

# 数据科学与工程数学基础

## 作业提交规范及第 4 次作业

教师：黄定江

助教：陈诺、刘文辉

2022 年 10 月 22 日

### 作业提交规范

1. 作业提交形式：使用 Word 或 L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X 编写所得到的电子文档。若使用 Word 编写，将其另存为 PDF 形式，然后提交 PDF 文档。若使用 L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X 编写，将其编译成 PDF 形式，然后提交 Tex 和 PDF 两个文档。
2. 作业命名规范：提交的电子文档必须命名为：“学号\_姓名”。命名示例：10175501112\_陈诺。
3. 作业提交途径：点击打开每次作业的传送门网址：[第 4 次作业提交传送门](#)，无需注册和登录，直接上传作业文档即可。注意：传送门将会在截至时间点到达后自动关闭。
4. 作业更改说明：如果需要修改已经提交的作业，只要在截至日期前，再次上传更改后的作业（切记保持同名），即可覆盖已有作业。
5. 作业评分说明：正常提交作业的按照实际评分记录；逾期补交作业的根据逾期情况在实际评分基础上酌情扣分；未交作业的当次作业记为 0 分。

### 第 4 次作业



提交截至时间：**2022/10/28 周五 12:00 (中午)**

理论部分

**习题 1.** 定义

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(i) 给出矩阵  $A^T A$  的 *Cholesky* 分解  $A^T A = GG^T$

(ii) 试说明  $\|A^T A\|_2 = \|A\|_2^2 = \|G\|_2^2$

**解.** (i) 记

$$M = A^T A = \begin{pmatrix} 14 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -4 \\ 0 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

消除  $M$  的第一列中的对角线条目

$$L_1 M = \begin{pmatrix} \sqrt{14} & -\frac{2}{\sqrt{14}} & 0 \\ 0 & \frac{40}{7} & -4 \\ 0 & -4 & 3 \end{pmatrix} \quad L_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{14}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{7} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$L_1 M$  右乘  $L_1^T$

$$L_1 M L_1^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{40}{7} & -4 \\ 0 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

消除  $L_1 M L_1^T$  的第二列中的对角线条目

$$L_2 L_1 M L_1^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2\sqrt{70}}{7} & -\frac{\sqrt{70}}{5} \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \quad L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{70}}{20} & 0 \\ 0 & \frac{7}{10} & 1 \end{pmatrix}$$

$L_1 M$  右乘  $L_2 L_1 M L_1^T L_2^T$

$$L_2 L_1 M L_1^T L_2^T = \text{diag}_{3 \times 3} \left( 1, 1, \frac{1}{5} \right).$$

令  $L_3 := \text{diag}_{3 \times 3}(1, 1, \sqrt{5})$  使得  $L_3 L_2 L_1 M L_1^T L_2^T L_3^T = I_3$ . 我们有  $M = A^T A = GG^T$  其中

$$G = L_1^{-1} L_2^{-1} L_3^{-1} = \begin{pmatrix} \sqrt{14} & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{14}}{7} & \frac{2\sqrt{70}}{7} & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{70}}{5} & \frac{\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}$$

(ii) 令  $G = U\Sigma V^T$ , 其中  $U, V \in \mathbb{R}^{n \times n}$  正交,  $\Sigma = \text{diag}_{n \times n}(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  且  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n \geq 0$ . 故  $A^T A = GG^T = U\Sigma V^T V\Sigma U^T = U\Sigma^2 U^T$ ,  $A^T A$  的奇异值为  $\sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2$ . 因此  $\|A^T A\|_2 = \sigma_1^2 = \|G\|_2^2$ . 同样的, 我们可以得出  $\|A^T A\|_2 = \|A\|_2^2$ .

习题 2. 对  $k \in \mathbb{N}_0$ , 定义

$$A = \begin{pmatrix} -8 & 5 & 1 \\ -4 & 7 & 5 \\ -8 & 5 & 1 \\ -4 & 7 & 5 \end{pmatrix}, \quad \gamma_k = \inf_{\substack{M \in \mathbb{R}^{3 \times 4} \\ \text{rk}(M) \leq k}} \|A^T - M\|_2$$

(i) 计算矩阵  $A$  的 SVD 分解  $A = U\Sigma V^T$ , 并使  $2U$  为 Hadamard 矩阵

(ii) 使用 (i) 中的结论, 求  $\text{rank}(A), \mathcal{R}(A), \mathcal{N}(A), \|A\|_2, \|A\|_F$

(iii) 对每个  $k \in \mathbb{N}_0$ , 计算  $\gamma_k$  并找出矩阵  $A_k \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$  使得  $\text{rank}(A_k) \leq k$  且  $\|A^T - A_k\|_2 = \gamma_k$

解. (i)

$$A^T A = 4 \begin{pmatrix} 40 & -34 & -14 \\ -34 & 37 & 20 \\ -14 & 20 & 13 \end{pmatrix}$$

特征多项式  $p_{A^T A}(z) = \det(zI_3 - A^T A) = z(z - 36)(z - 324)$ .  $A^T A$  特征值为

$$\lambda_1 = 324, \quad \lambda_2 = 36, \quad \lambda_3 = 0$$

$\lambda_i, i \in \{1, 2, 3\}$  对应  $A^T A$  的特征空间  $E_{\lambda_i} = \mathcal{N}(\lambda_i I_3 - A^T A)$  分别为  $E_{\lambda_1} = \text{span}((-2, 2, 1)^T), E_{\lambda_2} = \text{span}((2, 1, 2)^T), E_{\lambda_3} = \text{span}((1, 2, -2)^T)$ . 取归一化特征向量

$$v_1 = \frac{1}{3}(-2, 2, 1)^T, \quad v_2 = \frac{1}{3}(2, 1, 2)^T, \quad v_3 = \frac{1}{3}(1, 2, -2)^T$$

令  $V = (v_1 | v_2 | v_3)$

$$\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1} = 18, \quad \sigma_2 = \sqrt{\lambda_2} = 6, \quad \sigma_3 = \sqrt{\lambda_3} = 0$$

并令  $\Sigma = \text{diag}_{4 \times 3}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ . 然后找到正交矩阵  $U = (u_1 | u_2 | u_3 | u_4) \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$  使得  $Av_i = \sigma_i u_i$  for all  $i \in \{1, 2, 3\}$ . 其中

$$u_1 = \frac{Av_1}{\sigma_1} = \frac{1}{2}(1, 1, 1, 1)^T, \quad u_2 = \frac{Av_2}{\sigma_2} = \frac{1}{2}(-1, 1, -1, 1)^T.$$

计算  $\mathcal{N}((u_1 | u_2)^T) = \text{span}((1, 0, -1, 0)^T, (0, 1, 0, -1)^T)$  并得到

$$u_3 = \frac{1}{2}(1, 1, -1, -1)^T$$

(我们希望  $2U$  是一个 Hadamard 矩阵, 需要在  $\mathcal{N}((u_1 | u_2)^T)$  找个单位向量, 其元素只含  $\pm \frac{1}{2}$ .)

最后, 计算  $\mathcal{N}((u_1 | u_2 | u_3)^T) = \text{span}((-1, 1, 1, -1)^T)$  并得到

$$u_4 = \frac{1}{2}(-1, 1, 1, -1)^T.$$

(我们希望  $2U$  是一个 Hadamard 矩阵, 需要在  $\mathcal{N}((u_1 | u_2 | u_3)^T)$  找个单位向量, 其元素只含  $\pm \frac{1}{2}$ .)

因此  $A$  的 SVD 分解为:

$$A = \begin{pmatrix} -8 & 5 & 1 \\ -4 & 7 & 5 \\ -8 & 5 & 1 \\ -4 & 7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 18 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}^T = U\Sigma V^T.$$

(ii)  $A$  有两个非零奇异值故  $\text{rank}(A) = 2$ .

$$\mathcal{R}(A) = \text{span}(u_1, \dots, u_r) = \text{span}(u_1, u_2) = \text{span}\left(\frac{1}{2}(1, 1, 1, 1)^T, \frac{1}{2}(-1, 1, -1, 1)^T\right),$$

$$\mathcal{N}(A) = \text{span}(v_{r+1}, \dots, v_3) = \text{span}(v_3) = \text{span}\left(\frac{1}{3}(1, 2, -2)^T\right)$$

$$\|A\|_2 = \sigma_1 = 18, \|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^r \sigma_i^2} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} = 6\sqrt{10}.$$

(iii) 例用 (i) 中  $A$  的 SVD 分解, 记  $A^T = \tilde{U}\tilde{\Sigma}\tilde{V}^T$ , 其中  $\tilde{U} = V, \tilde{\Sigma} = \Sigma^T, \tilde{V} = U$ :

$$A^T = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 18 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}^T = \tilde{U}\tilde{\Sigma}\tilde{V}^T.$$

记  $\tilde{U} = (\tilde{u}_1 | \tilde{u}_2 | \tilde{u}_3)$ ,  $\tilde{V} = (\tilde{v}_1 | \tilde{v}_2 | \tilde{v}_3 | \tilde{v}_4)$ ,  $\tilde{\Sigma} = \text{diag}_{3 \times 4}(\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2, \tilde{\sigma}_3)$ , 其中  $\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3 \in \mathbb{R}^3, \tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \tilde{v}_3, \tilde{v}_4 \in \mathbb{R}^4, \tilde{\sigma}_1 \geq \tilde{\sigma}_2 \geq \tilde{\sigma}_3 \geq 0$ .

$k = 0$ : 注意到  $\{M \in \mathbb{R}^{3 \times 4} : \text{rk}(M) \leq 0\} = \{0_{3 \times 4}\}$ . 记  $A_0 := 0_{3 \times 4}$  并有  $\gamma_0 = \|A^T\|_2 = \tilde{\sigma}_1 = 18$

$k = 1$ : 利用 Eckhart-Young-Mirsky 定理,

$$A_1 = \tilde{\sigma}_1 \tilde{u}_1 \tilde{v}_1^T = 18 \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -6 & -6 & -6 \\ 6 & 6 & 6 & 6 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

并有  $\gamma_1 = \|A^T - A_1\|_2 = \tilde{\sigma}_2 = 6$ .

$k \geq 2$ : 因为  $\text{rank}(A^T) = 2$ , 记  $A_k := A^T$ , 对任意  $k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$  都有  $\gamma_k = 0$ .

### 习题 3.

(i) 假设  $A$  可逆, 根据  $A$  的 SVD 结果给出  $A^{-1}$  的 SVD 分解 (提示:  $Av_i = \sigma_i u_i \forall i \in \{1, \dots, n\}$ )

(ii) 假设  $Q$  是正交阵. 给出  $Q$  的 SVD 分解及其奇异值

(iii) 假设  $A = QBQ^T$ , 其中  $Q$  是正交阵, 说明  $A$  和  $B$  有相同奇异值

**解.** (i) 记  $A$  的 SVD 分解为

$$A = U\Sigma V^T = (u_1 | \dots | u_n) [\text{diag}_{n \times n}(\sigma_1, \dots, \sigma_n)] (v_1 | \dots | v_n)^T$$

其中  $U, V \in \mathbb{R}^{n \times n}$  正交,  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n \geq 0$ . 因为  $A$  可逆, 有  $\text{rank}(A) = n, \sigma_i > 0, \forall i \in \{1, \dots, n\}$ . 又由  $A = U\Sigma V^T$  有  $Av_i = \sigma_i u_i \forall i \in \{1, \dots, n\}$ , 因此  $A^{-1}u_i = A^{-1}\left(\frac{1}{\sigma_i}Av_i\right) = \frac{1}{\sigma_i}v_i$  (其中  $\frac{1}{\sigma_n} \geq \dots \geq \frac{1}{\sigma_2} \geq \frac{1}{\sigma_1} > 0$ ) 故

$$A^{-1} = (v_n | \dots | v_2 | v_1) \left[ \text{diag}_{n \times n} \left( \frac{1}{\sigma_n}, \dots, \frac{1}{\sigma_2}, \frac{1}{\sigma_1} \right) \right] (u_n | \dots | u_2 | u_1)^T = (VP) (P\Sigma^{-1}P) (UP)^T,$$

记  $P := (e_n | \cdots | e_2 | e_1) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . (由于  $PP^T = P^2 = I_n$ ,  $P$  是正交阵, 且  $VP, UP$  是正交阵.)

(ii) 由于  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  正交,  $Q = QI_nI_n^T$  即  $Q$  的  $SVD$  分解. 显然, 所有奇异值为 1.

(iii) 记  $B$  的  $SVD$  分解为  $B = U\Sigma V^T$ , 则  $A = QBQ^T = QU\Sigma V^TQ^T = (QU)\Sigma(QV)^T$ . 显然  $A$  和  $B$  有相同奇异值.