# Numerik 1

Prof. Schaedle

April 24, 2019

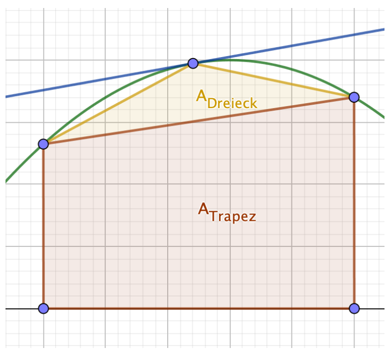
# I Numerische Integration

## 1 Einführung

**Problem 1.1.**
*Gegeben* $f : [a, b] \to \mathbb{N}$ *mit* $a, b \in \mathbb{R}$*. Berechne* $\int_a^b f(x)dx$

**Beispiel 1.2.**

1. *Archimedes (282-212 v.Chr.): Fläche unter einer Parabel*




$A_{Parabel} = A_{Trapez} + \frac{4}{3} A_{Dreieck}$

2. *Leibniz + Newton ( 1670):*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

*wobei* $\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$

3. *Riemann ( 1850):*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{|\Delta| \to \infty} \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)(x_j - x_{j-1}),$$

*wobei* $\Delta = (x_0, ..., x_n)$ *Gitter Zerlegung von* $[a, b]$*,* $a = x_0 < ... < x_n = b$*,* $\xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$ *und* $|\Delta| := \max_{j=1,...n} |x_j - x_{j-1}|$*. Das Riemannintegral existiert, falls:*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |\Delta| < \delta \Rightarrow | \int_a^b f(X)dx - \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)(x_j - x_{j-1})| < \varepsilon$$

**Bemerkung 1.3** (Approximation von Integralen).

1. *(linke) Rechtecksregel:*

$$\int_{x_{j-1}}^{x_{j-1}+h} f(x)dx \approx hf(x_{j-1})$$

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{j=1}^n \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)dx \approx \sum_{j=1}^n f(x_{j-1})(x_j - x_{j-1})$$

2. *Mittelpunktsregel:*

$$\int_{x_j}^{x_j+h} f(x)dx \approx f\left(\frac{x_j + x_j + h}{2}\right) h$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{j=1}^n f\left(\frac{x_{j-1} + x_j}{2}\right)(x_j - x_{j-1})$$

*Da mit Hilfe der Transformationsformel sich jedes Integral $\int_{x_{j-1}}^{x_j}$ auf ein Integral $\int_a^b$ transformieren lässt, betrachten wir ohne Einschränkungen Integrale von 0 bis 1. Nutze dazu die Abb. $[a,b] \to [x_{j-1}, x_j], t \mapsto x_{j-1} + t(x_j - x_{j-1})$.*

$$\int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)dx = \int_0^1 \underbrace{f\left(x_{j-1} + t(x_j - x_{j-1})\right)}_{:=g_{j-1}(t)}(x_j - x_{j-1})dt = \int_0^1 g_{j-1}(t)(x_j - x_{j-1})dt$$

**Definition 1.4** (Quadraturformel).
*Eine s-stufige Quadraturformel zur Approximation von $\int_0^1 g(t)dt$ mit Knoten $c_i$ und Gewichten $b_i$ für $i = 1, ...s$ ist gegeben durch*

$$\sum_{i=1}^s b_i g(c_i) \left(\approx \int_0^1 g(t)dt\right)$$

**Beispiel 1.5.**

1. *Rechtecksregel:* $s = 1, b_1 = 1, c_1 = 0$

$$\int_0^1 g(t) \approx b_1 g(c_1) = g(0)$$

2. *Mittelpunktsregel:* $s = 1, b_1 = 1, c_1 = \frac{1}{2}$

$$\int_0^1 g(t) \approx g(\frac{1}{2})$$

3. *Trapezregel:* $s = 2, b_1 = b_2 = \frac{1}{2}, c_1 = 0, c_2 = 1$

$$\int_0^1 g(t) \approx \frac{1}{2}g(0) + \frac{1}{2}g(1)$$

4. *Simpsonregel:* $s = 3, b_1 = \frac{1}{6}, b_2 = \frac{2}{3}, b_3 = \frac{1}{6}, c_1 = 0, c_2 = \frac{1}{2}, c_3 = 1$

$$\int_0^1 g(t) \approx \frac{1}{6}\left(g(0) + 4g\left(\frac{1}{2}\right) + g(1)\right)$$

   ***Herleitung:*** *Man legt eine Parabel* $p$ *durch die Punkte* $(0, g(0)), (\frac{1}{2}, g(\frac{1}{2})), (1, g(1))$ *und integriert* $p$ *von 0 bis 1.*
   $p(t) = g(0)(1-t)2(\frac{1}{2} - t) + g(\frac{1}{2})(1-t)4t + g(1)(\frac{1}{2} - t)2t$

$$\Rightarrow \int_0^1 p(t)dt = \frac{1}{6}g(0) + \frac{2}{3}g(\frac{1}{2}) + \frac{1}{6}g(1)$$

5. *"pulcherrima et utilissima regula" von Newton:*

$$\int_0^1 g(t)dt \approx \frac{1}{8}\left(g(0) + 3g(\frac{1}{3}) + 3g(\frac{2}{3}) + g(1)\right)$$

**Bemerkung 1.6** (Monte-Carlo Integration)**.**

1. *Eindimensionale Monte-Carlo Integration:*
   *Sei* $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. *Wählt man* $N$ *unabhängige gleichverteilte Punkte* $x_i$ *in* $[a, b]$ *so gilt die Approximation:*

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}(b-a)f(x_j)$$

   *Nach dem Gesetz der großen Zahlen konvergiert dieser Ausdruck, falls*

$$\int_a^b |f(x)|dx < \infty, \int_a^b f^2(x)dx < \infty$$

2. *Mehrdimensionale Monte-Carlo Integration:*
   *Sei* $W = \otimes_{i=1}^{d}[a_i, b_i]$ *ein d-dimensionaler Quader. Wählt man in W unabh. gleichvert. Zufallsvektoren* $x_i$ *in W, so ist*

$$\int_W f(x)dx \approx \frac{1}{N} Vol(W) \sum_{i=1}^{N} f(x_i),$$

   *wobei* $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$.
   ***Achtung:*** *Dieses gewöhnliche MC-Verfahren konvergiert sehr langsam. Verbesserungen sind z.B.: Importance sampling, Control variates, Antithetic variates und statified sampling.*

# 2 Ordnung von Quadraturformeln

**Definition 2.1.**
*Eine Quadraturformel (QF) mit Gewichten und Knoten* $(b_i, c_i)_{i=1}^{s}$ *hat* ***Ordnung p****, falls sie exakt ist für alle Polynome von Grad* $\leq p - 1$.
$\mathcal{P}$*: Menge aller Polynome*

$$\left\{ \sum_{i=0}^{n} a_i * X^i, a_i \in \mathbb{R}(\mathbb{C}) \right\}$$

*deg(q): Grad des Polynoms*

**Satz 2.2.**
*Ein QF* $(b_i, c_i)_{i=1}^{s}$ *für* $[0, 1]$ *hat Ordnung p genau dann, wenn*

$$\sum_{i=1}^{s} b_i c_i^{q-1} = \frac{1}{q}$$

*für* $q = 1, .., p$

*Beweis.*

" $\Rightarrow$ "
QF hat Ordnung p $\Rightarrow$ QF ist exakt für $g(t) = t^{q-1}$ für $q = 1, .., p$ auf $[0, 1]$
$\Rightarrow$

$$\sum b_i c_i^{q-1} = \int_0^1 t^{q-1} dt = [\frac{t^q}{q}]_{t=0}^{1} = \frac{1}{q}$$

"$\Leftarrow$"

Jedes Polynom von Grad $p-1$ lässt sich als Linearkombination von $1, t, t^2, ..., t^{p-1}$. Die Behauptung folgt aus der Linearität in $g$ von

$$\int_0^1 g(t)dt$$

und

$$\sum_{i=1}^{s} b_i g(c_i)$$

$\square$

**Beispiel 2.3.**

1. *Rechtecksregel:* $p = 1$
2. *Mittelpunktsregel:* $p = 2$
3. *Trapezregel:* $p = 2$
4. *Simpsonregel:* $p \geq 3$ *nach Konstruktion*
   $q = 4$*:* $1/6 * 0^3 + 4/6 * (1/2)^3 + 1/6 * 1^3 = 1/4 = 1/4$
   $q = 5$*:* $1/6 * 0^4 + 4/6 * (1/2)^4 + 1/6 * 1^4 = 5/24 \neq 1/5$
   *Damit ist die Ordnung 4!*
5. *"pulcherina et utilissima": Übung*

**Bemerkung 2.4.**
*Zu vergebenen paarweise verschiedenen Knoten* $c_1, ..., c_s$ *lässt sich aus (*) für* $p = s$ *ein lineares Gleichungssystem für die Gewichte* $b_1, ..., b_s$ *aufstellen.*

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & ... & 1 \\ c_1 & c_2 & ... & c_s \\ ... & ... & ... & ... \\ c_1^{s-1} & c_2^{s-1} & ... & c_s^{s-1} \end{bmatrix}}_{=V} * \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \\ ... \\ 1/s \end{bmatrix}$$

*Falls die Vandermonde-Matrix* $V$ *invertierbar ist, so lassen sich die Gewichte* $b_1, ..., b_s$ *bestimmen, sodass die QF* $(b_i, c_i)_{i=1}^{s}$ *mindestens Ordnung* $s$ *hat.*

**Definition 2.5.**
*Eine QF heißt symmetrisch, falls für* $i = 1, ..., s$

1. $c_i = 1 - c_{s+1-i}$
2. $b_i = b_{s+1-i}$

**Beispiel 2.6.**
*MP, TP, Simpson,...*

**Satz 2.7.**
*Die maximal erreichbare Ordnung einer symmetrischen QF ist gerade.*

*Beweis.* Sei die QF $(b_i, c_i)_{i=1}^s$ exakt for Polynome vom Grad $\leq 2m-2$ (für $m \in \mathbb{N}$), (dann ist die Ordnung $\geq 2m-1$).

$$\forall g \in \mathcal{P} : deg(g) \leq 2m-2 \Rightarrow \sum_{i=1}^{s} b_i g(c_i) = \int_0^1 g(t)dt$$

Sei $f \in \mathcal{P}$ mit $deg(f) = 2m-1$.
Wir zeigen QF ist exakt für $f$.

$$f(t) = ct^{2m-1} + g(t)$$

für $g \in \mathcal{P}$ mit $deg(g) \leq 2m-2$ mit $c \neq 0$.
Trick: $f(t) = c(t - \frac{1}{2})^{2m-1} + \tilde{g}(t)$ mit $\tilde{g} \in \mathcal{P}$ und $deg(\tilde{g}) \leq 2m-2$

1. Für $\tilde{g}$ ist die QF exakt
2. $$\int_0^1 (t - \frac{1}{2})^{2m-1} dt = \left[\frac{1}{2m-2}(t - \frac{1}{2})^{2m-2}\right]_0^1 = 0$$
   $$\sum_{i=1}^{s} b_i (c_i - \frac{1}{2})^{2m-1}$$
   Symmetrie $\Rightarrow$
   $$= \sum_{i=1}^{s} b_{s+1-i} (\frac{1}{2} - c_{s+1-i})^{2m-1}$$

Definiere $j := s + 1 - i$

$$= \sum_{i=1}^{s} b_i \frac{1}{2} - c_i)^{2m-1} = -\sum_{i=1}^{s} b_i (c_i - \frac{1}{2})^{2m-1}$$

$$\Rightarrow 2 * \sum_{i=1}^{s} b_i (c_i - \frac{1}{2})^{2m-1} = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{s} b_i (c_i - \frac{1}{2})^{2m-1} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{s} b_i f(c_i) = c \sum_{i=1}^{s} b_i (c_i - \frac{1}{2})^{2m-1} + \sum_{i=1}^{s} b_i \tilde{g}(c_i)$$

$$= c \int_0^1 (t - \frac{1}{2})^{2m-1} dt + \int_0^1 \tilde{g}(t) dt = \int_0^1 f(t) dt$$

$\Rightarrow$ QF hat mind. Ordnung $2m$.

$\square$

**Satz 2.8.**
*Sind Knoten $c_1 < c_2 < ... < c_s$ $(c_i \in \mathbb{R}, i = 1, ...s)$ gegeben, so existieren eindeutig bestimmte Gewichte $b_1, ..., b_s$ derart, dass die QF $(b_i, c_i)_{i=1}^s$ die maximale Ordnung $p \geq s$ hat.*
*Es gilt*

$$b_i = \int_0^1 l_i(t) dt$$

*mit*

$$l_i(t) = \frac{\prod_{j=1, j\neq i}^{s} (t - c_j)}{\prod_{j=1, j\neq i}^{s} (c_i - c_j)}$$

*Bemerkung/Definition*

*$l_i$ ist das i-te Lagrangepolynom zu den Knoten $c_i, ..., c_s$. Es gilt $deg(l_i) = s-1$*

$$l_i(c_j) = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

*Beweis.* von 2.8

1. Hat die QF die Ordnung $p \geq s$, so ist wegen $deg(l_i) = s - 1)$:
$$\int_0^1 l_i(t)dt = \sum_{j=1}^{s} b_j l_i(c_j) = b_i$$

2. Zu den Knoten $c_i, ...c_s$ definiere $b_i$ wie angegeben. Die QF ist dann exakt für alle Polynome von Grad $\leq s-1$, da die $l_1, ..., l_s$ linear unabhängig sind und eine Basis des Vektorraums der Polynome von Grad $\leq s - 1$ bilden.

□

# 3 Quadraturfehler

Allgemeine Voraussetzung $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sei hinreichend oft differenzierbar ($f$ ist eine glatte Funktion)

**Definition 3.1.**
*Der Fehler bei der Approximation des Integrals durch die QF ist*
$$err = \int_a^b f(x)dx = \sum_{j=0}^{n-1} h_{j+1} \sum_{i=1}^{s} b_i f(x_j + h_{j+1}c_i)$$
*mit* $h_{j+1} = x_{j+1} - x_j$
$$= \sum_{j=0}^{n-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x_j + \tau)d\tau - h_{j+1} \sum_{i=1}^{s} b_i f(x_j + h_{j+1}c_i)$$
$$= \sum_{j=0}^{n-1} h_{j+1} \int_0^1 g_j(\xi)d\xi - h_{j+1} \sum_{i=1}^{s} b_i g_j(c_i)$$
*mit* $g_j(\xi) = f(x_j + \xi h_{j+1})$.
*Der Quadraturfehler auf Teilintervallen* $[x_j, x_j + h_{j+1}]$ *ist*
$$E(f, x_j, h_{j+1}) = \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)dx - h_{j+1} \sum_{i=1}^{s} b_i f(x_j + c_i h_{j+1})$$
$$= h_{j+1} \left( \int_0^1 g_j(\xi)d\xi - \sum_{i=1}^{s} b_i g_j(c_i) \right)$$

**3.2** (Fehlerabschätzung - 1. Versuch).
*Falls $f$ auf $[x_0, x_0+h]$ glatt genug ist und die QF Ordnung $p$ hat, aber nicht Ordnung $p+1$, so erhält man durch Taylorentwicklung um $x_0$ von $f(x_0+\xi h) = g_0(\xi)$ und $f(x_0+c_i h)$:*

$$E(f, x_0, h) = \sum_{k \geq 0} \frac{h^{k+1}}{k!} \left( \int_0^1 t^k dt - \sum_{i=1}^{s} b_i c_i^k \right) f^{(k)}(x_0)$$

$$= \frac{h^{p+1}}{p!} \left( \frac{1}{p+1} - \sum_{i=1}^{s} b_i c_i^p \right) f^{(p)}(x_0) + \underbrace{\mathcal{O}(h^{p+2})}_{Taylerrestglied}$$

*Die Konstante $C = \frac{1}{p!} \left( \frac{1}{p+1} - \sum_{i=1}^{s} b_i c_i^p \right)$ heißt Fehlerkonstante.*
*Ist $h$ klein genug, sodass das Taylorrestglied im Vergleich zu $h^{p+1} C f^{(p)}(x_0)$ vernachlässigbar ist, so gilt:*

$$err = \sum_{j=0}^{n-1} E(f, x_j, h),$$

*mit $x_j = x_0 + jh$*

$$\approx C h^p \sum_{j=0}^{n-1} h f^{(p)}(x_j)$$

$$\approx C h^p \int_a^b f^{(p)}(x) dx$$

$$= C h^p \left( f^{(p-1)}(b) - f^{(p-1)}(a) \right)$$

**3.3** (Rigorose Fehlerabschätzung).

***Satz 1:***
*Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ $k$-mal stetig differenzierbar ($f \in C^k([a,b])$) und habe die QF Ordnung $p$, so gilt für $h < b-a$ und $k \leq p$*

$$E(f, x_0, h) = h^{k+1} \int_0^1 K_k(\tau) f^{(k)}(x_0 + \tau k) d\tau,$$

*wobei der Peanokern $K_k(\tau)$ durch*

$$K_k(\tau) := \frac{(1-\tau)^k}{k!} - \sum_{i=1}^{s} b_i \frac{(c_i - \tau)_+^{k-1}}{(k-1)!},$$

*mit* $(\sigma)_+^{k-1} = \begin{cases} \sigma^{k-1} & \sigma > 0 \\ 0 & sonst \end{cases}$ *, gegeben ist.*

*Beweis.* Taylorentwicklung mit Integralrestglied und Transformation

$$f(x_0+th) = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(th)^j}{j!} f^{(j)}(x_0) + h^k \int_0^t \frac{(t-\tau)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(x_0+\tau h)d\tau$$

eingesetzt in (*) und die Verwendung von

$$\int_0^{c_i} (c_i-\tau)^{k-1} g(\tau)d\tau = \int_0^1 (c_i-\tau)_+^{k-1} g(\tau)d\tau$$

liefern

$$E(f,x_0,h) = h\int_0^1 \left( \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(th)^j}{j!} f^{(j)}(x_0) + h^k \int_0^t \frac{(t-\tau)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(x_0+\tau h)d\tau \right) dt -$$
$$h\sum_{i=1}^s b_i \left( \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(c_ih)^j}{j!} f^{(j)}(x_0) + h^k \int_0^{c_i} \frac{(c_i-\tau)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(x_0+c_ih)d\tau \right)$$

$$\underbrace{=}_{k\le p} hh^k \left[ \int_0^1 \int_0^t \frac{(t-\tau)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(x_0+\tau h)d\tau dt - \sum_{i=1}^s \int_0^1 \frac{(c_i-\tau)_+^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(x_0+\tau h)d\tau \right]$$

$$= hh^k \left[ \int_0^1 \int_0^1 \frac{(t-\tau)_+^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(x_0+\tau h)d\tau dt - \sum_{i=1}^s b_i \int_0^1 \frac{(c_i-\tau)_+^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(x_0+\tau h)d\tau \right]$$

$$= h^{k+1} \int_0^1 \left( \int_0^1 \frac{(t-\tau)_+^{k-1}}{(k-1)!} dt - \frac{(c_i-\tau)_+^{k-1}}{(k-1)!} \right) f^{(k)}(x_0+\tau h)d\tau$$

$$= h^{k+1} \int_0^1 K_k(\tau) f^{(k)}(x_0+\tau h)d\tau$$

, da

$$\int_0^1 \frac{(t-\tau)_+^{k-1}}{(k-1)!} dt = \int_0^1 \frac{(t-\tau)^{k-1}}{(k-1)!} = \left[ \frac{1}{k!}(t-\tau)^k \right]_{t=\tau}^1 = \frac{1}{k!}(1-\tau)^k$$

□

***Satz 2:*** *(Eigenschaften des Peanokerns)*

*Für eine QF der Ordnung $p$ gilt für $k \le p$ $(k, p \in \mathbb{N})$*

1. $K'_k(\tau) = -K_{k-1}(\tau)$ *für* $k \ge 2$ *und* $\tau \ne c_i$ *falls* $k = 2$
2. $K_k(1) = 0$ *für* $k \ge 1$, *falls* $c_i \le 1$ *für* $i = 1, ..., s$
3. $K_k(0) = 0$ *für* $k \ge 2$, *falls* $c_i \le 1$ *für* $i = 1, ..., s$
4. $\int_0^1 K_p(\tau) = \frac{1}{p!}\left(\frac{1}{p-1} - \sum_{i=1}^s b_i c_i^p\right) =: C$ *(Fehlerkonstante $C$ aus (3.2))*
5. $K_1(\tau)$ *ist stückweise linear mit Steigung* $-1$ *und Sprüngen der Höhe* $b_i$ *an den Stellen* $c_i$

*Beweis.* Eventuell Übungsaufgabe □

***Beispiel:***

*Mittelpunktsregel:*

$$\begin{aligned} K_1(\tau) &= \frac{(1-\tau)^1}{1!} - 1\frac{(\frac{1}{2}-\tau)_+^1}{0!} \\ &= 1 - \tau - \left(\frac{1}{2} - \tau\right)_+^0 \\ &= \begin{cases} 1 - \tau - 1 & \tau < \frac{1}{2} \\ 1 - \tau & \tau \ge \frac{1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_2(\tau) &= \frac{(1-\tau)^2}{2!} - 1\frac{(\frac{1}{2}-\tau)_+^1}{1!} \\ &= \frac{1}{2}(1-\tau)^2 - \left(\frac{1}{2} - \tau\right)_+^1 \\ &= \begin{cases} \frac{\tau^2}{2} & \tau < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}(1-\tau)^2 & \tau \ge \frac{1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

***Satz 3:***

*Sei $f \in C^k([a,b])$ und habe die QF $(b_i, c_i)_{i=1}^s$, Ordnung $p \ge k$, so gilt für den Fehler $err$ aus* (3.1)

$$|err| \le h^k (b-a) \int_0^1 |K_k(\tau)| d\tau \max_{x \in [a,b]} |f^{(k)}(x)|$$

*mit* $h = \max_{j=1,..,n} h_j$

*Beweis.* Mit Satz 1 gilt

$$|E(f, x_j, h_{j+1})| \le h_{j+1}^{k+1} \int_0^1 |K_k(\tau)||f^{(k)}(x_j + \tau h_{j+1})| d\tau$$

$$\le h_{j+1}^{k+1} \int_0^1 |K_k(\tau)| d\tau \max_{x \in [x_j, x_j + h_{j+1}]} |f^{(k)}(x)|$$

Für

$$|err| = |\sum_{j=0}^{n-1} E(f, x_j, h_{j+1})|$$

$$\le \sum_{j=0}^{n-1} |E(f, x_j, h_{j+1})|$$

$$\le \underbrace{\sum_{j=0}^{n-1} h_{j+1}}_{b-a} \underbrace{h_{j+1}^k}_{\le h^k} \int_0^1 |K_k(\tau)| d\tau \underbrace{\max_{x \in [x_j, x_{j+1}]} |f^{(k)}(x)|}_{\le \max_{x \in [a,b] | f^{(k)}(x)|}}$$

□

***Beispiele***

*Für die Mittelpunktsregel (maximale Ordnung = 2) erhält man*

$$|err| \le h^2 (b-a) \frac{1}{24} \max_{x \in [a,b]} |f^{(2)}(x)|$$

*Für die Trapezregel (maximale Ordnung = 2)*

$$|err| \le h^2 (b-a) \frac{1}{12} \max_{x \in [a,b]} |f^{(2)}(x)|$$

*Für die Simpsonregel (maximale Ordnung = 4)*

$$|err| \le h^4 (b-a) \frac{1}{2880} \max_{x \in [a,b]} |f^{(4)}(x)|$$

→ *Der Fehler wird klein, falls h klein und die Ordnung p groß wird.*

# 4 Quadratur mit hoher Ordnung

$c_1 < ... < c_s$ Knoten gegeben. Aus §2 wissen wir:
Es gibt Gewichte $b_1, ..., b_s$, sodass $p \leq s$.
Fragen:

- Kann man $c_j$ so wählen, dass $p > s$?
- Wenn ja, wie?
- Wie groß kann $p$ maximal werden?

Ziel: QF mit Ordnung $p = s+m$ für $m \in \mathbb{N}, m > 1$ Sei $g \in \mathcal{P}_{s+m-1}$ (Polynome von Grad $\leq s+m-1$).
$g$ soll durch die QF exakt integriert werden.
Idee: Dividiere $g$ durch $M(t) = \prod_{i=1}^{s}(t - c_i)$ "Knotenpolynom"
$deg(M) = s$
$g(t) = M(t)h(t) + r(t)$ mit Rest $r$, $deg(r) \leq s-1$ und $deg(h) \leq m-1$
Dann gilt einerseits

$$\int_0^1 g(t)dt = \int_0^1 M(t)h(t)dt + \int_0^1 r(t)dt$$

und andererseits

$$\sum_{i=1}^{s} b_i g(c_i) = \sum_{i=1}^{s} b_i \underbrace{M(c_i)}_{=0} h(c_i) + \sum_{i=1}^{s} b_i r(c_i)$$
$$= 0 + \int_0^1 r(t)dt,$$

da $p \leq s$
Damit ist gezeigt:

**Satz 4.1.**
*Sei $(b_i, c_i)_{i=1}^s$ der Ordnung $p \geq s$. Äquivalent sind:*

1. *QF hat Ordnung $s + m$*
2. $\forall h \in (P)_{m-1} : \int_0^1 M(t)h(t)dt = 0$

**Korollar 4.2.**
*Die Ordnung einer $s$-stufigen QF ist höchstens $2s$*

*Beweis (indirekt).* Annahme: $p > 2s$

$$(4.1) \Rightarrow \forall h \in \mathcal{P}_s : \int_0^1 M(t)h(t)dt = 0$$

Setze $h = M$, dann ist

$$\int_0^1 M(t)^2 dt = 0$$

$\lightning$ zu $\int_0^1 M(t)^2 dt > 0$, da $M(t) \equiv 0$ $\square$

**4.3** (Beispiele/Korollare)**.**

1. *Jede 3-stufige QF mit Ordnung* $\geq 4$ *muss*

$$\int_0^1 (t - c_1)(t - c_2)(t - c_3)dt = 0$$

$$\begin{aligned} &\int_0^1 t^3 + t^2(-c_1 - c_2 - c_3) + t(c_1c_2 + c_2c_3 + c_1c_3) - c_1c_2c_3 dt \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{3}(-c_1 - c_2 - c_3) + \frac{1}{2}(c_1c_2 + c_2c_3 + c_1c_3) - c_1c_2c_3 \end{aligned}$$

*erfüllen, dh*

$$c_3 = \frac{\frac{1}{4} - (c_1 + c_2)\frac{1}{3} + c_1c_2\frac{1}{2}}{\frac{1}{3} - (c_2 + c_1)\frac{1}{2} + c_1c_2}$$

2. *Zur Berechnung der Knoten einer* 3*-stufigen QF der Ordnung* 6 *verwenden wir* (4.2) *mit* $h(t) = 1, t, t^2$

$$\int_0^1 M(t)h(t) = 0$$

$h(t) = 1 \rightarrow c_1c_2c_3 - \frac{1}{2}(c_1c_2 + c_2c_3 + c_1c_3) + \frac{1}{3}(c_1 + c_2 + c_3) = \frac{1}{4}$
$h(t) = t \rightarrow \frac{1}{2}c_1c_2c_3 - \frac{1}{3}(c_1c_2 + c_2c_3 + c_1c_3) + \frac{1}{4}(c_1 + c_2 + c_3) = \frac{1}{5}$
$h(t) = t^2 \rightarrow \frac{1}{3}c_1c_2c_3 - \frac{1}{4}(c_1c_2 + c_2c_3 + c_1c_3) + \frac{1}{5}(c_1 + c_2 + c_3) = \frac{1}{6}$

*nichtlineares Gleichungssystem in* $c_1, c_2, c_3$
*Trick:*

$\sigma_1 = c_1 + c_2 + c_3$

$\sigma_2 = c_1c_2 + c_1c_3 + c_2c_3$

$\sigma_2 = c_1c_2c_3$

*Das sind die Koeffizienten von $M(t)$ in der Monombasis.*
$M(t) = (t-c_1)(t-c_2)(t-c_3) = t^3 - \sigma_1 t^2 + \sigma_2 t - \sigma_3$
*und das Gleichungssystem ist linear in $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$*
*mit Lösung $\sigma_1 = \frac{3}{2}, \sigma_2 = \frac{3}{5}, \sigma_3 = \frac{1}{20}$*
*und damit ist $M(t) = t^3 - \frac{3}{2}t^2 + \frac{3}{5}t - \frac{1}{20}$*
$= (t - \frac{1}{2})(t - \frac{5-\sqrt{15}}{10})(t - \frac{5+\sqrt{15}}{10})$
*Glücklicherweise sind die Wurzeln von $M(t)$ in $[0,1]$. Damit lassen sich die Gewichte mit (2.4) berechnen und wir erhalten*

$$\int_0^1 g(t)dt = \frac{5}{18} g\left(\frac{5-\sqrt{15}}{10}\right) + \frac{8}{18} g\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{5}{18} g\left(\frac{5+\sqrt{15}}{10}\right)$$

*Ziel:* *Konstruktion von QF der Ordnung $2s$ mit Hilfe von orthogonalen Polynomen.*

# 5 Orthogonalpolynome

Bedingung 2. in Satz (4.1)

$$\forall h \in \mathcal{P}_{m-1} : \int_0^1 M(t)h(t) = 0$$

kann als Orthogonalitätsbedingung bzgl. eines Skalarprodukts $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$ auf dem Vektorraum $L^2([0,1])$ oder $C([0,1])$ aufgefasst werden.
Erinnerung:

$$\mathcal{P}_s := \left\{ \sum_{j=0}^{s} \alpha_j X^j, \alpha_j \in \mathbb{R} \right\}$$

ist ein $\mathbb{R}$-VR mit $dim(\mathcal{P}_s) = s+1$ und Basis $\{1, X, X^2, ..., X^s\}$

$\langle \cdot, \cdot \rangle : C([0,1]) \times C([0,1]) \to \mathbb{R}, (f,g) \mapsto \int_0^1 f(t)g(t)dt$ ist

1. symmetrisch $\langle f, g\rangle = \langle g, f\rangle$
2. linear $\langle \alpha f + g, h\rangle = \alpha\langle f, h\rangle + \langle g, h\rangle$

3. positiv definit $\langle f, f\rangle \geq 0$ und $\langle f, f\rangle = 0 \Rightarrow f = 0$

Wie in der linearen Algebra definieren wir $f$ steht senkrecht auf $g$: $f \perp g \Leftrightarrow \langle f, g\rangle = 0$

**Satz 5.1.**
*QF hat die Ordnung $s + m \Leftrightarrow M$ ist orthogonal auf allen Polynome in $\mathcal{P}_{m-1}$*

**Definition 5.2.**
*Für eine Gewichtsfunktion $\omega : (a, b) \to \mathbb{R}$ mit*

1. *$\omega$ stetig*

2. *$\forall x \in (a, b) : \omega(x) > 0$*

3. *$\forall k \in \mathbb{N} : \int_a^b \omega(x)|x|^k dx < \infty$*

*definieren wir auf den Vektorraum*

$$V = \left\{ f : [a, b] \to \mathbb{R} : f \textit{ stetig und} \int_a^b f(x)^2 \omega(x) dx < \infty \right\}$$

*das gewichtete Skalarprodukt*

$$\langle f, g\rangle_\omega := \int_a^b \omega(x) f(x) g(x) dx$$

*für $f, g \in V$*
*$f \perp_\omega g :\Leftrightarrow \langle f, g, \rangle_\omega = 0$*

**Satz 5.3.**
*Es existiert eine eindeutige Folge von Polynomen $p_0, p_1, ...$ mit*

1. *$deg(p_k) = k$*

2. *$\forall q \in \mathcal{P}_{k-1} : p_k \perp q$ für $k \geq 1$*

3. *$p_k(x) = x^k + r$ mit $deg(r) \leq k - 1$ "Normierung"*

*Diese Polynome lassen sich rekursiv berechnen durch*
*$p_{k+1}(x) := (x - \beta_{k+1})p_k(x) - \gamma_{k+1}^2 p_{k-1}(x)$ für $k \geq 2$*
*$p_0(x) := 1$, $p_1(x) := x$*
*$\beta_{k+1} := \frac{\langle x p_k, p_k\rangle}{\langle p_k, p_k\rangle}$*
*$\gamma_{k+1}^2 := \frac{\langle p_k, p_k\rangle}{\langle p_{k-1}, p_{k-1}\rangle}$*

*Beweis.* (vgl. Gram-Schmidt Orthogonalisierung LinA)
Sei $p_0, ..., p_k$ bereits bekannt. Zur Konstruktion von $p_{k+1}$ setzen wir

$$p_{k+1}(x) = xp_k(x) + \sum_{j=0}^{k} \alpha_j p_j(x)$$

(damit ist 3. erfüllt)
Zur Bestimmung der $\alpha_j$:

1. $0 = \langle p_{k+1}, p_k \rangle = \langle xp_k, p_k \rangle + \alpha_k \langle p_k, p_k \rangle + \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j \underbrace{\langle p_j, p_k \rangle}_{=0}$

   $\Rightarrow \alpha_k = -\frac{\langle xp_k, p_k \rangle}{\langle p_k, p_k \rangle} =: -\beta_{k+1}$

2. $$\begin{aligned} 0 = \langle p_{k+1}, p_{k-1} \rangle &= \langle xp_k, p_{k-1} \rangle + 0 + \alpha_{k-1} \langle p_{k-1}, p_{k-1} \rangle + 0 \\ &= \langle p_k, xp_{k-1} \rangle + \alpha_{k-1} \langle p_{k-1}, p_{k-1} \rangle \end{aligned}$$

   Aufgrund von 3. $\Rightarrow$

   $$xp_{k-1} = p_k + r$$

   mit $deg(r) \leq k-1$

   $$\Rightarrow \langle p_k, xp_{k-1} \rangle = \langle p_k, p_k \rangle + \underbrace{\langle p_k, r \rangle}_{=0}$$

   $$\Rightarrow \alpha_{k-1} = -\frac{\langle p_k, p_k \rangle}{\langle p_{k-1}, p_{k-1} \rangle} =: -\gamma_{k+1}^2$$

3. Für $j \leq k-2$:

   $$\begin{aligned} 0 = \langle p_{k+1}, p_j \rangle &= \langle xp_k, p_j \rangle + \alpha_j \langle p_j, p_j \rangle \\ &= \underbrace{\langle p_k, xp_j \rangle}_{=0} + \alpha_j \underbrace{\langle p_j, p_j \rangle}_{\neq 0} \end{aligned}$$

   $\langle p_k, xp_j \rangle = 0$ gilt, da $deg(xp_j) \leq k+1$
   Insgesamt haben wir

   $$p_{k+1}(x) = xp_k(x) - \beta_{k+1} p_k(x) - \gamma_{k+1}^2 p_{k-1}(x)$$

$\square$

Für eine QF maximaler Ordnung müssen nach Satz (4.1) die Knoten $c_i$, $i = 1, ..., s$ so gewählt werden, dass

$$M(t) = \prod_{i=1}^{s} (t - c_i)$$

das Orthogonalpolynom vom Grad $s$ bezüglich des Skalarprodukts mit $\omega(x) \equiv 1$ auf $[0, 1]$ ist.
Frage: Sind die Wurzeln der Orthogonalpolynome aus (5.3) reell? (Spoiler: Ja)

**Satz 5.4.**
*Sei $p_k$ das Orthogonalpolynom wie in (5.3) definiert (bzgl. $\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\omega(x)dx$). Alle Wurzeln von $p_k$ sind einfach und liegen im offenen Intervall $(a, b)$.*

*Beweis.* Seie $x_1, ..., x_r$ jene Wurzeln in $p_k$, die reell sind, in $(a, b)$ liegen und bei denen $p_k$ das Vorzeichen wechselt (Wurzeln mit ungerader Vielfachheit).
Klar ist: $r \leq k$.
Sei

$$g(x) = \prod_{j=1}^{r} (x - x_j)$$

Dann ist

$$\langle p_k, g\rangle = \int_a^b \underbrace{p_k(x)\, g(x)}_{\text{Wechselt das Vorzeichen in (a,b) nicht}} \omega(x)\, dx \neq 0$$

Andererseits ist $p_k$ orthogonal zu allen Polynomen vom Grad $\leq k - 1$
$\Rightarrow r = deg(g) \geq k$
$\Rightarrow r = k$ □

**Beispiel 5.5** (Orthogonale Polynome)**.**

| *Bezeichnung* | *(a,b)* | *w(x)* | *Name* |
|---|---|---|---|
| $P_k$ | $(-1, 1)$ | $1$ | *Legendrepolynome* |
| $T_k$ | $(-1, 1)$ | $(1 - x^2)^{-1/2}$ | *Tschebyscheff-Polynome* |
| $P_k^{(\alpha,\beta)}$ | $(-1, 1)$ | $(1 - x)^{\alpha}(1 - x)^{\beta}$ | *Jacobi-Polynome* $\alpha, \beta > -1$ |
| $L_k^{(\alpha)}$ | $(0, \infty)$ | $x^{\alpha}e^{-x}$ | *Laguere-Polynome* |
| $M_k$ | $(-\infty, \infty)$ | $e^{-x^2}$ | *Harmitepolynome* |

*Bemerkung: Teilweise sind andere Normierungen üblich $P_k(1) = 1$, $T_k(x) = 2^{k-1}x^k + ...$, ...*

# 6 Ein adaptives Programm

Gegeben sei eine QF mit $(b_i, c_i)_{i=1}^s$ mit Ordnung $p = 2s$ (die höchste Ordnung, die es gibt) z.B. $s = 15$

Ziel: Ein Computerprogramm adagaussqf(f, a, b, Tol), welches für eine Funktion $f$ auf dem Interval $[a, b]$ eine Approximation an $\int_a^b f(x)dx$ berechnet, sodass der Fehler $\leq$ Tol ist (für viele Funktionen).

Konstruiere eine Zerlegung $\Delta = \{a = x_0 < ... < x_n = b\}$ des Intervalls, sodass für die Approximation

$$I_\Delta := \sum_{j=0}^{n-1} h_{j+1} \sum_{i=1}^{s} b_i f(x_i + c_i h_{j+1})$$

gilt

$$|I_\Delta - \int_a^b f(x)dx| \leq Tol \int_a^b |f(x)|dx$$

Schwierigkeiten:

a) Schätzung des Fehlers

b) Wahl der Zerlegung des Intervalls

**6.1** (Zerlegung des Intervalls)**.**
*Für ein Teilintervall $[x_j, x_{j+1}]$ von $[a, b]$ lassen sich*

$$res[x_j, x_{j+1}] := h_{j+1} \sum_{i=1}^{s} b_i f(x_j + c_i h_{j+1})$$

*und*

$$resabs[x_j, x_{j+1}] := h_{j+1} \sum_{i=1}^{s} |b_i f(x_j + c_i h_{j+1})|$$

*berechnen.*
*Angenommen wir können eine Schätzung des Fehlers $err[x,x_{j+1}]$ berechnen mit*

$$err[x,x_{j+1}] \approx res[x,x_{j+1}] - \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)dx,$$

*dann bietet sich zur folgendes Verfahren zur Konstruktion einer Zerlegung an:*

1. *Berechne* $res[a,b]$, $resabs[a,b]$ *und* $err[a,b]$.
   *if* $|err[a,b]| \leq Tol\, resabs[a,b]$ *return* $res[a,b]$
   *else*

2. *Zerlege* $[a,b]$ *in*
$$I_0 = \left[a, \frac{b-a}{2}\right]$$
   *und*
$$I_1 = \left[\frac{b-a}{2}, b\right]$$
   *und berechne*

   $res\, I_0$, $resabs\, I_0$, $err\, I_0$ *und*

   $res\, I_1$, $resabs\, I_1$, $err\, I_1$

   $n = 2$.

3. *Falls*
$$\sum_{j=0}^{n-1} |err\, I_j| \leq Tol \sum_{j=0}^{n-1} resabs\, I_j$$
   *return*
$$\sum_{j=0}^{n-1} res\, I_j$$
   *sonst:*
   *Unterteile das Intervall* $I_k$, *in dem der Fehler maximal ist in zwei Teilintervalle* $I_k$ *und* $I_n$ *und berechne:*

   $res\, I_k$, $resabs\, I_k$, $err\, I_k$ *und*

   $res\, I_n$, $resabs\, I_n$, $err\, I_n$

   $n = n + 1$
   *Gehe zu 3)*

**6.2** (Schätzung des Fehlers).
*Ziel:* *Berechne Approximation an*

$$\int_{x_j}^{x_{x+1}} f(x)dx - h_{j+1} \sum_{i=1}^{s} b_i f(x_j + h_{j+1} c_i)$$

*ohne zusätzliche Funktionsauswertungen.*
*Idee: Konstruiere eingebettete QF, d.h. QF zu den selben Knoten $c_i$ mit Gewichten $b_i$ und Ordnung $\hat{p} < p$*
*Bemerkung: Falls $p = 2s$ ist, so gilt $\hat{p} \le s-1$ (wäre $\hat{p} \ge s$, so wäre nach (2.8) $\hat{b}_i < b_i$).*
*Eine Approximation des Fehlers für die eingebettete QF ist durch*

$$\begin{aligned} \mathit{diff}[x_j, x_{j+1}] &= h_{j+1} \sum_{i=1}^{s} b_i f(x_j + c_i h_{j+1}) - h_{j+1} \sum_{i=1}^{s} \hat{b}_i f(x_j + c_i h_{j+1}) \\ &= h_{j+1} \sum_{i=1}^{s} (b_i - \hat{b}_i) f(x_j + c_i h_{j+1}) \end{aligned}$$

*gegeben. Es gilt*

$$\begin{aligned} \mathit{diff}[x_j, x_{j+1}] &= h_{j+1} \sum_{i=1}^{s} b_i f(x_j + c_i h_{j+1}) - \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)dx \\ &\quad - \left( h_{j+1} \sum_{i=1}^{s} \hat{b}_i f(x_j + c_i h_{j+1}) - \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)dx \right) \\ &= \textit{Fehler der QF } (b_i, c_i)_{i=1}^{s} - \textit{Fehler der QF } (\hat{b}_i, c_i)_{i=1}^{s} \\ &= C_1 h_{j+1}^{p+1} + C_2 h_{j+1}^{\hat{p}+1} \end{aligned}$$

*Falls $h_{j+1}$ klein ist, ist $C_1 h_{j+1}^{p+1} << C_2 h_{j+1}^{\hat{p}+1}$.*
*Drei Möglichkeiten den Fehler zu schätzen:*

I) *err* $[x_j, x_{j+1}] \approx$ *diff* $[x_j, x_{j+1}]$. *Sehr pessimistisch*

II) *err* $[x_j, x_{j+1}] \approx (\mathit{diff}\ [x_j, x_{j+1}])^2$, *falls* $p = 2s$ *und* $\hat{p} = s-1$. *Wenig verlässlich*

III) *Verwende dritte eingebettete QF*

$(\hat{\hat{b}}_i, c_i)$ *der Ordnung 6*

*zu* $(b_i, c_i)$ *der Ordnung* $30 = 2s$, $s = 15$

*und* $(\hat{b}_i, c_i)$ *der Ordnung 14*

$\widehat{\mathit{diff}} = h_{j+1} \sum_{i=1}^{s} (b_i - \hat{\hat{b}}_i) f(x_{j+1} + c_i h_{j+1}) \approx C_3 h^7$

$$err\,[x_j, x_{j+1}] = \mathit{diff}\,[x_j, x_{j+1}] \left(\frac{\mathit{diff}}{\hat{\mathit{diff}}}\right)^2$$

$$= C_2 \frac{C_2^2}{C_3^2} h_{j+1}^{15} \left(\frac{h_{j+1}^{15}}{h_{j+1}^{7}}\right) = C h_{j+1}^{31}$$

# 7 Gauß- und Lobatto Quadraturformeln

Ziel: Konstruktion einer s-stufigen QF der Ordnung $p = 2s$.
Für $M(t) = CP_s(2t-1)$, wobei $P_s$ das Legendrepolynom vom Grad s ist (siehe (5.5)), $C \in \mathbb{R}$, erhalten wir mit (5.4) und (4.1):

**Satz 7.1.**
*Für jedes $s \in \mathbb{N}$ gibt es eine eindeutige QF der Ordnung $p = 2s$, die sogenannte Gauß-QF. Ihre Knoten sind die Wurzeln von $P_s(2t-1)$, ihre Gewichte sind durch (2.8) gegeben.*

Beispiele:

| | |
|---|---|
| $s = 1$ | Mittelpunktsregel |
| $s = 2$ | $c_{1,2} = \frac{1}{2} \mp \frac{\sqrt{3}}{6}$, $b_1 = \frac{1}{2} = b_2$ |
| $s = 3$ | (4.3) 2) |

**7.2** (Bezeichnung der Knoten der Gauß-QF)**.**
*Details: Siehe Homepage (Übungsaufgabe).*
*Idee: Die Wurzeln der Polynome, die durch Rekursion (5.3) erzeugt werden, sind die Eigenwerte einer symmetrischen Tridiagonalmatrix (Matrix: Siehe Homepage).*
*In Numerik II lernen Sie Verfahren kennen, um die Eigenwerte zu berechnen.*

**7.3** (Lobatto Quadraturformeln)**.**
*Ein Vorteil der Simpsonquadraturformel war, dass $c_1 = 0$ und $c_s = 1$ gilt. Damit muss man den Integranten in $x_j$ nur einmal auswerten. Zur Konstruktion einer s-stufigen QF der Ordnung $p = 2s-2$ mit $c_1 = 0$ und $c_s = 1$ setzt man*

$$M(t) = P_s(2t-1) - P_{s-2}(2t-1)$$

*Da die Legendre-Polynome folgende Rekursion erfüllen*

$$P_0(x) = 1 \quad P_1(x) = x$$

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x)$$

*ist*

$$P_s(1) = 1 \quad \textit{und} \quad P_s(-1) = (-1)^s$$

*und damit*

$$M(0) = 0 = M(1)$$

*Die restlichen Nullstellen (oder Wurzeln) von $M(t)$ sind reell, einfach und liegen in (0,1), wie man analog zu (5.4) zeigt.*
*Damit gilt:*

**Satz** *Für $s \in \mathbb{N}$, $s \geq 2$ gibt es eine eindeutige s-stufige QF der Ordnung $2s-2$ mit $c_1 = 0$ und $c_s = 1$*

# II Interpolation und Approximation

**Problemstellung A** Zu gegebenen $(x_0, y_0), ..., (x_n, y_n)$ berechne Polynom $p$ vom Grad $\leq n$ mit

$$p(x_j) = y_j, \quad j = 0, ..., n$$

**Problemstellung B** $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ gegeben. Finde einfach auszuwertende Funktion $p : [a,b] \to \mathbb{R}$, etwa ein Polynom, stückweises Polynom, rationale Funktion, sodass $f - p$ klein ist.

i) $f(x) = p(x)$ für endlich viele vorgegebene Punkte $x$

ii) $\int_a^b (f(x) - p(x))^2 dx$ soll minimal sein.

iii) $\max_{x\in[a,b]} |f(x) - p(x)|$ soll minimal sein.

## 8 Newtonsche Interpolationsformel

**Beispiel 8.1.**

*n=1:*

*$(x_0, y_0), (x_1, y_1)$, $p \in \mathcal{P}_1$ das beide Punkte verbindet.*

$$p(x) = y_0 + (x - x_0)\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

*n=2:*

$(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)$

$$p(x) = y_0 + (x - x_0)\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} + a(x - x_0)(x - x_1)$$

*Bestimme a so, dass* $p(x_2) = y_2$

$$y_2 \stackrel{!}{=} y_0 + (x - x_0)\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} + a(x - x_0)(x - x_1)$$

$$a(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = y_2 - y_0 - (x_2 - x_1)\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} - y_1 + y_0$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{x_2 - x_0}\left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}\right)$$

**Definition 8.2** (dividierte Differenzen)**.**
*Für* $(x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n)$ *mit paarweise verschiedenen Stützstellen* $x_j$ *definieren wir*

$$\begin{aligned}
y[x_j] &:= y_j \quad \big(= \delta^0 y[x_j]\big) \\
\delta y[x_j, x_{j+1}] &:= \frac{y_{j+1} - y_j}{x_{j+1} - x_j} = \frac{\delta^0 y[x_{j+1}] - \delta^0 y[x_j]}{x_{j+1} - x_j} \\
\delta^2 y[x_j, x_{j+1}, x_{j+2}] &:= \frac{\delta y[x_{j+1}, x_{j+2}] - \delta y[x_j, x_{j+1}]}{x_{j+2} - x_j} \\
\delta^k y[x_j, x_{j+1}, ..., x_{j+k}] &:= \frac{1}{x_{j+k} - x_j}\big(\delta^{k-1} y[x_{j+1}, ..., x_{j+k}] - \delta^{k-1} y[x_j, ..., x_{j+k-1}]\big)
\end{aligned}$$

*Schema:*

$$\begin{array}{llllll}
x_0 & y_0 & & & & \\
 & & \delta^1 y[x_0, x_1] & & & \\
x_1 & y_1 & & \delta^2 y[x_0, x_1, x_2] & & \\
 & & \delta^1 y[x_1, x_2] & & \delta^3 y[x_0, x_1, x_2, x_3] & \\
x_2 & y_2 & & \delta^2 y[x_1, x_2, x_3] & & \\
 & & \delta^1 y[x_2, x_3] & & & \\
x_3 & y_3 & & & &
\end{array}$$

**Bemerkung 8.3.**
*Falls die* $x_i$ *äquidistant, dh* $x_i = x_0 + ih$ *so ist:*

$$\delta y[x_i, x_{i+1}] = \frac{y_{i+1} - y_i}{h} =: \frac{1}{h}\Delta y_i$$
$$\delta^2 y[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{\frac{1}{h}\Delta y_{i+1} - \frac{1}{h}\Delta y_i}{2h} = \frac{1}{2h^2}\Delta^2 y_i$$
$$\delta^k y[x_i, ..., x_{i+k}] = \frac{1}{k!h^k}\Delta^k y_i$$

**Satz 8.4** (Newtonsche Interpolationsformel)**.**
*Zu paarweise verschiedenen reellen $x_i$, $i = 0, ..., n$ existiert ein eindeutiges Polynom $p \in \mathcal{P}_n$ durch die Punkte $(x_i, y_i)$, $i = 0, ..., n$ (d.h. $p(x_i) = y_i$ für $i = 1, ..., n$). Es lässt sich berechnen durch:*

$$\begin{aligned} p(x) &= y[x_0] + (x - x_0)\delta y[x_0, x_1] + ... + (x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{n-1})\delta^n y[x_0, ..., x_n] \\ &= \sum_{i=0}^{n} \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j)\delta^i y[x_0, ..., x_i] \end{aligned}$$

*Beweis.* (Induktion)

**IA** $n = 1$ (und $n = 2$) vgl. Beispiel (1.1)

**IS** $n - 1 \to n$

$p_0(x) = y[x_0]+(x-x_0)\delta y[x_1, x_0]+...+(x-x_0)...(x-x_{n-2})\delta^{n-1}y[x_0, ..., x_{n-1}]$
ist das eindeutige interpolierende Polynom mit

$$\deg(p_0) \leq n - 1$$

zu $(x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_{n-1}, y_{n-1})$.
Für den Ansatz

$$p(x) = p_0(x) + a(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{n-1})$$

ergibt die Forderung $p(x_n) = y_n$

$$a = \frac{y_n - p_0(x_n)}{(x_n - x_0)(x_n - x_1)...(x_n - x_{n-1})}$$

Da $a$ eindeutig ist, ist $p$ eindeutig.
Es bleibt zu zeigen: $a = \delta^n y[x_0, ..., x_n]$

Sei dazu ein Polynom $p_1(x)$, welches durch $(x_1, y_1), ..., (x_n, y_n)$ läuft, mit $\deg(p_1) \leq n-1$. Nach Induktionsannahme gilt

$$\begin{aligned} p_1(x) &= y[x_1] + (x-x_1)\delta^1 y[x_1, x_2] + ... + (x-x_1)...(x-x_{n-1})\delta^{n-1} y[x_1, ..., x_n] \\ &= x^{n-1}\delta^{n-1} y[x_1, ..., x_n] + r \end{aligned}$$

mit $\deg(r) \leq n-2$.
Setze Polynom

$$p(x) := \frac{x_n - x}{x_n - x_0} p_0(x) + \frac{x - x_0}{x_n - x_0} p_1(x)$$

mit $\deg(p) \leq n$ durch $(x_0, y_0), ..., (x_n, y_n)$.
Das gilt, da:

$$\begin{aligned} p(x_0) &= p_0(x_0) = y_0 \\ p(x_n) &= p_1(x_n) = y_n \end{aligned}$$

Für $i = 1, ..., n-1$ :

$$p(x_i) = \frac{x_n - x_i}{x_n - x_0} \underbrace{p_0(x_i)}_{y_i} + \frac{x_i - x_0}{x_n - x_0} \underbrace{p_1(x_i)}_{y_i} = y_i$$

Andererseits:

$$p(x) = ax^n + r \quad \text{mit } \deg(r) \leq n-1$$

Koeffizientenvergleich:

$$\begin{aligned} a &= -\frac{1}{x_n - x_0}\delta^{n-1} y[x_0, ..., x_{n-1}] + \frac{1}{x_n - x_0}\delta^{n-1} y[x_1, ..., x_n] \\ &= \delta^n y[x_0, ..., x_n] \end{aligned}$$

□

**8.5** (Hornerschema)**.**
*Zur Auswertung des Interpolationspolynom $p$ an der Stelle $x$ verwendet man*

$$p(x) = y[x_0] + (x-x_0)\left(\delta y[x_0, x_1] + (x-x_1)\left(\delta^2 y[x_0, x_1, x_2] + (x-x_2)\left(... \left(\delta^n y[x_0, ..., x_n]\right)\right)\right)\right)$$

*Algorithmus:*
$s = \delta y^n[x_0, .., x_n]$
*for* $k = n-1, ..., 0$*:*
$s = \delta^k y[x_0, ..., x_k] + (x - x_k)s$

**Beispiel 8.6.**

| $i$ | $x_i$ | $y_i$ | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | -1 | 0 | | | | | |
| | | | $\frac{1-0}{0-(-1)} = 1$ | | | | |
| 1 | 0 | 1 | | $\frac{0-1}{2-(-1)} = -\frac{1}{3}$ | | | |
| | | | 0 | | $\frac{\frac{2}{3}-(-\frac{1}{3})}{3-(-1)} = \frac{1}{4}$ | | |
| 2 | 2 | 1 | | $\frac{2-0}{3-0} = \frac{2}{3}$ | | $\frac{-\frac{2}{5}-\frac{1}{4}}{5-(-1)} = \frac{13}{120}$ | |
| | | | $\frac{3-1}{3-2} = 2$ | | $\frac{-\frac{4}{3}-\frac{2}{3}}{5-0} = -\frac{2}{5}$ | | $\ldots$ |
| 3 | 3 | 3 | | $\frac{-2-2}{5-2} = -\frac{4}{3}$ | | $\ldots$ | |
| | | | $\frac{-1-3}{5-3} = -2$ | | $\frac{\frac{9}{56}-(-\frac{4}{3})}{17-2} = \frac{251}{2520}$ | | |
| 4 | 5 | -1 | | $\frac{\frac{1}{4}-(-2)}{17-3} = \frac{9}{56}$ | | | |
| | | | $\frac{2-(-1)}{17-5} = \frac{1}{4}$ | | | | |
| 5 | 17 | 2 | | | | | |

*Das Interpolationspolynom ist also*

$$p(x) = 0+(x+1)*1-\frac{1}{3}(x+1)(x)+\frac{1}{4}(x+1)x(x-2)+(x+1)x(x-2)(x-3)\frac{13}{120}$$

*bzw. nach Hornerschema*

$$p(x) = 0 + (x+1)\left(1 + x\left(-\frac{1}{3} + (x-2)\left(\frac{1}{4} + (x-3)\frac{13}{120}\right)\right)\right)$$