STAT0041: Stochastic Calculus

Homework 4 - Itô Integral

Lecturer: Weichen Zhao Fall 2024

1. 设f为二次连续可微函数,证明:

$$f(B_t) - f(B_0) = \int_0^t f'(B_s) dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(B_s) ds$$

- 2. 计算: $\int_0^t B_s^2 dB_s$
- 3. 计算: $\int_0^t e^{B_s} dB_s$
- 4. 设 $(B_t)_{t\geq 0}$ 为一个标准布朗运动,用Itô公式证明: $\exp(cB_t \frac{c^2}{2}t)$ 是一个鞅。
- 5. 设X和Y为两个Itô过程。证明

$$d(X_tY_t) = X_t dY_t + Y_t dX_t + dX_t dY_t.$$

等价地,有如下分部积分公式

$$\int_{0}^{t} X_{s} dY_{s} = X_{t} Y_{t} - X_{0} Y_{0} - \int_{0}^{t} Y_{s} dX_{s} - \int_{0}^{t} dX_{s} \cdot dY_{s}.$$

Hint: 对f(x,y) = xy应用Itô公式