温兆和. 10205501432. 数学基础作业1

1、证明：非负性：$\max_{i,j}|a_{ij}| \geq 0$ 且 $\max_{i,j}|a_{ij}|=0$ 当且仅当 $A=0$.
满足非负性.

齐次性：对 $\forall \lambda \in R$，有 $\|\lambda A\|_{m\infty} = \max_{i,j}|\lambda a_{ij}|$
$=|\lambda|\max_{i,j}|a_{ij}| = |\lambda|\,\|A\|_{m\infty}$.
满足齐次性.

三角不等式：$\forall A, B \in R^{m\times n}$，有
$\|A+B\|_{m\infty} = \max_{i,j}|a_{ij}+b_{ij}| \leq |a_{ij}|+|b_{ij}|$
$\leq \max_{i,j}|a_{ij}| + \max_{i,j}|b_{ij}|$
满足三角不等式.

综上由 $\|A\|_\infty$ 定义的 $\|\cdot\|_{m\infty}$ 是 $R^{m\times n}$ 上的(广义)矩阵范数.

2、解：先考虑 A_1 矩阵

$\|A_1\|_1 = \max_{1\leq j\leq 2}\sum_{i=1}^{2}|a_{ij}| = \max\{|1|+|1|, |2|+|0|\} = 2.$

$A^TA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$

设 $|\lambda E - A^TA| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -2 \\ -2 & \lambda-4 \end{vmatrix} = 0.$

解得 $\lambda = 3\pm\sqrt{5}$.

故 $\|A_1\|_2 = \sqrt{\lambda_{max}(A^TA)} = \sqrt{3+\sqrt{5}}$.

$\|A_1\|_\infty = \max_{1\leq i\leq 2}\sum_{j=1}^{2}|a_{ij}| = \max\{|1|+|2|, |1|+|0|\} = 3.$

再考虑 A_2 矩阵.

$\|A_2\|_1 = \max_{1\leq j\leq 2}\sum_{i=1}^{2}|a_{ij}| = \max\{|-1|+|1|, |0|+|2|\} = 2.$

$A^TA = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$

故 $\|A_2\|_2 = \sqrt{3+\sqrt{5}}$.

$\|A_2\|_\infty = \max\limits_{1\le i\le 2} \sum\limits_{j=1}^{2} |a_{ij}| = \max\{|-1|+|0|, |1|+|2|\} = 3$.

4.(1). 证：由于 $\|A\|_1 = \sup\limits_{\|x\|_p=1} \|Ax\|_p$.

令 $A = (a_1 \dots a_n)$. $\|a_{j_0}\|_1 = \max\limits_j \|a_j\|_1 = \delta$.

对 $\forall x \in R^n$. $\|x\|_1 = 1$. 有：

$\|Ax\|_1 = \|\sum\limits_{j=1}^{n} x_j a_j\|_1 \le \sum\limits_{j=1}^{n} \|x_j a_j\|_1 = \sum\limits_{j=1}^{n} |x_j| \|a_j\|_1$

$\le \sum\limits_{j=1}^{n} |x_j| \|a_{j_0}\|_1 = \|a_{j_0}\|_1 \sum\limits_{j=1}^{n} |x_j|$.

$= \|a_{j_0}\|_1 \cdot 1 = \delta$.

令 $e_{j_0} \in R^n$. 第 j_0 个元素为1. 其余元素为0.

则 $\|e_{j_0}\|_1 = 1$ 且. $\|A e_{j_0}\|_1 = \|a_{j_0}\|_1 = \delta$.

故. $\exists\, x = e_{j_0}$. s.t. $\|x\|_1 = 1$ 且 $\|Ax\|_1 = \delta$.

综上. $\|A\|_1 = \max\limits_j \|a_j\|_1 = \max\limits_j \sum\limits_{i=1}^{m} |a_{ij}|$

设 $\eta = \max\limits_i \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$. 对 $\forall\, x \in R^n$. $\|x\|_\infty = 1$. 有.

$\|Ax\|_\infty = \sup\limits_{\|x\|_\infty=1} \|Ax\|_\infty = \max\limits_i |\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j|$

$\le \max\limits_i \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij} x_j| = \max\limits_i \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}||x_j|$.

由于 $\sum\limits_{j=1}^{n} |x_j| = \|x\|_1 = 1$ 且 诸 $|x_j| \ge 0$

故 诸 $|x_j| \le 1$. 故 $\|Ax\|_\infty \le \max\limits_i \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}| = \eta$,

令 $\eta = \max\limits_i \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}| = \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{kj}|$.

令：$x_0 = (\mathrm{sgn}(a_{k1}) \dots \mathrm{sgn}(a_{kn}))^T$ $\mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$

则由于 $A \ne 0$. $\sum\limits_{j=1}^{n} |a_{kj}|$ 是最大行和,必有非零元.

故 $\|x_0\|_\infty = 1$.

且 $\|Ax_0\|_\infty = \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{kj}| = \eta$.

故：$\exists\, x = x_0$. $\|x\|_\infty = 1$, s.t. $\|Ax\|_\infty = \eta$.

故 $\|A\|_\infty = y = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$

(2). 1-范数为最大列和，而 l_1 范数为所有列和之和。

故有：$\|A\|_{l_1} \le n\|A\|_1$.

JJ