温兆和 1020550143Z. 数学基础作业2.

1 ~~解~~证:(i). 证: $A^T = \begin{pmatrix} M^T & (MP)^T \\ (PM)^T & (PMP)^T \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} M^T & P^T M^T \\ M^T P^T & P^T M^T P^T \end{pmatrix}$

$\underline{\underline{M.P对称}} \begin{pmatrix} M & PM \\ MP & PMP \end{pmatrix} = A.$

(ii) $\|UDV\|_2 = \sqrt{\lambda_{max}((UDV)^T UDV)}$

$= \sqrt{\lambda_{max}(V^T D^T U^T UDV)}$

$= \sqrt{\lambda_{max}(V^T D^T DV)}$ (U 正交)

$= \sqrt{\lambda_{max}(V^{-1} D^T DV)}$ (V 正交).

由于 $V^T D^T DV$ 等 $V^{-1} D^T DV$ 与 $D^T D$ 相似. 故其与 $D^T D$ 有相同的特征值和相同的迹.

故 $\|UDV\|_2 = \sqrt{\lambda_{max}(V^T D^T DV)} = \sqrt{\lambda_{max}(D^T D)} = \|D\|_2.$

$\|UDV\|_F = \sqrt{Tr(V^T D^T DV)} = \sqrt{Tr(D^T D)} = \|D\|_F.$

(iii). $A^T A = \begin{pmatrix} M^2 + PM^2P. & MPM + PMPMP \\ MPM + PMPMP. & MP^2M + PMP^2MP \end{pmatrix}_{2n \times 2n}$

$\|A_F\| = \sqrt{Tr(A^T A)} = \sqrt{Tr(M^2 + PM^2P + MP^2M + PMP^2MP)}$

由(ii)结论: $Tr(PM^2P) = Tr(M^2)$

由于 P 是对称正交阵. ~~Tr~~ $(P)^2 = E$.

$Tr(MP^2M) = Tr(M^2)$ $Tr(PMP^2MP) = Tr(PM^2P) = Tr(M^2)$.

又 M 是对称阵. $M^2 = M^T M$

故 $\|A_F\| = \sqrt{Tr(M^2 + PM^2P + MP^2M + PMP^2MP)}$

$= \sqrt{Tr(M^2) + Tr(PM^2P) + Tr(MP^2M) + Tr(PMP^2MP)}$

$= \sqrt{Tr(M^2) + Tr(M^2) + Tr(M^2) + Tr(M^2)}$

$= \sqrt{4 Tr(M^T M)} = 2\|M\|_F$.

由于算子范数满足相容性，且

~~故~~ $\cancel{\|A}$ $A = \begin{pmatrix} E \\ P \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} E & P \end{pmatrix}$

故 $\|A\|_2 \leq \left\| \begin{pmatrix} E \\ P \end{pmatrix} \right\|_2 \|M\|_2 \, \|(E \ \ P)\|_2$.

其中 ~~由于~~ $\left\| \begin{pmatrix} E \\ P \end{pmatrix} \right\|_2 = \sqrt{\lambda_{max}\left((E \ \ P) \begin{pmatrix} E \\ P \end{pmatrix} \right)} = \sqrt{\lambda_{max}(2E)}$

$= \sqrt{2}$

$\|(E \ \ P)\|_2 = \sqrt{\lambda_{max}\left(\begin{pmatrix} E \\ P \end{pmatrix} (E \ \ P) \right)} = \sqrt{\lambda_{max} \begin{pmatrix} E & P \\ P & E \end{pmatrix}}$

由于 $\begin{pmatrix} E & P \\ P & E \end{pmatrix}$ ~~为实对称阵，一~~ 特征值不超过2.

故 $\cancel{\|A\|_2 \leq 2\|M\|_2}$, $\|(E \ \ P)\|_2 \leq \sqrt{2}$.

故 $\|A\|_2 \leq 2\|M\|_2$,

(c). 此时 $A = \begin{pmatrix} -2 & & & & & & & 0 \\ & 1 & & & & & 0 & \\ & & 0 & & & 1 & & \\ & & & 0 & -2 & & & \\ & & & -2 & 0 & & & \\ & & 1 & & & 0 & & \\ & 0 & & & & & 1 & \\ 0 & & & & & & & -2 \end{pmatrix}$

$\|A\|_p = \max_{x \in R^8} \left\{ \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p} \right.$

$$= \max \sqrt[p]{\frac{2^p(|a_1|^p+|a_4|^p+|a_5|^p+|a_8|^p)+|a_2|^p+|a_3|^p+|a_6|^p+|a_7|^p}{\sum_{i=1}^{8}|a_i|^p}} \quad 诸 a_i\in R$$

仅当 $a_2=a_3=a_6=a_7=0$，$\frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p}$ 取最大值 2，

故对 $\forall p\in[1,+\infty)$，有 $\|A\|_p=2$.

2、证：(i) 由于 P 为投影矩阵，$P^2=P$.

故 $P(p_1\cdots p_n)=(p_1\cdots p_n)$

故 $\forall i\in[1,n]\cap Z$，$Pp_i=p_i$

对 $\forall y\in R(P)$ 设 $y=\sum_{i=1}^{n}a_ip_i$ 诸 $a_i\in R$

$Py=a_1Pp_1+\cdots+a_nPp_n$

$=a_1p_1+\cdots+a_np_n=y$

$P(Px-x)=P^2x-Px$

$=B(B^TB)^{-1}B^TB(B^TB)^{-1}B^Tx-B(B^TB)^{-1}B^Tx$

$=B(B^TB)^{-1}B^Tx-B(B^TB)^{-1}B^Tx=0.$

其中：B 是子空间的基底.

则故 $Px-x\in N(P)$.

(ii) 由于 $P^2=P$. 设 $Px=\lambda x$.

则 $Px=\lambda Px=\lambda^2x=\lambda x$

$\Leftrightarrow \lambda^2-\lambda=0 \Leftrightarrow \lambda=0$ 或 1.

当 $\lambda=0$：$(0-P)x=0 \Leftrightarrow -Px=0 \Leftrightarrow Px=0$.

基础解系 $(v_{r+1}\dots v_n)$

当 $\lambda=1$：$(E-P)x=0 \Leftrightarrow Px=x$.

基础解系 $(u_1\dots u_r)$

故有

$X=(u_1 \dots u_r\ v_{r+1} \dots v_n)$, s.t. $X^{-1}PX=D$.

$D=\text{diag}(\underbrace{1 \dots 1}_{r\text{个}1},\ \underbrace{0 \dots 0}_{n-r\text{个}0})$.

由于上式中 $D\sim P$，故 $\text{tr}\,P=\text{tr}\,D=\sum_{i=1}^{r}1=r=\text{rank}(P)$.

(iii). ~~假设 $\exists P\in\mathbb{R}^{n\times n}$ / $\{0\}$, s.t. $P^2=P$ 且当 $P\neq I_n$, $|P|=1$~~

由于 $P^2=P$. 故 $|P|^2=|P||P|=0$ 或 1.

假设 $\exists P\in\mathbb{R}^{n\times n}$ / $\{0\}$, s.t. $P^2=P$ 且 $P\neq I_n$ 时 $|P|=1$.

由于 $|P|\neq 0$. P 可逆. 又 $\because P^2=P$

故 $P^{-1}P^2=P^{-1}P \Leftrightarrow P=I_n$ 矛盾！故假设不真.

故当 $P\neq I_n$, $|P|=0$.

(iv). 由于 $P^2=P=P^T$. $(I_n-2P)(I_n-2P)^T$

$=(I_n-2P)(I_n-2P)=I_n-4P+4P^2=I_n-4P+4P=I_n$.

故，此时 I_n-2P 是正交矩阵.

(v). $P^2=A(A^TA)^{-1}A^TA(A^TA)^{-1}A^T=A(A^TA)^{-1}A^T=P$.

$P^T=(A(A^TA)^{-1}A^T)^T=A((A^TA)^{-1})^TA^T=A((A^TA)^T)^{-1}A^T$

$=A(A^TA)^{-1}A^T=P$.

故 $P^2=P=P^T$. P 是正交投影矩阵.

由~~题意~~于 $P=A(A^TA)^{-1}A^T$. $A\in\mathbb{R}^{n\times m}$ 且 $\text{rank}(A)=m$.

故此时 A 为子空间有序基底.

设 $A=(a_1 \dots a_m)$ 则 $\mathcal{R}(P)=\text{span}(a_1 \dots a_m)$

故 $\text{rank}(P)=m$.