

STAT0041: Stochastic Calculus

Homework 3 - Brownian Motion

Lecturer: Weichen Zhao

Fall 2025

1. 设 $(B_t)_{t \geq 0}$ 为一个标准布朗运动, 证明: 固定 $t_0 \geq 0$, $B_{t_0+t} - B_{t_0}$ 为一个布朗运动;
2. 设 $(B_t)_{t \geq 0}$ 为一个标准布朗运动, 证明: $\forall c \neq 0 \in \mathbb{R}$, $cB_{\frac{t}{c^2}}$ 为一个布朗运动, 特别地, $c = -1$, $-B_t$ 为一个布朗运动;
3. 设 $B_0 = 0$, 证明: 样本轨道连续的随机过程 $(B_t)_{t \geq 0}$ 为一个布朗运动当且仅当 $(B_t)_{t \geq 0}$ 为一个高斯过程, 而且满足:

$$\mathbb{E}B_t = 0, \quad \mathbb{E}[B_t B_s] = t \wedge s, \quad \forall t, s$$

4. 设 W_t 和 \tilde{W}_t 是两个独立标准布朗运动, $\lambda \in [0, 1]$ 为一个常数, 证明:

$$B_t \triangleq \lambda W_t + \sqrt{1 - \lambda^2} \tilde{W}_t$$

为布朗运动。

5. 设 $(B_t)_{t \geq 0}$ 为一个标准布朗运动, 证明:

$$B_t^3 - 3tB_t$$

是鞅。

6. 根据无穷小生成元的定义证明: 标准布朗运动的生成元为 $\frac{1}{2}\Delta$ 。