

—k次谐波。

在《信号与线性系统》中，用**傅里叶级数**表示**连续时间**周期信号。

对应地，可用**离散傅里叶级数**表示**离散周期序列**，即用**周期为N的复指数序列**来表示：

$$\tilde{x}(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}(k)e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \qquad \text{...(3.2.1a)}$$

两边 $\times e^{-j\frac{2\pi}{N}nr}$ 并从n=0～N-1求和得：

$$\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nr}=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}(k)e^{j\frac{2\pi}{N}(k-r)n}$$

(交换右边求和次序)

$$=\sum_{k=0}^{N-1}X(k)\left[\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}e^{j\frac{2\pi}{N}(k-r)n}\right]$$

$$=\tilde{X}(r)$$

式中：$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}e^{j\frac{2\pi}{N}(k-r)n}=\begin{cases}1, k=r\\0, k\neq r\end{cases}$

用k置换r得： $$\tilde{X}(k)=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$ **…(3.2.1b)**

注：①

$$\sum_{n=0}^{N-1}a^n=\frac{1-a^N}{1-a}$$

②

$$\sum_{n=0}^{N-1}e^{j\frac{2\pi}{N}(k-r)n}=\begin{cases}\sum_{n=0}^{N-1}e^{j0}=N, & k=r\\ \dfrac{1-e^{j\frac{2\pi}{N}(k-r)N}}{1-e^{j\frac{2\pi}{N}(k-r)}}=\dfrac{1-e^{j2\pi(k-r)}}{1-e^{j\frac{2\pi}{N}(k-r)}}=0, k\neq r\end{cases}$$

设 $W_N=e^{-j\frac{2\pi}{N}}$ **(旋转因子)，可得周期序列的傅里叶级数变换对：**

$$\tilde{x}(n)=IDFS[\tilde{X}(k)]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}(k)W_N^{-kn},-\infty<n<+\infty$$

…(3.2.1c)

$$\tilde{X}(k)=DFS[\tilde{x}(n)]=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)W_N^{kn},-\infty<k<+\infty$$

…(3.2.1d)

注意：

①n、k均为离散变量，n当作**时间**，k当作**频率**；

上式为 **频域<->时域** 之间的变换。

②从上两式可知：离散周期序列既可用 $\tilde{x}(n)$ 表示，

也可用 $\tilde{X}(k)$ 表示。

③**周期性**时间信号的**频谱是离散的**，

离散时间信号的频谱是**周期性**的；

周期性离散时间信号的频谱为**离散周期性**的。

注意：

① $\tilde{x}(n)$， $\tilde{X}(k)$ **都是离散和周期性的，且周期均为N；**

②DFS只取k次谐波分量中N个谐波分量；

③n为离散时间变量，理解为nT；k是离散频率变量，理解为 $\Delta\omega k$ **；**

④DFS、IDFS具有唯一性。

3.2.2 离散傅里叶级数的性质
(The Properties of the Discrete Fourier Series)

1. 线性:

设周期序列 $\tilde{x}_1(n)$ 和 $\tilde{x}_2(n)$ 的周期均为N，且:

$\tilde{X}_1(k) = DFS[\tilde{x}_1(n)]$ ， $\tilde{X}_2(k) = DFS[\tilde{x}_2(n)]$;

如果: $\tilde{x}_3(n) = a\tilde{x}_1(n) + b\tilde{x}_2(n)$ (a,b均为常数)

则有:

$$\tilde{X}_3(n) = DFS[a\tilde{x}_1(n) + b\tilde{x}_2(n)] = a\tilde{X}_1(k) + b\tilde{X}_2(k)$$

2. 周期序列的移位：

设 $$DFS[\tilde{x}(n)] = \tilde{X}(k)$$

则：$$DFS[\tilde{x}(n-m)] = W_N^{mk}\tilde{X}(k)$$

$$IDFS[\tilde{X}(k-l)] = W_N^{-nl}\tilde{x}(n)$$ （m,l为常数）。

备注:

上面性质的推导请同学参考教材自己推导。

3.　周期卷积（Periodic Convolution）：

设 $\tilde{x}_1(n)$ **和** $\tilde{x}_2(n)$ **都为周期序列，周期都为N，且：**

$$\tilde{X}_1(k)=\sum_{m=0}^{N-1}\tilde{x}_1(m)W_N^{km}$$ ，

$$\tilde{X}_2(k)=\sum_{r=0}^{N-1}\tilde{x}_2(r)W_N^{kr}$$ ，

$$\tilde{Y}(k)=\tilde{X}_1(k)\tilde{X}_2(k)$$ ，**则：**

$$\tilde{y}(n)=IDFS[\tilde{X}_1(k)\tilde{X}_2(k)]=\sum_{m=0}^{N-1}\tilde{x}_1(m)\tilde{x}_2(n-m)$$

证明：

$$\tilde{y}(n) = IDFS[\tilde{X}_1(k)\tilde{X}_2(k)] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}_1(k)\tilde{X}_2(k)W_N^{-kn}$$

$$= \sum_{m=0}^{N-1}\tilde{x}_1(m)\sum_{r=0}^{N-1}\tilde{x}_2(r)[\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}W_N^{-k(n-m-r)}]$$

$$= \sum_{m=0}^{N-1}\tilde{x}_1(m)\tilde{x}_2(n-m+lN)$$

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}W_N^{-k(n-m-r)} = \begin{cases} 1, r = (n-m)+lN \\ 0, r \neq (n-m)+lN \end{cases}, l : \text{int}$$

$$= \sum_{m=0}^{N-1}\tilde{x}_1(m)\tilde{x}_2(n-m)$$

$$= \tilde{x}_1(n) * \tilde{x}_2(n)$$

结论：

①周期卷积的操作步骤与非周期序列的线性卷积相同，不同的是周期卷积仅在一个周期内求和；

②周期卷积中 $\tilde{x}_1(m), \tilde{x}_2(n-m)$ 对m是周期性的，周期为N； $\tilde{y}(n)$ 的周期为N；

③周期卷积满足交换律。

同理可得：

如果： $\tilde{y}(n) = \tilde{x}_1(n)\tilde{x}_2(n)$

则有： $$\tilde{Y}(k) = DFS[\tilde{x}_1(n)\tilde{x}_2(n)] = \frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1}\tilde{X}_1(l)\tilde{X}_2(k-l) = \frac{1}{N}\tilde{X}_1(k) * \tilde{X}_2(k)$$

§3.3 离散傅立叶变换及其性质 (DFT and Its Properties)

3.2.1 离散Fourier变换

因果有限长序列的Fourier变换称为离散Fourier变换（DFT）。定义方法：由DFS导出DFT。

1. 将有限长序列 $x(n)$ $0 \le n \le N-1$ 延拓成周期序列 $\tilde{x}(n)$;
2. 求周期序列 $\tilde{x}(n)$ 的DFS得 $\tilde{X}(k)$;
3. 取出 $\tilde{X}(k)$ 的一个周期作为 $x(n)$ 的DFT。

$$X(k) = \tilde{X}(k) R_N(k)$$

- 因此，由DFS得出 $x[n]$ $0 \le n \le N-1$ 的N点DFT为：

$$x(n) = IDFT[X(k)] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn} = \begin{cases} \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-kn}, 0 \le n \le N-1 \\ 0, others \end{cases} \quad \text{. . . (3.3.1a)}$$

$$X(k) = DFT[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \begin{cases} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn}, 0 \le k \le N-1 \\ 0, others \end{cases} \quad \text{. . . (3.3.1b)}$$

注意:DFT运算中，符号 $((n))_N$ 表示n对模N的余数，若以整数 k 代表商，n_0 代表余数； 即：$n = kN + n_0$，其中k为整数。

- 由DTFT $X(e^{j\omega})$ 得出N点DFT $X[k]$ 为：

对 $X(e^{j\omega})$ 在 $0 \le \omega \le 2\pi$ 等角距取样N个角频率 $\omega_k = 2\pi k / N$ $0 \le k \le N-1$

$$X[k] = X(e^{j\omega})\Big|_{\omega = 2\pi k/N} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi kn}{N}}, \quad 0 \le k \le N-1$$

注意：

① $x(n), X(k)$ 均为有限长，长度一样，取值范围均为0,1,...,N-1（有限长序列的DFT仍为有限长序列）；

② n为离散时间变量，理解为nT，k为离散频率变量，理解为$\Delta\omega k$；

③ DFT与DFS无本质区别，DFT是DFS主值，DFT隐含周期性；

④ DFT具有唯一性；

⑤一般情况下，$X(k)$ 是一个复变量，可表示为：

$$X(k) = X_R(k) + jX_I(k) \quad \text{或} \quad X(k) = |X(k)| e^{j\theta(k)}$$

其中：$$|X(k)| = \sqrt{X_R^2(k) + X_I^2(k)} \qquad \theta(k) = arctg\frac{X_I(k)}{X_R(k)}$$

⑥旋转因子的性质：

a．对称性： $(W_N^k)^* = W_N^{N-k}$；

b．周期性： $W_N^{k+mN} = W_N^k$ ；

c．换底： $W_N^k = W_{mN}^{mk} = W_{N/2}^{k/2}$ ， $k/2, N/2$ 为整数；

d．几个特殊值：

$W_N^{kN} = 1$， $W_N^{N/2} = -1$， $W_N^{3N/4} = j$ ， $W_N^{N/4} = -j$ 。

⑦ $\frac{N}{2}, \frac{N}{4}$ 点的DFT为：

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N/2-1} x(n) W_{N/2}^{kn}, k = 0,1,2,\ldots, N/2 - 1$$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N/4-1} x(n) W_{N/4}^{kn}, k = 0,1,2,\ldots, N/4 - 1$$

⑧DFT与ZT的关系：

有限长序列x(n)的DFT系数X(k)可看作其ZT在单位圆上等角距取样的样本值，即： $X(k)=X(z)|_{z=W_N^{-k}}$ ；

$x(n)$ 的ZT： $X(z)=ZT[x(n)]=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)z^{-n}$ ；

$x(n)$ 的DFT： $X(k)=DFT[x(n)]=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{kn}$ 。

DFT与FT的关系：有限长序列x(n)的DFT系数X(k)可看作其FT在一个周期（0- 2π ）中等间距取样的样本值，取样间隔 $\Delta\omega=\frac{2\pi}{N}$，即： $X(k)=X(e^{j\omega})|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k}=X(e^{j\frac{2\pi}{N}k})$

⑨均可进行计算机处理。

⑩ 用矩阵计算N点DFT:

$$X[k]=\sum_{n=0}^{N-1} x[n]W_N^{kn}, \quad 0\le k\le N-1 \qquad \mathbf{X}=\mathbf{D}_N\mathbf{x}$$

$$x[n]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]W_N^{-kn},\ 0\le n\le N-1 \qquad \mathbf{x}=\mathbf{D}_N^{-1}\mathbf{X}$$

$$\mathbf{X}=\begin{bmatrix}X[0] & X[1] & \cdots\cdots & X[N-1]\end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{x}=\begin{bmatrix}x[0] & x[1] & \cdots\cdots & x[N-1]\end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{D}_N=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & W_N^1 & W_N^2 & \cdots & W_N^{(N-1)}\\ 1 & W_N^2 & W_N^4 & \cdots & W_N^{2(N-1)}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & W_N^{(N-1)} & W_N^{2(N-1)} & \cdots & W_N^{(N-1)^2}\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}_N^{-1}=\frac{1}{N}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & W_N^{-1} & W_N^{-2} & \cdots & W_N^{-(N-1)}\\ 1 & W_N^{-2} & W_N^{-4} & \cdots & W_N^{-2(N-1)}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & W_N^{-(N-1)} & W_N^{-2(N-1)} & \cdots & W_N^{-(N-1)^2}\end{bmatrix}$$

例3.3.1：已知序列： $x(n)=\begin{cases}1, n=0,1,2\\ 0, others\end{cases}$ **；求其9点DFT?**

解：由DFT的定义，有：

$$X(k)=\sum_{n=0}^{8}x(n)W_9^{nk}=\sum_{n=0}^{2}W_9^{nk}$$

$$=\frac{1-W_9^{3k}}{1-W_9^{k}}=\frac{1-e^{-j\frac{6\pi}{9}k}}{1-e^{-j\frac{2\pi}{9}k}}=\frac{e^{-j\frac{3\pi}{9}k}(e^{j\frac{3\pi}{9}k}-e^{-j\frac{3\pi}{9}k})}{e^{-j\frac{\pi}{9}k}(e^{j\frac{\pi}{9}k}-e^{-j\frac{\pi}{9}k})}=e^{-j\frac{2\pi}{9}k}\frac{2j\sin(\frac{\pi}{3}k)}{2j\sin(\frac{\pi}{9}k)}$$

$$=\frac{\sin(\frac{\pi}{3}k)}{\sin(\frac{\pi}{9}k)}e^{-j\frac{2\pi}{9}k},\qquad k=0,1,2,\ldots 8$$

例3.3.2：已知 $X(k)=\begin{cases}5, & k=0\\ 2, & 1\le k\le 8\end{cases}$**，求** $X(k)$ **的9点DFT逆变换。**

解：由IDFT的定义，有：

$$x(n)=\frac{1}{9}\sum_{k=0}^{8}X(k)W_9^{-nk}=\frac{1}{9}[3+2\sum_{k=0}^{8}W_9^{-nk}]$$

$$=\frac{1}{3}+2\delta(n),\qquad n=0,1,\ldots,8$$

$$\sum_{k=0}^{8}W_9^{-nk}=\begin{cases}9, & n=0\\ 0, & n=1,\ldots 8\end{cases}$$

例3.3.3：已知序列：$x(n)=\begin{cases}1,0\le n\le 3\\ 0,others\end{cases}$ ， 求其4点DFT，

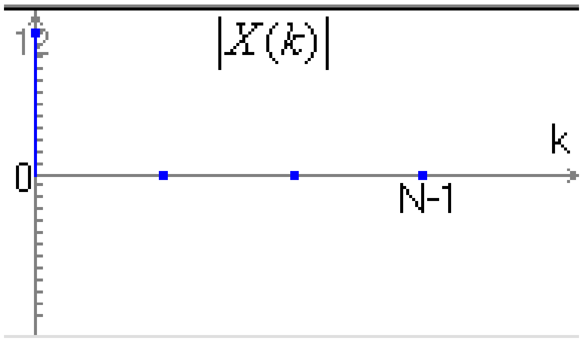
8点DFT，16点DFT？并画出 $|X(k)|\sim k$ 的曲线图。

解：$x(n)$ 的FT为：$X(e^{j\omega})=\dfrac{\sin(2\omega)}{\sin(\frac{\omega}{2})}e^{-j\frac{3}{2}\omega}$

4点DFT:

$$X(k)=X(e^{j\omega})|_{\omega=\frac{2\pi}{4}k}=\frac{\sin(\pi k)}{\sin(\frac{\pi}{4}k)}e^{-j\frac{3}{4}\pi k}$$

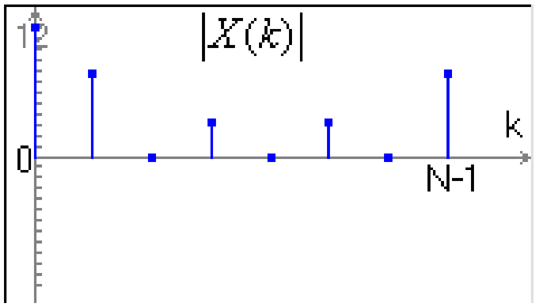
4点序列及DFT图形如下:



8点DFT:

$$X(k) = X(e^{j\omega})|_{\omega=\frac{2\pi}{8}k} = \frac{\sin(\frac{\pi}{2}k)}{\sin(\frac{\pi}{8}k)} e^{-j\frac{3}{8}\pi k}$$

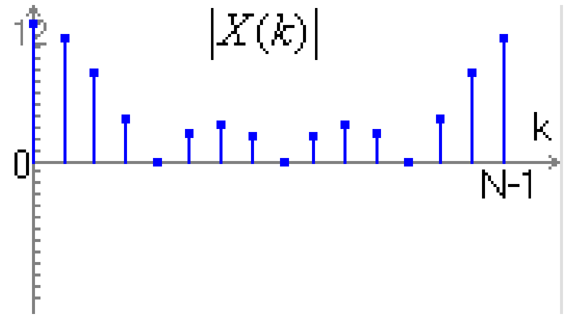
8点序列及DFT图形如下:



16点DFT:

$$X(k) = X(e^{j\omega})|_{\omega=\frac{2\pi}{16}k} = \frac{\sin(\frac{\pi}{4}k)}{\sin(\frac{\pi}{16}k)} e^{-j\frac{3}{16}\pi k}$$

16点序列及DFT图形如下:



3.3.2 离散傅立叶变换的性质

设 $x_1(n)$ **和** $x_2(n)$ **的长度均为N，且它们对应的DFT为：**

$$DFT[x_1(n)] = X_1(k) \qquad DFT[x_2(n)] = X_2(k)$$

1. 线性：设 $x_3(n) = ax_1(n) + bx_2(n)$**，a,b均为常数，则：**

$$X_3(k) = DFT[ax_1(n) + bx_2(n)] = aX_1(k) + bX_2(k)$$

2. 复共轭序列的DFT：

设 $x^*(n)$**是** $x(n)$**的复共轭序列，长度为N，其DFT变换为：**

则： $X(k) = DFT[x(n)]$

且：

$$DFT[x^*(n)] = X^*(N-k), 0 \le k \le N-1$$

$$X(N) = X(0)$$

证明：

$$X^*(N-k)=[\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{(N-k)n}]^*$$

$$=\sum_{n=0}^{N-1}x^*(n)W_N^{-(N-k)n}$$

$$=\sum_{n=0}^{N-1}x^*(n)W_N^{kn}$$

$$=DFT[x^*(n)]$$

又由于 时域和频域的对偶关系，有：

$$DFT[x^*(N-n)]=X^*(k)$$

当 $x(n)$ **为实序列时，则有：**

$$X^*(N-k)=X(k)$$

3. 对称性

A. 定义

有限长共轭对称序列，也可称为圆周共轭对称序列。

$$x_{ep}(n) = x_{ep}^{*}(N-n)$$

有限长共轭反对称序列，也可称为圆周共轭反对称序列。

$$x_{op}(n) = -x_{op}^{*}(N-n)$$

注：①变换区间： $0 \le n \le N-1$

②以 $n = \dfrac{N}{2}$ **为对称点；**

③频域定义：

圆周共轭对称序列： $X_{ep}(k) = X_{ep}^{*}(N-k)$

圆周共轭反对称序列： $X_{op}(k) = -X_{op}^{*}(N-k)$

B. 序列分解

① $x(n)=x_{ep}(n)+x_{op}(n)$ **(长度均为N)**

其中：

$$x_{ep}(n)=\frac{1}{2}[x(n)+x^*(N-n)]$$

$$x_{op}(n)=\frac{1}{2}[x(n)-x^*(N-n)]$$

② $x(n)=x_r(n)+jx_i(n)$

其中： $x_i(n)=\frac{1}{2}[x(n)-x^*(n)]$ $x_r(n)=\frac{1}{2}[x(n)+x^*(n)]$

③频域：

$$X(k)=X_{ep}(k)+X_{op}(k)$$

$$X(k)=X_R(k)+jX_I(k)$$

●举例：求 $u(n)$ 圆周共轭对称序列，圆周共轭反对称序列。

$$u(n) = \{1+j4,\ -2+j3,\ 4-j2,\ -5-j6\} \quad 0 \le n \le 3$$

$$u^*(n) = \{1-j4,\ -2-j3,\ 4+j2,\ -5+j6\} \quad 0 \le n \le 3$$

$$u^*((-0)_4) = u^*(0) = 1-j4$$

$$u^*((-1)_4) = u^*(3) = -5+j6$$

$$u^*((-2)_4) = u^*(2) = 4+j2$$

$$u^*((-3)_4) = u^*(1) = -2-j3$$

$$u^*((-n)_4) = \{1-j4,\ -5+j6,\ 4+j2,\ -2-j3\}$$

$$u_{ep}(n) = \frac{1}{2}\{u(n)+u^*((-n)_4)\}$$

$$= \{1,\ -3.5+j4.5,\ 4,\ -3.5-j4.5\} \quad 0 \le n \le 3$$

$$u_{op}(n) = \frac{1}{2}\{u(n)-u^*((-n)_4)\}$$

$$= \{j4,\ 1.5-j1.5,\ -2,\ -1.5-j1.5\} \quad 0 \le n \le 3$$

DFT的共轭对称性

① **对称性1:** $x(n) = x_{ep}(n) + x_{op}(n)$

$$X(k) = X_R(k) + jX_I(k)$$

其中: $DFT[x_{ep}(n)] = X_R(k)$ $DFT[x_{op}(n)] = jX_I(k)$

② **对称性2:** $x(n) = x_r(n) + jx_i(n)$

$$X(k) = X_{ep}(k) + X_{op}(k)$$

其中: $DFT[x_r(n)] = X_{ep}(k)$ $DFT[jx_i(n)] = X_{op}(k)$

证明: $x_r(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x^*(n)]$

$$DFT[x_r(n)] = \frac{1}{2}[X(k) + X^*(N-k)]$$

$$= X_{ep}(k)$$

③当 $x(n)$ 为实序列（长度为N），且 $X(k)=DFT[x(n)]$

则有：

a. $X(k)$ 周期共轭对称，即：$X(k)=X^*(N-k),0\le k\le N-1$

b.如 $x(n)$ 为实偶对称序列，则 $X(k)$ 为实偶对称序列，

即： $X(k)=X(N-k)$

c.如 $x(n)$ 为实奇对称序列，则 $X(e^{j\omega})$ 为纯虚奇对称序列，

即： $x(n)=x(N-n)$

$X(k)=-X(N-k)$

d．如 $x(n)$ 为实序列，则 $X(k)$ 的计算量减半，则：

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{kn},k=0,1,2,\ldots\frac{N}{2}-1$$

$$X(N-k)=X^*(k),k=0,1,2,\ldots\frac{N}{2}-1$$

举例1:X(k)是实序列x(n)的498点DFT,X(k)的部分值如下，其余的DFT样本值都为0:

$X[0]=2\quad X[11]=4+j6\quad X[k_1]=j2\quad X[k_2]=4-j6\quad X[412]=-j2$

求:k1,k2. **498-k1=412 k1=86; k2=498-11=487.**

总结：推导这些结论时注意：

实序列： $x_i(n)=0$

实偶序列： $x_i(n)=0\quad x_o(n)=0\quad x_{op}(n)=0$

实奇序列： $x_i(n)=0\quad x_e(n)=0\quad x_{ep}(n)=0$

因果序列： $x(n)=0,n<0$

附：序列及其DFT的**奇偶虚实关系**对应表如下：

时域 $x(n)$ 或频域 $X(k)$	频域 $X(k)$ 或时域 $x(n)$
偶	偶
奇	奇
实	实部为偶,虚部为奇 (即圆周共轭对称序列)
虚	实部为奇,虚部为偶奇 (即圆周共轭反对称序列)
实、偶	实、偶
实、奇	虚、奇
虚、偶	虚、偶
虚、奇	实、奇

•举例2：用一次N点DFT变换求得2个实序列的N点DFT变换。

•已知：长度为N的序列 $g[n]$ ， $h[n]$ ，

•求它们的N点DFT变换序列 $G[k]$ $H[k]$。

解：1：构造长度为N的复序列， $x[n] = g[n] + j\,h[n]$

$$g[n] = \mathrm{Re}\{x[n]\} \quad h[n] = \mathrm{Im}\{x[n]\}$$

$X[k]$ 是 $x[n]$ 的N点DFT变换序列。

$$G[k] = \frac{1}{2}\{X[k] + X^*[\langle -k\rangle_N]\}$$

$$H[k] = \frac{1}{2j}\{X[k] - X^*[\langle -k\rangle_N]\}$$

其中， $X^*[\langle -k\rangle_N] = X^*[\langle N-k\rangle_N]$

2. $g[n], h[n]$**是长度为4序列。**

$$g[n] = \{\underset{\uparrow}{1} \quad 2 \quad 0 \quad 1\}, \qquad h[n] = \{\underset{\uparrow}{2} \quad 2 \quad 1 \quad 1\}$$

$$x[n] = g[n] + j\,h[n] \qquad x[n] = \{\underset{\uparrow}{1+j2},\ 2+j2,\ j,\ 1+j\}$$

$X[k]$ **为4点DFT序列。**

$$\begin{bmatrix} X[0] \\ X[1] \\ X[2] \\ X[3] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1+j2 \\ 2+j2 \\ j \\ 1+j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+j6 \\ 2 \\ -2 \\ j2 \end{bmatrix}$$

$$X^*[k] = [4-j6 \quad 2 \quad -2 \quad -j2]$$

$$X^*[(4-k)_4] = [4-j6 \quad -j2 \quad -2 \quad 2]$$

$$G[k] = \{4,\ 1-j,\ -2,\ 1+j\} \qquad H[k] = \{6,\ 1-j,\ 0,\ 1+j\}$$

举例3：用N点DFT计算2N点DFT.

已知：长度为2N序列 $v[n]$，对应2N点DFT序列为$V[k]$。
求：用N点DFT计算$V[k]$ 。

解：1：定义长度为N序列$g[n]$ ，$h[n]$

$$g[n]=v[2n],\quad h[n]=v[2n+1],\quad 0\le n\le N$$

2: $g[n]$,$h[n]$N点DFT变换序列 $G[k], H[k]$ 。

$$x[n]=g[n]+j\,h[n]$$

$$G[k]=\frac{1}{2}\{X[k]+X^*[\,(-k)_N]\}$$

$$H[k]=\frac{1}{2j}\{X[k]-X^*[\,(-k)_N]\}$$

$$V[k] = \sum_{n=0}^{2N-1} v[n] W_{2N}^{nk}$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} v[2n] W_{2N}^{2nk} + \sum_{n=0}^{N-1} v[2n+1] W_{2N}^{(2n+1)k}$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} g[n] W_{N}^{nk} + \sum_{n=0}^{N-1} h[n] W_{N}^{nk} W_{2N}^{k}$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} g[n] W_{N}^{nk} + W_{2N}^{k} \sum_{n=0}^{N-1} h[n] W_{N}^{nk}, \; 0 \le k \le 2N-1$$

$$\Rightarrow \quad V[k] = G[\langle k \rangle_N] + W_{2N}^{k} H[\langle k \rangle_N], \quad 0 \le k \le 2N-1$$

2.长度为8序列： $v[n] = \{\underset{\uparrow}{1} \quad 2 \quad 2 \quad 2 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1\}$

$g[n] = v[2n] = \{\underset{\uparrow}{1} \quad 2 \quad 0 \quad 1\}$ $h[n] = v[2n+1] = \{\underset{\uparrow}{2} \quad 2 \quad 1 \quad 1\}$

$$V[k] = G[\langle k\rangle_4] + W_8^k H[\langle k\rangle_4], \ 0 \le k \le 7$$

$$V[0] = G[0] + H[0] = 4 + 6 = 10$$

$$V[1] = G[1] + W_8^1 H[1]$$

$$= (1-j) + e^{-j\pi/4}(1-j) = 1 - j2.4142$$

$$V[2] = G[2] + W_8^2 H[2] = -2 + e^{-j\pi/2} \cdot 0 = -2$$

$$V[3] = G[3] + W_8^3 H[3]$$

$$= (1+j) + e^{-j3\pi/4}(1+j) = 1 - j0.4142$$

$$V[4] = G[0] + W_8^4 H[0] = 4 + e^{-j\pi} \cdot 6 = -2$$

$$V[5] = G[1] + W_8^5 H[1]$$
$$= (1 - j) + e^{-j5\pi/4}(1 - j) = 1 + j0.4142$$

$$V[6] = G[2] + W_8^6 H[2] = -2 + e^{-j3\pi/2} \cdot 0 = -2$$

$$V[7] = G[3] + W_8^7 H[3]$$
$$= (1 + j) + e^{-j7\pi/4}(1 + j) = 1 + j2.4142$$

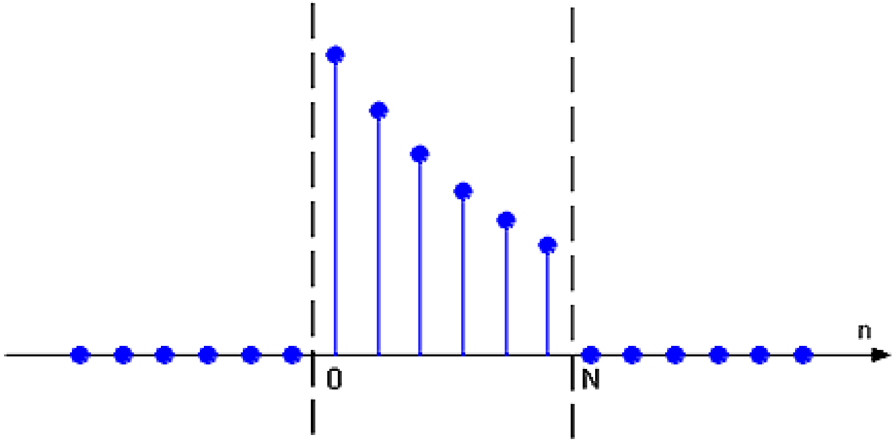
4.序列的循环移位：

一个长度为N的序列 $x(n)$ 的循环移位定义为：

$$y(n) = x((n+m))_N \cdot R_N(n)$$

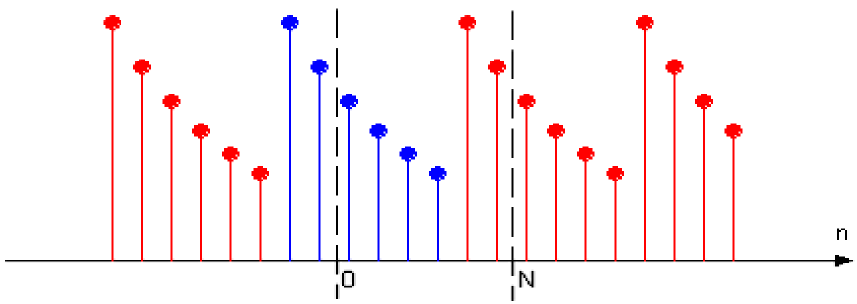
例3.3.4：一个N = 6点序列 $x(n) = e^{-\frac{n}{5}} R_6(n)$ ，其循环移位 $x((n+2))_6 R_6(n)$ 如下：

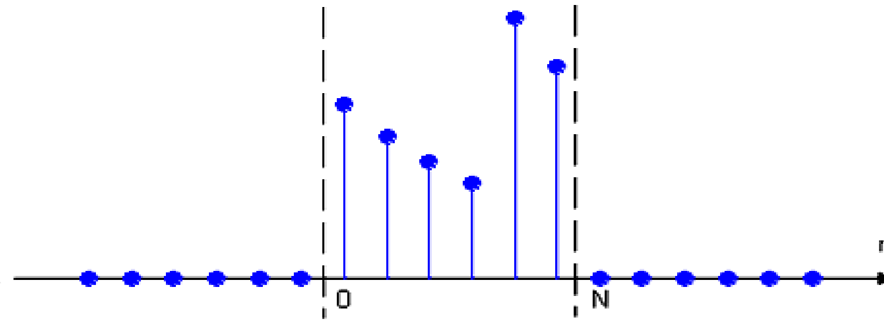
$$x(n) = e^{-\frac{n}{5}} R_6(n)$$

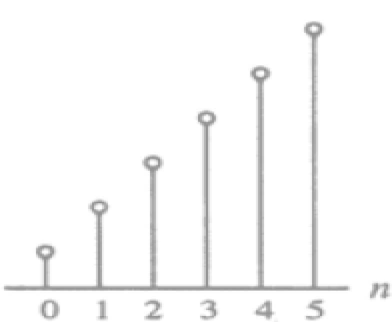


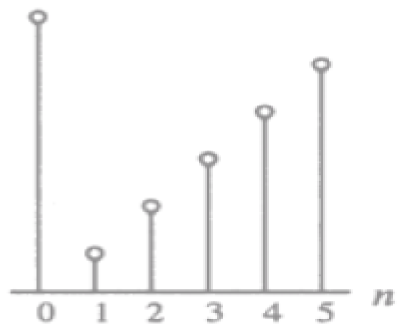
$x((n+2))_6$

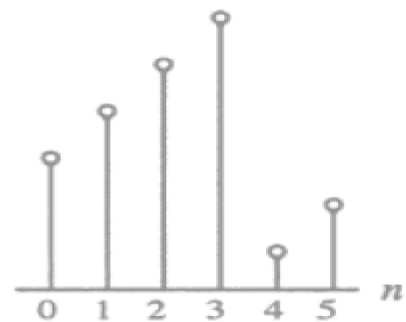
$x((n+2))_6 R_6(n)$











$x[n]$ $\quad$ $x[\langle n-1\rangle_6]$ $= x[\langle n+5\rangle_6]$ $\quad$ $x[\langle n-4\rangle_6]$ $= x[\langle n+2\rangle_6]$

序列循环移位后DFT为：

$$Y(k) = DFT[x((n+m))_N R_N(n)] = W_N^{-km} X(k)$$

证明：

由周期序列的周期移位性质得：

$$DFS[x((n+m))_N] = DFS[\tilde{x}(n+m)] = W_N^{-km} X(k)$$

$\because x((n+m))_N R_N(n)$ **是** $\tilde{x}(n+m)$ **的主值序列，**

$\therefore$ **其DFT是** $\tilde{x}(n+m)$ **的DFS的主值。即：**

$$DFT[x((n+m))_N R_N(n)] = DFT[\tilde{x}(n+m) R_N(n)] = W_N^{-km} \tilde{X}(k) R_N(k)$$

$$= W_N^{-km} X(k)$$

由时域和频域的对偶关系，$X(k)$ **作循环移位时有：**

设 $Y(k) = X((k+l))_N \cdot R_N(k)$

则： $y(n) = IDFT[X((k+l))_N R_N(k)] = W_N^{nl} x(n)$

附：几种变换的时移性质汇总：

① $x(t-t_0)\overset{FT}{\leftrightarrow}X(j\Omega)e^{-j\Omega t_0}$

② $x(t-t_0)\overset{LT}{\leftrightarrow}X(s)e^{-st_0}$

③ $x(n-m)\overset{ZT}{\leftrightarrow}X(z)z^{-m}$

④ $x(n-m)\overset{DFT}{\leftrightarrow}X(k)W_N^{km}$

5. 循环卷积（Circular Convolution）：

对于两个长度均为N的序列 $x_1(n)$ **和** $x_2(n)$ **，**

$0 \le n \le N-1$

$$\boldsymbol{y(n)} = \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m) x_2((n-m))_N R_N(n) = x_1(n) \, \text{Ⓝ} \, x_2(n)$$

称 $\boldsymbol{y(n)}$ **为序列** $x_1(n)$ **和** $x_2(n)$ **的N点循环卷积。**

设 $y[n], x_1(n), x_2(n)$ **的N点DFT变换分别为：** $\boldsymbol{Y(k), X_1(k), X_2(k)}$

则： $Y(k) = X_1(k) \cdot X_2(k)$

$$y(n) = IDFT[X_1(k) X_2(k)] = [\sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1(m) \tilde{x}_2(n-m)] R_N(n)$$

$$= \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m) x_2((n-m))_N R_N(n) = x_1(n) \, \text{Ⓝ} \, x_2(n)$$

证明：

对上式两边求DFT得：

$$Y(k)=\sum_{n=0}^{N-1}[\sum_{m=0}^{N-1}x_1(m)x_2((n-m))_N R_N(n)]W_N^{nk}$$

$$=\sum_{m=0}^{N-1}x_1(m)\sum_{n=0}^{N-1}x_2((n-m))_N W_N^{nk}$$

令 $n-m=n'$ **则有：**

$$Y(k)=\sum_{m=0}^{N-1}x_1(m)\sum_{n'=-m}^{N-1-m}x_2((n'))_N W_N^{k(n'+m)} =\sum_{m=0}^{N-1}x_1(m)W_N^{km}\sum_{n'=-m}^{N-1-m}x_2((n'))_N W_N^{kn'}$$

$$=\sum_{m=0}^{N-1}x_1(m)W_N^{km}\sum_{n'=0}^{N-1}x_2(n')W_N^{kn'} \quad =X_1(k)\cdot X_2(k)$$

注：式中 $x_2((n'))_N W_N^{kn'}$ **是以N为周期的，故对其在任意一个周期上求和的结果不变。**

特点：

①循环卷积的过程与周期卷积一样，只取周期卷积的主值；

②循环卷积隐含周期性；

③循环卷积在主值区间内进行，参与卷积的两个序列的长度和结果序列的长度均相等；

④线性卷积与循环卷积计算步骤比较：

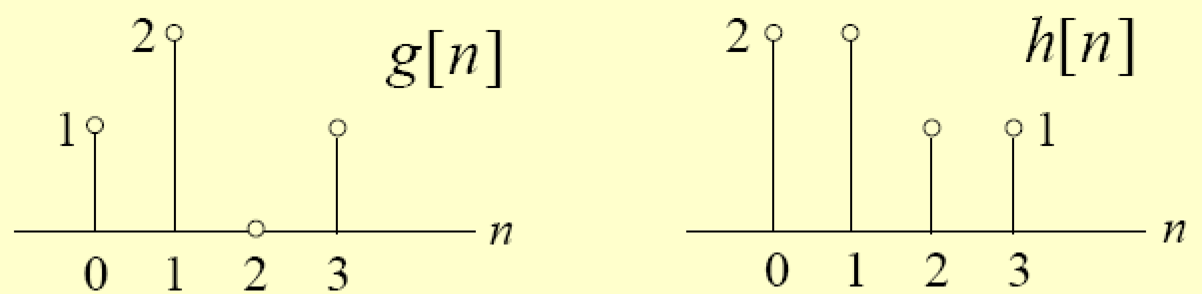
线性卷积：反折、平移、相乘、积分(或相加)；

循环卷积：周期化、反折、平移、相乘、相加。

举例1：计算如下长度为4的序列$g[n]$，$h[n]$的4点循环卷积$y[n]$。

$$g[n] = \{\underset{\uparrow}{1} \quad 2 \quad 0 \quad 1\}, \quad h[n] = \{\underset{\uparrow}{2} \quad 2 \quad 1 \quad 1\}$$

方法一：



$$y[n] = g[n]④h[n] = \sum_{m=0}^{3} g[m]h[\langle n-m\rangle_4],$$

$$0 \le n \le 3$$

$$y[0] = \sum_{m=0}^{3} g[m]h[\langle -m\rangle_4]$$

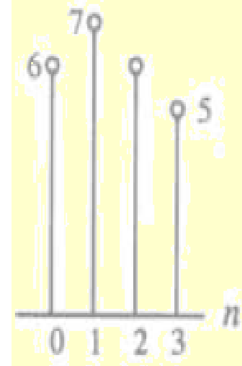
$$= g[0]h[0] + g[1]h[3] + g[2]h[2] + g[3]h[1]$$

$$= (1\times 2) + (2\times 1) + (0\times 1) + (1\times 2) = 6$$

$$y[1] = \sum_{m=0}^{3} g[m]h[\langle 1-m \rangle_4]$$

$$= g[0]h[1] + g[1]h[0] + g[2]h[3] + g[3]h[2]$$

$$= (1\times 2) + (2\times 2) + (0\times 1) + (1\times 1) = 7$$



$y[n]$

$$y[2] = \sum_{m=0}^{3} g[m]h[\langle 2-m \rangle_4]$$

$$= g[0]h[2] + g[1]h[1] + g[2]h[0] + g[3]h[3]$$

$$= (1\times 1) + (2\times 2) + (0\times 2) + (1\times 1) = 6$$

$$y[3] = \sum_{m=0}^{3} g[m]h[\langle 3-m \rangle_4]$$

$$= g[0]h[3] + g[1]h[2] + g[2]h[1] + g[3]h[0]$$

$$= (1\times 1) + (2\times 1) + (0\times 2) + (1\times 2) = 5$$

●用矩阵计算循环卷积： $y[n] = g[n] \circledN h[n]$

$$\begin{bmatrix} y[0] \\ y[1] \\ y[2] \\ \vdots \\ y[N-1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h[0] & h[N-1] & h[N-2] & \cdots & h[1] \\ h[1] & h[0] & h[N-1] & \cdots & h[2] \\ h[2] & h[1] & h[0] & \cdots & h[3] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h[N-1] & h[N-2] & h[N-3] & \cdots & h[0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g[0] \\ g[1] \\ g[2] \\ \vdots \\ g[N-1] \end{bmatrix}$$

方法二：

$$G[k] = g[0] + g[1]e^{-j2\pi k/4} + g[2]e^{-j4\pi k/4} + g[3]e^{-j6\pi k/4}$$
$$= 1 + 2e^{-j\pi k/2} + e^{-j3\pi k/2}, \quad 0 \le k \le 3$$

$$G[0] = 1 + 2 + 1 = 4,$$
$$G[1] = 1 - j2 + j = 1 - j,$$
$$G[2] = 1 - 2 - 1 = -2,$$
$$G[3] = 1 + j2 - j = 1 + j$$

$$H[k] = h[0] + h[1]e^{-j2\pi k/4} + h[2]e^{-j4\pi k/4} + h[3]e^{-j6\pi k/4}$$
$$= 2 + 2e^{-j\pi k/2} + e^{-j\pi k} + e^{-j3\pi k/2}, \quad 0 \le k \le 3$$

$$H[0] = 2 + 2 + 1 + 1 = 6,$$
$$H[1] = 2 - j2 - 1 + j = 1 - j,$$
$$H[2] = 2 - 2 + 1 - 1 = 0,$$
$$H[3] = 2 + j2 - 1 - j = 1 + j$$

$$\begin{bmatrix} G[0] \\ G[1] \\ G[2] \\ G[3] \end{bmatrix} = \mathbf{D}_4 \begin{bmatrix} g[0] \\ g[1] \\ g[2] \\ g[3] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1-j \\ -2 \\ 1+j \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} H[0] \\ H[1] \\ H[2] \\ H[3] \end{bmatrix} = \mathbf{D}_4 \begin{bmatrix} h[0] \\ h[1] \\ h[2] \\ h[3] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1-j \\ 0 \\ 1+j \end{bmatrix}$$

$$Y[k] = G[k]H[k],\ \ 0 \le k \le 3$$

$$\begin{bmatrix} Y[0] \\ Y[1] \\ Y[2] \\ Y[3] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G[0]H[0] \\ G[1]H[1] \\ G[2]H[2] \\ G[3]H[3] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 \\ -j2 \\ 0 \\ j2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y[0] \\ y[1] \\ y[2] \\ y[3] \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\mathbf{D}_4^* \begin{bmatrix} Y[0] \\ Y[1] \\ Y[2] \\ Y[3] \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & -1 & -j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -j & -1 & j \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 24 \\ -j2 \\ 0 \\ j2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}$$

§3.4 用循环卷积计算线性卷积

(To Compute Linear Convolution Using Circular Convolution)

3.4.1 循环卷积与线性卷积

- 循环卷积是周期卷积的主值，其计算是在主值区间中进行的，而线性卷积不受这个限制。
- 两个长度为N的因果序列循环卷积的结果仍是一个长度为N的序列，而它们的线性卷积却是一个长度为2N-1的序列。
- 两者之间的关系如下：

循环卷积	线性卷积
1 是针对DFT引出的一种表示方法 2 两序列长度必须相等 不等时按要求补足零值点 3 卷积结果长度与两信号长度相等 皆为N	1 信号通过线性系统时，信号输出等于 输入与系统单位冲激响应的卷积 2 两序列长度可相等，也可不等 如：$x_1(n)$为N_1点，$x_2(n)$为N_2点 3 卷积结果长度 $N=N_1+N_2-1$

3.4.2 用循环卷积求线性卷积

假设 $g[n]$ 和 $h[n]$ 为有限长序列，长度为N，它们的线性卷积和循环卷积分别为：

$$y_L[n]=\sum_{m=0}^{N-1} g[m]h[n-m], \quad 0\le n\le 2N-2$$

$$y_C[n]=\sum_{m=0}^{N-1} g[m]h[\langle n-m\rangle_N], \quad 0\le n\le N-1$$

举例：用循环卷积计算长度为4的序列 $g[n]$, $h[n]$ 的线性卷积。

$$g_e[n]=\begin{cases} g[n], & 0\le n\le 3 \\ 0, & 4\le n\le 6 \end{cases} \quad h_e[n]=\begin{cases} h[n], & 0\le n\le 3 \\ 0, & 4\le n\le 6 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} y_C[0] \\ y_C[1] \\ y_C[2] \\ y_C[3] \\ y_C[4] \\ y_C[5] \\ y_C[6] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h[0] & 0 & 0 & 0 & h[3] & h[2] & h[1] \\ h[1] & h[0] & 0 & 0 & 0 & h[3] & h[2] \\ h[2] & h[1] & h[0] & 0 & 0 & 0 & h[3] \\ h[3] & h[2] & h[1] & h[0] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h[3] & h[2] & h[1] & h[0] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h[3] & h[2] & h[1] & h[0] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h[3] & h[2] & h[1] & h[0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g[0] \\ g[1] \\ g[2] \\ g[3] \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

用DFT计算线性卷积:

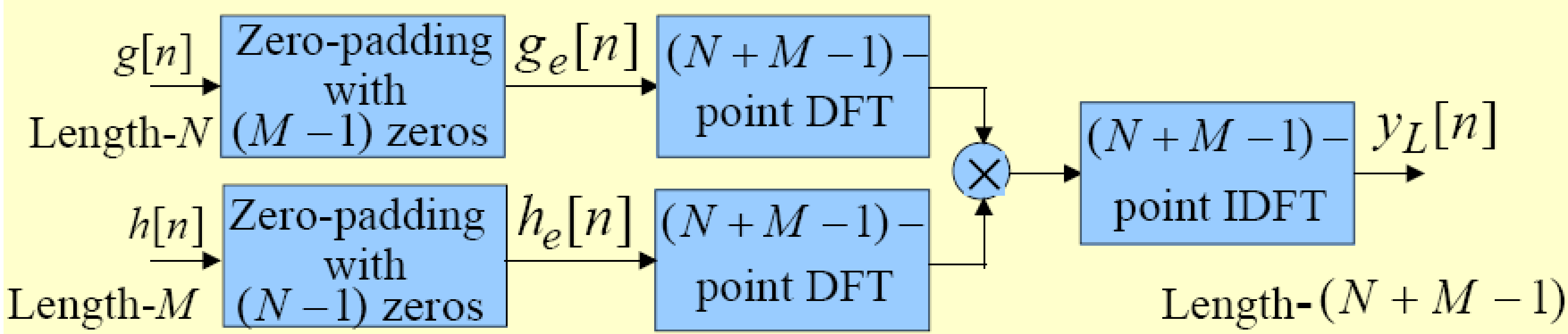
设长度分别为N，M的因果有限长序列 $g[n]$、$h[n]$ ，

$$y_L[n] = g[n] \circledast h[n] = y_C[n] = g[n] \,Ⓛ\, h[n]$$

$$L = N + M - 1$$

$$g_e[n] = \begin{cases} g[n], & 0 \le n \le N-1 \\ 0, & N \le n \le L-1 \end{cases}$$

$$h_e[n] = \begin{cases} h[n], & 0 \le n \le M-1 \\ 0, & M \le n \le L-1 \end{cases}$$



用DFS: $$y_c(n)=\sum_{m=0}^{L-1}h(m)\sum_{q=-\infty}^{+\infty}x(n-m+qL)R_L(n)$$

$$x((n))_L=\sum_{q=-\infty}^{+\infty}x(n+qL)$$

$$=\sum_{q=-\infty}^{+\infty}\sum_{m=0}^{N-1}h(m)x(n+qL-m)R_L(n)$$

因为: $$\sum_{m=0}^{N-1}h(m)x(n+qL-m)=y_l(n+qL)$$

所以: $$y_c(n)=\sum_{q=-\infty}^{+\infty}y_l(n+qL)R_L(n)$$

结论:

① $y_c(n)$ **等于** $y_l(n)$ **以L为周期的周期延拓序列的主值 序列;**

②当 $L<N+M-1$**时,其循环卷积的结果与线性卷积不相等;**

③两个长度为M,N的序列的线性卷积可用长度均 为L的循环卷积来代替。其中L应足: $L\geq M+N-1$ **。**

例3.4.1：已知序列： $x_1(n)=\begin{cases}1, 0\le n\le 14\\ 0, others\end{cases}$ $x_2(n)=\begin{cases}1, 0\le n\le 4\\ 0, others\end{cases}$

1.求 $x_1(n)$**和**$x_2(n)$**的15点循环卷积** $y_1(n)$**，画出其略图；**

2.求$x_1(n)$**和** $x_2(n)$**的19点循环卷积** $y_2(n)$ **，画出其略图。**

解：

1. $y_1(n)=\begin{cases}5, 0\le n\le 14\\ 0, others\end{cases}$

2. $y_2(n)=x_1(n)\,⑲\,x_2(n)=x_1(n)*x_2(n)$

$$=\begin{cases}1,2,\ldots,5,\ldots,5,4,3,\ldots,1, n=0,1,\ldots,4,\ldots,14,15,16,\ldots 18\\ 0, \qquad\qquad others\end{cases}$$

注：本题中 $y_1(n)=\sum_{q=-\infty}^{+\infty} y_2(n+15q)R_{15}(n)$

例3.4.2：已知： $x_1(n)=\begin{cases}1,2,3,2,1, & n=0,1,2,3,4\\ 0, & others\end{cases}$ $x_2(n)=\begin{cases}3,2,1,2,3, & n=0,1,2,3,4\\ 0, & others\end{cases}$

$y_1(n)=x_1(n)*x_2(n)$ $\quad y_2(n)=x_1(n)⑦x_2(n)$

请问序列 $y_1(n)$ 中的那些值与序列 $y_2(n)$ 的值相同？

$$y_1(n)=x_1(n)*x_2(n)$$
$$=\begin{cases}3,8,14,16,17,16,14,8,3, & n=0,1,2,3,4,5,6,7,8\\ 0 & others\end{cases}$$

$$y_2(n)=x_1(n)⑦x_2(n)$$
$$=\begin{cases}11,11,14,16,17,16,14, & n=0,1,2,3,4,5,6\\ 0 & others\end{cases}$$

比较的结果得：

当 $n=2,3,4,5,6$ **时，** $y_1(n)=y_2(n)$

§3.5 频率取样(Frequency Sampling)

3.5.1 序列的几种变换的关系

① **ZT与FT：** $X(z)|_{z=e^{j\omega}} = X(e^{j\omega})$

单位圆上的ZT等于序列的FT；

② **LT与ZT：** $X(z)|_{z=e^{sT}} = \hat{X}_a(s)$

S平面到Z平面的映射关系：S平面上宽度为的水平带映射成整个Z平面，左半带映射成单位圆内，右半带映射成单位圆外，长为的虚轴映射成单位圆；

③ **DFT与ZT：** $X(k) = X(z)|_{z=W_N^{-k}}$

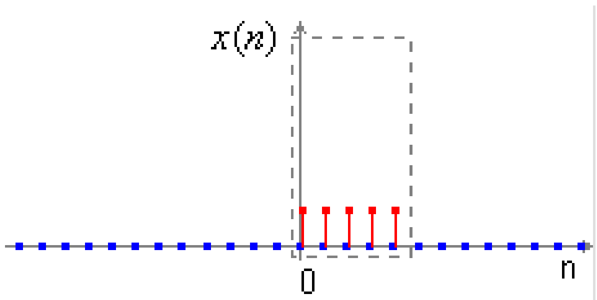
DFT是ZT在单位圆上等角距($\frac{2\pi}{N}$)取样的样本值；

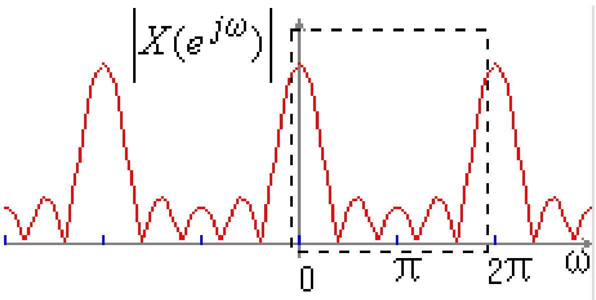
④ **DFT与FT：** $X(k) = X(e^{j\omega})|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k} = X(e^{j\frac{2\pi}{N}k})$

DFT是FT在一个周期内(2π)等间距取样值，取样间隔 $\Delta\omega = \frac{2\pi}{N}$

3.5.2 从N个取样值恢复

频域取样是指对时域已是离散，频域仍是连续信号。现在频域上进行抽样处理，使其频域也离散化，如下图所示。





设任意长序列 $x(n)$ **绝对可和，其ZT为：** $X(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(n)z^{-n}$ ，

如果在单位圆上对 $X(z)$ **进行等角距取样，取样点数为M，**

则： $X(k)=X(z)|_{z=W_M^{-k}}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(n)W_M^{kn}$ **…(3.5.2a)**

由DFT定义，对 $X(k)$ **求IDFT得：**

$$x_p(n)=\frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1}X(k)W_M^{-kn}$$ **…(3.5.2b)**

将（3.5.2a）代入（3.5.3b）得：

$$x_p(n)=\frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1}[\sum_{m=-\infty}^{+\infty}x(m)W_M^{km}]W_N^{-kn}=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}x(m)[\frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1}W_M^{-k(n-m)}]$$

$$=\sum_{r=-\infty}^{+\infty}x(n+rM)$$

注: r为整数，且 $\frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1}W_M^{-k(n-m)}=\begin{cases}1, m=n+rM\\0, m\neq n+rM\end{cases}$

在Z平面的单位圆上对序列的ZT进行等角距取样，

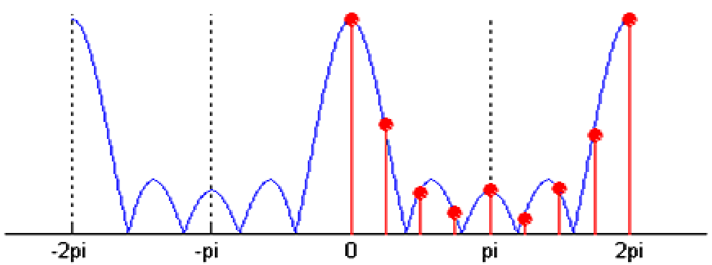
将导致时间序列的周期延拓。 $x_p(n)$ 是一个周期序列，其主值为：

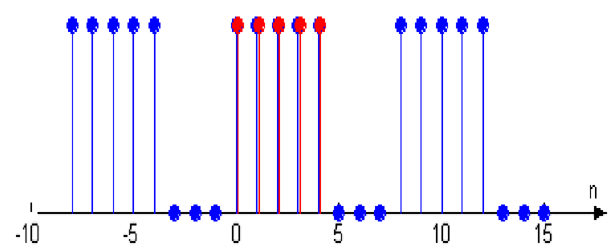
$$x_N(n)=x_p(n)\cdot R_N(n)=[\sum_{r=-\infty}^{+\infty}x(n+rM)]R_N(n)$$

结论：

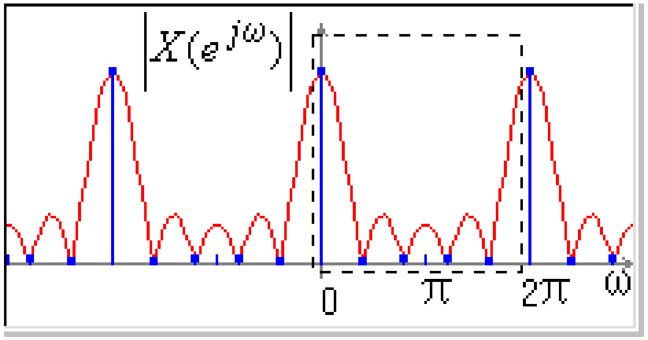
①对于长度为N的有限长序列，ZT取样即**频率取样不失真的条件**是**取样点数M应等于或大于原序列的长度N**，即： $M \geq N$ 。

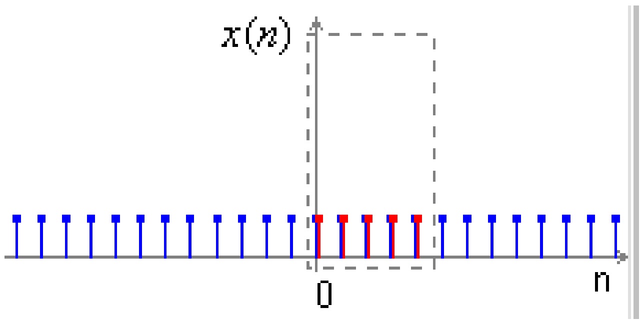
②当N=5，M=8时，时域延拓无混叠现象，此时原序列可以完全恢复，如下图所示；



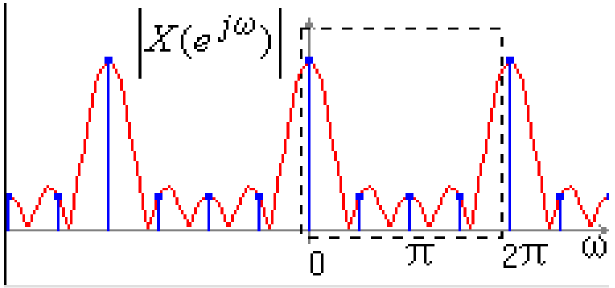


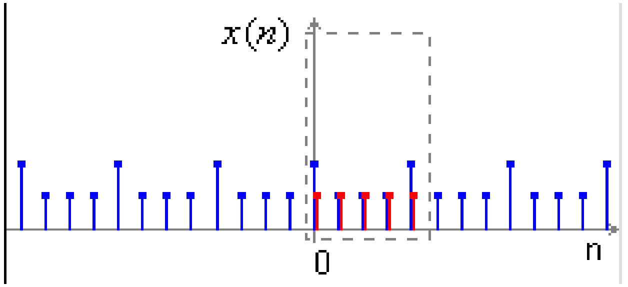
③当N=5，M=5时，时域延拓恰好无混叠现象，此时原序列可以完全恢复，如下图所示；





④ 当N=5，M=4时，时域延拓存在混叠现象，此时原序列不能完全恢复，如下图所示。





注：原信号为红色，延拓取主值区间后的恢复信号为蓝色。

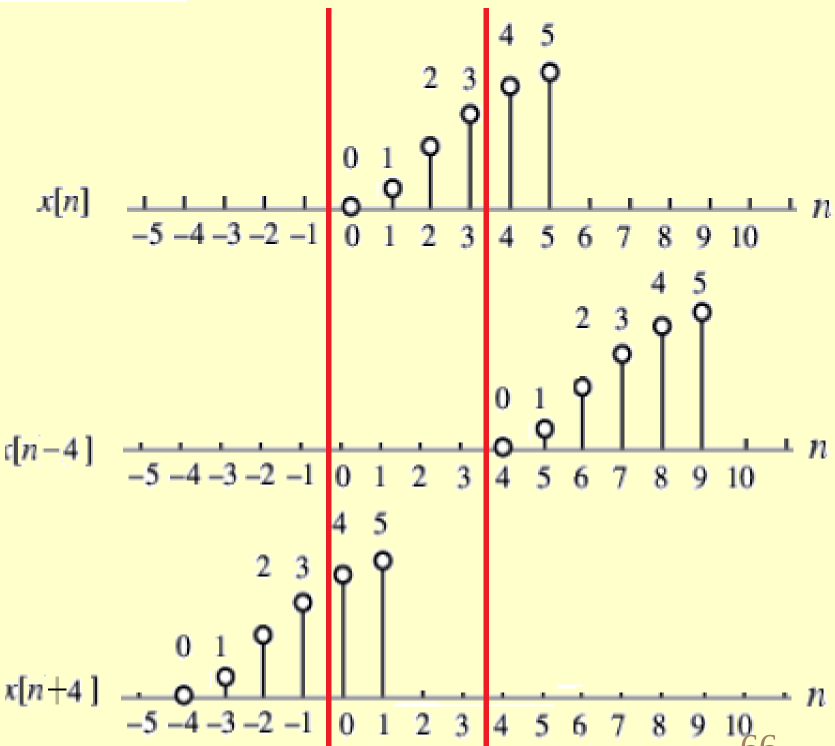
3.5.1长度为6的序列x[n]如下所示,其DTFT为 $X(e^{j\omega})$ ，对角频率 ω 在 $[\,0,2\pi\,]$ 内等角距取样 $\omega_k = 2\pi k/4 \quad 0 \le k \le 3$，所得序列 $Y(k)$, $Y(k)$ 的4点IDFT结果序列为 $y[n]$，求 $y[n]$

$$x[n] = \{\underset{\uparrow}{0} \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5\}$$

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[n+mN], \quad 0 \le n \le N-1$$

$$y[n] = x[n] + x[n+4] + x[n-4], \quad 0 \le n \le 3$$

- i.e. $y[n] = \{4 \quad 6 \quad 2 \quad 3\}$



例3.5.2：已知因果序列 $x(n)=\{1,2,3,2,1,0,-3,-2\}$ **，**

设： $X(e^{j\omega})=FT[x(n)]$

$$X(e^{j\omega_k})=X(e^{j\omega})|_{\omega=\omega_k},\omega_k=\frac{2\pi}{5}k,k=0,1,2,3,4$$

$$y(n)=IDFT[X(e^{j\omega_k})],\quad n,k=0,1,2,3,4$$

试写出$x(n)$**与**$y(n)$**之间的关系式，并画出**$y(n)$**的波形图。**

解： $y(n)=[\sum_{r=-\infty}^{+\infty}x(n+5r)]R_5(n)$

$$=\begin{cases}1,-1,1,2,1, & n=0,1,2,3,4\\ 0, & others\end{cases}$$

例3.5.2：已知序列：$x(n)=\begin{cases}1, 0\le n\le 5\\ 0, others\end{cases}$**，若**$X(z)$**为**$x(n)$**的ZT，如果对**$X(z)$**在**$z=e^{j\frac{2\pi}{4}k}$**处采样后得到：**

$X(k)=X(z)|_{z=e^{j\frac{2\pi}{4}k}}, k=0,1,2,3$**，画出由**$X(k)$**的IDFT所得到的序列**$x_1(n)$**的略图。**

解：由频率取样理论可知：

$$x_1(n)=[\sum_{r=-\infty}^{+\infty}x(n+4r)]R_4(n)$$

$$=\begin{cases}2,2,1,1, n=0,1,2,3\\ 0, \qquad others\end{cases}$$

3.5.3 从N个取样值恢复 $X(z)$ 或 $X(e^{-j\omega})$

设原序列长度为N，其ZT为： $X(z)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)z^{-n}$ **…(3.5.3a)**

由IDFT得： $x(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)W_N^{-kn}$ **…(3.5.3b)**

将式（3.5.3b）代入（3.5.3a）得：

$$X(z)=\sum_{n=0}^{N-1}[\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)W_N^{-kn}]z^{-n}$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)[\sum_{n=0}^{N-1}W_N^{-kn}z^{-n}]$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)\frac{1-W_N^{-kN}z^{-N}}{1-W_N^{-k}z^{-1}} \quad （W_N^{-kN}=1）$$

$$=\sum_{k=0}^{N-1}X(k)\Phi_k(z) \quad \text{…(e)}$$

其中： $\Phi_k(z) = \dfrac{1 - z^{-N}}{N(1 - W_N^{-k} z^{-1})}$ ……内插函数

- 长度为N的序列 $x(n)$ 的ZT $X(z)$ 可用其单位圆上的

N个取样值 $X(k)$ 来恢复。

- 令 $z = e^{j\omega}$,代入式(e)得FT的内插公式：
- 其中： $X(e^{j\omega}) = \sum_{k=0} X(k)\Phi_k(e^{j\omega})$

$$\Phi_k(e^{j\omega}) = \frac{1 - e^{-j\omega N}}{N(1 - e^{j\frac{2\pi}{N}k} e^{-j\omega})}$$

$$= \frac{\sin(\omega N/2)}{N \sin[\frac{(\omega - \frac{2\pi k}{N})}{2}]} e^{-j(\frac{N\nu\omega}{2} - \frac{\omega}{2} + \frac{k\pi}{N})}$$

$$\phi(\omega)=\frac{\sin(\omega N/2)}{N\sin(\omega/2)}e^{-j\omega(\frac{N-1}{2})}$$ ……内插函数

$$\therefore X(e^{j\omega})=\sum_{k=0}^{N-1}X(k)\phi(\omega-k\frac{2\pi}{N})$$

长度为N的序列 $x(n)$ 的FT $X(e^{j\omega})$ 可通过Z平面单位圆上的N个取样值 $X(k)$，即N个频域取样值来恢复。

结论：

对于长度为N的序列 $x(n)$，其N个频域取样值 $X(k)$ 就可以不失真地代表它；且这N个取样值 $X(k)$ 也能完全表示整个 $X(z)$ 和 $X(e^{j\omega})$。**频率取样理论是用频率取样法设计FIR数字滤波器（DF）的理论基础。**

§3.6 快速傅立叶变换 (Fast Fourier Transform - FFT)

3.6.1 引言（Introduction）

DFT变换：

$$\begin{cases} X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn}, 0 \le k \le N-1 \\ x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-kn}, 0 \le n \le N-1 \end{cases}$$

将DFT计算写成矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ \vdots \\ X(N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_N^{0.0} & W_N^{0.1} & \cdots & W_N^{0.(N-1)} \\ W_N^{1.0} & W_N^{1.1} & \cdots & W_N^{1.(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ W_N^{(N-1).0} & W_N^{(N-1).1} & \cdots & W_N^{(N-1).(N-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{bmatrix}$$

复数乘法：

$$X = W \cdot x = \{\mathrm{Re}[W] \cdot \mathrm{Re}[x] - \mathrm{Im}[W] \cdot \mathrm{Im}[x]\} + j\{\mathrm{Re}[W] \cdot \mathrm{Im}[x] + \mathrm{Re}[x] \cdot \mathrm{Im}[W]\}$$

所以直接计算N点DFT，计算量为：

复数乘法次数：N^2 次，复数加法次数：$N(N-1)$次；

其运算量相当于：

实数乘法次数：$4N^2$ 次，实数加法次数：$2N^2+2N(N-1)$

从 $X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{nk},(0\le n\le N-1)$ 看，提高DFT运算速度，唯一可以利用的是 W_N。

W_N 称为旋转因子，表示为： $W_N^k=e^{-j\frac{2\pi}{N}k}$

注意：

1. 旋转因子的性质：

a．对称性： $(W_N^k)^* = W_N^{N-k}$ **；**

b．周期性： $W_N^{k+mN} = W_N^k$ **；**

c．换底： $W_N^k = W_{mN}^{mk} = W_{N/2}^{k/2}$ **，** $k/2, N/2$ **为整数；**

d．几个特殊值：

$$W_N^{kN} = 1 \qquad W_N^{N/2} = -1$$

$$W_N^{N/4} = -j \qquad W_N^{3N/4} = j$$

2. $\dfrac{N}{2},\dfrac{N}{4}$ **点的DFT分别为：**

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N/2-1}x(n)W_{N/2}^{kn},k=0,1,2,\ldots,N/2 \quad ;$$

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N/4-1}x(n)W_{N/4}^{kn},k=0,1,2,\ldots,N/4 \quad 。$$

1965年Cooley & Tukey提出了快速FFT算法，称为FFT。使DFT成为DSP的有力工具。FFT算法有很多种，这里仅介绍两种最基本的算法：

时间抽选FFT算法 - Decimation-in-Time FFT;

频率抽选FFT算法 - Decimation-in-Frequency FFT;

上述两种算法均假设N是2的整数幂，即以2为基的FFT算法。

3.6.2 时间抽取FFT算法

（Decimation-In-Time FFT - DIT FFT）

基本出发点：利用 W_N^k 的周期性和对称性，将DFT的计算分解成一些逐次减小的DFT计算；

分解规则：（1）对**时间**进行**偶奇分**，

（2）对**频率**进行**前后分**。

设 $N=2^M$（M：正整数），则：$M=\log_2 N$ 。

为讨论方便，以时间信号序列为例：

$$x(n)=\{x(0),x(1),x(2),x(3),x(4),x(5),x(6),x(7)\} \quad \text{…(3.6.2a)}$$

由规则（1），将 $x(n)$ 按序号**偶奇分**，得：

$$\{x(0),x(2),x(4),x(6)\,|\,x(1),x(3),x(5),x(7)\}$$

即：
$$\begin{cases} g(r)=x(2r), even \\ h(r)=x(2r+1), odd \end{cases}, r=0,1,2,\dots,\frac{N}{2}-1 \quad \text{…(3.6.2b)}$$

由DFT定义得：

$$
\begin{aligned}
X(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{kn} = \sum_{n=even} x(n)W_N^{kn} + \sum_{n=odd} x(n)W_N^{kn} \\
&= \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2r)W_N^{2rk} + \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2r+1)W_N^{(2r+1)k} \\
&= \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} g(r)(W_N^2)^{kr} + W_N^k \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} h(r)(W_N^2)^{kr} \\
&= \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} g(r)W_{N/2}^{rk} + W_N^k \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} h(r)W_{N/2}^{rk} \\
&= G((k))_{N/2} + W_N^k H((k))_{N/2}, \quad k = 0,1,2\ldots, N-1 \qquad \ldots(3.6.2c)
\end{aligned}
$$

由规则（2），将 $X(k)$ 分为前后两组：

$$X(k)=\{X(0),X(1),X(2),X(3)\,|\,X(4),X(5),X(6),X(7)\}$$

由式（3.6.2c），前4个k值的 $X(k)$ 为：

$$X(k)=G(k)+W_N^k H(k),k=0,1,2,\ldots\frac{N}{2}-1 \qquad \ldots\ (3.6.2d)$$

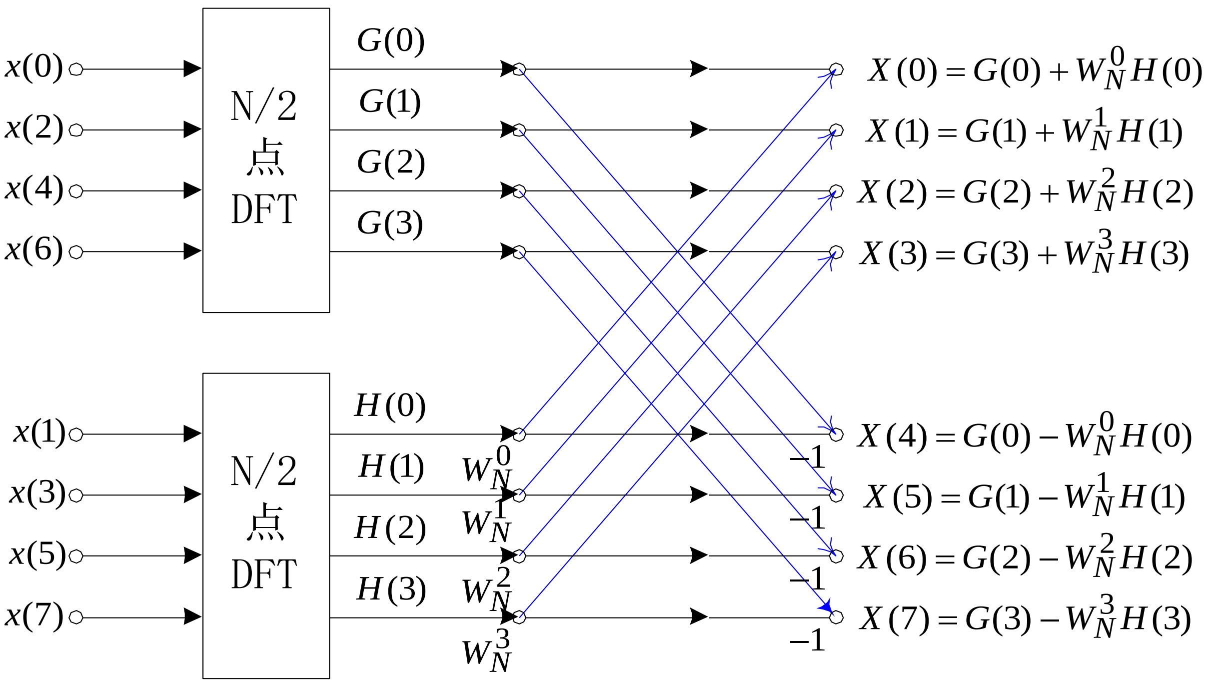
后4个k值的 $X(k)$ 为：

$$X(k+\frac{N}{2})=G(k+\frac{N}{2})+W_N^{k+\frac{N}{2}}H(k+\frac{N}{2}) \qquad \ldots(3.6.2e)$$

$$=G(k)-W_N^k H(k),k=0,1,2\ldots,\frac{N}{2}-1$$

$$\therefore\begin{cases} X(k)=G(k)+W_N^k\cdot H(k) \\ X(k+\frac{N}{2})=G(k)-W_N^k\cdot H(k) \end{cases},k=0,1,2,\ldots,\frac{N}{2}$$

- 上式相当与把原来**N点的DFT**计算分解成**两个** $\frac{N}{2}$ **点的DFT计算**。
- $G(k)$是原序列**偶数项** $g(r)$ 的 $\frac{N}{2}$ 点DFT； $H(k)$ 是原序列**奇数项** $h(r)$ 的 $\frac{N}{2}$ 点DFT。
- 由上式画出信号流如下：



$\because N=2^M$，N 为偶数，$\frac{N}{2}$也为偶数，**将** $\frac{N}{2}$**点的DFT计算**

再分解成 $\frac{N}{4}$ **点的DFT计算，原序号变为：**

$$\{x(0), x(4) \mid x(2), x(6) \mid x(1), x(5) \mid x(3), x(7)\}$$

$\therefore G(k), H(k)$ **分别计算如下：**

$$G(k)=\sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} g(r) W_{N/2}^{rk} = \sum_{l=0}^{\frac{N}{4}-1} g(2l) W_{N/2}^{2lk} + \sum_{l=0}^{\frac{N}{4}-1} g(2l+1) W_{N/2}^{(2l+1)k}$$

$$= \sum_{l=0}^{\frac{N}{4}-1} g(2l) W_{N/4}^{lk} + W_N^{2k} \sum_{l=0}^{\frac{N}{4}-1} g(2l+1) W_{N/4}^{lk}$$

$$= M(k) + W_N^{2k} N(k)$$

注意： k **的取值范围；**

再将$G(k)$ 的k值前后分，则 $G(k)$的后两值为：

$$G(k+\frac{N}{4})=M(k+\frac{N}{4})+W_N^{2(k+\frac{N}{4})}N(k+\frac{N}{4})$$
$$=M(k)-W_N^{2k}N(k),k=0,1,2...,\frac{N}{4}-1$$

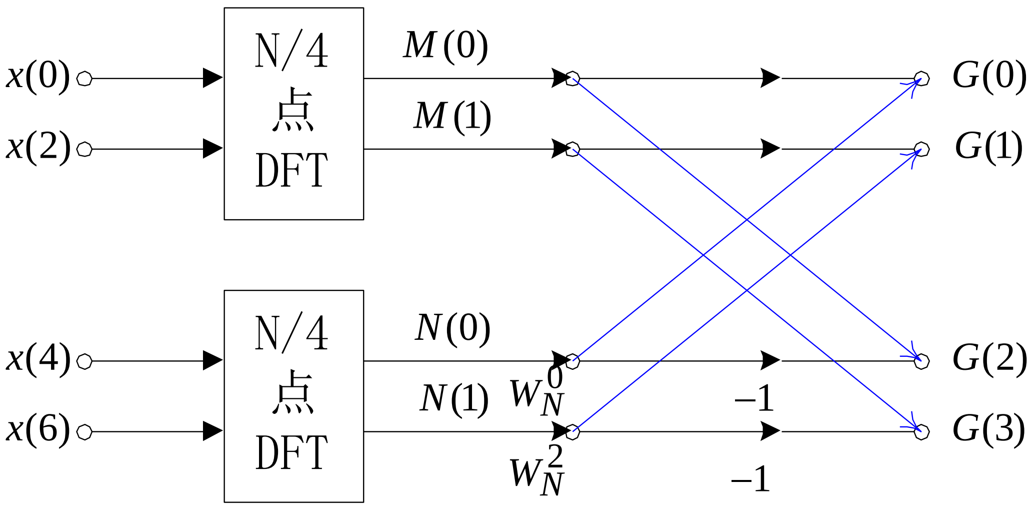
$$\therefore\begin{cases}G(k)=M(k)+W_N^{2k}N(k)\\G(k+\frac{N}{4})=M(k)-W_N^{2k}N(k)\end{cases},k=0,1,2,...,\frac{N}{4}-1$$

注：$M(k),N(k)$**均是** $\frac{N}{4}$ **点的DFT，**

即：

$$M(k)=\sum_{n=0}^{\frac{N}{4}-1}m(n)W_{N/4}^{nk}=\sum_{l=0}^{\frac{N}{4}-1}g(2l)W_{N/4}^{lk}$$

计算 $G(k)$ 的信号流图如下：

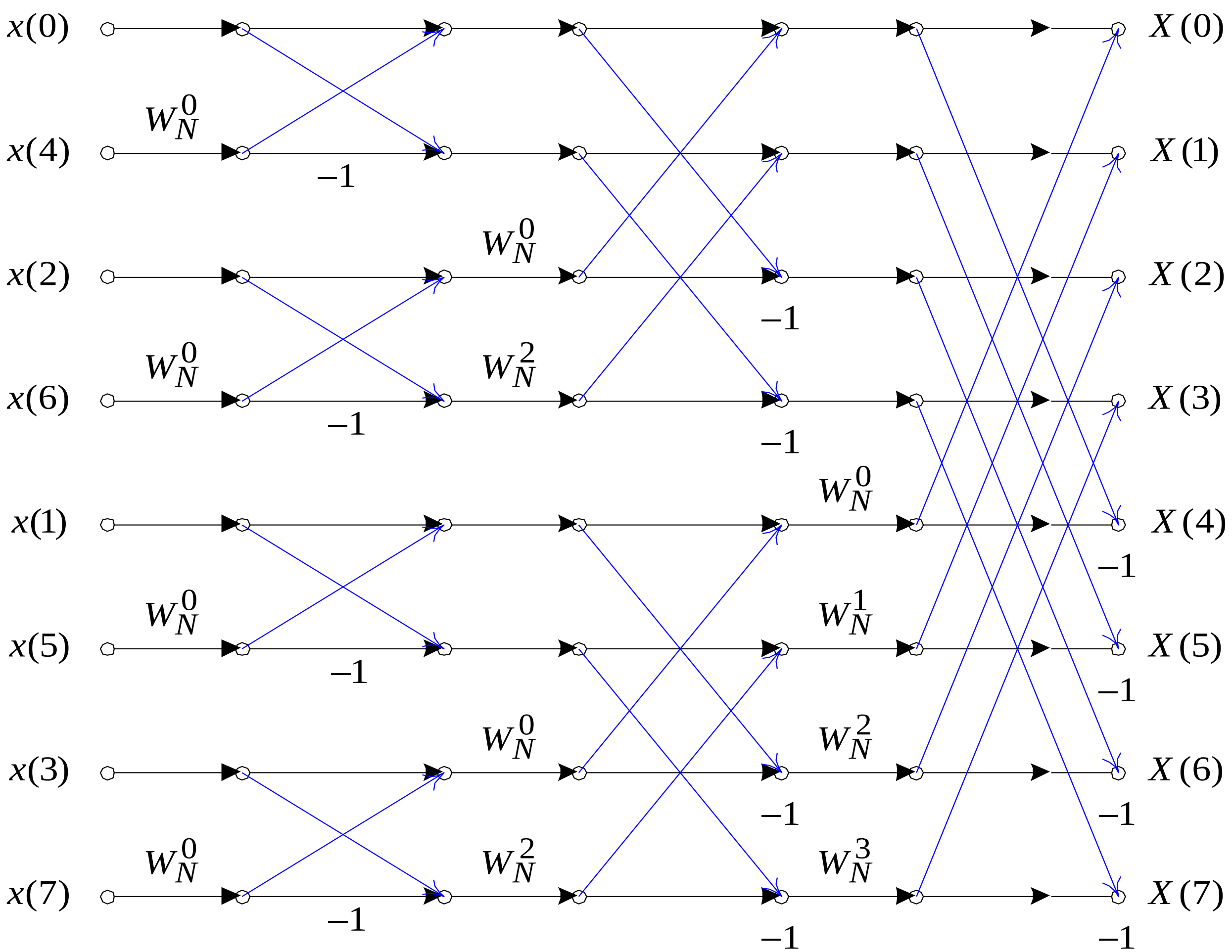


类似地，可得：

$$\therefore \begin{cases} H(k)=\sum_{l=0}^{\frac{N}{4}-1} h(2l)W_{N/4}^{lk}+W_N^{2k}\sum_{l=0}^{\frac{N}{4}-1} h(2l+1)W_{N/4}^{lk}=P(k)+W_N^{2k}Q(k) \\ H(k+\frac{N}{4})=\sum_{l=0}^{\frac{N}{4}-1} h(2l)W_{N/4}^{lk}-W_N^{2k}\sum_{l=0}^{\frac{N}{4}-1} h(2l+1)W_{N/4}^{lk}=P(k)-W_N^{2k}Q(k) \end{cases},k=0,1,2,\ldots,\frac{N}{4}-1$$

注： $P(k),Q(k)$ **均是** $\frac{N}{4}$ **点的DFT；**

综合上述，8点DFT的完整FFT流图如下：



上面时间抽选FFT流图具有三个特点：

①基本计算单元为一碟形；

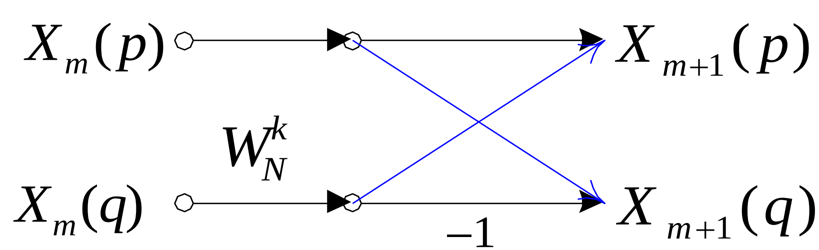
②**输入为“混序”**排列；**输出为正序**排列；

③具有“**同址计算**”特性。

1.蝶形计算：

对于任意$N=2^M$，总可以通过**M级分解**成2点DFT计算，每次由$\frac{N}{2}$个蝶形计算组成。如下图所示，计算方程为：

$$\begin{cases} X_{m+1}(p)=X_m(p)+W_N^k X_m(q) \\ X_{m+1}(q)=X_m(p)-W_N^k X_m(q) \end{cases}$$



完成一个蝶形运算需2次复加法和1次复乘法。

- **完成** $N=2^M$ **点的DFT计算需** $\log_2 N$ **级迭代计算，每级** $\frac{N}{2}$ **个蝶形；蝶形数** $=\frac{N}{2}\log_2 N$ 。
- **完成N点的时间抽选FFT 的总计算量为：**

复乘法次数： $\alpha_F=\frac{N}{2}\log_2 N$ **复加法次数：** $\beta_F=N\log_2 N$

- **直接计算DFT需复乘法次数** $\alpha_D=N^2$ **，则：** $\alpha_F/\alpha_D=\frac{\log_2 N}{2N}$

当 $N=1024$ **时，**

$$\begin{cases}\alpha_F=5120\\ \beta_F=10240\end{cases}\qquad\begin{cases}\alpha_D=4N^2=4{,}194{,}304\\ \beta_D=2N^2+N(N-1)=4{,}192{,}256\end{cases}$$

$$\alpha_F/\alpha_D=\frac{\log_2 1024}{2\times 1024}\approx\frac{1}{205}$$

即：DFT需205小时，FFT需1小时。

2. 同址计算：

完成N点时间抽选FFT计算需 $\log_2 N$ 级迭代运算，每级运算均由N/2个蝶形计算构成。蝶形计算的好处就是同址计算。设输入 $\{x(0), x(4) \mid x(2), x(6) \mid x(1), x(5) \mid x(3), x(7)\}$

分别存入存贮单元$\{Q(1), Q(2), Q(3), Q(4), Q(5), Q(6), Q(7), Q(8)\}$ 中，

第一级运算中：$x(0), x(4)$ 运算后，结果送到 $Q(1), Q(2)$ 保存，

$x(2), x(6)$ 运算后，结果送到 $Q(3), Q(4)$ 保存，

第二级运算中，$Q(1), Q(3)$ 运算后，结果送到 $Q(1), Q(3)$ 保存，

$Q(2), Q(4)$ 运算后，结果送到 $Q(2), Q(4)$ 保存，

完成最后一级运算，中间不需要其它存贮器。同址运算的好处：节省存贮单元。当N越大，好处越明显。

3. 变址计算：

从FFT的流图可知，输入 $\{x(0), x(4) \mid x(2), x(6) \mid x(1), x(5) \mid x(3), x(7)\}$ 是“混序”排列；输出 $\{X(0), X(1), X(2), X(3), X(4), X(5), X(6), X(7)\}$ 是正序排列。

在实际计算中，输入的“混序”是通过输入正序排列按“码位倒置”的变址处理得到的，即：

$$x(1) \rightarrow x(001) \Rightarrow x(100) \rightarrow x(4)$$

这样便可实现FFT的同址计算。

转换过程如下图：

$$x(0)->000<->000->x(0) \qquad x(1)->001<->100->x(4)$$
$$x(2)->010<->010->x(2) \qquad x(3)->011<->110->x(6)$$
$$x(4)->100<->001->x(1) \qquad x(5)->101<->101->x(5)$$
$$x(6)->110<->011->x(3) \qquad x(7)->111<->111->x(7)$$

图中**n**表示自然顺序的标号，**l**表示码位倒置的标号，从图中可知：当时$n=l$，$x(n)$与 $x(l)$不交换；当$n<l$ 时，$x(n)$ 与$x(l)$交换.

3.6.3 频率抽选FFT算法

(Decimation-In-Frequency FFT－DIF FFT)

推导规则：**(1)**对时间前后分；**(2)**对频率偶奇分。推导过程与时间抽选FFT算法类似，请同学们可参考教材自己推导。

3.6.4 N为合数的FFT算法

如果序列的长度 $N \neq 2^M$，通常有两种处理方法：

1.用补零的办法将 $x(n)$ 延长为 2^M，再使用基**2FFT**算法。由于有限长序列补零以后，只是频谱的取样点有所增加。

2.采用以任意数为基数的**FFT**算法。

设**N**等于两个整数**p**和**q**的乘积，即 $N = p \cdot q$，则可将**N**点**DFT**分解成**p**个**q**点**DFT**或**q**个**p**点**DFT**来计算。

先 $x(n)$ 将分为**p**组，每组长为**q**，即：

$$\text{p组} \begin{cases} x(pr) \\ x(pr+1) \\ \vdots \\ x(pr+p-1) \end{cases}, r = 0,1,\ldots,q-1 \qquad \ldots(3.6.4a)$$

例：当 $N=6=p\times q=3\times 2$ 时，可以将 $x(n)$ 分成3组，每组2点。

解： 可将 $x(n)$ 分为以下3组：

第1组： $x(0), x(3)$ ；

第2组： $x(1), x(4)$ ；

第3组： $x(2), x(5)$ 。

可以将6点的DFT分解为：

$$X(k)=\sum_{n=0}^{5}x(n)W_6^{nk}=\sum_{r=0}^{1}x(3r)W_N^{3rk}+\sum_{r=0}^{1}x(3r+1)W_6^{(3r+1)k}+\sum_{r=0}^{1}x(3r+2)W_6^{(3r+2)k}$$

即将6点的DFT分解成3个2点的DFT运算。

然后将N点DFT也分解为p组来计算，每组计算q点的DFT，即：

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{nk}=\sum_{r=0}^{q-1}x(pr)W_N^{prk}+..+\sum_{r=0}^{q-1}x(pr+p-1)W_N^{(pr+p-1)k}$$

$$=\sum_{r=0}^{q-1}x(pr)W_N^{prk}+W_N^{k}\sum_{r=0}^{q-1}x(pr+1)W_N^{prk}+\ldots+W_N^{(p-1)k}\sum_{r=0}^{q-1}x(pr+p-1)W_N^{prk}$$

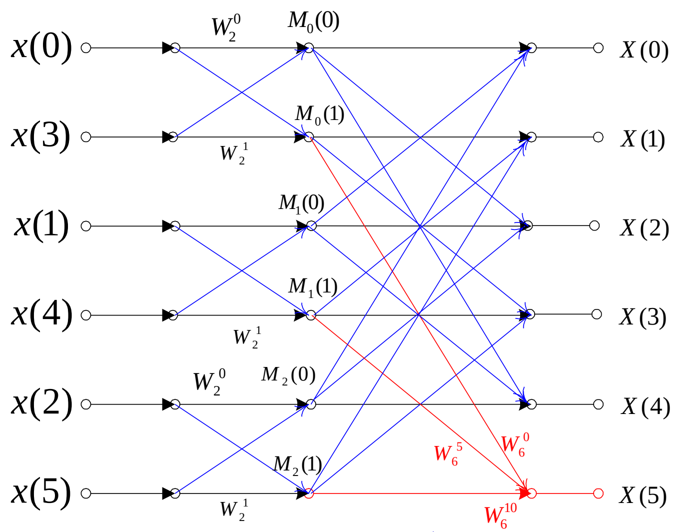
$$=\sum_{l=0}^{p-1}W_N^{lk}\sum_{r=0}^{q-1}x(pr+l)W_N^{prk} \qquad \ldots(3.6.4b)$$

由于$W_N^{prk}=W_{N/p}^{rk}=W_q^{rk}$**，因此，**

$M_l(k)=\sum_{r=0}^{q-1}x(pr+l)W_q^{rk}$**是一个q点DFT，这样N点DFT可写成：**

$$X(k)=\sum_{l=0}^{p-1}W_N^{lk}M_l(k) \qquad \ldots(3.6.4c)$$

一个$N=6=p\times q=3\times 2$的DFT流程图如下图所示。



例：当$N=6=p\times q=3\times 2$时，$X(5)$为：

$$X(5)=\sum_{l=0}^{2}W_6^{lk}M_l(5)=W_6^0M_0(5)+W_6^5M_1(5)+W_6^{10}M_2(5)$$

$$=W_6^0M_0(1)+W_6^5M_1(1)+W_6^{10}M_2(1)$$

如上图中红线所示。

§ 3.7 FFT应用（The Applications of FFT）

3.7.1 利用FFT对信号进行谱分析

所谓谱分析就是计算信号的频谱，包括振幅谱、相位谱和功率谱。

设离散时间信号 $x(n)$ 是从连续时间信号 $x_a(t)$ 取样得到的，定义参数如下：

T - 取样周期（s）；

f_s - 取样频率（Hz），　$f_s = \dfrac{1}{T}$；

f_0 –连续时间信号的最高频率（Hz）；

F - 频率分辨率：指频域取样中两相邻点间的频率间隔（Hz）；

t_p 一信号的最小记录长度（s）， $t_p = \dfrac{1}{F}$；

N - 一个记录长度中的取样数， $t_p = NT$。

根据取样定理，为了避免混叠失真，要求：

$$f_s \geq 2 f_0 \quad \text{或} \quad T \leq \frac{1}{2 f_0} \qquad \text{...(3.7.1a)}$$

最小记录长度为：

$$t_p = NT = \frac{1}{F} \qquad \text{...(3.7.1b)}$$

取样点数N须满足条件：

$$N \geq \frac{2 f_0}{F} \qquad \text{...(3.7.1c)}$$

3.7.2 利用FFT计算线性卷积

- 信号 $x(n)$通过FIR Filter时，系统的输出为：

$$y(n)=x(n)*h(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)h(n-m)$$

- 设信号的长度为 N_1，FIR数字滤波器的单位取样响应的长度为N_2。则： $x(n)$ 和 $h(n)$线性卷积的结果 $y(n)$ 也是一个有限长序列，其长度为 N_1+N_2-1 。

- 直接计算线性卷积总的计算量为：

乘法次数： $P_D=N_1\cdot N_2$；

加法次数：$Q_F=(N_1-1)\cdot(N_2-1)$。

由前面可知，两个有限长序列的线性卷积可用循环卷积来代替，其必要条件是使 $x(n)$ 和 $h(n)$ 都延长至N点，$N=N_1+N_2-1$，延长的部分补充零值，循环卷积可用FFT来计算。

因此$y(n)$的计算由下列步骤完成：

①将 $x(n)$ 和 $h(n)$ 都延长到N点，$N=N_1+N_2-1$；

②计算 $x(n)$ 的N点DFT，即：$X(k)=DFT[x(n)]$；

③计算 $h(n)$ 的N点DFT，即：$H(k)=DFT[h(n)]$；

④计算$Y(k) = X(k) \cdot H(k)$；

⑤计算$Y(k)$的反变换，即：

$$y(n) = IDFT[X(k) \cdot H(k)]。$$

完成以上步骤的总计算量为：

乘法次数：$P_F = \frac{3}{2} N \log_2 N + N$；

加法次数：$Q_F = 3N \log_2 N$。

3.7.3 分段卷积

当$x(n)$ 是一个长序列时，用循环卷积是不利的。因为$h(n)$ 须补很多零值，使计算效率降低。

分段卷积就是把 $x(n)$分成长度为L的n段，L与 $h(n)$的长度M相仿或略长，然后将每段与 $h(n)$ 卷积，最后把每段卷积结果以适当的方法拟合在一起。处理的方法有重叠相加法和重叠保留法。

重叠相加法

将$x(n)$分成长为N 的几个区段，每段表示为：

$$x_m[n]=\begin{cases}x[n+mN], & 0\le n\le N-1\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$$

所以 $x(n)$可表示为$x_m[n]$ 之和，即： $x[n]=\sum_{m=0}^{\infty}x_m[n-mN]$

则：

$$y[n]=h[n]\circledast x[n]=\sum_{m=0}^{\infty}y_m[n-mN]$$

其中：$y_m[n]=h[n]\circledast x_m[n]$，如果 $h[n]$ 的长度为M，

$h[n]\circledast x_m[n]$的长度为 N+M-1 。

- 将 $h(n)$ 与 $x_m[n]$ 均增添零值，使其长度均为L，

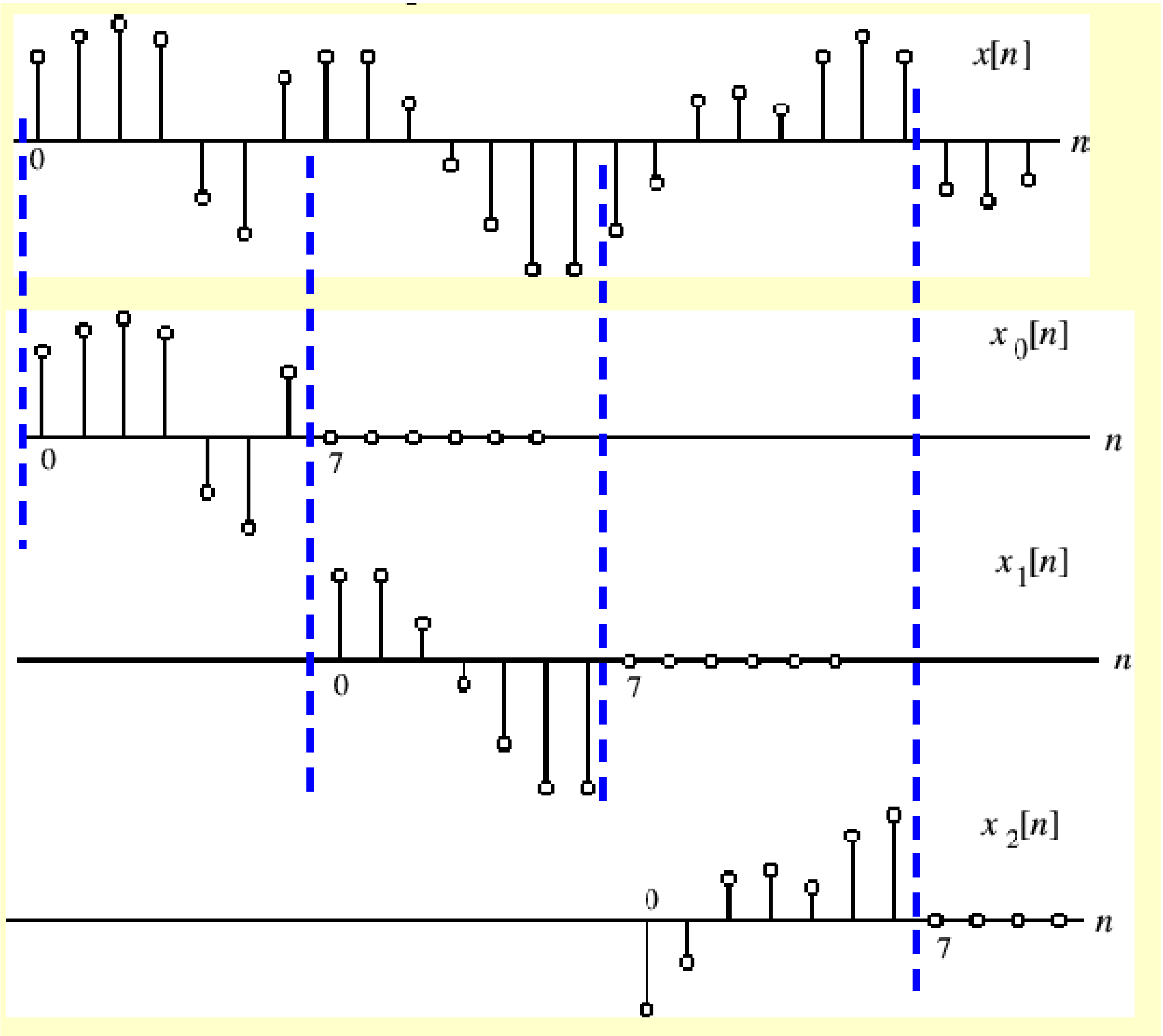
L=N+M-1；这样，以L点的循环卷积实现线性卷积，即：

$$y_m[n] = h[n] \circledast x_m[n] = h(n) \, \textcircled{L} \, x_m[n] \big|_{L=N+M-1}$$

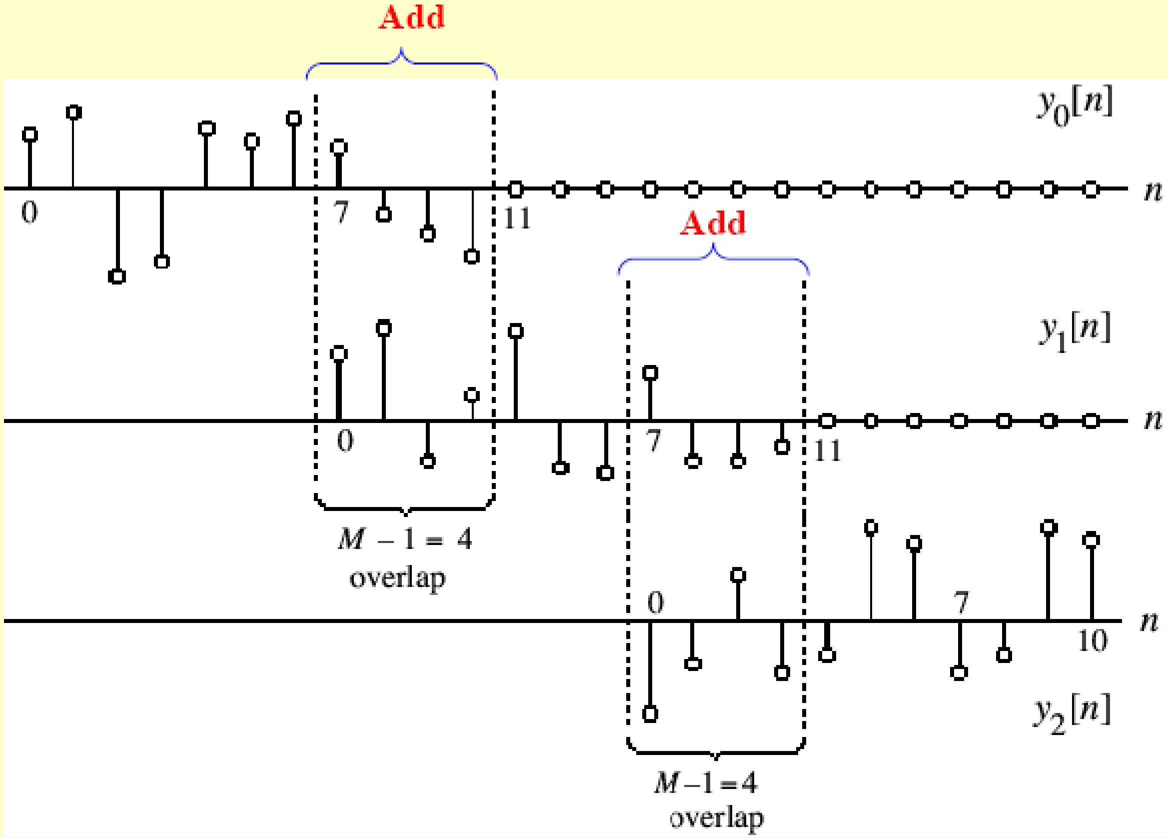
因为 $y_k(n)$ 的长度为N+M-1，$x_m[n]$ 长度为N；相邻两段 $y_k(n)$ 序列必然有M-1点发生重叠。

最后的输出序列将重叠部分相加起来即可。

举例：将x[n]分成长度为7的子段xm[n].



$$y[n] = \sum_{m=0}^{\infty} y_m[n - m7]$$



重叠相加法用DFT处理的步骤归纳如下：

①计算 $h(n)$ **的L点DFT，L=N+M-1；**

②计算 $x_m[n]$ **的L点DFT，L=N+M-1；**

③计算 $Y_m(k) = X_m(k) \cdot H(k)$**；**

④求 $Y_m(k)$**的反变换** $y[n] = IFFT[X_m(k) \cdot H(k)]$**；**

⑤将 $y_m[n]$ **的重叠部分相加起来得到输出：**

$$y[n] = \sum_{m=0}^{\infty} y_m[n - mN]$$

举例：已知序列x(n)与h(n)如下所示，请用3点循环卷积计算

$$y[n]=h[n]\circledast x[n]$$

x(n)={1,2,3,4} n=0,1,2,3; h(n)={1,1} n=0,1.

1: $x_0(n)$={1,2} n=0,1; $x_1(n)$={3,4} n=0,1;
$x(n)= x_0(n)+x_1(n-2)$

2:
$$y[n]=h[n]\circledast x[n]=h[n]\circledast(x_0[n]+x_1[n-2])$$
$$y_0[n]=h[n]\circledast x_0[n]=x_{0e}[n]③h_e[n]$$
$$y_1[n]=h[n]\circledast x_1[n]=x_{1e}[n]③h_e[n]$$

$x_{0e}(n)$={1,2,0} n=0,1,2; $x_{1e}(n)$={3,4,0} n=0,1,2;
$h_e(n)$={1,1,0};
$y(n)=y_0(n)+y_1(n-2)$

3:
$$y_0(n)=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix};y_1(n)=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\7\\4\end{pmatrix};$$

$$y(n)=\{1,3,5,7,4\}n=0,\cdots,4$$

本章结束

谢 谢！