

Homework 3 - Brownian Motion

1. 设 $(B_t)_{t \geq 0}$ 为一个标准布朗运动，证明：固定 $t_0 \geq 0$, $B_{t_0+t} - B_{t_0}$ 为一个布朗运动；

2. 设 W_t 和 \tilde{W}_t 是两个独立标准布朗运动， $\lambda \in [0, 1]$ 为一个常数，证明：

$$B_t \triangleq \lambda W_t + \sqrt{1 - \lambda^2} \tilde{W}_t$$

为布朗运动。

3. 设 $(B_t)_{t \geq 0}$ 为一个标准布朗运动，证明：

$$B_t^3 - 3tB_t, \quad B_t^4 - 6tB_t^2 + 3t^2$$

是鞅。

4. 根据无穷小生成元的定义证明：标准布朗运动的生成元为 $\frac{1}{2}\Delta$ 。