温旭和 10205501432 数学基础作业5

1. 解：令 $L=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ $U=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 0 & -3\end{pmatrix}$ $b=\begin{pmatrix}5\\ 3\end{pmatrix}$

由于 $Ax=b$ 且 $A=LU$，

故 $LUx=b$.

由于 L、U 显然非奇异，

故 $x=U^{-1}L^{-1}b=\begin{pmatrix}-\frac{13}{6}\\ \frac{7}{3}\end{pmatrix}$

2. 解：当 A 的某一阶顺序主子式不为0. A 都不能进行 LU 分解，如教材中提到的 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 1 & 2 & 1\\ 0 & 2 & 0\end{pmatrix}$

此时 ~~求~~ $Ax=b$ 的解不可能像上题中一样表示成 $x=U^{-1}L^{-1}b$ 的形式。

我们可以在给A左乘一个 $P=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$ ~~使得P~~ 使A的第二行与第三行互换，从而可以 LU 分解：

令 $PA=LU$，由于 P 显然非奇异，

故 $A=P^{-1}LU$.

由 $Ax=b$. $P^{-1}LUx=b$. 又 L、对角元为1、U、非奇异

于是，我们就可以得到 $Ux=L^{-1}Pb$.

3. 解：对系数矩阵进行QR分解：

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{6} & \sqrt{6} & \frac{7}{\sqrt{6}} \\ 0 & \sqrt{3} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

由于 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$，令上面三个矩阵分别为$A,Q,R$

则 $QRx = b$. 由于Q为对称正交阵.

$Rx = Q^T b$.

又 $R = \begin{pmatrix} \sqrt{6} & \sqrt{6} & \frac{7}{\sqrt{6}} \\ 0 & \sqrt{3} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ 非奇异,

故 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{6} & \sqrt{6} & \frac{7}{\sqrt{6}} \\ 0 & \sqrt{3} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$