STAT0008: Stochastic Processes

Lecture 5 - Classification of States

Lecturer: Weichen Zhao — Spring 2025

Key concepts:

- 可约性；
- 周期性；
- 常返性。

状态的性质会影响整个Markov链的性质，而链中状态的数目往往很大，研究每一个状态的性质比较繁琐，所以对Markov链的状态分类对研究Markov链是非常重要的。

5.1 可约性与周期性

本节从Markov链转移的代数性质出发，讨论可约性与周期性。先给出一些定义。

Definition 5.1 (可达) 设$i, j \in E$是*Markov*链中的两个状态，如果$\exists n \geq 0$，使得

$$P_{ij}^{(n)} > 0$$

就称状态i可达*(accessible)*状态j，记作$i \to j$。如果i不可达j，即 $\forall n > 0, P_{ij}^{(n)} = 0$，记为$i \not\to j$。状态$i$可达$j$意味着可以在链中找到一条路径，起点是$i$，终点是$j$。

注. 可达具有传递性，设$i, j, k \in E$, $n, m > 0$, 使得$P_{ij}^{(n)} > 0$, $P_{jk}^{(m)} > 0$，则

$$P_{ik}^{(n+m)} = \sum_{j' \in E} P_{ij'}^{(n)} P_{j'k}^{(m)} \geqslant P_{ij}^{(n)} P_{jk}^{(m)} > 0$$

即若$i \to j$, $j \to k$, 则$i \to k$。

Definition 5.2 (互通) 设$i, j \in E$是 *Markov* 链中的两个状态，如果$\exists\, n, m \geq 0$使得

$$P_{ij}^{(n)} > 0, \quad P_{ji}^{(m)} > 0$$

就称i和j互通*(communicate)*，记作$i \leftrightarrow j$。即，如果 i 可达 j, j 又可达 i, 那么i和j就是互通的。

Proposition 5.3 互通是状态集合E上的一个等价关系，即满足：

1. 自反性：$i \leftrightarrow i$;

2. 对称性：若 $i \leftrightarrow j$，则 $j \leftrightarrow i$;

3. 传递性：若 $i \leftrightarrow j$，$j \leftrightarrow k$，则 $i \leftrightarrow k$

Proof: 1. 自反性：对于任意状态 $i \in E$，由于$P_{ii}^{(0)} = 1$，因此 $i \leftrightarrow i$ 成立。

2. 对称性：如果 $i \leftrightarrow j$，则根据定义，存在正整数 n, m 使得

$$P_{ij}^{(n)} > 0, \quad P_{ji}^{(m)} > 0.$$

于是，我们也有 $j \leftrightarrow i$，即互通关系是对称的。

3. 传递性：由可达的传递性即得；

综上所述，互通关系 $\leftrightarrow$ 是状态空间 E 上的一个等价关系，因此所有互通的状态构成等价类，被称为互通类（communicating class） ■

Definition 5.4 (不可约性) 一个*Markov*链称为不可约的*(irreducible)*，如果它的互通类只有一个*(*状态集合本身*)*，即所有状态都是互通的。

注1. 这不是我们第一次接触可约性，回顾矩阵的可约性：

设 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 是一个 n 阶方阵，称 A 可约（reducible），如果存在一个置换矩阵 P，使得 $P^T AP$ 可以写成如下上三角分块形式：

$$P^T AP = \begin{bmatrix} B & C \\ 0 & D \end{bmatrix}$$

如果矩阵 A 不能被写成上述形式，则称其为不可约的。

一个Markov链不可约，当且仅当，它的转移矩阵不可约。

下面讨论状态的周期性

Definition 5.5 (周期性) 状态$i \in E$的周期*(period)*定义为

$$d_i \triangleq \gcd\{n : P_{ii}^{(n)} > 0\}$$

即集合$\{n : P_{ii}^{(n)} > 0\}$的最大公约数。若$d_i = 1$，则称状态i是非周期的*(aperiodic)*。

Proposition 5.6 若 $i \leftrightarrow j$，则$d_i = d_j$.

Proof: 由于$i \leftrightarrow j$，故存在m, n，使得

$$P_{ij}^{(m)} > 0, \qquad P_{ji}^{(n)} > 0$$

又d_j为状态j的周期，所以存在k，

$$P_{jj}^{(kd_j)} > 0, \qquad P_{jj}^{((k+1)d_j)} > 0$$

那么

$$P_{ii}^{(m+kd_j+n)} \geq P_{ij}^{(m)} P_{jj}^{(kd_j)} P_{ji}^{(n)} > 0$$
$$P_{ii}^{(m+(k+1)d_j+n)} \geq P_{ij}^{(m)} P_{jj}^{((k+1)d_j)} P_{ji}^{(n)} > 0$$

即

$$d_i \mid (m + kd_j + n), \text{ 且 } \quad d_i \mid (m + (k+1)d_j + n)$$

故$d_i \mid d_j$。同理可证 $d_j \mid d_i$，故$d_i = d_j$. ∎

利用周期性，可以在一个互通类中进一步对状态进行分类，下面不妨考虑不可约Markov链。

由于不可约，由命题5.6，每个状态的周期相同，记为d。给定某个状态i_0，我们定义下面集合

$$\begin{aligned} C_0 &= \{j \in E, P_{i_0 j}^{(n)} > 0, n \equiv 0(\mathrm{mod} d)\} \\ C_1 &= \{j \in E, P_{i_0 j}^{(n)} > 0, n \equiv 1(\mathrm{mod} d)\} \\ &\vdots \\ C_{d-1} &= \{j \in E, P_{i_0 j}^{(n)} > 0, n \equiv d-1(\mathrm{mod} d)\} \end{aligned}$$

那么状态集合E可以分解为$E = C_0 \cup C_1 \cup \cdots \cup C_{d-1}$。

Proposition 5.7 若状态$i \in C_p$，且$P_{ij} > 0$，那么$j \in C_{p+1}$

Proof: 由于$i \in C_p$，则存在$a = kd + p$，其中k为某个自然数，使得

$$P_{i_0 i}^{(a)} > 0$$

对于$a + 1 = kd + p + 1$

$$P_{i_0 j}^{(a+1)} \geqslant P_{i_0 i}^{(a)} P_{ij} > 0$$

即$j \in C_{p+1}$. ∎

这说明不可约周期Markov链的转移具有规律：当$0 \leq k \leq d-1$时，从C_k中的状态转移到C_{k+1}，然后从C_{d-1}转移回到C_0，即经过适当的行列置换后，它的转移矩阵可以表示为

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{A}_{0,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \boldsymbol{A}_{1,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \boldsymbol{A}_{d-2,d-1} \\ \boldsymbol{A}_{d-1,0} & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

其中$A_{k,k+1}$表示从C_k中的状态转移到C_{k+1}的转移概率矩阵。

思考：计算$P^2, P^3, \ldots$看看有什么规律。

5.2 常返性

本节从讨论状态在Markov链转移过程中的渐近特性出发，讨论常返性。先给出一些定义。

Definition 5.8 (首达时) 设$\{X_n\}$为一个状态空间为E的$Markov$链，从$n=0$出发首次达到状态$j \in E$的时刻定义为

$$\tau_j \triangleq \inf\{n \geqslant 1 : X_n = j\}$$

若$\{n \geqslant 1 : X_n = j\}$为空集，则$\tau_j \triangleq \infty$.

Definition 5.9 (首达概率) 设$\{X_n\}$为一个状态空间为E的$Markov$链，则经过n步从状态i到j的首达概率定义为

$$\begin{aligned} f_{ij}^{(n)} &\triangleq P(\tau_j = n | X_0 = i) \\ &= P(X_n = j, X_{n-1} \neq j, \cdots, X_1 \neq j | X_0 = i) \end{aligned}$$

注. 定义事件

$$A_n \triangleq \{X_n = j, X_{n-1} \neq j, \cdots, X_1 \neq j | X_0 = i\}$$

则$\{A_n\}$互不相容，即

$$A_n \cap A_m = \phi, \quad n \neq m$$

那么从状态i出发迟早到达状态j的概率为

$$f_{ij} \triangleq P(\tau_j < \infty | X_0 = i) = P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k | X_0 = i\right) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} \leq 1$$

下面定义常返性。

Definition 5.10 (常返性) 如果

$$f_{ii} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^{(n)} = 1$$

则称状态i是常返的*(Recurrent)*，否则称i为暂留的*(Transient)*，或者非常返的*(Nonrecurrent)*。

虽然我们通过f_{ij}来定义常返性，但$f_{ij}^{(n)}$的计算并不容易，所以我们想要通过n步转移概率$P_{ij}^{(n)}$来计算，通过$P_{ij}^{(n)}$来获得状态是否是常返的判据，这即是下面的定理：

Theorem 5.11 状态i是常返态的充分必要条件是

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_{ii}^{(n)} = \infty$$

Proof: 注意到事件

$$A_n \triangleq \{X_n = j, X_{n-1} \neq j, \cdots, X_1 \neq j | X_0 = i\}$$

互不相容，考虑基于此对样本轨道进行分解

$$\begin{aligned}
&P_{ij}^{(n)} = P(X_n = j | X_0 = i) \\
&= \sum_{k=1}^{n} P(X_n = j, X_k = j, X_{k-1} \neq j, \cdots, X_1 \neq j | X_0 = i) \\
&= \sum_{k=1}^{n} P(X_n = j | X_k = j, X_{k-1} \neq j, \cdots, x_1 \neq j, X_0 = i) P(X_k = j, X_{k-1} \neq j, \cdots, X_1 \neq j | X_0 = i) \\
&= \sum_{k=1}^{n} P(X_n = j | X_k = j) P(X_k = j, X_{k-1} \neq j, \cdots, X_1 \neq j | X_0 = i) \\
&= \sum_{k=1}^{n} f_{ij}^{(k)} P_{jj}^{(n-k)}
\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} P_{ij}^{(n)} z^n &= \delta_{ij} + \sum_{n=1}^{\infty} P_{ij}^{(n)} z^n \\
&= \delta_{ij} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} f_{ij}^{(k)} P_{jj}^{(n-k)} z^n \\
&= \delta_{ij} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} (f_{ij}^{(k)} z^k)(P_{jj}^{(n-k)} z^{n-k}) \\
&= \delta_{ij} + \sum_{k=1}^{\infty} (f_{ij}^{(k)} z^k) \sum_{n=k}^{\infty} (P_{jj}^{(n-k)} z^{n-k}) \\
&= \delta_{ij} + \sum_{k=1}^{\infty} (f_{ij}^{(k)} z^k) \sum_{m=0}^{\infty} (P_{jj}^{(m)} z^m)
\end{aligned}$$

那么

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_{ii}^{(n)} z^n = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (f_{ii}^{(k)} z^k) \sum_{n=0}^{\infty} (P_{ii}^{(n)} z^n)$$

即

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_{ii}^{(n)} z^n = \frac{1}{1-\sum_{k=1}^{\infty} f_{ii}^{(k)} z^k}$$

令$z \to 1^-$，由Abel定理可得

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_{ii}^{(n)} = \frac{1}{1-f_{ii}}$$

那么 $f_{ii}=1$ 即等价于 $\sum_{n=0}^{\infty} P_{ii}^{(n)} = \infty$ ■

注1. 另一种概率方法的证明：

由f_{ii}的定义，Markov链$\{X_n\}$从状态i出发，最终能回到i的概率为f_{ii}，那么一直回不到i的概率为$1-f_{ii}$。

由于Markov性，所以在回到i之后，过程在概率意义下又重新开始，那么$X_0=i$开始，Markov链$\{X_n\}$恰有n次处于状态i服从几何分布，

$$P\{X_n\text{处于状态 i 的次数} = n \mid X_0 = i\} = f_{ii}^{n-1}(1-f_{ii})$$

所以，从i出发以后，处于i次数的期望为

$$\sum_{n=1}^{\infty} n f_{ii}^{n-1}(1-f_{ii}) = \frac{1}{1-f_{ii}}$$

那么i是常返态，当且仅当

$$\mathbb{E}[X_n\text{处于状态 i 的次数} \mid X_0 = i] = \infty$$

记随机序列I_n为：当$X_n=i$时$I_n=1$，否则为0，那么$\sum_{n=0}^{\infty} I_n$表示处于状态 i 的次数，则有

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{\infty} I_n | X_0 = i\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}[I_n | X_0 = i] = \sum_{n=1}^{\infty} P(X_n = i | X_0 = i) = \sum_{n=1}^{\infty} P_{ii}^{(n)}$$

故状态i是常返态的充分必要条件是 $\sum_{n=0}^{\infty} P_{ii}^{(n)} = \infty$.

注2. 从注1的证明过程中，我们可以看出若状态i是暂留的，则Markov链只会有限次处于状态i，可以具体表述为下面推论。

Corollary 5.12 如果状态j是暂留的，那么对任意状态i,

$$P_{ij}^{(n)} \to 0, \quad n \to \infty$$

Proof: 若$j=i$是暂留的，我们已经证明：

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_{ii}^{(n)} = \frac{1}{1-f_{ii}} < \infty$$

所以级数的通项$\lim_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)} = 0$.

另一方面，若$j \neq i$是暂留的，我们已经证明：

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_{ij}^{(n)} = \delta_{ij} + \sum_{k=1}^{\infty} f_{ij}^{(k)} \sum_{n=0}^{\infty} P_{jj}^{(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} \sum_{n=0}^{\infty} P_{jj}^{(n)} < \infty$$

所以级数的通项$\lim_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)} = 0$. ■

注3. 常返与非常返具有类的性质

Corollary 5.13 若状态i是常返的，且$i \leftrightarrow j$，则j是常返的。

Proof: 由于$i \leftrightarrow j$，则存在m和n使得

$$P_{ij}^{(n)} > 0, \quad P_{ji}^{(m)} > 0$$

对任意$s > 0$，由CK方程有

$$P_{jj}^{(m+n+s)} \geq P_{ji}^{(m)} P_{ii}^{(s)} P_{ij}^{(n)}$$

由于状态i是常返的，即$\sum_{s=0}^{\infty} P_{ii}^{(s)} = \infty$，所以

$$\sum_{s=0}^{\infty} P_{jj}^{(m+n+s)} \geq P_{ji}^{(m)} P_{ij}^{(n)} \sum_{s=0}^{\infty} P_{ii}^{(s)} = \infty$$

由定理5.11，j是常返的。 ■

上面的推论表明常返与非常返是互通类的性质，因此我们可以说一个状态的集合为一个常返类或非常返类。如果Markov链不可约，则所有状态或者都常返，或者都非常返。此时，我们也可说Markov链是常返的或非常返的。

注4. 有的文献也称$\sum_{n=0}^{\infty} P_{ij}^{(n)}$为格林函数，记为$G_{ij}$.

如果Markov链的状态是有限的，常返性的判定会更加简化，有下面结论：

Proposition 5.14 有限状态$Markov$链必然存在常返态。

Proof: 反证法，若命题不成立。设状态空间$E = \{1, 2, \dots, N\}$，则所有状态都是暂留的。固定状态i，对任意j，由推论5.12

$$P_{ij}^{(k)} \to 0, \quad k \to \infty$$

所以

$$\sum_{j=1}^{N} P_{ij}^{(k)} \to 0, \quad k \to \infty$$

但是由转移概率的性质，对任意k有

$$\sum_{j=1}^{N} P_{ij}^{(k)} = 1$$

矛盾！故命题成立。 ■

注. 结合推论5.13，我们知道：对于状态有限不可约Markov链，所有状态都是常返态。

Example 5.15 (**d 维简单随机游走的常返性**) 设$\xi_1, \xi_2, \dots$是取值于$E = \mathbb{Z}^d$独立同分布随机向量，满足

$$P(\xi_1 = e_i) = P(\xi_1 = -e_i) = \frac{1}{2d}, \quad i = 1, \dots, d$$

其中e_i是第i个坐标为1，其余为0的方向向量。

设S_0独立于$\xi_1, \xi_2, \dots$，令

$$S_n := S_0 + \xi_1 + \cdots + \xi_n = S_{n-1} + \xi_n.$$

则S_n为从S_0出发的d维简单随机游走。

当$d = 1, 2$时，S_n是常返的，当$d \geq 3$时，S_n是非常返的。

Proof: 不妨假设$S_0 = 0$，由ξ_i的定义，所有状态都是互通的，即S_n不可约，所以所有状态的常返性一致，因此我们只考虑0状态的常返性。

容易注意到经过奇数步不可能回到状态0，若经过$2n$步回到0，那么对任意方向$i \in \{1, \ldots, d\}$，必须在该方向前进和后退相同的步数，记为n_i，于是

$$P_{00}^{(2n)} = \sum_{n_1+\cdots+n_d=n} \frac{(2n)!}{(n_1!)^2 \cdots (n_d!)^2} \frac{1}{(2d)^{2n}}.$$

$d = 1$时

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_{00}^{(2n)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} \frac{1}{(2)^{2n}}.$$

由Stirling公式 $\lim_{n\to\infty} n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$，对任意的$\epsilon > 0$，存在$n_0$，当$n > n_0$时，

$$(1-\varepsilon)\frac{1}{\sqrt{\pi n}} \leqslant \frac{(2n)!}{(n!)^2}\frac{1}{2^{2n}} \leqslant (1+\varepsilon)\frac{1}{\sqrt{\pi n}}.$$

所以$\sum_{n=0}^{\infty} P_{00}^{(2n)} = \infty$，即$S_n$常返。

$d = 2$时，

$$\begin{aligned} P_{00}^{(2n)} &= \sum_{n_1+n_2=n} \frac{(2n)!}{(n_1!)^2 (n_2!)^2} \cdot \frac{1}{4^{2n}} \\ &= \frac{(2n)!}{n!\,n!} \cdot \frac{1}{4^{2n}} \sum_{n_1+n_2=n} \frac{n!}{n_1!\,n_2!} \cdot \frac{n!}{n_2!\,n_1!} \\ &= C_{2n}^{n} \cdot \frac{1}{4^{2n}} \sum_{n_1=0}^{n} C_n^{n_1} C_n^{n-n_1} \\ &= C_{2n}^{n} \cdot \frac{1}{4^{2n}} \cdot C_{2n}^{n} = \left(C_{2n}^{n}\frac{1}{2^{2n}}\right)^2 \\ &\approx \frac{1}{\pi n} \end{aligned}$$

所以$\sum_{n=0}^{\infty} P_{00}^{(2n)} = \infty$，即$S_n$常返。

当$d \geq 3$时，可以证明，当n充分大时，有

$$P_{00}^{(2n)} \leqslant C_d \cdot n^{-d/2},$$

其中C_d是依赖于d的常数。(参考《应用随机过程》，陈大岳、章复熹，北京大学出版社，2023，P95-P99)

所以$\sum_{n=0}^{\infty} P_{00}^{(2n)} < \infty$，即$S_n$非常返。 ■

这表明一维或二维的简单随机游动一定能回到起点，但三维以上的简单随机游动却不一定。日本学者角谷静夫 Kakutani 在加利福尼亚大学洛杉矶分校 (UCLA) 演讲时对此给出了一个有趣的注解："A drunk man will find his way home, but a drunk bird may get lost forever."