

Homework 1 - Preliminaries

1. 设 ξ_n 是定义在概率空间 (Ω, \mathcal{F}, P) 上的单调随机变量序列, 且 ξ_n 依概率收敛于 ξ . 证明: ξ_n 几乎处处收敛于 ξ .

2. (Jensen不等式) 设 ξ 是概率空间 (Ω, \mathcal{F}, P) 上的可积随机变量, \mathcal{G} 是 \mathcal{F} 的子事件域, ϕ 是凸函数且 $\phi(\xi)$ 可积. 证明:

$$\phi(\mathbb{E}[\xi|\mathcal{G}]) \leq \mathbb{E}[\phi(\xi)|\mathcal{G}].$$

3. 设 $p \geq 1$, $\{\xi_n, n = 1, 2, \dots\}$, $\xi \in L^p(\mathcal{F})$, 且 $\xi_n \xrightarrow{L^p} \xi$. $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ 是一个子- σ 代数. 证明:

$$\mathbb{E}[\xi_n|\mathcal{G}] \xrightarrow{L^p} \mathbb{E}[\xi|\mathcal{G}].$$

Hint: 运用上一题结论。

4. 设 $\xi, \eta \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$, 若 ξ, η 同分布, 且 $\mathbb{E}[\xi|\eta] = \eta$. 证明: $\xi = \eta$

5. (Doob不等式) 设 ξ 是filtrated概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)P)$ 上的可积随机变量, 证明: 对任意 $c > 0$,

$$P(\sup_n |\mathbb{E}[\xi|\mathcal{F}_n]| > c) \leq \frac{1}{c} \mathbb{E}[|\xi|].$$

Hint: consider event

$$A_n := \{\omega : \xi_1 \leq c, \dots, \xi_{n-1} \leq c, \xi_n > c\},$$

$$A = \{\sup_n |\mathbb{E}[\xi|\mathcal{F}_n]| > c\}.$$

那么有 $A = \sum_{n=1}^{\infty} A_n$.