



第三章 微波线性电路分析与设计

(课堂8学时，课后4学时)

参考书目

1. 近代微波技术（讲义），马洪编著；
2. 微波器件与电路，王蕴仪等编著，江苏科学技术出版社，1983年；
3. ADS2011射频电路设计仿真实例；
4. 电子电路的计算机辅助分析与设计方法，清华大学出版社，2008年。
5. 微波集成电路仿真—mwSPICE原理及应用

结合微波集总参数电路及其电路方程的建立方法，介绍几类常见的线性电路分析技术，包括：无源/有源电路的电路矩阵参数与S参数、S参数级联分析、交流小信号稳态分析、直流工作点分析、时域瞬态分析、噪声分析、敏感度分析、容差分析、最优化设计等，重点说明各种分析和设计方法的数学原理、方程建立及其求解方法。（课堂8学时，课后4学时）

- 第一节 微波线性网络的电路矩阵和**S**参数矩阵分析
- 第二节 不定导纳矩阵法分析任意端口微波线性电路
- 第三节 电路方程的建立与求解
- 第四节 微波电路的时域分析
- 第五节 微波电路噪声分析、敏感度分析、容差分析
- 第六节 微波电路的最优化设计
- 第七节 使用**ADS**进行滤波器和微带低噪声放大器设计

第一节 微波线性网络的电路矩阵和S参数矩阵分析

随着通讯、雷达、广播、遥感、测量和空间技术等日益发展，从米波段到毫米波段甚至更短的广阔波段上，在对信号的收发、传输和处理中，出现了品种繁多的微波元件。微波网络是以这些元件及其系统为对象，研究它们的传输特性和设计方法的。

在这些元件中，根据使用的功能不同有：把某一功率按一定比例分配为几路输出，或者相反地，把几路功率合成一路后再输出的**功率分配器**、**定向耦合器**；使某一给定频带的信号通过（或抑制），而抑制（或通过）其余频率信号的**滤波器**；为保证负载能从信号源获取最大的功率的**阻抗匹配器**；连接各种不同截面形状和尺寸的传输线的**转换接头**以及为获得信号单方向传输的**不可逆元件（隔离器、环行器）**等。

在结构上，这些元件是利用各种类型微波传输线的不均匀性并同外界相连接。根据传输线结构的不同有：平行双线、同轴线、带状线、微带线、金属波导、介质波导以及这些传输线的组合等结构形式。因此，我们常常用一种组合方法命名这些元件，如同轴线滤波器，微带功率分配器、波导环行器等等。为了分析的方便，按照同外界相连接端口的数目多少分为单端口、二端口、三端口、四端口、六端口……，统称为微波元件。

把具有独立功能的多个微波元件按一定方式连接起来，就组成一个复杂的微波系统，以实现一个整体目的，如天线馈电系统、微波测量系统、微波收发前端等。

这里“微波”一词，不应只从波段上去认识，而更应当从这些元件及其系统的基本特征上去认识，即从元件的尺寸大小同工作波长可相比拟，或者说，电磁波信号从元件中的一处传输到另一处的时间同信号的振荡周期可相比拟去认识。这对分析这类元件及系统、扩展频段、研制新元件都是有益的。

研究微波元件常用两种方法，即**场的方法**和**路的方法**。

场的方法：以电、磁场强度作为基本量，以麦克斯韦方程组为基础，求解电磁场的边值问题，得出元件中各电、磁场的表达式，最终，可以用等效参量表示端口之间的传输特性。这种分析方法在理论上是严格的，普遍适用的，但在实际应用上并不都是方便可行的，特别是对那些形状不规则的微波元件，由于边界复杂，媒质不一，数学表示及运算都是很困难。

路的方法：把微波元件用一个网络来等效，应用电路和传输线理论，求得元件各端口间信号的相互关系。虽然它得不到元件内部场的分布情况，但仍不失为研究微波元件及系统的重要方法。这是因为在工程应用中，微波元件的作用是通过它对微波信号的传输特性（包括反射特性）来表示的，当微波信号从微波元件的一端口输入，再从另一端口输出，由于元件中的不均匀性，信号的传输功率、幅度、相位、频率都有可能改变，这些改变对外界的影响，常常用微波元件端口间的外特性表示，一旦确定了端口间信号的相互关系，其外特性就完全确定，而不必理会元件内部场的分布情况。

需要指出，尽管用路的分析方法即网络方法能避免复杂的场计算，获得元件的外部特性（分析问题）或者根据技术特性要求，确定基本元件及其组成方式（设计问题），但它仍然是以场分析法为基础的。

例如，在金属波导中某一横截面处放置膜片，其外特征及等效电路只能由场分析法或者测量方法求得，网络分析法是无能为力的。然而，当建立起膜片的等效参数和等效电路后，就可以用网络方法对由膜片组成的元件进行分析和设计。因此，微波工程中，网络方法是同场的方法及测量方法紧密相连、相辅相成的。本节将不涉及那些必须用场或测量方法求解的基本元件，如各类微波传输线中的膜片、销钉、跳变、终端、分支、耦合孔等的分析，实际应用和分析设计时直接引用其等效参数及计算公式即可。

微波网络的分析模型

为了用统一的观点处理各类微波元件及其系统，把它们概括成一个网络分析模型，如图3-1(a)所示。这个模型是由边界封闭曲面围成的、内部结构确定的传输电磁波能量的媒质空间和若干条同外界相连接的微波传输线所组成。媒质空间区域 V 内充填一种或多种媒质。微波传输线为无耗、均匀传输线，其类型可以相同或不同，或横截面形状相同而尺寸大小不同，可以是单模传输或是多模传输。同外界相连接处称为端口，常给以编号 $(1, 2, \dots, n)$ ，它是一个与传输线中电磁波能量传输方向相垂直的传输线横截面，这个横截面又称为参考面，用 T 表示。

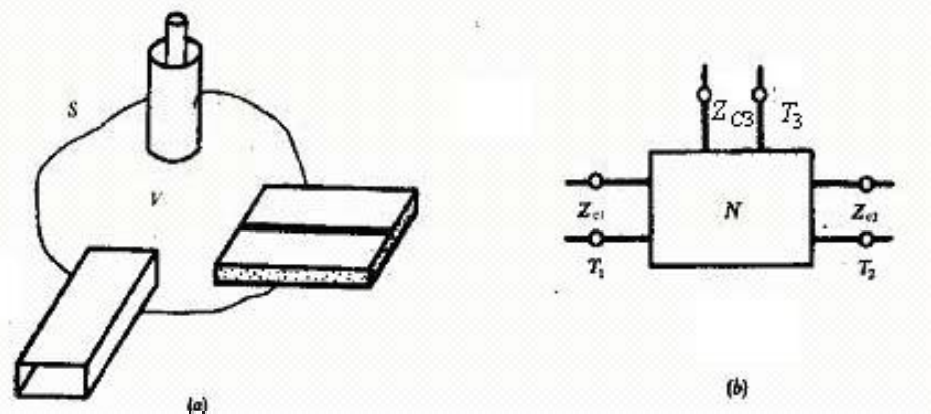


图3-1 微波网络分析模型

(a) 分析模型

(b) 表示方法

除端口面外的封闭曲面 S 为理想导体面，此界面上的电场切向分量为零。一般说来，对金属波导，可认为内边界为封闭边界 S ，当考虑到金属有损耗时，可把媒质空间扩大到计入趋肤深度的区域，而认为理想导体边界面安放在电磁场强为零的地方；对开放式系统，可扩大媒质空间区域，直至场强为零处安放理想导体界面。这样，网络分析模型就是由端口参考面和理想导体边界面围成的媒质空间。用一个方框和平行双线传输线及其参考面代表，如图3-1(b)所示。这就是微波等效网络，或直接称做微波网络。若媒质空间区域内没有任何场源存在，称做无源微波网络；若充填媒质是与场强无关的线性媒质，称做线性微波网络。本章讨论无源或有源线性微波网络的分析与设计方法。

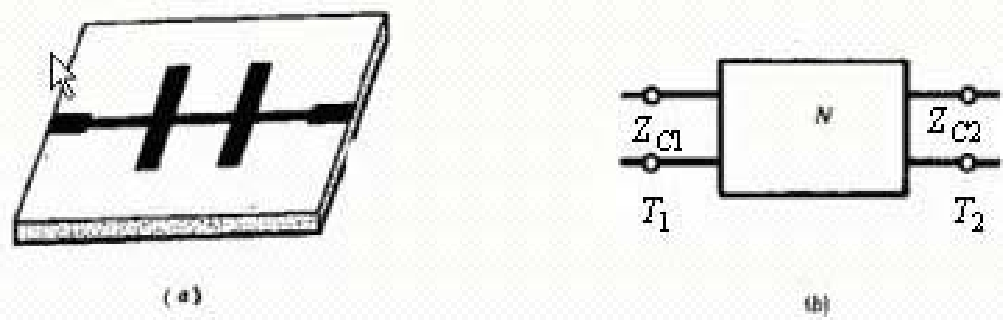


图3-2 微带低通滤波器及等效网络

按照上述方法建立起的微波网络，同低频集总参数网络相似，都是用网络参量表征其外特性，并可等效成各种集总电路的形式。这样，低频网络理论就能够推广应用于微波网络。但要特别注意微波网络同低频网络的区别，这些区别是由微波网络本身的特点所决定的，其表现在：

(1) 一个微波元件或系统用一个微波网络表示时，必须明确规定参考面的位置。如果选择不同的参考面位置，则网络所规定的空间区域也改变，网络参量随之改变。参考面位置可按照需要和方便选取，但应遵循两条原则：

- 参考面必须同均匀传输线的纵方向相垂直；
- 在参考面处只考虑传输模式场的存在，不考虑其它模式场的存在。通常参考面应选择在远离不均匀性的地方。

(2) 微波网络参量是在微波传输线中只存在单一传输模式下确定的。例如对金属矩形波导，通常是指 TE_{10} 主模；对同轴线、带状线，是指TEM模，当微波传输线中存在多模传输时，按不同模式考虑为一个多端口网络，其网络参量仍按各个传输模式分别确定。

(3) 微波网络元件是几何形体很不相同的各种微波结构，视其储存磁能、储存电能和消耗电能的多少而决定为电感、电容和电阻性元件，它们的元件值 L 、 C 和 R 随频率改变而变化。

(4) 通过微波网络端口的电磁波能量，由端口横截面上的横向电场和横向磁场唯一确定。但等效网络的端口参量，如电压波和电流波等，视引出传输线等效特性阻抗的选取而定，不存在单值性。事实上，在微波网络中，采用归一化参量是方便的。

微波网络理论紧密地同传输线理论和低频网络理论相联系。在用TEM波传输线作为网络引出线时，可以直接应用传输线的电路分析理论。

在用色散型传输线作为引出线时，必须在场分析的基础上，按某些规定方法作为等效TEM波传输线来描述，建立起等效电压入射波、等效电压反射波、等效电流入射波、等效电流反射波以及等效特性阻抗等参量，而后可用传输线理论分析电磁波的传输及反射特性。

单模等效TEM波传输线

TEM波传输线：传输常数 γ 、特性阻抗 Z_0 。

任意微波传输线：任一模式的传播常数取决于横向场问题的解，再对这个模式定义一个等效特性阻抗，则该模式传输的微波传输线可等效表示为一个等效传输线，其传播常数为该模式的传播常数。

等效传输线：等效电压（模式电压）和等效电流（模式电流）。

等效TEM波传输线的传输功率应与原微波传输线的传输功率相等的原则，只需考虑对传输功率有贡献的横向场分量。如果令 \vec{e}_t 和 \vec{h}_t 分别代表这个模式横向电场和横向磁场分布的基准场矢量，它们只是横向截面坐标的函数，则真实的入射电场和磁场及反射电场和磁场的横向分量可写成：

$$\vec{E}_t^+ = V^+ \vec{e}_t \quad \vec{H}_t^+ = I^+ \vec{h}_t$$

$$\vec{E}_t^- = V^- \vec{e}_t \quad \vec{H}_t^- = I^- \vec{h}_t$$

式中 V^\pm 和 I^\pm 为标量系数，上标 \pm 符号分别代表入射和反射。总横向电场和横向磁场可表示为

$$\vec{E}_t = \vec{E}_t^+ + \vec{E}_t^- = V^+ \vec{e}_t + V^- \vec{e}_t = V \vec{e}_t$$

$$\vec{H}_t = \vec{H}_t^+ - \vec{H}_t^- = I^+ \vec{h}_t - I^- \vec{h}_t = I \vec{h}_t$$

其中

$$V = V^+ + V^-$$

$$I = I^+ - I^-$$

这样，场的**横向分量被分解成为系数标量和基准场矢量两个部分**，前者代表横向场分量沿纵向的大小分布及相位变化，后者则作为场横向分布的描述。只要确定出基准场矢量，则用标量系数就完全能代表横向场沿纵向的分布。

且

$$\begin{cases} \frac{dV}{dz} = -\gamma Z_c I \\ \frac{dI}{dz} = -\frac{\gamma}{Z_c} V \end{cases} \quad Z_c = \frac{V^+}{I^+} = \frac{V^-}{I^-}$$

上面两式称为**混合模的等效传输线方程**，其中V代表该模式的横向电场 \vec{E}_t 沿z坐标的大小变化，称为**该模式的等效电压**，简称**模式电压**；I代表该模式的横向磁场 \vec{H}_t 沿z坐标的大小变化，称为**该模式的等效电流**，简称**模式电流**。

而 V^+ 、 I^+ 与 V^- 、 I^- 分别称为入射波与反射波模式电压和模式电流， Z_c 代表该模式的行波电压和行波电流的比值，称为**该模式的等效特性阻抗**，简称**特性阻抗**。这组方程决定了任意微波传输线中电磁波沿纵向的传输特性，故称为**广义传输线方程**。

基于V、I满足传输线方程，电磁波沿纵向的传输问题可由V和I来表征，并直接应用传输线理论来处理。该微波传输线则等效为TEM波传输线，其特性阻抗为 Z_c ，传输常数为 γ ，单位长度的串联电抗为 γZ_c ，单位长度的并联电纳为 γ / Z_c 。

注意，模式电压V和模式电流I是从对传输功率有贡献的横向场出发，定义的一种等效参量，它只是场的横向分量与场基准矢量的一个比例系数，其数值大小及量纲可以任意选取。它只具有形式上的意义，而并不一定是物理真实的。

功率归一化条件：根据沿z方向传输的复数功率为：

$$P = \int_S (\vec{E}_t \times \vec{H}_t^*) \cdot \hat{z} ds = VI^* \int_S (\vec{e}_t \times \vec{h}_t^*) \cdot \hat{z} ds$$

基准场为实数矢量。令： $\int_S (\vec{e}_t \times \vec{h}_t) \cdot \hat{z} ds = 1$

所以：

$$P = VI^*$$

Z_C 的选用具有任意性，一般按实用、方便进行，经常采用的有三种：

(1) 按某种特定方法定义和计算：

$$Z_{C1} = P^+ / |I^+|^2$$

$$Z_{C2} = \frac{|V^+|^2}{P^+}$$

$$Z_{C3} = \frac{V^+}{I^+}$$

(2) 选用特性阻抗等于波阻抗： $Z_c = Z_w$ ， $Z_w = \frac{E_t^+}{H_t^+} = \frac{E_t^-}{H_t^-}$

(3) 选用特性阻抗为单位1： $Z_c=1$ ，称作归一化特性阻抗。相应于归一化特性阻抗下的电压和电流，称作归一化电压和归一化电流。为突出归一化，以便同未归一化量相区别，习惯上用小写字母 z, v 和 i 分别代表归一化阻抗、归一化电压和归一化电流。

在基准场功率归一化条件下，复数传输功率应满足 $VI^* = vi^*$ ，入射波功率为 $V^+I^{+*} = v^+i^{+*}$ ，反射波功率为 $V^-I^{-*} = v^-i^{-*}$ 。因为： $Z_C = V^+/I^+ = V^-/I^-$ ， $v^+/i^+ = v^-/i^- = 1$ ，得

$$\begin{aligned} \frac{1}{Z_C} |V^+|^2 &= |v^+|^2 & Z_C |I^+|^2 &= |i^+|^2 \\ \frac{1}{Z_C} |V^-|^2 &= |v^-|^2 & Z_C |I^-|^2 &= |i^-|^2 \end{aligned}$$

故得归一化电压和电流与未归一化值的转换关系为：

$$v^+ = \frac{V^+}{\sqrt{Z_C}} \quad v^- = \frac{V^-}{\sqrt{Z_C}} \quad i^+ = \sqrt{Z_C} I^+ \quad i^- = \sqrt{Z_C} I^-$$

$$v = v^+ + v^- = \frac{1}{\sqrt{Z_C}} (V^+ + V^-) = \frac{V}{\sqrt{Z_C}} \quad i = i^+ - i^- = \sqrt{Z_C} (I^+ - I^-) = \sqrt{Z_C} I$$

归一化输入阻抗为 $z_{in} = \frac{v}{i} = \frac{1}{Z_C} \cdot \frac{V}{I} = \frac{Z_{in}}{Z_C}$

归一化电压和归一化电流的量纲都为 (伏安)^{1/2}，归一化阻抗无量纲。

采用这三种特性阻抗，所得等效TEM波传输线如图3-3所示。这样，任何单模微波传输线都可以作为如图3-3（b）、（c）、（d）中的一种等效TEM波传输线。由于所选用的特性阻抗不一样，各等效传输线中的电压和电流都不相同，它们分别与各自的场基准矢量相对应，但它们都表示着共同的横向场 \vec{E}_t 和 \vec{H}_t ，所传输的功率是相同的。

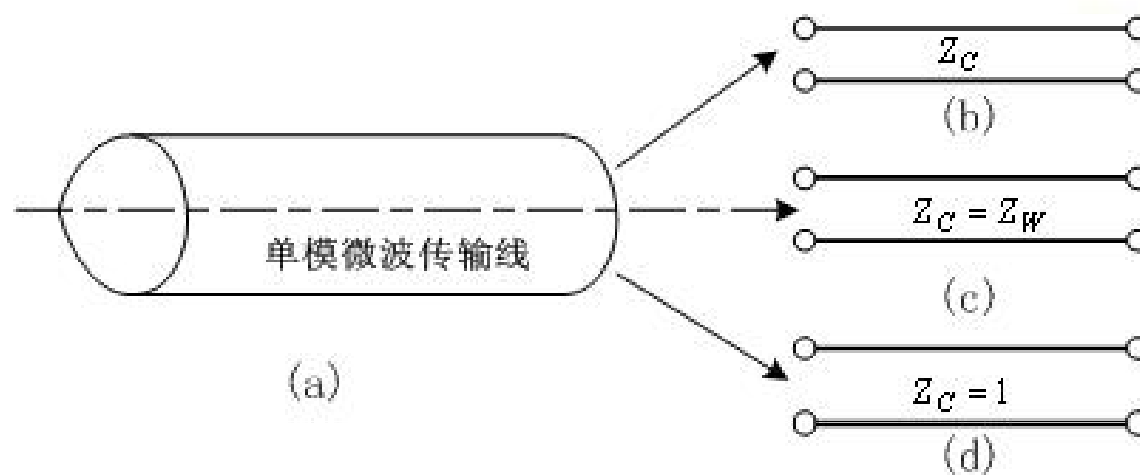


图3-3 单模微波传输线及其等效TEM模传输线

多模等效传输线：

当工作频率提高，微波传输线中将可能有几个传播模式同时存在，这种传输线称为多模传输线。在多模传输线中，任一个模式的横向电场和横向磁场，都可以按上述方法定义相应的模式电压、模式电流以及该模式的基准场矢量，这样则有

$$\vec{E}_t = \sum_{i=1}^n \vec{E}_{ti} = \sum_{i=1}^n V_i \vec{e}_{ti}$$

$$\vec{H}_t = \sum_{i=1}^n \vec{H}_{ti} = \sum_{i=1}^n I_i \vec{h}_{ti}$$

根据场的模式正交性，该传输线中通过横截面S传输的有功功率为：

$$P = \sum_i^n \operatorname{Re} \int_S (\vec{E}_{ti} \times \vec{H}_{ti}^*) \cdot \hat{z} ds = \sum_{i=1}^n \operatorname{Re} \int_S (V_i \vec{e}_{ti} \times I_i^* \vec{h}_{ti}) \cdot \hat{z} ds = \sum_{i=1}^n \operatorname{Re} V_i I_i^* \int_S (\vec{e}_{ti} \times \vec{h}_{ti}) \cdot \hat{z} ds$$

在模式基准场功率归一化条件 $\int_S (\vec{e}_{ti} \times \vec{h}_{ti}) \cdot \hat{z} ds = 1$ 下，有：

$$P = \sum_{i=1}^n \operatorname{Re} V_i I_i^*$$

每一个模式的行波电压与行波电流之比为该模式的特性阻抗，即：

$$Z_{Ci} = V_i^+ / I_i^+ = V_i^- / I_i^-$$

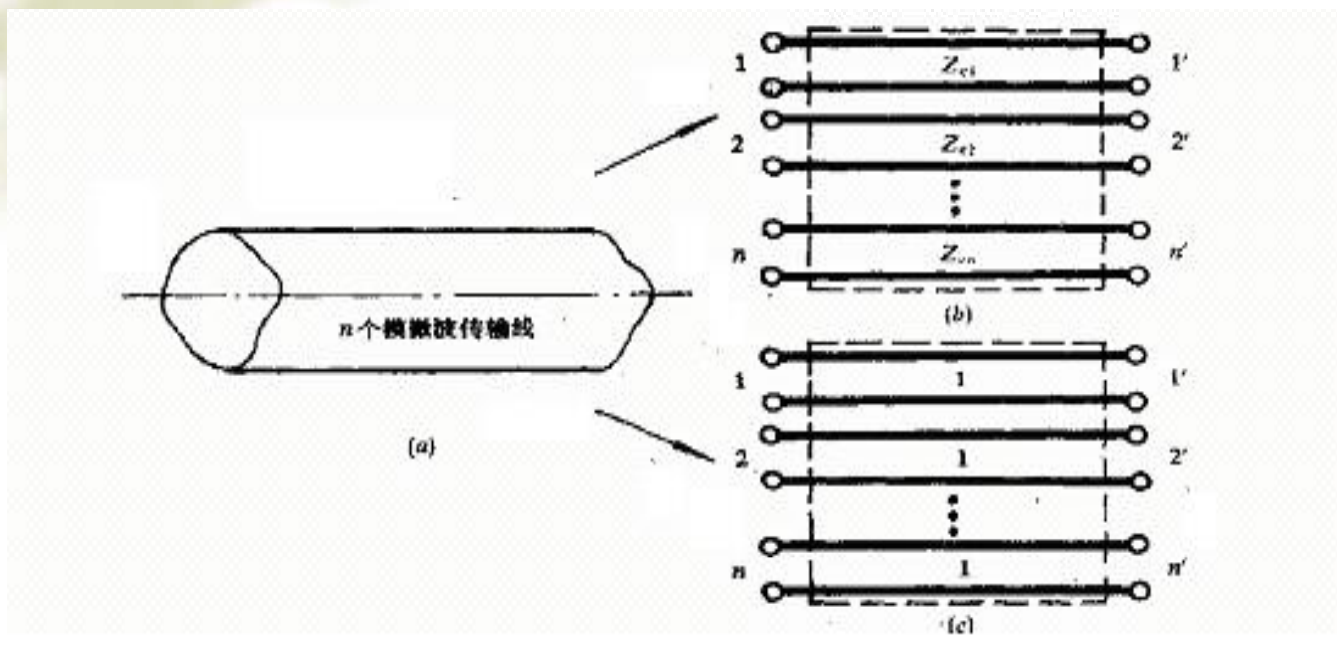


图3-4 多模微波传输线及其等效传输线

一个有n个传输模的单端口元件，将等效成一个2n端口网络。

多模元件就能用多端口网络来讨论。

几个重要定理

➤ 坡印廷能量定理
$$\sum_{i=1}^n V_i I_i^* = P + j2\omega(W_m - W_e)$$

它表示通过网络各个端口**流入**网络内的复功率，其实部（净有功功率）为网络的消耗功率，而虚部（净无功功率）为网络内电磁能量的变化率。

➤ 互易定理
$$\sum_{i=1}^n (V_{i1} I_{i2} - V_{i2} I_{i1}) = 0$$

➤ 无耗单端口网络的电抗定理
$$\frac{dX}{d\omega} = \frac{2}{|I|^2} (W_e + W_m) \geq 0 \quad \frac{dB}{d\omega} = \frac{2}{|V|^2} (W_e + W_m) \geq 0$$

无耗单端口网络的输入电抗函数或输入电纳函数的斜率总是正的。

微波网络的电路矩阵

在微波网络模型中，在封闭理想导体面上的切向电场为零，因此只需要考虑端口参考面上的切向场，这个切向场即是引出传输线端口参考面处的横向场。每一个端口参考面上有电场和磁场两个横向场，对一个 n 端口网络来说，有 $2n$ 个端口横向场。根据唯一性原理，当给定各个端口参考面上的横向电场，则各个端口参考面上的横向磁场以及区域内部的场分布也就唯一地确定；或者当给定各个端口参考面上的横向磁场，则各个端口参考面上的横向电场以及区域内部的场分布也同样唯一地确定。

因此，用端口面上的 n 个横向场变量能唯一地确定端口参考面上的其余 n 个横向场变量，且网络内部的场分布也唯一地确定。这就是网络解法的依据。它使我们有可能仅仅去研究 $2n$ 个端口场变量中的 n 个变量与另外 n 个变量相互依存的唯一关系，从而给出网络的端口特性。至于网络内部场的分布，尽管也已唯一地确定，微波网络理论并不去研究它。

如果用各个端口参考面上的模式电压分别代表各个横向电场，用各端口参考面上的模式电流分别代表各个横向磁场，这样，端口面上的场变量，就能被电压和电流这些电路参量所替代。对网络端口特性的研究就变为确定各端口参考面上的电压和电流的函数关系了。

当区域V内充填媒质是线性媒质，即媒质的介电常数 ε ，导磁率 μ 和电导率 σ 均与场强无关时，麦克斯韦方程组为线性方程组，各场强之间的关系是线性的，因而代表端口上场强的模式电压和模式电流之间的关系也是线性的，这一线性关系可用一组具有常系数的线性代数方程组来表示。在网络理论中，代数方程组中的常系数称为网络参量。在同一工作频率下，它们只取决于网络本身的结构和端口参考面的位置，与外界激励源无关。

根据线性代数方程组的关系式，网络参量往往被排列成一个n阶矩阵（方阵），称为网络矩阵。采用矩阵形式，避免了用方程组直接计算，这将给网络分析带来极大的方便。根据电压、电流这两个电路变量的线性关系，并按照规定标号顺序，排列成的矩阵，统称为网络的电路矩阵。

二端口微波网络的电路矩阵

具有两个端口、在同外界相连的传输线中只存在一个传输模式的微波元件和微波接头，称作二端口微波网络，用图3-5表示。图中标明了四个端口变量——两个电压和两个电流，以及引出传输线的特性阻抗。

按照习惯规定，各个端口参考面上的电流正方向都指向网络。由于已规定电流正方向与坐标 z 同方向，所以取各个端口传输线的纵向坐标 z 也都指向网络。

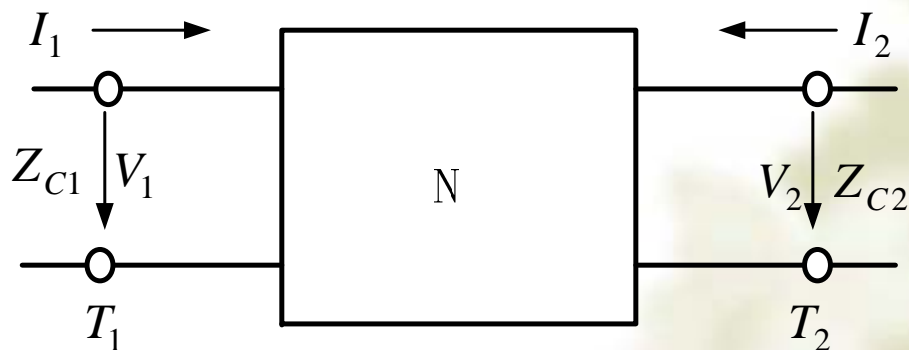


图3-5 二端口微波网络

➤ 阻抗矩阵

$$\begin{cases} V_1 = Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 \\ V_2 = Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} \quad [V] = [Z] [I]$$

$$[Z] = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} Z_{11} &= \left. \frac{V_1}{I_1} \right|_{I_2=0} & Z_{12} &= \left. \frac{V_1}{I_2} \right|_{I_1=0} \\ Z_{21} &= \left. \frac{V_2}{I_1} \right|_{I_2=0} & Z_{22} &= \left. \frac{V_2}{I_2} \right|_{I_1=0} \end{aligned}$$

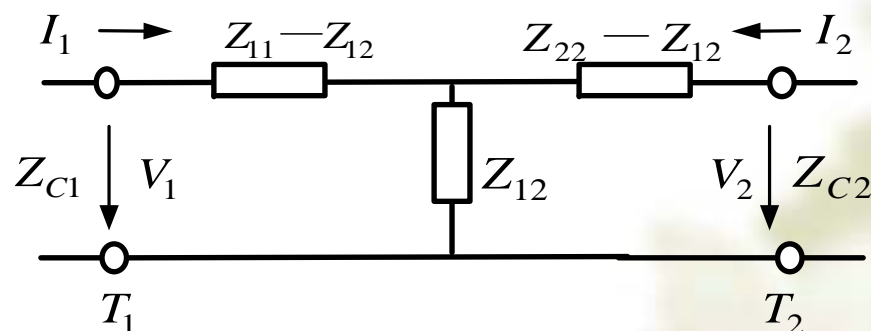


图3-6 二端口微波网络T形等效电路
(可逆网络时)

➤ 导纳矩阵

$$\begin{cases} I_1 = Y_{11}V_1 + Y_{12}V_2 \\ I_2 = Y_{21}V_1 + Y_{22}V_2 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} \quad [I] = [Y] [V]$$

$$[Y] = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix}$$

$$Y_{11} = \left. \frac{I_1}{V_1} \right|_{V_2=0} \quad Y_{12} = \left. \frac{I_1}{V_2} \right|_{V_1=0}$$

$$Y_{21} = \left. \frac{I_2}{V_1} \right|_{V_2=0} \quad Y_{22} = \left. \frac{I_2}{V_2} \right|_{V_1=0}$$

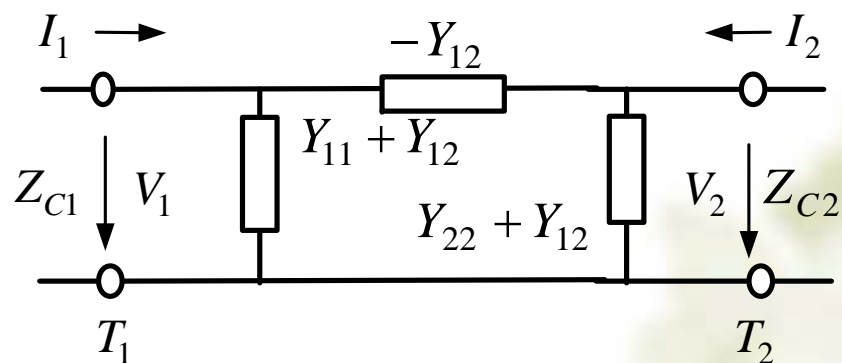


图3-7 二端口微波网络的 Π 型等效电路
(可逆网络时)

级联矩阵

$$\begin{cases} V_1 = AV_2 - BI_2 \\ I_1 = CV_2 - DI_2 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} V_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{pmatrix} \quad [\psi_1] = [A] [\psi_2]$$

$$[A] = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

$$A = \left. \frac{V_1}{V_2} \right|_{I_2=0} \quad B = \left. \frac{V_1}{-I_2} \right|_{V_2=0}$$

$$C = \left. \frac{I_1}{V_2} \right|_{I_2=0} \quad D = \left. \frac{I_1}{-I_2} \right|_{V_2=0}$$

$$\begin{pmatrix} V_1^{(1)} \\ I_1^{(1)} \end{pmatrix} = [A_1] \begin{pmatrix} V_2^{(1)} \\ -I_2^{(1)} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} V_1^{(2)} \\ I_1^{(2)} \end{pmatrix} = [A_2] \begin{pmatrix} V_2^{(2)} \\ -I_2^{(2)} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = [A] \begin{pmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{pmatrix} \quad [A] = [A_1] [A_2]$$

任意m个二端口网络的总级联矩阵A等于各个网络的A矩阵的顺序连乘：

$$[A] = [A_1] \cdot [A_2] \cdots [A_m]$$

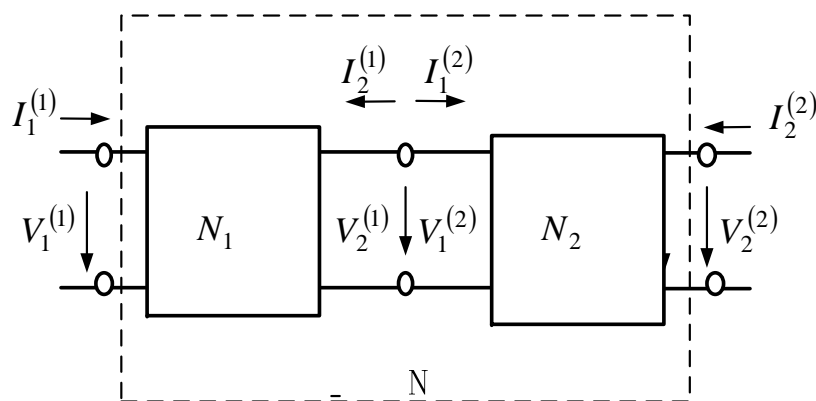


图3-8 二端口网络的级联

➤ 归一化电路矩阵

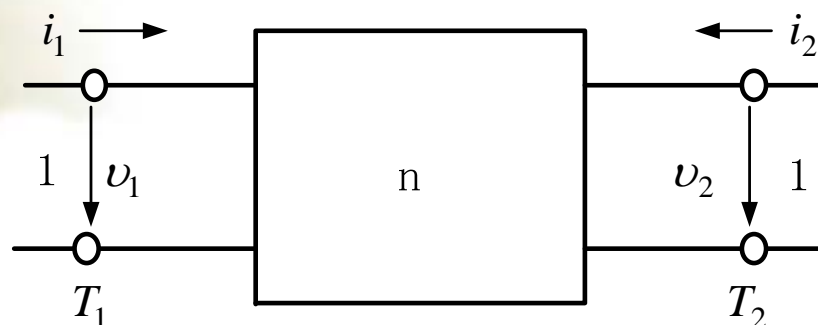


图3-9 归一化二端口微波网络

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = [z] \cdot \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{Y_{C1}} & 0 \\ 0 & \sqrt{Y_{C2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = [y] \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{Z_{C1}} & 0 \\ 0 & \sqrt{Z_{C2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ i_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_2 \\ -i_2 \end{pmatrix} = [a] \cdot \begin{pmatrix} v_2 \\ -i_2 \end{pmatrix}$$

$$[v] = [\sqrt{Y_C}] [V]$$

$$[i] = [\sqrt{Z_C}] [I]$$

$$[z] = [\sqrt{Y_c}] [Z] [\sqrt{Y_c}] \quad [Z] = [\sqrt{Z_c}] [z] [\sqrt{Z_c}]$$

$$[y] = [\sqrt{Z_c}] [Y] [\sqrt{Z_c}] \quad [Y] = [\sqrt{Y_c}] [y] [\sqrt{Y_c}]$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A\sqrt{Z_{C2}/Z_{C1}} & B/\sqrt{Z_{C1}Z_{C2}} \\ C\sqrt{Z_{C1}Z_{C2}} & D\sqrt{Z_{C1}/Z_{C2}} \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a\sqrt{Z_{C1}/Z_{C2}} & b\sqrt{Z_{C1}Z_{C2}} \\ c/\sqrt{Z_{C1}Z_{C2}} & d\sqrt{Z_{C2}/Z_{C1}} \end{bmatrix}$$

➤ 电路矩阵参量的互换

$$[Z][Y] = [I]$$

$$\begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{C} \begin{pmatrix} A & |A| \\ 1 & D \end{pmatrix} = \frac{1}{|Y|} \begin{pmatrix} Y_{22} & -Y_{12} \\ -Y_{21} & Y_{11} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{B} \begin{pmatrix} D & -|A| \\ -1 & A \end{pmatrix} = \frac{1}{|Z|} \begin{pmatrix} Z_{22} & -Z_{12} \\ -Z_{21} & Z_{11} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \frac{1}{Z_{21}} \begin{pmatrix} Z_{11} & |Z| \\ 1 & Z_{22} \end{pmatrix} = -\frac{1}{Y_{21}} \begin{pmatrix} Y_{22} & 1 \\ |Y| & Y_{11} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} |A| = AD - BC \\ |Z| = Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21} \\ |Y| = Y_{11}Y_{22} - Y_{12}Y_{21} \end{cases}$$

归一化网络矩阵 $[z]$ 、 $[y]$ 和 $[a]$ 的互换关系，与上述各式具有相同形式。

多端口微波网络电路矩阵：略

微波网络电路矩阵的性质

- 无源网络电路矩阵的性质： $[Z_H]$ 和 $[Y_H]$ 是厄米矩阵

$$[\tilde{Z}_H]^* = [Z_H] \quad [\tilde{Y}_H]^* = [Y_H] \quad (\sim \text{表示转置矩阵}, * \text{表示共轭})$$

$$\text{其中: } [Z_H] = \frac{1}{2}([Z] + [\tilde{Z}]^*) \quad [Y_H] = \frac{1}{2}([Y] + [\tilde{Y}]^*)$$

在无源网络中，网络输出的功率不可能大于向它输入的功率，因此：

$$[\tilde{I}]^* [Z_H] [I] \geq 0 \quad [\tilde{V}]^* [Y_H] [V] \geq 0$$

$[Z_H]$ 、 $[Y_H]$ 是非负定厄米矩阵。

在无源、有耗网络中， $[Z_H]$ 、 $[Y_H]$ 是**正定厄米矩阵**：

$$[\tilde{I}]^* [Z_H] [I] > 0 \quad [\tilde{V}]^* [Y_H] [V] > 0$$

➤ 可逆网络电路矩阵的性质

设有一个接有特定负载及激励电源的二端口网络，观察它的响应（传输特性），再把负载与激励电源交换，观察响应，如果这两个响应相同，则网络是可逆的，称为**可逆网络**。物理学上称为“**互易**”。对于多端口网络，如果其中任意两个端口之间都是可逆的，则该网络是可逆网络，否则是不可逆网络。

根据互易定理，当微波元件**内部为各向同性媒质**，即媒质参数 ε, μ, σ 与电磁波的传播方向无关，由这类媒质所构成的微波元件，属于可逆网络。而含有各向异性媒质的微波元件是不可逆网络。

$$[Z] = [\tilde{Z}] \quad [Y] = [\tilde{Y}] \quad [z] = [\tilde{z}] \quad [y] = [\tilde{y}]$$

可逆网络的阻抗矩阵和导纳矩阵是对称矩阵： $Z_{kj} = Z_{jk}, Y_{kj} = Y_{jk}$

因此，一个n端口的可逆网络仅有

$n(n+1)/2$ 个独立的复数参量。

一个可逆二端口网络的参量满足：

$$\begin{cases} Z_{12} = Z_{21} \\ Y_{12} = Y_{21} \\ AD - BC = 1 \end{cases}$$

隔离器、环形器、放大器 ？

➤ 无耗网络电路矩阵的性质

$$[Z] = [Z_s] \quad [Y] = [Y_s] \quad [Z_s] = \frac{1}{2}([Z] - [\tilde{Z}]^*)$$

$$Z_{kj} = -Z_{jk}^*, Y_{kj} = -Y_{jk}^* \quad [Y_s] = \frac{1}{2}([Y] - [\tilde{Y}]^*)$$

一个n端口的无耗网络参量中，仅有 n^2 个独立的实数参量。

对于无耗、可逆网络，有： $Z_{kj} = jX_{kj} = jX_{jk}$ ， $Y_{kj} = jB_{kj} = jB_{jk}$

所以， $[Z]$ 和 $[Y]$ 是所有矩阵参量为纯虚数的对称矩阵。此时，网络参量中仅有 $n(n+1)/2$ 个独立实数量。

由于在归一化情况下，引入的仅是实数因子（认为输入、输出传输线是无耗、均匀传输线，特性阻抗 Z_C 为实数），因此对归一化参量来说，上述结论同样成立。

➤ 对称网络的电路矩阵性质(注意与可逆网络的区别)

如果一个二端口网络的两个端口处的电特性完全一致, 则称为对称网络。互换对称网络的两个对称端口的标号, 网络矩阵保持不变, 用网络参量表示的形式是:

$$[Z]: Z_{12} = Z_{21} \quad Z_{11} = Z_{22}$$

$$[Y]: Y_{12} = Y_{21} \quad Y_{11} = Y_{22}$$

$$[A]: AD - BC = 1 \quad A = D$$

用归一化网络参量表示的形式是:

$$[z]: z_{12} = z_{21} \quad z_{11}Z_{C1} = z_{22}Z_{C2}$$

$$[y]: y_{12} = y_{21} \quad y_{11}Y_{C1} = y_{22}Y_{C2}$$

$$[a]: ad - bc = 1 \quad aZ_{C1} = dZ_{C2}$$

注意，只有当这两个对称端口连接传输线的特性阻抗相同时，归一化参量同未归一化参量的表示式才具有相同的形式。

电状态的对称性，反映着对称端口上电场或磁场的对称性。在实际的微波元件中，相对于端口来说，有许多元件在几何结构上是对称的，这种对称叫做几何对称或机械对称。几何对称往往能直接从几何形体上观察出来，或是通过机械测量检查出来。图3-10（a）所示金属波导中设置两组膜片，在端口 ① 与端口 ② 之间可以找到一个平面为对称面，称为面对称网络。图3-10(b)所示的H面波导Y形接头，各个端口可围绕一条轴线旋转，相邻两个端口之间的夹角相等，且必为 $2\pi/n$ ， n 为网络的端口数目，称为旋转对称网络。

具有几何对称的网络，都具有电对称的性质，因此电对称性可根据几何结构的对称性来判断。

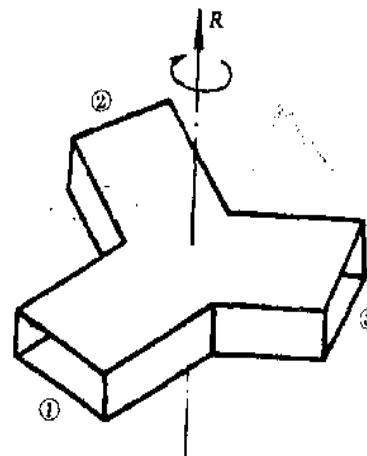
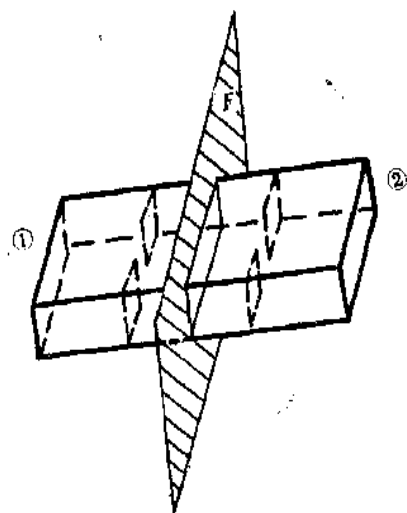


图3-10 微波对称网络

面对称网络:

若端口 k 与端口 j 为面对称:

$$Z_{kj} = Z_{jk},$$

$$Z_{kk} = Z_{jj},$$

$$Y_{kj} = Y_{jk}$$

$$Y_{kk} = Y_{jj}$$

$$z_{kj} = z_{jk},$$

$$z_{kk} = z_{jj},$$

$$y_{kj} = y_{jk}$$

$$y_{kk} = y_{jj}$$

旋转对称网络: 转角为 $2\pi/n$ 的旋转对称网

络, 网络矩阵为旋转对称矩阵:

$$Z_{11} = Z_{22} = \cdots = Z_{nn}$$

$$Z_{21} = Z_{32} = \cdots = Z_{1n}$$

.....

$$Z_{n1} = Z_{12} = \cdots Z_{n-1,n}$$

➤ 匹配网络电路矩阵的性质

匹配网络的经典定义：一个内阻为 R_g 、电动势为 V_g 的信号源，向负载 R_L 传送功率，通常电阻 R_g 和 R_L 不相等，当用一个 **无耗** 二端口网络插入于它们之间，使得负载 R_L 能从信号源获取最大功率，这样的网络称为**阻抗匹配网络**。按照这个定义，网络的输入阻抗等于信号源内阻抗。

更为通常的情况是在网络的两个端口上都匹配，如图3-11所示。如果在网络的输出端口处接特定负载 $Z_L = Z_{I_2}$ ，网络的输入阻抗为 $Z_{in_1} = Z_{I_1}$ ；如果在网络的输入端口处接特定负载 $Z_g = Z_{I_1}$ ，网络的输出阻抗为 $Z_{in_2} = Z_{I_2}$ ，于是阻抗 Z_{I_1} 和 Z_{I_2} 是该网络的匹配终端。二端口网络的这种端接情况称为**双端口匹配或影象匹配**，

Z_{I_1} 和 Z_{I_2} 分别称为输入和输出端的**影象阻抗**。

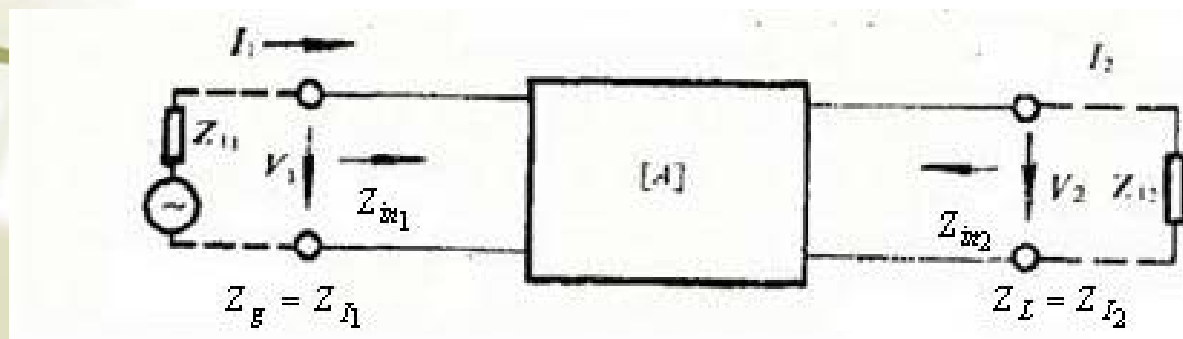


图3-11 影象阻抗匹配

影象阻抗可以通过二端口网络的级联矩阵方程求得。因为：

$$\begin{cases} V_1 = AV_2 - BI_2 \\ I_1 = CV_2 - DI_2 \end{cases} \quad \begin{cases} V_2 = \frac{1}{AD - BC} \cdot (DV_1 - BI_1) \\ I_2 = \frac{1}{AD - BC} \cdot (CV_1 - AI_1) \end{cases}$$

由双端口影象匹配的定义，得：

$$\begin{aligned} Z_{I_1} &= \frac{AV_2 - BI_2}{CV_2 - DI_2} = \frac{AZ_{I_2} + B}{CZ_{I_2} + D} \\ Z_{I_2} &= \frac{DV_1 - BI_1}{CV_1 - AI_1} = \frac{DZ_{I_1} + B}{CZ_{I_1} + A} \end{aligned}$$

联立求解得：

$$\begin{cases} Z_{I_1} = \sqrt{\frac{AB}{CD}} & Z_{I_2} = \sqrt{\frac{BD}{AC}} \\ \frac{Z_{I_1}}{Z_{I_2}} = \frac{A}{D} \end{cases}$$

影象阻抗是二端口网络本身的基本参量，这两个参量也可用来描述二端口网络。对可逆、无源二端口网络来说，还需有第三个参量才能完全描述。在影象匹配条件下，应用电压或电流的影象传播常数是方便的，定义：

$$\left. \frac{V_2}{V_1} \right|_{\text{影象匹配}} = \sqrt{\frac{Z_{I_2}}{Z_{I_1}}} e^{-\gamma} \quad \left. \frac{I_2}{I_1} \right|_{\text{影象匹配}} = -\sqrt{\frac{Z_{I_1}}{Z_{I_2}}} e^{-\gamma}$$

式中， γ 称为影象传播常数，其与网络级联参数的关系为：

$$e^{-\gamma} = \sqrt{AD} - \sqrt{BC} \quad e^{\gamma} = \sqrt{AD} + \sqrt{BC}$$

当网络还是可逆的时候，还有： $sh\gamma = \sqrt{BC}$ 、 $ch\gamma = \sqrt{AD}$

因此，当n个二端口网络级联时，若能使每个二端口网络都维持影象匹配，则不难求得总电压传输比为

$$\left. \frac{V_n}{V_1} \right| = \sqrt{\frac{Z_{I_2}^{(n)}}{Z_{I_1}^{(1)}}} e^{-(\gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_n)}$$

式中 $Z_{I_1}^{(1)}$ 为第一个二端口网络的输入影象阻抗, $Z_{I_2}^{(n)}$ 为最后一个二端口网络的输出影象阻抗, $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ 为各个级联二端口网络的影象传播常数。总网络由两个影象阻抗 $Z_{I_1}^{(1)}$ 和 $Z_{I_2}^{(n)}$ 及各个影象传播常数之和来表征。因此, 用影象参量设计总网络时, 各个二端口网络能够分别处理, 这在古典滤波网络理论中广为应用。

最后须指出, 由于微波网络通过微波传输线同外电路相连接, 当网络无耗时, 则 Z_{I_1} 和 Z_{I_2} 为实数 (纯电阻性), 因而在微波匹配网络中, 往往加入限制条件, 即网络端口连接的传输线的特性阻抗应当等于影象阻抗。

微波网络的散射矩阵表示

网络端口的波变量

在微波网络中，端口同外界相连接的是各类均匀微波传输线，其横向电场和横向磁场分别由入射波横向场 \vec{E}_t^+ 、 \vec{H}_t^+ 和反射波横向场 \vec{E}_t^- 、 \vec{H}_t^- 叠加而成。因而可以采用模式电压及模式电流的入射行波 V^+ 、 I^+ 和反射行 V^- 、 I^- 来表示。由于向同一方向传播的行波电压和行波电流的比值为特性阻抗 Z_c ，这样，能够选用如下三组行波，分别作为微波网络每一端口的两个独立变量：

1. 入射波电压 V^+ 和反射波电压 V^- ；
2. 入射波电流 I^+ 和反射波电流 I^- ；
3. 归一化入射波a和归一化反射波b。

当确定等效传输线的特性阻抗 Z_c 后，这三组端口变量各自都能代表端口传输线中的入射波和反射波的横向电、磁场，传输相同的功率，统称为**波变量**，按照网络各端口上波变量的线性关系，组成线性方程组，其系数矩阵统称为**网络波矩阵**。

在取特性阻抗为归一化值，即取 $Z_c = 1$ 时，则 $v^+ = i^+, v^- = i^-$ 。

引用新的符号a和b，分别代表归一化入射波电压（电流）变量和归一化反射波电压（电流）变量，它们同未归一化的入射波和反射波电压（电流）的关系为：

或

$$a = v^+ = V^+ / \sqrt{Z_c}$$

$$b = v^- = V^- / \sqrt{Z_c}$$

$$a = i^+ = I^+ \sqrt{Z_c}$$

$$b = i^- = I^- \sqrt{Z_c}$$

由此得知，a和b既是归一化的行波电压，也是归一化的行波电流，故常把a和b简称为归一化波参量。传输给网络的有功功率为

$$P = |a|^2 - |b|^2 = \frac{1}{Z_c} (|V^+|^2 - |V^-|^2)$$

$|a|^2$ 为入射功率， $|b|^2$ 为出射功率。因此，波变量a和b的大小分别代表入射波功率和出射波功率的开方值，其量纲为 $(\text{伏安})^{1/2}$ 。

端口处的总电压和总电流为

$$V = V^+ + V^- = \sqrt{Z_C}(a + b)$$
$$I = I^+ - I^- = \frac{1}{\sqrt{Z_C}}(a - b)$$

因有

$$a = \frac{V + Z_C I}{2\sqrt{Z_C}}, b = \frac{V - Z_C I}{2\sqrt{Z_C}}$$

此式可作为归一化波参量的定义式。在特性阻抗取归一化值的情况下，则：

$$v = a + b \quad a = (v + i)/2$$
$$i = a - b \quad b = (v - i)/2$$

当采用a和b作为网络的端口变量时，网络的各个端口连接传输线，都已用各自传输线的特性阻抗归一化了，该网络为归一化网络。相对于网络来说，a是向着网络方向行进的波，称为入射波，也称为内向波，b是背离网络方向进行的波，称为出射波，也称为外向波，或称为散射波。这里不用反射波一词，是因为除单端口网络外，b包含有传输信号和反射信号两部分，用出射波一词，以避免与仅由于反射引起的反射波相混淆。

在图3-12中，示出一个归一化多端口网路，图中画出了各端口处的归一化电压 v 和电流 i 及归一化入射波 a 和出射波 b 的表示方法。

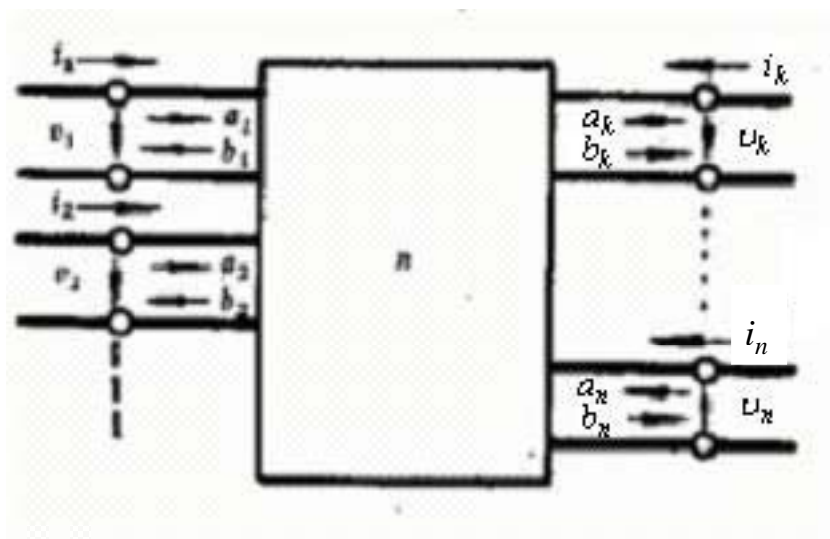


图3-12 归一化网络的 v , i 和 a , b 表示法

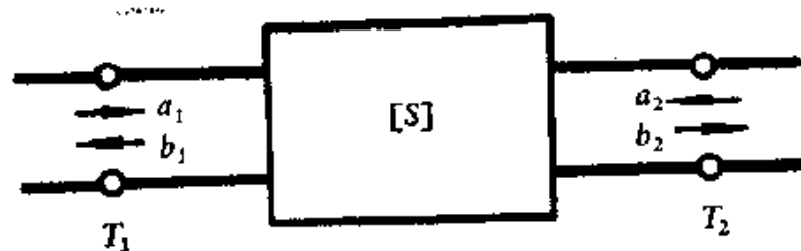
$$\begin{aligned} v &= a + b & a &= (v + i)/2 \\ i &= a - b & b &= (v - i)/2 \end{aligned}$$

归一化散射矩阵和传输矩阵

在线性网络中，各个端口上的电压、电流的关系是线性的，因此各端口波变量之间的关系也应是线性的，因此，可以按不同组合写出端口波变量之间的线性方程组。线性方程组中的系数排成矩阵，常用的有**散射矩阵**和**传输矩阵**。根据波变量同电压、电流的关系，能导出这些矩阵同电路矩阵的转换关系。

(1) 二端口网络的散射矩阵

如图3-13所示的两端口微波网络，当以端口上的归一化入射波 a 作为自变量，出射波 b 作为因变量，则组成下列线性方程组



$$\begin{cases} b_1 = S_{11}a_1 + S_{12}a_2 \\ b_2 = S_{21}a_1 + S_{22}a_2 \end{cases}$$

图3-13 微波归一化二端口网络表示法

写成矩阵形式是

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad \text{缩写成: } [b] = [S] [a]$$

式中 $[a]$ 和 $[b]$ 分别为各端口归一化入射波和归一化出射波组成的列矩阵，矩阵 $[S]$ 为称为归一化散射矩阵，简称**散射矩阵或S矩阵**。各元素称为**网络的散射参量**。散射参量的物理意义：

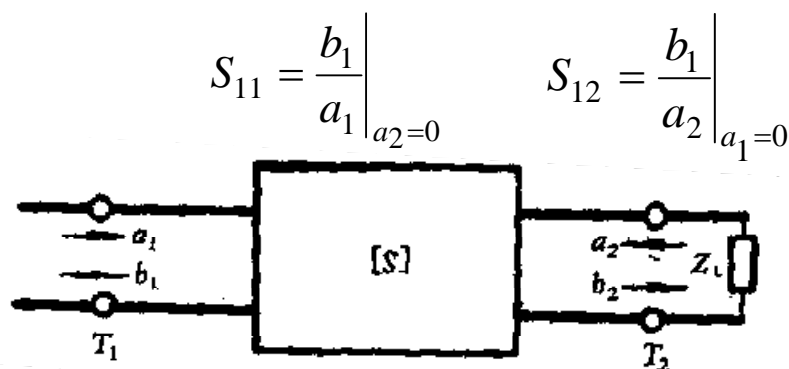


图3-14 二端口网络的端接条件

$$S_{11} = \left. \frac{b_1}{a_1} \right|_{a_2=0} \quad S_{12} = \left. \frac{b_1}{a_2} \right|_{a_1=0} \quad S_{21} = \left. \frac{b_2}{a_1} \right|_{a_2=0} \quad S_{22} = \left. \frac{b_2}{a_2} \right|_{a_1=0}$$

为了实现 a_1 (或 a_2) 为零的条件，只需要在端口 T_1 处 (或 T_2 处) 接入无反射匹配负载。

- S_{11} 是端口 T_2 处接有匹配负载时，在端口 T_1 处的反射系数；
- S_{22} 是端口 T_1 处接有匹配负载时，在端口 T_2 处的反射系数；
- S_{21} 是端口 T_2 处接有匹配负载时，从端口 T_1 到端口 T_2 的传输系数；
- S_{12} 是端口 T_1 处接有匹配负载时，从端口 T_2 到端口 T_1 的传输系数。

很多情况下，可以根据上述四式求出一些单元电路的散射参量。

由于在讨论电流时，必须先规定好电流的方向，而在讨论电压时并不需要说明有关方向符号的取法，因此往往把 a 和 b 作为端口电压波变量，并把 $[S]$ 称为归一化电压散射矩阵。实际上，归一化散射矩阵既是归一化电压散射矩阵，也是归一化电流散射矩阵。

在微波技术中，采用入射波、反射波、反射系数、传输系数等量，物理概念明确，又易于测量，因而散射矩阵是一种应用方便的矩阵形式。在今后的应用中，总是优先选用它，但是不能根据散射矩阵画出具体的等效电路，只能简单地用方框图来表示。

(2) 多端口网络散射矩阵

二端口微波网络散射矩阵可推广到多端口微波网络中去。在图3-12所示的多端口网络中，以各端口上的归一化入射波 a 为自变量，归一化出射波 b 为因变量，则组成下列线性方程组

[illegible]

写成矩阵形式是：

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & \cdots & S_{1n} \\ S_{21} & S_{22} & \cdots & S_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ S_{n1} & S_{n2} & \cdots & S_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \qquad [b] = [S] \cdot [a]$$

$$[a] = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad [b] = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad [S] = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & \cdots & S_{1n} \\ S_{21} & S_{22} & \cdots & S_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ S_{n1} & S_{n2} & \cdots & S_{nn} \end{pmatrix} \text{ 为多端口微波网络的散射矩阵。}$$

$$S_{KK} = \left. \frac{b_K}{a_K} \right|_{a_1=a_2=\dots=0, a_K \neq 0}$$

$$S_{jk} = \left. \frac{b_j}{a_k} \right|_{a_1=a_2=\dots=0, a_K \neq 0}$$

它表明： S_{KK} 是除端口k外的其它各个端口均接有匹配负载时，在端口k处向网络看去的反射系数； S_{jk} 是除端口k外的其它各个端口均接有匹配负载时，从端口k到端口j的传输系数。

思考题：S参数矩阵的适用条件？

(3) 参考面位移

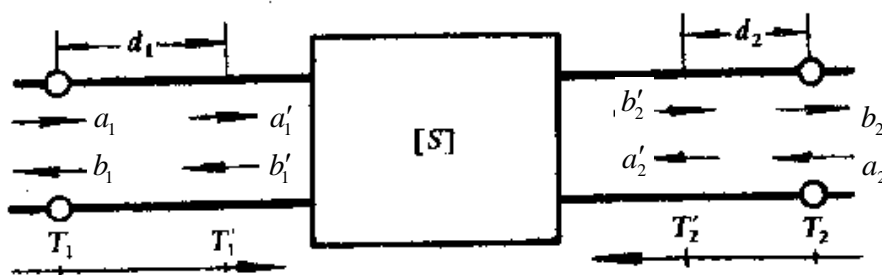
微波网络与外界相连的引出传输线，是网络的组成部分。确定网络参量时，必须指定端口参考面的位置。如果移动参考面的位置，相应地网络参量也将发生变化。**当网络各端口的引出传输线是均匀、无耗的时候**，则沿传输线移动参考面的位置后， $[S]$ 的各个元素仅仅发生相位的改变，模值不变；而电路矩阵 $[Z]$ 、 $[Y]$ 、 $[A]$ 的各个元素的大小和相位都将发生改变。这一结论用下图说明如下：

设二端口网络的参考面为 T_1 和 T_2 ，对应的散射矩阵为 $[S]$ ；当端口参考面分别向网络方向位移距离 d_1 和 d_2 后，其位置为 T'_1 和 T'_2 ，这时的网络散射矩阵为 $[S']$ 。用电长度 θ_1 和 θ_2 表示位移量，其为：

$$\theta_1 = 2\pi d_1 / \lambda_{g1}$$

$$\theta_2 = 2\pi d_2 / \lambda_{g2}$$

式中 λ_{g1} 和 λ_{g2} 分别为端口①和端口②传输线中的导波波长。按照习惯规定，取向着网络的方向为正方向，故向网络方向位移的电长度取正值，离开网络方向位移的电长度取负值，这样，当以端口 T_1 和 T_2 的波变量做基准，可以求得位移后的新参考面 T'_1 和 T'_2 处的波变量。根据传输线理论，在传输线不同位置上，传播的行波只是相位的改变，不难写出：



$$\begin{cases} a'_1 = a_1 e^{-j\theta_1} \\ a'_2 = a_2 e^{-j\theta_2} \end{cases} \quad \begin{cases} b'_1 = b_1 e^{j\theta_1} \\ b'_2 = b_2 e^{j\theta_2} \end{cases}$$

图3-15 端口参考面的位移

写成矩阵形式： $[a'] = [D]^{-1}[a]$ $[b'] = [D][b]$

或 $[a] = [D][a']$

其中

$$[a'] = \begin{pmatrix} a'_1 \\ a'_2 \end{pmatrix} \quad [a] = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad [b'] = \begin{pmatrix} b'_1 \\ b'_2 \end{pmatrix} \quad [b] = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \quad [D] = \begin{pmatrix} e^{j\theta_1} & 0 \\ 0 & e^{j\theta_2} \end{pmatrix}$$

$[D]$ 为相移对角矩阵， $[D]^{-1}$ 为其逆矩阵。

所以，有： $[S'] = [D][S][D]$ 。

这就是参考面位移后散射矩阵的关系式。即：

$$\begin{aligned} S'_{11} &= S_{11}e^{j2\theta_1} & S'_{12} &= S_{12}e^{j(\theta_1+\theta_2)} \\ S'_{21} &= S_{21}e^{j(\theta_1+\theta_2)} & S'_{22} &= S_{22}e^{j2\theta_2} \end{aligned}$$

由此可知，移动参考面后的新网络S参量，只需要把原来的S参量乘以一个取决于参考面移动距离的相移因子，S参量的数值大小保持不变。

推广到多端口网络中，参考面移动前后散射参量变化关系的一般表示式为

$$S'_{jk} = S_{jk} e^{j(\theta_j + \theta_k)} \quad (j, k=1, 2, \dots, n)$$

其矩阵表示式与 $[S'] = [D][S][D]$ 所示，其中矩阵 $[D]$ 为各端口相移因子组成的对角矩阵：

$$[D] = \begin{pmatrix} e^{j\theta_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{j\theta_2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & e^{j\theta_n} \end{pmatrix}$$

通过移动参考面位置的办法，能控制S参量的相位，将给网络分析带来方便。

参考面的位移，对于网络电路矩阵参量没有简单的表示式，通常总是先求出网络的散射参量，考虑位移后再转换为电路矩阵参量。

(4) 散射矩阵与电路矩阵的互换

➤ $[S]$ 与 $[z]$ 的互换关系:

$$[S] = ([z] - [1]) ([z] + [1])^{-1}$$

$$[z] = ([1] + [S]) ([1] - [S])^{-1}$$

➤ $[S]$ 与 $[y]$ 的互换关系

$$[S] = ([1] - [y]) ([1] + [y])^{-1}$$

$$[y] = ([1] - [S]) ([1] + [S])^{-1}$$

➤ $[S]$ 与 $[a]$ 的互换关系

$$[S] = \frac{1}{a+b+c+d} \begin{pmatrix} a+b-c-d & 2(ad-bc) \\ 2 & -a+b-c+d \end{pmatrix}$$

$$[a] = \frac{1}{2S_{21}} \begin{pmatrix} S_{12}S_{21} + (1+S_{11})(1-S_{22}) & (1+S_{11})(1+S_{22}) - S_{12}S_{21} \\ (1-S_{11})(1-S_{22}) - S_{12}S_{21} & S_{12}S_{21} + (1-S_{11})(1+S_{22}) \end{pmatrix}$$

(5) 传输矩阵

分析由几个简单网络级联构成的复杂网络，除应用A矩阵外，还经常应用传输矩阵。它也是采用入射波和出射波作为端口变量，所建立起的线性联立方程组的系数矩阵。

在二端口网络中，把输出端口上的归一化出射波 b_2 和归一化入射波 a_2 作为自变量，输入端口上的归一化入射波 a_1 和归一化出射波 b_1 作为因变量，组成输入端口波变量同输出端口波变量之间关系的线性联立方程组：

$$\begin{cases} a_1 = T_{11}b_2 + T_{12}a_2 \\ b_1 = T_{21}b_2 + T_{22}a_2 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_2 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

二端口归一化传输矩阵 (传输矩阵) : $[T] = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix}$

$$T_{11} = \left. \frac{a_1}{b_2} \right|_{a_2=0} \quad T_{12} = \left. \frac{a_1}{a_2} \right|_{b_2=0}$$
$$T_{21} = \left. \frac{b_1}{b_2} \right|_{a_2=0} \quad T_{22} = \left. \frac{b_1}{a_2} \right|_{b_2=0}$$

$T_{11} = 1/S_{21}$ 是端口 2 处接有匹配负载时，从端口 T_1 到端口 T_2 的传输系数的倒数，或称作衰减系数。其余三个参量没有明确的物理意义。

对于m 个二端口网络的级联，总传输矩阵 $[T]$ 等于各个网络的传输矩阵的顺序连乘，

$$[T] = [T_1][T_2][T_3] \cdots [T_m]$$

当级联端口传输线的特性阻抗不相同，只需把连接接头也作为一个级联于其中的二端口网络来处理就可以了。

对于多端口网络的传输矩阵，可以按照相同的方法进行定义和计算。

二端口网络的传输矩阵T与散射矩阵S之间的互换关系：

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{T_{21}}{T_{11}} & \frac{T_{22}}{T_{11}} - 1 \\ \frac{1}{T_{11}} & -\frac{T_{12}}{T_{11}} \end{bmatrix} \quad \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{S_{21}} & -\frac{S_{22}}{S_{21}} \\ \frac{S_{11}}{S_{21}} & S_{12} - \frac{S_{11}S_{22}}{S_{21}} \end{bmatrix}$$

(6) 散射矩阵的性质

➤ 无源网络[S]的性质:

$[1] - [\tilde{S}]^* [S]$ 为非负定厄米矩阵。称为用散射参量表示的无源网络可实现条件。

➤ 可逆网络[S]的性质: $[S] = [\tilde{S}]$

满足互易定理的网络, 其归一化散射矩阵是对称矩阵

➤ 无耗网络[S]的性质: $[\tilde{S}]^* [S] = I$

表明: n端口无耗网络的散射矩阵 [S] 为酉矩阵

所以, 对于无耗、可逆网络, 有:

$$[S]^* [S] = [S][S]^* = I$$

根据上述性质, 可以得到一个结论, 即: 无耗、可逆的三端口微波网络, 其三个端口不可能同时得到匹配, 即 S_{11} 、 S_{22} 和 S_{33} 不可能同时等于零。上述结论请自行证明。

➤ 对称网络[S]的性质

在二端口对称网络中，若互换两个对称端口的标号，其网络矩阵不变。这时除传输系数应相等外，反射系数也必须相等，所以二端口对称网络的对称条件是

$$S_{12} = S_{21} \text{ 和 } S_{22} = S_{11}$$

许多情况下，微波网络是具有某种结构对称的网络。一个面对称网络，当端口k与端口j为面对称时，则对称性条件是

$$S_{Kj} = S_{jK} \text{ 和 } S_{KK} = S_{jj}$$

一个转角为 $2\pi/n$ 旋转对称的网络，散射矩阵为旋转对称矩阵：

$$[S] = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{n1} & \cdots & S_{21} \\ S_{21} & S_{11} & \cdots & S_{31} \\ S_{31} & S_{21} & \cdots & S_{41} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ S_{n1} & S_{n-1,1} & \cdots & S_{11} \end{pmatrix}$$

注意与可逆网络的区别!

➤ 匹配特性

在微波网络中，网络某一端口 k 是匹配的，这是指在其余各个端口都接匹配负载下，该端口的输入阻抗等于连接传输线的特性阻抗，这时该端口的反射系数为零，即散射参量 $S_{KK} = 0$ 。在端口阻抗匹配下，入射功率将全部进入网络，没有反射功率损失。

一个无耗二端口的散射矩阵, 如果一个端口是匹配的，则另一个端口将自动匹配。这个原理称为无耗二端口网络阻抗匹配可逆原理。在端口阻抗匹配下，即 $|S_{11}| = |S_{22}| = 0$ ，适当移动参考面位置，不难得到匹配网络的散射矩阵为

$$[S] = \begin{pmatrix} 0 & e^{-j\theta} \\ e^{-j\theta} & 0 \end{pmatrix}$$

因此，无耗匹配二端口网络必是一个可逆网络，可等效为一段电长度为 θ 的传输线。



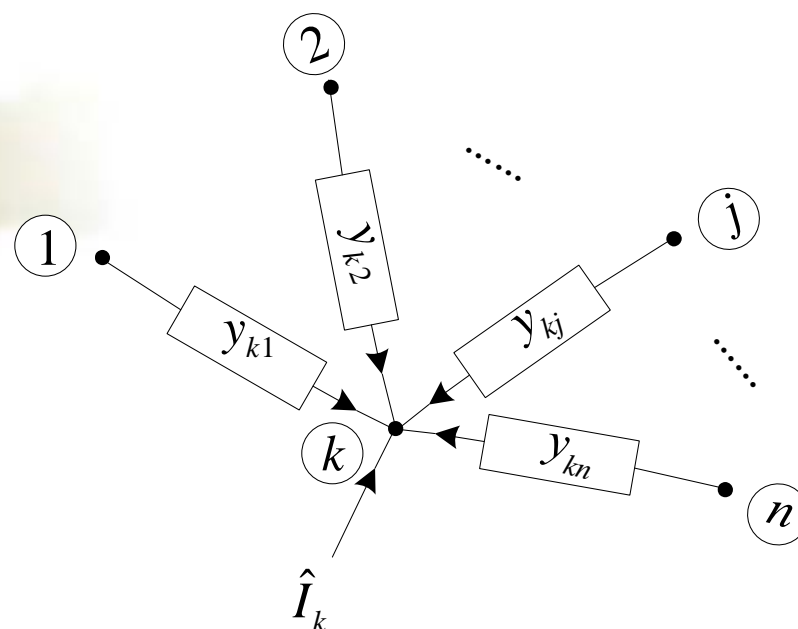
分组作业

第二节 不定导纳矩阵法分析任意端口微波线性电路

在微波电路CAA/CAD中，主要有两类方法实现对线性电路的分析：S参数法（包括级联矩阵和传输矩阵法）、不定导纳矩阵法。

前者仅适用于树形结构的电路，例如放大器、滤波器、衰减器等微波电路，通过级联法得到整个电路的A矩阵或T矩阵后，就可计算输入/输出阻抗、输入/输出反射系数、传输系数/增益/相移等反映整个微波电路特性的参数。该法是微波电路分析中最常用和最基本的方法。例如，ADS中的S参数仿真器。详细内容参见《近代微波技术》相关章节，是要求大家重点掌握的。

不定导纳矩阵可分析任意结构的线性电路（包括多端口网络），**也是一种频域分析方法。**



设有一个线性电路，共有 n 个节点，并设 $y_{kj} = y_{jk}$ 是节点 k 与节点 j 之间的导纳。一般情况下，节点 k 通过导纳 y_{kj} 与其它节点 $j|_{j \neq k}$ ($j = 1, 2, \dots, n$) 相连。令节点 k 的电压为 \hat{V}_k ，节点 j 的电压为 \hat{V}_j ，并设节点 k 与外部端点相连（例如信号源），且用 \hat{I}_k 表示流进节点 k 的外部电流。

由基尔霍夫电流定理，对于端点k有：

$$\hat{I}_k + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n (\hat{V}_j - \hat{V}_k) y_{kj} = 0$$

于是：

$$-\hat{I}_k = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \hat{V}_j y_{kj} - \hat{V}_k \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n y_{kj}$$

令：

$$y_{kk} = - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n y_{kj}$$

则得： $\hat{I}_k = - \sum_{j=1}^n \hat{V}_j y_{kj}$

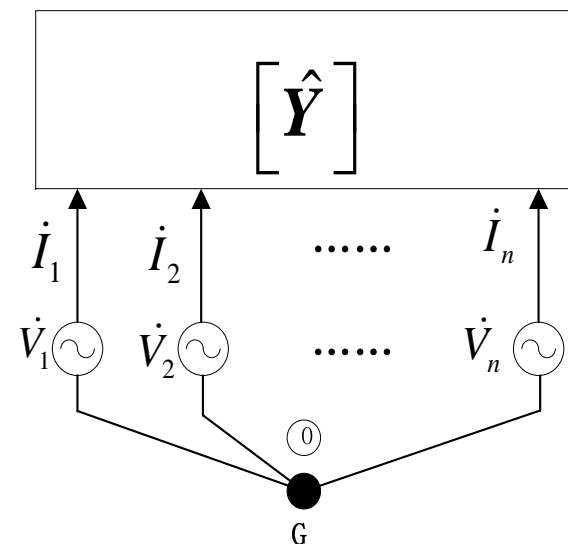


图3-16 用不定导纳矩阵表示的端口网络

若电路的n个节点均有外部电流流进，则有：

$$\begin{pmatrix} \hat{I}_1 \\ \hat{I}_2 \\ \vdots \\ \hat{I}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y_{11} & -y_{12} & \cdots & -y_{1n} \\ -y_{21} & -y_{22} & \cdots & -y_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -y_{n1} & -y_{n2} & \cdots & -y_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{V}_1 \\ \hat{V}_2 \\ \vdots \\ \hat{V}_n \end{pmatrix}$$

$$\hat{I} = \hat{Y} \hat{V} \quad \hat{Y} \text{ 称为不定导纳矩阵}$$

当电路的节点均为端点时，具有n个节点的线性电路见图3-16。其中，网络的每一个端口由电路的一个外部端点与公共参考点G组成。参考点G称为浮动节点，它不与电路连接。因此，不定导纳矩阵即为以参考点为公共端的n端口网络的短路导纳矩阵。

不定导纳矩阵 \hat{Y} 具有以下主要特性：

- 每一行元素之和为零；
- 每一列元素之和为零；
- 如果电路中第k个端点与参考点相连接（参考点一般接地），则删去第k行和第k列的不定导纳矩阵，即为以第k个端点为参考点的节点导纳矩阵；
- 不定导纳矩阵一般是满秩矩阵。

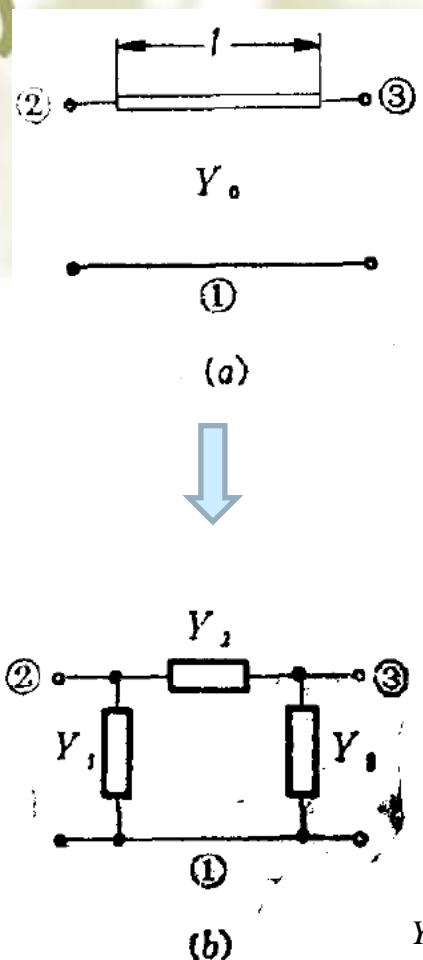
微波电路中元器件的不定导纳矩阵：

- 微波电路中的电阻、电容、电感：由这些元件组成的电路，其节点间的导纳 y_{kj} 可以用 $\frac{1}{R}$ 、 $j\omega C$ 和 $\frac{1}{j\omega L}$ 表示，再直接根据上式写出 \hat{Y} 矩阵。

例子：一个电容C在由8个节点组成的电路中，连接节点2和6，则该电容的不定导纳矩阵为一个 8×8 的矩阵，其中， $y_{22} = y_{66} = j\omega C$ 、 $y_{26} = y_{62} = -j\omega C$ ，其余元素均为零。

- 微波分布参数元件（例如，均匀传输线、平行耦合线等）：一种方法是先把这些元件表示为导纳等效电路，再利用前述公式求出不定导纳矩阵；另一种方法是先求出其导纳矩阵Y，然后把Y矩阵转换为不定导纳矩阵 \hat{Y} 。如下两例：

例1：一段长度为 l 的均匀传输线（图a），及其导纳等效电路（图b）。



$$Y_1 = jY_0 \operatorname{tg} \frac{\beta l}{2} \quad Y_2 = -jY_0 \operatorname{csc} \beta l$$

不定导纳矩阵：

$$\hat{Y} = \begin{pmatrix} Y_1 & -Y_1 & 0 \\ -Y_1 & Y_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Y_1 & 0 & -Y_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -Y_1 & 0 & Y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & Y_2 & -Y_2 \\ 0 & -Y_2 & Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2Y_1 & -Y_1 & -Y_1 \\ -Y_1 & Y_1 + Y_2 & -Y_2 \\ -Y_1 & -Y_2 & Y_1 + Y_2 \end{pmatrix}$$

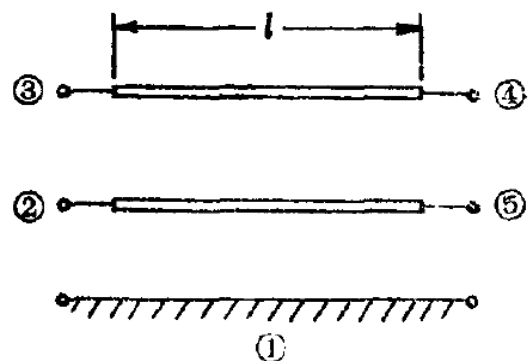
$$= \begin{pmatrix} j2Y_0 \operatorname{tg} \frac{\beta l}{2} & -jY_0 \operatorname{tg} \frac{\beta l}{2} & -jY_0 \operatorname{tg} \frac{\beta l}{2} \\ -jY_0 \operatorname{tg} \frac{\beta l}{2} & jY_0 (\operatorname{tg} \frac{\beta l}{2} - \operatorname{csc} \beta l) & jY_0 \operatorname{csc} \beta l \\ -jY_0 \operatorname{tg} \frac{\beta l}{2} & jY_0 \operatorname{csc} \beta l & jY_0 (\operatorname{tg} \frac{\beta l}{2} - \operatorname{csc} \beta l) \end{pmatrix}$$

节点导纳矩阵（1为参考节点，删去第一行和第一列）：

$$Y = \begin{pmatrix} j2Y_0 \operatorname{tg} \frac{\beta l}{2} & -jY_0 \operatorname{tg} \frac{\beta l}{2} & -jY_0 \operatorname{tg} \frac{\beta l}{2} \\ -jY_0 \operatorname{tg} \frac{\beta l}{2} & jY_0 (\operatorname{tg} \frac{\beta l}{2} - \operatorname{csc} \beta l) & jY_0 \operatorname{csc} \beta l \\ -jY_0 \operatorname{tg} \frac{\beta l}{2} & jY_0 \operatorname{csc} \beta l & jY_0 (\operatorname{tg} \frac{\beta l}{2} - \operatorname{csc} \beta l) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} jY_0 (\operatorname{tg} \frac{\beta l}{2} - \operatorname{csc} \beta l) & jY_0 \operatorname{csc} \beta l \\ jY_0 \operatorname{csc} \beta l & jY_0 (\operatorname{tg} \frac{\beta l}{2} - \operatorname{csc} \beta l) \end{bmatrix}$$

图3-17 均匀传输线及其 π 型导纳等效电路

例2：一段长度为 l 的平行耦合传输线。



采用由Y矩阵生成 \hat{Y} 的方法。设具有公共接地端

（例如端“1”接地）的 $n-1$ 端口网络的导纳矩阵为：

$$Y = \begin{pmatrix} Y_{22} & \cdots & Y_{2k} & \cdots & Y_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ Y_{k2} & \cdots & Y_{kk} & \cdots & Y_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ Y_{n2} & \cdots & Y_{nk} & \cdots & Y_{nn} \end{pmatrix}_{(n-1) \times (n-1)}$$

其对应的 \hat{Y} 矩阵为 $n \times n$ 阶矩阵，它是由Y矩阵增加第一行和第一列得到的； \hat{Y} 矩阵的各行各列元素之和必为零，故有：

$$Y_{11} = \sum_{k=2}^n \sum_{j=2}^n Y_{kj}$$

$$Y_{1k} = -\sum_{j=2}^n Y_{jk}, (k = 2, 3, \dots, n)$$

$$Y_{k1} = -\sum_{j=2}^n Y_{kj}, (k = 2, 3, \dots, n)$$

$$\hat{Y} = \begin{pmatrix} \sum_{k=2}^n \sum_{j=2}^n Y_{kj} & -\sum_{j=2}^n Y_{j2} & \cdots & -\sum_{j=2}^n Y_{jk} & \cdots & -\sum_{j=2}^n Y_{jn} \\ -\sum_{j=2}^n Y_{2j} & Y_{22} & \cdots & Y_{2k} & \cdots & Y_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\sum_{j=2}^n Y_{kj} & Y_{k2} & \cdots & Y_{kk} & \cdots & Y_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\sum_{j=2}^n Y_{nj} & Y_{n2} & \cdots & Y_{nk} & \cdots & Y_{nn} \end{pmatrix}_{n \times n}$$

对于一段长度为 l 的平行耦合传输线，利用奇、偶模分析方法得到其Y参数为：

$$Y = \begin{pmatrix} Y_{22} & Y_{23} & Y_{24} & Y_{25} \\ Y_{32} & Y_{33} & Y_{34} & Y_{35} \\ Y_{42} & Y_{43} & Y_{44} & Y_{45} \\ Y_{52} & Y_{53} & Y_{54} & Y_{55} \end{pmatrix} \quad \text{其中:} \quad \begin{cases} Y_{22} = Y_{33} = Y_{44} = Y_{55} = -j \frac{Y_{0o} + Y_{0e}}{2} \operatorname{ctg} \theta \\ Y_{23} = Y_{32} = Y_{45} = Y_{54} = j \frac{Y_{0o} - Y_{0e}}{2} \operatorname{ctg} \theta \\ Y_{24} = Y_{42} = Y_{35} = Y_{53} = -j \frac{Y_{0o} - Y_{0e}}{2} \operatorname{csc} \theta \\ Y_{25} = Y_{52} = Y_{34} = Y_{43} = j \frac{Y_{0o} + Y_{0e}}{2} \operatorname{csc} \theta \end{cases}$$

式中， Y_{0o} 和 Y_{0e} 分别为耦合线的奇、偶模特性阻抗， $\theta = 2\pi l / \lambda$ 。将上式代入到前述公式中即可得到不定导纳矩阵：

$$\hat{Y} = \begin{pmatrix} \sum_{k=2}^5 \sum_{j=2}^5 Y_{kj} & -\sum_{j=2}^5 Y_{j2} & -\sum_{j=2}^5 Y_{j3} & -\sum_{j=2}^5 Y_{j4} & -\sum_{j=2}^5 Y_{j5} \\ -\sum_{j=2}^5 Y_{2j} & Y_{22} & Y_{23} & Y_{24} & Y_{25} \\ -\sum_{j=2}^5 Y_{3j} & Y_{32} & Y_{33} & Y_{34} & Y_{35} \\ -\sum_{j=2}^5 Y_{4j} & Y_{42} & Y_{43} & Y_{44} & Y_{45} \\ -\sum_{j=2}^5 Y_{5j} & Y_{52} & Y_{53} & Y_{54} & Y_{55} \end{pmatrix}$$

- 对于大多数有源器件以及一些具有复杂边界条件的元件，它们的Y矩阵或等效电路参数 y_{kj} 不可能精确地从理论中导出。这时，一般应用测量的方法，先测出其散射参数（测试时各端口必须具有公共端点），然后把它转换成导纳参数，最后利用前述第二种方法求出其不定导纳矩阵。

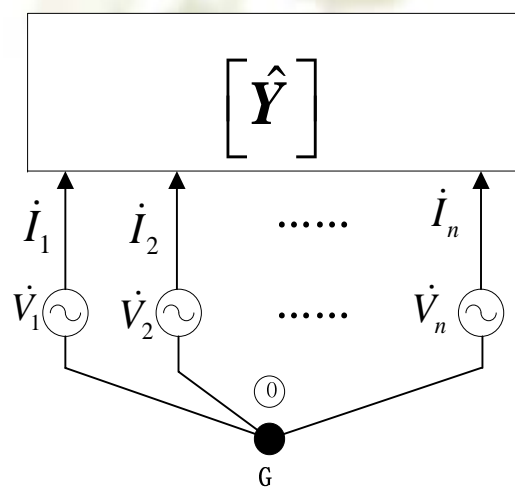
$$S \rightarrow Y \rightarrow \hat{Y}$$

具有n个节点（不包括参考节点）的一个微波电路的不定导纳矩阵求法：

- 首先写出电路中各个元件的 $n \times n$ 阶不定导纳矩阵；
- 然后把这些矩阵相加即得到整个电路的不定导纳矩阵 \hat{Y} 。

用不定导纳矩阵分析微波电路的方法：

用不定导纳矩阵分析电路时，首先把电路中的每个节点都依次编号（从0开始直到n，n为总节点数），并通常把0号节点表示公共节点。写出各个元件的不定导纳矩阵后相加得到整个电路的不定导纳矩阵方程：



$$\begin{pmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \\ \vdots \\ \dot{I}_n \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \\ \vdots \\ \dot{V}_n \end{pmatrix} \Rightarrow \dot{I} = -\hat{Y}\dot{V} \quad \text{或} \quad \dot{V} = -\hat{Z}\dot{I}$$

其中，

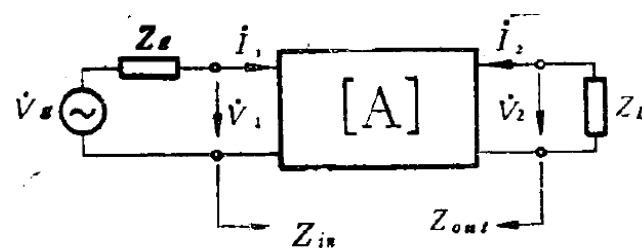
$$\hat{Z} = \hat{Y}^{-1} = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} z_{11} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & z_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ z_{j1} & \cdots & z_{jj} & \cdots & z_{jk} & \cdots & z_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ z_{k1} & \cdots & z_{kj} & \cdots & z_{kk} & \cdots & z_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ z_{n1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & z_{nn} \end{pmatrix}$$

假设节点j和k分别与外部信号源和负载相连，其它节点没有与外部相连，则有：

$$\dot{I}_k \neq 0, \quad \dot{I}_j \neq 0, \quad \dot{I}_p \Big|_{\substack{p=1,2,3,\dots,n \\ p \neq j, p \neq k}} = 0$$

于是,

$$\begin{pmatrix} \dot{V}_1 \\ \vdots \\ \dot{V}_j \\ \vdots \\ \dot{V}_k \\ \vdots \\ \dot{V}_n \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} z_{11} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & z_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ z_{j1} & \cdots & z_{jj} & \cdots & z_{jk} & \cdots & z_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ z_{k1} & \cdots & z_{kj} & \cdots & z_{kk} & \cdots & z_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ z_{n1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & z_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \dot{I}_j \\ \vdots \\ \dot{I}_k \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$



所以, 对于端点k和j有:

$$\begin{cases} \dot{V}_j = -z_{jj}\dot{I}_j - z_{jk}\dot{I}_k \\ \dot{V}_k = -z_{kj}\dot{I}_j - z_{kk}\dot{I}_k \end{cases} \quad \begin{pmatrix} \dot{V}_j \\ \dot{V}_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z_{jj} & -z_{jk} \\ -z_{kj} & -z_{kk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{I}_j \\ \dot{I}_k \end{pmatrix}$$

将上式的Z矩阵转化为级联矩阵A, 即:

$$\begin{cases} \dot{V}_j = A\dot{V}_k - B\dot{I}_k \\ \dot{I}_j = C\dot{V}_k - D\dot{I}_k \end{cases} \quad \text{其中: } \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \frac{1}{-z_{kj}} \begin{pmatrix} -z_{jj} & |z| \\ 1 & -z_{kk} \end{pmatrix}, \quad |z| = z_{jj}z_{kk} - z_{jk}z_{kj}$$

$$\text{所以, 输入阻抗 } Z_{in} = \left. \frac{\dot{V}_j}{\dot{I}_j} \right|_{Z_L = \frac{\dot{V}_k}{-\dot{I}_k}} = \frac{AZ_L + B}{CZ_L + D}$$

$$\text{输出阻抗 } Z_{out} = \left. \frac{\dot{V}_k}{\dot{I}_k} \right|_{Z_g = \frac{\dot{V}_j}{-\dot{I}_j}} = \frac{DZ_g + B}{CZ_g + A}$$

$$\text{输入反射系数 } \Gamma_{in} = \frac{Z_{in} - Z_g}{Z_{in} + Z_g}$$

$$\text{输出反射系数 } \Gamma_{out} = \frac{Z_{out} - Z_L}{Z_{out} + Z_L}$$

$$\text{电压传输系数 } T = \frac{\dot{V}_k}{\dot{V}_j} = \frac{Z_L}{AZ_L + B + CZ_g Z_L + DZ_g} \quad \text{电压传输相移 } \phi = -\text{tg}^{-1} \frac{\text{imag}(T)}{\text{real}(T)}$$

阻抗参数 z_{jj} 、 z_{jk} 、 z_{kj} 、 z_{kk} 只是阻抗矩阵Z中的四个元素，可以从不定导纳矩阵Y的行列式值、以及其四个元素 y_{jj} 、 y_{jk} 、 y_{kj} 、 y_{kk} 的代数余子式得到，并不需要计算出整个Z矩阵。

利用不定导纳矩阵分析微波电路的方法总结：

第一步：首先对电路各节点依次编号，并将1号节点作为公共节点（参考节点）；

第二步：分别求出各个元件在电路中的不定导纳矩阵 \hat{Y}_j ；

第三步：将所有元件的不定导纳矩阵相加得到整个电路的不定导纳矩阵 $\hat{Y} = \sum_{j=2}^n \hat{Y}_j$ ；

第四步：由不定导纳矩阵计算其逆矩阵，得到矩阵 $\hat{Z} = \hat{Y}^{-1}$ ；

第五步：根据电路的端接条件确定与外部信号源或负载相连接的节点，这些节点所对应的外部电流不为零；

第六步：从不定导纳矩阵直接写出与外部信号源或负载相连节点的电压、电流所满足的方程，并进而得到这些节点多对应的阻抗矩阵、级联矩阵；

第七步：根据级联矩阵，计算这些与外部信号源或负载相连接的节点之间的传输系数、输入/输出反射系数。



分组作业

第三节 电路方程的建立与求解

参考文献：《电子电路的计算机辅助分析与设计》、《微波集成电路仿真—mwSPICE原理及应用》

实践表明，电路分析方法是CAA/CAD程序的关键部分，它涉及到如何建立电路的数学模型并进行相应的数值或非数值计算——数学方法问题。数学方法的具体选取取决于具体电路的性质、结构和用户的分析要求。

理想的数学方法应达到以下三个目的：1，分析结果精度高；2，计算速度快；3，节省内存空间。上述目标是相互制约的，必须在总体上予以兼顾或者对其中某一目标有所侧重。

本节及后面几节将以SPICE和ADS软件中主要算法为主线，介绍线性电路分析中常用的数学方法和一些关键问题的处理技巧。这些内容同样适合于微波线性电路的CAA和CAD。

前节介绍的不定导纳矩阵法可以认为是一类比较特殊的方法，适合于处理**不含有困难支路的微波线性电路**，而这里将要介绍的方法是完全普适的。

建立电路方程有且仅有两个基本依据：

- 反映电路拓扑特性的基尔霍夫电流定律（KCL）、
基尔霍夫电压定律（KVL）
- 反映电路中各个元件伏安特性的元件特性方程（VAR）

电路方程建立后，接下来的就是求解方程。一般来说，电路方程的解法有两类：解析法和数值法。大家此前学到的都属于解析法，例如冲激函数-卷积法、频域传递函数法（包括S参数法）。对于复杂电路，解析法往往无法使用，这时只能使用数值法。数值解法的具体选择取决于电路方程的性质、结构特点以及具体的分析要求。

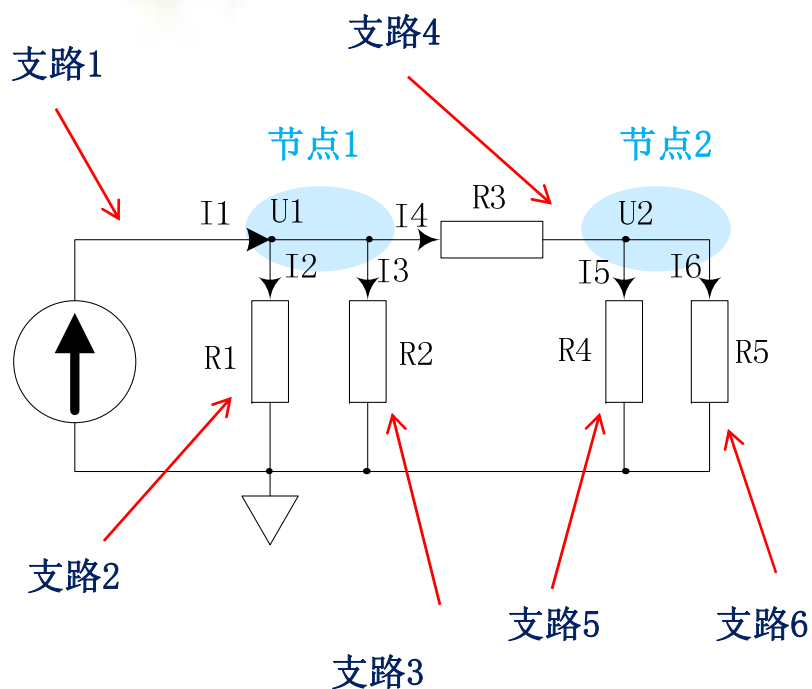
例如，对非线性电路进行直流分析时，通常选择牛顿-拉夫逊迭代法为基础的各种算法；而要分析一个电路的瞬态响应，就要利用各种数值积分算法；若要进行电路敏感度分析，还涉及到微分或差商运算。

KCL: 流入电路中任一节点的电流之和为零: $AI_b = 0$

其中, A 为电路的节点-支路关联矩阵, I_b 为电路的支路电流列向量。

KVL: 沿电路中任一回路的电压之和为零: $U_b = A^T U_n$

其中, A^T 为 A 的转置, U_b 和 U_n 分别表示电路的支路电压列向量和节点电位列向量。



$$AI_b = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{bmatrix} = 0$$

$$U_b = A^T U_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ -1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$$

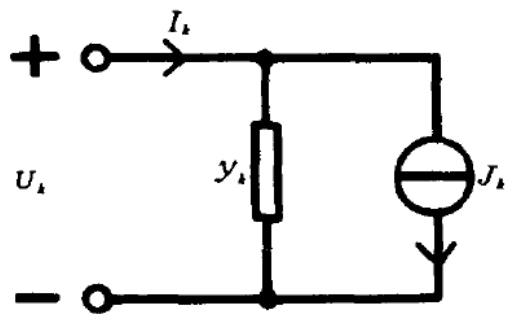
如何自动列写“节点-支路关联矩阵**A**”？

基本节点分析法 (NA) :

NA法以电路的**独立节点电压**为未知变量建立电路方程

假定电路中除了存在电流源外，其余所有支路电流都可以由支路电压唯一地确定。

例如，电路中某一支路k，有： $I_k = y_k U_k + J_k$



对于整个电路，可写成矩阵形式： $I_b = Y_b U_b + J_b$

这就是电路元件VAR的一般形式。式中， Y_b 是支路导纳矩阵， J_b 是电流源矢量。

上式两边左乘 A 矩阵，并代入KCL和KVL，得到：

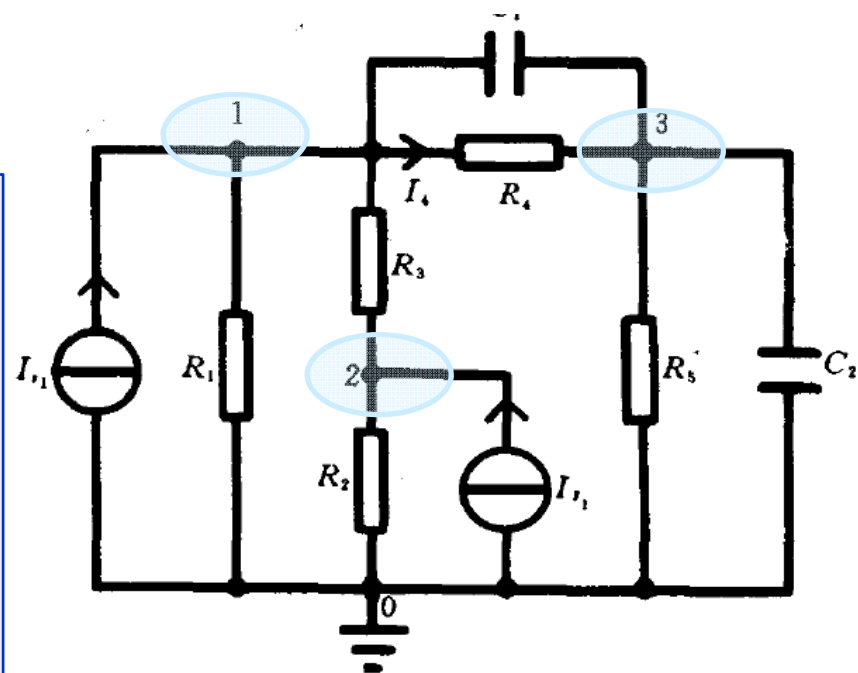
$$AY_b A^T U_n = -AJ_b$$

令 $AY_b A^T = Y$ ， $-AJ_b = I$ ， 得到： $YU_n = I$ 这就是基本节点方程的矩阵形式。

基本节点分析法 (NA) :

写出基本节点方程的步骤:

- 1, 为每个独立节点和每条支路编号;
- 2, 写出电路的节点-支路关联矩阵 A ;
- 3, 按支路编号写出每条支路上元件的VAR方程;
- 4, 按支路顺序将每条支路元件VAR方程排列起来, 形成整个电路的VAR矩阵方程 $I_b = Y_b U_b + J_b$, 从而提取支路导纳矩阵 Y_b 和支路电流源列矢量 J_b ;
- 5, 根据公式 $AY_b A^T = Y$ 和 $-AJ_b = I$, 计算得到电路导纳矩阵 Y 和电流列矢量 I , 从而得到整个电路的节点电压方程 $YU_n = I$ 。



直流时

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} & -\frac{1}{R_3} & -\frac{1}{R_4} \\ -\frac{1}{R_3} & \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} & 0 \\ -\frac{1}{R_4} & 0 & \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{s1} \\ I_{s2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

以独立节点电压作为未知量有以下特点：

- 1, 电路中任何支路的电压或电流均可方便地用节点电压表示出来；
- 2, 一般来说，电路中的独立节点的数目较少（相对于支路数、回路数而言），于是电路方程的规模小，便于求解；
- 3, 独立节点容易选取，而独立回路和割集的选取就要麻烦得多。电路越复杂，这个问题越突出。正因如此，节点电压方程特别适合于计算机上的方程自动建立。前面介绍的不定导纳矩阵方程可看成是节点电压方程的特例。

基本节点分析法的局限性及其改进：

当电路中含有独立电压源支路、VCVS（压控电压源）、CCVS（流控电压源）、CCCS（流控电流源）等支路（称为“困难支路”）时，由于这些支路的电流不能由支路电压加以确定，从而导致基本节点分析法失效。

改进方案：除了将独立节点的电压作为未知变量外，同时增加所有“困难支路”的电流也作为未知量，从而形成改进节点分析法。它既保留了NA法方程规模小的优点，又能克服NA法不能处理“困难支路”的问题。

改进的节点分析法 (MNA) :

将KCL改写分块矩阵形式: $AI_b = [A_Y : A_D] \begin{bmatrix} I_{bY} \\ I_{bD} \end{bmatrix} = 0$, 即: $A_Y I_{bY} + A_D I_{bD} = 0$

下标Y和D分别对应“非困难支路”和“困难支路”。类似地, KVL也可改写分块矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} U_{bY} \\ U_{bD} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_Y^T \\ A_D^T \end{bmatrix} U_n , \text{ 即: } U_{bY} = A_Y^T U_n, U_{bD} = A_D^T U_n$$

根据 $I_b = Y_b U_b + J_b$ 有: $I_{bY} = Y_{bY} U_{bY} + J_{bY}$ 。对该式左乘 A_Y 后, 再将上述分块矩阵形式的KCL和KVL代入, 整理得: $A_Y Y_{bY} A_Y^T U_n + A_D I_{bD} = -A_Y J_{bY}$

其中, $A_Y Y_{bY} A_Y^T = Y_1$ 是对应于“非困难支路”的节点导纳矩阵, 而 $-A_Y J_{bY} = I$ 是流入各节点的独立电流源矢量。因此, 上式可简写为:

$$Y_1 U_n + A_D I_{bD} = I$$

对于“困难支路”, 其VAR一般可表示为: $Y_D U_{bD} + Z_D I_{bD} = E$

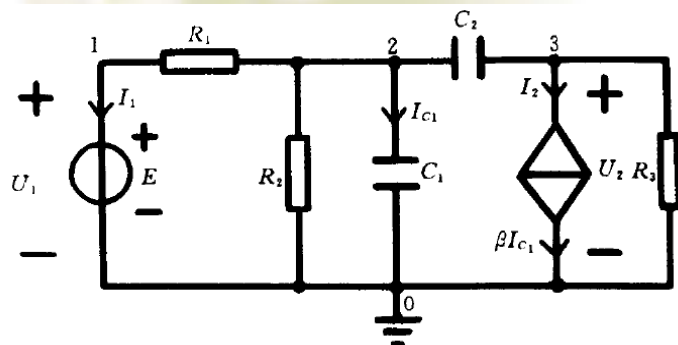
其中, Y_D 和 Z_D 分别为“困难支路”的导纳矩阵和阻抗矩阵, E 是独立电压源矢量。从而得到:

$$Y_D A_D^T U_n + Z_D I_{bD} = E$$

上述两式联立，就得到改进的节点方程：

$$\begin{pmatrix} \mathbf{Y}_1 & \mathbf{A}_D \\ \mathbf{Y}_D \mathbf{A}_D^T & \mathbf{Z}_D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U}_n \\ \mathbf{I}_{bd} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{E} \end{pmatrix}$$

例子：



对于“困难支路”，有：

$$U_1 = E$$

$$I_2 = \beta C_1 \frac{dU_2}{dt} = \beta C_1 \frac{d(U_1 + R_1 I_1)}{dt}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \beta C_1 \frac{d}{dt} & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{Y}_D} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{U}_{bD}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \beta R_1 C_1 \frac{d}{dt} & -1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{Z}_D} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{I}_{bD}} = \underbrace{\begin{pmatrix} E \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{E}}$$

而：

$$\mathbf{A}_D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

选独立节点电压 U_1 、 U_2 、 U_3 和“困难支路”电流 I_1 、 I_2 为未知变量。对于“非困难支路”，有：

$$\mathbf{Y}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_1} & 0 \\ -\frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1} + C_1 \frac{d}{dt} + C_2 \frac{d}{dt} & -C_2 \frac{d}{dt} \\ 0 & -C_2 \frac{d}{dt} & R_3 + C_2 \frac{d}{dt} \end{bmatrix}$$

从而写出改进的节点方程：

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} \frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_1} & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + C_1 \frac{d}{dt} + C_2 \frac{d}{dt} & -C_2 \frac{d}{dt} & 0 & 0 \\ 0 & -C_2 \frac{d}{dt} & \frac{1}{R_3} + C_2 \frac{d}{dt} & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta C_1 \frac{d}{dt} & 0 & 0 & \beta R_1 C_1 \frac{d}{dt} & -1 \end{array} \right] \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ E \\ 0 \end{bmatrix}$$

顺便指出，改进的节点法将独立电压源支路的电流作为未知量有一个额外的好处：如果要计算电路中某一指定支路的电流，只需在该支路中串入一个零值独立电压源，则该支路的电流就可同时计算出来，类似插入一个电流表的作用。

混合分析法（HAM）：

把电路划分为“阻抗支路”、“导纳支路”、电压源支路、电流源支路，并以独立节点电压、“阻抗支路”和电压源支路中的电流为未知变量建立电路方程。详细内容参见有关参考书目。

稀疏列表法（STF）：

对于一个含有 n 个独立节点、 b 个元件的电路，将每一个元件作为一条支路，并以所有支路电压、支路电流和独立节点电压作为未知变量，则所有元件的VAR一般可表示为： $D_1 U_b + D_2 I_b = S$ 。其中， D_1 、 D_2 为系数矩阵，而 S 是所有支路的独立源（包括电压源和电流源）矢量。

将KCL和KVL与上式联立，得到：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -A^T \\ D_1 & D_2 & 0 \\ 0 & A & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_b \\ I_b \\ U_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ S \\ 0 \end{bmatrix}$$

其中， I 为单位矩阵。上式中共含有 $(2b+n)$ 个方程，是一组庞大、稀疏的、但适应性很强的方程组。例如，如果电路含有100个节点、400条支路，则上式相当于900个方程，但由于方程非常稀疏，求解并不复杂。

几种电路方程的基本区别：

未知变量的选取及其数目不同，因而方程规模也不相同。NA方程规模最小但建立方程的难度最大，而STF方程规模最大但建立方程最容易，MNA方程介于两者之间，是一个很好的折中，因而得到最多的应用。

必须指出，这几种建立方程组的方法。对于不同性质的电路，包括线性电路/非线性电路、直流/稳态/瞬态电路等，都是普遍适用的！

线性方程组的求解：

线性电路的直流分析和交流稳态分析、非线性电路的直流分析和瞬态分析、非线性电路的稳态 / 准周期稳态 / 多速率稳态分析，最终都归结为求解以下形式的实系数、实变量线性代数方程组：

$$AX = B$$

如果 A 矩阵是方阵且是非奇异的，则上式存在唯一解： $X = A^{-1}B$

当方程组规模很大时，直接计算 A 的逆矩阵并不容易，计算量很大。CAA/CAD 中常用两大类方法求解上述方程组：

- 直接法：以高斯消元法和 LU 分解法为典型代表，其运算量（乘除的次数）约为 $\frac{1}{3}n^3$ 数量级，存储量为 n^2 数量级，其中 n 为方程个数。具体方法参见有关参考书。
- 迭代法：给定解的初值，通过逐次逼近来求解方程组，迭代过程一直进行到近似解达到预定精度为止。主要有雅可比 (Jacobi) 迭代法、塞德尔 (Seidal) 迭代法。迭代法存在收敛性问题（是否收敛，以及收敛速度）。迭代法将在后续介绍。

第四节 微波电路的时域分析

参考书：《近代微波技术》、《电子电路的计算机辅助分析与设计》、《微波集成电路仿真—mwSPICE原理及应用》

微波电路（网络）分析主要包括直流工作点分析、瞬态分析、交流小信号和大信号稳态分析等问题，其中直流分析和瞬态分析属于时域分析问题，而交流稳态分析则属于频域分析问题或时域/频域混合域分析问题。微波电路在小信号激励下的交流稳态分析属于单纯的频域线性分析，可以采用前述第一节或第二节的方法。而微波电路在大信号激励下的稳态分析，或自治电路稳态分析（例如，振荡器分析）都涉及到非线性电路问题，将在第四章中介绍。

直流分析就是求电路的直流工作点，包括线性电路或非线性电路的直流工作点。这时，电路中所有电容视为开路，所有电感视为短路，电路中的非线性元件只有非线性电阻。因此，直流分析是线性/非线性电路分析中最简单的情况，但直流分析的结果不仅对电路的直流特性设计有指导意义，而且还是非线性电路瞬态分析、交流小信号分析和灵敏度分析的基础。

SPICE系列软件中对非线性电路的分析和模拟主要是在时域中进行的，频域分析则是针对交流小信号问题进行，不涉及交流大信号和强非线性电路问题。

1972年美国加州大学伯克莱分校的L. W. Nagel等人在CANCER程序基础上开发出的SPICE程序及其以后的改进、增强版本 SPICE2、SPICE3等开创了以电路仿真为主的电子线路现代设计模式，其后MicroSim公司在此基础上开发出来的以个人计算机为工作平台的PSPICE是著名的具有极高商业价值的大中规模高、低频模拟和数字电路模拟器。1985年，美国著名的微波软件公司EESOF公司又在BerkeleySPICE基础上推出了mwSPICE (SPICE for Microwave Integrated Circuits)，将集成电路的仿真频率提高到了微波频段。之后，EESOF公司与HP公司合作，在mwSPICE程序基础上又开发出了著名的微波线性电路和子系统CAD软件—TOUCHSTONE和LineCalc及非线性分析软件MDS (Microwave Design System)、ADS软件。mwSPICE和ADS都是通用仿真程序，采用时域瞬态分析法分析包括线性和非线性电路在内的各种电路，如分立的或集成的，模拟的或数字的，单元电路或比较复杂的子系统，频率从直流直到微波近100GHz。

(一) 直流分析的数值方法

在进行直流分析时，不考虑电路中储能元件的作用，只考虑线性和非线性电阻、电压源、电流源的影响，因此这时描述电路特性的方程可以用前述第三节所介绍的方法建立如下形式的非线性代数方程组：

$$\vec{G}(\vec{x}) = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} G_1(x_1, x_2, \dots, x_N) = 0 \\ G_2(x_1, x_2, \dots, x_N) = 0 \\ \vdots \\ G_N(x_1, x_2, \dots, x_N) = 0 \end{cases}$$

其中， $\vec{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是待求的电路状态变量向量（可以是独立节点电压、支路电压、支路电流）。进行直流分析时主要应考虑以下三个方面问题：

- ❖ 电路解的存在性与唯一性，这是个理论上比较复杂的问题，至今未能完全解决。对于任意一个电路，直流解可能存在，也可能不存在；若存在，可能只有一个解也可能有多个解；

- ❖ 非线性器件直流模型的建立。直流分析结果的精度除了与所用计算方法有关外，在很大程度上取决于非线性器件的模型是否选的合理；
- ❖ 非线性代数方程 $\vec{G}(\vec{X})=0$ 的建立及数值求解。在mwSPICE程序中采用改进的节点分析法（MNA法）建立方程，这样既保持了用基本节点法（NA法）所建立的方程规模较小的优点，同时又具备混合分析法（HAM）和稀疏列表法（STF法）善于处理大规模电路和“困难支路”（所谓“困难支路”，就是指电路中含有独立电压源或受控源的支路）的特点。由于非线性器件种类繁多以及非线性问题本身固有的困难性，上述方程的求解一般只能采用迭代法。迭代法需要考虑收敛精度和收敛速度问题。

(1) Newton-Raphson迭代法

一般使用Newton-Raphson迭代法决定非线性代数方程组 $\vec{G}(\vec{X})=0$ 的解。

设 \vec{x}_k 和 \vec{x}_{k+1} 分别是方程的第k次和第k+1次迭代点，将 $\vec{G}(\vec{X})$ 在 \vec{x}_k 点处进行泰勒级数展开，并忽略高次项，得：

$$\vec{G}(\vec{x}_{k+1}) \approx \vec{G}(\vec{x}_k) + \vec{J}(\vec{x}_k) \cdot (\vec{x}_{k+1} - \vec{x}_k)$$

式中， $\vec{J}(\vec{x}_k)$ 为函数 \vec{G} 在 $\vec{x} = \vec{x}_k$ 处的 **Jacobi 矩阵**，令 $\vec{G}(\vec{x}_{k+1})=0$ ，则上式变为：

$$\vec{G}(\vec{x}_{k+1}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{x}_{k+1} = \vec{x}_k - \vec{J}^{-1}(\vec{x}_k) \vec{G}(\vec{x}_k)$$

这就是由 \vec{x}_k 计算 \vec{x}_{k+1} 的N-R迭代公式，该式还可写成：

$$\vec{J}(\vec{x}_k) \Delta \vec{x}_k = -\vec{G}(\vec{x}_k)$$

当方程数与未知数个数相同时, 有:

$$\bar{G}(\bar{x}) = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} G_1(x_1, x_2, \dots, x_N) = 0 \\ G_2(x_1, x_2, \dots, x_N) = 0 \\ \vdots \\ G_N(x_1, x_2, \dots, x_N) = 0 \end{cases}$$

$$\bar{x}_{k+1} = \bar{x}_k - \bar{\mathbf{J}}^{-1}(\bar{x}_k) \bar{\mathbf{G}}(\bar{x}_k) \quad \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} x_{1,k+1} \\ x_{2,k+1} \\ \vdots \\ x_{N,k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{1,k} \\ x_{2,k} \\ \vdots \\ x_{N,k} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial x_{1,k}} & \frac{\partial G_1}{\partial x_{2,k}} & \dots & \dots & \frac{\partial G_1}{\partial x_{N,k}} \\ \frac{\partial G_2}{\partial x_{1,k}} & \frac{\partial G_2}{\partial x_{2,k}} & \dots & \dots & \frac{\partial G_2}{\partial x_{N,k}} \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial G_N}{\partial x_{1,k}} & \frac{\partial G_N}{\partial x_{2,k}} & \dots & \dots & \frac{\partial G_N}{\partial x_{N,k}} \end{bmatrix}_{N \times N}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} G_{1,k} \\ G_{2,k} \\ \vdots \\ G_{N,k} \end{bmatrix}$$

当方程数与未知数个数不相同且 $M > N$ 时, 有:

$$\vec{G}(\vec{x}) = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} G_1(x_1, x_2, \dots, x_N) = 0 \\ G_2(x_1, x_2, \dots, x_N) = 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ G_M(x_1, x_2, \dots, x_N) = 0 \end{cases}$$

由 $\vec{G}(\vec{x}_{k+1}) \approx \vec{G}(\vec{x}_k) + \vec{J}(\vec{x}_k) \cdot (\vec{x}_{k+1} - \vec{x}_k)$ 和 $\vec{G}(\vec{x}_{k+1}) = \mathbf{0}$,

得: $\vec{J}(\vec{x}_k) \cdot (\vec{x}_{k+1} - \vec{x}_k) = -\vec{G}(\vec{x}_k)$

所以: $\vec{J}^H(\vec{x}_k) \vec{J}(\vec{x}_k) \cdot (\vec{x}_{k+1} - \vec{x}_k) = -\vec{J}^H(\vec{x}_k) \vec{G}(\vec{x}_k)$

$$\therefore \vec{x}_{k+1} - \vec{x}_k = -\left[\vec{J}^H(\vec{x}_k) \vec{J}(\vec{x}_k)\right]^{-1} \cdot \vec{J}^H(\vec{x}_k) \vec{G}(\vec{x}_k)$$

$$\therefore \vec{x}_{k+1} = \vec{x}_k - \left[\vec{J}^H(\vec{x}_k) \vec{J}(\vec{x}_k)\right]^{-1} \cdot \vec{J}^H(\vec{x}_k) \vec{G}(\vec{x}_k)$$

当方程数与未知数个数不相同且 $M < N$ 时, 有:

$$\vec{G}(\vec{x}) = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} G_1(x_1, x_2, \dots, x_N) = 0 \\ G_2(x_1, x_2, \dots, x_N) = 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ G_M(x_1, x_2, \dots, x_N) = 0 \end{cases}$$

由 $\vec{G}(\vec{x}_{k+1}) \approx \vec{G}(\vec{x}_k) + \vec{J}(\vec{x}_k) \cdot (\vec{x}_{k+1} - \vec{x}_k)$ 和 $\vec{G}(\vec{x}_{k+1}) = 0$,

得: $\vec{J}(\vec{x}_k) \cdot (\vec{x}_{k+1} - \vec{x}_k) = -\vec{G}(\vec{x}_k)$

所以:

$$\therefore \vec{x}_{k+1} - \vec{x}_k = -\vec{J}^H(\vec{x}_k) \cdot \left[\vec{J}(\vec{x}_k) \vec{J}^H(\vec{x}_k) \right]^{-1} \cdot \vec{G}(\vec{x}_k)$$

$$\therefore \vec{x}_{k+1} = \vec{x}_k - \vec{J}^H(\vec{x}_k) \cdot \left[\vec{J}(\vec{x}_k) \vec{J}^H(\vec{x}_k) \right]^{-1} \cdot \vec{G}(\vec{x}_k)$$

$$\vec{x}_{k+1} = \vec{x}_k - \vec{J}^{-1}(\vec{x}_k) \vec{G}(\vec{x}_k) \quad \Rightarrow \quad \vec{J}(\vec{x}_k) \Delta \vec{x}_k = -\vec{G}(\vec{x}_k)$$

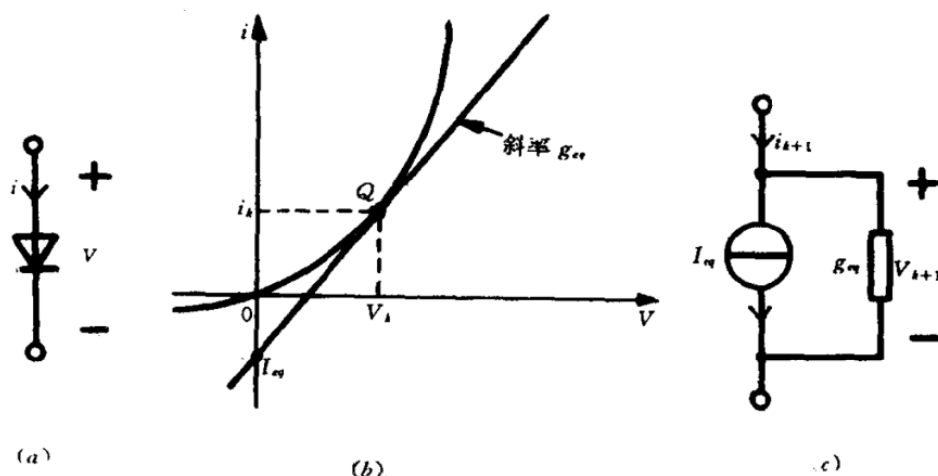
这是一组以 $\Delta \vec{x}_k = \vec{x}_{k+1} - \vec{x}_k$ 为变量的非齐次线性方程组，利用线性方程组解法（例如，高斯消元法或LU分解法）求得 $\Delta \vec{x}_k$ 后即可得到 \vec{x}_{k+1} 。

通过任意假设一个初始迭代点 \vec{x}_0 ，由上述公式进行反复迭代，直至 $\Delta \vec{x}_k$ 足够小，最终就得到了电路的精确或近似直流解。

由于每次迭代时都要计算Jacobi矩阵，工作量大，因此在计算机上可以采用基于仿射变换和差商的拟牛顿迭代法，从而大大减少计算量。

N-R法是求解非线性方程组的基本方法，考虑到非线性是由于构成电路的元器件的非线性所致，所以在计算机上通常是先将非线性元件线性化，得到非线性电路的所谓“**线性伴随网络**”，然后对线性伴随网络直接建立 $\vec{J}(\vec{x}_k) \Delta \vec{x}_k = -\vec{G}(\vec{x}_k)$ 方程，这样就把非线性电路直流分析问题转化为一系列线性伴随网络的分析，从而大大减少计算量。

非线性元件的线性伴随模型举例：



二极管是非线性元件，其VAR关系为：

$$i = f(V) = I_s(e^{V/V_t} - 1)$$

— 设二极管工作在 $Q(i_k, V_k)$ 点，对上式在 Q 点作泰勒一阶近似，并令 $i = i_{k+1}$ ，有：

$$\begin{aligned} i_{k+1} &= I_s(e^{V_{k+1}/V_t} - 1) \approx f(V_k) + f'(V_k) \cdot (V_{k+1} - V_k) \\ &\approx I_s(e^{V_k/V_t} - 1) + \frac{I_s}{V_t} e^{V_k/V_t} \cdot (V_{k+1} - V_k) = I_{eq} + g_{eq} \cdot V_{k+1} \end{aligned}$$

式中：

$$I_{eq} = I_s(e^{V_k/V_t} - 1) - \frac{I_s V_k}{V_t} e^{V_k/V_t} \quad g_{eq} = \frac{I_s}{V_t} e^{V_k/V_t}$$

也就是说，(a) 图所示的二极管非线性特性，在前一次迭代得到的工作点附近可用一条直线来代替，如图(b)，该直线的斜率为 g_{eq} ，直线在 i 轴上的截距为 I_{eq} 。所以，二极管的线性伴随模型就是(c) 图。

(2) 迭代收敛问题及改进的N-R算法

非线性直流分析是一个反复迭代的过程，其最关键的问题是迭代过程能否最终达到系统的真解以及达到真解所需要的时间，前者即是所谓“收敛可靠性”问题，后者即是所谓收敛速度问题。可以证明，当初值选得足够好时，N-R算法一定收敛，但对于具体的直流分析问题，除了个别简单情况外，要给出足够好的初值是十分困难的，因而往往出现由于初值选得不当而造成迭代发散的情况。

收敛速度不仅取决于所用的算法，同时与迭代解的精度要求密切相关，即与收敛判据有关。一般所用的收敛判据为：

$$\left\| \vec{X}_{k+1} - \vec{X}_k \right\| \leq \varepsilon_a + \varepsilon_r \cdot \min \left\{ \left\| \vec{X}_k \right\|, \left\| \vec{X}_{k+1} \right\| \right\}$$

其中， ε_a 为绝对容差， ε_r 为相对容差。

使用该判据有时会出现“假收敛”现象，就是说，由于迭代的变量选择不当，虽然表面上 $\|\vec{x}_{k+1} - \vec{x}_k\|$ 已经满足给定的容差要求、迭代已经结束，而实际上电路并未真正达到满足KCL和KVL的平衡状态。为此可采用另一种判据：在某一工作点处，非线性支路的实际变量值与其线性伴随网络的同一变量迭代之差不超过给定的容差范围时，认为迭代收敛。对于电流定义支路，可表示为：

$$\|I - \hat{I}\| \leq \varepsilon_a + \varepsilon_r \cdot \min\{\|I\|, \|\hat{I}\|\}$$

对于电压定义支路，可表示为：

$$\|U - \hat{U}\| \leq \varepsilon_a + \varepsilon_r \cdot \min\{\|U\|, \|\hat{U}\|\}$$

式中， I ， U 是非线性支路的实际电流值和电压值， \hat{I} ， \hat{U} 是其线性伴随网络在相同电压下的电流值和在相同电流下的电压值。mwSPICE中使用后两个判据，虽然迭代次数要比用前一个判据时多，但收敛性更有保证。

为了避免出现迭代发散和数值溢出现象发生，可以采用各种改进的N-R算法，主要有简单限界法、源步进法和**阻尼法**三种，mwSPICE中采用简单限界法中的Colon算法。

➤ 简单限界法：

以某种方式限制非线性电路以改善基本N-R法的收敛特性。例如，为了防止二极管电路分析中的数值溢出，规定：当电压迭代值小于某个经验值（如 $10V_t = 0.256V$ ）时不加任何限制；如果超过 $10V_t$ ，向上迭代（即 $V_{k+1} > V_k$ ）的步幅增量不得大于另一个经验值 $2V_t$ ；向下迭代（即 $V_{k+1} < V_k$ ）的步幅增量不得小于 $2V_t$ 。

另一种简单限界法是换基法。根据电流定义支路和电压定义支路、向上迭代和向下迭代等不同情况，使用不同的迭代变量。一些情况下用电压变量进行迭代，另一些情况下则换用电流迭代，从而避免溢出和非单调特性时出现的“振荡”现象。

第三种简单限界法是Col on算法：以迭代变量为电压为例说明。当 V_{k+1} 超过某个由经验而定的“临界电压 V_{cr} ”，且 $I_{k+1} > 0$ 时，则改为按电流迭代求得第k+1次迭代解 V'_{k+1} ；当 V_{k+1} 小于该临界电压 V_{cr} 时，仍按电压迭代，且令该 V'_{k+1} 为第k+1次迭代解 V_{k+1} 。例如，对于二极管而言，可取临界电压 $V_{cr} = V_t \ln \left(\frac{V_t}{\sqrt{2} I_s} \right)$ 。

以上三种简单限界法 都在SPICE程序系列中实现过，并用多种标准电路进行过测试。结果表明，三种方法差别不大，但Col on算法迭代次数略少一些，收敛的可靠性也略好一些。

➤ 源步进法

该法假定非线性电路的电源由零值逐渐增大，每次增加一个增量（步进），并逐次进行直流分析，逐步迭代得到真解。实验表明，源步进法的收敛可靠性比简单限界法好一些。

➤ 阻尼法

阻尼法根据下式来计算迭代值：

$$\bar{x}_{k+1} = \bar{x}_k + \lambda \Delta \bar{x}_k$$

即：阻尼法是可变步长迭代法。当第 $k+1$ 次迭代时的最大绝对值误差 E_{k+1} 大于第 k 次迭代的最大绝对值误差 E_k 时，令式中的 λ 为 $\lambda\varepsilon$ ，通常取 $\varepsilon \approx 0.75$ 左右。当 $E_{k+1} \leq E_k$ 时， λ 取为 λ/ε 、 $\lambda \leq 1$ 。实验证明，这种方法有助于改善迭代过程的收敛性。

以上三种改进算法中，简单限界法简单易行，而且一旦收敛，可使迭代次数最少、收敛速度最快；源步进法和阻尼法收敛可靠性要好一些，但仍不能保证绝对收敛，且收敛速度慢得多。这就是mwSPICE选用简单Colon限界法的原因。

分组作业：

（二）电路瞬态分析的数值方法

（1）电路瞬态分析的数学实质

电路的瞬态分析就是计算网络加上激励信号时的瞬态响应、延迟时间、传输匹配等。线性电路的瞬态特性可以用线性微分方程组来描述，且当电路还是时不变的，则用常系数微分方程组表示；如果电路是非线性的，则微分方程是非线性的。因此，实际上，电路的瞬态分析问题就是建立微分方程组与求解微分方程组的问题。

拉氏变换是求解瞬态响应的一种方法，它将时域问题变换为频域问题，将微分方程的求解变换为代数方程的求解，从而使问题得以简化。但这种方法具有很大的局限性：一方面它不适用于非线性电路，另一方面激励信号波形受到限制，并且复杂电路的传输函数或拉氏反变换难于实现。因此，拉氏变换不能作为通用的瞬态分析方法。

数值积分法是求解微分方程（组）的有效方法，也是进行瞬态分析的通用方法，它既适用于线性电路，又适用于非线性电路。因此，在一般的电路分析软件中，不论是对于线性还是非线性电路的瞬态响应问题，都使用数值积分法进行求解。

集总参数电路瞬态问题可以用一阶常微分方程组和初始条件表示为：

$$\begin{cases} \frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{F}(\vec{x}, t) \\ \vec{x}(t_0) = \vec{x}_0 \end{cases} \quad (t_0 \leq t \leq T)$$

其中 \vec{x} 是待求解的电路变量向量， $\frac{d\vec{x}}{dt}$ 是 \vec{x} 对 t 的导数， t 是定义在区间 $[t_0, T]$ 的时间变量。

数值积分法的计算步骤：

为了用数值积分法对上式求解，需要将区间 $[t_0, T]$ 分成若干个离散的时间点 $(t_0, t_1, t_2, \dots, t_n, \dots, T)$ ，然后在这些时间点上将微分方程用差分方程代替（差分方程为代数方程），逐时间点求解差分方程，并得到这些时间点上的 $\vec{x}(t_1), \vec{x}(t_2), \dots, \vec{x}(t_n), \dots, \vec{x}(t_m = T)$ 的近似值 $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n, \dots, \vec{x}_m$ ，初始条件 $\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0$ 用前述的求直流工作点方法解决。在求 t_n 时刻 $\vec{x}(t_n)$ 的近似值 \vec{x}_n 时，要用已经求得的 $(t_{n-1}, t_{n-2}, \dots)$ 上的近似解 $(\vec{x}_{n-1}, \vec{x}_{n-2}, \dots)$ ，所用的 t_n 以前时间点上解的个数取决于积分公式。 $h_i = t_{i+1} - t_i (i = 0, 1, 2, \dots)$ 为积分步长，当 h_i 为常数时称为定步长积分，否则称为变步长积分。

由数值积分法得到的 t_n 时刻的近似值 \vec{x}_n^* 与精确解 $\vec{x}(t_n)$ 之间的总误差由两部分组成：

- 局部截断误差 LTE (Local Truncation Error) \vec{E}_T ：假定以前各时刻的解是精确解时，仅由本次计算 t_{n+1} 时刻的解所产生的截断误差；
- 累积舍入误差 (Round-off Error) \vec{E}_n ：由于有限位数而引起的“舍入误差”。

当前面解的误差对后面时间点上的解的影响不随积分步数的增加而增加，亦即累积舍入误差是有界的，则这时使用的积分方法是稳定的，否则是不稳定的。有些积分方法只要微分方程（系统）本身是稳定的，则积分方法无条件地稳定，有些方法只在一定的步长限制条件下才稳定。

数值积分的解是否足够精确，关键是看其方法的局部截断误差和稳定性。

(2) 前向欧拉算法、后向欧拉算法、梯形法、吉尔法

➤ 前向欧拉算法: $\vec{x}_{n+1} = \vec{x}_n + h\vec{F}(\vec{x}_n, t_n)$ (一阶单步显式算法)

局部截断误差: $E_T = \frac{1}{2}h^2 \frac{d^2 \bar{x}(\eta)}{dt^2} = O(h^2) \quad (t_n < \eta < t_{n+1})$

➤ 后向欧拉算法: $\vec{x}_{n+1} = \vec{x}_n + h\vec{F}(\vec{x}_{n+1}, t_{n+1})$ (一阶单步隐式算法)

局部截断误差: $E_T = -\frac{1}{2}h^2 \frac{d^2 \bar{x}(\eta)}{dt^2} = O(h^2) \quad (t_n < \eta < t_{n+1})$

➤ 梯形算法: $\vec{x}_{n+1} = \vec{x}_n + \frac{h}{2} \left[\vec{F}(\vec{x}_n, t_n) + \vec{F}(\vec{x}_{n+1}, t_{n+1}) \right]$ (二阶单步隐式算法)

局部截断误差: $E_T = -\frac{h^3}{12} \frac{d^3 \bar{x}(\eta)}{dt^3} = O(h^3) \quad (t_n < \eta < t_{n+1})$

瞬态问题中常使用的两种数值积分法：梯形法和吉尔法

在 t_n 时刻，若瞬态问题的一阶常微分方程组为：

$$\frac{d\vec{x}_n}{dt} = \vec{F}(\vec{x}_n, t_n)$$

令时间步长 $h=t_{n+1}-t_n$ 很小，从而可近似地取：

$$\frac{\vec{x}_{n+1} - \vec{x}_n}{h} = \frac{1}{2} \left(\frac{d\vec{x}_n}{dt} + \frac{d\vec{x}_{n+1}}{dt} \right)$$

则有：

$$\vec{x}_{n+1} = \vec{x}_n + \frac{h}{2} \left[\vec{F}(\vec{x}_n, t_n) + \vec{F}(\vec{x}_{n+1}, t_{n+1}) \right]$$

这就是梯形法公式，须用迭代法求解，可以证明，梯形法是隐式、单步的二阶积分算法，其精度高于一阶的前向（或后向）欧拉算法。mwSPICE 软件中瞬态分析的默认算法就是梯形算法。

若要进一步提高算法的精度，可用吉尔算法：即将 $\frac{d\vec{x}_{n+1}}{dt}$ 近似表示为 t_{n+1} 时刻及其以前k个时间点的解的线性组合：

$$\vec{x}_{n+1} = \sum_{j=0}^{k-1} c_j \vec{x}_{n-j} + b_{-1} h \frac{d\vec{x}_{n+1}}{dt} = \sum_{j=0}^{k-1} c_j \vec{x}_{n-j} + b_{-1} h \vec{F}(\vec{x}_{n+1}, t_{n+1})$$

为了计算上式的线性组合系数 c_j, b_{-1} ，可用下述k次多项式来逼近瞬态微分方程的解：

$$\vec{x}(t) \rightarrow \vec{p}(t) = \vec{a}_0 + \vec{a}_1 (t - t_n) + \cdots + \vec{a}_k (t - t_n)^k$$

即令 $\vec{p}(t)$ 在时刻 $t_n, t_{n-1}, \dots, t_{n-k+1}$ 的值分别为 $\vec{x}_n, \vec{x}_{n-1}, \dots, \vec{x}_{n-k+1}$ ， $\vec{p}(t)$ 的一阶导数在时刻 t_{n+1} 的值为 $\frac{d\vec{x}_{n+1}}{dt} = \vec{F}(\vec{x}_{n+1}, t_{n+1})$ 。在步长h恒定时，可以证明，系数 c_j, b_{-1} 由下式决定：

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & \cdots & (1-k) & 1 \\ 0 & (-1)^2 & (-2)^2 & \cdots & (1-k)^2 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & (-1)^k & (-2)^k & \cdots & (1-k)^k & k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{k-1} \\ b_{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

吉尔法是一种隐式、多步、k阶的数值积分算法。对于k的不同取值，吉尔公式的系数 c_j, b_{-1} 有表可查：

k	c_0	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	b_{-1}
1	1						1
2	$\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{3}$					$\frac{2}{3}$
3	$\frac{18}{11}$	$-\frac{9}{11}$	$\frac{2}{11}$				$\frac{6}{11}$
4	$\frac{48}{25}$	$-\frac{36}{25}$	$\frac{16}{25}$	$-\frac{3}{25}$			$\frac{12}{25}$
5	$\frac{300}{137}$	$-\frac{300}{137}$	$\frac{200}{137}$	$-\frac{75}{137}$	$\frac{12}{137}$		$\frac{60}{137}$
6	$\frac{360}{147}$	$-\frac{450}{147}$	$\frac{400}{147}$	$-\frac{225}{147}$	$\frac{72}{147}$	$-\frac{10}{147}$	$\frac{60}{147}$

由于吉尔公式中含有k个 t_{n+1} 时刻以前的 $\vec{x}(t)$ 值，所以要先算出并存储足够多个过去值后，才能用该式进行计算。由于 \vec{x}_{-1} 是不存在的，因此在已知 \vec{x}_0 情况下， \vec{x}_1 可用一阶算法， \vec{x}_2 可用二阶算法， \vec{x}_3 可用三阶算法。

吉尔法的局部截断误差为： $E_T = O(h^{k+1})$

动态元件的瞬态伴随模型、电路瞬态分析的伴随模型法：

将上述各种数值积分法应用于非线性电路时，可得到对应于各个**动态元件的瞬态伴随模型**，从而，就某一时刻来说，动态电路即变成电阻性电路，相应的微分方程就化为代数方程了。这样，将时间按步长增加，就能求出新的离散时间点上的（电阻性）电路及其解。这就是**电路瞬态分析的伴随模型法**，并且动态元件的瞬态模型的形式取决于所用的数值积分算法。

（其实这就是把对应实际电路的非标准形式的微分方程组改为差分方程组并最终得到迭代方程）

下面简述一下基于后向欧拉算法的线性与非线性元件的瞬态伴随模型。

使用贮能元件和其他非线性元件的伴随模型，可以把含有这些元件的电路，化成仅由电阻、电导、电压控制电流源和其它电源组成的离散化线性电路，利用这些伴随模型对方程组中的系数矩阵和右端项的贡献，能方便地写出电路的方程组表达式。

①线性电容

线性电容支路特性方程为： $I_c = C \frac{dv_c}{dt}$

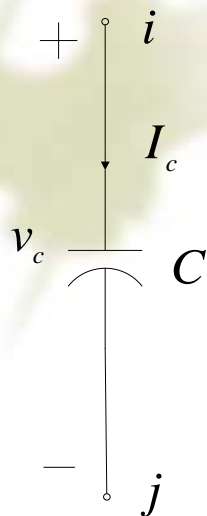
在 t_m 时刻，由向后欧拉法有：

$$I_c^m = C \frac{v_c^m - v_c^{m-1}}{h_m} = G^m v_c^m + \bar{I}_c^{m-1}$$

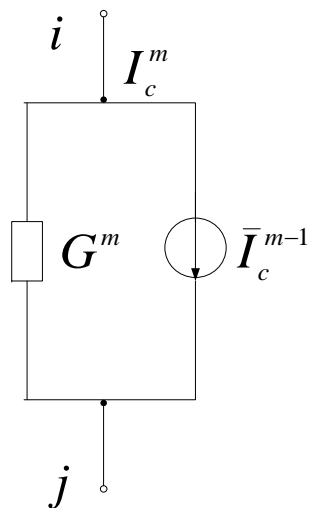
式中， $G^m = \frac{C}{h_m}$ ， $\bar{I}_c^{m-1} = -G^m v_c^{m-1}$ 。线性电容对电路的广义节点导纳方程组系数矩阵和右端项的贡献，如下式所示。

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} i & j \end{array} \\ \begin{array}{c} i \\ j \end{array} & \begin{bmatrix} G^m & -G^m \\ -G^m & G^m \end{bmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{c} R \\ \begin{bmatrix} -\bar{I}_c^{m-1} \\ \bar{I}_c^{m-1} \end{bmatrix} \end{array}$$

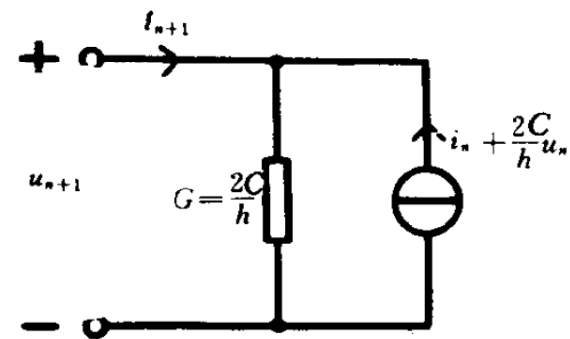
其中， i, j 表示线性电容连接于电路节点 i 和节点 j ，与广义节点导纳方程组的系数矩阵行和列的序号相对应。 R 表示广义节点方程组的右端项。其伴随模型如下图。



(a) 线性电容的电路符号



(b) 线性电容的伴随模型
(后向欧拉法)



(c) 线性电容的伴随模型
(梯形法)

$$I_c^m = G^m v_c^m + \bar{I}_c^{m-1}$$

$$i_{n+1} = \frac{2C}{h} u_{n+1} - \left(\frac{2C}{h} u_n + i_n \right)$$

线性电容在 t_m 时刻的瞬态伴随模型

② 线性电感

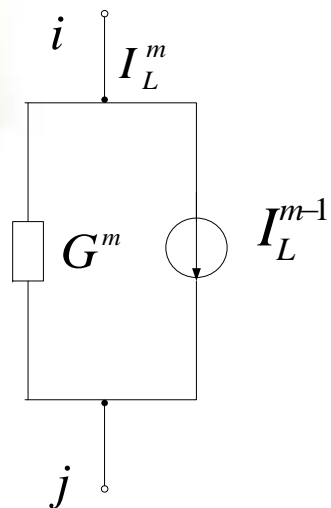
线性电感支路特性方程为： $v_l = L \frac{dI_L}{dt}$ 。

$$v_L^m = L \frac{I_L^m - I_L^{m-1}}{h_m}$$

于是， $I_L^m = G^m v_L^m + I_L^{m-1}$ ， 式中 $G^m = \frac{h_m}{L}$ 。

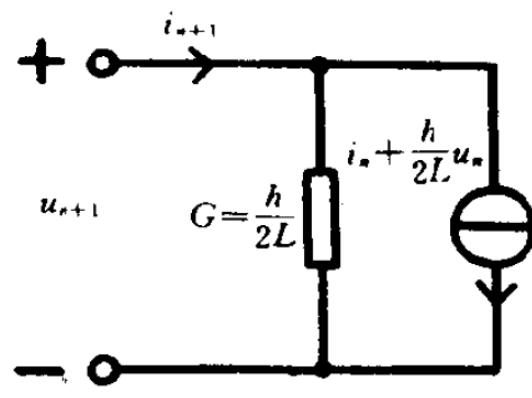
对广义节点导纳方程的系数矩阵和右端项贡献如下式所示。伴随模型见下图。

$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix} i & j \end{matrix} \\ \begin{matrix} i \\ j \end{matrix} & \begin{bmatrix} G^m & -G^m \\ -G^m & G^m \end{bmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{c} R \\ \begin{bmatrix} -I_L^{m-1} \\ \bar{I}_L^{m-1} \end{bmatrix} \end{array}$$



(a) 线性电感容的伴随模型
(后向欧拉法)

$$I_L^m = G^m v_L^m + I_L^{m-1}$$



(b) 线性电感的伴随模型
(梯形法)

$$i_{n+1} = \frac{h}{2L} u_{n+1} + \left(\frac{h}{2L} u_n + i_n \right)$$

线性电感在 t_m 时刻的瞬态伴随模型

③ 非线性电阻

只考虑非线性电阻效应的二极管的支路特性方程为：

$$I_D = I_s (e^{\lambda_D v_D} - 1)$$

使用泰勒级数展开，有：

$$I_D^m \approx I_D^{m-1} + G_D^{m-1} (v_D^m - v_D^{m-1}) = G_D^{m-1} v_D^m + \bar{I}_D^{m-1}$$

式中

$$G_D^{m-1} = I_s \lambda_D e^{\lambda_D v_D^{m-1}} \quad \bar{I}_D^{m-1} = I_D^{m-1} - G_D^{m-1} v_D^{m-1}$$

其对应的伴随模型的形式同前。对广义导纳方程的系数矩阵和右端项贡献如下式所示。

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} i & j \end{array} \\ \begin{array}{c} i \\ j \end{array} & \begin{bmatrix} G_D^{m-1} & -G_D^{m-1} \\ -G_D^{m-1} & G_D^{m-1} \end{bmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{c} R \\ \begin{bmatrix} -I_D^{m-1} \\ I_D^{m-1} \end{bmatrix} \end{array}$$

(3) 时间步长的确定与解的稳定性问题

直观上看，对于一定的时间区间，希望时间步长尽量大，这时用数值积分算法求解微分方程组所需的时间点数就会少一些，从而可以节省计算时间。但是，增大时间步长，则局部截断误差也随之增大，从而影响计算精度。

除了计算精度外，衡量一个算法优劣还有一个重要标准，即稳定问题，如果在某个时间点上，局部截断误差对 \vec{x}_n 的总误差的贡献随着 n 的增大（即时间的增加）而逐渐减小，则该算法是稳定的，否则是非稳定的。

可以证明，前向欧拉算法是条件稳定的，即当其时间步长 h 小于 $2/|\lambda_{\max}|$ ($|\lambda_{\max}|$ 为微分方程组的绝对值最大的特征值) 时算法稳定；而后向欧拉法、梯形法和一阶、二阶吉尔法是绝对稳定的，即所取的时间步长不影响算法的稳定性；而二阶以上的吉尔法是条件稳定的，并且稳定区域随着阶数的增大而逐渐减小，计算量也相应增加。为限制舍入误差的影响，所使用的吉尔法以不超过六阶为宜。

将数值积分法应用到**刚性电路**问题中时（所谓刚性电路，是指电路中的多个时间常数分布在很宽的范围内，它们之间可能相差几个数量级），为了保证足够的计算精度，开始时的步长必须充分小，以便与小时间常数相比较，但如果始终采用这种小步长计算下去，由于整个时间区间很大，则计算步数必然很多。为此，必须使用变步长法处理刚性电路问题，即允许时间步长在较宽范围内变化（必要时步长可以很小，不必要时步长可以很大），同时又能保持数值稳定性。。在**mwSPICE**程序中采用了以局部截断误差估值控制步长 h 的方法，即在每个时间点上对局部截断误差进行估值，根据其大小适当调节时间步长使之尽可能地大，但又使局部截断误差一直保持在一个允许的范围内

总之，对于瞬态分析问题而言，选择良好的数值积分方法的原则是：在保持计算精度和数值稳定性的前提下，用最快的速度完成给定时间范围内的瞬态分析。（观察了解ADS中的瞬态仿真器**Transient Simulation**）

第五节 微波电路噪声分析、敏感度分析、容差分析

(参考资料:《电子电路的计算机辅助分析与设计》、《微波集成电路仿真—mwSPICE原理及应用》、ADS)

(一) 微波电路的噪声分析

微波电路的噪声分析属于小信号频域分析问题。写出微波电路的噪声等效电路后,按照频域线性电路分析得到负载上的噪声电压/噪声电流即可。

半导体器件中的热噪声源、散弹噪声源和闪烁噪声源分别表示为:

热噪声电压源:由串联电阻 R_s 和均方根电压源 $\sqrt{v_n^2} = \sqrt{4kTBR_s}$ 表示, **是一种白噪声源**。B是需要考虑的热噪声带宽。热噪声功率为 $(\frac{\sqrt{v_n^2}}{2R_s})^2 \cdot R_s = kTB$

散弹噪声电流源:起源于半导体中载流子运动的随机性,它与电流有关,也**是一种白噪声**,可以用一个均方根噪声电流源 $\sqrt{i_{sh}^2} = \sqrt{2eI_D B}$ 和半导体结电阻 R_j 并联表示。

闪烁噪声功率源:与半导体制造工艺及表面处理情况有关。它的特点是其功率谱与频率成反比,即: $P(f) = \frac{B_x}{f}$, B_x 是一个常数,决定于半导体器件的工作电流及半导体性质,几乎与工作电流成正比。表示为一个有内阻的功率源。闪烁噪声只需在低频段考虑。

微波电路噪声系数及其计算：

➤ 噪声系数的定义

一个微波电路，接收或发射信号质量的好坏不仅决定于信号的大小，还决定于噪声的强弱。在微波波段，噪声的主要来源是电路的内部噪声。为了描述线性系统内部噪声的影响，人们引入了噪声系数的概念。两种应用最广泛的噪声系数定义：

第一种定义：

设 P_{si} / P_{ni} 和 P_{so} / P_{no} 分别为输入端处于标准温度（290K）的线性二端口网络的输入端和输出端的信噪比，则噪声系数为

$$F = \frac{P_{si} / P_{ni}}{P_{so} / P_{no}} = \frac{1}{G} \frac{P_{no}}{P_{ni}}$$

式中， P_{si}, P_{so} 分别表示输入端和输出端的信号资用功率； P_{ni}, P_{no} 分别表示输入端和输出端的噪声资用功率。该定义表征了网络内部噪声使信噪比变坏的程度。

第二种定义：

一个线性两端口网络，输入端接入和网络输入电阻相等的源电阻，并处于标准温度时，则网络实际输出的总噪声功率和仅由输入端电阻产生的输出噪声功率之比叫做网络的噪声系数，即

$$F = \frac{GP_{ni} + P_{n\alpha}}{GP_{ni}} = 1 + \frac{P_{n\alpha}}{GP_{ni}}$$

式中，G是网络增益； GP_{ni} 是输入端电阻产生的输出噪声功率； $P_{n\alpha}$ 是网络内部噪声功率。

这里定义的噪声系数表征了实际网络输出的噪声功率与一个理想的无内部噪声的网络的输出噪声功率之比。

不难证明，以上两种定义在本质上是是一致的。因为

$$G = \frac{P_{so}}{P_{si}}$$

而 P_{ni} 是输入端电阻产生的资用噪声功率，其值为

$$P_{ni} = kT_0B$$

P_{no} 包括输入端噪声放大后的输出以及网络内部噪声，即

$$P_{no} = GkT_0B + P_{n\alpha}$$

将以上诸式代入噪声系数的第一种定义式中，得到：

$$F = \frac{1}{G} \frac{P_{no}}{P_{ni}} = \frac{GkT_0B + P_{n\alpha}}{GkT_0B} = 1 + \frac{P_{n\alpha}}{GP_{ni}}$$

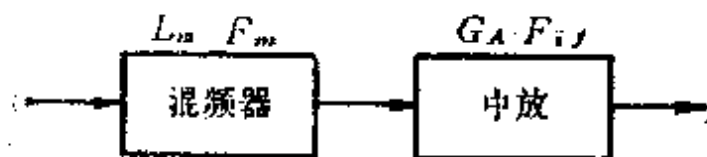
➤ 整机噪声系数的计算

多级电路级联情况下，采用小信号频域分析，分别得到每级电路各自的噪声系数 F_n 、传输系数（增益 G_n 或插入损耗 L_n ），在级间阻抗匹配的条件下，利用下式计算得到整机噪声系数：

$$F = F_1 + \frac{F_2 - 1}{G_1} + \frac{F_3 - 1}{G_1 G_2} + \dots$$

可见，整机噪声系数主要取决于前级电路的噪声系数和增益。增大第一级电路的增益，有助于减小整个电路的总噪声系数，从而提高电路的灵敏度。

以二极管混频器+中放的接收机为例， L_m 、 F_m 分别为二极管混频器的变频损耗及噪声系数， F_{if} 和 G_A 是中放的噪声系数和增益，总噪声系数为：



$$F = F_m + L_m(F_{if} - 1)$$

大型作业报告（XXX小组）



（二）微波电路的敏感度分析

在具体电路中，各个元件的实际参数值与其标称值之间不可避免地存在一定偏差，而且随着电路周围环境（如温度、湿度和压力等）的变化，元件参数也会偏离原来的标称值。而元件参数的任何变化都会不同程度地影响电路的性能指标。因此，分析和设计电路时，必须研究元件参数的变化对电路状态、电路响应的影响，这就是敏感度分析问题。

➤ 绝对敏感度（又称微分敏感度、交流敏感度）：电路的特性或响应 T （例如，节点电压）相对于某个电路元件参数的绝对敏感度定义为：

$$D_x^T = \frac{\partial T}{\partial x}$$

➤ 相对敏感度（又称归一化敏感度、直流敏感度）：同时考虑绝对敏感度和电路元件参数大小的影响，定义为：

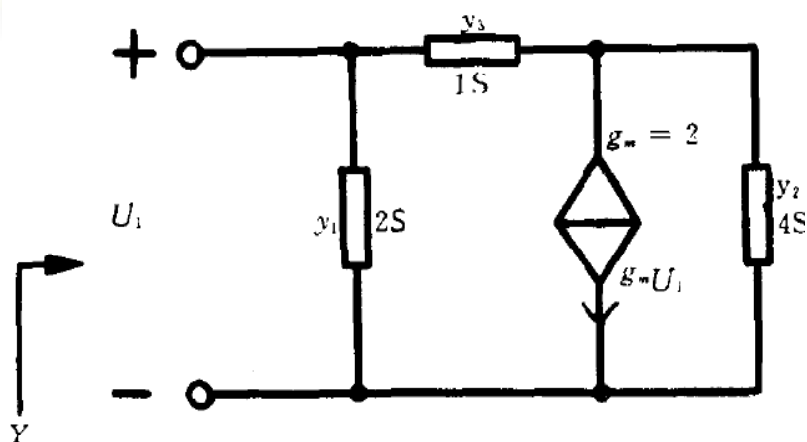
$$S_x^T = \frac{\partial \ln T}{\partial \ln x} = D_x^T \cdot \frac{x}{T}$$

➤ 直接求导法计算敏感度:

下图电路的输入导纳为: $Y = y_1 + y_3 + y_3(g_m - y_3)/(y_2 + y_3)$

依次对 $y_i (i=1,2,3)$ 和 g_m 求一阶偏导数, 并代入标称值 $y_1 = 2$, $y_2 = 4$, $y_3 = 1$

和 $g_m = 2$, 可得绝对敏感度:



$$\frac{\partial Y}{\partial y_1} = 1 \quad \frac{\partial Y}{\partial y_2} = -0.04$$

$$\frac{\partial Y}{\partial y_3} = 0.96 \quad \frac{\partial Y}{\partial g_m} = 0.2$$

Y的标称值为 $Y = 3.2$, 于是还可计算得到相对敏感度:

$$S_{y1}^Y = \frac{\partial Y}{\partial y_1} \cdot \frac{y_1}{Y} = 0.625 \quad S_{y2}^Y = -0.05$$

$$S_{y3}^Y = 0.3 \quad S_{g_m}^Y = 0.125$$

➤ 差商法计算敏感度:

对于大型复杂电路, 很难导出电路特性的解析表达式, 此时可用差商法近似计算敏感度。设电路特性 $T = T(x_1, x_2, \dots, x_n)$, 于是近似有:

$$\Delta T \approx \frac{\partial T}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial T}{\partial x_2} \Delta x_2 + \dots + \frac{\partial T}{\partial x_n} \Delta x_n$$

现在先对具有标称值 $x_i (i=1, 2, \dots, n)$ 的电路进行一次分析, 求得T的标称值; 然后令某个 x_i 变化一个小量 Δx_i (称为“扰动”), 而其它各参量仍为标称值, 即 $\Delta x_j = 0 (j=1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, n)$, 这时对电路再分析一次, 求得新的函数值 $T_i = T + \Delta T$, 从而:

$$\frac{\partial T}{\partial x_i} \approx \frac{\Delta T}{\Delta x_i} = \frac{T(x_1, x_2, \dots, x_i + \Delta x_i, \dots, x_n) - T(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n)}{\Delta x_i}$$

分别令 $i=1, 2, \dots, n$ 即可求得各敏感度。可见, 这种方法避免了推导电路响应T的解析式, 但要求 Δx_i 足够小, 同时对含有n 个元件参数的电路, 总计要进行n+1次电路分析, 计算量较大。

➤ 特勒根伴随网络法计算大规模电路的敏感度：

为了适应对大规模电路进行敏感度分析，需要找到有效的计算方法。特勒根伴随网络法就是一种构思巧妙、应用广泛的敏感度计算方法。它以特勒根定理为基础，通过构造原网络的伴随网络，并对原网络和伴随网络各进行一次电路分析计算，便可得到整个网络中所有元件的敏感度。

特勒根定理：

两个拓扑结构完全相同的网络 N 和 \hat{N} （不论各支路实际接何种元件或元件值为多少），如果其支路电压和支路电流矢量分别为 U 、 I 和 \hat{U} 、 \hat{I} ，则恒有：

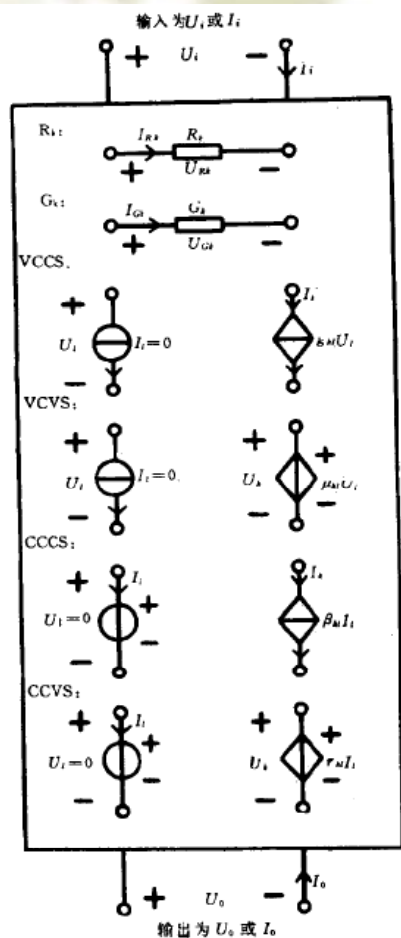
或写成：

$$\hat{U}^T I = 0, \quad U^T \hat{I} = 0$$
$$\sum_{j=1}^M \hat{U}_j I_j = 0, \quad \sum_{j=1}^M U_j \hat{I}_j = 0$$
$$U = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_M \end{bmatrix}, I = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_M \end{bmatrix}, \hat{U} = \begin{bmatrix} \hat{U}_1 \\ \hat{U}_2 \\ \vdots \\ \hat{U}_M \end{bmatrix}, \hat{I} = \begin{bmatrix} \hat{I}_1 \\ \hat{I}_2 \\ \vdots \\ \hat{I}_M \end{bmatrix}$$

其中， M 为支路总数。

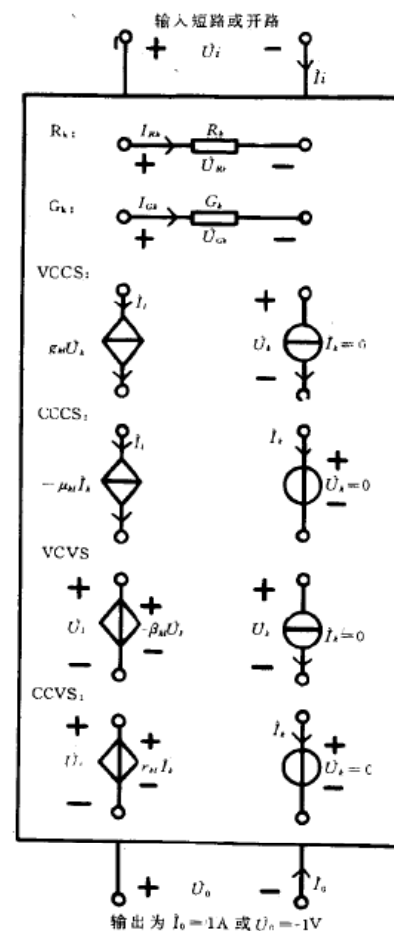
特勒根伴随网络的构造：

以线性电阻网络为例说明特勒根伴随网络的构造方法。设原网络N内部含有电阻、电导、四种线性受控电源。网络的输入端为电压 U_i 或电流 I_i ，输出端是电压 U_o 或电流 I_o 。其伴随网络 \hat{N} 按以下方法构造：



原网络

- ① 对电阻R和电导G元件，两个网络中的对应部分完全相同
- ② 对VCCS和CCVS元件，将原网络中的控制支路与受控支路的位置互换，便构成伴随网络中的同类元件；
- ③ 对VCVS和CCCS元件，除了互换N中的控制支路与受控支路的位置外，还将：VCVS改为CCCS、CCCS改为VCVS，并且控制系数反号，开路支路换为短路支路，短路支路换为开路支路；
- ④ 对输入支路，若输入为电压，则伴随网络中的相应支路以短路支路代替之；若输入为电流，则伴随网络中的相应支路以开路代替；
- ⑤ 对输出支路，若输出为电压，则伴随网络中的相应支路以单位电流源1A代替；若输出为电流，则伴随网络中的相应支路以负单位电压源-1V代替。



特勒根伴随网络

敏感度计算公式：

当原网络的输出为电压 U_o 时，
该输出响应对各元件参数的敏感度为：

$$\begin{cases} \frac{\partial U_o}{\partial R_k} = -\hat{I}_{R_k} I_{R_k} \\ \frac{\partial U_o}{\partial G_k} = -\hat{U}_{G_k} U_{G_k} \\ \frac{\partial U_o}{\partial g_{kl}} = \hat{U}_k U_l \\ \frac{\partial U_o}{\partial \mu_{kl}} = -\hat{I}_k U_l \\ \frac{\partial U_o}{\partial \beta_{kl}} = \hat{U}_k I_l \\ \frac{\partial U_o}{\partial r_{kl}} = -\hat{I}_k I_l \end{cases}$$

当原网络的输出为电流 I_o 时，
该输出响应对各元件参数的敏感度为：

$$\begin{cases} \frac{\partial I_o}{\partial R_k} = -\hat{I}_{R_k} I_{R_k} \\ \frac{\partial I_o}{\partial G_k} = -\hat{U}_{G_k} U_{G_k} \\ \frac{\partial I_o}{\partial g_{kl}} = \hat{U}_k U_l \\ \frac{\partial I_o}{\partial \mu_{kl}} = -\hat{I}_k U_l \\ \frac{\partial I_o}{\partial \beta_{kl}} = \hat{U}_k I_l \\ \frac{\partial I_o}{\partial r_{kl}} = -\hat{I}_k I_l \end{cases}$$

所以，对原网络N 和伴随网络 \hat{N} 各进行一次电路分析计算，即可完成原电路敏感度的全部计算工作。

例子：

原网络N的输入为电流 $I_i = 1\text{A}$ ，输出为电压 U_o ，画出其伴随网络 \hat{N} 。

对原网络N计算一次，得到：

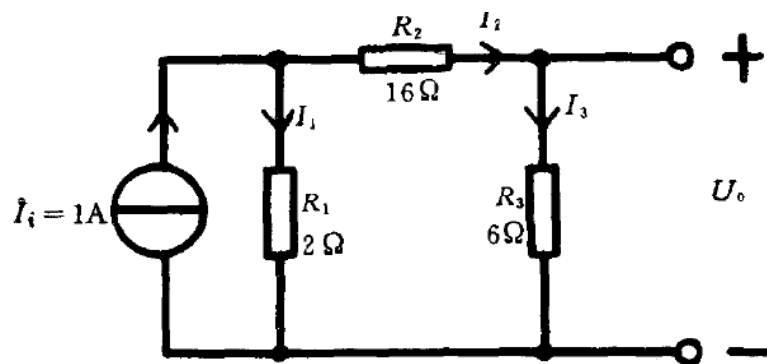
$$I_1 = 0.917, I_2 = I_3 = 0.083$$

再对伴随网络 \hat{N} 计算一次，得到：

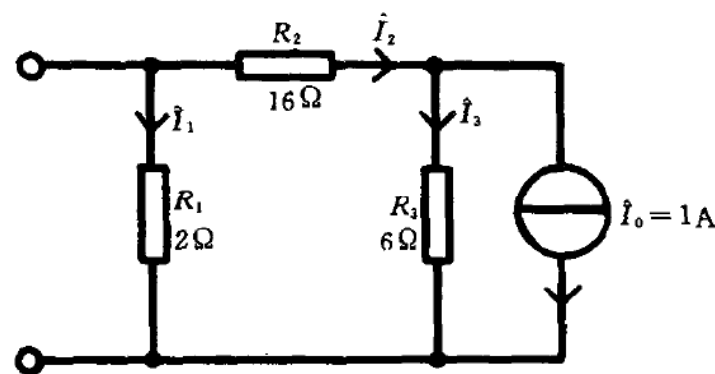
$$\hat{I}_1 = -0.25, \hat{I}_2 = 0.25, \hat{I}_3 = -0.75$$

由此，根据前述公式，可求出各元件的敏感度为：

$$\frac{\partial U_o}{\partial R_1} = -\hat{I}_1 I_1 \approx 0.229, \quad \frac{\partial U_o}{\partial R_2} = -\hat{I}_2 I_2 \approx -0.021, \quad \frac{\partial U_o}{\partial R_3} = -\hat{I}_3 I_3 \approx 0.063$$



原网络



特勒根伴随网络

➤ 节点法计算灵敏度:

由改进节点法写出的电路直流分析的线性方程组为:

$$AX = B$$

式中, A为系数矩阵, X是待求的电路状态变量, B为与无源元件参数无关的右端矢量。假设电路中某个无源元件参数 P_i (也可以是受控源的控制系数) 是可变的, 系数矩阵A中只有四个元素 $a_{jj'}$ 、 $a_{jk'}$ 、 $a_{kj'}$ 、 $a_{kk'}$ 随 P_i 而变化。将方程两边对 P_i 求导 (注意右端矢量B与 P_i 无关), 得到:

$$\frac{\partial(AX)}{\partial P_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad A \frac{\partial X}{\partial P_i} = -\frac{\partial A}{\partial P_i} X$$

$$\frac{\partial A}{\partial P_i} = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots \\ \dots & \frac{\partial a'_{jj'}}{\partial P_i} & \dots & \frac{\partial a'_{jk'}}{\partial P_i} & \dots \\ \vdots & \vdots \\ \dots & \frac{\partial a'_{kj'}}{\partial P_i} & \dots & \frac{\partial a'_{kk'}}{\partial P_i} & \dots \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{matrix} j' & k' \\ j \\ k \end{matrix}$$

式中, $a'_{jj'}$ 、 $a'_{jk'}$ 、 $a'_{kj'}$ 、 $a'_{kk'}$ 分别表示 $a_{jj'}$ 、 $a_{jk'}$ 、 $a_{kj'}$ 、 $a_{kk'}$ 中与 P_i 有关的部分。代入到上式中, 得到:

$$A \frac{\partial X}{\partial P_i} = B' \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial X}{\partial P_i} = A^{-1} B'$$

其中,

$$B' = -\frac{\partial A}{\partial P_i} X = - \begin{bmatrix} \vdots \\ \frac{\partial a'_{jj'}}{\partial P_i} \cdot b_{j'} + \frac{\partial a'_{jk'}}{\partial P_i} \cdot b_{k'} \\ \vdots \\ \frac{\partial a'_{kj'}}{\partial P_i} \cdot b_{j'} + \frac{\partial a'_{kk'}}{\partial P_i} \cdot b_{k'} \\ \vdots \end{bmatrix} \begin{matrix} j \\ \\ k \end{matrix}$$

因此, 每计算一次敏感度, 相当于求解一次线性方程组。如果要计算X对不同元件参数的敏感度, 则只要改变右端矢量 B' 的值即可。用LU分解法求解该线性方程组。

需要指出, 上面介绍的特勒根伴随网络法和节点法计算线性直流电路的敏感度方法可以进一步推广到频域敏感度分析、非线性电阻电路敏感度分析、线性动态电路的时域敏感度分析中。有兴趣的同学可以参考有关专著。

(三) 微波电路的容差分析和容差设计

一、微波电路的容差分析原理

在电路的批量生产中，由于工艺条件限制以及环境温度、湿度的影响，元器件的实际值总会与标称值有所偏差。这种偏差造成了组装后的电路特性也呈现一定程度的离散。**容差分析就是研究各元件值的随机分布与组装后的电路特性分布之间的关系。**

在微波电路容差分析中，**各微波元件参量组成的列向量用一个随机向量表示为：**

$$\bar{X} = \bar{X}_0 + E\mu$$

式中， \bar{X}_0 为各元件的标称值（中心值）组成的列向量， E 为各元件值的最大误差 $\varepsilon_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 组成的对角矩阵， $\mu = [\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n]^T$ 为一个按概率密度 $h(\bar{X}, \bar{X}_0)$ 分布的随机列向量：

$$\int_{R_T} h(\bar{X}, \bar{X}_0) dx_1 dx_2 \cdots dx_n \approx 1$$

式中， R_T 为元件参数容差区间： $R_T = \left\{ \bar{X} \middle| \bar{X} = \bar{X}_0 + E\mu, \mu \in R_\mu \right\}$, $R_\mu = \left\{ \mu \middle| -1 \leq \mu_i \leq 1, i = 1, 2, \dots, n \right\}$

定义 R_A 为元件参数空间的电路合格区间: $R_A = \left\{ \bar{X} \left| \begin{array}{l} \text{元件参数为 } \bar{X} \text{ 的电路是合格电路} \end{array} \right. \right\}$

产品的成品率为:

$$\text{成品率} = \frac{\text{合格产品数量}}{\text{产品总数量}}$$

成品率用 $h(\bar{X}, \bar{X}_0)$ 在区间 $R_T \cap R_A$ 的积分表示为:

$$Y(\bar{X}_0) = \int_{R_T \cap R_A} h(\bar{X}, \bar{X}_0) dx_1 dx_2 \cdots dx_n$$

1, 最坏情况分析:

当 \bar{X} 的分布满足 $\bar{X} = \bar{X}_0 + E\mu$ 时, 电路特性 $T(\bar{X})$ 的偏差的一阶近似可表示为:

$$\Delta T(\bar{X}) = \sum \left. \frac{\delta T(\bar{X})}{\delta x_i} \right|_{\bar{X}=\bar{X}_0} \cdot (x_i - x_{0,i})$$

如果将 $(x_i - x_{0,i})$ 换成它的最大可能值 ε_i , 并对求和号内的每一项取绝对值, 就可得到最坏情况分析公式:

$$\Delta T(\bar{X})_{\max} = \sum \left. \frac{\delta T(\bar{X})}{\delta x_i} \right|_{\bar{X}=\bar{X}_0} \cdot |\varepsilon_i|$$

上式适用于 ε_i 较小的情况, 并且往往过高估计元件偏差的影响, 主要原因是在实际中所有元件同时都处于最大误差的情况并不常见。

2, 蒙特卡罗容差分析:

该方法是一种采用随机数的仿真方法, 其基本步骤是:

利用软件产生与各元件参数的分布相近的随机数 \bar{X} , 对每一组 \bar{X} 进行电路分析并将所得电路特性 $T(\bar{X})$ 记录, 统计 $T(\bar{X})$, 最后给出统计直方图、计算产品成品率统计指标Y:

$$Y \approx \frac{N_A}{N}$$

式中, N_A 为合格次数, N 为总次数。

当Y小于给定的指标时, 可以缩小元件公差以提高成品率; 当Y大于给定指标时, 可以放宽元件公差以降低成本。Y与Y的期望值之间的方差估计为:

$$\sigma^2 = \frac{Y(1-Y)}{N}$$

由上式可以看出, 在进行蒙特卡罗容差分析时, 所需电路分析的总次数N必须很大, 才能保证由模拟得到的成品率Y接近实际情况。

二、微波电路的容差设计原理

在微波电路的优化设计完成后，电路特性达到了最佳（假设没有局部最小点问题），但如果直接用这个设计结果进行批量生产，产品的成品率却不一定最佳。为了提高产品成品率，可在微波电路优化设计的基础上进行微波电路的容差设计。容差设计的基本步骤是：

1，中心值设计（design centering），也叫容差对中（tolerance centering）

该步骤是把元件值向量的中心值移到产品合格区 R_A 的中点，在各元件的容差不变的情况下使成品率达到最大值。

2，容差指定

该步是在前述基础上调整各元件的最大误差 $\varepsilon_i (i = 1, 2, \dots, n)$ ，使成品率达到最大值（最终可达到100%）或使生产成本最低。

中心值设计实际上是一种以 $(1-Y)$ 为目标函数的电路优化。如果采用常规的方法，则这个优化过程每调用一次目标函数就要进行一次蒙特卡罗容差分析，因此计算量极大。为了减小计算量，有一些改进的方法，如下：

(1) 用多边形或多面体近似表示 R_A 的方法：这时，判断一个电路是否合格不必专门进行一次电路分析，只需判断元件值向量是否落在表示 R_A 的多边形或多面体内就行，这只需要进行几何运算。

(2) 重心法：分别计算在初始重心值和给定容差的情况下合格点的重心 C_p 、不合格点的重心 C_t ，然后将 $C_p - C_t$ 方向作为中心值设计的一维优化方向。

(3) 在进行成品率分析（即蒙特卡罗容差分析）时同时提取 Y 对各元件值的偏导数，这样可以直接利用各种梯度优化方法而无须再进行 Y 对各元件值的偏导数计算。

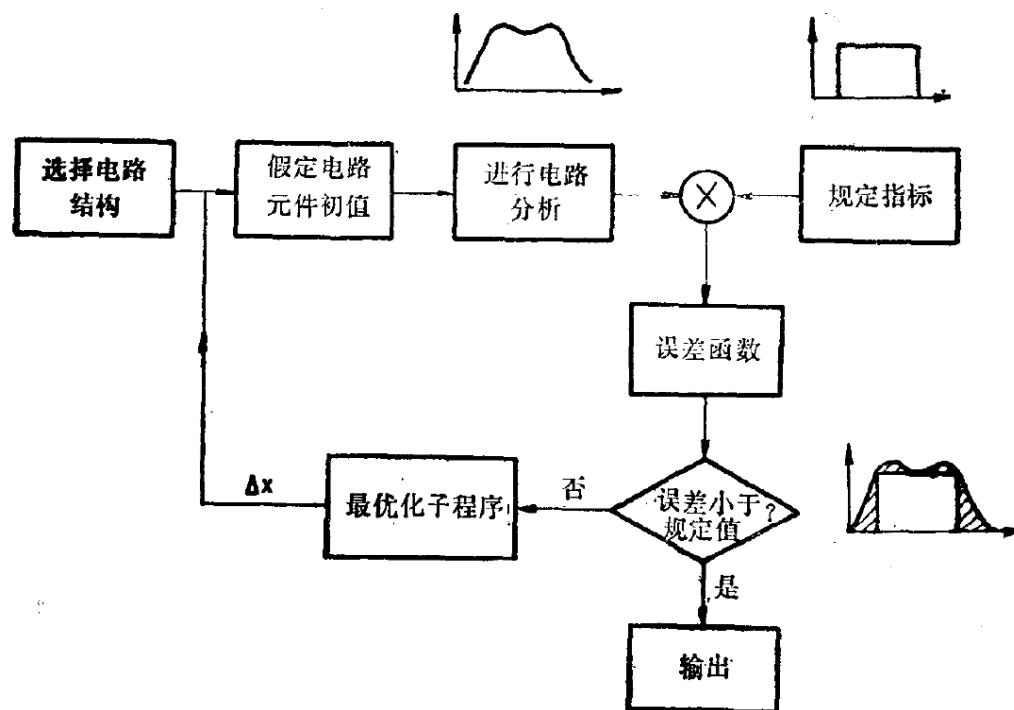
(4) 参数取样法：该法可以在成品率优化过程中，避免蒙特卡罗容差分析时的重复投点，因此大大减小了计算量。

(5) 影像模型 (shadow model)。

第六节 微波电路的最优化设计

(参考资料:《微波器件与电路》、《电子电路的计算机辅助分析与设计》)

所谓电路的最优化设计,是指设计一个电路,使其某些性能指标达到最好的结果或达到预定要求。例如,给定放大器的增益频响特性 $G(\omega)$, 要求用某种形式的电路,使它具有这种特性。若电路的元件参数为 x_1, x_2, \dots, x_n , 则电路的增益特性是这些参数的函数,可表示为 $\psi(x_1, x_2, \dots, x_n, \omega)$ 。最优化设计就是要确定这n个电路元件参数,使函数 $\psi(x_1, x_2, \dots, x_n, \omega)$ 在规定的频率区间逼近预定的频响特性 $G(\omega)$ 。



(一) 目标函数

为了使上述最优化设计能自动进行，设计者须给电路定义一个误差判据，使计算机能根据这个判据决定是否需要进行最优寻查。通常是定义一个误差函数用来表示电路性能与要求性能之间的差异程度，最优化的目的是使这个误差函数最小。这个误差函数就称为目标函数。

常用的目标函数有两种形式：最大误差、均方误差。

用最大误差表示的目标函数：

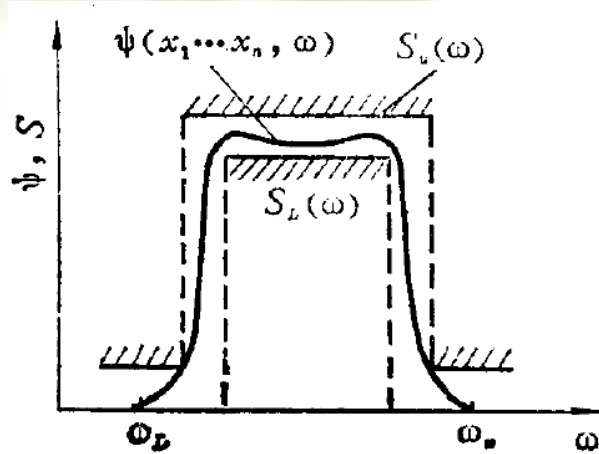
设电路的元件参数为 x_1, x_2, \dots, x_n ，电路特性为 $\psi(x_1, x_2, \dots, x_n, \omega)$ （例如，增益、衰减、阻波比等）； $S_u(\omega)$ 、 $S_l(\omega)$ 分别表示该特性规定指标的上限、下限频率响应， ω_l 、 ω_u 为优化的频率范围起点和终点。则最大误差表示的目标函数为：

$$U = \max_{(\omega_l, \omega_u)} \left\{ \left| \psi(x_1, x_2, \dots, x_n, \omega) - S_u(\omega) \right|, \left| \psi(x_1, x_2, \dots, x_n, \omega) - S_l(\omega) \right| \right\}$$

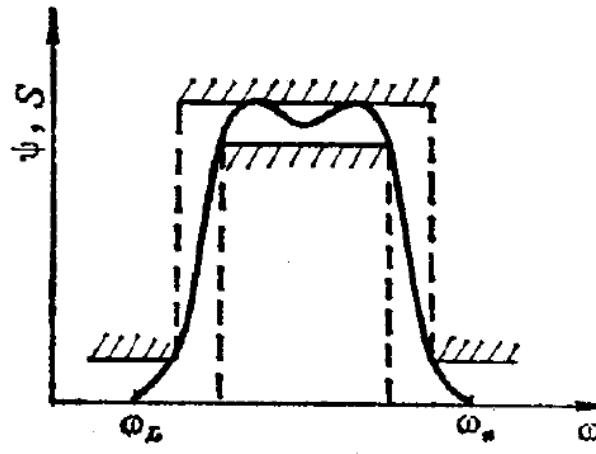
当 $S_u(\omega) = S_l(\omega) = S(\omega)$ 时，目标函数简化为：
$$U = \max_{(\omega_l, \omega_u)} \left| \psi(x_1, x_2, \dots, x_n, \omega) - S(\omega) \right|$$

对于离散频率点：
$$U = \max_{\omega_i} \left| \psi(x_1, x_2, \dots, x_n, \omega_i) - S(\omega_i) \right|$$

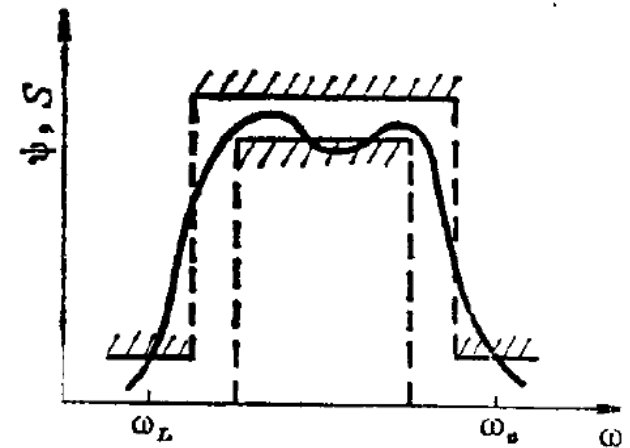
电路特性响应与规定指标的关系



电路特性的频率响应在规定的频率范围内完全满足规定指标



电路特性的频率响应在规定的频率范围内刚好满足规定指标



电路特性的频率响应在规定的频率范围内不满足规定指标

用均方误差表示的目标函数：

$$U = \sum_{i=1}^m [\psi(x_1, x_2, \dots, x_n, \omega_i) - S(\omega_i)]^2$$

有多个需要优化的特性指标时的组合目标函数：

$$U = w_1 U_1 + w_2 U_2 + \dots + w_k U_k$$

其中， w_i 是各个分目标函数的加权因子，为非负实数，用来加强或减弱组合目标的不同部分，以满足设计者对各个电路指标的要求。要求越高的目标函数，其对应的加权因子越大。

（二）目标函数的极小值和最小值

微波电路的最优化设计，通常归结为求目标函数的最小值点的问题。

设多元目标函数为： $f(\bar{x})$ ， \bar{x} 是待优化的电路参数组成的列向量。设 \bar{x}_0 是其极小值点。将 $f(\bar{x})$ 在极小值点 \bar{x}_0 处进行泰勒级数展开并取到二阶项，有：

$$f(\bar{x}) \approx f(\bar{x}_0) + \begin{bmatrix} \frac{\partial f(\bar{x}_0)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f(\bar{x}_0)}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f(\bar{x}_0)}{\partial x_n} \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \vdots \\ \Delta x_n \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \vdots \\ \Delta x_n \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(\bar{x}_0)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(\bar{x}_0)}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f(\bar{x}_0)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f(\bar{x}_0)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(\bar{x}_0)}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 f(\bar{x}_0)}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(\bar{x}_0)}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(\bar{x}_0)}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f(\bar{x}_0)}{\partial x_n^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \vdots \\ \Delta x_n \end{bmatrix}$$

$$= f(\bar{x}_0) + g_0^T \cdot \Delta \bar{x} + \frac{1}{2} \Delta \bar{x}^T \cdot A(\bar{x}_0) \cdot \Delta \bar{x}$$

其中, $g_0 = \nabla f(\bar{x}_0)$ 是函数 $f(\bar{x})$ 在 \bar{x}_0 处的梯度, 且 $g_0 = \nabla f(\bar{x}_0) = 0$

$\Delta \bar{x} = \bar{x} - \bar{x}_0$, $A(\bar{x}_0)$ 是 $f(\bar{x})$ 在 \bar{x}_0 处的二阶偏导数矩阵, 称为海森矩阵。

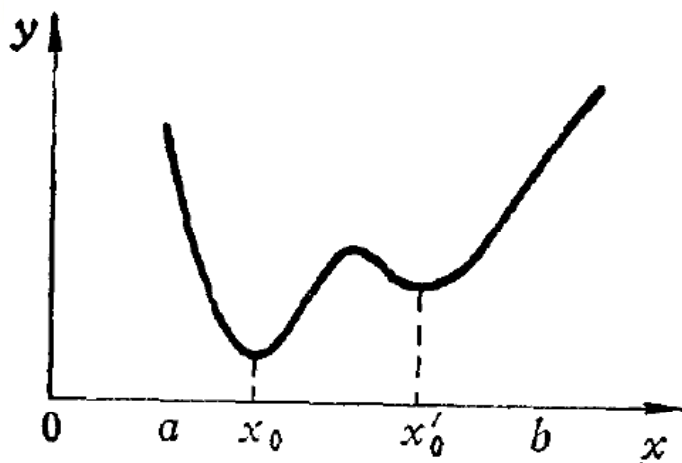
所以: $f(\bar{x}) - f(\bar{x}_0) \approx \frac{1}{2} \Delta \bar{x}^T \cdot A(\bar{x}_0) \cdot \Delta \bar{x}$

同时, 由于 \bar{x}_0 是 $f(\bar{x})$ 的极小点, 所以在极小点附近任意 \bar{x} 处的函数值必然大于 $f(\bar{x}_0)$, 因此 $f(\bar{x}) - f(\bar{x}_0) > 0$, 由此得到:

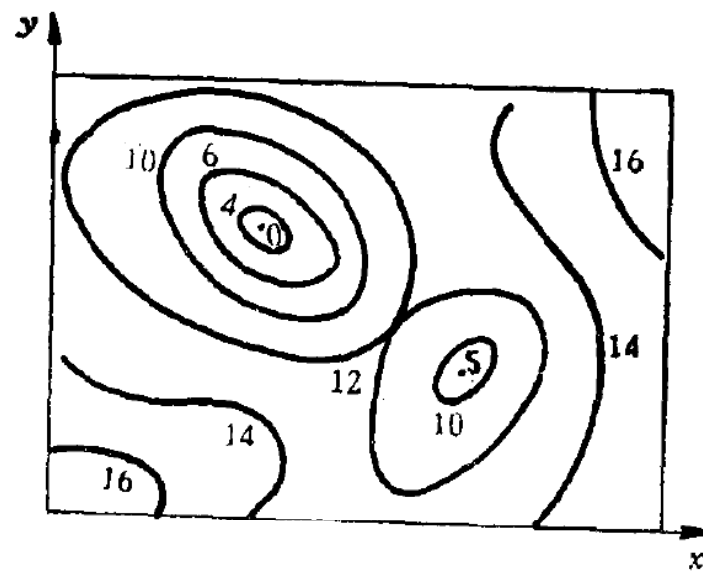
即: A矩阵必是正定矩阵。

$$\frac{1}{2} \Delta \bar{x}^T \cdot A(\bar{x}_0) \cdot \Delta \bar{x} > 0$$

在一般情况下，函数 $f(\bar{x})$ 的极小值点并不是这个函数在全区域上的最小值点。称在全区域中具有最小函数值的极小点为这个区域的**全局最小点**（简称最小点），而其余的极小点为局部最小点。



一元函数的极小点/最小点



用等高线表示的二元函数极小点/最小点

当目标函数具有凸性时，局部最小点与全局最小点是相同点。最优化设计就使求出目标函数的最小点（或小到某种程度的点）。

凸集:

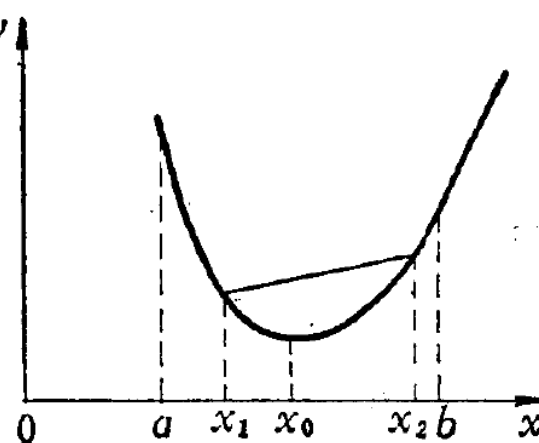
设 D 为 N 维空间中的一个集合, 若其中任意两点 \bar{x}_1 、 \bar{x}_2 的连线都属于集合 D , 则称这种集合 D 是 N 维空间的一个凸集。

凸函数:

设 $f(\bar{x})$ 为 N 维空间中一个凸集 D 上的函数, 若对任何实数 $\alpha (0 \leq \alpha \leq 1)$ 以及 D 中任意两点 \bar{x}_1 、 \bar{x}_2 , 恒有:

$$f(\alpha \bar{x}_1 + (1-\alpha)\bar{x}_2) \leq \alpha f(\bar{x}_1) + (1-\alpha)f(\bar{x}_2)$$

则称 $f(\bar{x})$ 是定义在凸集 D 上的一个凸函数。



一元函数的凸性

上式的几何意义是: 任意两点间曲线段上的点不在该两点的连线的上方。当上式取 $<$ 时, 称 $f(\bar{x})$ 为区间 $[\bar{x}_1, \bar{x}_2]$ 上的严格凸函数, 其几何意义是: 该区间内任意两点间曲线段上的点在该两点连线之下方。

定理: 如果 $f(\bar{x})$ 在凸集 D 上具有连续的二阶偏导数, 且矩阵 $A(\bar{x}) \geq 0$, 则 $f(\bar{x})$ 为在 D 上的一个凸函数。也即: $f(\bar{x})$ 在 D 上为凸函数的充分必要条件是 $A(\bar{x})$ 为半正定矩阵。对于凸函数, 其极小点即为最小点。

(三) 最优化方法

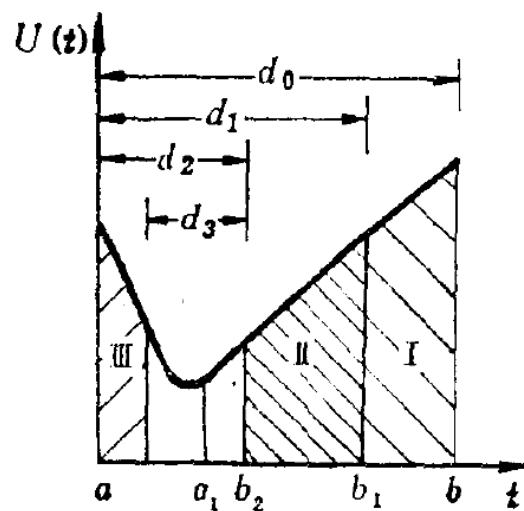
在微波电路的最优化设计中，目标函数一般是多元函数。最优化设计可归结为求多元函数 $U(\bar{x})$ 的最小点问题。它通常按以下步骤进行：

- 1, 首先选定初始点 \bar{x}_0 (即选定电路中各元件的初始值) ;
- 2, 从 \bar{x}_0 出发, 沿某一规定方向 \bar{P}_0 (这个方向由具体的最优化方法规定) 求函数 $U(\bar{x})$ 的极小点, 得到 \bar{x}_1 ;
- 3, 然后, 再从 \bar{x}_1 出发, 沿某一规定方向 \bar{P}_1 求函数 $U(\bar{x})$ 的极小点, 得到 \bar{x}_2 ;
- 4, 重复第3步, ..., 从 \bar{x}_k 出发, 沿某一规定方向 \bar{P}_k 求得新的极小点 \bar{x}_{k+1} ;
- 5, 若 $\|\bar{x}_{k+1} - \bar{x}_k\| \leq \varepsilon_a + \varepsilon_r \cdot \min \{\|\bar{x}_k\|, \|\bar{x}_{k+1}\|\}$ 或已经达到规定的次数, 则停止搜索。

其中, \bar{P}_k 为第k次迭代的搜索方向, 它由选定的最优化方法来确定。在过 \bar{x}_k 点的 \bar{P}_k 方向, 函数 $U(\bar{x})$ 实际上变成了参变量t的一元函数 $U(\bar{x}_k + t\bar{P}_k)$ 。因为无论t取何值, 点 $\bar{x}_k + t\bar{P}_k$ 总位于过 \bar{x}_k 点的 \bar{P}_k 方向上, 所以这种求t使得 $U(\bar{x}_k + t\bar{P}_k)$ 为极小的过程称为**一维搜索**。

➤ 一维直接搜索法——菲波那契（fibonacci）法和黄金分割法（0.618法）

设一元函数 $U(t)$ 在区间 $[a, b]$ 是一个凸函数。首先，在区间 $[a, b]$ 内选取两点 a_1 和 b_1 ，并计算函数值 $U(a_1)$ 和 $U(b_1)$ 。根据函数值的大小，有以下两种情形：



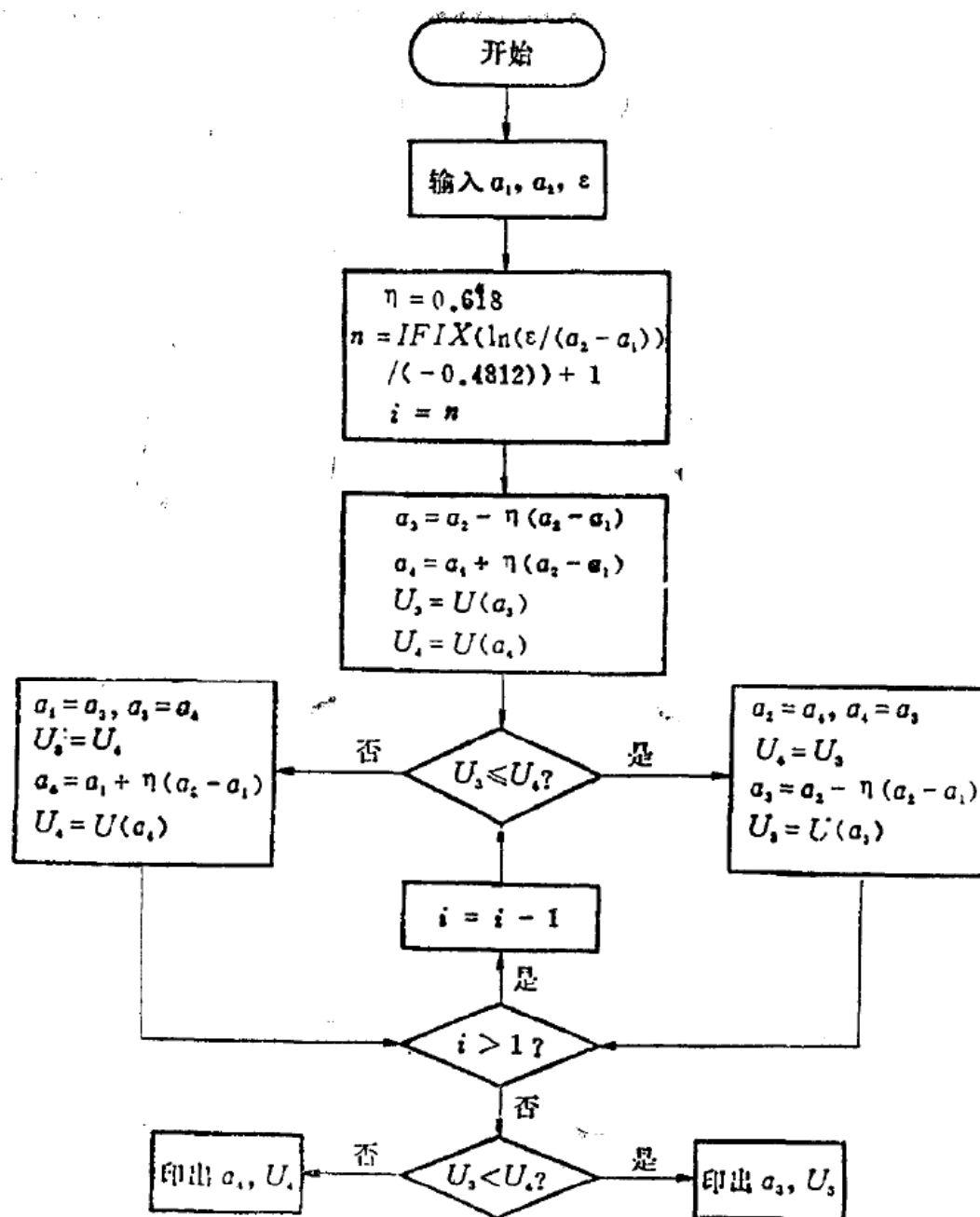
一维直接搜索法
(阴影为每次搜索
去掉的区间)

第一， $U(a_1) > U(b_1)$ 。由于函数 $U(t)$ 为凸的，其极小点必然在区间 $[a_1, b]$ 内；

第二， $U(a_1) \leq U(b_1)$ 。这时，极小点应在区间 $[a, b_1]$ 内。

由此，可把区间缩短成 $[a_1, b]$ 或 $[a, b_1]$ 。然后再在缩短后的区间内取一点，求出其函数值，并与区间端点的函数值比较，得到新的缩短区间。如此搜索下去，总可以找出一个区间，其值小于某规定值 ε ，这时的端点即为极小点。

菲波那契（fibonacci）法和黄金分割法就是每次缩短区间时求取新点的方法。



黄金分割法一维直接搜索的流程框图 ($\ln 0.618 = -0.4812$)

$$t_k = \arg \min_t U(\bar{x}_k + t\bar{P}_k) \longrightarrow \bar{x}_{k+1} = \bar{x}_k + t_k \bar{P}_k$$

➤ 多维搜索法——最速下降法

将多元函数 $U(\bar{x})$ 的负梯度方向（最速下降方向）作为每次搜索的查寻方向。即：

$$\bar{P}_k = -\nabla U(\bar{x}_k)$$

步骤：

1, 首先选定变量初值 \bar{x}_0 和搜索的误差 ε ，并计算目标函数在 \bar{x}_0 的梯度 $\nabla U(\bar{x}_0)$ ；

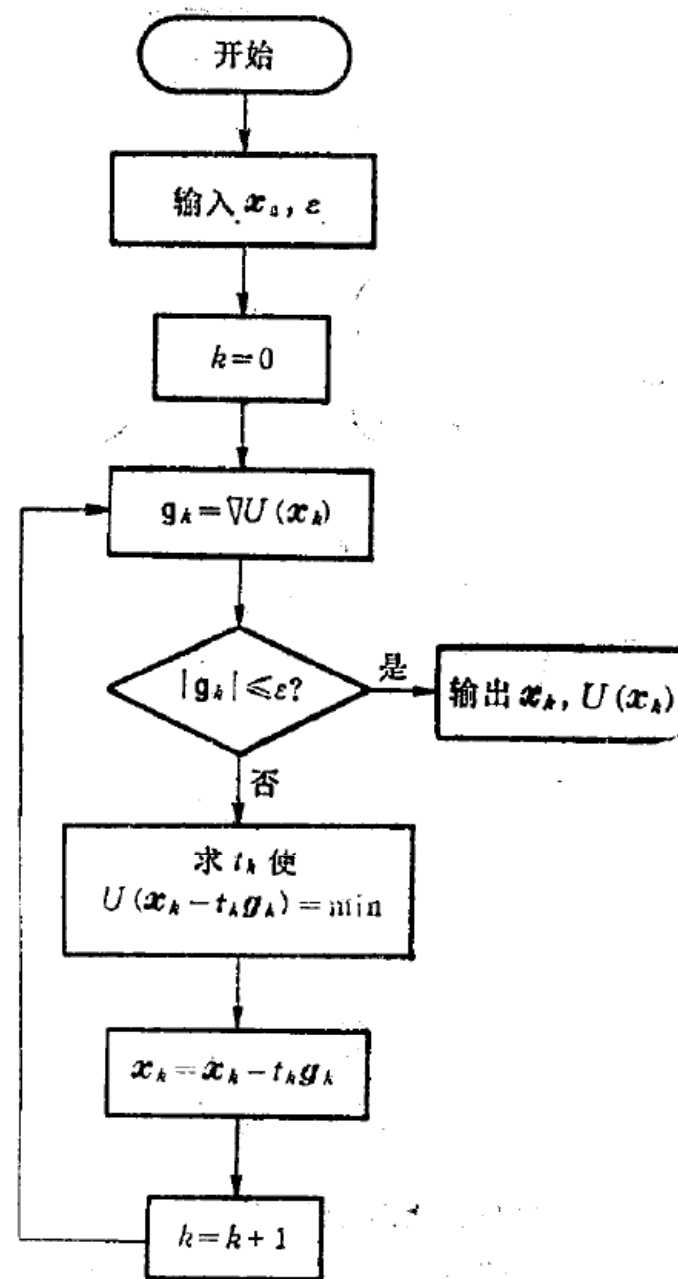
2, 利用一维搜索法计算函数的极小点

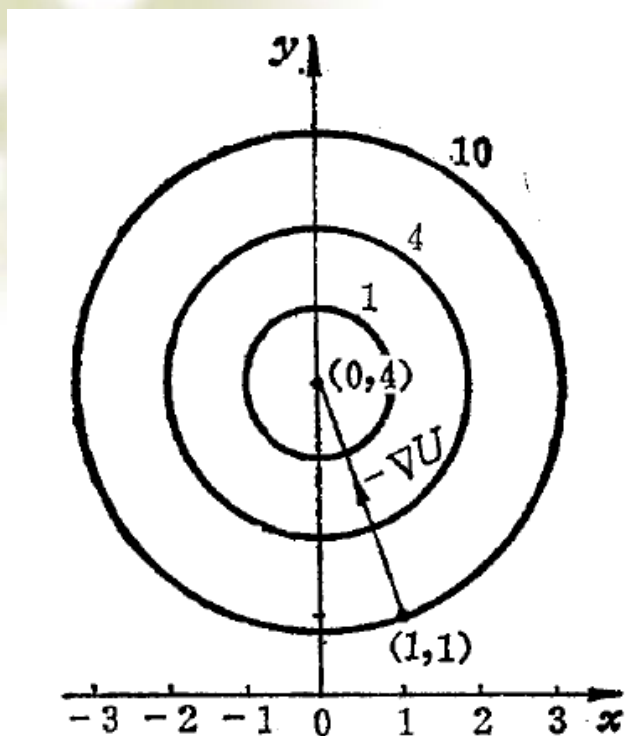
$$t_0 = \arg \min_t U(\bar{x}_0 - t \nabla U(\bar{x}_0)) \longrightarrow \bar{x}_1 = \bar{x}_0 - t_0 \nabla U(\bar{x}_0)$$

3, 判断 $\|\nabla U(\bar{x}_1)\| \leq \varepsilon$? 若是, 则停止迭代, 否则计算 $t_1 = \arg \min_t U(\bar{x}_1 - t \nabla U(\bar{x}_1)) \longrightarrow \bar{x}_2 = \bar{x}_1 - t_1 \nabla U(\bar{x}_1)$;

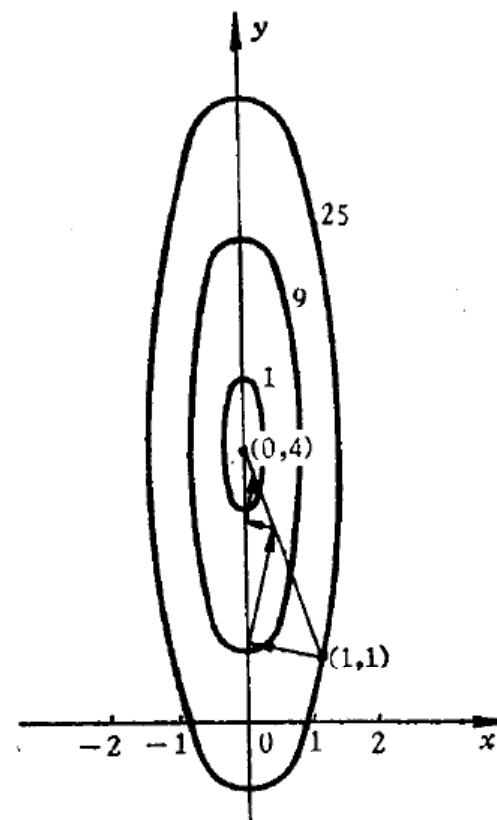
4, 如此重复第3步直至满足 $\|\nabla U(\bar{x}_k)\| \leq \varepsilon$ 为止。

最速下降法只在初始点远离极小点时具有“最速下降”的性质；当接近极小点且目标函数近似为二次函数时，其收敛相当缓慢。





用最速下降法搜索目标函数 $U(x, y) = x^2 + (y - 4)^2$
最小点的示意图



用最速下降法搜索目标函数 $U(x, y) = 16x^2 + (y - 4)^2$
最小点的示意图

➤ 多维搜索法——牛顿法

假设目标函数 $U(\bar{x})$ 具有连续的一阶、二阶偏导数，在给定点 \bar{x}_k 附近的泰勒多项式二阶近似为：

$$U(\bar{x}) \approx U(\bar{x}_k) + g_k^T \cdot \Delta \bar{x} + \frac{1}{2} \Delta \bar{x}^T \cdot A(\bar{x}_k) \cdot \Delta \bar{x}$$

其中， $g_k = \nabla U(\bar{x}_k)$ ， $\Delta \bar{x} = \bar{x} - \bar{x}_k$ ， $A(\bar{x}_k)$ 为 $U(\bar{x})$ 在 \bar{x}_k 点的二阶偏导数矩阵，其值为：

$$A(\bar{x}_k) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 U(\bar{x}_k)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 U(\bar{x}_k)}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 U(\bar{x}_k)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 U(\bar{x}_k)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 U(\bar{x}_k)}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 U(\bar{x}_k)}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial^2 U(\bar{x}_k)}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 U(\bar{x}_k)}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 U(\bar{x}_k)}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

对上式求梯度，得到：

$$\nabla U(\bar{x}) \approx \nabla U(\bar{x}_k) + \nabla(g_k^T \Delta \bar{x}) + \frac{1}{2} \nabla(\Delta \bar{x}^T A_k \Delta \bar{x}) = g_k + A_k \Delta \bar{x}$$

假设 \bar{x} 是这个近似函数的极小点，在极小点的梯度为零。所以由上式得到：

$$g_k + A_k \Delta \bar{x} = 0$$

即： $\bar{x} = \bar{x}_k - A_k^{-1} g_k$ ，其中 $g_k = \nabla U(\bar{x}_k)$

可见，

➤ 如果 $U(\bar{x})$ 是二次函数，则矩阵 A_k 的各元素均为常数，这时的二阶泰勒级数展开式是准确的，因此，从任意点 \bar{x}_k 出发，只要一步就可以求出 $U(\bar{x})$ 的极小点。

➤ 当 $U(\bar{x})$ 不是二次函数时，取 $-A_k^{-1} g_k$ 为搜索方向，即 $\bar{P}_k = -A_k^{-1} g_k$ ，并从 \bar{x}_k 出发，沿此方向进行一维搜索，也就是求 t_k 使得 $U(\bar{x}_k + t \bar{P}_k) = \min$ 。然后，令下一次搜索的起始点为：

$$\bar{x}_{k+1} = \bar{x}_k + t_k \bar{P}_k \text{ , 其中 } \bar{P}_k = -A_k^{-1} g_k$$

搜索方向 $\bar{P}_k = -A_k^{-1} g_k$ 称为 $U(\bar{x})$ 在 \bar{x}_k 点的**牛顿方向**。

可见，如果目标函数的二阶偏导数矩阵便于计算，则牛顿法的收敛速度是比较快的。但是，当目标函数很复杂，甚至不便于用解析式表示时，计算二阶偏导数矩阵和它的逆矩阵都是困难的。这时可使用**变尺度法**。

➤ 多维搜索法——Davidon-Fletcher-Powell变尺度法 (DFP变尺度法)

变尺度法基本消除了牛顿法计算量大的问题，它不直接计算二阶偏导数矩阵和其逆矩阵，而是用一个矩阵 H_k 直接逼近 A_k^{-1} ，并选初始点 \bar{x}_0 处的H矩阵为单位矩阵 $H_0 = I$ 。 H_{k+1} 和 H_k 的递推关系为：

$$H_{k+1} = H_k + \frac{\sigma_k \sigma_k^T}{\sigma_k^T y_k} - \frac{H_k y_k y_k^T H_k}{y_k^T H_k y_k}$$

其中， $y_k = g_{k+1} - g_k$ ， $\sigma_k = \bar{x}_{k+1} - \bar{x}_k$ ， $g_k = \nabla U(\bar{x}_k)$ 。

变尺度法的搜索步骤为：

- 1, 对给定的初始点 \bar{x}_0 ，取 $H_0 = I$ ，并令在初始点的搜索方向为 $\bar{P}_0 = -H_0 g_0$ ；
- 2, 从 \bar{x}_0 出发，用一维搜索法沿 \bar{P}_0 方向（即最速下降方向）求极小点，使得
 $t_0 = \arg \min_t U(\bar{x}_0 + t\bar{P}_0)$ 。然后令 $\bar{x}_1 = \bar{x}_0 + t_0 \bar{P}_0$ 算出 $g_1 = \nabla U(\bar{x}_1)$ ；
- 3, 利用上式计算出 H_1 ，然后从 \bar{x}_1 出发，沿 $\bar{P}_1 = -H_1 g_1$ 方向求出极小点 \bar{x}_2 ；
- 4, 重复2至3步骤，逐次求出 $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_k$ ，并计算出新的搜索方向 $\bar{P}_k = -H_k g_k$ ，求 t_k 使 $t_k = \arg \min_t U(\bar{x}_k + t\bar{P}_k)$ 。然后再令 $\bar{x}_{k+1} = \bar{x}_k + t_k \bar{P}_k$ 。如此继续，直到满足要求或达到规定的迭代次数为止。

➤ 多维搜索法——Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno变尺度法 (BFGS变尺度法)

这种变尺度法的计算过程与DFP变尺度法完全一样，区别仅在于 H_k 矩阵的构造不同：

$$H_{k+1} = H_k + \frac{\sigma_k \sigma_k^T}{\sigma_k^T y_k} - \frac{H_k y_k y_k^T H_k^T}{y_k^T H_k y_k} + y_k^T H_k y_k G G^T \quad H_0 = I$$

其中， $y_k = g_{k+1} - g_k$ ， $\sigma_k = \bar{x}_{k+1} - \bar{x}_k$ ， $g_k = \nabla U(\bar{x}_k)$ ， $G = \frac{\sigma_k}{\sigma_k^T y_k} - \frac{H_k y_k}{y_k^T H_k y_k}$

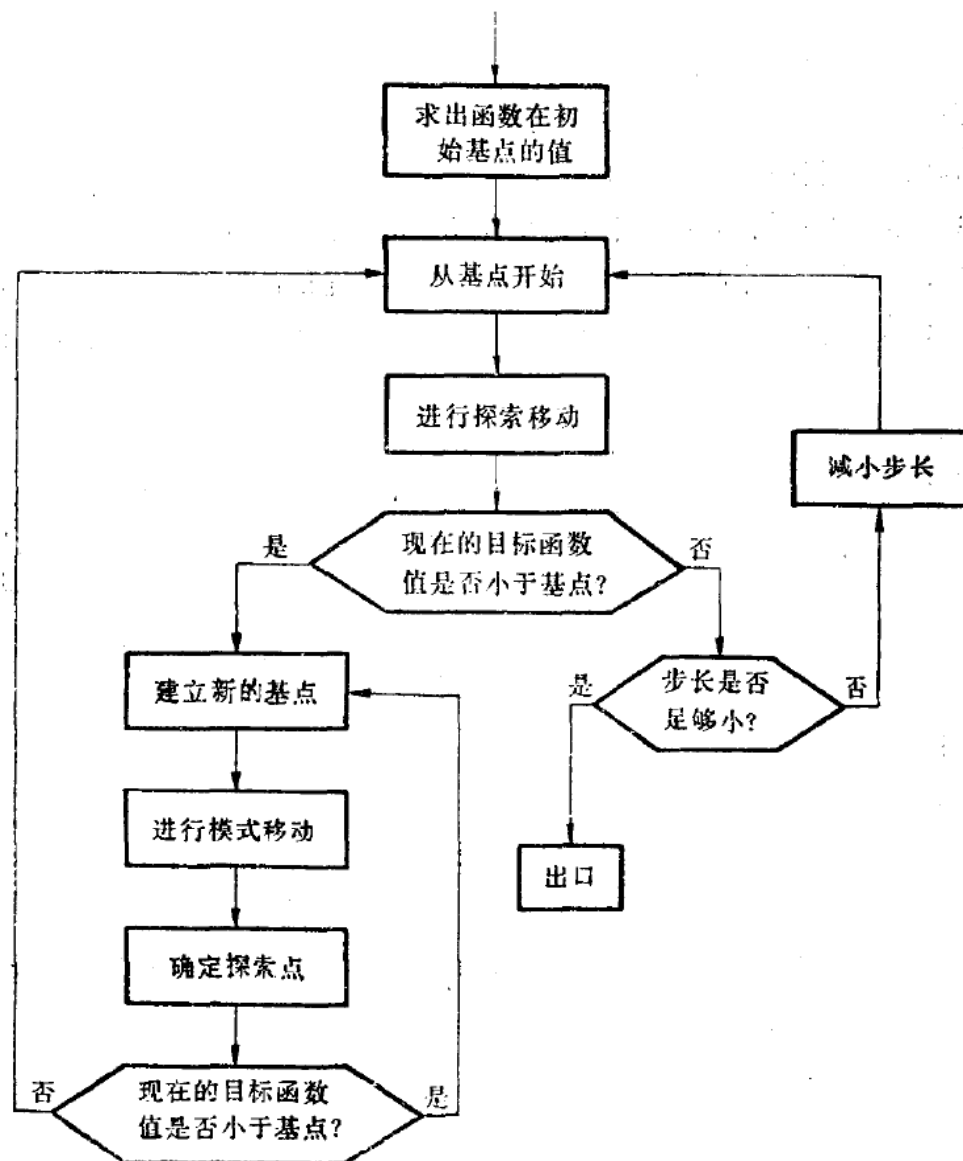
在实际应用中，DFP算法和BFGS算法都具有超线性的收敛速度，都具有很好的稳定性，计算量都小于牛顿算法。很显然，BFGS算法构造 H_k 矩阵的复杂度比DFP算法大。

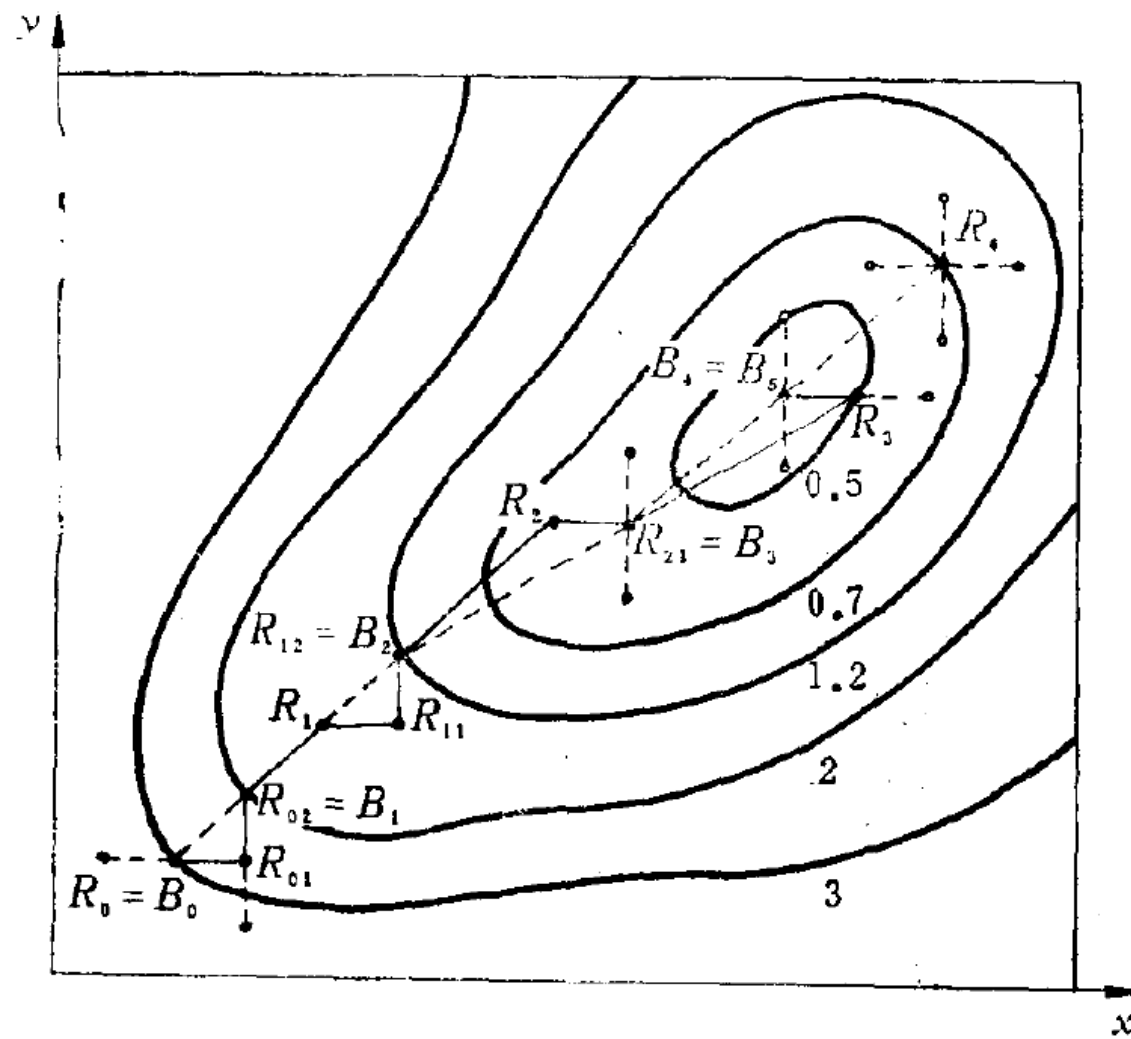
➤ 多维搜索法——不需要计算导数的直接搜索法

前述的最速下降法、牛顿法、变尺度法都需要计算目标函数的导数（统称为斜量跟踪法、梯度法），难于用在目标函数非常复杂或者无法解析表示的情形。直接搜索法无需计算导数而只需计算目标函数值，从函数值的大小也能判断出函数变化的大概趋势，从而为确定函数的下降方向作参考。这类方法包括**模式搜索法、单纯形法、共轭方向法**。微波电路优化设计中常用的直接搜索法是模式搜索法。

模式搜索法有两类“移动”：一类是“探测性”移动，另一类为“模式性”移动。前者是为了寻找有利的方向（目标函数的下降方向），后者则是在前者寻找到的有利方向上的一种加速移动。探测性移动的起点称为参考点，用 R_0 、 R_1 、 R_2 、 \dots 表示，其终点成为基点，用 B_0 、 B_1 、 B_2 、 \dots 表示。模式性移动则以基点为起点、参考点为终点，两种移动交替进行。

整个搜索从初始点 ($R_0 = B_0$) 开式, 先以一定的步长沿各变量方向作探测移动, 寻找使目标函数减小的方向。一组探索移动结束后, 在N维空间中便得到一个点。若该点的函数值小于初始基点的函数值, 则在搜索空间便产生一个向量, 它指向目标函数下降的方向。此时, 结束探索移动, 从初始基点开始, 沿该向量方向作较大步长的模式移动, 产生新的参考点, 然后在新的参考点周围进行探索。如此进行下去, 直到找到极小点或达到规定的迭代次数为止。





用模式搜索法计算二元函数 $U(x, y)$ 的极小点的过程
(曲线为二元函数的等高线)

➤ 多维随机优化法——模拟退火算法（SA）

模拟退火法（Simulated Annealing, SA）是一种通用**概率演算法**，由 S. Kirkpatrick、C. D. Gelatt 和 M. P. Vecchi 提出的一种具有全局收敛性的随机优化算法，最早发表于1983年5月的《Science》上。V. Černý 在1985年也独立发明此演算法。**目前，几乎所有流行的集成电路版图设计软件均采用了SA。**该方法适合于求解维数较大的实际问题，具有不需要目标函数连续、具有全局收敛性且性能稳定的特点。

“退火”是冶金学的专有名词：**将材料加热后再经特定速率冷却**，目的是增大晶粒的体积，并且减少晶格中的缺陷。材料中的原子原来会停留在使内能有局部最小值的位置，加热使能量变大，原子会离开原来位置，而随机在其他位置中移动。退火冷却时速度较慢，使得原子有较多可能可以找到内能比原先更低的位置。

模拟退火的原理也和金属退火的原理近似：将热力学的理论套用到统计学上，将搜寻空间内每一点想像成空气内的分子；分子的能量，就是它本身的动能；而搜寻空间内的每一点，也像空气分子一样带有“能量”，以表示该点对命题的合适程度。演算法先以搜寻空间内一个任意点作起始：每一步先选择一个“邻居”，然后再计算从现有位置到达“邻居”的概率。

SA把优化变量的取值等价为退火过程中分子的状态，把优化问题的目标函数等价为系统能量，把优化变量的变化等价为分子运动，并把优化进程的控制和退火温度的控制联系起来。

优化变量能够随机移动是SA区别于前述各种确定性优化方法的主要特征，
SA的六大要素：

- 能量函数、能量分布函数
- 初始温度
- 退火策略
- 随机移动向量的产生
- 热平衡处理和收敛判据

模拟退火算法的基本框架：

```
Step1  初始化：取定能量函数  $E(\bar{X}) = f(\bar{X})$ 、能量分布函数  $P(E)$ ；  
        设置初始温度  $T = T_0$ 、初始最优解  $\bar{X} = \bar{X}_0$ ；  
Step2  计算当前最优解的能量  $E = f(\bar{X})$ ；  
Step3  until (满足收敛条件) {  
        until (达到温度T的热平衡状态) {  
            产生随机移动量  $\Delta\bar{X}$ ；  
            计算随机移动向量  $\Delta\bar{X}$  对应的能量增量  $\Delta E = f(\bar{X} + \Delta\bar{X}) - E$ ；  
            IF (  $\Delta E < 0$  ) { /*接受移动量  $\Delta\bar{X}$  */  
                 $\bar{X} = \bar{X} + \Delta\bar{X}$ 、  $E = E + \Delta E$   
            } else {  
                产生 (0, 1) 上的均匀分布随机数U；  
                IF (  $U < P(\Delta E)$  ) { /*接受移动量  $\Delta\bar{X}$  */  
                     $\bar{X} = \bar{X} + \Delta\bar{X}$ 、  $E = E + \Delta E$   
                } else { /*拒绝接受移动量  $\Delta\bar{X}$  */  
                    保持  $\bar{X}$  和  $E$  不变；  
                }  
            }  
        } /*until (达到温度T的热平衡状态) */  
        按退火策略降低温度T；  
    } /*until (满足收敛条件) */  
Step4  输出最优解  $\bar{X}$ 
```

当随机移动 $\Delta\bar{X}$ 造成目标函数升高时，以概率 $P(\Delta E)$ 接受该随机移动 $\Delta\bar{X}$ 。由此保证了SA算法能够跳出目标函数的局部极小点从而具备全局收敛性的特点。

模拟退火算法的详细内容请参见有关参考书。

➤ 多维随机优化法——进化计算法（evolutionary computing, EC）

进化计算又称演化计算，其思想来源于自然界的进化现象：众多个体（群体）在同一环境中为生存而竞争，适应性强的个体有更大的机会存活，生存下来的个体进行复制和交配，将其优良的基因传承到下一代。在传承过程中也会出现变异。进化计算通过引入随机扰动，在复制中产生的变异可能引导群体产生新颖的个体。经过一个渐进的进化过程，群体的生存能力得到整体提高，而最优个体也是在进化过程中产生的。

EC算法与模拟退火算法都属于随机优化算法，但它融合了随机移动和适应值选择，能让多个点（种群）同时得到改进，而且最终能收敛到目标函数的多个极值点。

相对于传统的优化算法，进化计算对于一些复杂的问题表现出更好的全局搜索能力和鲁棒性。


遗传算法（genetic algorithm）是典型的进化算法。

进化计算算法的基本框架：

- Step1 设置进化代数 $t=0$ 、设置群体数量 $2M$ ；
初始化群体 $P(t) = \{\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_{2M}\}$ ；
- Step2 评价 $P(t)$ ；
从 $P(t)$ 中选出进化过程中需要特殊考虑的群体 Q ；
- Step3 while（进化终止条件不满足）{
 $P'(t) = \{\text{对 } P(t) \text{ 进行进化操作后的群体}\}$ ；
 评价 $P'(t)$ ；
 从 $P'(t) \cup Q$ 中选出新一代群体 $P(t+1)$ ；
 从 $P(t+1)$ 中选出需要特殊考虑的群体 Q ；
 $t = t + 1$
}
- Step4 输出最优个体；

注意：

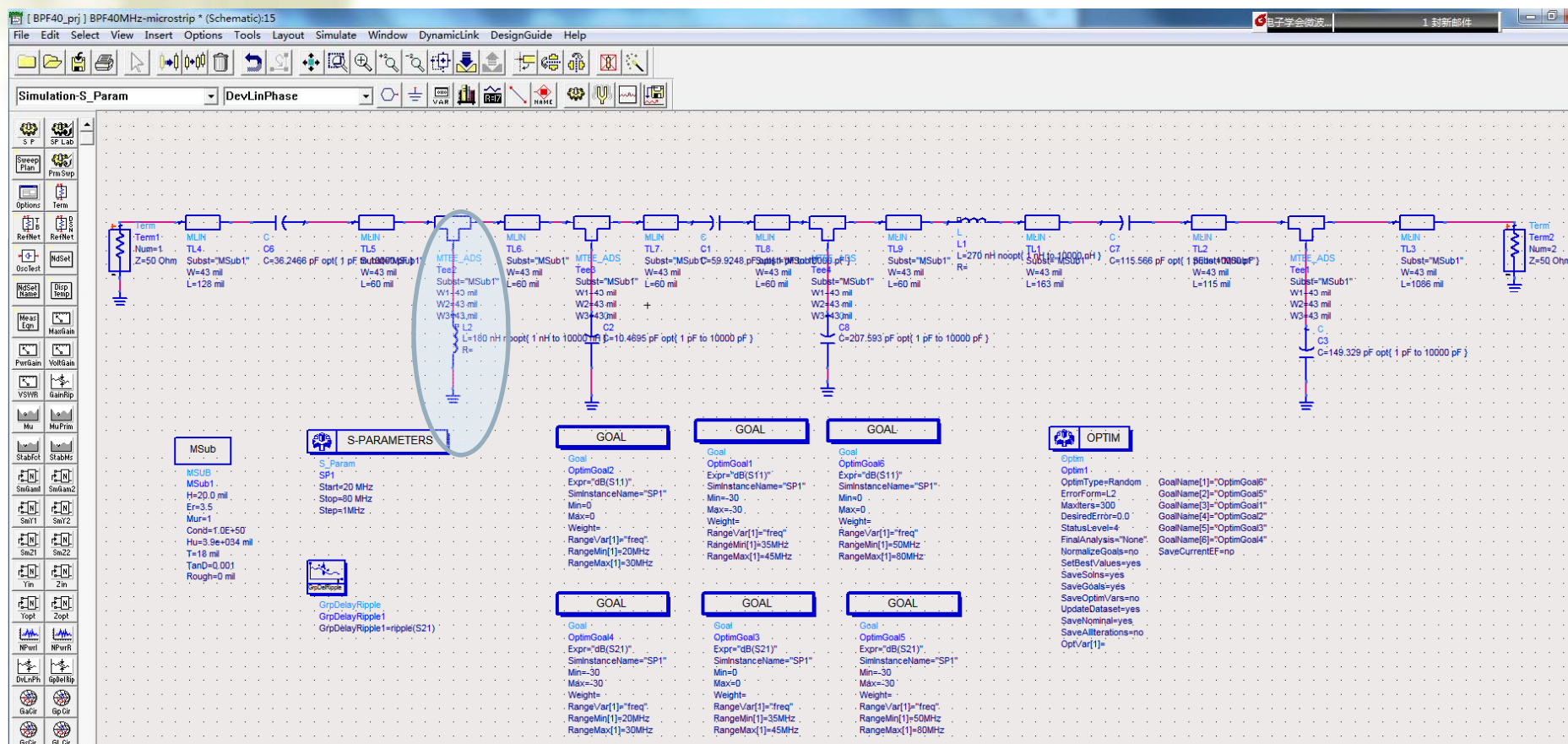
- 1，评价 $P(t)$ ，本质上是逐个计算 $P(t)$ 中的每一个个体的目标函数值，并将其映射为相应个体的评价值（适应值）。
- 2，为了有效防止进化初期个别较优的个体抢占了太大的生存空间从而破坏群体的多样性、影响获取最优解，常需要对目标函数值进行更为复杂的映射，使适应值分布在一个固定的区间内。
- 3，进化操作时EC算法的核心，包括交叉和变异操作，而新一代群体的选取主要采用轮盘赌博方式实现。
- 4，通常把 $P(t)$ 中的最优个体作为 Q ，或者简单地把整个 $P(t)$ 作为 Q 。

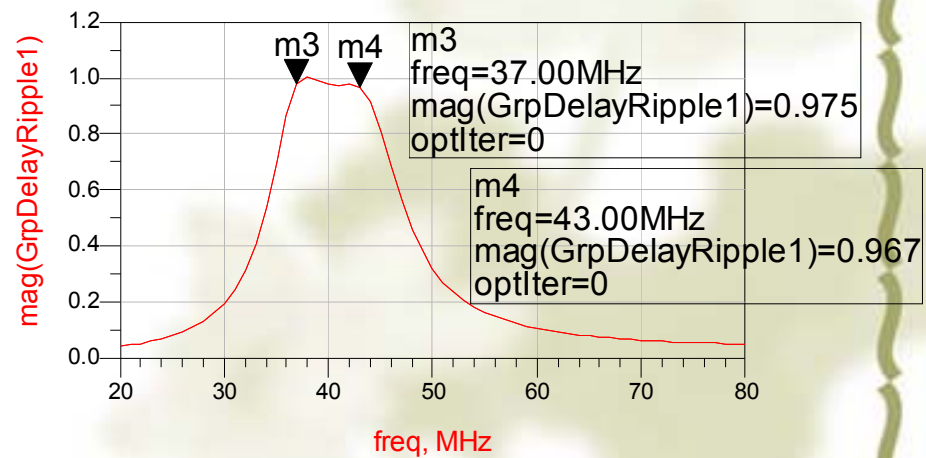
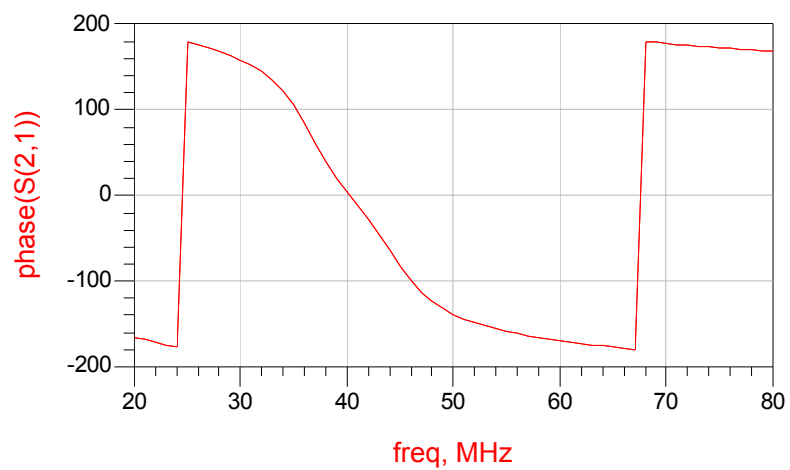
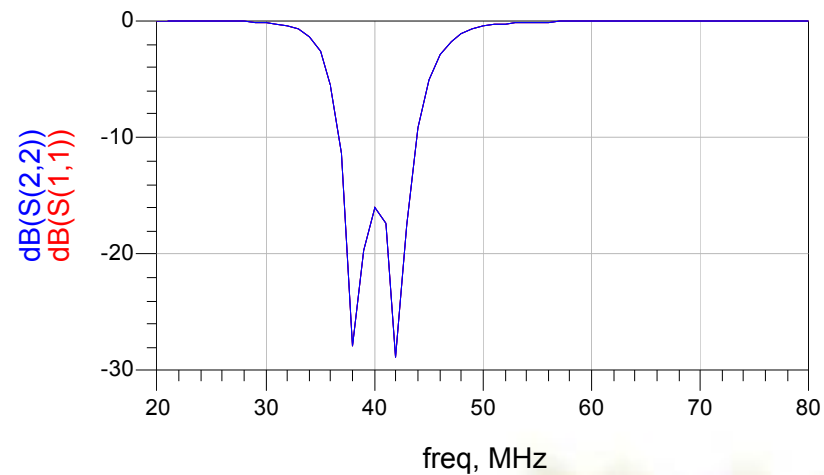
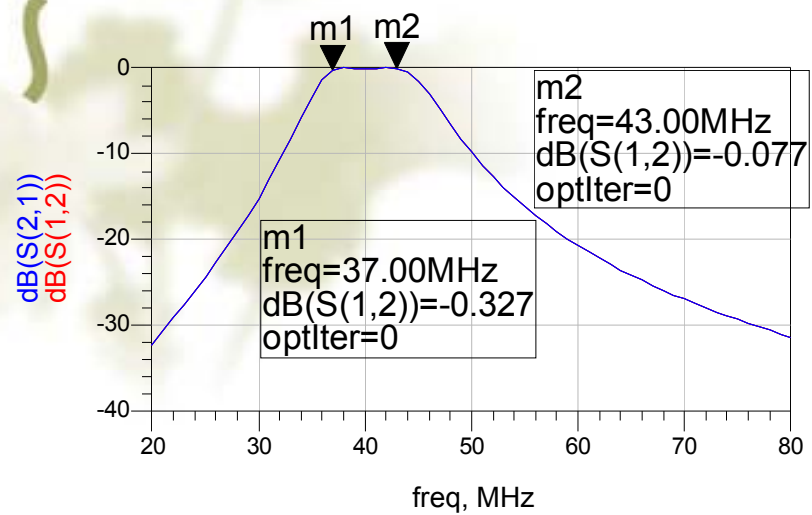


大型作业报告（XXX小组）

第七节 使用ADS进行滤波器和微带低噪声放大器设计

➤ 集总参数带通滤波器的优化设计





➤ 低噪声放大器的优化设计

ATF-54143是Agilent公司的一种低噪声系数场效应晶体管

atf541433a.s2p - 记事本

文件(F) 编辑(E) 格式(O) 查看(V) 帮助(H)

!ATF-54143
!s-parameters at Vds=3V, Id=40mA. Last updated 17/05/01 AR.

GHZ S MA R 50

.100	.994	-17.6	25.090	168.5	.009	80.2	.588	-12.8
.200	.951	-33.7	24.072	157.5	.018	71.9	.569	-24.9
.300	.925	-50.5	22.382	147.3	.025	64.4	.530	-35.9
.400	.890	-64.3	20.653	138.5	.031	58.2	.497	-45.5
.500	.826	-76.9	18.771	130.1	.036	52.4	.442	-54.6
.600	.795	-88.1	17.199	123.5	.039	48.5	.411	-61.7
.700	.765	-97.8	15.741	117.7	.042	45.2	.378	-68.5
.800	.740	-106.2	14.466	112.6	.045	42.6	.353	-74.0
.900	.721	-114.0	13.373	108.0	.047	40.4	.329	-78.7
1.000	.701	-120.6	12.390	103.9	.049	38.7	.308	-83.2
1.100	.688	-126.4	11.536	100.2	.051	37.4	.290	-87.1
1.200	.677	-132.4	10.785	96.6	.053	35.9	.275	-90.6
1.300	.666	-137.6	10.124	93.4	.054	34.9	.259	-94.0
1.400	.659	-142.0	9.549	90.3	.056	34.0	.248	-96.6
1.500	.651	-146.5	9.008	87.4	.057	33.3	.235	-99.5
1.600	.644	-150.9	8.540	84.6	.059	32.5	.224	-101.8
1.700	.639	-154.8	8.124	81.8	.060	31.8	.215	-104.3
1.800	.632	-158.4	7.749	79.3	.062	31.2	.204	-106.5
1.900	.630	-162.1	7.400	76.6	.063	30.4	.197	-108.6
2.000	.624	-165.6	7.078	74.2	.065	29.8	.188	-110.9
2.100	.619	-168.8	6.797	71.8	.066	29.3	.180	-113.0
2.200	.618	-172.5	6.540	69.3	.068	28.5	.173	-115.3
2.300	.615	-175.3	6.276	67.1	.069	27.9	.164	-117.7
2.400	.611	-178.3	6.044	64.8	.071	27.3	.157	-119.7
2.500	.611	-178.5	5.838	62.6	.072	26.6	.150	-122.6
2.600	.609	-175.7	5.644	60.3	.074	25.8	.143	-124.6
2.700	.607	-172.7	5.459	58.1	.075	25.1	.138	-127.6
2.800	.606	-169.7	5.280	55.8	.077	24.4	.132	-130.5
2.900	.608	-166.9	5.117	53.7	.078	23.6	.126	-133.7
3.000	.607	-164.2	4.960	51.5	.080	22.9	.121	-137.5
3.100	.605	-161.6	4.816	49.4	.081	22.1	.116	-140.7
3.200	.607	-158.9	4.674	47.4	.083	21.4	.112	-144.8
3.300	.607	-156.5	4.548	45.3	.084	20.6	.108	-149.1
3.400	.609	-153.6	4.425	43.2	.086	19.8	.105	-153.4
3.500	.614	-151.2	4.305	41.1	.087	18.9	.103	-158.8
3.600	.614	-148.7	4.194	39.1	.089	18.0	.100	-163.8
3.700	.617	-145.9	4.087	37.0	.091	17.0	.100	-168.4
3.800	.623	-143.4	3.987	35.0	.092	15.9	.098	-174.0
3.900	.621	-140.8	3.890	33.0	.093	14.9	.099	-178.1
4.000	.625	-138.4	3.798	31.0	.094	14.0	.101	-176.5
4.100	.628	-136.4	3.704	29.0	.096	13.1	.103	-171.4
4.200	.631	-134.2	3.619	27.1	.097	12.2	.106	-167.1
4.300	.637	-131.8	3.538	25.1	.098	11.2	.108	-162.2
4.400	.642	-129.4	3.456	23.2	.099	10.2	.112	-158.8
4.500	.646	-127.3	3.383	21.2	.101	9.3	.116	-154.3

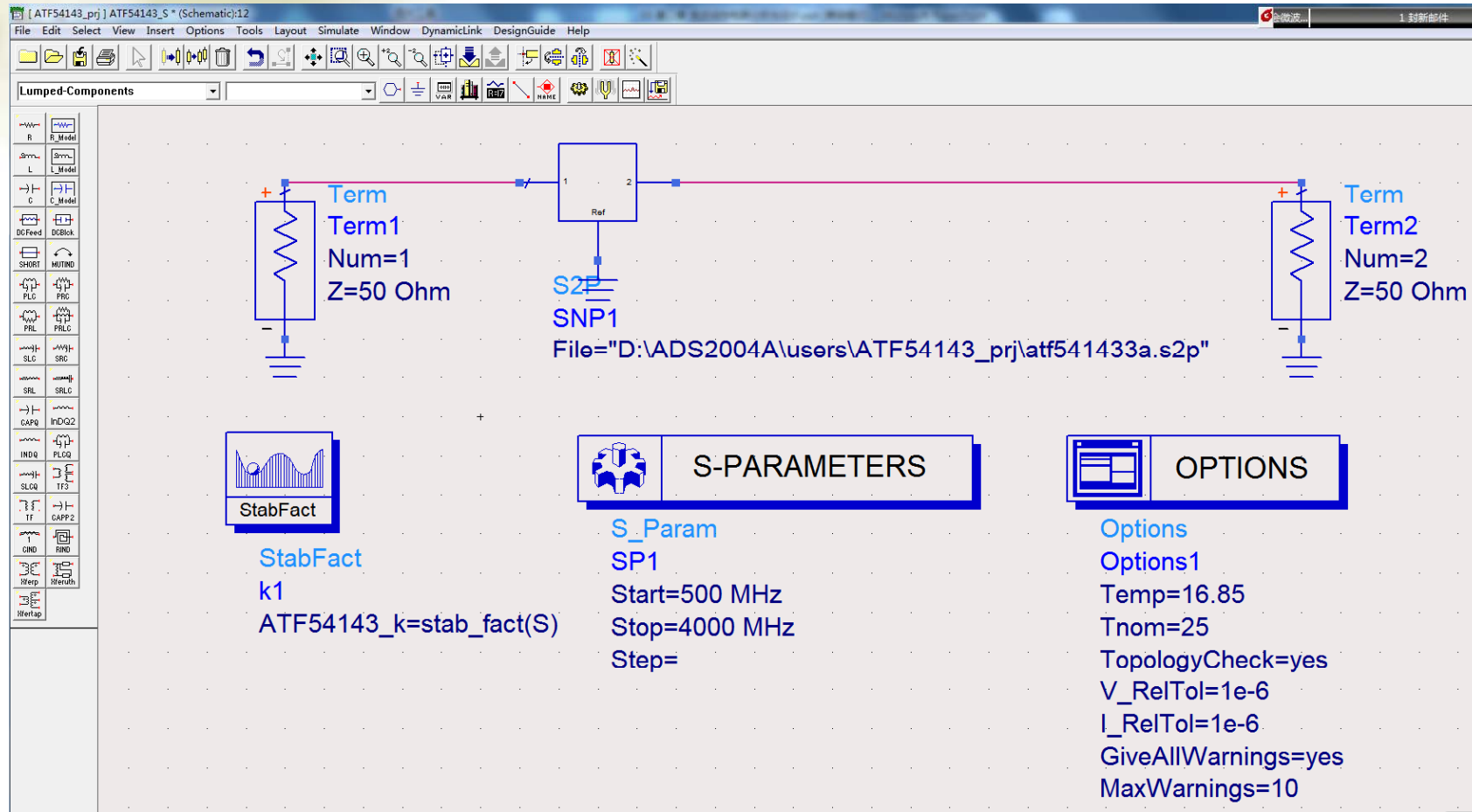
atf541433a.s2p - 记事本

文件(F)	编辑(E)	格式(O)	查看(V)	帮助(H)
15.100	.871	-45.3	.628	-165.7
15.200	.882	-44.9	.615	-167.2
15.300	.916	-45.4	.600	-168.2
15.400	.926	-46.8	.586	-170.1
15.500	.927	-49.3	.571	-171.4
15.600	.922	-50.6	.563	-172.6
15.700	.899	-52.5	.558	-174.1
15.800	.879	-55.7	.548	-176.1
15.900	.868	-55.2	.534	-177.0
16.000	.874	-54.8	.524	-178.4
16.100	.882	-55.4	.511	-179.7
16.200	.919	-55.9	.498	-178.9
16.300	.918	-56.1	.487	-178.4
16.400	.907	-59.2	.484	-177.4
16.500	.911	-61.9	.470	-175.9
16.600	.873	-61.9	.473	-175.0
16.700	.831	-67.7	.463	-172.6
16.800	.865	-63.5	.454	-172.6
16.900	.851	-61.1	.450	-171.0
17.000	.866	-62.8	.442	-170.1
17.100	.915	-62.2	.431	-168.9
17.200	.897	-62.4	.425	-167.8
17.300	.940	-66.7	.425	-167.3
17.400	.966	-69.1	.427	-165.7
17.500	.925	-72.2	.418	-162.7
17.600	.895	-75.1	.413	-160.3
17.700	.876	-73.9	.403	-159.9
17.800	.871	-72.6	.400	-158.4
17.900	.889	-72.5	.391	-157.3
18.000	.918	-73.6	.383	-156.1

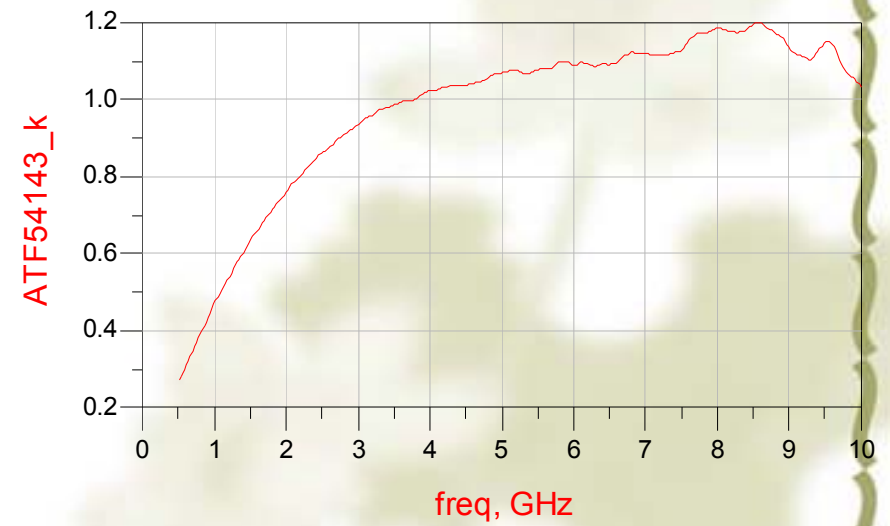
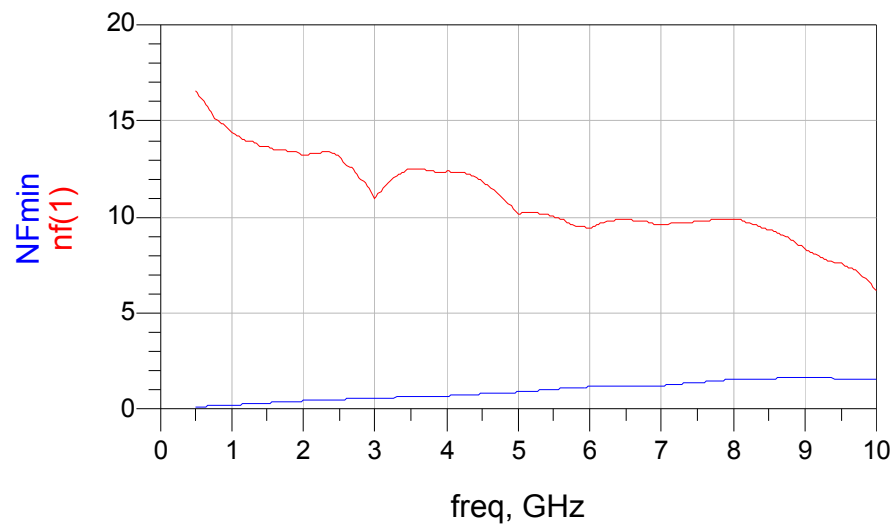
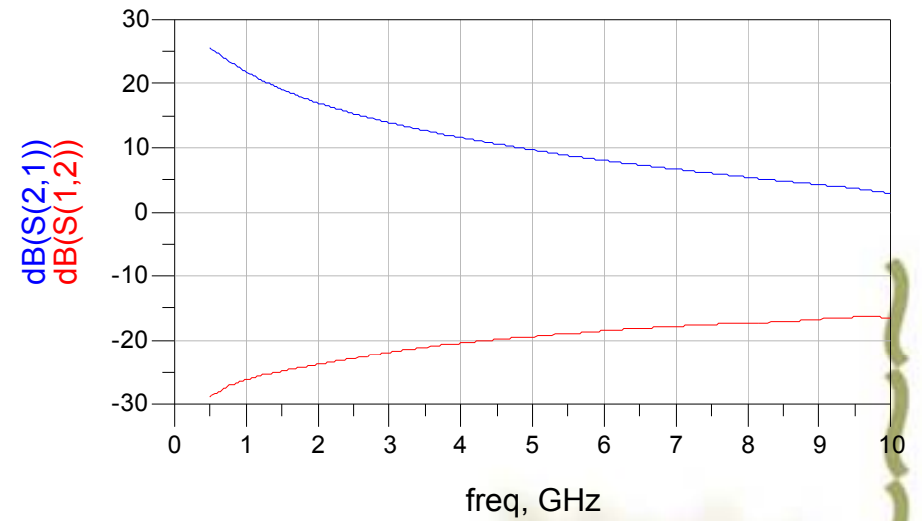
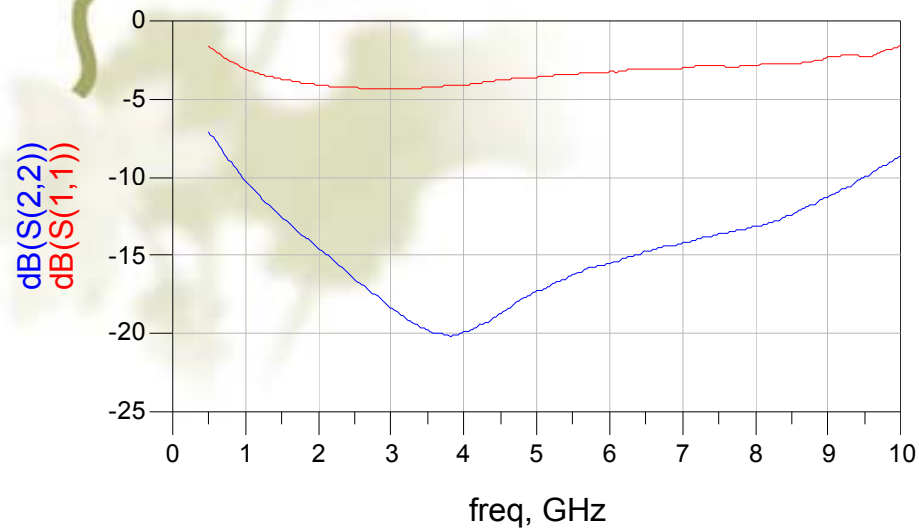
!noise parameters at Vds=3V, Id=40mA

Freq (GHz)	FMIN (dB)	GAMMA Mag	OPT Ang	Rn @ 50 Ohm	NF @ 50 Ohm (dB)
.800	.20	.33	44.5	.04	.23
.900	.22	.32	53.0	.04	.19
1.000	.24	.32	60.5	.04	.21
1.900	.42	.29	108.1	.04	.48
2.000	.45	.29	111.1	.04	.51
2.400	.51	.26	136.0	.04	.57
3.000	.59	.28	169.9	.03	.66
3.900	.69	.34	-151.6	.05	.83
5.000	.90	.45	-119.5	.09	1.23
5.800	1.14	.50	-101.6	.16	1.62
6.000	1.17	.52	-99.6	.18	1.65
7.000	1.24	.58	-79.5	.33	2.09
8.000	1.57	.60	-57.9	.56	2.64
9.000	1.64	.69	-39.7	.87	3.25
10.000	1.57	.80	-22.2	1.34	4.03

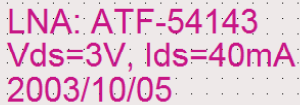
利用S参数扫频分析ATF-54143的稳定性、驻波、传输、噪声性能



利用S参数扫频分析ATF-54143的稳定性、驻波、传输、噪声性能



设计输入



MSub MSub1 H=8.0 mil Er=3.38 Mur=1 Cond=1.0E+50 Hu=3.9e+034 mil T=17 um TanD=0.0027 Rough=0 mil	S-PARAMETERS S_Param SP1 Start=200 MHz Stop=10000 MHz Step=
OPTIONS Options Options1 Temp=16.85 Tnom=25 TopologyCheck=yes V_RelTol=1e-6 I_RelTol=1e-6 GiveAllWarnings=yes MaxWarnings=10	StabFact k1 our_k=stab_fact(S)

GOAL Goal OptimGoal1 Expr="dB(S(2,1))" SimInstanceName="SP1" Min=13 Max=13 Weight=10 RangeVar[1]="freq" RangeMin[1]=500 MHz RangeMax[1]=4000 MHz	GOAL Goal OptimGoal3 Expr="our_k" SimInstanceName="SP1" Min=2 Max=2 Weight=100 RangeVar[1]="freq" RangeMin[1]=500 MHz RangeMax[1]=4000 MHz	GOAL Goal OptimGoal5 Expr="db(S(1,1))" SimInstanceName="SP1" Min=-15 Max=-15 Weight=100 RangeVar[1]="freq" RangeMin[1]=500 MHz RangeMax[1]=4000 MHz
GOAL Goal OptimGoal2 Expr="nf(2)" SimInstanceName="SP1" Min=0 Max=1 Weight=100 RangeVar[1]="freq" RangeMin[1]=500 MHz RangeMax[1]=4000 MHz	GOAL Goal OptimGoal4 Expr="db(S(2,2))" SimInstanceName="SP1" Min=-15 Max=-15 Weight=100 RangeVar[1]="freq" RangeMin[1]=500 MHz RangeMax[1]=4000 MHz	OPTIM Optim Optim1 OptimType=Genetic ErrorForm=L2 MaxIters=500 DesiredError=0.0 StatusLevel=4 FinalAnalysis="SP1" NormalizeGoals=no SetBestValues=yes SaveSols=no SaveGoals=yes SaveOptimVars=yes UpdateDataset=yes SaveNominal=yes SaveAllIterations=no OptVar[1]=

Nominal Optimization:2

Optim Instance Name
Optim1

Setup Parameters Display

Optimization Type: Genetic

Optimization Goal and Variable Setup

OptGoal OptVar

☐ Use All Goals in Design

Select

OptGoal

"OptimGoal5"
"OptimGoal1"
"OptimGoal2"
"OptimGoal3"
"OptimGoal4"

Add Cut Paste

Stopping criterion

Number of iterations: 500

OK Apply Cancel Help

