Assignment_10_written

1

1. Consider a forward SDE

$$dx_t = f(x_t, t)\,dt + g(x_t, t)dW_t,$$

show that the corresponding probability flow ODE is written as

$$dx_t = \left[f(x_t, t) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x} g^2(x_t, t) - \frac{g^2(x_t, t)}{2}\frac{\partial}{\partial x}\log p(x_t, t) \right] dt.$$

0. Definition and symbol

- Ito Process（Forward SDE）：

  $$dx_t = f(x_t, t)dt + g(x_t, t)dW_t$$

  where W_t is standard Brownian motion ;
  f is drift,g is diffusion magnitude.

- let $p(x, t)$ be the PDF of x_t. Assume $p(x, t)$ is smooth and decays sufficiently fast as $x \to \pm\infty$ so that boundary terms vanish under integration by parts.

- Assume f, g and needed derivatives are smooth enough to justify exchanging expectation and differentiation, and to apply integration by parts.

---

1. Meaning of the forward SDE and the FP equation

1.1 Forward SDE

- $f(x_t, t)dt$: drift term.
- $g(x_t, t)dW_t$: diffusion term.
- In **Ito calculus**: $dW_t \sim \mathcal{N}(0, dt)$, $(dW_t)^2 = dt$.

1.2 Fokker–Planck equation

The density $p(x,t)$ corresponding to the SDE satisfies

$$\boxed{\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(fp) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(g^2 p)} \tag{FP}$$

1.3 Conservation

Any deterministic flow $v(x,t)$ induces a density evolution

$$\boxed{\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\big(v(x,t)p(x,t)\big)} \tag{CE}$$

2. Rewriting FP into continuity form and identifying $v(x,t)$

Start from (FP):

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(fp) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(g^2 p)$$

Expand the second-derivative term as a single first derivative:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(g^2 p) = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial}{\partial x}(g^2 p)\Big) = \frac{\partial}{\partial x}\Big(p\frac{\partial g^2}{\partial x} + g^2\frac{\partial p}{\partial x}\Big)$$

Substitute back into (FP):

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(fp) + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\Big(p\frac{\partial g^2}{\partial x} + g^2\frac{\partial p}{\partial x}\Big)$$

Collect the right-hand side into a single ∂_x:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\left[fp - \tfrac{1}{2}p\partial_x g^2 - \tfrac{1}{2}g^2\partial_x p\right] \tag{$\bigstar$}$$

Use $\partial_x p = p\partial_x \log p$ to rewrite:
$\frac{1}{2}g^2\partial_x p = \frac{1}{2}g^2 p\partial_x \log p$
Then ($\bigstar$) becomes

$$\boxed{\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\Big([f - \tfrac{1}{2}\partial_x g^2 - \tfrac{1}{2}g^2\partial_x \log p]p\Big)} \tag{$\bigstar\bigstar$}$$

Comparing ($\bigstar\bigstar$) with CE, we identify the velocity field:

$$\boxed{v(x,t) = f(x,t) - \frac{1}{2}\partial_x\big(g^2(x,t)\big) - \frac{g^2(x,t)}{2}\partial_x \log p(x,t)} \tag{*}$$

Therefore, the associated Probability-Flow ODE (PF-ODE) is

$$dx_t = v(x_t,t)dt = \left[f(x_t,t) - \frac{1}{2}\partial_x g^2(x_t,t) - \frac{g^2(x_t,t)}{2}\partial_x \log p(x_t,t)\right]dt$$

2

2. AI 的未來與機器學習的基石

> 請以 1–2 頁（約 600–800 字）為限。

1. AI 的未來能力
   請具體描述一件你認為 目前 AI 無法做到，但 20 年後有可能做到 的重要事情。
   - 這件事應該是「你認為對人類、社會、科學或文化具有重大意義」的。
   - 請具體描述該能力的內容與應用場景（例如「自動發現新的物理定律」、「全自動醫學診斷並能解釋理由」等）。
   - 盡量避免空泛描述（如「AI 會更聰明」），而要明確指出「做什麼」、「為什麼重要」。

2. 涉及的機器學習類型
   根據你對問題一的構想，判斷該能力的實現主要涉及哪一類機器學習方法：
   - 監督式學習 (Supervised Learning)
   - 非監督式學習 (Unsupervised Learning)
   - 強化學習 (Reinforcement Learning)
     或是以上幾者的組合。
     請簡述你的理由： 複製
   - 為什麼需要這類學習？
   - 該任務中的「資料來源」與「目標訊號」分別是什麼？
   - 是否存在學習回饋或環境互動？

3. 第一步的「模型化」
   假設要讓 AI 在 20 年後達到問題一的能力，請思考並設計出 能夠作為第一個研究步驟的「簡化模型問題 (model problem)」。 說明以下幾點：
   - 這個簡化問題在概念上如何代表你理想中的最終能力？
   - 它的可測試性（你如何知道模型是否成功？）
   - 需要哪些數學或機器學習工具來解決？

數學證明

我認為在未來二十年內，AI 可能夠在「數學證明」這一傳統上被視為人類專屬的高層次思維領域中取得突破。
目前，大多數 AI 系統可以透過大型語言模型（LLMs）或自動定理證明器（ATPs）生成部分正確的推理步驟，但它們仍受限於搜尋空間過大與邏輯不完備的問題。

未來的 AI 若結合符號推理（symbolic reasoning）與深度學習（deep neural networks），可在「自動探索新證明策略」上發揮潛力。
如DeepMind 的 AlphaGeometry（2023）成功利用類神經結構搜尋幾何定理證明，顯示透過 search tree expansion與neural guidance，AI 能夠以接近人類敘述的方式以及思考的技巧發現數學結構中的關聯。

若要讓 AI 在數學領域達到這樣的能力，強化學習（Reinforcement Learning, RL）會扮演主要角色。
在證明過程中，每一個「推理步驟」都可視為一個動作（action），而「達成完整正確證明」即為最終回饋（reward）。
這樣的架構與圍棋相似，差別在於數學推理的狀態空間（state space）更加龐大且非平滑，如過去的Alpha Go就是個典型的例子。
若要讓搜尋更高效，AI 需要透過策略優化（policy optimization）改進策略函數，讓 AI 能選出有邏輯意義的步驟；
同時利用價值函數近似（value function approximation）預測哪些路徑更接近正確解；
並加入損失函數正則化（loss function regularization）以控制模型偏誤，避免幻覺式推理（hallucinated reasoning）發生。

(內容優化by gpt)

要讓 AI 具備可驗證的證明能力，第一步是將人類的自然語言表述轉換成形式化的邏輯結構。
這種過程稱為自然語言到符號邏輯轉換，目前已有如 GPT-f（OpenAI, 2020）與 LeanDojo（MIT, 2023）等系統嘗試讓模型理解並重現人類數學家在 Lean 定理證明器中的推理過程。
未來的研究可將數學問題依結構分類，讓不同子模型專精處理不同類型的證明：
幾何問題以代數化（algebraization）方式處理，如利用符號張量或群論結構；
代數或組合問題則可透過神經符號混合模型（neuro-symbolic models）進行高階抽象推理。

參考文獻：
DeepMind (2023). AlphaGeometry: An AI system for mathematical reasoning via neural search.
Polu et al. (2020). GPT-f: Automated theorem proving with large language models.
Yang et al. (2024). Deep Reinforcement Symbolic Reasoning for Formal Proof Search. arXiv:2403.01312.
Han et al. (2023). LeanDojo: Theorem proving with language models via formal verification. arXiv:2306.09264.

---

3. Unanswered Question

在Ito’s lemma 中，如果把隨機過程 x_t定義在彎曲空間（例如流形或非歐幾里得空間）上，Ito’s lemma 的形式還能保持一樣嗎？