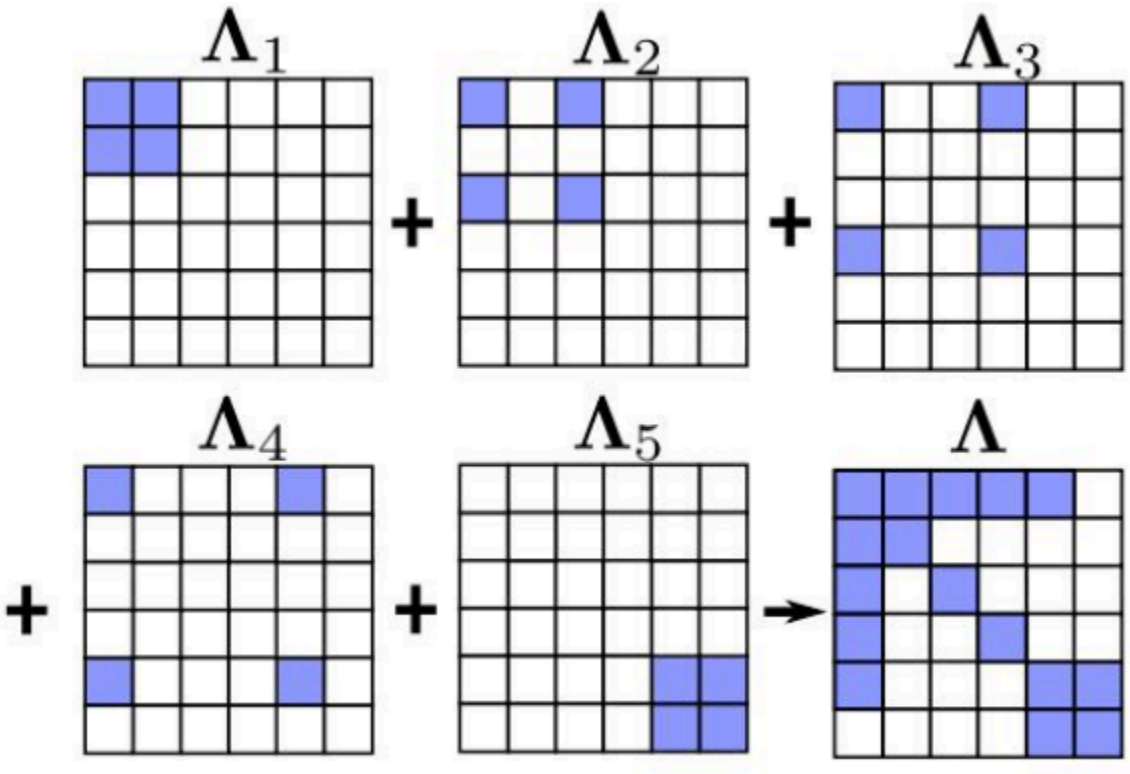
1.完成单目BA求解器problem.cc中的部分代码

完成Problem::MakeHessian()中信息矩阵H的计算

这里就是将计算出来的小hessian矩阵叠加起来即可，简单示例如图：




```
// 所有的信息矩阵叠加起来
// TODO:: home work. 完成 H index 的填写.
H.block(index_i, index_j, dim_i, dim_j).noalias() += hessian;
if (j != i)
{
    // 对称的下三角
    // TODO:: home work. 完成 H index 的填写.
    H.block(index_j, index_i, dim_j, dim_i).noalias() += hessian.transpose();
}
```

完成Problem::SolveLinearSystem()中SLAM问题的求解

在schur补的过程中，我们要边缘化的是特征点，reserve_size是位姿向量的长度，marg_size是特征点向量的长度，注意Eigen的下标是从0开始即可。

```
// TODO:: home work. 完成矩阵块取值，Hmm，Hpm，Hmp，bpp，bmm
MatXX Hmm = Hessian_.block(reserve_size, reserve_size, marg_size, marg_size);
MatXX Hpm = Hessian_.block(0, reserve_size, reserve_size, marg_size);
MatXX Hmp = Hessian_.block(reserve_size, 0, marg_size, reserve_size);
VecX bpp = b_.segment(0, reserve_size);
VecX bmm = b_.segment(reserve_size, marg_size);
```

回忆起Schur补的公式即可：

$$\begin{pmatrix} H_{pp} & H_{pm} \\ H_{mp} & H_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_p \\ X_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{pp} \\ b_{mm} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} I & -H_{pm}H_{mm}^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_{pp} & H_{pm} \\ H_{mp} & H_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_p \\ X_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & -H_{pm}H_{mm}^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{pp} \\ b_{mm} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} H_{pp} - H_{pm}H_{mm}^{-1}H_{mp} & 0 \\ H_{mp} & H_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_p \\ X_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{pp} - H_{pm}H_{mm}^{-1}b_{mm} \\ b_{mm} \end{pmatrix}$$

```
// TODO:: home work. 完成舒尔补 Hpp, bpp 代码
MatXX tempH = Hpm * Hmm_inv;
H_pp_schur_ = Hessian_.block(0, 0, reserve_size, reserve_size) - tempH * Hmp;
b_pp_schur_ = bpp - tempH * bmm;
```

$$\begin{cases} (H_{pp} - H_{pm}H_{mm}^{-1}H_{mp})X_p = b_{pp} - H_{pm}H_{mm}^{-1}b_{mm} \\ H_{mp}X_p + H_{mm}X_l = b_{mm} \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_p \quad \rightarrow \quad PCGSolver \\ X_l = H_{mm}^{-1}(b_{mm} - H_{mp}X_p) \end{cases}$$

```
// TODO:: home work. step3: solve landmark
VecX delta_x_ll(marg_size);
delta_x_ll = Hmm_inv * (bmm - Hmp * delta_x_pp);
delta_x_.tail(marg_size) = delta_x_ll;
```

分别注释和解注释TestMonoBA中的

```
if (i < 2)
        vertexCam->SetFixed();
```

可以得到unfix和fix前两帧位姿的运行结果如下：

未fix前两帧位姿：

```
xwl@xwl-Inspiron-15-7000-Gaming:~/Documents/VSLAM-fundamentals-and-VIO-learning/L14/hw_course5_new/build/app$ ./testMonoBA
0 order: 0
1 order: 6
2 order: 12

 ordered_landmark_vertices_ size : 20
iter: 0 , chi= 5.35099 , Lambda= 0.00597396
iter: 1 , chi= 0.0289048 , Lambda= 0.00199132
iter: 2 , chi= 0.000109162 , Lambda= 0.000663774
problem solve cost: 1.59978 ms
   makeHessian cost: 0.895798 ms

Compare MonoBA results after opt...
after opt, point 0 : gt 0.220938 ,noise 0.227057 ,opt 0.220992
after opt, point 1 : gt 0.234336 ,noise 0.314411 ,opt 0.234854
after opt, point 2 : gt 0.142336 ,noise 0.129703 ,opt 0.142666
after opt, point 3 : gt 0.214315 ,noise 0.278486 ,opt 0.214502
after opt, point 4 : gt 0.130629 ,noise 0.130064 ,opt 0.130562
after opt, point 5 : gt 0.191377 ,noise 0.167501 ,opt 0.191892
after opt, point 6 : gt 0.166836 ,noise 0.165906 ,opt 0.167247
after opt, point 7 : gt 0.201627 ,noise 0.225581 ,opt 0.202172
after opt, point 8 : gt 0.167953 ,noise 0.155846 ,opt 0.168029
after opt, point 9 : gt 0.21891 ,noise 0.209697 ,opt 0.219314
after opt, point 10 : gt 0.205719 ,noise 0.14315 ,opt 0.205995
after opt, point 11 : gt 0.127916 ,noise 0.122109 ,opt 0.127908
after opt, point 12 : gt 0.167904 ,noise 0.143334 ,opt 0.168228
after opt, point 13 : gt 0.216712 ,noise 0.18526 ,opt 0.216866
after opt, point 14 : gt 0.180009 ,noise 0.184249 ,opt 0.180036
after opt, point 15 : gt 0.226935 ,noise 0.245716 ,opt 0.227491
after opt, point 16 : gt 0.157432 ,noise 0.176529 ,opt 0.157589
after opt, point 17 : gt 0.182452 ,noise 0.14729 ,opt 0.182444
after opt, point 18 : gt 0.155701 ,noise 0.182258 ,opt 0.155769
after opt, point 19 : gt 0.14646 ,noise 0.240649 ,opt 0.14677
------------ pose translation ----------------
translation after opt: 0 :-0.000478001   0.00115906  0.000366506 || gt: 0 0 0
translation after opt: 1 :-1.06959  4.00018 0.863877 || gt:  -1.0718         4 0.866025
translation after opt: 2 :-4.00232  6.92678 0.867244 || gt:       -4   6.9282 0.866025
---------- TEST Marg: before marg------------
     100     -100        0
    -100  136.111 -11.1111
       0 -11.1111  11.1111
---------- TEST Marg: 将变量移动到右下角------------
     100        0     -100
    -100 -11.1111  136.111
```

可以看到，在利用LM法优化后，第一帧相机的位置已经不再是原点(0, 0, 0)，这也印证了优化结果在零空间漂移的现象。

fix前两帧位姿：

```
xwl@xwl-Inspiron-15-7000-Gaming:~/Documents/VSLAM-fundamentals-and-VIO-learning/L14/hw_course5_new/build/app$ ./testMonoBA
0 order: 0
1 order: 6
2 order: 12

 ordered_landmark_vertices_ size : 20
iter: 0 , chi= 5.35099 , Lambda= 0.00597396
iter: 1 , chi= 0.0282599 , Lambda= 0.00199132
iter: 2 , chi= 0.000117497 , Lambda= 0.000663774
problem solve cost: 1.14059 ms
   makeHessian cost: 0.563726 ms

Compare MonoBA results after opt...
after opt, point 0 : gt 0.220938 ,noise 0.227057 ,opt 0.220909
after opt, point 1 : gt 0.234336 ,noise 0.314411 ,opt 0.234374
after opt, point 2 : gt 0.142336 ,noise 0.129703 ,opt 0.142353
after opt, point 3 : gt 0.214315 ,noise 0.278486 ,opt 0.214501
after opt, point 4 : gt 0.130629 ,noise 0.130064 ,opt 0.130511
after opt, point 5 : gt 0.191377 ,noise 0.167501 ,opt 0.191539
after opt, point 6 : gt 0.166836 ,noise 0.165906 ,opt 0.166965
after opt, point 7 : gt 0.201627 ,noise 0.225581 ,opt 0.201859
after opt, point 8 : gt 0.167953 ,noise 0.155846 ,opt 0.167965
after opt, point 9 : gt 0.21891 ,noise 0.209697 ,opt 0.218834
after opt, point 10 : gt 0.205719 ,noise 0.14315 ,opt 0.205683
after opt, point 11 : gt 0.127916 ,noise 0.122109 ,opt 0.127751
after opt, point 12 : gt 0.167904 ,noise 0.143334 ,opt 0.167924
after opt, point 13 : gt 0.216712 ,noise 0.18526 ,opt 0.216885
after opt, point 14 : gt 0.180009 ,noise 0.184249 ,opt 0.179961
after opt, point 15 : gt 0.226935 ,noise 0.245716 ,opt 0.227114
after opt, point 16 : gt 0.157432 ,noise 0.176529 ,opt 0.157529
after opt, point 17 : gt 0.182452 ,noise 0.14729 ,opt 0.1823
after opt, point 18 : gt 0.155701 ,noise 0.182258 ,opt 0.155627
after opt, point 19 : gt 0.14646 ,noise 0.240649 ,opt 0.146533
------------ pose translation ----------------
translation after opt: 0 :0 0 0 || gt: 0 0 0
translation after opt: 1 : -1.0718        4 0.866025 || gt:  -1.0718        4 0.866025
translation after opt: 2 :-3.99917  6.92852 0.859878 || gt:       -4   6.9282 0.866025
---------- TEST Marg: before marg------------
     100      -100         0
    -100   136.111 -11.1111
       0 -11.1111   11.1111
---------- TEST Marg: 将变量移动到右下角------------
     100         0      -100
    -100 -11.1111   136.111
       0   11.1111 -11.1111
```

解注释fix的代码，也就是将前两帧pose对应的jacobian设置为0，从而不去更新前两帧pose，将其固定在原点(0, 0, 0),可以看到结果符合预期。

2.完成滑动窗口算法测试函数

完成Problem::TestMarginalize()中代码，并通过测试

```
// TODO:: home work. 将变量移动到右下角
/// 准备工作： move the marg pose to the Hmm bottown right
// 将 row i 移动矩阵最下面
Eigen::MatrixXd temp_rows = H_marg.block(idx, 0, dim, reserve_size);
Eigen::MatrixXd temp_botRows = H_marg.block(idx + dim, 0, reserve_size - idx - dim, reserv
H_marg.block(idx, 0, reserve_size - idx - dim, reserve_size) = temp_botRows;
H_marg.block(reserve_size - dim, 0, dim, reserve_size) = temp_rows

// TODO:: home work. 完成舒尔补操作
Eigen::MatrixXd Arm = H_marg.block(0, n2, n2, m2);
Eigen::MatrixXd Amr = H_marg.block(n2, 0, m2, n2);
Eigen::MatrixXd Arr = H_marg.block(0, 0, n2, n2);
```

```
---------- TEST Marg: before marg------------
     100      -100         0
    -100   136.111  -11.1111
       0  -11.1111   11.1111
---------- TEST Marg: 将变量移动到右下角------------
     100         0      -100
       0   11.1111  -11.1111
    -100  -11.1111   136.111
---------- TEST Marg: after marg------------
 26.5306  -8.16327
-8.16327   10.2041
```

观察运行结果，可以得到以下几点结论：

- 变量2在信息矩阵中成功转移到了右下角
- 在marg之前，信息矩阵中的0表示变量1和3关于2条件独立，也就是1和3之间是没有边连接的，但是它们跟2都是相关联的，也就是与2之间有边连接
- 在marg掉2后，2留下的先验信息传递给了1和3，信息矩阵中相应位置不再是0，也即1与3之间产生了连接

3.总结论文：优化过程中处理H自由度的不同操作方式

论文中总结了三种处理H自由度的方式，分别为：

- free gauge approach（对应第1题中unfix的情况）：允许参数在优化的时候自由变化，使用伪逆或者添加阻尼项的方式处理hessian矩阵，保证问题得到较好的参数更新
- gauge fixation approach（对应第1题中fix的情况）：在优化的过程中将第一帧相机的位置和yaw角固定（VIO系统的4自由度不可观），等价于将相应参数对应的

Jacobian块设置为0，因此残差也是0，从而不更新该优化变量

- gauge prior approach（对应提升题部分）：为第1帧相机的状态添加先验约束（惩罚项）

4.在代码中为第一、二帧添加prior约束，并比较为prior设定不同权重时，BA求解收敛精度和速度

```
// 添加先验约束，更改prior的权重Wp
double Wp = 0;
for (size_t k = 0; k < 2; ++k)
{
    shared_ptr<EdgeSE3Prior> edge_prior(new EdgeSE3Prior(cameras[k].twc, cameras[k].qwc));
    std::vector<std::shared_ptr<Vertex>> edge_prior_vertex;
    edge_prior_vertex.push_back(vertexCams_vec[k]);
    edge_prior->SetVertex(edge_prior_vertex);
    edge_prior->SetInformation(edge_prior->Information() * Wp);
    problem.AddEdge(edge_prior);
}
```

当Wp = 0时：

```
xwl@xwl-Inspiron-15-7000-Gaming:~/Documents/VSLAM-fundamentals-and-VIO-learning/L14/hw_course5_new/build/app$ ./testMonoBA
0 order: 0
1 order: 6
2 order: 12

 ordered_landmark_vertices_ size : 20
iter: 0 , chi= 5.35099 , Lambda= 0.00597396
iter: 1 , chi= 0.0282599 , Lambda= 0.00199132
iter: 2 , chi= 0.000117497 , Lambda= 0.000663774
problem solve cost: 1.23977 ms
   makeHessian cost: 0.57991 ms

Compare MonoBA results after opt...
after opt, point 0 : gt 0.220938 ,noise 0.227057 ,opt 0.220909
after opt, point 1 : gt 0.234336 ,noise 0.314411 ,opt 0.234374
after opt, point 2 : gt 0.142336 ,noise 0.129703 ,opt 0.142353
after opt, point 3 : gt 0.214315 ,noise 0.278486 ,opt 0.214501
after opt, point 4 : gt 0.130629 ,noise 0.130064 ,opt 0.130511
after opt, point 5 : gt 0.191377 ,noise 0.167501 ,opt 0.191539
after opt, point 6 : gt 0.166836 ,noise 0.165906 ,opt 0.166965
after opt, point 7 : gt 0.201627 ,noise 0.225581 ,opt 0.201859
after opt, point 8 : gt 0.167953 ,noise 0.155846 ,opt 0.167965
after opt, point 9 : gt 0.21891 ,noise 0.209697 ,opt 0.218834
after opt, point 10 : gt 0.205719 ,noise 0.14315 ,opt 0.205683
after opt, point 11 : gt 0.127916 ,noise 0.122109 ,opt 0.127751
after opt, point 12 : gt 0.167904 ,noise 0.143334 ,opt 0.167924
after opt, point 13 : gt 0.216712 ,noise 0.18526 ,opt 0.216885
after opt, point 14 : gt 0.180009 ,noise 0.184249 ,opt 0.179961
after opt, point 15 : gt 0.226935 ,noise 0.245716 ,opt 0.227114
after opt, point 16 : gt 0.157432 ,noise 0.176529 ,opt 0.157529
after opt, point 17 : gt 0.182452 ,noise 0.14729 ,opt 0.1823
after opt, point 18 : gt 0.155701 ,noise 0.182258 ,opt 0.155627
after opt, point 19 : gt 0.14646 ,noise 0.240649 ,opt 0.146533
------------ pose translation ----------------
translation after opt: 0 :0 0 0 || gt: 0 0 0
translation after opt: 1 : -1.0718        4 0.866025 || gt:  -1.0718        4 0.866025
translation after opt: 2 :-3.99917  6.92852 0.859878 || gt:       -4   6.9282 0.866025
```

当Wp = 1e5时：

```
xwl@xwl-Inspiron-15-7000-Gaming:~/Documents/VSLAM-fundamentals-and-VIO-learning/L14/hw_course5_new/build/app$ ./testMonoBA
0 order: 0
1 order: 6
2 order: 12

 ordered_landmark_vertices_ size : 20
iter: 0 , chi= 5.35099 , Lambda= 0.00597396
iter: 1 , chi= 0.0282599 , Lambda= 0.00199132
iter: 2 , chi= 0.000117497 , Lambda= 0.000663774
problem solve cost: 1.05255 ms
   makeHessian cost: 0.544379 ms

Compare MonoBA results after opt...
after opt, point 0 : gt 0.220938 ,noise 0.227057 ,opt 0.220909
after opt, point 1 : gt 0.234336 ,noise 0.314411 ,opt 0.234374
after opt, point 2 : gt 0.142336 ,noise 0.129703 ,opt 0.142353
after opt, point 3 : gt 0.214315 ,noise 0.278486 ,opt 0.214501
after opt, point 4 : gt 0.130629 ,noise 0.130064 ,opt 0.130511
after opt, point 5 : gt 0.191377 ,noise 0.167501 ,opt 0.191539
after opt, point 6 : gt 0.166836 ,noise 0.165906 ,opt 0.166965
after opt, point 7 : gt 0.201627 ,noise 0.225581 ,opt 0.201859
after opt, point 8 : gt 0.167953 ,noise 0.155846 ,opt 0.167965
after opt, point 9 : gt 0.21891 ,noise 0.209697 ,opt 0.218834
after opt, point 10 : gt 0.205719 ,noise 0.14315 ,opt 0.205683
after opt, point 11 : gt 0.127916 ,noise 0.122109 ,opt 0.127751
after opt, point 12 : gt 0.167904 ,noise 0.143334 ,opt 0.167924
after opt, point 13 : gt 0.216712 ,noise 0.18526 ,opt 0.216885
after opt, point 14 : gt 0.180009 ,noise 0.184249 ,opt 0.179961
after opt, point 15 : gt 0.226935 ,noise 0.245716 ,opt 0.227114
after opt, point 16 : gt 0.157432 ,noise 0.176529 ,opt 0.157529
after opt, point 17 : gt 0.182452 ,noise 0.14729 ,opt 0.1823
after opt, point 18 : gt 0.155701 ,noise 0.182258 ,opt 0.155627
after opt, point 19 : gt 0.14646 ,noise 0.240649 ,opt 0.146533
------------ pose translation ----------------
translation after opt: 0 :0 0 0 || gt: 0 0 0
translation after opt: 1 : -1.0718        4 0.866025 || gt:  -1.0718         4 0.866025
translation after opt: 2 :-3.99917  6.92852 0.859878 || gt:        -4   6.9282 0.866025
```

可以尝试从0开始以数量级形式递增Wp，会发现如下现象：

- 不同Wp的取值所估计的误差是非常接近的，也就是说Wp的取值对于精度的影响不大。且当Wp的增长至某个值以后，误差会稳定在某个值。
- 迭代次数和收敛时间同样会在Wp达到某个值以后稳定。但是Wp在从0增大的过程中，计算时间会出现一个峰值。

需要注意的是，当Wp=0是，基本等同于free gauge方法，当Wp=无穷时则等价于gauge fixation方法。