Problem Set 2

1. 设 G 是有限交换群, $H \leq G$. 设 $A = \{f \in G^* \mid f|_H \equiv 1\}$. 求证: A 是交换群, $A \cong G/H$, 并且

$$\sum_{f \in A} f(x) = \begin{cases} |G/H| & x \in H, \\ 0 & x \notin H. \end{cases}$$

2. 设 χ 是 $\bmod\ q$ 的非主特征, 求证

$$L(1, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n}.$$

3. 求证

$$\int_1^{+\infty} \frac{\psi(u) - u}{u^{2+s}} du$$

可解析延拓成 $Re(s) \geq 0$ 上的解析函数.

4. 设 $\chi(\bmod\ q)$ 是非主 Dirichlet 特征. 设 $a < b$ 是整数, 求证

$$|\sum_{n=a}^{b} \chi(n)| \leq \frac{1}{2}\varphi(q)$$

5. 设 $\chi(\bmod\ k)$ 是非主实特征. 令 $S=\sum_{n=1}^{k} n\chi(n)$.

(1) 证明: 若 $(a,k)=1$, 则 $(1-a\chi(a))S\equiv 0(\bmod\ k)$.

(2) $12S\equiv 0(\bmod\ k)$.

6. 设 $x\geq 1$. 求证: 存在常数 γ s.t. $\sum_{n\leq x}\frac{1}{n}=\log x+\gamma+O(\frac{1}{x})$. 其中 $O(\frac{1}{x})$ 表示若 $f(x)=O(\frac{1}{x})$, 则 $f(x)$ 满足: 存在常数 $c>0$ s.t. $|f(x)|\leq c\frac{1}{x}$.