温祉和 10205501432. 数学基础作业6

1. 解: $A^TA = \begin{pmatrix} 35 & 44 \\ 44 & 56 \end{pmatrix}$ $A^Tb = \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \end{pmatrix}$

问题转化为求解线性方程组 $A^TAx = A^Tb$

$$A^TA = \begin{pmatrix} \sqrt{35} & 0 \\ \frac{44}{\sqrt{35}} & \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{35}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{35} & \frac{44}{\sqrt{35}} \\ 0 & \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{35}} \end{pmatrix}$$

先解: $\begin{pmatrix} \sqrt{35} & 0 \\ \frac{44}{\sqrt{35}} & \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{35}} \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \end{pmatrix}$ 得 $y = \begin{pmatrix} \frac{9}{\sqrt{35}} \\ \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{35}} \end{pmatrix}$

再解: $\begin{pmatrix} \sqrt{35} & \frac{44}{\sqrt{35}} \\ 0 & \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{35}} \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} \frac{9}{\sqrt{35}} \\ \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{35}} \end{pmatrix}$ 得 $x = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

故: $x_{LS} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

2. 解: $A^TA = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 9 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $A^Tb = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

问题转换为求~~解~~解线性方程组 $A^TAx = A^Tb$. 由于这个方程组比较简单,可以直接求解:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 6 & 3 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 9 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{5} \\ 0 & 3 & 1 & 1 & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

得齐次方程组的基础解系为

$x_1 = (0 \ -\frac{1}{3} \ 1 \ 0)^T$. $x_2 = (0 \ -\frac{1}{3} \ 0 \ 1)^T$.

故~~该最小二乘问题的全部解为~~ 非齐次方程组特解为

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

故原方程组的解为 $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3}-\frac{1}{3}k_1-\frac{1}{3}k_2 \\ 1+k_1 \\ \cancel{1}+k_2 \end{pmatrix}$ $k_1\ k_2 \in \mathbb{R}$

即为该最小二乘问题的全部解:

3. 证：由于 $x = Xb$ 最小化 $\|Ax-b\|_2$,

$Xb \in x_{LS}$. 故 $A^TAXb = A^Tb$

$(A^TAX - A^T)b = 0$.

假设 $A^TAX - A^T \neq 0$. 则 $\mathrm{rank}(A^TAX - A^T) > 0$.

则方程组 $(A^TAX-A^T)x=0$ 解空间的维数小于 m

与 b 的任意性不符. 故 $A^TAX - A^T = 0$.

$A^TAX = A^T \iff X^TA^TAX = X^TA^T$

$\iff (AX)^TAX = (AX)^T$

$\iff AX = \left((AX)^T(AX)\right)^T = (AX)^T(AX) = (AX)^T$.

由 $\begin{cases} A^TX^TAX = A^T \\ AX = (AX)^T = X^TA^T \end{cases}$ $A^TX^TA^T = A^T$

故 $(AXA)^T = A^T$. $AXA = A$.

4、解：假设 $x\in X_{LS}$，则当 $\alpha\neq 0$ 时，

$$\|A(x+\alpha w)-b\|_2^2 \geq \|Ax-b\|_2^2.$$

故此时 $\alpha^2\|Aw\|_2^2+2\alpha w^T A^T(Ax-b)\geq 0$.

令 $f(\alpha)=\alpha^2\|Aw\|_2^2+2\alpha w^T A^T(Ax-b)$.

易知：当 $\alpha=0$，$f(\alpha)=0$。由二次函数的性质，

欲使 $\alpha\neq 0$ 时 $f(\alpha)\geq 0$ 只能使抛物线对称轴与y轴重合

故 $-\dfrac{2w^T A^T(Ax-b)}{2\|Aw\|_2^2}=0$

由 α、w 的任意性，必有 $A^T(Ax-b)=0$.

故 $A^TAx=A^Tb$.

5、(1) 证：由盖尔圆盘定理，有

$$|\lambda-5|\leq 2 \Rightarrow 3\leq\lambda\leq 7$$

$$|\lambda-2|\leq 1 \Rightarrow 1\leq\lambda\leq 3$$

$$|\lambda-3|\leq 1 \Rightarrow 2\leq\lambda\leq 4.$$

由于这三个盖尔圆盘连通，故三个特征值都在这三个盖尔圆盘组成的区域中，

故 $\lambda_1\leq 7$，$\lambda_3\geq 1$

故有 $\dfrac{|\lambda_1|}{|\lambda_3|}\leq 7$.

(2) 见代码.