温兆和，10205501432，数学基础作业10.

1. 证：(i). 一方面：$f(a,b,c)=f(a,b|c)f(c)$

另一方面，由于 $P\in M(G)$，故 $f(a,b,c)=f(c)f(a|c)f(b|c)$

故 $f(a,b|c)=f(a|c)f(b|c)$

故 $A \perp\!\!\!\perp B|C$.

(ii) 由于 $P\in M(G)$，$f(b|a,c)=f(b|c)$.

故 $A \perp\!\!\!\perp B|C$.

(iii) 一方面：$f(a,b,c)=f(a,b)f(c|a,b)$

另一方面，由于 $P\in M(G)$，故 $f(a,b,c)=f(a)f(b)f(c|a,b)$.

故 $f(a,b)=f(a)f(b)$

故 $A \perp\!\!\!\perp B|\emptyset$

2. 解：对于1：$f'(x)=e^x$.

故对 $\forall x,y\in R$，有 $(f'(x)-f'(y))(x-y)=(e^x-e^y)(x-y)$.

由于 e^x 随 x 单调递增，故 $(f'(x)-f'(y))(x-y)\geq 0$.

故 $f(x)$ 为凸函数

对于2：由于所有范数满足三角不等式，它们都是凸函数

又：逐点求最大值是保凸运算，故 $f(x)$ 是凸函数.

对于3：$f'(x)=\sin x$.

故对 $\forall x,y\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$，有 $(f'(x)-f'(y))(x-y)=(\sin x-\sin y)(x-y)$

由于 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 上 $\sin x$ 随 x 单调递增，故 $(f'(x)-f'(y))(x-y)\geq 0$.

故 $f(x)$ 为凸函数.

3. 证：令 $f(x)=-\log(\Phi(x))$

$f'(x)=-\frac{1}{\Phi(x)}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

$$f''(x)=\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\right)^2+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}x\Phi(x)}{\Phi^2(x)}$$

只需证 $e^{-\frac{x^2}{2}}+x\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{u^2}{2}}du\geq 0$ 即可.

令 $h(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}+x\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{u^2}{2}}du$.

由于 $h'(x)=\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{u^2}{2}}du\geq 0$. 故 $h(x)$ 单调递增.

又 $\lim\limits_{x\to-\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}+\lim\limits_{x\to-\infty}x\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{u^2}{2}}du$

$=0+\lim\limits_{x\to-\infty}-x^2e^{-\frac{x^2}{2}}=0+0=0$

故 $h(x)>0$ 恒成立.

故: $f''(x)\geq 0$. $f(x)$ 是凸函数. $\log(\Phi(x))=-f(x)$ 是凹函数.

4. 解: (i). 考虑 $yx+\log x$. 当 $y\geq 0$. 该式可取到无穷大.

当 $y<0$: 对 x 求得: $y+\frac{1}{x}=0$. $x=-\frac{1}{y}$.

故此时 $yx+\log x=y\cdot(-\frac{1}{y})+\log(-\frac{1}{y})=\log(-\frac{1}{y})-1$

故. $f^*(y)=\log(-\frac{1}{y})-1$. $y<0$.

(ii). 考虑: $yx-e^x$: 对 x 求导: $y-e^x=0$.

故 $y=e^x$. $x=\ln y$

故 $yx-e^x$ 所能取到的最大值为 $y\ln y-y$

由于 $x\in R$. 故 $y\geq 0$ (规定 $0\ln 0=0$)

故 $f^*(y)=y\ln y-y$. $y\geq 0$.