STAT0041: Stochastic Calculus

Homework 3 - Brownian Motion

Lecturer: Weichen Zhao Fall 2024

- 1. 设 $(B_t)_{t\geq 0}$ 为一个标准布朗运动,证明:固定 $t_0\geq 0, B_{t_0+t}-B_{t_0}$ 为一个布朗运动;
- 2. 设 $B_0 = 0$, 证明: 样本轨道连续的随机过程 $(B_t)_{t \geq 0}$ 为一个布朗运动当且仅当 $(B_t)_{t \geq 0}$ 为一个高斯过程,而且满足:

$$\mathbb{E}B_t = 0, \ \mathbb{E}[B_t B_s] = t \wedge s, \quad \forall \ t, s$$

3. 设 W_t 和 \tilde{W}_t 是两个独立标准布朗运动, $\lambda \in [0,1]$ 为一个常数,证明:

$$B_t \triangleq \lambda W_t + \sqrt{1 - \lambda^2} \tilde{W}_t$$

为布朗运动。

4. 设 $(B_t)_{t\geq 0}$ 为一个标准布朗运动,证明:

$$B_t^3 - 3tB_t$$

是鞅。

5. 根据无穷小生成元的定义证明:标准布朗运动的生成元为 $\frac{1}{2}\Delta$ 。