温兆和. 10205501432. 数学基础作业3.

1. 证：考虑关联矩阵的秩.

由于在关联矩阵中每一列只有一个1，一个-1，其余全为0.

故其所有行向量直接相加为零向量

故其秩小于m.

假设关联矩阵中线性相关的最小行数为 $l < m$.

由行向量的线性相关性知，这 l 行组成的矩阵的列向量要么全为0，要么有一个1，一个-1，其余都是0.

现对关联矩阵B进行行、列变换：

将这 l 行调整到B的前 l 行.

将这 l 行组成的矩阵中不为0的列调整到B的左边，为0的列调整到B的右边.

由此得到新的矩阵 $B' = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$

由关联矩阵的定义，对关联矩阵进行行、列变换只是给图中的行、列重新编号. 故B、B'表示相同连通图.

设P尺寸为 $l \times t$. 由B'知：

该图中前t条边只与前 l 个顶点有关，后 $(n-t)$ 条边只与后 $(m-t)$ 个顶点有关，与连通图前提矛盾.

故假设不真！

故在关联矩阵B中，线性相关的最小行数为m.

综上，$rank(B) = m-1$.

由于矩阵的行秩、列秩相等，均等于矩阵的秩，

由行空间、列空间定义：$rank(Col(B)) = rank(Col^T(B)) = m-1$

由线性代数基本定理：$rank(Null(B)) = n - rank(Col^T(B))$

$= n - m + 1.$

$\mathrm{rank}(\mathrm{Null}^{\#}(B^T)) = m - \mathrm{rank}(\mathrm{Col}(B)) = 1.$

由于B的列向量中只有一个1，一个-1，其余元素全为0。

故1必为$Bx=0$的解，又

又$\because \mathrm{rank}(\mathrm{Null}^{\#}(B^T)) = 1$，故$\mathrm{Null}(B^T) = \mathrm{span}\{1\}$

由于图是连通的，从B中每一行都会有一些1或-1。

从B中随便去掉一行，剩下的矩阵的列中会有列只剩一个1(或-1)，其余全为0。故剩下的(m-1)行必线性无关

故$\mathrm{Col}(B^T)$可由B^T任意(m-1)个列向量张成。

在生成树中，每个节点至多有一个父节点，故在其关联矩阵中，每行至多有一个-1，其余全是0或1。

假设T的第一个节点是根结点，它的关联矩阵是这样的：

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccc} a_1 & \cdots & a_i & & \cdots & & a_k \end{array} \\
A = & \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ & & & & & & \\ & & -1 & & & & \\ & & & & & & \end{pmatrix} \\
\end{array}
$$

k_j

~~由于第一行除了0全是1，从有~~ 假设$\exists\, l_1, \ldots, l_k$不全为0。

$\text{s.t. } l_1 a_1 + \cdots + l_k a_k = 0.$

由于A的第一行除了0全是1，$\exists\, l_i < 0$.

假设$a_{1i} = 1$，$a_{ji} = -1$，由于第j行中除了第i列的-1，其余全是0或1，又$l_i \cdot (-1) > 0$.

故$l_1 a_{j1} + \cdots + l_i a_{ji} + \cdots + l_k a_{jk} > 0$

与$l_1 a_1 + \cdots + l_k a_k$矛盾。

故假设不真!
故G的生成树T的关联矩阵的列向量线性无关
故 Col(B) 可由T关联矩阵的(n-1)个列向量生成.

2. 解: $P_\pi = \dfrac{bb^T}{b^Tb} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\end{pmatrix} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\-1 & 1 & -1\\1 & -1 & 1\end{pmatrix}$

$\pi_u(x) = P_\pi x = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\-1 & 1 & -1\\1 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$

4. 解: $\begin{pmatrix}5 & 3 & -1 & 3\\0 & 1 & 1 & -2\\-5 & -3 & 4 & -4\\0 & 1 & 1 & 0\end{pmatrix} \xrightarrow{R_3+R_1} \begin{pmatrix}5 & 3 & -1 & 3\\0 & 1 & 1 & -2\\0 & 0 & 3 & -1\\0 & 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$

$\xrightarrow{R_4-R_2} \begin{pmatrix}5 & 3 & -1 & 3\\0 & 1 & 1 & -2\\0 & 0 & 3 & -1\\0 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$

$L_1 = \begin{pmatrix}1 & & & \\ & 1 & & \\1 & & 1 & \\ & & & 1\end{pmatrix}$ $\quad L_2 = \begin{pmatrix}1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & -1 & & 1\end{pmatrix}$

$L_2 L_1 A = U$ 故 $A = L_1^{-1} L_2^{-1} U$

JI

又. $L_1^{-1}=\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\-1&&1&\\&&&1\end{pmatrix}$ $L_2^{-1}=\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&1&&1\end{pmatrix}$

故 $L=L_1^{-1}L_2^{-1}=\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\-1&&1&\\&1&&1\end{pmatrix}$

故 $A=LU=\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\-1&&1&\\&1&&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5&3&-1&3\\0&1&1&-2\\0&0&3&-1\\0&0&0&2\end{pmatrix}$.

5 证：假设在高斯消去中，从第2行起 ~~每~~ 第i 行都被加上 k_i 倍第1行.

对 $\forall\, i,j=2,\dots,n$. 都有.

$$\begin{cases}a_{ij}'=a_{ij}+k_i a_{1j}\\ a_{ji}'=a_{ji}+k_j a_{1i}\\ k_i=-\dfrac{a_{i1}}{a_{11}}\\ k_j=-\dfrac{a_{j1}}{a_{11}}\end{cases}$$

故 $$\begin{cases}a_{ij}'=a_{ij}-\dfrac{a_{i1}}{a_{11}}a_{1j}\\ a_{ji}'=a_{ji}-\dfrac{a_{j1}}{a_{11}}a_{1i}.\end{cases}$$

由A的对称性, $a_{ij}=a_{ji}$. $a_{i1}=a_{1i}$, $a_{j1}=a_{1j}$.

故对 $\forall\, i,j=2\dots n$. 都有 $a_{ij}'=a_{ji}'$.

故：在高斯消去之后，A_2 仍是对称阵。

6. 证：考虑上三角阵 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & & a_{1n} \\ & a_{22} & \\ 0 & \ddots & \\ & & a_{nn} \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ & b_{22} & \\ 0 & \ddots & \\ & & b_{nn} \end{pmatrix}$

对 $\forall i,j \in [1,n] \cap Z$ 且 $i>j$.

由于 A 的第 i 行前 $(i-1)$ 个元素为 0。

B 的第 j 列后 $(n-j)$ 个元素为 0。

设 $C = A \times B$.

则 $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n-j} b_{kj} \times 0 + \sum_{k=n-j+1}^{i-1} 0 \times 0 + \sum_{k=i}^{n} 0 \times a_{ik} = 0$.

故对 $\forall i,j \in [1,n] \cap Z$ 且 $i>j$. 有 $c_{ij} = 0$.

故 $C = A \times B$ 仍是上三角阵。

7. 解：令 $\alpha_1 = (1,2,2)^T$. $a_1 = \|\alpha_1\|_2 = 3$

$$w_1 = \frac{\alpha_1 - a_1 e_1}{\|\alpha_1 - a_1 e_1\|_2} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1\ 1\ 1)^T.$$

$$H_1 = I - 2 w_1 w_1^H = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$H_1 A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

令 $\beta = (0,1)^T$. $b_2 = \|\beta\|_2 = 1$.

$$w_2 = \frac{\beta_2 - \cancel{\beta} b_2 e_1}{\|\beta_2 - b_2 e_1\|_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1)^T$$

$$\tilde{H}_2 = I - 2 w_2 w_2^H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0^T \\ 0 & \tilde{H}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R = H_2(H_1 A) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$Q = H_1 H_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

即: $A = QR$