STAT0008: Stochastic Processes

Lecture 9 - Continuous-time Markov Chains

Lecturer: Weichen Zhao　　Spring 2025

Key concepts:

- 连续时间*Markov*链；
- 转移速率矩阵/生成元/Q矩阵；
- *Kolmogorov*向前-向后方程。

9.1 连续时间 Markov 链的基本定义

先给出连续时间 Markov 链的定义

Definition 9.1 (连续时间 Markov 链) 设E是一个可数集合，称状态空间为E的连续时间随机过程$\{X(t)\}$为一个连续时间 *Markov* 链*(Continuous-time Markov Chain, CTMC)*，如果对于任意 $t, s \geq 0$，$s > s_k \geqslant s_{k-1} \geqslant \cdots \geqslant s_1 > 0, k \in \mathbb{N}$, 任意状态 $i_1, i_2, \ldots, i_k, i, j \in E$，有*Markov*性：

$$P(X(t+s)=j|X(s)=i, X(s_k)=i_k, \cdots, X(s_1)=i_1) = P(X(t+s)=j|X(s)=i) \quad (9.1)$$

成立。如果

$$P((X(t+s)=j|X(s)=i) = P((X(t)=j|X(0)=i), \quad \forall s \geqslant 0$$

则该 *Markov* 链为齐次的。记$P_{ij}(t)$为从状态i出发经过t时间间隔后转移到状态j的转移概率，即

$$P_{ij}(t) = P(X(t)=j|X(0)=i)$$

以后讨论中如无特别说明，所讨论的 *Markov* 链是齐次的。

Definition 9.2 (转移概率矩阵) 称由转移概率组成的矩阵

$$P(t) = \{P_{ij}(t)\}_{i,j\in E} = \begin{pmatrix} P_{00}(t) & P_{01}(t) & P_{02}(t) & \cdots \\ P_{10}(t) & P_{11}(t) & P_{12}(t) & \cdots \\ P_{20}(t) & P_{21}(t) & P_{22}(t) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

转移概率矩阵，其中，矩阵中各元素满足

$$P_{ij}(t) \geqslant 0,\ i,j \in E, \quad \sum_{j\in E} P_{ij}(t) = 1$$

Proposition 9.3 (Chapman–Kolmogorov 方程)
对任意$i,j \in E, t, s \geqslant 0$,

$$P_{ij}(s+t) = \sum_{k\in E} P_{ik}(s)P_{kj}(t)$$

写成矩阵形式为

$$P(s+t) = P(s)P(t), \quad P(0) = I \tag{9.2}$$

Proof:

$$\begin{aligned}
&P(X(s+t)=j|X(0)=i)\\
&=\sum_{k\in E} P(X(s+t)=j, X(s)=k|X(0)=i)\\
&=\sum_{k\in E} P(X(s+t)=j|X(s)=k, X(0)=i)P(X(s)=k|X(0)=i)\\
&=\sum_{k\in E} P_{kj}(t)P_{ik}(s) \qquad (\text{Markov性})
\end{aligned}$$

■

注1. 我们需要对$P(t)$做一个连续性假设

$$\lim_{\Delta t\downarrow 0} P(\Delta t) = I$$

即$\boldsymbol{P}(\Delta t)$的每一个元素都在原点处连续。满足这个条件的转移概率通常称为标准的(standard)转移概率。转移概率的标准性可以保证其不仅在原点，而且在任意的t处都是连续的，即

$$\lim_{\Delta t\downarrow 0} P(t+\Delta t) = P(t)$$

标准性的物理概念也非常明显。当转移所需要的时间趋于 0 时，不同状态间转移发生的概率也随之减小，链以接近于 1 的概率停留在原状态。这是由于对于一般物理系统，转移需要消耗能量，而在瞬间内积聚状态改变所需的能量需要无穷大的功率，这一般情况下是无法达到的。所以今后如不加说明，所研究的转移概率都是标准的。

注2. 式(9.2)被称为$\{P(t)\}_{t\geq 0}$的半群(Semigroup)性质，我们称$\{P(t)\}_{t\geq 0}$为一个Markov半群。

9.2 转移速率矩阵与Kolmogorov向前-向后方程

离散时间时齐Markov的n步转移矩阵

$$P^{(n)} = P^n$$

是由一个“最小的”P所生成的，但是连续时间和离散时间 Markov 链不同的是，时间s, t不是非负整数，所以找不到“最小”的时间单位Δ,使得对于所有的t都有

$$P(t) = P^{t/\Delta}(\Delta)$$

这正是连续时间随机过程的复杂之处。因而需要找到一个能起到相当于离散 Markov 链中一步转移矩阵P所起“作用”的量，并利用它来计算$P(t)$。

从CK方程

$$P(s+t) = P(s)P(t), \quad P(0) = I$$

来看，这是一个无限维的矩阵值函数方程，我们先形式地考虑一个函数方程

$$f(s+t) = f(s)f(t), \quad f(0) = 1$$

这个方程在$t = 0$处连续的通解为

$$f(t) = e^{\alpha t}$$

其中$\alpha = f'(0)$，由此，我们猜测$P(t)$可以表示为

$$P(t) = \exp(P'(0)t)$$

下面我们先定义转移速率矩阵。

Definition 9.4 (转移速率矩阵) 转移矩阵$P(t)$对应的转移速率矩阵$Q=(q_{ij})$定义为

$$Q=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{P(\Delta t)-I}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}P(t)|_{t=0}$$

分量表示为

$$q_{ii}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{P_{ii}(\Delta t)-1}{\Delta t}=:-q_i,\quad q_i\geqslant 0 \tag{9.3}$$

$$q_{ij}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{P_{ij}(\Delta t)}{\Delta t},\quad j\neq i \tag{9.4}$$

称q_{ij}为从状态i到状态j的转移速率*(transition rate)*。

注1. 转移速率矩阵Q也被称为$P(t)$的生成元(generator)，也简称为Q矩阵。

注2. 转移速率矩阵Q的良定性：

Proposition 9.5 设转移矩阵$P(t)$是标准的，即满足连续性条件$\lim_{\Delta t\downarrow 0}P(\Delta t)=I$，那么

(1)

$$q_{ii}=\lim_{\Delta t\downarrow 0}\frac{P_{ii}(\Delta t)-1}{\Delta t}=:-q_i$$

存在，但可能为∞；

(2)

$$q_{ij}=\lim_{\Delta t\downarrow 0}\frac{P_{ij}(\Delta t)}{\Delta t},\quad j\neq i$$

存在且有限。

(3)

$$\sum_{j\neq i}q_{ij}\leq q_i$$

证明参考《应用随机过程》，陈大岳、章复熹，北京大学出版社，2023，命题2.6.3.

总结命题9.5中的性质，可以给出下面的定义

Definition 9.6 (Q矩阵) $Q=(q_{ij})$称为一个Q矩阵，如果

(1) $q_{ii}=-q_i\leq 0$, q_i可以取$+\infty$

(2) $0\leq q_{ij}<+\infty,\quad j\neq i$

(3) $\sum_{j\neq i}q_{ij}\leq q_i$

进一步，若$\sum_{j\neq i}q_{ij}=q_i<+\infty$，即 $\sum_{j\in E}q_{ij}=0$，则称Q矩阵是保守的*(conservation)*，此后我们都考虑保守的Q矩阵。

对于给定Q矩阵，若存在$Markov$链满足

$$\begin{aligned}q_{ii}&=\lim_{\Delta t\downarrow 0}\frac{P_{ii}(\Delta t)-1}{\Delta t}=:-q_i,\quad q_i\geqslant 0\\ q_{ij}&=\lim_{\Delta t\downarrow 0}\frac{P_{ij}(\Delta t)}{\Delta t},\quad j\neq i\end{aligned}$$

则称此$Markov$链为以Q为密度的连续时间$Markov$链。

对于离散时间的情形，我们通过一步转移矩阵P计算n步转移矩阵，对于连续时间，计算转移矩阵$P(t)$会复杂很多，下面我们考虑状态空间E有限时如何计算$P(t)$.

给定矩阵Q，定义

$$e^{Qt}\triangleq\sum_{k=0}^{\infty}\frac{Q^k}{k!}$$

Proposition 9.7 对于有限状态连续时间$Markov$链，则它的转移速率矩阵Q一定是保守的，而且转移矩阵$\{P(t)\}$满足$Kolmogorov$向前方程

$$\frac{d}{dt}P(t)=P(t)Q,\quad P(0)=I \tag{9.5}$$

以及$Kolmogorov$向后方程

$$\frac{d}{dt}P(t)=QP(t),\quad P(0)=I \tag{9.6}$$

即$P(t)=e^{Qt}$.

Proof: 由定义，

$$q_i = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1 - P_{ii}(\Delta t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{j \neq i} \frac{P_{ij}(\Delta t)}{\Delta t} \stackrel{*}{=} \sum_{j \neq i} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P_{ij}(\Delta t)}{\Delta t} = \sum_{j \neq i} q_{ij}$$

$\stackrel{*}{=}$成立是因为状态空间有限，所以Q是保守的。由CK方程

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Delta t}\left(P_{ij}\left(t+\Delta t\right) - P_{ij}\left(t\right)\right) &= \frac{1}{\Delta t}\left(\sum_{k=1}^{N} P_{ik}\left(t\right) P_{kj}\left(\Delta t\right) - P_{ij}\left(t\right)\right) \\ &= \sum_{k=1}^{N} P_{ik}\left(t\right) \frac{P_{kj}\left(\Delta t\right) - \delta_{kj}}{\Delta t}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Delta t}\left(P_{ij}\left(t+\Delta t\right) - P_{ij}\left(t\right)\right) &= \frac{1}{\Delta t}\left(\sum_{k=1}^{N} P_{ik}\left(\Delta t\right) P_{kj}\left(t\right) - P_{ij}\left(t\right)\right) \\ &= \sum_{k=1}^{N} \frac{P_{ik}\left(\Delta t\right) - \delta_{ik}}{\Delta t} P_{kj}\left(t\right)\end{aligned}$$

令$\Delta t \downarrow 0$，即得

$$\frac{d}{dt}P(t) = P(t)Q = QP(t)$$

由于状态空间有限，所以Q是有界算子，那么方程解是唯一的，即$P(t) = e^{Qt}$. ∎

注1. Kolmogorov向前方程又称Fokker-Planck方程

注2. 对于状态空间是可数的形式，Kolmogorov向前-向后方程需要一些条件才能成立。具体来说，设$\{P(t)\}$是一个Markov半群，Q为其对应的转移速率矩阵，若Q是保守的，则Kolmogorov向后方程成立；若$\sup_{j \in E} q_j < \infty$，则Kolmogorov向前方程成立。

注3. 矩阵乘积运算是不可交换的，所以Kolmogorov向前-向后方程是两个方程，只是由于时齐性看起来有了$\frac{d}{dt}P(t) = P(t)Q = QP(t)$，向后方程本质上应该写为

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\Delta t}\left(P_{ij}\left(t\right) - P_{ij}\left(t-\Delta t\right)\right) \\ &= \frac{1}{\Delta t}\left(\sum_{k=1}^{N} P_{ik}\left(\Delta t\right) P_{kj}\left(t-\Delta t\right) - P_{ij}\left(t-\Delta t\right)\right) \\ &= \sum_{k=1}^{N} \frac{P_{ik}\left(\Delta t\right) - \delta_{ik}}{\Delta t} P_{kj}\left(t-\Delta t\right)\end{aligned}$$

思考：若连续时间Markov链是非时齐的，即转移速率矩阵依赖于时间$Q(t)$，那么转移概率$P(s,t)$的Kolmogorov向前-向后方程是什么？

9.3 例子

Example 9.8 (Poisson过程) *回顾Poisson过程的定义：若计数过程$\{N(t),t\geq 0\}$满足：*

(1) $N(0)=0$*;*

(2) 具有独立增量;

(3) 在长度为 t 的任意区间中的事件数服从以 λt 为均值的Poisson分布，即，对于任意$s,t\geq 0$，有

$$P\{N(t+s)-N(s)=n\}=e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!},\quad n=0,1,\ldots$$

*则称为**具有速率**$\lambda(\lambda>0)$的Poisson过程。Poisson过程$\{N(t),t\geq 0\}$是状态空间为$\{0,1,2,\ldots\}$，转移概率为*

$$P_{ij}(t)=P(N(t+s)=j|N(s)=i)=\begin{cases}\frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!}\exp(-\lambda t), & j\geqslant i\\ 0, & j<i\end{cases}$$

的连续时间Markov链，其中$P_{ij}(0)=\delta_{ij}$

Proof: 由于条件概率

$$\begin{aligned}&P\left(N\left(t_{n+1}\right)=j|N\left(t_n\right)=i,N\left(t_{n-1}\right)=i_{n-1},\cdots,N\left(t_0\right)=i_0\right)\\&=P\left(N\left(t_{n+1}\right)-N\left(t_n\right)=j-i|N\left(t_n\right)=i,\cdots,N\left(t_0\right)=i_0\right)\\&=P\left(N\left(t_{n+1}\right)-N\left(t_n\right)=j-i\right)\qquad\text{(独立增量)}\\&=P\left(N\left(t_{n+1}-t_n\right)=j-i\right).\qquad\text{(平稳增量)}\end{aligned}$$

只依赖于$i,j,t_{n+1}-t_n$，所以Poisson过程$\{N(t),t\geq 0\}$是一个连续时间Markov链，转移概率为

$$P_{ij}(t)=P(N(t)=j-i)=\begin{cases}\frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!}\exp(-\lambda t), & j\geqslant i\\ 0, & j<i\end{cases}$$

所以转移矩阵为

$$P(t)=\begin{pmatrix} 1 & \lambda t & \frac{(\lambda t)^2}{2!} & \cdots & \frac{(\lambda t)^k}{k!} & \cdots \\ & 1 & \lambda t & \cdots & \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} & \cdots \\ & & 1 & \cdots & \frac{(\lambda t)^{k-2}}{(k-2)!} & \cdots \\ & & & \ddots & \vdots & \\ & & & & 1 & \cdots \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix}\exp(-\lambda t)$$

下面我们check Poisson过程的Q矩阵，

$$q_{ij}\triangleq\lim_{\Delta t\downarrow 0}\frac{P_{ij}(\Delta t)-\delta_{ij}}{\Delta t}=\begin{cases}\lambda, & j=i+1\\ -\lambda, & j=i\\ 0, & 其他\end{cases}$$

$$Q=(-\lambda)\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}.$$

用归纳法容易验证

$$Q^k=(-\lambda)^k\begin{pmatrix} C_k^0 & C_k^1(-1)^1 & C_k^2(-1)^2 & C_k^3(-1)^3 & \cdots\\ 0 & C_k^0 & C_k^1(-1)^1 & C_k^2(-1)^2 & \cdots\\ 0 & 0 & C_k^0 & C_k^1(-1)^1 & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix},$$

其中对于 $j<0$或 $j>k$,规定 $C_k^j=0$.定义

$$q_{ij}^{(k)}=(-\lambda)^k C_k^{j-i}(-1)^{j-i}, k\geqslant 1, i,j\in I,$$

利用$P_{ij}(0)=\delta_{ij}$得到

$$Q^k=\left(q_{ij}^{(k)}\right), Q^0=I,$$

并且对 $j \geqslant i$，有

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}q_{ij}^{(k)} &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\lambda^{j-i}C_k^{j-i}(-\lambda)^{k-(j-i)} \\ &= \sum_{k=j-i}^{\infty}\frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!\,[k-(j-i)]!}(-\lambda t)^{k-(j-i)} \\ &= \frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!}e^{-\lambda t} = P_{ij}(t)\end{aligned}$$

写成矩阵的形式就得到

$$P(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}(q_{ij}^{(k)}) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(tQ)^k = e^{tQ}.$$

■

Poisson过程的例子是我们先写出转移矩阵$P(t)$，然后再通过求导得到Q矩阵，然而现实中，往往是先得到描述转移概率变化率的Q矩阵，然后通过Kolmogorov向前向后方程求解转移矩阵$P(t)$。下面我们看一个例子。

Example 9.9 (机器维修问题) 设某个机器的正常工作时间服从参数为λ的指数分布，一旦机器损坏则立刻进行修理，修理时间服从参数为μ的指数分布。如果在起始时刻$t=0$机器处于正常工作状态，计算在时刻T机器处于工作状态的概率？

解. 这是一个两状态的 Markov 链。设正常工作状态为0，修理状态为1, 则状态空间为$\{0,1\}$, 在Δt时间内，机器从正常状态转入损坏修理状态的概率为

$$P_{01}(\Delta t) = 1-\exp(-\lambda\Delta t) = \lambda\Delta t + o(\Delta t)$$

且有$P_{00}(\Delta t) = 1 - P_{01}(\Delta t)$。另一方面，在$\Delta t$时间内，机器从修理状态转入正常状态的概率为

$$P_{10}(\Delta t) = 1-\exp(-\mu\Delta t) = \mu\Delta t + o(\Delta t)$$

且有$P_{11}(\Delta t) = 1 - P_{10}(\Delta t)$。所以$Q$矩阵为

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix}$$

求Q的特征值为

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -(\lambda + \mu)$$

相应的特征向量为

$$(1,1)^{\mathrm{T}}, \quad \left(-1, \frac{\mu}{\lambda}\right)^{\mathrm{T}}$$

求解Kolmogorov方程，可得

$$\begin{aligned}
P(t) &= \exp(Qt) \\
&= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & \frac{\mu}{\lambda} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \exp(-(\lambda+\mu)t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & \frac{\mu}{\lambda} \end{pmatrix}^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\mu}{\lambda+\mu} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\exp(-(\lambda+\mu)t) & \frac{\lambda}{\lambda+\mu} - \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\exp(-(\lambda+\mu)t) \\ \frac{\mu}{\lambda+\mu} - \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\exp(-(\lambda+\mu)t) & \frac{\lambda}{\lambda+\mu} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\exp(-(\lambda+\mu)t) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

由于机器在时刻 0正常工作，所以初始概率为$(1,0)^{\mathrm{T}}$，因此在时刻T仍然正常工作的概率为

$$P_0(T) = P_0(0)P_{00}(T) = \frac{\mu}{\lambda+\mu} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\exp(-(\lambda+\mu)T)$$

9.4 Q矩阵的概率意义

连续时间 Markov 链的行为可以从它的两个特征“停留”和“跳变”来考察，这两个特征都和Q矩阵有着密切关系，本节我们给出Q矩阵的元素q_{ij}的概率意义。

Theorem 9.10 设$X(t)$为一个连续时间$Markov$过程，定义$\tau \triangleq \inf\{t \geqslant 0 : X(t) \neq i, X(0) = i\}$表示$X(t)$在状态$i$的停留时间，则

(1) $P\left(\tau > t \mid X\left(0\right) = i\right) = e^{-q_i t}, t \geqslant 0$;

(2) 当$j \neq i$时，$P\left(X\left(\tau\right) = j, \tau \leqslant t \mid X\left(0\right) = i\right) = \frac{q_{ij}}{q_i}\left(1 - e^{-q_i t}\right)$;

(3) 当$j \neq i$时，$P\left(X\left(\tau\right) = j | X\left(0\right) = i\right) = \frac{q_{ij}}{q_i}$

Proof: (1) 注意到

$$P\left(\tau > t | X\left(0\right) = i\right) = P\left(X\left(u\right) = i, u \in [0,t] \, | X\left(0\right) = i\right)$$

我们下面计算上式右端。注意到集合列 $B_n \triangleq \{\frac{jt}{2^n},\ 1 \leqslant j \leqslant 2^n\}$ 单调上升(越加越细)，事件列

$$A_n \triangleq \{X(\frac{jt}{2^n}) = i, 1 \leqslant j \leqslant 2^n\} = \{X(u) = i, u \in B_n\}$$

单调下降: $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$，因为 $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ 在$[0,t]$中稠密，$X(t)$ 的轨道又是阶梯形状和右连续的, 所以有

$$\{X\left(u\right) = i, u \in [0,t]\} = \bigcap_{j=1}^{\infty} A_n \qquad a.s..$$

由概率的连续性

$$\begin{aligned}
&P\left(X\left(u\right) = i, u \in [0,t] \mid X\left(0\right) = i\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} P\left(A_n \mid X\left(0\right) = i\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} P\left(X\left(\frac{jt}{2^n}\right) = i, 1 \leqslant j \leqslant 2^n \mid X\left(0\right) = i\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left[P_{ii}\left(\frac{t}{2^n}\right)\right]^{2^n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left[P_{ii}\left(\frac{t}{n}\right)\right]^{n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left[P_{ii}\left(0\right) + P'_{ii}\left(0\right)\frac{t}{n} + o\left(\frac{t}{n}\right)\right]^{n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left[1 - q_i\frac{t}{n} + o\left(\frac{t}{n}\right)\right]^{n} \\
&= e^{-q_i t}.
\end{aligned}$$

(2) 重新定义

$$B_n \triangleq \{jt/2^n | 1 \leq j \leq 2^n - 1\}$$

$$A_n \triangleq \{X(u) = i, u \in B_n\}$$

A_n 单调下降, 使得

$$\{X(u) = i, u \in [0,t)\} = \bigcap_{j=1}^{\infty} A_n.$$

对于 $t, \Delta t > 0$ 和 $j \neq i$, 从 Taylor 展开公式

$$P(X(t) = j | X(t-\Delta t) = i) = P_{ij}(\Delta t) = q_{ij}\Delta t + o(\Delta t)$$

知道

$$\lim_{\Delta t\to 0} P(X(t) = j | X(t-\Delta t) = i) = q_{ij}\Delta t.$$

取 $\Delta t = \frac{t}{2^n}$, 得到

$$\begin{aligned}
&P(X(\tau)=j,\tau=t|X(0)=i)\\
&=P(\{X(u)=i,u\in[0,t)\},X(t)=j|X(0)=i)\\
&=\lim_{n\to\infty}P(A_n,X(t)=j|X(0)=i)\\
&=\lim_{n\to\infty}P(A_n|X(0)=i)P(X(t)=j|A_n,X(0)=i)\\
&=\lim_{n\to\infty}[P_{ii}(\frac{t}{2^n})]^{2^n-1}P(X(t)=j|X(t-\Delta t)=i)\\
&=\lim_{n\to\infty}(1-q_i\frac{t}{2^n}+o(\frac{t}{2^n}))^{2^n-1}(q_{ij}\Delta t+o(\Delta t))\\
&=\mathrm{e}^{-q_it}q_{ij}\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

两边对于$t\in[0,s]$积分得到

$$P\left(X\left(\tau\right)=j,\tau\leqslant s|X\left(0\right)=i\right)=\int_0^s q_{ij}e^{-q_it}dt=\frac{q_{ij}}{q_i}\left(1-e^{-q_is}\right)$$

(3) 在(2)中令$t\to\infty$即得。 ■

注1. 当$q_i=0$时，

$$P\left(\tau>t\mid X\left(0\right)=i\right)=e^{-q_it}=1$$

这表明$X(t)$不会离开状态i，称状态i为吸收状态(absorbing/traps state)。当$q_i=+\infty$时，

$$P\left(\tau>t\mid X\left(0\right)=i\right)=0$$

这表明$X(t)$在状态i几乎不会停留，称状态i为瞬时状态(instantaneous state)。当$0<q_i<+\infty$时，称状态i为逗留状态(stable state)。我们只考虑逗留的Markov链。

注2. 由定理9.10的结论，从状态i出发在状态i的停留时间服从参数q_i的指数分布，基于此我们可以给出连续时间Markov链行为的具体描述。

定义

$$k_{ij}\triangleq\begin{cases}q_{ij}/q_i, & 当\ q_i>0,j\neq i,\\ 0, & 当\ q_i>0,j=i,\\ \delta_{ij}, & 当\ q_i=0,\end{cases}$$

则$K=(k_{ij})$的各行之和为1. 定义

$$\begin{aligned}&\tau_0=0,\\&\tau_1=\inf\{t>0|X(t)\neq X(0)\},\\&\tau_2=\inf\{t>\tau_1|X(t)\neq X(\tau_1)\},\\&......\\&\tau_n=\inf\{t>\tau_{n-1}|X(t)\neq X(\tau_{n-1})\},\\&......\end{aligned}$$

则 τ_i 是马氏链 $\{X(t)\}$ 的第 i 次转移时刻。 $T_i=\tau_{i+1}-\tau_i$ 是第 i 次转移后的停留时间。从定理9.10得到Markov链的以下结果：

(1) 连续时间→离散时间：

$X_n=X(\tau_n)$ $(n=0,1,\cdots)$ 是以 $K=(k_{ij})$ 为一步转移概率矩阵的离散时间Markov链;

沿着 $\{X(\tau_n)\}$ 的给定轨迹 $i_0\to i_1\to i_2\to\cdots$，Markov链在各状态的依次停留时间 $T_0,T_1,T_2,\cdots$ 相互独立，T_j 服从参数为q_{i_j} 的指数分布，$j=0,1,2,\cdots$;

(2) 离散时间→连续时间：

设 $\{Y_n\}$ 是离散时间Markov链，以 $K=(k_{ij})$ 为转移概率矩阵。对每个 $i\in I$，假设$\{Y_n\}$每次到达 i 后，在 i 的停留时间是相互独立的随机变量，服从共同的参数为q_i指数分布，停留结束时以概率 k_{ij} 转移到状态 j $(j\neq i)$，进一步假设$\{Y_n\}$在不同状态的停留时间相互独立，则用 $X(t)$ 表示 t 时$\{Y_n\}$的状态时，$\{X(t)\}$ 是连续时间的Markov链，有转移速率矩阵 Q。

在 (1) 中，称离散时间Markov链 $\{X_n\}$ 为 $\{X(t)\}$ 的嵌入链(embedded chain)或跳跃链(jump chain)。同理在 (2) 中也称离散时间马氏链 $\{Y_n\}$ 为 $\{X(t)\}$ 的嵌入链。嵌入链的转移概率矩阵K由转移速率矩阵 Q 决定。