1.推导当VINS中对特征采用逆深度参数时，基于特征匀速模型的重投影误差计算形式

不考虑时间戳延迟时，在第i帧图片中第1次观测到的第l个特征点$p_l^{c_i}=[u_l^{c_i},v_l^{c_i}]^T$，其在第$j$帧图片中的观测为$p_l^{c_j}=[u_l^{c_j},v_l^{c_j}]^T$，通过$p_l^{c_j}$计算其在空间中的坐标：

$$\hat{p}_l^{c_j}=\pi_c^{-1}([u_l^{c_j},v_l^{c_j}]^T)$$

其中$\pi_c^{-1}(*)$为利用相机内参将像素坐标转化为归一化平面坐标的反投影函数。
通过相机位姿估计的$p_l^{c_j}$为：

$$p_l^{c_j}=(R_{cb}(R_{wb_j}^T(R_{wb_i}(R_{cb}^T([u_l^{c_i},v_l^{c_i}]^T)-p_{cb})+p_{wb_i})-p_{wb_j}^T)+p_{cb})$$

所以基于逆深度的重投影误差为：

$$r_c=\hat{p}_l^{c_j}-p_l^{c_j}$$

考虑时间戳延迟时，需要对$p_l^{c_i}$和$p_l^{c_j}$都进行补偿：

$$p_l^{c_i}(t_d)=p_l^{c_i}+t_dV_l^i$$

$$p_l^{c_j}(t_d)=p_l^{c_j}+t_dV_l^j$$

2.总结基于B样条的时间戳估计算法流程，梳理论文公式

The contributions of this paper are as follows:

1) we propose a unified method of determining fixed time offsets between sensors using batch, continuous-time, maximum-likelihood estimation;
2) we derive an estimator for the calibration of a camera and inertial measurement unit (IMU) that simultaneously determines the transformation *and* the temporal offset between the camera and IMU;
3) we evaluate the estimator on simulated and real data (from the setup depicted in Figure 1) and show that it is sensitive enough to determine temporal offsets up to a fraction of the period of the highest-rate sensor, including differences due to camera exposure time; and
4) we demonstrate that the time delay estimation significantly benefits from the additional information comprised in acceleration measurements—information that was not exploited in previous approaches ([5], [6]).

A. Estimating Time Offsets using Basis Functions

考虑一个D维的状态向量$x(t)$，有：

$$\Phi(t)=[\Phi_1(t),...,\Phi_B(t)],x(t)=\Phi(t)c$$

其中$\Phi_i(t)$为关于时间t的函数$(D*1)$，$\Phi(t)$为$D*B$的矩阵，使用$B*1$的系数矩阵c估计$x(t)$，当通过测量数据进行时间偏移的估计时，得到误差如下：

$$e_j=y_j-h(x(t_j+d))$$

其中y_j是t_j时刻的测量值，$h(*)$为测量估计函数，d为未知的时间偏移，代入上式得到：

$$e_j=y_j-h(\Phi(t_j+d)c)$$

对上式进行一阶泰勒展开，得到：

$$e_j=y_j-h(\Phi(t_j+d)c)+H\Phi'(t_j+d)c\Delta d$$

其中

$$H = \frac{\partial h}{\partial x}|_{x\Phi(t_j+d)c}$$

B. An Example: Camera/IMU Calibration

1. Quantities Estimated

2. Parameterization of Time-Varying States

时变状态由B样条函数表示，IMU的位姿使用$6*1$的样条参数化，其中3个自由度是姿态，另外3个是位置：

$$\boldsymbol{T}_{w,i}(t) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{C}(\phi(t)) & \boldsymbol{t}(t) \\ \boldsymbol{0}^T & 1 \end{bmatrix}$$

其中$\phi(t) = \Phi_\phi(t)c_\phi$编码姿态参数，函数$\boldsymbol{C}(*)$构建旋转矩阵：$\boldsymbol{t}(t) = \Phi_t(t)c_t$编码位置参数，对应的速度$v(t)$和加速度$a(t)$表示为：

$$v(t) = \boldsymbol{t}'(t) = \Phi'(t)c_t$$

$$a(t) = \boldsymbol{t}''(t) = \Phi''(t)c_t$$

对于姿态参数，对应的角速度为：

$$\omega(t) = \boldsymbol{S}(\phi(t))\phi'(t) = \boldsymbol{S}(\Phi_\phi(t)c_\phi)\Phi'_\phi(t)c_\phi$$

其中$\boldsymbol{S}(*)$是与角速度参数相关的归一化矩阵

3. Measurement and Process Models

IMU和相机的标准离散测量方程

4. The Estimator

所构建的误差模型为：

$$\mathbf{e}_{y_{mj}} := \mathbf{y}_{mj} - \mathbf{h}\left(\mathbf{T}_{c,i}\mathbf{T}_{w,i}(t_j + d)^{-1}\mathbf{p}_w^m\right)$$

$$J_y := \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{J}\sum_{m=1}^{M}\mathbf{e}_{y_{mj}}^T\mathbf{R}_{y_{mj}}^{-1}\mathbf{e}_{y_{mj}}$$

$$\mathbf{e}_{\alpha_k} := \boldsymbol{\alpha}_k - \mathbf{C}\left(\boldsymbol{\varphi}(t_k)\right)^T\left(\mathbf{a}(t_k) - \mathbf{g}_w\right) + \mathbf{b}_a(t_k)$$

$$J_\alpha := \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{K}\mathbf{e}_{\alpha_k}^T\mathbf{R}_{\alpha_k}^{-1}\mathbf{e}_{\alpha_k}$$

$$\mathbf{e}_{\omega_k} := \boldsymbol{\varpi}_k - \mathbf{C}\left(\boldsymbol{\varphi}(t_k)\right)^T\boldsymbol{\omega}(t_k) + \mathbf{b}_\omega(t_k)$$

$$J_\omega := \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{K}\mathbf{e}_{\omega_k}^T\mathbf{R}_{\omega_k}^{-1}\mathbf{e}_{\omega_k}$$

$$\mathbf{e}_{b_a}(t) := \dot{\mathbf{b}}_a(t)$$

$$J_{b_a} := \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_K}\mathbf{e}_{b_a}(\tau)^T\mathbf{Q}_a^{-1}\mathbf{e}_{b_a}(\tau)\,d\tau$$

$$\mathbf{e}_{b_\omega}(t) := \dot{\mathbf{b}}_\omega(t)$$

$$J_{b_\omega} := \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_K}\mathbf{e}_{b_\omega}(\tau)^T\mathbf{Q}_\omega^{-1}\mathbf{e}_{b_\omega}(\tau)\,d\tau$$