1.证明式(15)中，取$y = u_4$是该问题的最优解

$$\min_y \|Dy\|_2^2 ,\quad s.t.\ \|y\| = 1 \qquad D_{2n\times 4}\ (n\text{为观测数量})$$

证明：令 $D = UAV^T$ 其中U和V都是单位正交矩阵，A为D的奇异值矩阵

$$\|Dy\| = \|UAV^Ty\| = \|AV^Ty\|$$

又因为 $D^TD = VA^TU^TUAV^T = VA^TAV^T = VA^2V^T$

且有 $\|y\| = \|V^Ty\| = 1$，令 $x = V^Ty$

则问题变成了在 $\|x\| = 1$ 的条件下最小化 $\|Ax\|$

有 $\|Dy\|_2^2 = \|Ax\|_2^2 = x^TA^TAx = x^T\Sigma^2x = \sigma_1^2x_1^2 + \cdots + \sigma_4^2x_4^2$

$$= [x_1\ \ x_2\ \ x_3\ \ x_4]\begin{bmatrix}\sigma_1^2 & & & \\ & \sigma_2^2 & & \\ & & \sigma_3^2 & \\ & & & \sigma_4^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}$$

观察上述等式，由于 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \geq \sigma_4 > 0$ 当 $x = [0\ \ 0\ \ 0\ \ 1]^T$ 时，所得 x^TA^TAx 最小，所以原方程解为

$$y = Vx = [V_1\ \ V_2\ \ V_3\ \ V_4]\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix} = V_4$$

也就是说方程 $Dy=0$ 的最小二乘解为D奇异值分解后，V的最后一列向量，也即 $y = u_4$

2.完成特征点三角化代码，通过仿真测试

首先根据课件上的公式构建D矩阵，然后对D^TD矩阵进行SVD分解，即可求得对应的特征点坐标

```
/* your code begin */
Eigen::Matrix<double, Eigen::Dynamic, 4> D(2 * (poseNums - start_frame_id), 4);
Eigen::RowVector4d P_1 = Eigen::RowVector4d::Zero(4);
Eigen::RowVector4d P_2 = Eigen::RowVector4d::Zero(4);
Eigen::RowVector4d P_3 = Eigen::RowVector4d::Zero(4);
int k = 0;
for (int i = start_frame_id; i < end_frame_id; ++i)
{
    // Rcw、tcw为world系到camera系的转换
    Eigen::Matrix3d Rcw = camera_pose[i].Rwc.transpose();
    Eigen::Vector3d tcw = -Rcw * camera_pose[i].twc;
    P_1 << Rcw.block<1, 3>(0, 0), tcw.x();
    P_2 << Rcw.block<1, 3>(1, 0), tcw.y();
    P_3 << Rcw.block<1, 3>(2, 0), tcw.z();
    // 和slides公式相对应，构建D矩阵
    D.block<1, 4>(k, 0) = camera_pose[i].uv.x() * P_3 - P_1;
    D.block<1, 4>(k + 1, 0) = camera_pose[i].uv.y() * P_3 - P_2;
    k += 2;
}
Eigen::MatrixXd DTD = D.transpose() * D;
Eigen::JacobiSVD<Eigen::MatrixXd> svd(DTD, Eigen::ComputeThinU | Eigen::ComputeThinV);
// D = U*A*V^T，那么D^TD = V*A^T*U^T*U*A*V^T = V*A^T*A*V^T，
// 由此可得D^T*D进行SVD分解和D进行SVD分解所得的U、A、V矩阵的关系
// 这里的U也就是对D矩阵进行SVD分解得到的V矩阵，其最后一列也就是我们所求的y
Eigen::MatrixXd U = svd.matrixU();
P_est = U.block<3, 1>(0, 3) / U(3, 3); //取齐次坐标的前三维，并同时除以第四维坐标
Eigen::Vector4d Singular_values = svd.singularValues();
// 可以验证最小奇异值应该远小于其他奇异值
std::cout << "Singular values:\n" << Singular_values << std::endl;
std::cout << "sigma4/sigma3:\n" << Singular_values[3] / Singular_values[2] << std::endl;
/* your code end */
```

仿真测试结果为：

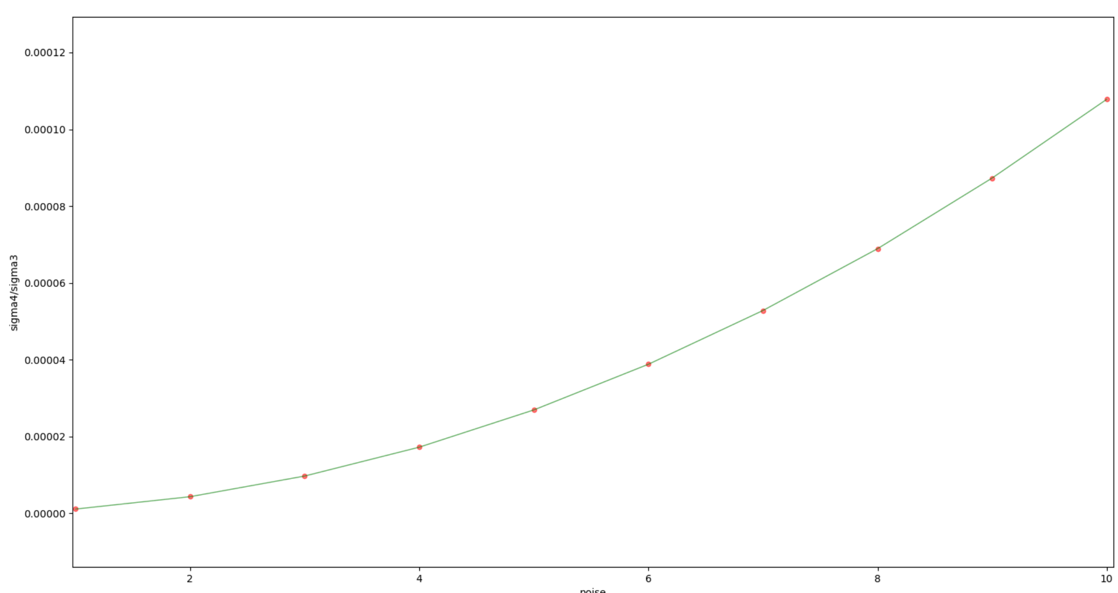
```
xwl@xwl-Inspiron-15-7000-Gaming:~/Documents/VSLAM-fundamentals-and-VIO-learning/L15/course6_hw/build$ ./estimate_depth
Singular values:
    468.406
    7.74642
   0.723255
5.30104e-16
sigma4/sigma3:
7.32942e-16
ground truth:
  -2.9477 -0.330799   8.43792
your result:
  -2.9477 -0.330799   8.43792
```

可以看出，σ_4/σ_3(最小奇异值与第二小奇异值之比)小于1e-4，三角化有效。在不加任何噪声的情况下，所三角化出的坐标与真值完全相同。

3.对测量值增加不同噪声，观察最小奇异值和第二小奇异值之间的比例变化，并绘制比例值的变化曲线

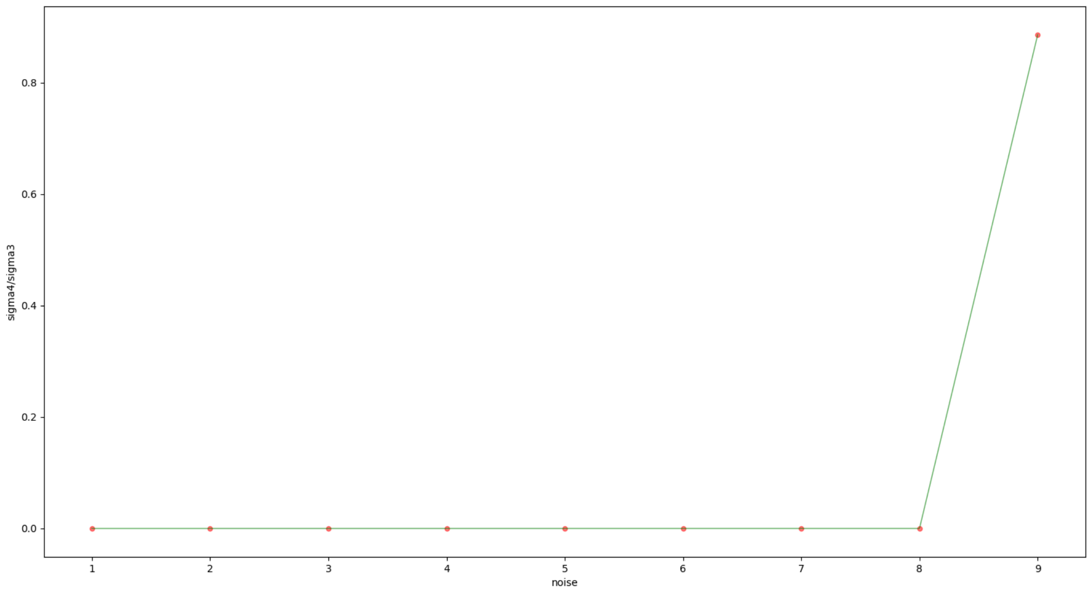
```
for (int i = start_frame_id; i < end_frame_id; ++i)
{
    Eigen::Matrix3d Rcw = camera_pose[i].Rwc.transpose();
    // 将特征点在世界坐标系下的坐标转换到相机坐标系下
    Eigen::Vector3d Pc = Rcw * (Pw - camera_pose[i].twc);

    std::normal_distribution<double> noise_pdf(0, 1. / 2000.);

    double x = Pc.x();
    double y = Pc.y();
    double z = Pc.z();

    // 给归一化坐标加上测量噪声
    camera_pose[i].uv = Eigen::Vector2d(x / z + noise_pdf(generator),
        y / z + noise_pdf(generator));
}
```

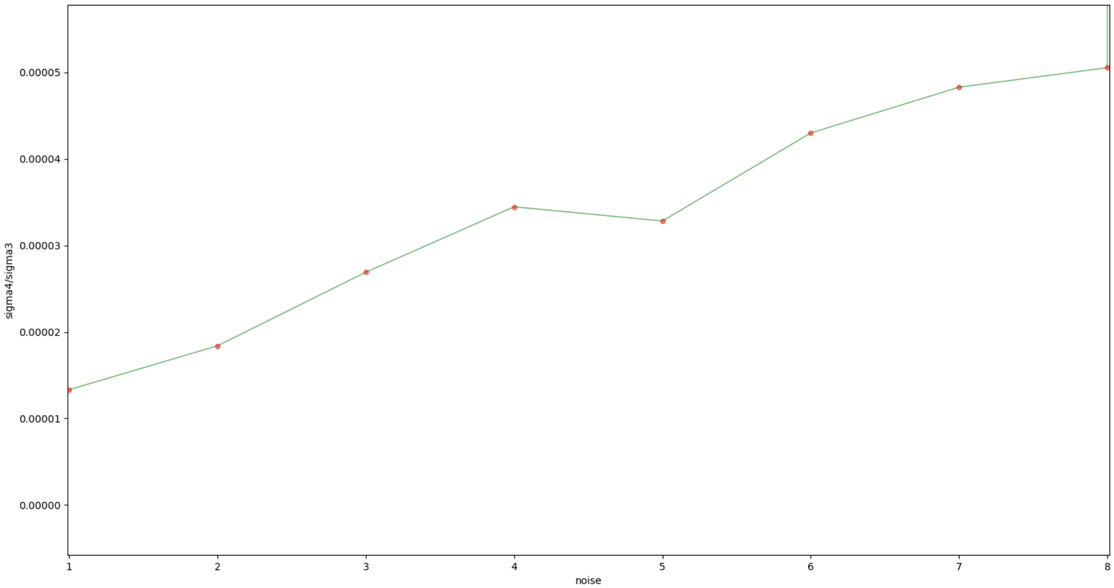
修改代码中noise_pdf(0, * / 2000.)中的*数值，将其从1增加到10，可以看到σ_4/σ_3比例值变化曲线为：



4.固定噪声方差参数，将观测图像帧扩成多帧，观察最小奇异值和第二小奇异值之间的比例变化，并绘制比例值的变化曲线

噪声误差设定为5个像素误差(5./2000.)，start_frame_id从1取到10，取为10时比例值变为nan，9时比例值为0.885821，明显增大。
由此可见，当观测帧数量越小时，三角化的结果越不可靠。





Appendix

绘制第3题图像的Py代码

```
import matplotlib.pyplot as plt

x_list = list(range(1, 11))
lambda_list = [1.07474e-06, 4.3e-6, 9.68e-6, 1.72e-5, 2.69e-5,
3.88e-5, 5.28e-5, 6.89e-5, 8.73e-5, 0.000107808]

plt.figure('lambda iteration')
ax = plt.gca()

ax.set_xlabel('noise')
ax.set_ylabel('sigma4/sigma3')

ax.scatter(x_list, lambda_list, c='r', s=20, alpha=0.5)
ax.plot(x_list, lambda_list, c='g', linewidth=1, alpha=0.6)

plt.show()
```

绘制第4题图像的Py代码

```
import matplotlib.pyplot as plt

x_list = list(range(1, 10))
lambda_list = [1.33254e-05, 1.84001e-05, 2.69058e-05, 3.44701e-05,
3.28267e-05, 4.30012e-05, 4.82993e-05, 5.05506e-05, 0.885821]

plt.figure('lambda iteration')
ax = plt.gca()

ax.set_xlabel('noise')
ax.set_ylabel('sigma4/sigma3')

ax.scatter(x_list, lambda_list, c='r', s=20, alpha=0.5)
ax.plot(x_list, lambda_list, c='g', linewidth=1, alpha=0.6)

plt.show()
```