数论基础

Lectured by Prof. Zhao Lilu

Adaus

2022 年 4 月 2 日

前言

预备知识: 初等数论, 高等代数 (线性代数和多项式), 数学分析, 复变函数, 近世代数.

参考文献: 代数数论入门 by 冯克勤

课程内容包括解析数论和代数数论, 如果课时允许, 会补充组合数论的内容.

由于各种各样的原因, 这份笔记与教学的内容和顺序并不完全重合, 笔记中可能出现的所有的笔误和数学错误完全是我个人的原因, 若您发现任何问题请与我联系.

Adaus

目录

Part I

解析理论

1 素数分布（初等证明）

本章旨在回顾一些初等的内容, 并同接下来的解析方法做一个对比. 为有助于回顾复习, 要用到的一些初等数论的结果会以引理的形式给出.

1.1 基本定理

定理 1.1. *有无穷多个素数.*

证明. 用反证法. □

下面我们看 Euler 怎么证明 **定理 1.1.**.

证明. 考虑算术基本定理, 当 $s > 1$ 时,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p (1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \cdots) \tag{1}$$

$$= \prod_p (1 - \frac{1}{p^s})^{-1} \tag{2}$$

而

$$\lim_{s \to 1^+} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \infty$$

于是 (1.2) 等号右边是一个无穷乘积, 即素数有无穷多个. □

定义 1.2. *我们称*

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad (s \in \mathbb{C}, Re(s) > 1)$$

为 Riemann zeta 函数.

注. 设 $a(n)$ 是积性的数论函数, 且对于固定的 $\epsilon_0 \geq 0$, $|a(n)| \leq n^{\epsilon_0}$, 则当 $s > 1+\epsilon_0$ 时,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s} = \prod_p (1 + \frac{a(p)}{p^s} + \frac{a(p^2)}{p^{2s}} + \cdots) \tag{3}$$

等号右边的式子一般称为 *Euler* 乘积.

我们再给一个拓扑的证明 (Hillel Furstenberg, 2020 年 Abel 奖得主).

证明. 对 $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^+$, 引入记号

$$a(\text{mod } b) := \{n \in \mathbb{Z} | n \equiv a(\text{mod } b)\}$$

我们引入一个 $\mathbb{Z}$ 上的拓扑 $(\mathbb{Z}, \tau)$ 如下. 对于任意子集 $A \subset \mathbb{Z}$, $A \in \tau$ 当且仅当要么 $A = \emptyset$, 要么 $\forall a \in A, \exists b \in \mathbb{Z}^+$, s.t. $a(\text{mod } b) \subset A$.

验证这是一个拓扑是容易的.

根据定义, $\emptyset \in \tau$, $\mathbb{Z} = 0(\text{mod } 1) \in \tau$.

如果 $\{A_\lambda\} \in \tau(\lambda \in \Lambda)$, 则只需考虑它们不全是空集的情况, 根据定义, $\forall a \in \bigcup_\lambda A_\lambda, \exists b \in \mathbb{Z}^+$, s.t. $a(\text{mod } b) \subset \bigcup_\lambda A_\lambda$.

如果 $A_1, A_2 \in \tau$ 非空, 则 $\forall a \in A_1 \cap A_2, \exists b \in \mathbb{Z}^+$, s.t. $a(\text{mod } b) \subset A_1 \cap A_2$.

易见 $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^+$, $a(\text{mod } b) \in \tau$.

对任意 $n \neq \pm 1 (n \in \mathbb{Z})$, 都存在素数 p, s.t. $p|n$, i.e. $n \in 0(\text{mod } p)$, 并且对于 ± 1, 不存在这样的素数.

因此

$$\mathbb{Z} \setminus \{1, -1\} = \bigcup_p 0(\text{mod } p)$$

而

$$\{1, -1\} = \bigcap_p (\mathbb{Z} \setminus 0(\text{mod } p)) \notin \tau$$

故

$$\bigcap_p (\mathbb{Z} \setminus 0(\text{mod } p)) = \bigcap_p (1(\text{mod } p) \cup \cdots \cup (p-1)(\text{mod } p))$$

等式右边不是有限交 □

思考. $4k+1$ 型素数是否有无穷多个.

$4k-1$ 型素数是否有无穷多个.

定理 1.3. 设 q 是固定的正整数, 则有无穷多个形如 $qk+1$ 形素数 $(k\in\mathbb{Z}^+)$

证明. 考虑分圆多项式

$$\Phi_n(x)=\prod_{\substack{k=1\\(k,n)=1}}^{n}(x-e^{2\pi i\frac{k}{n}})\in\mathbb{Z}[x]$$

它与 x^k-1 $(1\leq k<n)$ 在 $\mathbb{Z}[x]$ 中互素.

假设只有有限个素数 $p_1,\ldots,p_m\equiv 1(\bmod q)$

取 t 为充分大的正整数, 记 $a=tqp_1\ldots p_m$. 考虑 $\Phi_q(tqp_1\ldots p_m)$ 的素因子 p. 于是 $p|a^q-1$. 因此 $p\neq p_1,\ldots,p\neq p_m,p\nmid q$. 于是 $p|\Phi_q(a)|a^q-1$.

设 k 是使得 $p|a^j-1(j\in\mathbb{Z}^+)$ 成立的最小的 j.

断言. $k=q$.

下面我们证明断言. 记 $r=\frac{q}{k}\in\mathbb{Z}^+$. 假设 $k<q$, 即 $r<1$.

我们有如下多项式的整除关系

$$\Phi_q(x)|x^q-1=(x^k-1)(x^{k(r-1)}+\cdots+x^k+1)$$

则

$$\Phi_q(x)|(x^{k(r-1)}+\cdots+x^k+1)$$

因此, 代入 a 有

$$\Phi_q(a)|(a^{k(r-1)}+\cdots+a^k+1)$$

而 $a^k\equiv 1(\bmod p)$, 于是

$$p|\sum_{j=0}^{r-1}(a^k)^j\equiv r(\bmod p)$$

因此 $p|r|a$, 与假设矛盾. 这证明了断言.

接下来根据费马小定理, 我们有 $p|a^{p-1}-1$, 则 $q|p-1$. 因此 $p\equiv 1(\bmod q)$. 与假设矛盾. □

注. $m=0$ 的情况是有可能的.

1.2 一些数论函数及其性质

现在我们介绍一些函数.

1. Von Mangoldt 函数 $\Lambda : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{R}$

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p & n = p^k,\ p \text{ 是素数},\ k \in \mathbb{Z}^+, \\ 0 & \text{otherwise}. \end{cases}$$

2. 对一个固定的实数 x, 所有比 x 小的素数个数给出一个函数

$$\begin{aligned} \pi(x) &= \sum_{n \le x} \mathbf{1}_{\mathbb{P}}(n) \\ &= \sum_{p \le x} 1 \end{aligned}$$

   其中 $\mathbf{1}_{\mathbb{P}}$ 是素数集合的特征函数.

3. 在 $\pi(x)$ 的和式中考虑一个权重

$$\begin{aligned} \theta(x) &= \sum_{n \le x} \mathbf{1}_{\mathbb{P}}(n) \log n \\ &= \sum_{p \le x} \log p \end{aligned}$$

4. $\psi(x) = \sum_{n \le x} \Lambda(x)$

我们给出一些 Von Mangoldt 函数的性质.

命题 1.4. $\sum_{d|n} \Lambda(d) = \log n$

证明. 循定义验证即可. □

命题 1.5. 当 $Re(s) > 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}$ 绝对收敛.

证明. 由**命题 1.4.**, 我们有

$$\Lambda(n) \leq \sum_{d|n} \Lambda(d) = \log n$$

于是 $\dfrac{\Lambda(n)}{n^s} \leq \dfrac{\log n}{n^s}$ $\square$

至此, 我们粗略的看看下列两个无穷级数的乘积.

$$\begin{aligned}
(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s})(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{m^s} \frac{\Lambda(k)}{k^s} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{m,k \\ mk=n}} \frac{1}{m^s} \frac{\Lambda(k)}{k^s} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^s} = -\zeta'(s)
\end{aligned}$$

这几乎得到了 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}$ 的表达式, 但我们还不清楚 $\zeta(s)$ 的零点, 不能将它挪到等式右边. 某种程度上它也推动着我们去探索 $\zeta(s)$ 的零点. 之后我们会看到这实际上给出了 Von Mangoldt 函数的 Dirichlet 级数.

为了证明素数定理, 我们需要做一些准备工作.

定理 1.6. 下列叙述等价.

1. $\pi(x) \sim \dfrac{x}{\log x}$
2. $\theta(x) \sim x$
3. $\psi(x) \sim x$

证明. $(2 \Leftrightarrow 3)$:

$$\begin{aligned} 0 \le \psi(x) - \theta(x) &= \sum_{\substack{k \ge 2 \\ p^k \le x}} \log p \\ &\le \sum_{\substack{k \ge 2 \\ p^k \le x}} \log x \\ &\le \sum_{p \le \sqrt{x}} \log p \quad \sum_{2 \le k \le \frac{\log x}{\log p}} 1 \\ &\le \sqrt{x} \log x \end{aligned}$$

于是 $\dfrac{\psi(x)}{x} - \dfrac{\theta(x)}{x} \to 0 \ (x \to +\infty)$

$(1 \Leftrightarrow 2)$ 只需看下列两个不等式:

对任意正数 $\epsilon > 0$

$$\begin{aligned} &\theta(x) \le \pi(x) \log x \\ &\theta(x) \ge \sum_{x^{1-\epsilon} \le p \le x} \log x^{1-\epsilon} = (1-\epsilon)(\pi(x) + O(x^{1-\epsilon})) \log x \end{aligned}$$

等价性立即可得 □

注 (Chebyshev). *存在常数 c_1, c_2 满足 $0 < c_1 < 1 < c_2$ 使得*

$$c_1 < \frac{\pi(x)}{x/\log x} < c_2$$

我们将在附录证明这个结果.

注 (Riemann). *$\zeta(s)$ 可以解析延拓到 $\mathbb{C} \setminus \{1\}$, 并且 1 是单极点. Riemann 还证明了在 $Re(s) < 0$ 的范围内所有的零点是 $-2, -4, \ldots$, 即所有负偶数, 且它们是单零点.*

猜想 1.7 (Riemann). *若 $0 \le Re(s) \le 1$, 且 $\zeta(s) = 0$, 则 $Re(s) = \frac{1}{2}$.*

注. *Riemann 猜想 $\Rightarrow$ 素数定理.*

$\zeta(1+it) \neq 0 \ \forall t \in \mathbb{R} \ \Rightarrow$ 素数定理.

引理 1.8. 若 $\int_1^\infty \frac{\psi(x)-x}{x^2}dx$ 收敛, 则 $\psi(x)\sim x$.

证明. 用反证法. 假设 $\psi(x)\sim x$ 不成立. 则要么存在 $c_1>1$, 使得有一个严格递增趋于无穷的序列 $\{x_n\}$ 满足

$$\psi(x_n)\geq c_1x_n$$

要么存在 $0<c_2<1$, 使得有一个严格递增趋于无穷的序列 $\{y_n\}$ 满足

$$\psi(y_n)\leq c_2y_n$$

若第一种情况成立, 则

$$\begin{aligned}\int_{x_n}^{c_1x_n}\frac{\psi(x)-x}{x^2}dx &\geq \int_{x_n}^{c_1x_n}\frac{c_1x_n-x}{x^2}dx\\ &= c_1-1-\log c_1>0\end{aligned}$$

这同假设矛盾. 类似地, 若第二种情况成立, 则

$$\begin{aligned}\int_{c_2y_n}^{y_n}\frac{\psi(x)-x}{x^2}dx &\leq \int_{c_2y_n}^{y_n}\frac{c_2y_n-x}{x^2}dx\\ &= -c_2+1+\log c_2<0\end{aligned}$$

这也同假设矛盾. □

2 Riemann zeta 函数与素数定理

我们约定复变量的符号为 $s=\sigma+it$.

2.1 Riemann zeta 函数的基本性质

定理 2.1. 当 $Re(s)>1$ 时, $\zeta(s)\neq 0$.

证明. s 是实数时结论是显然的.

我们考察 Euler 乘积的形式

$$\begin{aligned}
|\zeta(s)| &= |\prod_p (1-\frac{1}{p^s})^{-1}| \\
&= \prod_p |(1-\frac{1}{p^s})^{-1}| \\
&\geq \prod_p (1+\frac{1}{p^\sigma})^{-1} \\
&\geq \prod_p (1-\frac{1}{p^\sigma}) \\
&\geq (\prod_p (1-\frac{1}{p^\sigma})^{-1})^{-1} \\
&\geq \frac{1}{\zeta(\sigma)} \in \mathbb{R}^+
\end{aligned}$$

即 $\zeta(s)\neq 0$. □

注. 现在回过头看第一节的结果, 我们有当 $Re(s)>1$ 时,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^s}=-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$$

定理 2.2. 当 $Re(s)>1$ 时, 我们有

$$\zeta(s)=\frac{s}{s-1}-s\int_1^{+\infty}\{x\}x^{-s-1}dx \tag{4}$$

并且 (4) 给出了 $\zeta(s)$ 在 $Re(s)>0(s\neq 1)$ 的解析延拓且 $s=1$ 是单极点.

证明. 当 $Re(s) > 2$ 时, 我们有

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} n(n^{-s} - (n+1)^{-s}) &= \sum_{n=1}^{\infty} nn^{-s} - \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)^{-s} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s+1} - \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)^{-s+1} + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)^{-s} \\ &= \zeta(s)\end{aligned}$$

继续计算有

$$\begin{aligned}\zeta(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} n(n^{-s} - (n+1)^{-s}) \\ &= s\sum_{n=1}^{\infty} n\int_n^{n+1} x^{-s-1}dx \\ &= s\sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} [x]x^{-s-1}dx \\ &= s\sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} (x - \{x\})x^{-s-1}dx \\ &= s\sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} x^{-s}dx - s\sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} \{x\}x^{-s-1}dx \\ &= \frac{s}{s-1} - s\int_1^{+\infty} \{x\}x^{-s-1}dx\end{aligned}$$

不难发现 $\dfrac{s}{s-1} - s\displaystyle\int_1^{+\infty}\{x\}x^{-s-1}dx$ 是 $\zeta(s)$ 到 $Re(s) > 0 (s \neq 1)$ 的延拓且 $s = 1$ 是单极点. □

现在为了将 $\zeta(s)$ 延拓到整个复平面上, 我们需要回顾一些关于 Gamma 函数 Γ 的重要性质. 更多细节请读者查阅 [3], Ch.6.

在 $Re(s) > 0$ 上我们定义 Gamma 函数为

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}dx.$$

不难验证我们有

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$$

由此我们可以将 Γ 延拓成复平面上的亚纯函数且只有单极点 $s=0,-1,-2,\ldots,$ 且没有零点 (考察 $\Gamma(s)\Gamma(1-s)=\frac{\pi}{\sin\pi s}$).

接下来我们就可以着手将 $\zeta(s)$ 延拓到整个复平面上.

对 $x>0$, 引入函数 $\theta(x)=\sum\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-n^2x\pi}(=1+2\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^{-n^2x\pi})$.

引理 2.3. $x>0$ 时, $\theta(\frac{1}{x})=\sqrt{x}\theta(x)$.

证明. 考虑 Poisson 公式有

$$\begin{aligned}\theta(x)&=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{u^2x\pi-2\pi inu}du\\&=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x\pi(u+in\frac{1}{x})^2-\pi n^2\frac{1}{x}}du\\&=\sum_{n\in\mathbb{Z}}e^{-\pi n^2\frac{1}{x}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\pi x(u+in\frac{1}{x})^2}du\\&=\sum_{n\in\mathbb{Z}}e^{-\pi n^2\frac{1}{x}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\pi xu^2}du\\&=\theta(\frac{1}{x})\frac{1}{\sqrt{x}}\end{aligned}$$

□

定理 2.4. 对 $s\in\mathbb{C}$,

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s)=-\frac{1}{s(1-s)}+\int_1^{+\infty}(x^{\frac{s}{2}-1}+x^{\frac{1-s}{2}-1})\frac{\theta(x)-1}{2}dx.$$

一个立即得到的推论是

推论 2.5. $\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s)=\pi^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma(\frac{1-s}{2})\zeta(1-s)$ $(s\neq 0,1)$.

思考. 如何判断 $\zeta(s)$ 的零点问题.

下面我们来证明**定理 2.4.**

证明.

$$
\begin{aligned}
\Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s) &= \int_0^{+\infty} x^{\frac{s}{2}-1}e^{-x}dx\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\int_0^{+\infty} x^{\frac{s}{2}-1}e^{-x}dx\\
&\xlongequal{(x=\pi n^2 y)} \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\int_0^{+\infty} \pi^{\frac{s}{2}-1}n^{s-2}y^{\frac{s}{2}-1}e^{-\pi n^2 y}\pi n^2 dy\\
&= \pi^{\frac{s}{2}}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{+\infty} y^{\frac{s}{2}-1}r^{-\pi n^2 y}dy\\
&= \pi^{\frac{s}{2}}\int_0^{+\infty} y^{\frac{s}{2}-1}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\pi n^2 y}dy\\
&= \pi^{\frac{s}{2}}\int_0^{+\infty} y^{\frac{s}{2}-1}\frac{\theta(y)-1}{2}dy
\end{aligned}
$$

将积分拆开如下

$$
\begin{aligned}
\pi^{\frac{s}{2}}\int_0^{\infty} y^{\frac{s}{2}-1}\frac{\theta(y)-1}{2}dy &= \pi^{\frac{s}{2}}\int_1^{+\infty} y^{\frac{s}{2}-1}\frac{\theta(y)-1}{2}dy + \pi^{\frac{s}{2}}\int_0^{1} y^{\frac{s}{2}-1}\frac{\theta(y)-1}{2}dy\\
&\xlongequal{(y=\frac{1}{x})} \pi^{\frac{s}{2}}\int_1^{+\infty} y^{\frac{s}{2}-1}\frac{\theta(y)-1}{2}dy + \pi^{\frac{s}{2}}\int_1^{+\infty} x^{-\frac{s}{2}-1}\frac{\theta(\frac{1}{x})-1}{2}dx\\
&= \pi^{\frac{s}{2}}\int_1^{+\infty} y^{\frac{s}{2}-1}\frac{\theta(y)-1}{2}dy + \pi^{\frac{s}{2}}\int_1^{+\infty} x^{-\frac{s}{2}-1}\frac{\sqrt{x}\theta(x)-1}{2}dx\\
&= \pi^{\frac{s}{2}}\int_1^{+\infty} y^{\frac{s}{2}-1}\frac{\theta(y)-1}{2}dy + \pi^{\frac{s}{2}}\int_1^{+\infty} x^{-\frac{s}{2}-1}\frac{\sqrt{x}(\theta(x)-1)+\sqrt{x}-1}{2}dx\\
&= \pi^{\frac{s}{2}}\int_1^{+\infty} y^{\frac{s}{2}-1}\frac{\theta(y)-1}{2}dy + \pi^{\frac{s}{2}}\int_1^{+\infty} x^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}\frac{\theta(x)-1}{2}dx - \pi^{\frac{s}{2}}\frac{1}{s(1-s)}.
\end{aligned}
$$

上面证明了 $Re(s) > 2$ 时原式成立. 由解析函数的性质, 我们有原式对 $Re(s) > 0$ 时也成立, 并且它给出了等式左边到 $\mathbb{C}\setminus\{0,1\}$ 的延拓. □

推论 2.6. 上述定理给出了 $\zeta(s)$ 到 $\mathbb{C}\setminus\{1\}$ 的解析延拓, 且 $s=1$ 是单极点. 并且 $\zeta(0)\neq 0$, $\zeta(-2)=\zeta(-4)=\cdots=0$ 是单零点 (有时称作平凡零点).

推论 2.7. $Re(s) < 0$ 时, 负偶数是 $\zeta(s)$ 的所有零点.

事实上我们现在才能真正叙述 Riemann 猜想, 除去之前给出的叙述, 我们还能将其叙述为: $\zeta(s)$ 的所有非平凡零点的实部为 $\frac{1}{2}$.

定理 2.8. $\zeta(1+it) \neq 0$ $(\forall t \in \mathbb{R})$.

证明. 不妨 $t \neq 0$. 考虑 $s = \sigma + it$.

$$\begin{aligned}
\zeta(\sigma+it) &= \prod_p (1 - \frac{1}{p^{\sigma+it}}) \\
&= \exp(\log \prod_p (1 - \frac{1}{p^{\sigma+it}})) \\
&= \exp(\sum_p \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{mp^{m(\sigma+it)}}) \\
&= \exp(\sum_p \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos(\log p)mt - i\sin(\log p)mt}{mp^{m\sigma}}).
\end{aligned}$$

于是

$$|\zeta(\sigma+it)| = \exp(\sum_p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\log p)mt}{mp^{m\sigma}}).$$

考察

$$|\zeta(\sigma)^3\zeta(\sigma+it)^4\zeta(\sigma+2it)| = \exp(\sum_p \sum_{m=1}^{\infty} \frac{3+4\cos(\log p)mt + \cos(\log p)m2t}{mp^{m\sigma}}).$$

对于等号右边的分子, 我们有

$$3+4\cos(\log p)mt + \cos(\log p)m2t = 2(\cos mt\log p + 1)^2 \geq 0.$$

于是

$$|\zeta(\sigma)^3\zeta(\sigma+it)^4\zeta(\sigma+2it)| \geq 1.$$

倘若对某个 t, $1+it$ 是零点, 则下述不等式

$$(\zeta(\sigma)(\sigma-1))^3|\frac{\zeta(\sigma+it)}{\sigma-1}|^4|\zeta(\sigma+2it)| \geq \frac{1}{\sigma-1}$$

令 $\sigma \to 1^+$ 时左边是常数而右边趋于无穷, 矛盾. □

2.2 素数定理

引理 2.9. 设 $f(u)$ 是（可积, 间断点离散）实函数.

1. 存在 $M > 0$, s.t. $|f(u)| \le \dfrac{M}{u}$ $(\forall u \ge 1)$.
2. $g(s) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(u)}{u^s} du$ $(Re(s) > 0)$ 可以延拓到 $Re(s) \ge 0$.

则积分 $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(u)du$ 收敛.

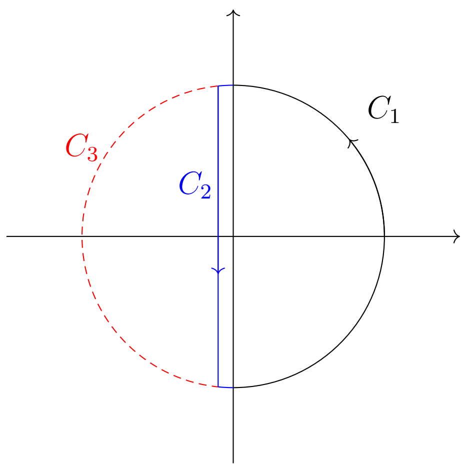
证明. 引入 $g_x(s) = \displaystyle\int_1^x \frac{f(u)}{u^s}$ $(\forall s)$, 要证结论即转为 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g_x(0) = g(0)$. 对充分大的 R, 存在 $h_R > 0$, s.t. $g(s)$ 在 $Re(s) \ge -h_R$ 且 $|Im(s)| \le R$ 的范围内解析. 任取正数 $h < h_R$, 存在 M_R, s.t. $|g(s)| \le M_R$ $(\forall s \in D_R)$. 其中 D_R 是由积分围道 $C(= C_1 + C_2)$ 围成的闭集, 虚轴右端的半圆记为 C_1, 即

$$C_1 = \{s \mid Re(s) \ge 0, |s| = R\}$$

$C_2 = C - C_1$, 虚轴左边的半圆记为 C_3, 即

$$C_3 = \{s \mid Re(s) \le 0, |s| = R\}$$

如下图所示.



根据 Cauchy 积分公式, 我们有

$$g_x(0)-g(0)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{g_x(s)-g(s)}{s}x^s\left(\frac{s^2}{R^2}+1\right)ds$$

于是原积分改写为

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{g_x(s)-g(s)}{s}x^s\left(\frac{s^2}{R^2}+1\right)ds=&\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{g_x(s)-g(s)}{s}x^s\left(\frac{s^2}{R^2}+1\right)ds\\&+\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2} \frac{g_x(s)-g(s)}{s}x^s\left(\frac{s^2}{R^2}+1\right)ds\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2} \frac{g_x(s)-g(s)}{s}x^s\left(\frac{s^2}{R^2}+1\right)ds=&\frac{1}{2\pi i}\int_{C_3} \frac{g_x(s)}{s}x^s\left(\frac{s^2}{R^2}+1\right)ds\\&-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2} \frac{g(s)}{s}x^s\left(\frac{s^2}{R^2}+1\right)ds\end{aligned}$$

下面我们分别考虑这些积分.

在 C_1 上, 有 $|x^s|=x^\sigma$, $|\frac{1}{s}|=\frac{1}{R}$, $|\frac{s^2}{R^2}+1|=\frac{2\sigma}{R}$. 当 $\sigma>0$ 时

$$\begin{aligned}|g_x(s)-g(s)|&=|\int_x^{+\infty}\frac{f(u)}{u^s}ds|\\&\le M|\int_x^{+\infty}\frac{1}{u^{\sigma+1}}du|=\frac{M}{\sigma}x^{-\sigma}\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}|\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{g_x(s)-g(s)}{s}x^s\left(\frac{s^2}{R^2}+1\right)ds|&\le|\frac{1}{2\pi i}\pi R\cdot\frac{M}{\sigma}x^{-\sigma}\cdot x^\sigma\cdot\frac{1}{R}\cdot\frac{2\sigma}{R}|\\&\le\frac{M}{R}\quad(\sigma\ge 0,\ s\in C_1)\end{aligned}$$

类似地有

$$|\frac{1}{2\pi i}\int_{C_3} \frac{g_x(s)}{s}x^s\left(\frac{s^2}{R^2}+1\right)ds|\le\frac{M}{R}\quad(\sigma\le 0,\ s\in C_3)$$

而在 C_2 上, 我们把它分为两个小弧段和直线, 依次有

$$\begin{aligned}|\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2} \frac{g(s)}{s}x^s\left(\frac{s^2}{R^2}+1\right)ds|&\le|\frac{1}{2\pi i}\cdot 2\frac{\pi}{2}h(\frac{M_R}{R}x^\sigma\frac{2\sigma}{R})|+|\frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{M_R}{h}\cdot x^{-h}\cdot 2|\\&\le\frac{M_Rh^2}{R^2}+x^{-h}\frac{2RM_R}{\pi h}\end{aligned}$$

综上, 我们有

$$|g_x(0) - g(0)| \leq \frac{2M}{R} + \frac{M_R h^2}{R^2} + x^{-h}\frac{2RM_R}{\pi h}$$

于是对于任意的 $\varepsilon > 0$, 能够 (依次) 取到合适的 R, h, s.t. $\exists x_0$, 对任意的 $x > x_0$, $|g_x(0) - g(0)| \leq \varepsilon$. □

定理 2.10. $\psi(x) \sim x$.

证明. 根据**引理 1.8.** 和**引理 2.9.**, 要证素数定理, 只需证 $f(u) = \frac{\psi(u)-u}{u^2}$ 满足**引理 2.9.** 的两个条件. 我们已经知道存在正常数 c_1, c_2 使得 $c_1 x \leq \psi(x) \leq c_2 x$, 这就满足了第一个条件. 对于第二个条件, $Re(s) > 0$ 时, 我们考虑

$$\begin{aligned}
g(s) = \int_1^{+\infty} \frac{\psi(u) - u}{u^{s+2}} du &= \int_1^{+\infty} \frac{\sum_{n \leq u} \Lambda(n)}{u^{s+2}} du - \frac{1}{s} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) \int_n^{+\infty} \frac{1}{u^{s+2}} du - \frac{1}{s} \\
&= -\frac{1}{s+1} \frac{\zeta'(s+1)}{\zeta(s+1)} - \frac{1}{s}
\end{aligned}$$

只用代入延拓后的 Riemann zeta 函数 (4) 即可证得其满足第二个条件. □

3 算术级数中的素数分布 I

本章目的是证明如下的 Dirichlet 定理

定理 3.1 (Dirichlet)**.** *给定 $a, q \in \mathbb{Z}^+, (a, q) = 1$. 则有无穷多个素数形如 $p \equiv a(mod\ q)$. 即*

$$\{a + qk \mid k \in \mathbb{Z}^+\}$$

中有无穷多个素数.

为了证明这个定理, 我们需要做一些准备工作. 若无特殊声明, 本节提到的群均为有限 Abel 群.

3.1 有限 Abel 群的特征

群的特征是 Dedekind 研究所谓群行列式的时候发现的, 这实际上也是群表示论的开端. 感兴趣的读者仅需要高等代数和一些抽象代数的知识就可以阅读 [3], 有更强大背景的读者想必可以从 [7] 中汲取大量营养.

定义 3.2. *从群 G 到 $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ 的群同态*

$$\chi : G \to \mathbb{C}^\times$$

称为群 G 的一个特征. 所有特征构成的集合记为 G^*

注. *不难看出 G^* 非空, 因为 $[g \mapsto 1] \in G^*$*

注. *若记 $|G| = n$, 则对任意 $g \in G$, $\chi(g)$ 都是 n 次单位根.*

我们称上述恒映到 1 的特征为主特征, 记为 χ_0. 本文中有时为了强调它作为单位元, 也记作 id_{G^*}, 引入乘法

$$\begin{aligned} \chi_1 * \chi_2 : G &\to \mathbb{C}^\times \\ g &\mapsto [\chi_1 * \chi_2(g) := \chi_1(g)\chi_2(g)] \end{aligned}$$

于是不难验证有

引理 3.3. G^* 构成有限 Abel 群.

注. 由于特征 χ 都是单位根, 它的逆可以写成 $\chi^{-1}: g \mapsto \chi^{-1}(g) = \chi(g^{-1}) = \overline{\chi(g)}$.

定理 3.4. 我们有如下群同构

$$G \cong G^*.$$

证明. **Step 1.** 我们首先证明结论对循环群成立.

记 $G = \langle g \rangle$, $|g| = |G| = n$. 于是对任意 $\chi \in G^*$,

$$\chi(g) \in \{e^{2\pi i \frac{k}{n}} \mid 0 \leq k \leq n-1\}.$$

定义

$$\begin{aligned} \chi_k : G &\to \mathbb{C}^* \\ g^j &\mapsto [\chi_k(g^j) = e^{2\pi i \frac{kj}{n}}] \quad (0 \leq j \leq n-1) \end{aligned}$$

不难验证 $\chi_k \in G^*$, 更进一步 G^* 是循环群.

Step 2. 我们现在证明对有限 Abel 群 A, B, $(A \times B)^* \equiv A^* \times B^*$.

引入

$$\begin{aligned} \rho : A^* \times B^* &\to (A \times B)^* \\ (\sigma, \tau) &\mapsto [\rho(\sigma, \tau) : (a, b) \mapsto \sigma(a)\tau(b)] \end{aligned}$$

不难验证这样定义的 $\rho(\sigma, \tau)$ 确实是 $A \times B$ 上的特征, 更进一步 ρ 是一个群同态. 要证它是同构, 只需证它既是单射又是满射.

(单射) 若对任意 $a \in A$, $b \in B$, $\rho(\sigma, \tau)(a, b) = \sigma(a)\tau(b) = 1$. 取定 $a = \mathrm{id}_A$, 则 $\forall b, \tau(b) = 1$, 于是 $\tau = \mathrm{id}_{B^*}$. 取定 $b = \mathrm{id}_B$, 则 $\forall a, \sigma(a) = 1$, 于是 $\sigma = \mathrm{id}_{A^*}$.

(满射) 对任意 $f \in (A \times B)^*$, 取 $\sigma : a \to f(a, \mathrm{id}_B) \ \ \forall a \in A$, $\tau : b \to f(\mathrm{id}_A, b) \ \ \forall b \in B$. 不难验证 $\sigma \in A^*, \tau \in B^*$, 且 $\rho(\sigma, \tau) = f$.

于是根据有限 Abel 群的结构定理即证. □

定理 3.5 (正交关系)**.** 设 G 为有限 Abel 群,

(1) $\dfrac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi(g)=\begin{cases}1 & \chi=\chi_0,\\ 0 & otherwise.\end{cases}$

(2) $\dfrac{1}{|G|}\sum_{\chi\in G^*}\chi(g)=\begin{cases}1 & g=\mathrm{id}_G,\\ 0 & otherwise.\end{cases}$

证明. (1) 只需考虑 $\chi\neq\chi_0$ 的情况. 此时 $\exists s\in G$ s.t. $\chi(s)\neq 1$, 则

$$\begin{aligned}\sum_{g\in G}\chi(g)&=\sum_{g\in G}\chi(sg)\\&=\chi(s)\sum_{g\in G}\chi(g)\end{aligned}$$

于是 $(1-\chi(s))\sum_{g\in G}\chi(g)=0.$

(2) 只需考虑 $g\neq\mathrm{id}_G$ 的情况. 我们首先证明对这样的 g, 存在 $\tau\in G^*$ s.t. $\tau(g)\neq 1$. 如果不然, 即对任意的 $\chi\in G^*$, $\chi(g)=1$. χ 自然诱导从商群 $G/\langle g\rangle$ 到 $\mathbb{C}^*$ 的同态

$$\begin{aligned}\tilde{\chi}:G/\langle g\rangle&\to\mathbb{C}^\times\\ h\cdot\langle g\rangle&\mapsto\chi(h)\end{aligned}$$

于是 $|G|=|G^*|\leq|(G/\langle g\rangle)^*|=|G/\langle g\rangle|$, 矛盾. 其余部分与 (1) 同理. □

注. *我们也可以从另一个角度看这个定理. 对有限 Abel 群 G, $G^*\cong G$ 也是有限 Abel 群, 于是我们可以考虑 G^* 的特征, 它由 G 中的元素给出:*

$$\begin{aligned}g:G^*&\to\mathbb{C}^\times\\ \chi&\mapsto\langle g,\chi\rangle:=\chi(g)\end{aligned}$$

不难验证他们同样构成一个有限 Abel 群 $(G^*)^*$. 于是有 $G\cong G^*\cong(G^*)^*$. 那么 **定理 3.5**. *中的 (2) 就可以由 (1) 直接推出:*

$$\sum_{\chi\in G^*}\chi(g)=\sum_{\chi\in G^*}\langle g,\chi\rangle.$$

这立刻给出下面两条推论.

推论 3.6. 对 $\chi_1, \chi_2 \in G^*$,

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_1(g)\overline{\chi_2(g)} = \begin{cases} 1 & \chi_1 = \chi_2, \\ 0 & otherwise. \end{cases}$$

证明. 我们有

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_1(g)\overline{\chi_2(g)} = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_1\chi_2^{-1}(g)$$

由**定理 3.5.** (1) 立即可得. □

推论 3.7. 对 $g_1, g_2 \in G$,

$$\frac{1}{|G|}\sum_{\chi\in G^*}\chi(g_1)\overline{\chi(g_2)} = \begin{cases} 1 & g_1 = g_2, \\ 0 & otherwise. \end{cases}$$

证明. 注意到对任意特征 χ, $\chi(g)\overline{\chi(g)} = \chi(g)\chi(g^{-1}) = 1$, 于是

$$\frac{1}{|G|}\sum_{\chi\in G^*}\chi(g_1)\overline{\chi(g_2)} = \frac{1}{|G|}\sum_{\chi\in G^*}\chi(g_1 g_2^{-1})$$

由**定理 3.5.** (2) 立即可得. □

现在我们着手把上述理论应用到 $G = (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times$ 上.

定义 3.8 (Dirichlet 特征)**.** 对 $q \in \mathbb{Z}^+$ (≥ 2), $\chi \in G^*$, $\overline{m} \in G$. 我们称

$$\chi_D(m) = \begin{cases} \chi(\overline{m}) & (m, q) = 1, \\ 0 & (m, q) > 1. \end{cases}$$

给出的函数

$$\chi_D : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$$

为 (mod q) 的 Dirichlet 特征.

注. 一共有 $\varphi(q)$ 个 mod q 的 Dirichlet 特征. 其中 φ 是 Euler 函数.

下面给出一些关于 Dirichlet 特征 (的由定义和正交关系立即可得) 的性质.

命题 3.9. *设 χ 是 mod q 的特征, 则 χ 是完全积性的, 即 $a, b \in \mathbb{Z}$,*

$$\chi(ab) = \chi(a)\chi(b)$$

命题 3.10. *对 $a, b \in \mathbb{Z}$,*

$$\frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi(\bmod\ q)} \chi(a)\overline{\chi(b)} = \begin{cases} 1 & a \equiv b(\bmod\ q) \text{ 且 } (ab, q) = 1, \\ 0 & otherwise. \end{cases}$$

其中 $\sum\limits_{\chi(\bmod\ q)}$ 表示对所有 mod q 的特征求和.

命题 3.11. *对 $a \in \mathbb{Z}$,*

$$\frac{1}{\varphi(q)} \sum_{1 \le a \le q} \chi(a) = \begin{cases} 1 & \chi = (\mathrm{id}_{G^*})_D, \\ 0 & otherwise. \end{cases}$$

命题 3.12. *χ 是周期为 q 的函数.*

定义 3.13 (Dirichlet L-函数)**.** 在 $Re(s) > 1$ 时, 我们定义

$$\begin{aligned} L(s, \chi) &:= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} \\ &= \prod_p (1 + \frac{\chi(p)}{p^s} + \frac{\chi(p^2)}{p^{2s}} + \cdots) \\ &= \prod_p \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1} \\ &= \prod_{p \nmid q} \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1} \end{aligned}$$

$L(s, \chi)$ 称为 Dirichlet L-函数.

称 G^* 中单位元给出的 Dirichlet 特征为 (Dirichlet) 主特征, 在无歧义的情况下仍记为 χ_0. 即

$$\chi_0(m) = \begin{cases} 1 & (m,q) = 1, \\ 0 & (m,q) > 1. \end{cases}$$

注. 若非主特征 $\chi(n)$ 总是实数, 则称为非主实特征. 非实特征称为复特征, 即 $\exists n$ $s.t.$ $\chi_n \notin \mathbb{R}$.

引理 3.14. 设 χ 是 mod q 的 Dirichlet 特征, $x \geq 1$.
(1) 若 χ 不是主特征, 则

$$|\sum_{n\leq x} \chi(n)| \leq \varphi(q)$$

2 若 $\chi = \chi_0$, 则

$$|\sum_{n\leq x} \chi(n) - \frac{\varphi(q)}{q}x| \leq 2\varphi(q)$$

证明. 由于周期性, 我们可以把求和写成如下形式:

$$\sum_{n\leq x} \chi(n) = \left[\frac{x}{q}\right] \sum_{1\leq a\leq q} \chi(a) + R,$$

其中 $|R| \leq \sum_{1\leq a\leq q} |\chi(a)| \leq \varphi(q)$. 于是当 $\chi \neq \chi_0$ 时, 由**命题 3.11** 可知 $\sum_{1\leq a\leq q} \chi(a) = 0$. 当 $\chi = \chi_0$ 时, $\sum_{1\leq a\leq q} \chi(a) = \varphi(q)$. □

命题 3.15. 对正实数 s, 当 χ 不是主特征时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}$ 收敛, 但不绝对收敛. 当 $\chi = \chi_0$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}$ 不收敛.

证明. $\chi \neq \chi_0$ 时, 由于 $|\sum_{n=1}^{N} \chi(n)| \leq \varphi(q)$, 根据 Dirichlet 关于条件收敛的判据可知 $s > 0$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}$ 收敛. □

命题 3.16. $L(s,\chi_0)$ 可以延拓到整个复平面, $s=1$ 是单极点.

证明. 注意到 $L(s,\chi_0)=\prod_{p|q}(1-\frac{1}{p^s})\zeta(s)$. □

命题 3.17. 当 $\chi\neq\chi_0$, $Re(s)>1$ 时, 有

$$L(s,\chi)=\frac{1}{s}\int_1^{\infty}F_\chi(u)u^{-s-1}du$$

其中 $F_\chi(u)=\sum_{1\leq a\leq u}\chi(a)$. 并且上式给出了 $L(s,\chi)$ 在 $Re(s)>0$ 上的解析延拓.

证明. 由分部求和有

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n^s}&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F_\chi(n)-F_\chi(n-1)}{n^s}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}F_\chi(n)(n^{-s}-(n+1)^{-s})\\&=\frac{1}{s}\sum_{n=1}^{\infty}F_\chi(n)\int_n^{n+1}u^{-s-1}du\\&=\frac{1}{s}\sum_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1}F_\chi(u)u^{-s-1}du\\&=\frac{1}{s}\int_1^{+\infty}F_\chi(u)u^{-s-1}du.\end{aligned}$$

根据**引理 3.14.** 可知上式最后的积分的收敛性. □

推论 3.18. 设 $q \geq 3$, 则有 $\chi \neq \chi_0$ 时的 $\varphi(q)-1$ 个 Dirichlet 函数中至多有一个函数在 $s=1$ 处为零. 且若 $L(1,\chi)=0\ \ (\chi \neq \chi_0)$, 则 $s=1$ 是 $L(s,\chi)$ 的单零点.

证明. 对实数 $s>1$ 考察

$$\begin{aligned}
\prod_{\chi(\mathrm{mod} q)} L(s,\chi) &= \prod_{\chi(\mathrm{mod} q)} \prod_p \left(1-\frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1} \\
&= \exp\left(\sum_{\chi(\mathrm{mod} q)} \sum_p \log\left(1-\frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1}\right) \\
&= \exp\left(\sum_\chi \sum_p \sum_{k=1}^\infty \frac{\chi(p^k)}{kp^{ks}}\right) \\
&= \exp\left(\sum_\chi \sum_p \sum_{k=1}^\infty \frac{\chi(p^k)}{kp^{ks}}\right) \\
&= \exp\left(\varphi(q)\sum_k \sum_{\substack{p \\ p^k \equiv 1 (\mathrm{mod} q)}} \frac{1}{kp^{ks}}\right) \geq 1.
\end{aligned}$$

我们知道 $s=1$ 是 $L(s,\chi_0)$ 的一个单极点, 而 $\chi \neq \chi_0$ 时 $L(s,\chi)$ 在 $s=1$ 处是解析的. 于是若有超过一个函数在 $s=1$ 处为零则乘积为 0, 与上述计算结果矛盾. □

推论 3.19. 设 χ 是复特征, 则 $L(1,\chi)\neq 0$.

证明. 取 χ 的共轭函数 $\overline{\chi}$, 它也是 $\mathrm{mod}\ \ q$ 的 Dirichlet 特征. χ 和 $\overline{\chi}$ 是不同的函数, 且 $L(1,\chi)=0 \Leftrightarrow L(1,\overline{\chi})=0$. 当实数 $s>1$ 时有 $L(s,\overline{\chi})=\overline{L(s,\chi)}$. 取 $s\to 1^+$ 即证. □

我们介绍一个非常重要的公式, 并给出一些估计.

定理 3.20 (Abel 求和公式 (部分求和公式)). 对于任意 $y \in \mathbb{R}$, $y \geq 1$, 我们有

$$\sum_{1\leq n\leq y} a(n)b(n) = \sum_{1\leq n\leq y} a(n)b(y) - \int_1^y \left(\sum_{1\leq n\leq t} a(n)\right) b'(t)dt$$

证明. 注意到

$$\int_1^y \left(\sum_{1\leq n\leq t} a(n)\right) b'(t)dt = \sum_{1\leq n\leq y} a(n)\int_n^y b'(t)dt = \sum_{1\leq n\leq y} a(n)(b(y)-b(n)).$$

易见等式成立. □

我们首先给出一个在数学分析中已经知道的估计.

推论 3.21. 我们有

$$\sum_{n=1}^{y}\frac{1}{n} = \log y + \gamma + O(\frac{1}{y})$$

其中 γ 称为 Euler 常数.

证明.

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{y}\frac{1}{n} &= 1 + \int_1^y [t]\frac{1}{t^2}dt\\ &= 1 + \int_1^y \frac{1}{t}dt - \int_1^y \{t\}\frac{1}{t^2}dt\\ &= \log y + 1 - \int_1^{+\infty}\{t\}\frac{1}{t^2}dt + O(\frac{1}{y})\\ &= \log y + \gamma + O(\frac{1}{y}).\end{aligned}$$

其中 $\gamma = 1 - \int_1^{+\infty}\{t\}\frac{1}{t^2}dt.$ □

下面给出两个在之后的证明中要用到的估计.

推论 3.22. 我们有

$$\sum_{n=1}^{y}\frac{1}{\sqrt{n}} = 2\sqrt{y} + A + O(\frac{1}{\sqrt{y}})$$

其中 A 是一个常数.

证明.

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{y}\frac{1}{\sqrt{n}} &= y\frac{1}{\sqrt{y}} + \frac{1}{2}\int_1^y [t]t^{-\frac{3}{2}}dt \\ &= \sqrt{y} + \frac{1}{2}\int_1^y t^{-\frac{1}{2}}dt - \frac{1}{2}\int_1^y \{t\}t^{-\frac{3}{2}}dt \\ &= 2\sqrt{y} - 1 - \frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\{t\}t^{-\frac{3}{2}}dt + O(y^{-\frac{1}{2}}) \\ & 2\sqrt{y} + A + O(\frac{1}{\sqrt{y}}).\end{aligned}$$

其中 $A = -1 - \frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\{t\}t^{-\frac{3}{2}}dt$. □

推论 3.23. 对于非主的 *mod* q 特征 χ, $\beta > 0$, $y \geq 1$ 是实数. 我们有

$$\sum_{n=1}^{y}\frac{\chi(n)}{n^\beta} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n^\beta} + O(\frac{1}{y^\beta})$$

证明. 任取 $Y \in \mathbb{Z}^+ \ \ (y \leq Y)$, 对 $n \leq Y$, 我们取 $a(n) = \chi(n) \ \ (y \leq n \leq Y)$, 其余情况取 0, $b(n) = \frac{1}{n^\beta}$. 套用 Abel 求和公式我们有

$$\begin{aligned}\sum_{y\leq n\leq Y}\frac{\chi(n)}{n^\beta} &= \sum_{y\leq n\leq Y}\frac{\chi(n)}{y^\beta} - \int_1^y \sum_{y\leq n\leq t}\chi(n)t^{-\beta-1}dt \\ &\leq \varphi(q)y^{-\beta} + \varphi(q)y^{-\beta} \\ &\leq 2\varphi(q)y^{-\beta}\end{aligned}$$

此式对任意 $Y \in \mathbb{Z}^+ \ \ (y \leq Y)$ 都成立. 推论即证. □

定理 3.24. 设 χ 是 $\bmod \ q$ 的非主特征, 则有

$$L(1,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n}.$$

证明. 对于实数 $s>1$, 取 y,

$$L(s,\chi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n^s}=\sum_{n=1}^{y}\frac{\chi(n)}{n^s}+\sum_{n>y}\frac{\chi(n)}{n^s}$$

于是有

$$|L(s,\chi)-\sum_{n=1}^{y}\frac{\chi(n)}{n^s}|\le 2\varphi(q)y^{-s}\le 2\varphi(q)y^{-1}$$

则

$$|L(1,\chi)-\sum_{n=1}^{y}\frac{\chi(n)}{n}|\le 2\varphi(q)y^{-1}.$$

即有 $L(1,\chi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n}$. □

注. 设 $\{a(n)\}_n$ 是 $\mathbb{Z}^+$ 的一个重排. 于是当 $Re(s)>1$ 时有

$$L(s,\chi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(a(n))}{a(n)^s}.$$

引理 3.25. 设 χ 是非主实特征, $y\ge 1$, 令 $D(n)=\sum_{d|n}\chi(d)$.

$$\sum_{n\le y}D(n)n^{-\frac{1}{2}}=2L(1,\chi)y^{\frac{1}{2}}+O(1).$$

证明. 我们用 Dirichlet 双曲律 (**定理 C.1.**) 证明这个引理.

$$\begin{aligned}\sum_{n\le y}\frac{D(n)}{\sqrt{n}}&=\sum_{\substack{a,b\le y\\ ab\le y}}\frac{\chi(a)}{\sqrt{ab}}\\&=\sum_{a\le\sqrt{y}}\frac{\chi(a)}{\sqrt{a}}\sum_{b\le\frac{y}{a}}\frac{1}{\sqrt{b}}+\sum_{b\le\sqrt{y}}\frac{1}{\sqrt{b}}\sum_{a\le\frac{y}{b}}\frac{\chi(a)}{\sqrt{a}}\\&-\sum_{a\le\sqrt{y}}\frac{\chi(a)}{\sqrt{a}}\sum_{b\le\sqrt{y}}\frac{\chi(b)}{\sqrt{b}}\end{aligned}$$

我们分别估计这三项.

$$\begin{aligned}
\sum_{a\le\sqrt{y}}\frac{\chi(a)}{\sqrt{a}}\sum_{b\le\frac{y}{a}}\frac{1}{\sqrt{b}} &= \sum_{a\le\sqrt{y}}\frac{\chi(a)}{\sqrt(a)}\left(2\sqrt{\frac{y}{a}}+A+O(\sqrt{\frac{a}{y}})\right)\\
&= 2\sqrt{y}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(a)}{a}+O(\frac{1}{\sqrt{y}})\right)+A\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(a)}{\sqrt{a}}+O(y^{-\frac{1}{4}})\right)+O(1)\\
&= 2\sqrt{y}L(1,\chi)+O(1)\\
\sum_{b\le\sqrt{y}}\frac{1}{\sqrt{b}}\sum_{a\le\frac{y}{b}}\frac{\chi(a)}{\sqrt{a}} &= \sum_{b\le\sqrt{y}}\frac{1}{\sqrt{b}}\left(\sum_{a=1}^{\infty}\frac{\chi(a)}{\sqrt{a}}+O(\sqrt{\frac{b}{y}})\right)\\
&= \sum_{a=1}^{\infty}\frac{\chi(a)}{\sqrt{a}}\left(2y^{\frac{1}{4}}+A+O(y^{-\frac{1}{4}})\right)+O(1)\\
&= 2y^{\frac{1}{4}}\sum_{a=1}^{\infty}\frac{\chi(a)}{\sqrt{a}}+O(1)\\
\sum_{a\le\sqrt{y}}\frac{\chi(a)}{\sqrt{a}}\sum_{b\le\sqrt{y}}\frac{\chi(b)}{\sqrt{b}} &= \left(\sum_{a=1}^{\infty}\frac{\chi(a)}{\sqrt{a}}+O(y^{-\frac{1}{4}})\right)\left(2y^{\frac{1}{4}}+A+O(y^{-\frac{1}{4}})\right)\\
&= 2y^{\frac{1}{4}}\sum_{a=1}^{\infty}\frac{\chi(a)}{\sqrt{a}}+O(1).
\end{aligned}$$

于是我们得到

$$\sum_{n\le y}D(n)n^{-\frac{1}{2}}=2L(1,\chi)y^{\frac{1}{2}}+O(1). \qquad \square$$

定理 3.26. 设 χ 是非主实特征, 则 $L(1,\chi)\neq 0$.

证明. 设 p 是素数, $a\in\mathbb{Z}^+$, 则

$$D(p^a)=\sum_{d|p^a}\chi(d)=1+\chi(p)+\cdots+\chi(p)^a.$$

由于 χ 是实特征, 不难得到若 n 是完全平方数, $D(n)\ge 1$, 且对任意 n, $D(n)\ge 0$. 于是

$$\sum_{n\le y}\frac{D(n)}{\sqrt{n}}\ge\sum_{m^2\le y}\frac{D(m^2)}{\sqrt{m^2}}\ge\sum_{m\le\sqrt{y}}\frac{1}{m}. \tag{5}$$

若 $L(1,\chi)=0$, 根据**引理 3.25.** 我们有 $\sum_{n\le y}\frac{D(n)}{\sqrt{n}}=O(1)$. 这同 (5) 矛盾. $\square$

Part II

附录 A　分圆多项式

本节旨在初步介绍分圆多项式并给出一些基本性质. 我们记 $\xi_n = e^{\frac{2\pi i}{n}}$.

定义 A.1. 我们称

$$\Phi_n(x) = \prod_{\substack{k=1 \\ (k,n)=1}}^{n} (x - e^{2\pi i \frac{k}{n}})$$

为 n 次分圆多项式.

注. n 次分圆多项式 (*nth cyclotomic polynomial*) 的 n 次来自于 n 次本原单位根 (*nth primitive root*), 而不是说它的次数 (*degree*) 是 n.

命题 A.2. $x^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(x)$

证明. 首先

$$x^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1}(x - \xi_n^k) = \prod_{d|n} \prod_{(k,n)=d} (x - \xi_n^k)$$

于是只需证明假设 $(k, n) = d$, 设 $k = dj$, 则 $\xi_n^k = \xi_n^{dj} = \xi_{\frac{n}{d}}^j$ 且 $(j, \frac{n}{d}) = 1$. 因此

$$\prod_{(k,n)=d} (x - \xi_n^k) = \prod_{j,\frac{n}{d}}(x - \xi_{\frac{n}{d}}^j) = \Phi_{\frac{n}{d}}(x)$$

而

$$\prod_{d|n} \Phi_{\frac{n}{d}}(x) = \prod_{d|n} \Phi_d(x)$$ □

推论 A.3. $\deg \Phi_n(x) = \varphi(n)$, 其中 $\varphi(n)$ 是 *Euler* 函数.

证明. 对**命题 A.2.** 式两边取次数得

$$n = \sum_{d|n} \deg \Phi_d(x)$$

应用 Möbius 变换和 Euler 函数的性质立即可得. □

推论 A.4. $\Phi_n(x) \in \mathbb{Z}[x]$.

证明. 用归纳法. $n=1$ 时显然. 设对 $\Phi_k(x)$ $(1<k<n)$ 命题都成立, 则对 $\Phi_n(x)$, 我们有

$$\Phi_n(x) = \frac{x^n - 1}{\prod\limits_{\substack{k|n \\ 1<k<n}} \Phi_k(x)}$$

记 $f(x) = \prod\limits_{\substack{k|n \\ 1<k<n}} \Phi_k(x)$, 我们可以做多项式的带余除法

$$x^n - 1 = f(x)g(x) + r(x)$$

其中 $r(x) = 0$ 或 $\deg r(x) < deg f(x)$.

则 $r(x) = f(x)(\Phi(x) - g(x))$. 若 $r(x) \neq 0$, 则 $\Phi(x) \neq g(x)$, 于是 $\deg r(x) \geq \deg f(x)$, 矛盾. 于是 $r(x) = 0$, $\Phi(x) = g(x) \in \mathbb{Z}[x]$ 且是首一的. $\square$

定理 A.5. $\Phi_n(x)$ 不可约且是任意 n 次本原单位根的极小多项式.

附录 B　分析学

本附录旨在回顾正文中可能用到的分析学背景知识. 附录中的结论几乎不会给出证明, 读者可以自行参考分析学的相关著作如 [2],[3].

B.1　解析延拓

定理 B.1. 设 f, g 是在一个区域 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 上的全纯函数, 并且在某个非空开子集 $S \subset \Omega$ 上, $f(z) = g(z)\ \forall z \in S$, 则 $f(z) = g(z)\ \forall z \in \Omega$

注. 更一般地, S 可以替换成聚点在 Ω 内的（不同点构成的）点列.

定义 B.2. 给定函数 f, F 使得它们分别在区域 Ω, Ω' 上解析, 并且 $\Omega \subset \Omega'$. 如果 $f(z) = F(z)\ \forall z \in \Omega$, 我们就称 F 是 f 到 Ω' 上的解析延拓.

如果解析延拓存在, **定理 B.1** 保证了解析延拓的唯一性.

事实上, 正文中出现的大多是延拓成亚纯函数, 不难证明亚纯延拓也是唯一的.

B.2　Poisson 求和公式

Poisson 求和公式或可归于调和分析, 欲探求具体细节和一般形式的读者可查阅 [4].

定义 B.3. 设 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 是 L^1 函数 (即可积函数). f 的 *Fourier* 变换 $\hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 由

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-2\pi i x \xi} dx$$

给出. 这是一致连续的.

定义 B.4. 我们定义 *Schwarz* 函数空间如下

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \mid f \in C^\infty(\mathbb{R}), |f^{(n)}(t)| = o(|t|^c)(t \to \pm\infty)\ \forall n \in \mathbb{N}_{\geq 0}, c \in \mathbb{R}\}$$

引理 B.5. 设 $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. 则有

1. $\hat{f}, \hat{g} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

2. $\hat{\hat{f}}(t) = f(-t)$.

3. 对卷积

$$(f \star g)(t) = \int_{\infty}^{\infty} f(t-u)g(u)du$$

有

$$\widehat{f \star g}(s) = \hat{f}(s)\hat{g}(s).$$

定理 B.6 (Poisson 求和公式)**.** 若 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, 则

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n).$$

附录 C “初等”方法

本附录将介绍一些只用到数学分析的方法, 主要内容都是关于均阶估计的.

C.1 Dirichlet 除数问题

考虑除数函数 $d(n)=\sum_{m|n}1$.

$$
\begin{aligned}
\sum_{n\le x}d(n) &= \sum_{n\le x}\sum_{m|n}1\\
&\xlongequal{(n=mq)}\sum_{\substack{m,q\\ mq\le x}}1=\sum_{m\le x}\sum_{q\le\frac{x}{m}}1\\
&=\sum_{m\le x}\left[\frac{x}{m}\right]=\sum_{m\le x}\left(\frac{x}{m}-\left\{\frac{x}{m}\right\}\right)\\
&=x\sum_{m\le x}\frac{1}{m}-\sum_{m\le x}\left\{\frac{x}{m}\right\}
\end{aligned}
$$

注意到

$$\sum_{m\le x}\frac{1}{m}=\log x+\gamma+O\left(\frac{1}{x}\right)$$

其中 γ 是 Euler 常数.

于是

$$\sum_{n\le x}d(n)=x\log x+O(x).$$

为了改进上述结果, 观察上述对 $mq\le x$ 的求和, 我们给出它的几何描述, 即第一象限的双曲线同坐标轴之间的区域有多少整点. 这启发我们考虑如下等式

$$
\begin{aligned}
\sum_{n\le x}d(n) &= 2\sum_{m\le x}\left[\frac{x}{m}\right]-\left[\sqrt{x}\right]^2\\
&=2(x(\log\sqrt{x}+\gamma+O(\frac{1}{\sqrt{x}}))-\sum_{m\le\sqrt{x}}\left\{\frac{x}{m}\right\})-(\sqrt{x}-\{\sqrt{x}\})^2\\
&=x\log x+(2\gamma-1)x+O(\sqrt{x}).
\end{aligned}
$$

注. 比较上述结果, 我们不难得出

$$\sum_{n \le x} \left\{ \frac{x}{n} \right\} = (1-\gamma)x + O(\sqrt{x}).$$

上面的办法可以推广到一般的数论函数即为所谓 Dirichlet 双曲律,

定理 C.1 (Dirichlet 双曲律)**.** 设 f, g 是两个数论函数, 其部分和函数分别记为 F, G. 于是对任意的 $1 \le y \le x$ 有

$$\sum_{md \le x} f(m)g(d) = \sum_{d \le y} g(d)F(x/d) + \sum_{m \le x/y} f(m)G(x/m) - F(x/y)G(y).$$

证明是显然的.

此外, 从上面的过程中我们可以总结一套通行的做法, 考虑一般的数论函数 $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} \sum_{n \le x} \sum_{d \mid n} f(d) &\overset{(n=dq)}{=\!=\!=} \sum_{d \le x} f(d) \left[\frac{x}{d} \right] \\ &= \sum_{d \le x} f(d) \frac{x}{d} - \sum_{d \le x} f(d) \left\{ \frac{x}{d} \right\} \\ &= x \sum_{d \le x} \frac{f(d)}{d} + O(\sum_{d \le x} |f(d)|). \end{aligned}$$

C.2 Chebyshev 估计

本节的主要结果是下面的定理:

定理 C.2 (Chebyshev)**.** 对于 $x > 2$, 我们有

1. $\psi(x) \asymp x$,
2. $\varphi(x) \asymp x$,
3. $\pi(x) \asymp \frac{x}{\log x}$.

证明. 首先证明存在正常数 c_1, c_2 使得

$$c_1 x \le \psi(x) \le c_2 x. \tag{6}$$

我们考虑

$$\begin{aligned} T(x) := \sum_{n\le x} \log n &= \sum_{n\le x}\sum_{d|n} \Lambda(d) \\ &\overset{(n=dq)}{=\!=\!=} \sum_{\substack{d,q \\ dq\le x}} \Lambda(d) = \sum_{d\le x}\sum_{q\le \frac{x}{d}} \Lambda(d) \\ &= \sum_{n\le} \psi(\frac{x}{n}) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi(\frac{x}{n}) \end{aligned}$$

不难看出 $T(x) = \sum\limits_{n\le x} \log n = x\log x - x + O(\log x)$. 回忆对于单调递减趋于 0 的数列 $\{a_n\}$, 有

$$a_1 - a_2 \le \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n \le a_1 - a_2 + a_3$$

我们将其应用到 $\psi(\frac{x}{n})$ 上. 首先

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\psi(\frac{x}{n}) = \sum_{n=1}^{\infty}\psi(\frac{x}{n}) - 2\sum_{n=1}^{\infty}\psi(\frac{x}{2n}) = T(x) - 2T(\frac{x}{2}),$$

于是

$$\psi(x) - \psi(\frac{x}{2}) \le T(x) - 2T(\frac{x}{2}) \le \psi(x) - \psi(\frac{x}{2}) + \psi(\frac{x}{3}).$$

我们有一组不等式

$$\psi(\frac{x}{2^k}) - \psi(\frac{x}{2^{k+1}}) \le \frac{x}{2^k}\log 2 + O(\log \frac{x}{2^k}) \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

把它们加起来可得

$$\psi(x) \le (2\log 2)x + O((\log x)^2).$$

另一边, 我们有

$$\begin{aligned} \psi(x) \ge \psi(x) - \psi(\frac{x}{2}) &\ge T(x) - 2T(\frac{x}{2}) - \psi(\frac{x}{3}) \\ &\ge \frac{\log 2}{3}x + O(\log x) \end{aligned}$$

其余部分效仿**定理 1.6.** 即可. □

注. *Chebyshev* 利用更精细的办法, 得到 (5) 中的常数大致分别为 $c_1 = 0.92\ldots, c_2 = 1.10\ldots$.

现在我们可以证明 Bertrand 假设, 即下述定理

定理 C.3 (Bertrand)**.** 对任意 $n \in \mathbb{Z}^+$, $(n, 2n]$ 至少包含一个素数.

附录 D　π 是无理数

命题 D.1. π 是无理数

证明. 用反证法. 假设 $\pi = \frac{a}{b}$, $a, b \in \mathbb{Z}^+$. 引入

$$f(x) = f_n(x) = \frac{x^n(a-bx)^n}{n!} \quad n \in \mathbb{Z}^+$$

不难看出 $f(0) = f(\pi) = 0$, $f(x) = f(\pi - x)$.

断言. 对每一个 $j \in \mathbb{Z}^+$, $f^{(j)}(0) \in \mathbb{Z}$. 下面我们证明断言. 我们可以将 $f(x)$ 的分子部分写成

$$x^n(a-bx)^n = c_n x^n + \cdots + c_{2n} x^{2n}$$

其中 $c_n, \ldots, c_{2n} \in \mathbb{Z}$.

当 $j < n$ 时, $f^{(j)}(0) = 0 \in \mathbb{Z}$.

当 $j \geq n$(不妨 $n \leq 2n$) 时, 考虑 $(x^j)^{(j)} = j!$, 有

$$\left(\frac{c_j x^j}{n!}\right)^{(j)} = \frac{c_j j!}{n!} \in \mathbb{Z}$$

因此断言成立. 同理我们有 $\forall j \in \mathbb{Z}^+$, $f^{(j)}(\pi) \in \mathbb{Z}$.

下引入

$$\begin{aligned} F(x) &= f(x) - f^{(2)}(x) + f^{(4)}(x) + \cdots + (-1)^n f^{(2n)}(x) \\ &= \sum_{j=0}^{n} (-1)^j f^{(2j)}(x). \end{aligned}$$

约定 $f^{(0)}(x) = f(x)$. 于是 $f(x) = F(x) + F^{(2)}(x)$. 观察到

$$\begin{aligned} (F'(x)\sin x - F(x)\cos x)' &= F''(x)\sin x + F(x)\sin x \\ &= f(x)\sin x. \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} \int_0^\pi f(x)\sin x &= (F'(x)\sin x - F(x)\cos x)\Big|_0^\pi \\ &= F(\pi) + F(0) \in \mathbb{Z}^+ \end{aligned}$$

而当 $0<x<\pi$ 时, $f(x)\sin x>0$. 于是有

$$1 \leq \int_0^{\pi} f(x)\sin x \leq \frac{\pi^{n+1}a^n}{n!} \to 0 \quad (n\to\infty)$$

矛盾. $\square$

参考文献

[1] 冯克勤. 代数数论入门.

[2] G. 特伦鲍姆. 解析与概率数论导引. 陈华一 译

[3] 朱富海. 有限群表示论

[4] Serge Lvovski. Principles of Complex Analysis.

[5] Elias M.Stein. Complex Analysis.

[6] Loukas Grafakos. Classical Fourier Analysis. GTM249.

[7] J-P Serre. Linear Representations of Finite Groups. GTM42.