Numerik 1

Prof. Schaedle

April 27, 2019

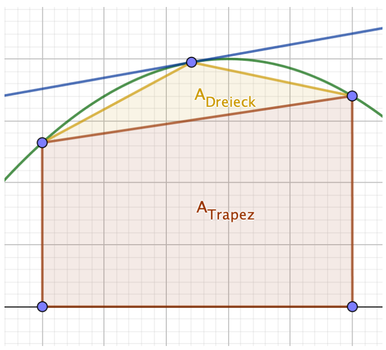
I Numerische Integration

1 Einführung

Problem 1.1.
Gegeben $f : [a, b] \to \mathbb{N}$ *mit* $a, b \in \mathbb{R}$*. Berechne* $\int_a^b f(x)dx$

Beispiel 1.2.

1. *Archimedes (282-212 v.Chr.): Fläche unter einer Parabel*

   $A_{Parabel} = A_{Trapez} + \frac{4}{3} A_{Dreieck}$

2. *Leibniz + Newton (1670):*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

   wobei $\frac{d}{dx} F(x) = f(x)$

3. *Riemann (1850):*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{|\Delta| \to \infty} \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)(x_j - x_{j-1}),$$

   wobei $\Delta = (x_0, ..., x_n)$ *Gitter Zerlegung von* $[a, b]$*,* $a = x_0 < ... < x_n = b$*,* $\xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$ *und* $|\Delta| := \max_{j=1,...n} |x_j - x_{j-1}|$*. Das Riemannintegral existiert, falls:*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |\Delta| < \delta \Rightarrow |\int_a^b f(X)dx - \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)(x_j - x_{j-1})| < \varepsilon$$

Bemerkung 1.3 (Approximation von Integralen)**.**

1. *(linke) Rechtecksregel:*

$$\int_{x_{j-1}}^{x_{j-1}+h} f(x)dx \approx hf(x_{j-1})$$

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{j=1}^{n} \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)dx \approx \sum_{j=1}^{n} f(x_{j-1})(x_j - x_{j-1})$$

2. *Mittelpunktsregel:*

$$\int_{x_j}^{x_j+h} f(x)dx \approx f\left(\frac{x_j + x_j + h}{2}\right) h$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{j=1}^{n} f\left(\frac{x_{j-1} + x_j}{2}\right)(x_j - x_{j-1})$$

Da mit Hilfe der Transformationsformel sich jedes Integral $\int_{x_{j-1}}^{x_j}$ *auf ein Integral* $\int_a^b$ *transformieren lässt, betrachten wir ohne Einschränkungen Integrale von 0 bis 1. Nutze dazu die Abb.* $[a,b] \to [x_{j-1}, x_j], t \mapsto x_{j-1} + t(x_j - x_{j-1})$.

$$\int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)dx = \int_0^1 \underbrace{f\left(x_{j-1} + t(x_j - x_{j-1})\right)}_{:=g_{j-1}(t)}(x_j - x_{j-1})dt = \int_0^1 g_{j-1}(t)(x_j - x_{j-1})dt$$

Definition 1.4 (Quadraturformel)**.**
Eine s-stufige Quadraturformel zur Approximation von $\int_0^1 g(t)dt$ *mit Knoten* c_i *und Gewichten* b_i *für* $i = 1, ...s$ *ist gegeben durch*

$$\sum_{i=1}^{s} b_i g(c_i) \left(\approx \int_0^1 g(t)dt\right)$$

Beispiel 1.5.

1. *Rechtecksregel:* $s = 1, b_1 = 1, c_1 = 0$

$$\int_0^1 g(t) \approx b_1 g(c_1) = g(0)$$

2. *Mittelpunktsregel:* $s = 1, b_1 = 1, c_1 = \frac{1}{2}$

$$\int_0^1 g(t) \approx g(\frac{1}{2})$$

3. *Trapezregel:* $s = 2, b_1 = b_2 = \frac{1}{2}, c_1 = 0, c_2 = 1$

$$\int_0^1 g(t) \approx \frac{1}{2}g(0) + \frac{1}{2}g(1)$$

4. *Simpsonregel:* $s = 3, b_1 = \frac{1}{6}, b_2 = \frac{2}{3}, b_3 = \frac{1}{6}, c_1 = 0, c_2 = \frac{1}{2}, c_3 = 1$

$$\int_0^1 g(t) \approx \frac{1}{6}\left(g(0) + 4g\left(\frac{1}{2}\right) + g(1)\right)$$

Herleitung: *Man legt eine Parabel* p *durch die Punkte* $(0, g(0)), (\frac{1}{2}, g(\frac{1}{2})), (1, g(1))$ *und integriert* p *von 0 bis 1.*
$p(t) = g(0)(1-t)2(\frac{1}{2} - t) + g(\frac{1}{2})(1-t)4t + g(1)(\frac{1}{2} - t)2t$

$$\Rightarrow \int_0^1 p(t)dt = \frac{1}{6}g(0) + \frac{2}{3}g(\frac{1}{2}) + \frac{1}{6}g(1)$$

5. *"pulcherrima et utilissima regula" von Newton:*

$$\int_0^1 g(t)dt \approx \frac{1}{8}\left(g(0) + 3g(\frac{1}{3}) + 3g(\frac{2}{3}) + g(1)\right)$$

Bemerkung 1.6 (Monte-Carlo Integration)**.**

1. *Eindimensionale Monte-Carlo Integration:*
Sei $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. *Wählt man* N *unabhängige gleichverteilte Punkte* x_i *in* $[a, b]$ *so gilt die Approximation:*

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}(b-a)f(x_j)$$

Nach dem Gesetz der großen Zahlen konvergiert dieser Ausdruck, falls

$$\int_a^b |f(x)|dx < \infty, \int_a^b f^2(x)dx < \infty$$

2. *Mehrdimensionale Monte-Carlo Integration:*
   Sei $W = \otimes_{i=1}^{d}[a_i, b_i]$ *ein d-dimensionaler Quader. Wählt man in W unabh. gleichvert. Zufallsvektoren* x_i *in W, so ist*

   $$\int_W f(x)dx \approx \frac{1}{N} Vol(W) \sum_{i=1}^{N} f(x_i),$$

   wobei $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$.
   Achtung: *Dieses gewöhnliche MC-Verfahren konvergiert sehr langsam. Verbesserungen sind z.B.: Importance sampling, Control variates, Antithetic variates und statified sampling.*

2 Ordnung von Quadraturformeln

Definition 2.1.
Eine Quadraturformel (QF) mit Gewichten und Knoten $(b_i, c_i)_{i=1}^{s}$ *hat* ***Ordnung p****, falls sie exakt ist für alle Polynome von Grad* $\leq p - 1$.

$$\mathcal{P} := \left\{ \sum_{i=0}^{n} a_i X^i, a_i \in \mathbb{R}(\mathbb{C}) \right\}, \quad \textit{Menge aller Polynome}$$

Für $q \in \mathcal{P}$ *ist deg(q) der Grad des Polynoms.*

Satz 2.2.
Ein QF $(b_i, c_i)_{i=1}^{s}$ *für* $[0, 1]$ *hat Ordnung p genau dann, wenn*

$$\sum_{i=1}^{s} b_i c_i^{q-1} = \frac{1}{q}$$

für $q = 1, .., p$.

Beweis.

" $\Rightarrow$ "
   QF hat Ordnung p $\Rightarrow$ QF ist exakt für $g(t) = t^{q-1}$ für $q = 1, .., p$ auf $[0, 1]$
   $\Rightarrow$

$$\sum b_i c_i^{q-1} = \int_0^1 t^{q-1} dt = [\frac{t^q}{q}]_{t=0}^{1} = \frac{1}{q}$$

"$\Leftarrow$"

Jedes Polynom von Grad $p-1$ lässt sich als Linearkombination von $1, t, t^2, ..., t^{p-1}$. Die Behauptung folgt aus der Linearität in g von

$$\int_0^1 g(t)dt$$

und

$$\sum_{i=1}^{s} b_i g(c_i)$$

$\square$

Beispiel 2.3.

1. *Rechtecksregel:* $p = 1$
2. *Mittelpunktsregel:* $p = 2$
3. *Trapezregel:* $p = 2$
4. *Simpsonregel:* $p \geq 3$ *nach Konstruktion*

$$\begin{aligned} q = 4: \quad & \frac{1}{6} * 0^3 + \frac{4}{6} * \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{6} * 1^3 = \frac{1}{4} \\ q = 5: \quad & \frac{1}{6} * 0^4 + \frac{4}{6} * \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \frac{1}{6} * 1^4 = \frac{5}{24} \neq \frac{1}{5} \end{aligned}$$

   Nach Satz (2.2) ist damit die Ordnung der Simpsonregel $p = 4$.

5. *"pulcherina et utilissima": Übung*

Bemerkung 2.4.
Zu vergebenen paarweise verschiedenen Knoten $c_1, ..., c_s$ *lässt sich mit Satz (2.2) für* $p = s$ *ein lineares Gleichungssystem für die Gewichte* $b_1, ..., b_s$ *aufstellen.*

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & ... & 1 \\ c_1 & c_2 & ... & c_s \\ ... & ... & ... & ... \\ c_1^{s-1} & c_2^{s-1} & ... & c_s^{s-1} \end{bmatrix}}_{=V} * \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \\ ... \\ 1/s \end{bmatrix}$$

Falls die Vandermonde-Matrix V invertierbar ist, so lassen sich die Gewichte $b_1, ..., b_s$ *bestimmen, sodass die QF* $(b_i, c_i)_{i=1}^s$ *mindestens Ordnung s hat.*

Definition 2.5.
Eine QF heißt symmetrisch, falls für $i = 1, ..., s$ *gilt:*

1. $c_i = 1 - c_{s+1-i}$
2. $b_i = b_{s+1-i}$

Beispiel 2.6 (Symmetrische QF)**.**
Mittelpunktsregel, Trapezregel, Simpsonregel,...

Satz 2.7.
Die maximal erreichbare Ordnung einer symmetrischen QF ist gerade.

Beweis. Sei die QF $(b_i, c_i)_{i=1}^s$ exakt for Polynome vom Grad $\leq 2m - 2$ (für $m \in \mathbb{N}$), (dann ist die Ordnung $\geq 2m - 1$).

$$\forall g \in \mathcal{P} : deg(g) \leq 2m - 2 \Rightarrow \sum_{i=1}^{s} b_i g(c_i) = \int_0^1 g(t) dt$$

Sei $f \in \mathcal{P}$ mit $deg(f) = 2m - 1$.
Wir zeigen QF ist exakt für f.

$$f(t) = ct^{2m-1} + g(t)$$

für $g \in \mathcal{P}$ mit $deg(g) \leq 2m - 2$ mit $c \neq 0$.
Trick: $f(t) = c(t - \frac{1}{2})^{2m-1} + \tilde{g}(t)$ mit $\tilde{g} \in \mathcal{P}$ und $deg(\tilde{g}) \leq 2m - 2$

1. Für $\tilde{g}$ ist die QF exakt

2.
$$\int_0^1 (t-\frac{1}{2})^{2m-1}dt = \left[\frac{1}{2m-2}(t-\frac{1}{2})^{2m-2}\right]_0^1 = 0$$
$$\sum_{i=1}^{s} b_i(c_i-\frac{1}{2})^{2m-1}$$
Symmetrie $\Rightarrow$
$$= \sum_{i=1}^{s} b_{s+1-i}(\frac{1}{2}-c_{s+1-i})^{2m-1}$$
Definiere $j := s+1-i$
$$= \sum_{i=1}^{s} b_i\frac{1}{2}-c_i)^{2m-1} = -\sum_{i=1}^{s} b_i(c_i-\frac{1}{2})^{2m-1}$$
$$\Rightarrow 2 * \sum_{i=1}^{s} b_i(c_i-\frac{1}{2})^{2m-1} = 0$$
$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{s} b_i(c_i-\frac{1}{2})^{2m-1} = 0$$
$$\sum_{i=1}^{s} b_i f(c_i) = c\sum_{i=1}^{s} b_i(c_i-\frac{1}{2})^{2m-1} + \sum_{i=1}^{s} b_i\tilde{g}(c_i)$$
$$= c\int_0^1 (t-\frac{1}{2})^{2m-1}dt + \int_0^1 \tilde{g}(t)dt = \int_0^1 f(t)dt$$
$\Rightarrow$ QF hat mind. Ordnung $2m$.

$\square$

Satz 2.8.
Sind Knoten $c_1 < c_2 < ... < c_s$ $(c_i \in \mathbb{R}, i = 1, ...s)$ gegeben, so existieren eindeutig bestimmte Gewichte $b_1, ..., b_s$ derart, dass die QF $(b_i, c_i)_{i=1}^s$ die maximale Ordnung $p \geq s$ hat.
Es gilt
$$b_i = \int_0^1 l_i(t)dt$$
mit
$$l_i(t) = \frac{\prod_{j=1,j\neq i}^{s}(t-c_j)}{\prod_{j=1,j\neq i}^{s}(c_i-c_j)}$$

Beweis. von 2.8

1. Hat die QF die Ordnung $p \geq s$, so ist wegen $deg(l_i) = s - 1$):
$$\int_0^1 l_i(t)dt = \sum_{j=1}^{s} b_j l_i(c_j) = b_i$$

2. Zu den Knoten $c_i, ...c_s$ definiere b_i wie angegeben. Die QF ist dann exakt für alle Polynome von Grad $\leq s - 1$, da die $l_1, ..., l_s$ linear unabhängig sind und eine Basis des Vektorraums der Polynome von Grad $\leq s - 1$ bilden.

□

Bemerkung (zu Satz (2.8))**.**
l_i ist das i-te Lagrangepolynom zu den Knoten $c_1, ..., c_s$. Es gilt:

1. *$deg(l_i) = s - 1$*
2. *$l_i(c_j) = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$, für $j = 1, ..., s$*

3 Quadraturfehler

Allgemeine Voraussetzung: $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sei hinreichend oft differenzierbar (f ist eine glatte Funktion)

Definition 3.1.
Der Fehler bei der Approximation des Integrals durch die QF ist
$$err = \int_a^b f(x)dx - \sum_{j=0}^{n-1} \left(h_{j+1} \sum_{i=1}^{s} b_i f(x_j + h_{j+1} c_i) \right)$$

mit $h_{j+1} = x_{j+1} - x_j$
$$= \sum_{j=0}^{n-1} \left(\int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x_j + \tau)d\tau - h_{j+1} \sum_{i=1}^{s} b_i f(x_j + h_{j+1} c_i) \right)$$
$$= \sum_{j=0}^{n-1} h_{j+1} \int_0^1 g_j(\xi)d\xi - h_{j+1} \sum_{i=1}^{s} b_i g_j(c_i)$$

mit $g_j(\xi) = f(x_j + \xi h_{j+1})$

Der Quadraturfehler auf Teilintervallen $[x_j, x_j + h_{j+1}]$ *ist*

$$\begin{aligned} E(f, x_j, h_{j+1}) &= \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)dx - h_{j+1} \sum_{i=1}^{s} b_i f(x_j + c_i h_{j+1}) \\ &= h_{j+1} \left(\int_0^1 g_j(\xi) d\xi - \sum_{i=1}^{s} b_i g_j(c_i) \right) \end{aligned}$$

3.2 (Fehlerabschätzung - 1. Versuch)**.**
Falls f *auf* $[x_0, x_0 + h]$ *glatt genug ist und die QF Ordnung* p *hat, aber nicht Ordnung* $p+1$*, so erhält man durch Taylorentwicklung um* x_0 *von* $f(x_0+\xi h) = g_0(\xi)$ *und* $f(x_0 + c_i h)$*:*

$$\begin{aligned} E(f, x_0, h) &= \sum_{k \geq 0} \frac{h^{k+1}}{k!} \left(\int_0^1 t^k dt - \sum_{i=1}^{s} b_i c_i^k \right) f^{(k)}(x_0) \\ &= \frac{h^{p+1}}{p!} \left(\frac{1}{p+1} - \sum_{i=1}^{s} b_i c_i^p \right) f^{(p)}(x_0) + \underbrace{\mathcal{O}(h^{p+2})}_{Taylorrestglied} \end{aligned}$$

Die Konstante $C = \frac{1}{p!} \left(\frac{1}{p+1} - \sum_{i=1}^{s} b_i c_i^p \right)$ *heißt Fehlerkonstante.*
Ist h *klein genug, sodass das Taylorrestglied im Vergleich zu* $h^{p+1} C f^{(p)}(x_0)$ *vernachlässigbar ist, so gilt:*

$$err = \sum_{j=0}^{n-1} E(f, x_j, h)$$

mit $x_j = x_0 + jh$

$$\begin{aligned} &\approx C h^p \sum_{j=0}^{n-1} h f^{(p)}(x_j) \\ &\approx C h^p \int_a^b f^{(p)}(x) dx \\ &= C h^p \left(f^{(p-1)}(b) - f^{(p-1)}(a) \right) \end{aligned}$$

3.3 (Rigorose Fehlerabschätzung)**.**

Satz 1: *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ k-mal stetig differenzierbar ($f \in C^k([a,b])$) und habe die QF Ordnung p, so gilt für $h < b - a$ und $k \leq p$*

$$E(f, x_0, h) = h^{k+1} \int_0^1 K_k(\tau) f^{(k)}(x_0 + \tau k) d\tau,$$

wobei der Peanokern $K_k(\tau)$ durch

$$K_k(\tau) := \frac{(1-\tau)^k}{k!} - \sum_{i=1}^{s} b_i \frac{(c_i - \tau)_+^{k-1}}{(k-1)!},$$

mit $(\sigma)_+^{k-1} = \begin{cases} \sigma^{k-1} & \sigma > 0 \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases}$ *, gegeben ist.*

Beweis. Taylorentwicklung mit Integralrestglied und Transformation

$$f(x_0 + th) = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(th)^j}{j!} f^{(j)}(x_0) + h^k \int_0^t \frac{(t-\tau)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(x_0 + \tau h) d\tau$$

eingesetzt in (*) und die Verwendung von

$$\int_0^{c_i} (c_i - \tau)^{k-1} g(\tau) d\tau = \int_0^1 (c_i - \tau)_+^{k-1} g(\tau) d\tau$$

liefern

$$
\begin{aligned}
E(f,x_0,h) = {} & h\int_0^1 \left(\sum_{j=0}^{k-1}\frac{(th)^j}{j!}f^{(j)}(x_0) + h^k\int_0^t \frac{(t-\tau)^{k-1}}{(k-1)!}f^{(k)}(x_0+\tau h)d\tau\right)dt \\
& - h\sum_{i=1}^{s} b_i\left(\sum_{j=0}^{k-1}\frac{(c_ih)^j}{j!}f^{(j)}(x_0) + h^k\int_0^{c_i}\frac{(c_i-\tau)^{k-1}}{(k-1)!}f^{(k)}(x_0+c_ih)d\tau\right) \\
\underset{k\le p}{=} {} & hh^k\left(\int_0^1\int_0^t \frac{(t-\tau)^{k-1}}{(k-1)!}f^{(k)}(x_0+\tau h)d\tau dt\right) \\
& - hh^k\left(\sum_{i=1}^{s}\int_0^1 \frac{(c_i-\tau)_+^{k-1}}{(k-1)!}f^{(k)}(x_0+\tau h)d\tau\right) \\
= {} & hh^k\left(\int_0^1\int_0^1 \frac{(t-\tau)_+^{k-1}}{(k-1)!}f^{(k)}(x_0+\tau h)d\tau dt\right) \\
& - hh^k\left(\sum_{i=1}^{s} b_i\int_0^1 \frac{(c_i-\tau)_+^{k-1}}{(k-1)!}f^{(k)}(x_0+\tau h)d\tau\right) \\
= {} & h^{k+1}\int_0^1\left(\int_0^1 \frac{(t-\tau)_+^{k-1}}{(k-1)!}dt - \frac{(c_i-\tau)_+^{k-1}}{(k-1)!}\right)f^{(k)}(x_0+\tau h)d\tau \\
= {} & h^{k+1}\int_0^1 K_k(\tau)f^{(k)}(x_0+\tau h)d\tau,
\end{aligned}
$$

da

$$
\int_0^1 \frac{(t-\tau)_+^{k-1}}{(k-1)!}dt = \int_0^1 \frac{(t-\tau)^{k-1}}{(k-1)!} = \left[\frac{1}{k!}(t-\tau)^k\right]_{t=\tau}^1 = \frac{1}{k!}(1-\tau)^k
$$

gilt. □

Satz 2: *(Eigenschaften des Peanokerns)*
Für eine QF der Ordnung p gilt für $k \le p$ $(k,p \in \mathbb{N})$

1. $K_k'(\tau) = -K_{k-1}(\tau)$ *für* $k \ge 2$ *und* $\tau \ne c_i$ *falls* $k = 2$
2. $K_k(1) = 0$ *für* $k \ge 1$, *falls* $c_i \le 1$ *für* $i = 1, ..., s$
3. $K_k(0) = 0$ *für* $k \ge 2$, *falls* $c_i \le 1$ *für* $i = 1, ..., s$

4. $\int_0^1 K_p(\tau) = \frac{1}{p!}\left(\frac{1}{p-1} - \sum_{i=1}^s b_i c_i^p\right) =: C$ *(Fehlerkonstante* C *aus (3.2))*

5. $K_1(\tau)$ *ist stückweise linear mit Steigung* -1 *und Sprüngen der Höhe* b_i *an den Stellen* c_i

Beweis. Eventuell Übungsaufgabe □

Beispiel: *Mittelpunktsregel:*

$$\begin{aligned}
K_1(\tau) &= \frac{(1-\tau)^1}{1!} - 1\frac{(\frac{1}{2}-\tau)_+^1}{0!} \\
&= 1 - \tau - \left(\frac{1}{2} - \tau\right)_+^0 \\
&= \begin{cases} 1-\tau-1 & \tau < \frac{1}{2} \\ 1-\tau & \tau \geq \frac{1}{2} \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_2(\tau) &= \frac{(1-\tau)^2}{2!} - 1\frac{(\frac{1}{2}-\tau)_+^1}{1!} \\
&= \frac{1}{2}(1-\tau)^2 - \left(\frac{1}{2} - \tau\right)_+^1 \\
&= \begin{cases} \frac{\tau^2}{2} & \tau < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}(1-\tau)^2 & \tau \geq \frac{1}{2} \end{cases}
\end{aligned}$$

Satz 3: *Sei* $f \in C^k([a,b])$ *und habe die QF* $(b_i, c_i)_{i=1}^s$*, Ordnung* $p \geq k$*, so gilt für den Fehler* err *aus* (3.1)

$$|err| \leq h^k(b-a)\int_0^1 |K_k(\tau)| d\tau \max_{x\in[a,b]} |f^{(k)}(x)|, \qquad h = \max_{j=1,..,n} h_j.$$

Beweis. Mit Satz 1 gilt

$$\begin{aligned}
|E(f, x_j, h_{j+1})| &\leq h_{j+1}^{k+1} \int_0^1 |K_k(\tau)||f^{(k)}(x_j + \tau h_{j+1})| d\tau \\
&\leq h_{j+1}^{k+1} \int_0^1 |K_k(\tau)| d\tau \max_{x\in[x_j, x_j+h_{j+1}]} |f^{(k)}(x)|
\end{aligned}$$

Zudem gilt

$$
\begin{aligned}
|err| &= |\sum_{j=0}^{n-1} E(f, x_j, h_{j+1})| \\
&\leq \sum_{j=0}^{n-1} |E(f, x_j, h_{j+1})| \\
&\leq \underbrace{\sum_{j=0}^{n-1} h_{j+1}}_{b-a} \underbrace{h_{j+1}^k}_{\leq h^k} \int_0^1 |K_k(\tau)| d\tau \underbrace{\max_{x \in [x_j, x_{j+1}]} |f^{(k)}(x)|}_{\leq \max_{x \in [a,b]} |f^{(k)}(x)|}
\end{aligned}
$$

Damit folgt die Behauptung. □

Beispiele

Für die Mittelpunktsregel (maximale Ordnung = 2) erhält man

$$|err| \leq h^2(b-a)\frac{1}{24} \max_{x \in [a,b]} |f^{(2)}(x)|$$

Für die Trapezregel (maximale Ordnung = 2)

$$|err| \leq h^2(b-a)\frac{1}{12} \max_{x \in [a,b]} |f^{(2)}(x)|$$

Für die Simpsonregel (maximale Ordnung = 4)

$$|err| \leq h^4(b-a)\frac{1}{2880} \max_{x \in [a,b]} |f^{(4)}(x)|$$

$\rightarrow$ *Der Fehler wird klein, falls h klein und die Ordnung p groß wird.*

4 Quadratur mit hoher Ordnung

Es seien Knoten $c_1 < ... < c_s$ gegeben. Aus §2 wissen wir:
Es gibt Gewichte $b_1, ..., b_s$, sodass $p \geq s$.
Fragen:

- Kann man c_j so wählen, dass $p > s$?

- Wenn ja, wie?
- Wie groß kann p maximal werden?

<u>Ziel:</u> QF mit Ordnung $p = s + m$ für $m \in \mathbb{N}, m > 1$. Sei $g \in \mathcal{P}_{s+m-1}$ (Polynome von Grad $\leq s + m - 1$).
g soll durch die QF exakt integriert werden.
<u>Idee:</u> Dividiere g durch $M(t) = \prod_{i=1}^{s}(t - c_i)$ "Knotenpolynom"
$deg(M) = s$
$g(t) = M(t)h(t) + r(t)$ mit Rest r, $deg(r) \leq s - 1$ und $deg(h) \leq m - 1$
Dann gilt einerseits

$$\int_0^1 g(t)dt = \int_0^1 M(t)h(t)dt + \int_0^1 r(t)dt$$

und andererseits

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{s} b_i g(c_i) &= \sum_{i=1}^{s} b_i \underbrace{M(c_i)}_{=0} h(c_i) + \sum_{i=1}^{s} b_i r(c_i) \\ &= 0 + \int_0^1 r(t)dt,\end{aligned}$$

da $p \leq s$
Damit ist gezeigt:

Satz 4.1.
Sei $(b_i, c_i)_{i=1}^{s}$ der Ordnung $p \geq s$. Äquivalent sind:

1. *QF hat Ordnung $s + m$*
2. *$\forall h \in \mathcal{P}_{m-1} : \int_0^1 M(t)h(t)dt = 0$*

Korollar 4.2.
Die Ordnung einer s-stufigen QF ist höchstens $2s$.

Beweis (indirekt). Annahme: $p > 2s$

$$(4.1) \Rightarrow \forall h \in \mathcal{P}_s : \int_0^1 M(t)h(t)dt = 0$$

Setze $h = M$, dann ist

$$\int_0^1 M(t)^2 dt = 0$$

$\lightning$ zu $\int_0^1 M(t)^2 dt > 0$, da $M(t) \equiv 0$ $\square$

4.3 (Beispiele/Korollare)**.**

1. *Jede 3-stufige QF mit Ordnung* ≥ 4 *muss*

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 (t-c_1)(t-c_2)(t-c_3)dt = 0 \\
\Leftrightarrow &\int_0^1 t^3 + t^2(-c_1-c_2-c_3) + t(c_1c_2+c_2c_3+c_1c_3) - c_1c_2c_3 dt \\
&= \frac{1}{4} + \frac{1}{3}(-c_1-c_2-c_3) + \frac{1}{2}(c_1c_2+c_2c_3+c_1c_3) - c_1c_2c_3 = 0
\end{aligned}$$

   erfüllen, dh.

$$c_3 = \frac{\frac{1}{4} - (c_1+c_2)\frac{1}{3} + c_1c_2\frac{1}{2}}{\frac{1}{3} - (c_2+c_1)\frac{1}{2} + c_1c_2}$$

2. *Zur Berechnung der Knoten einer* 3*-stufigen QF der Ordnung* 6 *verwenden wir* (4.2) *mit* $h(t) = 1, t, t^2$

$$\int_0^1 M(t)h(t) = 0$$

$$\begin{aligned}
h(t) = 1 \quad &\Rightarrow \quad c_1c_2c_3 - \frac{1}{2}(c_1c_2+c_2c_3+c_1c_3) + \frac{1}{3}(c_1+c_2+c_3) = \frac{1}{4} \\
h(t) = t \quad &\Rightarrow \quad \frac{1}{2}c_1c_2c_3 - \frac{1}{3}(c_1c_2+c_2c_3+c_1c_3) + \frac{1}{4}(c_1+c_2+c_3) = \frac{1}{5} \\
h(t) = t^2 \quad &\Rightarrow \quad \frac{1}{3}c_1c_2c_3 - \frac{1}{4}(c_1c_2+c_2c_3+c_1c_3) + \frac{1}{5}(c_1+c_2+c_3) = \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

   Das ist ein nichtlineares Gleichungssystem in c_1, c_2, c_3.
   <u>*Trick:*</u>

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= c_1 + c_2 + c_3 \\
\sigma_2 &= c_1c_2 + c_1c_3 + c_2c_3 \\
\sigma_2 &= c_1c_2c_3
\end{aligned}$$

   Das sind die Koeffizienten von $M(t)$ *in der Monombasis.*
   $M(t) = (t-c_1)(t-c_2)(t-c_3) = t^3 - \sigma_1 t^2 + \sigma_2 t - \sigma_3$

und das Gleichungssystem ist linear in $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$
mit Lösung $\sigma_1 = \frac{3}{2}, \sigma_2 = \frac{3}{5}, \sigma_3 = \frac{1}{20}$
und damit ist

$$\begin{aligned} M(t) &= t^3 - \frac{3}{2}t^2 + \frac{3}{5}t - \frac{1}{20} \\ &= (t - \frac{1}{2})(t - \frac{5-\sqrt{15}}{10})(t - \frac{5+\sqrt{15}}{10}) \end{aligned}$$

Glücklicherweise sind die Wurzeln von $M(t)$ *in* $[0,1]$. *Damit lassen sich die Gewichte mit* (2.4) *berechnen und wir erhalten*

$$\int_0^1 g(t)dt = \frac{5}{18} g\left(\frac{5-\sqrt{15}}{10}\right) + \frac{8}{18} g\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{5}{18} g\left(\frac{5+\sqrt{15}}{10}\right)$$

Ziel: Konstruktion von QF der Ordnung $2s$ mit Hilfe von orthogonalen Polynomen.

5 Orthogonalpolynome

Bedingung 2. in Satz (4.1)

$$\forall h \in \mathcal{P}_{m-1} : \int_0^1 M(t)h(t) = 0$$

kann als Orthogonalitätsbedingung bzgl. eines Skalarprodukts $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$ auf dem Vektorraum $L^2([0,1])$ oder $C([0,1])$ aufgefasst werden.
Erinnerung:

$$\mathcal{P}_s := \left\{ \sum_{j=0}^{s} \alpha_j X^j, \alpha_j \in \mathbb{R} \right\}$$

ist ein $\mathbb{R}$-VR mit $dim(\mathcal{P}_s) = s+1$ und Basis $\{1, X, X^2, ..., X^s\}$

$\langle \cdot, \cdot \rangle : C([0,1]) \times C([0,1]) \to \mathbb{R}, (f,g) \mapsto \int_0^1 f(t)g(t)dt$ ist

1. symmetrisch $\langle f, g\rangle = \langle g, f\rangle$
2. linear $\langle \alpha f + g, h\rangle = \alpha\langle f, h\rangle + \langle g, h\rangle$

3. positiv definit $\langle f, f\rangle \geq 0$ und $\langle f, f\rangle = 0 \Rightarrow f = 0$

Wie in der linearen Algebra definieren wir f steht senkrecht auf g: $f \perp g \Leftrightarrow \langle f, g\rangle = 0$

Satz 5.1.
QF hat die Ordnung $s + m \Leftrightarrow M$ ist orthogonal auf allen Polynome in $\mathcal{P}_{m-1}$

Definition 5.2.
Für eine Gewichtsfunktion $\omega : (a, b) \to \mathbb{R}$ mit

1. *ω stetig*

2. *$\forall x \in (a, b) : \omega(x) > 0$*

3. *$\forall k \in \mathbb{N} : \int_a^b \omega(x)|x|^k dx < \infty$*

definieren wir auf den Vektorraum

$$V = \left\{ f : [a, b] \to \mathbb{R} : f \text{ stetig und} \int_a^b f(x)^2 \omega(x) dx < \infty \right\}$$

das gewichtete Skalarprodukt

$$\langle f, g\rangle_\omega := \int_a^b \omega(x) f(x) g(x) dx$$

für $f, g \in V$.
Zudem definiere:

$$f \perp_\omega g :\Leftrightarrow \langle f, g, \rangle_\omega = 0$$

Satz 5.3.
Es existiert eine eindeutige Folge von Polynomen $p_0, p_1, ...$ mit

1. *$deg(p_k) = k$*

2. *$\forall q \in \mathcal{P}_{k-1} : p_k \perp q$ für $k \geq 1$*

3. *$p_k(x) = x^k + r$ mit $deg(r) \leq k - 1$ "Normierung"*

Diese Polynome lassen sich rekursiv berechnen durch

$$
\begin{aligned}
&p_0(x) := 1\\
&p_1(x) := x\\
&p_{k+1}(x) := (x - \beta_{k+1})p_k(x) - \gamma_{k+1}^2 p_{k-1}(x), \quad \textit{für } k \geq 2
\end{aligned}
$$

Wobei β und γ definiert sind durch:

$$
\begin{aligned}
\beta_{k+1} &:= \frac{\langle xp_k, p_k\rangle}{\langle p_k, p_k\rangle}\\
\gamma_{k+1}^2 &:= \frac{\langle p_k, p_k\rangle}{\langle p_{k-1}, p_{k-1}\rangle}
\end{aligned}
$$

Beweis. (vgl. Gram-Schmidt Orthogonalisierung LinA)
Sei $p_0, ..., p_k$ bereits bekannt. Zur Konstruktion von p_{k+1} setzen wir

$$p_{k+1}(x) = xp_k(x) + \sum_{j=0}^{k} \alpha_j p_j(x)$$

(damit ist 3. erfüllt)
Zur Bestimmung der α_j:

1. $0 = \langle p_{k+1}, p_k\rangle = \langle xp_k, p_k\rangle + \alpha_k\langle p_k, p_k\rangle + \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j \underbrace{\langle p_j, p_k\rangle}_{=0}$

   $\Rightarrow \alpha_k = -\frac{\langle xp_k, p_k\rangle}{\langle p_k, p_k\rangle} =: -\beta_{k+1}$

2. $$
\begin{aligned}
0 = \langle p_{k+1}, p_{k-1}\rangle &= \langle xp_k, p_{k-1}\rangle + 0 + \alpha_{k-1}\langle p_{k-1}, p_{k-1}\rangle + 0\\
&= \langle p_k, xp_{k-1}\rangle + \alpha_{k-1}\langle p_{k-1}, p_{k-1}\rangle
\end{aligned}
$$

   Aufgrund von 3. $\Rightarrow$

   $$xp_{k-1} = p_k + r$$

   mit $deg(r) \leq k - 1$

   $$\Rightarrow \langle p_k, xp_{k-1}\rangle = \langle p_k, p_k\rangle + \underbrace{\langle p_k, r\rangle}_{=0}$$

   $$\Rightarrow \alpha_{k-1} = -\frac{\langle p_k, p_k\rangle}{\langle p_{k-1}, p_{k-1}\rangle} =: -\gamma_{k+1}^2$$

3. Für $j \leq k-2$:

$$0 = \langle p_{k+1}, p_j \rangle = \langle x p_k, p_j \rangle + \alpha_j \langle p_j, p_j \rangle$$
$$= \underbrace{\langle p_k, x p_j \rangle}_{=0} + \alpha_j \underbrace{\langle p_j, p_j \rangle}_{\neq 0}$$

$\langle p_k, x p_j \rangle = 0$ gilt, da $deg(x p_j) \leq k+1$
Insgesamt haben wir

$$p_{k+1}(x) = x p_k(x) - \beta_{k+1} p_k(x) - \gamma_{k+1}^2 p_{k-1}(x)$$

□

Bemerkung.
Für eine QF maximaler Ordnung müssen nach Satz (4.1) die Knoten c_i, $i = 1, ..., s$ so gewählt werden, dass

$$M(t) = \prod_{i=1}^{s} (t - c_i)$$

das Orthogonalpolynom vom Grad s bezüglich des Skalarprodukts mit $\omega(x) \equiv 1$ auf $[0,1]$ ist.
Frage: Sind die Wurzeln der Orthogonalpolynome aus (5.3) reell? (Spoiler: Ja)

Satz 5.4.
Sei p_k das Orthogonalpolynom wie in (5.3) definiert (bzgl. $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) g(x) \omega(x) dx$). Alle Wurzeln von p_k sind einfach und liegen im offenen Intervall (a, b).

Beweis. Seie $x_1, ..., x_r$ jene Wurzeln in p_k, die reell sind, in (a, b) liegen und bei denen p_k das Vorzeichen wechselt (Wurzeln mit ungerader Vielfachheit).
Klar ist: $r \leq k$.
Sei

$$g(x) = \prod_{j=1}^{r} (x - x_j)$$

Dann ist

$$\langle p_k, g \rangle = \int_a^b \underbrace{p_k(x)\, g(x)}_{\text{Wechselt das Vorzeichen in (a,b) nicht}} \omega(x)\, dx \neq 0$$

Andererseits ist p_k orthogonal zu allen Polynomen vom Grad $\leq k-1$
$\Rightarrow r = deg(g) \geq k$
$\Rightarrow r = k$ $\square$

Beispiel 5.5 (Orthogonale Polynome).

Bezeichnung	*(a,b)*	*w(x)*	*Name*
P_k	$(-1,1)$	1	*Legendrepolynome*
T_k	$(-1,1)$	$(1-x^2)^{-1/2}$	*Tschebyscheff-Polynome*
$P_k^{(\alpha,\beta)}$	$(-1,1)$	$(1-x)^\alpha(1-x)^\beta$	*Jacobi-Polynome* $\alpha,\beta > -1$
$L_k^{(\alpha)}$	$(0,\infty)$	$x^\alpha e^{-x}$	*Laguere-Polynome*
M_k	$(-\infty,\infty)$	e^{-x^2}	*Harmitepolynome*

Bemerkung: Teilweise sind andere Normierungen üblich $P_k(1) = 1$, $T_k(x) = 2^{k-1}x^k + ...$, ...

6 Ein adaptives Programm

Gegeben sei eine QF mit $(b_i, c_i)_{i=1}^s$ mit Ordnung $p = 2s$ (die höchste Ordnung, die es gibt) z.B. $s = 15$
Ziel: Ein Computerprogramm adagaussqf(f, a, b, Tol), welches für eine Funktion f auf dem Interval $[a,b]$ eine Approximation an $\int_a^b f(x)dx$ berechnet, sodass der Fehler $\leq$ Tol ist (für viele Funktionen).
Konstruiere eine Zerlegung $\Delta = \{a = x_0 < ... < x_n = b\}$ des Intervalls, sodass für die Approximation

$$I_\Delta := \sum_{j=0}^{n-1} h_{j+1} \sum_{i=1}^{s} b_i f(x_i + c_i h_{j+1})$$

gilt

$$|I_\Delta - \int_a^b f(x)dx| \leq Tol \int_a^b |f(x)|dx$$

Schwierigkeiten:

a) Schätzung des Fehlers

b) Wahl der Zerlegung des Intervalls

6.1 (Zerlegung des Intervalls).
Für ein Teilintervall $[x_j, x_{j+1}]$ *von* $[a,b]$ *lassen sich*

$$res[x_j, x_{j+1}] := h_{j+1} \sum_{i=1}^{s} b_i f(x_j + c_i h_{j+1})$$

und

$$resabs[x_j, x_{j+1}] := h_{j+1} \sum_{i=1}^{s} |b_i f(x_j + c_i h_{j+1})|$$

berechnen.
Angenommen wir können eine Schätzung des Fehlers $err[x_, x_{j+1}]$ *berechnen mit*

$$err[x_, x_{j+1}] \approx res[x_, x_{j+1}] - \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)dx,$$

dann bietet sich folgendes Verfahren zur Konstruktion einer Zerlegung an:

1. *Berechne* $res[a,b]$, $resabs[a,b]$ *und* $err[a,b]$.
   Falls
   $$|err[a,b]| \leq Tol\, resabs[a,b]$$
   Gebe $res[a,b]$ *zurück.*
   Ansonsten:

2. *Zerlege* $[a,b]$ *in*
   $$I_0 = \left[a, \frac{b-a}{2}\right]$$
   und
   $$I_1 = \left[\frac{b-a}{2}, b\right]$$
   und berechne

   $res\, I_0$, $resabs\, I_0$, $err\, I_0$ *und*

   $res\, I_1$, $resabs\, I_1$, $err\, I_1$

   $n = 2$.

3. Falls

$$\sum_{j=0}^{n-1} |err\, I_j| \leq Tol \sum_{j=0}^{n-1} resabs\, I_j$$

Gebe

$$\sum_{j=0}^{n-1} res\, I_j$$

zurück. Ansonsten:
Unterteile das Intervall $I_k = [a_k, b_k]$, in dem der Fehler maximal ist in zwei Teilintervalle

$$I_l = \left[a_k, \frac{b_k - a_k}{2}\right]$$

und

$$I_m = \left[\frac{b_k - a_k}{2}, b_k\right]$$

und berechne:

$res\, I_l$, $resabs\, I_l$, $err\, I_l$ *und*

$res\, I_m$, $resabs\, I_m$, $err\, I_m$

$n = n + 1$
Gehe zu 3)

6.2 (Schätzung des Fehlers)**.**
Ziel: Berechne Approximation an

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)dx - h_{j+1} \sum_{i=1}^{s} b_i f(x_j + h_{j+1} c_i)$$

ohne zusätzliche Funktionsauswertungen.
Idee: Konstruiere eingebettete QF, d.h. QF zu den selben Knoten c_i mit Gewichten $\hat{b}_i$ und Ordnung $\hat{p} < p$.
Bemerkung: Falls $p = 2s$ ist, so gilt $\hat{p} \leq s - 1$ (wäre $\hat{p} \geq s$, so wäre nach (2.8) $\hat{b}_i = b_i$).

Eine Approximation des Fehlers für die eingebettete QF ist durch

$$\begin{aligned}
\mathit{diff}[x_j, x_{j+1}] &= h_{j+1} \sum_{i=1}^{s} b_i f(x_j + c_i h_{j+1}) - h_{j+1} \sum_{i=1}^{s} \hat{b}_i f(x_j + c_i h_{j+1}) \\
&= h_{j+1} \sum_{i=1}^{s} (b_i - \hat{b}_i) f(x_j + c_i h_{j+1})
\end{aligned}$$

gegeben. Es gilt

$$\begin{aligned}
\mathit{diff}[x_j, x_{j+1}] &= h_{j+1} \sum_{i=1}^{s} b_i f(x_j + c_i h_{j+1}) - \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)dx \\
&\quad - \left(h_{j+1} \sum_{i=1}^{s} \hat{b}_i f(x_j + c_i h_{j+1}) - \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)dx \right) \\
&= \textit{Fehler der QF } (b_i, c_i)_{i=1}^{s} - \textit{Fehler der QF } (\hat{b}_i, c_i)_{i=1}^{s} \\
&= C_1 h_{j+1}^{p+1} + C_2 h_{j+1}^{\hat{p}+1}
\end{aligned}$$

Falls h_{j+1} klein ist, ist $C_1 h_{j+1}^{p+1} << C_2 h_{j+1}^{\hat{p}+1}$.
Drei Möglichkeiten den Fehler zu schätzen:

I) *err* $[x_j, x_{j+1}] \approx$ *diff* $[x_j, x_{j+1}]$. *Sehr pessimistisch*

II) *err* $[x_j, x_{j+1}] \approx (\mathit{diff}\ [x_j, x_{j+1}])^2$, *falls* $p = 2s$ *und* $\hat{p} = s - 1$. *Wenig verlässlich*

III) *Verwende dritte eingebettete QF*

$(\hat{\hat{b}}_i, c_i)$ *der Ordnung 6*

zu (b_i, c_i) *der Ordnung* $30 = 2s$, $s = 15$

und $(\hat{b}_i, c_i)$ *der Ordnung 14*

$\hat{\mathit{diff}} = h_{j+1} \sum_{i=1}^{s} (b_i - \hat{\hat{b}}_i) f(x_j + c_i h_{j+1}) \approx C_3 h^7$

$$\begin{aligned}
\mathit{err}\ [x_j, x_{j+1}] &= \mathit{diff}\ [x_j, x_{j+1}] \left(\frac{\mathit{diff}}{\hat{\mathit{diff}}} \right)^2 \\
&= C_2 \frac{C_2^2}{C_3^2} h_{j+1}^{15} \left(\frac{h_{j+1}^{15}}{h_{j+1}^{7}} \right) = C h_{j+1}^{31}
\end{aligned}$$

7 Gauß- und Lobatto Quadraturformeln

Ziel: Konstruktion einer s-stufigen QF der Ordnung $p = 2s$.
Für $M(t) = CP_s(2t-1)$, wobei P_s das Legendrepolynom vom Grad s ist (siehe (5.5)), $C \in \mathbb{R}$, erhalten wir mit (5.4) und (4.1):

Satz 7.1.
Für jedes $s \in \mathbb{N}$ gibt es eine eindeutige QF der Ordnung $p = 2s$, die sogenannte Gauß-QF. Ihre Knoten sind die Wurzeln von $P_s(2t-1)$, ihre Gewichte sind durch (2.8) gegeben.

Beispiel.
$s = 1$ *Mittelpunktsregel*
$s = 2$ $c_{1,2} = \frac{1}{2} \mp \frac{\sqrt{3}}{6}$, $b_1 = \frac{1}{2} = b_2$
$s = 3$ *(4.3) 2)*

7.2 (Bezeichnung der Knoten der Gauß-QF).
Details: Siehe Homepage (Übungsaufgabe).
Idee: Die Wurzeln der Polynome, die durch Rekursion (5.3) erzeugt werden, sind die Eigenwerte einer symmetrischen Tridiagonalmatrix (Matrix: Siehe Homepage).
Zusammengefasst:

Satz: *Es seien $P_0, \dots, P_n$ Polynome definiert wie in Satz (5.3).*
$\lambda \in \mathbb{R}$ ist eine Nullstelle von $P_n \Leftrightarrow \lambda$ ist ein Eigenwert der Tridiagonalmatrix T_n. $\Phi_n(\lambda)$ ist dann der Eigenvektor zum Eigenwert λ.
T_n und $\Phi_n(\lambda)$ sind gegeben durch:

$$T_n = \begin{bmatrix} \beta_1 & 1 & & & \\ \gamma_2^2 & \beta_2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \gamma_{n-1}^2 & \beta_{n-1} & 1 \\ & & & \gamma_n^2 & \beta_n \end{bmatrix}$$

$$\Phi_n(\lambda) = [P_0 \ \dots \ P_{n-1}]^T$$

In Numerik II lernen Sie Verfahren kennen, um die Eigenwerte zu berechnen.

7.3 (Lobatto Quadraturformeln).
Ein Vorteil der Simpsonquadraturformel war, dass $c_1 = 0$ und $c_s = 1$ gilt.

Damit muss man den Integranten in x_j nur einmal auswerten. Zur Konstruktion einer s-stufigen QF der Ordnung $p = 2s - 2$ mit $c_1 = 0$ und $c_s = 1$ setzt man

$$M(t) = P_s(2t-1) - P_{s-2}(2t-1)$$

Da die Legendre-Polynome folgende Rekursion erfüllen

$$P_0(x) = 1 \quad P_1(x) = x$$

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x)$$

ist

$$P_s(1) = 1 \quad \textit{und} \quad P_s(-1) = (-1)^s$$

und damit

$$M(0) = 0 = M(1)$$

Die restlichen Nullstellen (oder Wurzeln) von $M(t)$ sind reell, einfach und liegen in (0,1), wie man analog zu (5.4) zeigt.
Damit gilt:

Satz *Für $s \in \mathbb{N}$, $s \geq 2$ gibt es eine eindeutige s-stufige QF der Ordnung $2s - 2$ mit $c_1 = 0$ und $c_s = 1$*

II Interpolation und Approximation

Problemstellung A Zu gegebenen $(x_0, y_0), ..., (x_n, y_n)$ berechne Polynom p vom Grad $\leq n$ mit

$$p(x_j) = y_j, \quad j = 0, ..., n$$

Problemstellung B $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ gegeben. Finde einfach auszuwertende Funktion $p : [a, b] \to \mathbb{R}$, etwa ein Polynom, stückweises Polynom, rationale Funktion, sodass $f - p$ klein ist.

i) $f(x) = p(x)$ für endlich viele vorgegebene Punkte x

ii) $\int_a^b (f(x) - p(x))^2 dx$ soll minimal sein.

iii) $\max_{x \in [a,b]} |f(x) - p(x)|$ soll minimal sein.

8 Newtonsche Interpolationsformel

Beispiel 8.1.

n=1:

$(x_0, y_0), (x_1, y_1)$, $p \in \mathcal{P}_1$ *das beide Punkte verbindet.*

$$p(x) = y_0 + (x - x_0)\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

n=2:

$(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)$

$$p(x) = y_0 + (x - x_0)\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} + a(x - x_0)(x - x_1)$$

Bestimme a *so, dass* $p(x_2) = y_2$

$$y_2 \overset{!}{=} y_0 + (\overset{-x_1+x_1}{\check{x_2}} - x_0)\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} + a(x_2 - x_0)(x - x_1)$$

$$a(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = y_2 - y_0 - (x_2 - x_1)\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} - y_1 + y_0$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{x_2 - x_0}\left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}\right)$$

Definition 8.2 (dividierte Differenzen)**.**
Für $(x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n)$ *mit paarweise verschiedenen Stützstellen* x_j *definieren wir*

$$\begin{aligned}
y[x_j] &:= y_j \quad \big(= \delta^0 y[x_j]\big) \\
\delta y[x_j, x_{j+1}] &:= \frac{y_{j+1} - y_j}{x_{j+1} - x_j} = \frac{\delta^0 y[x_{j+1}] - \delta^0 y[x_j]}{x_{j+1} - x_j} \\
\delta^2 y[x_j, x_{j+1}, x_{j+2}] &:= \frac{\delta y[x_{j+1}, x_{j+2}] - \delta y[x_j, x_{j+1}]}{x_{j+2} - x_j} \\
\delta^k y[x_j, x_{j+1}, ..., x_{j+k}] &:= \frac{1}{x_{j+k} - x_j}\big(\delta^{k-1} y[x_{j+1}, ..., x_{j+k}] - \delta^{k-1} y[x_j, ..., x_{j+k-1}]\big)
\end{aligned}$$

Schema:

$$
\begin{array}{ccccc}
x_0 & y_0 & & & \\
 & & \delta^1 y[x_0,x_1] & & \\
x_1 & y_1 & & \delta^2 y[x_0,x_1,x_2] & \\
 & & \delta^1 y[x_1,x_2] & & \delta^3 y[x_0,x_1,x_2,x_3] \\
x_2 & y_2 & & \delta^2 y[x_1,x_2,x_3] & \\
 & & \delta^1 y[x_2,x_3] & & \\
x_3 & y_3 & & &
\end{array}
$$

Bemerkung 8.3.
Falls die x_i äquidistant, dh. $x_i = x_0 + ih$ so ist:

$$
\begin{aligned}
\delta y[x_i, x_{i+1}] &= \frac{y_{i+1} - y_i}{h} =: \frac{1}{h}\Delta y_i \\
\delta^2 y[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] &= \frac{\frac{1}{h}\Delta y_{i+1} - \frac{1}{h}\Delta y_i}{2h} = \frac{1}{2h^2}\Delta^2 y_i \\
\delta^k y[x_i, ..., x_{i+k}] &= \frac{1}{k!h^k}\Delta^k y_i,
\end{aligned}
$$

wobei $\Delta^k := \Delta^{k-1}y_{i+1} - \Delta^{k-1}y_i$.

Satz 8.4 (Newtonsche Interpolationsformel)**.**
Zu paarweise verschiedenen reellen x_i, $i = 0, ..., n$, existiert ein eindeutiges Polynom $p \in \mathcal{P}_n$ durch die Punkte (x_i, y_i), $i = 0, ..., n$ (d.h. $p(x_i) = y_i$ für $i = 1, ..., n$). Es lässt sich berechnen durch:

$$
\begin{aligned}
p(x) &= y[x_0] + (x - x_0)\delta y[x_0, x_1] + ... + (x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{n-1})\delta^n y[x_0, ..., x_n] \\
&= \sum_{i=0}^{n}\prod_{j=0}^{i-1}(x - x_j)\delta^i y[x_0, ..., x_i]
\end{aligned}
$$

Beweis. (Induktion)

IA $n = 1$ (und $n = 2$) vgl. Beispiel (1.1)

IS $n - 1 \to n$

$p_0(x) = y[x_0]+(x-x_0)\delta y[x_1, x_0]+...+(x-x_0)...(x-x_{n-2})\delta^{n-1}y[x_0, ..., x_{n-1}]$
ist das eindeutige interpolierende Polynom mit

$$\deg(p_0) \leq n - 1$$

zu $(x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_{n-1}, y_{n-1})$.
Für den Ansatz

$$p(x) = p_0(x) + a(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{n-1})$$

ergibt die Forderung $p(x_n) = y_n$

$$a = \frac{y_n - p_0(x_n)}{(x_n - x_0)(x_n - x_1)...(x_n - x_{n-1})}$$

Da a eindeutig ist, ist p eindeutig.
Es bleibt zu zeigen: $a = \delta^n y[x_0, ..., x_n]$
Sei dazu ein Polynom $p_1(x)$, welches durch $(x_1, y_1), ..., (x_n, y_n)$ läuft, mit $\deg(p_1) \leq n - 1$. Nach Induktionsannahme gilt

$$\begin{aligned} p_1(x) &= y[x_1] + (x - x_1)\delta^1 y[x_1, x_2] + ... + (x - x_1)...(x - x_{n-1})\delta^{n-1} y[x_1, ..., x_n] \\ &= x^{n-1}\delta^{n-1} y[x_1, ..., x_n] + r \end{aligned}$$

mit $\deg(r) \leq n - 2$.
Setze Polynom

$$p(x) := \frac{x_n - x}{x_n - x_0} p_0(x) + \frac{x - x_0}{x_n - x_0} p_1(x)$$

mit $\deg(p) \leq n$ durch $(x_0, y_0), ..., (x_n, y_n)$.
Das gilt, da:

$$\begin{aligned} p(x_0) &= p_0(x_0) = y_0 \\ p(x_n) &= p_1(x_n) = y_n \end{aligned}$$

Für $i = 1, ..., n - 1$:

$$p(x_i) = \frac{x_n - x_i}{x_n - x_0} \underbrace{p_0(x_i)}_{y_i} + \frac{x_i - x_0}{x_n - x_0} \underbrace{p_1(x_i)}_{y_i} = y_i$$

Andererseits:

$$p(x) = ax^n + r \quad \text{mit } \deg(r) \leq n - 1$$

Koeffizientenvergleich:

$$\begin{aligned} a &= -\frac{1}{x_n - x_0}\delta^{n-1} y[x_0, ..., x_{n-1}] + \frac{1}{x_n - x_0}\delta^{n-1} y[x_1, ..., x_n] \\ &= \delta^n y[x_0, ..., x_n] \end{aligned}$$

□

8.5 (Hornerschema)**.**
Zur Auswertung des Interpolationspolynom p an der Stelle x verwendet man

$$p(x) = y[x_0] + (x - x_0)\left(\delta y[x_0, x_1] + (x - x_1)\left(\delta^2 y[x_0, x_1, x_2] + (x - x_2)\left(\ldots\left(\delta^n y[x_0, \ldots, x_n]\right)\right)\right)\right)$$

<u>*Algorithmus:*</u>

$s = \delta^n y[x_0, ..., x_n]$
for $k = n - 1, ..., 0$ ***do***
  $s = \delta^k y[x_0, ..., x_k] + (x - x_k)s$
end for

Beispiel 8.6.

i	x_i	y_i	$\delta^1 y[x_0, x_1]$	$\delta^2 y[x_0, x_1, x_2]$	$\delta^3 y[x_0, .., x_3]$	$\delta^4 y[x_0, .., x_4]$
0	-1	0				
			$\frac{1-0}{0-(-1)} = 1$			
1	0	1		$\frac{0-1}{2-(-1)} = -\frac{1}{3}$		
			0		$\frac{\frac{2}{3}-(-\frac{1}{3})}{3-(-1)} = \frac{1}{4}$	
2	2	1		$\frac{2-0}{3-0} = \frac{2}{3}$		$\frac{-\frac{2}{5}-\frac{1}{4}}{5-(-1)} = -\frac{13}{120}$
			$\frac{3-1}{3-2} = 2$		$\frac{-\frac{4}{3}-\frac{2}{3}}{5-0} = -\frac{2}{5}$	
3	3	3		$\frac{-2-2}{5-2} = -\frac{4}{3}$		
			$\frac{-1-3}{5-3} = -2$			
4	5	-1				

Das Interpolationspolynom ist also

$$p(x) = 0 + (x+1) * 1 - \frac{1}{3}(x+1)(x) + \frac{1}{4}(x+1)x(x-2) + (x+1)x(x-2)(x-3)\left(-\frac{13}{120}\right)$$

bzw. nach Hornerschema

$$p(x) = 0 + (x+1)\left(1 + x\left(-\frac{1}{3} + (x-2)\left(\frac{1}{4} + (x-3)\left(-\frac{13}{120}\right)\right)\right)\right)$$

Werte $p(x)$ an der Stelle 1 aus:

$$-\frac{13}{120} * (-2) = \frac{26}{120}$$
$$\left(\frac{1}{4} + \frac{26}{120}\right)(-1) = -\frac{56}{120} = -\frac{7}{15}$$
$$\left(-\frac{7}{15} - \frac{1}{3}\right)1 = -\frac{12}{15} = -\frac{4}{5}$$
$$\left(-\frac{4}{5} + 1\right)2 = \frac{2}{5} = p(1)$$

9 Fehler bei der Polynominterpolation

<u>Problem:</u> $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ werde interpoliert in Stützstellen $x_0, ..., x_n \in [a,b]$ durch $p \in \mathcal{P}_n$ mit $p(x_i) = f(x_i)$ für $i = 0, ..., n$.
Wie groß ist der Fehler $f(x) - p(x)$?

Satz 9.1.
Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ (n+1)-mal stetig differenzierbar, $p \in \mathcal{P}_n$ mit $p(x_i) = f(x_i)$ $(i = 0, ..., n)$ das Interpolationspolynom zu paarweise verschiedenen Stützstellen $x_i \in [a,b]$ $(i = 0, ..., n)$. Dann gilt:

$$\forall x \in [a,b] \exists \xi = \xi(x) \in (a,b) : f(x) - p(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

Beweis. Siehe (9.4) □

Beispiel 9.2 (Berechnung von Logarithmentafeln: Briggs, 17. Jhd)**.**
$f(x) = log_{10}(x), \quad x \in [55, 58]$
Wähle Stützstellen:
$x_0 = 55, \quad x_1 = 56, \quad x_2 = 57, \quad x_3 = 58$
Es seien

$$log_{10}(55),\ log_{10}(56),\ log_{10}(57) \text{ und } log_{10}(58)$$

bereits bekannt. Berechne eine Näherung von f an bei $log_{10}(56.5)$

$\rightarrow$ *Interpolationspolynom p:*

$$\begin{aligned}
log_{10}(65.5) &= 1.752048448\\
p(56.5) &= 1.75204845\\
f'(x) &= \frac{1}{ln(10)x}\\
f''(x) &= -\frac{1}{ln(10)x^2}\\
f^{(3)}(x) &= \frac{2}{ln(10)x^3}\\
f^{(4)}(x) &= -\frac{6}{ln(10)x^4}
\end{aligned}$$

Für $x \in [55, 58]$:

$$\begin{aligned}
|f^{(4)}(x)| &\leq \frac{6}{55^4 ln(10)} \Rightarrow\\
|log_{10}(56.5) - p(56.5)| &\leq 1.5 * 0.5 * 0.5 * 1.5 * \frac{6}{55^4 ln(10)\frac{1}{4!}}\\
&\approx 6.7 * 10^{-9}
\end{aligned}$$

Für den Beweis von (9.1) wird folgendes Lemma benötigt:

Lemma 9.3.
Sei $f \in C^n([a, b])$ *und sei für paarweise verschiedene* $x_i \in [a, b]$ *(*$i = 0, ..., n$*)* $y_i := f(x_i)$*. Dann existiert* $\xi \in (\min_i(x_i), \max_i(x_i))$*, sodass*

$$\delta^n y[x_0, ..., x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \quad (x_0 < x_1 < ... < x_n)$$

Beweis. Sei p ein Interpolationspolynom zu $(x_i, y_i)_{i=0}^n$. Setzt man $d := p - f$, so gilt $d(x_i) = 0$ für $i = 0, ..., n$.
n-maliges anwenden des Mittelwertsatzes liefert paarweise verschiedene ξ_i, $(i = 0, ..., n-1)$ mit $d'(\xi_i) = 0$ für $\xi_i \in (\min_j(x_j), \max_j(x_j))$.
Dasselbe Argument angewandt auf d' liefert $\eta_0, ..., \eta_{n-2}$ mit $d''(\eta_i) = 0$ für $i = 0, ..., n-2$.
Wiederhole dies bis:
Es existiert ρ_0 mit $d^{(n)}(\rho_0) = 0$
$\Rightarrow f^{(n)}(\rho_0) = p^{(n)}(\rho_0) = n!\delta^n y[x_0, ..., x_n]$,
da $\delta^n y[x_0, ..., x_n]$ der Koeffizient von x^n in p ist. □

Bemerkung.
Für $n = 1$ ist Lemma (9.3) der Mittelwertsatz (oder Satz von Rolle) aus Ana I:

$$\exists \xi : \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = f'(\xi)$$

9.4 (Beweis von (9.1))**.**
Sei $\bar{x} \in [a, b]$ beliebig.

1. Fall *$\bar{x} = x_i$ für ein $i \in \{0, ..., n\}$, so ist wegen $p(x_i) - f(x_i) = 0$ nichts zu zeigen.*

2. Fall *$\bar{x} \neq x_i$ für alle $i \in \{0, ..., n\}$. Sei $\bar{p}$ das Interpolationspolynom mit deg($\bar{p}$) $\leq n + 1$ zu $(x_i, f(x_i))_{i=0}^n$ und $(\bar{x}, f(\bar{x}))$. Die Newton'sche Interpolationsformel liefert dann*

$$\begin{aligned} \bar{p}(x) &= p(x) + \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)\delta^{n+1}y[x_0, ..., x_n, \bar{x}] \\ &\underset{(9.3)}{=} p(x) + \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \end{aligned}$$

Für $x = \bar{x}$ gilt $\bar{p}(\bar{x}) = f(\bar{x})$. Damit ist Satz (9.1) für $x \in [a, b]$ gezeigt. $\square$

Fragen:

- Für welche Wahl der Stützstellen x_i ($i = 0, ..., n$, n fest) ist

$$\max_{x \in [a,b]} |\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)|$$

  minimal? (Siehe Abschnitt 10)

- Wie wirken sich Fehler in den Funktionsauswertungen (etwa Messfehler oder Rechenfehler) auf das Interpolationspolynom aus?

Satz 9.5 (Lagrange Interpolationsformel)**.**
Das Interpolationspolynom p zu $(x_i, y_i)_{i=0}^n$ ist gegeben durch

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i l_i(x)$$

mit

$$l_i(x) = \frac{\prod_{j=0,\, j\neq i}^{n}(x - x_j)}{\prod_{j=0,\, j\neq i}^{n}(x_i - x_j)}$$

Beweis. $\deg(l_i) = n$, $l_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{für } j = i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

$\Rightarrow p(x_j) = \sum_{i=0}^{n} y_i l_i(x_j) = y_j$ □

Bemerkung.
Lagranges und Newtons Interpolationsformeln liefern beide das gleiche Polynom nur in unterschiedlichen Darstellungen.

Definition 9.6.

$$\Lambda_n := \max_{x\in[a,b]} \sum_{i=0}^{n} |l_i(x)|$$

heißt die ***Lebesgue Konstante*** *zu den Stützstellen* x_i, $i = 0, ..., n$ *auf dem Intervall* $[a, b]$.

Damit gilt:

Satz 9.7.
Sei p *das Interpolationspolynom (vom Grad* $\leq n$*) zu* $(x_i, y_i)_{i=0}^{n}$ *und* $\tilde{p}$ *das Interpolationspolynom zu* $(x_i, \tilde{y}_i)_{i=0}^{n}$*, so gilt:*

$$\max_{x\in[a,b]} |p(x) - \tilde{p}(x)| \leq \Lambda_n \max_{i=0,...,n} |y_i - \tilde{y}_i|$$

Beweis. klar □

Beispiel 9.8.

- *Für äquidistante Stützstellen* $x_i = a + i\frac{b-a}{n}$ *(*$i = 0, ..., n$*) ist*

$$\begin{aligned} \Lambda_{10} &\approx 40 \\ \Lambda_{20} &\approx 3 * 10^4 \\ \Lambda_{40} &\approx 10^{10} \\ \Lambda_n &\approx \frac{2^n}{ln(n) * e * n} \quad \textit{für } n \to \infty \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ *Vorsicht bei Polynominterpolation mit vielen äquidistanten Stützstellen!*
In §10 werden wir Stützstellen kennenlernen mit $\Lambda_n \leq 4$ *für* $n \leq 100$.