

$$\min_y \|Dy\|^2 = (Dy)^T(Dy) = y^T D^T D y \quad (\|y\|=1)$$

y 可以由 $D^T D$ 的奇异值向量线性组合得到, 即

$$y = \sum_{i=1}^4 k_i u_i = k_i u_i + v$$

其中 $v = \sum_{j=1, j \neq i}^4 k_j u_j$, 易知 u_i 与 v 正交

将 y 代入 $y^T D^T D y$ 可得:

$$\begin{aligned} \min \|Dy\|^2 &= (k_i u_i + v)^T D^T D (k_i u_i + v) \\ &= k_i^2 u_i^T D^T D u_i + v^T D^T D v + k_i u_i^T D^T D v + k_i v^T D^T D u_i \end{aligned}$$

由于 u_i 与 v 正交, 后两项为 0, 且 $D u_i = \sigma_i u_i$, 带入有

$$\begin{aligned} \min_x \|Dy\|^2 &= (k_i u_i + v)^T D^T D (k_i u_i + v) \\ &= k_i^2 u_i^T D^T D u_i + v^T D^T D v \\ &= k_i^2 \sigma_i^2 \|u_i\|^2 + v^T D^T D v \geq k_i^2 u_i^T D^T D u_i + v^T D^T D v \\ &= k_i^2 \sigma_i^2 \|u_i\|^2, \text{ 当且仅当 } v=0 \text{ 等号成立} \end{aligned}$$

若要取最小值, 则 $\sigma_i = \sigma_4$, 也就是取最小奇异值的时候,

目标函数取最小值, 此时

$$y = k_4 u_4 + v = k_4 u_4$$

由于 $\|y\|=1$, 所以 $k_4=1$, 故 $y = u_4$