数据科学与工程数学基础

作业提交规范及第 6 次作业

教师：黄定江

助教：陈诺、刘文辉

2022 年 11 月 4 日

作业提交规范

1. 作业提交形式：**使用 Word 或 LaTeX 编写所得到的电子文档**。若使用 Word 编写，将其另存为 PDF 形式，然后提交 PDF 文档。若使用 LaTeX 编写，将其编译成 PDF 形式，然后提交 Tex 和 PDF 两个文档。
2. 作业命名规范：提交的电子文档必须命名为："**学号 _ 姓名**"。命名示例：10175501112_ 陈诺。
3. 作业提交途径：点击打开每次作业的传送门网址：**第 6 次作业提交传送门**，无需注册和登录，直接上传作业文档即可。注意：传送门将会在截至时间点到达后自动关闭。
4. 作业更改说明：如果需要修改已经提交的作业，只要在截至日期前，再次上传更改后的作业（切记保持同名），即可覆盖已有作业。
5. 作业评分说明：正常提交作业的按照实际评分记录；逾期补交作业的根据逾期情况在实际评分基础上酌情扣分；未交作业的当次作业记为 0 分。

第 6 次作业

提交截至时间：**2022/11/14 周一 12:00（中午）**

理论部分

习题 1. 设 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 用正规化方法求对应的 LS 问题的解。

解. 该 LS 问题的解就是下列正规化方程组的解：

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{b}$$

即

$$\begin{bmatrix} 35 & 44 \\ 44 & 56 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 12 \end{bmatrix}$$

解得：$\boldsymbol{x} = (-1, 1)^T$ 对于非满秩的 A，也可以先行变换后消去多余行再对 LS 问题求解。

习题 2. 设 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 用任意一种方法求对应的 LS 问题的全部解。

解. 该 LS 问题的解就是下列正规化方程组的解:

$$\begin{bmatrix} 6 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 9 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \\ \boldsymbol{x}_3 \\ \boldsymbol{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

初等行变换得到同解方程组

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 15 & 5 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \\ \boldsymbol{x}_3 \\ \boldsymbol{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

从而

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \boldsymbol{x}_3 - \boldsymbol{x}_4 \\ 2 - 5\boldsymbol{x}_3 - 5\boldsymbol{x}_5 \end{bmatrix}$$

即

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{2}{15} - \frac{1}{3}\boldsymbol{x}_3 - \frac{1}{3}\boldsymbol{x}_4 \end{bmatrix}$$

其中 $\boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4 \in R$

习题 3. 设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 且存在 $\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^{n\times m}$ 使得对每一个 $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m, \boldsymbol{x} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{b}$ 均极小化 $\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}\|_2$. 证明 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$ 和 $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{X})^T = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$.

证明. 由 $\boldsymbol{b}$ 的任意性, 取 $\boldsymbol{b}$ 分别为 $\boldsymbol{A}$ 的每一列 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$, 则显然, 若 $\boldsymbol{x}$ 极小化 $\|\boldsymbol{Ax}-\boldsymbol{a}_i\|_2$, $\boldsymbol{x}$ 可以取第 i 个元素为 1, 其余元素为 0 的向量, 因此 $\boldsymbol{X}$ 使得 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Xa}_i$ 最小化的 $\|\boldsymbol{AXa}_i-\boldsymbol{a}_i\|_2=0$, 这样 $\boldsymbol{AXa}_i=\boldsymbol{a}_i$, 即

$$\boldsymbol{AXA}=\boldsymbol{A}$$

因为对每一个 $\boldsymbol{b}\in\mathbb{R}^m$,$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Xb}$ 均极小化 $\|\boldsymbol{Ax}-\boldsymbol{b}\|_2$。有 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AXb}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$。

由于 $\boldsymbol{b}$ 的任意性，有 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，等式两边同时乘以 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}$，有

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$$

即

$$(\boldsymbol{AX})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{AX})=(\boldsymbol{AX})^{\mathrm{T}}$$

所以

$$\boldsymbol{AX}=(\boldsymbol{AX})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{AX})=(\boldsymbol{AX})^{\mathrm{T}}$$

证毕。 □

习题 4. 利用等式

$$\|\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}+\alpha\boldsymbol{w})-\boldsymbol{b}\|_2^2=\|\boldsymbol{Ax}-\boldsymbol{b}\|_2^2+2\alpha\boldsymbol{w}^T\boldsymbol{A}^T(\boldsymbol{Ax}-\boldsymbol{b})+\alpha^2\|\boldsymbol{Aw}\|_2^2$$

证明：如果 $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{X}_{LS}$, 那么 $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{b}$

解. 设 $f(\alpha)=\|\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}+\alpha\boldsymbol{w})-\boldsymbol{b}\|_2^2$，由于 $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{X}_{LS}$，说明当 $\alpha=0$ 时，函数取极小点。由于 f 是关于 α 的二次函数，故在 $\alpha=-\frac{2\boldsymbol{w}^T\boldsymbol{A}^T(\boldsymbol{Ax}-\boldsymbol{b})}{2\alpha^2\|\boldsymbol{Aw}\|_2^2}$ 取得极值点。代入 $\alpha=0$，有

$$\boldsymbol{w}^T\boldsymbol{A}^T(\boldsymbol{Ax}-\boldsymbol{b})=0$$

又由于 $\boldsymbol{w}$ 的任意性，有

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{b}$$

习题 5.

$$A:=\begin{pmatrix}5&-1&1\\-1&2&0\\1&0&3\end{pmatrix}$$

记 $\Lambda(A)=\{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\}\subseteq\mathbb{C}$ *with* $|\lambda_1|\geq|\lambda_2|\geq|\lambda_3|$.

(i) 使用 *Gerschgorin* 圆盘定理, 证明 $\frac{|\lambda_1|}{|\lambda_3|}\leq 7$.（注：由于 A 为对称矩阵，$\frac{|\lambda_1|}{|\lambda_3|}$ 为 A 的条件数）

(ii)（编程题，提交代码）使用幂法与反幂法计算 $\frac{|\lambda_1|}{|\lambda_3|}$

解. *(i)* 令 $a\in\mathbb{C}$, $r\in\mathbb{R}$, $r>0$, 记 $D(a,r):=\{z\in\mathbb{C}:|z-a|\leq r\}\subseteq\mathbb{C}$. 对 A 和 A^{T} 使用 *Gerschgorin* 圆盘定理，有 $\Lambda(A)=\Lambda\left(A^{\mathrm{T}}\right)\subseteq\tilde{G}_1\cup\tilde{G}_2\cup\tilde{G}_3$，其中

$$\tilde{G}_1:=D(5,2),\tilde{G}_2:=D(2,1),\tilde{G}_3:=D(3,1)$$

可得 $|\lambda_1|\leq 7$, $|\lambda_3|\geq 1$. 故 $\frac{|\lambda_1|}{|\lambda_3|}\leq 7$.

(ii) $\frac{|\lambda_1|}{|\lambda_3|}\approx 3.4823$