辅 导
资 料

2025

电磁场与电磁波

朋辈导师辅导资料

厦门大学朋辈导师辅导计划

厦门大学朋辈辅导
仅供学习交流使用
未经允许和授权，不得网络传播和商用

Chapter 1

数学基础

1.1 三种常用坐标系

1.1.1 直角坐标系

点$A(x,y,z)$处的矢量可以表示为$\vec{A}=\vec{e_x}A_x+\vec{e_y}A_y+\vec{e_z}A_z$

1. 矢量和：

$$\vec{A}+\vec{B}=\vec{e_x}(A_x+B_x)+\vec{e_y}(A_y+B_y)+\vec{e_z}(A_z+B_z)$$

2. 矢量点积（结果为标量）：

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z$$

3. 矢量叉乘（结果仍为矢量，计算方法建议记住行列式）：

$$\begin{aligned}\vec{A}\times\vec{B}&=\vec{e_x}(A_yB_z-A_zB_y)+\vec{e_y}(A_zB_x-A_xB_z)+\vec{e_z}(A_xB_y-A_yB_x)\\&=\begin{vmatrix}\vec{e_x}&\vec{e_y}&\vec{e_z}\\A_x&A_y&A_z\\B_x&B_y&B_z\end{vmatrix}\end{aligned}$$

4. 微分矢量：

$$d\vec{r}=\vec{e_x}dx+\vec{e_y}dy+\vec{e_z}dz$$

5. 微面积元：

$$dS_x=dydz,\ dS_y=dxdz,\ dS_z=dxdy$$

6. 微体积元：

$$dV=dxdydz$$

1.1.2 柱坐标系

点$A(\rho,\phi,z)$处的矢量可以表示为$\vec{A}=\vec{e_\rho}A_\rho+e_\phi A_\phi+e_zA_z$。$\rho$的物理意义表示该点在$xOy$平面上的投影点和坐标原点的连线与$x$轴的投影，$\rho$表示该投影点与坐标原点连线的长度，$z$表示该点与投影点之间的垂直高度。

厦门大学明辈辅导 仅供学习交流使用 未经允许和授权，不得网络传播和商用

Note:-

值得注意的是，单位矢量$\vec{e_\rho}$和$\vec{e_\phi}$都是随ϕ变化的，所以不同点的两个单位矢量一般是不同的，只有在ϕ相同的时候，柱坐标系下的矢量和、矢量点乘和矢量叉乘才符合直角坐标系下的运算法则，否则都要转换成直角坐标再进行计算。并且$\phi \neq A_\phi$，A_ϕ代表的是有几个单位矢量$\vec{e_\phi}$（可详细参考课本例题1.2.1）

。

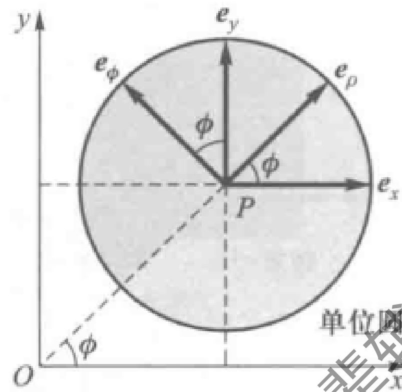

图 1.1: 直角坐标系与圆柱坐标系单位矢量的关系

直角坐标系与圆柱坐标系单位矢量的关系为：

$$\vec{e_\rho} = \vec{e_x} cos\phi + \vec{e_y} sin\phi$$
$$\vec{e_\phi} = -\vec{e_x} sin\phi + \vec{e_y} cos\phi$$
$$\vec{e_z} = \vec{e_z}$$

1. 柱坐标到直角坐标的关系式（可参考单位矢量的关系式，记住其一即可，最好通过上图来记忆。这里给出矩阵形式）：

$$\begin{bmatrix} A_\rho \\ A_\phi \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\phi & sin\phi & 0 \\ -sin\phi & cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\phi & -sin\phi & 0 \\ sin\phi & cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_\rho \\ A_\phi \\ A_z \end{bmatrix}$$

2. 三个方向的微长度元：

$$\vec{e_\rho}\text{方向}: d\rho,\ \vec{e_\phi}\text{方向}: rd\phi,\ \vec{e_z}\text{方向}: dz$$

3. 与三个单位矢量垂直的面积元公式：

$$dS_\rho = \rho d\phi dz,\ dS_\phi = d\rho dz,\ dS_z = \rho d\rho d\phi$$

4. 体积微元：

$$dV = \rho d\rho d\phi dz$$

厦门大学明辈辅导
仅供学习交流使用
未经允许和授权，不得网络传播和商用

1.1.3 球坐标系

在球坐标系中，可以用一个三元组(r,θ,ϕ)来表示一个坐标。其中r表示从坐标原点到该点线段的长度，θ表示该点与坐标原点连线同z轴的夹角（取值为$[0,90]$）,ϕ表示的是该点与坐标原点连线在xOy平面上的投影与x轴的夹角（取值$[0,360]$）。

Note:-

注意，球坐标系中的每一个单位矢量（$\vec{e}_r,\vec{e}_\theta,\vec{e}_\phi$）都随着$\theta$和$\phi$的变化而变化。所以两个球坐标系下的向量只有在$\theta$和$\phi$相同时才可以进行运算，否则都要转为直角坐标才可以。并且同柱坐标系一样，$A_\theta \neq \theta$，$A_\phi \neq \phi$

1. 球坐标和直角坐标的关系式：

$$\begin{bmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sin\theta cos\phi & sin\theta sin\phi & cos\theta \\ cos\theta cos\phi & cos\theta sin\phi & -sin\theta \\ -sin\phi & cos\phi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sin\theta cos\phi & cos\theta cos\phi & -sin\phi \\ sin\theta sin\phi & cos\theta sin\phi & cos\phi \\ cos\theta & -sin\phi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\phi \end{bmatrix}$$

2. 三个方向的微长度元：

$$\vec{e}_r\text{方向}: dr,\quad \vec{e}_\theta\text{方向}: rd\theta,\quad \vec{e}_\phi\text{方向}: rsin\theta d\phi$$

3. 与三个单位方向向量垂直的微面积元：

$$dS_r = r^2 sin\theta d\theta d\phi,\quad dS_\theta = rsin\theta drd\phi,\quad dS_\phi = rdrd\theta$$

4. 微体积元：

$$dV = r^2 sin\theta drd\theta d\phi$$

1.2 标量场相关公式

所谓标量场其实就是一个具有物理意义的多元函数，函数值是一个标量。一般给定某坐标$\vec{r}$，$u(\vec{r})$表示的就是该店某物理量的值。

1.2.1 方向导数

:

定义 1.2.1: 方向导数

$$\frac{\partial u}{\partial l}|_{M_0} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{u(\vec{M}) - u(\vec{M}_0)}{\Delta l},\quad \vec{M} = \vec{M}_0 + \Delta \vec{l}$$

上式中，$\vec{l}$表示方向，Δl表示距离。
在直角坐标系中，可利用$\vec{l}$与x,y,z轴的夹角来计算方向导数。

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial l} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial l} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial l}$$

厦门大学朋辈辅导 仅供学习交流使用 未经允许和授权，不得网络传播和商用

1.2.2 梯度

定义 1.2.2: 梯度

梯度的定义式为:

$$grad\ u = \nabla u = \vec{e_n}\frac{\partial u}{\partial l}|_{max}$$

其中$\vec{e_n}$表示变化率最大方向的单位矢量。标量场的梯度总是指向标量函数增加的方向。

各坐标系下的梯度公式:

1. 直角坐标系:

$$\nabla u = \vec{e_x}\frac{\partial u}{\partial x} + \vec{e_y}\frac{\partial u}{\partial y} + \vec{e_z}\frac{\partial u}{\partial z}$$

2. 柱坐标系:

$$\nabla u = \vec{e_\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} + \vec{e_\phi}\frac{\partial u}{\rho\partial \phi} + \vec{e_z}\frac{\partial u}{\partial z}$$

3. 球坐标系:

$$\nabla u = \vec{e_r}\frac{\partial u}{\partial r} + \vec{e_\theta}\frac{\partial u}{r\partial \theta} + \vec{e_\phi}\frac{\partial u}{rsin\theta\partial \phi}$$

Note:-

对于各梯度公式，有比较简便的计算方法，可以不需要死记硬背。在正交坐标系(u_1, u_2, u_3)中，微长度元的平方定义为

$$ds^2 = h_1^2du_1^2 + h_2^2du_2^2 + h_3^2du_3^2$$

其中h_1, h_2, h_3就被称为拉梅系数。梯度的计算式就可以表示为:

$$\nabla f = \frac{1}{h_1}\frac{\partial f}{\partial u_1}\vec{e_1} + \frac{1}{h_2}\frac{\partial f}{\partial u_2}\vec{e_2} + \frac{1}{h_3}\frac{\partial f}{\partial u_3}\vec{e_3}$$

例如我们需要计算球坐标系下的梯度公式，已知在球坐标系和直角坐标的关系式为:

$$\begin{cases} x = rsin\theta cos\phi \\ y = rsin\theta sin\phi \\ z = rcos\theta \end{cases}$$

各分量的全微分为:

$$\begin{aligned} dx &= sin\theta cos\phi dr + rcos\theta cos\phi d\theta - rsin\theta sin\phi d\phi, \\ dy &= sin\theta sin\phi dr + rcos\theta sin\phi d\theta + rsin\theta cos\phi d\phi, \\ dz &= cos\theta dr - rsin\theta d\theta \end{aligned}$$

所以微长度元的平方

$$\begin{aligned} ds^2 =& dx^2 + dy^2 + dz^2 \\ =&(sin\theta cos\phi dr + rcos\theta cos\phi d\theta - rsin\theta sin\phi d\phi)^2 + \\ &(sin\theta sin\phi dr + rcos\theta sin\phi d\theta + rsin\theta cos\phi d\phi)^2 + \\ &(cos\theta dr - rsin\theta d\theta)^2 \\ =& dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2sin^2\theta d\phi^2 \end{aligned}$$

所以拉梅系数为$h_1 = 1, h_2 = r, h_3 = rsin\theta$。球坐标系下的梯度公式为:

$$\nabla u = \vec{e_r}\frac{\partial u}{\partial r} + \vec{e_\theta}\frac{\partial u}{r\partial \theta} + \vec{e_\phi}\frac{\partial u}{rsin\theta\partial \phi}$$

厦门大学明辈辅导 仅供学习交流使用 未经允许和授权，不得网络传播和商用

梯度的运算性质：

1. $\nabla(cu) = c\nabla u$ c为常数
2. $\nabla(u \pm v) = \nabla u \pm \nabla v$
3. $\nabla(uv) = v\nabla u + u\nabla v$
4. $\nabla(\frac{u}{v}) = \frac{1}{v^2}(v\nabla u - u\nabla v)$
5. $\nabla f(u) = f'(u)\nabla u$

1.3 矢量场相关公式

所谓矢量场就是一个具有物理意义的矢量函数，函数拥有多个自变量（或变量是矢量），并且函数的结果也是一个矢量。如$\vec{F}(x, y, z)$或$\vec{F}(\vec{x})$，$\vec{x} = (u, v, z)$。

矢量线是矢量场的可视化表示，实际上并不存在。矢量线关于某点$\vec{r}$的切线即是$\vec{F}(\vec{r})$的方向。

定义 1.3.1: 矢量线的微分方程

设M是矢量线上一点，位置矢量为$\vec{r}$，其微分矢量$d\vec{r}$在点M处与矢量线相切，根据定义可知在点M处$\vec{r}$与$\vec{F}(\vec{r})$共线，即

$$d\vec{r} \times \vec{F}(\vec{r}) = 0$$

1.3.1 矢量场的通量

定义 1.3.2: 面元和面元矢量

设S为一空间曲面，dS为曲面上的面元，取一个与此面元相垂直的单位矢量$\vec{e}_n$，则称矢量

$$d\vec{S} = \vec{e}_n dS$$

为面元矢量。$\vec{e}_n$的取法有两种情况，若dS为开曲面上的一个面元，$\vec{e}_n$与这个开曲面的闭合曲线C的绕行方向满足右手螺旋法则；若S为闭曲面，一般规定$\vec{e}_n$的方向为闭曲面的外法线方向。

定义 1.3.3: 通量

矢量$\vec{F}$与曲面S面元矢量$d\vec{S}$的标量积的积分称为矢量$\vec{F}$穿过曲面S的通量，即

$$\Phi = \int_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_S \vec{F} \cdot \vec{e}_n dS$$

若S是一闭曲面，则通过闭合曲面的总通量表示为

$$\Phi = \oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \oint_S \vec{F} \cdot \vec{e}_n dS$$

若$\oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} > 0$，表示曲面中有正通量源；若$\oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} < 0$，表示曲面中有负通量源；若$\oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = 0$，表示正负通量源的代数和为零或没有通量源。

厦门大学朋辈辅导 仅供学习交流使用 未经允许和授权，不得网络传播和商用

1.3.2 矢量场的散度

定义 1.3.4: 散度

设闭合曲面S的体积为ΔV，若极限$\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\oint_S \vec{F}\cdot d\vec{S}}{\Delta V}$存在，则称此极限为矢量场$\vec{F}$在点处的散度，并记作$div\ \vec{F}$，即

$$div\ \vec{F} = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{\oint_S \vec{F}\cdot d\vec{S}}{\Delta V}$$

通常使用∇算符，将散度表示为

$$div\ \vec{F} = \nabla\cdot\vec{F}$$

若$div\ \vec{F} > 0$，表示该点有正通量源；若$div\ \vec{F} < 0$，表示该点有负通量源；若$div\ \vec{F} = 0$，表示该点无通量源。

Note:-

通量是一个积分量，描述的是一个空间中矢量场特性；散度是一个极限值，比通量更为精细，描述的是一个点的矢量场特性。

散度具有如下运算性质：

1. $\nabla\cdot(c\vec{F}) = c\nabla\cdot\vec{F}$ c为常数
2. $\nabla\cdot(\vec{F}\pm\vec{G}) = \nabla\cdot\vec{F}\pm\nabla\cdot\vec{G}$
3. $\nabla\cdot(u\vec{F}) = u\nabla\cdot\vec{F}+\vec{F}\cdot\nabla u$ u为标量函数

1.3.3 矢量场的环流与环流面密度

定义 1.3.5: 环流

矢量场$\vec{F}$沿一条**有向**闭合路径C的曲线积分

$$\Gamma = \oint_C \vec{F}\cdot d\vec{l}$$

称为矢量场$\vec{F}$沿闭合路径C的环流

环流描述了矢量场中的**涡旋源**，即这种源产生的矢量场的矢量线是闭合曲线。

定义 1.3.6: 环流面密度

一条有向闭合路径C围成的面积记为ΔS，当闭合路径C以任何方式收缩到点M处时，若极限$\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\oint_c \vec{F}\cdot d\vec{l}}{\Delta S}$存在，则称该极限为矢量场在点处沿方向的环流面密度，并记作$rot_n\vec{F}$，即

$$rot_n\vec{F} = \lim_{\Delta S\to 0}\frac{\oint_c \vec{F}\cdot d\vec{l}}{\Delta S}$$

1.3.4 旋度

根据环流面密度的定义可知，某点的环流面密度可能随闭合路径C所决定的曲面法线$\vec{e}_n$方向有关，在某个确定的方向上可能取到最大值。

厦门大学朋辈辅导 仅供学习交流使用，不得网络传播和商用 未经允许和授权，

定义 1.3.7: 旋度

矢量场$\vec{F}$在点M处的旋度是一个矢量，记作$rot\ \vec{F}$，定义为

$$rot\ \vec{F} = \vec{e}_{nm}(\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\oint_c \vec{F}\cdot d\vec{l}}{\Delta S})_{max}$$

其中$\vec{e}_{nm}$是矢量场$\vec{F}$在点M处取得最大环流面密度时闭合曲线C所确定的方向的单位矢量

矢量场的旋度运算具有以下运算规则

1. $\nabla\times(c\vec{F}) = c\nabla\times\vec{F}$（c为常数）
2. $\nabla\times(\vec{F}\pm\vec{G}) = \nabla\times\vec{F}\pm\nabla\times\vec{G}$
3. $\nabla\times(u\vec{F}) = u\nabla\times\vec{F}-\vec{F}\times\nabla u$（u为标量函数）

1.3.5 各坐标系下的散度、旋度计算公式

回忆我们此前给出的拉梅系数，可以轻松的推导出各坐标系下的拉梅系数为：

1. 直角坐标系：$h_1=1,\ h_2=1,\ h_3=1$
2. 柱坐标系：$h_1=1,\ h_2=\rho,\ h_3=1$
3. 球坐标系：$h_1=1,\ h_2=r,\ h_3=rsin\theta$

对于矢量场$\vec{A}=\vec{e}_1A_1+\vec{e}_2A_2+\vec{e}_3A_3$，使用拉梅系数计算的散度公式为：

$$\frac{1}{h_1h_2h_3}[\frac{\partial}{\partial u_1}(h_2h_3A_1)+\frac{\partial}{\partial u_2}(h_1h_3A_2)+\frac{\partial}{\partial u_3}(h_1h_2A_3)]$$

旋度公式为：

$$\nabla\times\vec{A}=\begin{vmatrix}\frac{1}{h_1}\vec{e}_1 & \frac{1}{h_2}\vec{e}_2 & \frac{1}{h_3}\vec{e}_3\\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3}\\ h_1\vec{A}_1 & h_2\vec{A}_2 & h_3\vec{A}_3\end{vmatrix}$$

问题 1.3.1: 梯度、散度、旋度公式的推导

请同学们空闲时可以使用拉梅系数推导一下三种坐标系（直角坐标、柱坐标、球坐标）下的梯度、散度、旋度公式，并和课本上的式子进行对比

1.3.6 散度定理（高斯定理）和旋度定理（斯托克斯定理）

定义 1.3.8: 散度定理（高斯定理）

矢量场$\vec{F}$的散度$\nabla\cdot\vec{F}$在任意空间V上的积分等于矢量场$\vec{F}$穿出限定该空间的闭合曲面S的通量，即

$$\int_V \nabla\cdot\vec{F}dV = \oint_S \vec{F}\cdot d\vec{S}$$

厦门大学朋辈辅导
仅供学习交流使用
未经允许和授权，不得网络传播和商用

定义 1.3.9: 旋度定理（斯托克斯定理）

矢量场$\vec{F}$的旋度$\nabla\times\vec{F}$在曲面S上的积分等于矢量场F在限定曲面的闭合曲线C上的线积分，即

$$\int_S \nabla\times\vec{F}\cdot d\vec{S} = \oint_C \vec{F}\cdot d\vec{l}$$

1.4 无旋场和无散场

1.4.1 无旋场

定义 1.4.1: 无旋场

如果一个矢量场$\vec{F}$的旋度处处为0，即$\nabla\times\vec{F} = 0$，则称$\vec{F}$为无旋场。一个标量场的梯度总是一个无旋场，即$\nabla\times(\nabla u) = 0$。

定义 1.4.2: 无旋场的标量位

由于一个标量场的梯度总是一个无旋场，所以对于一个无旋场$\vec{F}$，若某标量函数u满足

$$\vec{F} = -\nabla u$$

则称u为无旋场$\vec{F}$的标量位函数，简称标量位。一个无旋场总可以找到它的标量位函数。

1.4.2 无散场

定义 1.4.3: 无散场

如果一个矢量场$\vec{F}$的散度$\nabla\cdot\vec{F}$处处为零，即$\nabla\cdot\vec{F} = 0$，则称该矢量场$\vec{F}$为无散场。矢量场的旋度的散度恒为零，即$\nabla\cdot(\nabla\times\vec{F}) = 0$

定义 1.4.4: 无散场的矢量位

由于一个矢量场的旋度总是一个无散场，所以对于一个无散场$\vec{F}$来说，若某矢量场$\vec{A}$满足$\vec{F} = \nabla\times\vec{A}$，则称$\vec{A}$为$\vec{F}$的矢量位函数，简称矢量位。一个无散场总可以找到它的矢量位函数

Note:-

梯度是针对标量函数的，梯度的运算结果是矢量；散度是针对标量函数的，散度的运算结果仍然是标量；旋度是针对矢量函数的，旋度的运算结果仍然是矢量。

厦门大学朋辈辅导 仅供学习交流使用，未经允许和授权，不得网络传播和商用