温兆和 10205501432，数学基础作业11

1、解：(1). 该最优化问题等价于

$$\min \quad f(x) = -(x-3)^2$$

$$\text{s.t.} \quad 1-x \le 0$$

$$x-5 \le 0$$

KKT条件：原始约束：$1-x^* \le 0$　$x^*-5 \le 0$

对偶约束：$u_i^* \ge 0$　$i=1,2$

互补松弛：$u_1^*(1-x^*)=0$　$u_2^*(x^*-5)=0$

稳定性条件：$-2(x^*-3)-u_1^*+u_2^*=0$

求解：由于该问题符合 Slater 条件，求解 求解原问题等价于求解KKT条件，解得：$(x^*, u_1^*, u_2^*) = (3,0,0), (1,4,0)$ 或 $(5,0,4)$

由于当 x^*, u^* 分别为原始问题和对偶问题的解，其必满足KKT条件，且当 $x^*=1$ 或 5 时 $f(x)$ 最小，故解为 $x^*=1$ 或 5.

(2). KKT条件：原始约束：$1-x^* \le 0$　$x^*-5 \le 0$

对偶约束：$u_i^* \ge 0$　$i=1,2$

互补松弛：$u_1^*(1-x^*)=0$　$u_2^*(x^*-5)=0$

稳定性条件：$2(x^*-3)-u_1^*+u_2^*=0$

求解：KKT方程组的解为 $(3,0,0)$ $(5,0,-4)$ $(1,-4,0)$

当 $x^*=3$ 时 $f(x)$ 最小，故解为 $x^*=3$

2、解：KKT条件：原始约束：$Gx^*=h$.

对偶约束、互补松弛：无.

稳定性条件：$A^T(Ax^*-b)+G^Tv^*=0$

其最优解可表示为方程组

$$\begin{pmatrix} A^TA & G^T \\ G & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^* \\ v^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^Tb \\ h \end{pmatrix}$$ 的解.

3. 解:证:求矩阵的2范数相当于求解最优化问题

$$\max \|Ax\|_2^2$$
$$s.t.\ \|x\|_2=1.\ x\in \mathbb{R}^n.$$

等价于 $\max\ x^TA^TAx$

$$s.t.\ x^Tx=1.\ x\in\mathbb{R}^n$$

设 $A^TAx=\lambda x$ 则该问题等价于

$$\max\ \lambda x^Tx$$
$$s.t.\ x^Tx=1.\ A^TAx=\lambda x.\ x\in\mathbb{R}^n.$$

即 $\max\ \lambda$

$$s.t.\ A^TAx=\lambda x.$$

故:求矩阵A 2范数相当于最大化 A^TA 特征值.

又:作拉格朗日函数 $L=x^TA^TAx+v(1-x^Tx)$.

令 $\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x}=2A^TAx-2vx=0 \\ \frac{\partial L}{\partial v}=1-x^Tx=0. \end{cases}$

故: A^TA ~~的最大特征值满足该最优化~~ 最大化 $\|Ax\|$ 的解 (x,v) 一定是 A^TA 的特征值、特征向量. 我们只需最大化 v 即可. ($A^TAx=vx \Leftrightarrow x^TA^TAx=\|Ax\|_2^2=vx^Tx=v$).

故: $\|A\|_2^2$ 是 A^TA 的最大特征值.

4. 解:该问题等价于解最优化问题 $\min\ \frac{1}{2}\|x\|_2^2.$

$$s.t.\ Ax=b.$$

KKT条件：$x+A^Tv=0.\quad Ax=b.$

相当于求解线性方程组：$\begin{pmatrix} I & A^T \\ A & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I & A^T \\ A & 0 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}.$$

由分块矩阵求逆公式. $x=A^T(AA^T)^{-1}b.$

5.解：$x^{(0)}=(2,2,1)$

$\nabla f(x^{(0)})=(4.\ 4,\ 2)$

$p^{(0)}=-\nabla f(x^{(0)})=(-4,\ -4,\ -2)$

求解：$\min_{\lambda} f(2-4\lambda,\ 2-4\lambda,\ 1-2\lambda)$

$\Leftrightarrow$ 求解 $\min_{\lambda} 9(1-2\lambda)^2,$

故：$\lambda=\frac{1}{2}.$

$x^{(1)}=x^{(0)}+\lambda p^{(0)}=(0.0.0)$

$\nabla f(x^{(1)})=(0.0.0)$

$p^{(1)}=-\nabla f(x^{(1)})=(0.0.0).$

求解：$\min_{\lambda} f(0.\ 0.\ 0)$

λ 取任意值. f 均为 0.

故 $x^{(2)}=x^{(1)}+\lambda p^{(1)}=(0.0.0)$

此时：$(f(x^{(n+1)})-f(x^{(n)}))<0.001$ 首次被满足，迭代停止.

故 $x=(0.0.0)$ 是该优化问题的解.

6.解：$\frac{\partial f}{\partial x_1}=2(x_1-1)$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 32(x_2-2)$$

$$\nabla f(x^{(0)}) = (2,32)^T.$$

$$x^{(1)} = x^{(0)} - l\nabla f(x^{(0)}) = (2,3)^T - (0.02, 0.32)^T$$
$$= (1.98, 2.68)^T.$$

$$\nabla f(x^{(1)}) = (1.96, 21.76).$$

$$x^{(2)} = x^{(1)} - l\nabla f(x^{(1)}) = (1.98, 2.68)^T - (0.0196, 0.2176)^T$$
$$= (1.9604, 2.4624)$$

7. 解：$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 6x_1 - 2x_1x_2,\quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 6x_2 - x_1^2,$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = 6x_2 - x_1^2,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_2} = -2x_1 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = 6.$$

故 $\Delta x_{nt} = -\begin{pmatrix} 6-2x_2 & -2x_1 \\ -2x_1 & 6 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 6x_1 - 2x_1x_2 \\ 6x_2 - x_1^2 \end{pmatrix}$

其余部分见代码.

8. 解：从 $x^{(0)} = (-2,4)^T$ 开始，取 $\bar{H}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\nabla f(x) = [(6x_1 - 2x_2 - 4), (2x_2 - 2x_1)]^T.$$

$$\nabla f(x^{(0)}) = (-24, 12)^T.$$

$$p^{(0)} = -\bar{H}^{(0)}\nabla f(x^{(0)}) = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -24 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ -12 \end{pmatrix}$$

一维搜索：$\min_l f(x^{(0)} + lp^{(0)})$. 得；

$$l_0 = \frac{5}{17}$$

故 $x^{(1)} = x^{(0)} + l_0 p^{(0)} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} + \frac{5}{17}\begin{pmatrix} 24 \\ -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{86}{17} \\ \frac{8}{17} \end{pmatrix}$

是该二次函数的近似极小点。

9. 解：$x^{(0)} = (2, 0)$　$M_1 = 1$

求 $x^{(1)} = \underset{x}{\operatorname{argmin}} \frac{1}{3}(x_1+1)^3 + x_2 + [\min(x_1-1, 0)]^2 + [\min(x_2, 0)]^2$.

得：$x^{(1)} = (1, 0)$

由于 $f_1(x^{(1)}) = 0$. $f_2(x^{(1)}) = 0$ 停止迭代.

$x_{min} = (1, 0)$.

10. 解：教材上构造了倒数障碍函数。这里试图构造对数障碍函数

$$\bar{P} = \frac{1}{3}(x_1+1)^3 + x_2 - r\log(x_1-1) - r\log(x_2).$$

对 $\bar{P}$ 最小化：$\begin{cases} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_1} = (x_1+1)^2 - \frac{r}{x_1-1} = 0 \\ \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_2} = 1 - \frac{r}{x_2} = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} (x_1+1)^2(x_1-1) = r \\ x_2 = r. \end{cases}$

~~$\Rightarrow \begin{cases} (x_1+1)^3 = ? \end{cases}$~~ 当 $r \to 0$：$\begin{cases} x_1 \to 1 \text{ 或 } -1 \\ x_2 \to 0 \end{cases}$

由于 $1 - x_1 \leq 0$；x_1 只能趋向于 1，

故 $x_{min} = (1, 0)^T$.

相比之下，还是构造倒数障碍函数更好。