

# 附录 F 线几何与旋量理论基础

## F.1 线矢量、偶量与旋量的基本概念

线矢量对机构学研究具有非常重要的意义，因此本章节的介绍就先从线矢量开始。

### F.1.1 线矢量的定义与 Plücker 坐标

【定义】 如果空间一个向量被约束在一条空间位置确定的直线上，则这个被直线约束的向量称为线矢量（line vector），如图 F-1 所示。

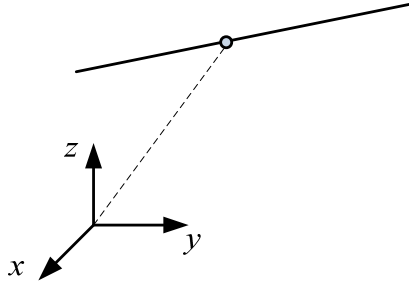


图 F-1 线矢量

线矢量完全可由两个矢量来确定。为此定义一个包含上述两个 3 维向量的 6 维向量，即

$$\mathcal{S} = \begin{pmatrix} \vec{s} \\ \vec{s}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{s} \\ \mathbf{r} \times \vec{s} \end{pmatrix} \quad (\text{F.1-2})$$

令  $\mathbf{s} = \vec{s} / \|\vec{s}\|$ ， $\mathbf{s}_0 = \mathbf{r} \times \mathbf{s}$ ，经过正则变换后，得到

$$\mathcal{S} = \|\vec{s}\| \begin{bmatrix} \mathbf{s} \\ \mathbf{s}_0 \end{bmatrix} \quad (\text{F.1-2})$$

再令  $\rho = \|\vec{s}\|$ ，则

$$\mathcal{S} = \rho \mathcal{S} \quad (\text{F.1-3})$$

式中， $\mathcal{S}$  为单位线矢量， $\rho$  表示该线矢量的幅值。因此，线矢量可以写成单位线矢量与幅值数乘的形式。用 Plücker 坐标表示

$$\mathcal{S} = (\mathcal{L}, \mathcal{M}, \mathcal{N}; \mathcal{P}, \mathcal{Q}, \mathcal{R}) \quad (\text{F.1-4})$$

由此可知， $\mathcal{L}^2 + \mathcal{M}^2 + \mathcal{N}^2 = \rho^2$ 。进一步定义

$$\mathcal{S} = (\mathbf{s}; \mathbf{s}_0) = (\mathbf{s}; \mathbf{r} \times \mathbf{s}) = (\mathcal{L}, \mathcal{M}, \mathcal{N}; \mathcal{P}, \mathcal{Q}, \mathcal{R}), \quad (\text{F.1-5a})$$

$$\text{或者} \quad \mathcal{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{s} \\ \mathbf{s}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{s} \\ \mathbf{r} \times \mathbf{s} \end{bmatrix} \quad (\text{F.1-5b})$$

式中， $\mathbf{s}$  — 表示线矢量轴线方向的单位矢量，可用三个方向余弦表示，即  $\mathbf{s} = (L, M, N)$ ，

$$L^2 + M^2 + N^2 = 1;$$

$\mathbf{s}_0$  — 称作线矢量的线矩，记为  $\mathbf{s}_0 = (P, Q, R)$ 。

其中 (F.1-5a) 是线矢量的 Plücker 坐标表示形式， $L, M, N, P, Q, R$  称为线矢量  $\mathcal{S}$  正则化的 Plücker 坐标；(F.1-5b) 是线矢量的向量表示形式。

很显然，由于单位线矢量满足归一化条件  $\mathbf{s} \cdot \mathbf{s} = 1$  和正交条件  $\mathbf{s} \cdot \mathbf{s}_0 = 0$ ，这样，它的 6 个 Plücker 坐标中只需要 4 个独立的参数来确定。不过，如果用 Plücker 坐标表示一个任意的三维空间线矢量，而不是单位线矢量，则需要 5 个独立的参数坐标。所增加的 1 个参数就是线矢量的幅值  $\rho$ 。

注意：矢量  $\mathbf{s}$  表示的是线矢量的方向，它与原点的位置无关；而线矩  $\mathbf{s}_0$  却与原点的位置选择有关。

**特例：**直线在距离原点无穷远的平面内。这时，矢量  $\mathbf{s}$  无方向，但线矩  $\mathbf{s}_0$  有方向。这时， $\mathbf{s}_0$  与原点的位置选择无关，这说明它已退化为自由矢量 (free vector) 或称之为偶量 (couple)。具体可写成如下形式

$$\mathcal{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{s} \end{bmatrix} \quad (\text{F.1-6})$$

## F.1.2 线矢量（偶量）所表达的物理意义

实际上，线矢量（偶量）可以表示运动学中的纯转动或者静力学中的纯力（或约束力）。而当线矢量退化成自由矢量后，可以表示运动学中的纯移动或者静力学中的纯力偶（或者约束力偶）。

### 1 刚体的瞬时转动和转动副

如图 F-2 所示，刚体绕某一个转动关节做瞬时转动。设  $\boldsymbol{\omega} (\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^3)$  是表示其旋转轴方向的单位矢量，角速度大小为  $\omega$ ， $\mathbf{r}$  为转轴上一点。我们知道，描述刚体在三维空间上绕某个轴的旋转运动只用一个角速度矢量是不够的，还需要给出点该转动轴线的空间位置。很显然，根据前面对线矢量的定义，可以很容易地给出表示该转动关节转轴的线矢量  $\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\omega}; \mathbf{v}_0)$ ，即

$$\boldsymbol{\omega} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega} \\ \mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix} \quad (\text{F.1-7})$$

其中，线矢量的第二项  $\boldsymbol{\omega} \mathbf{v}_0 = \boldsymbol{\omega} \mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega}$  表示刚体上与原点重合点的速度，也就是转动刚体在该重合点处的切向速度。因此当转轴通过坐标系原点时，表示该转轴的线矢量可以简化为  $\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\omega}; \mathbf{0})$ 。

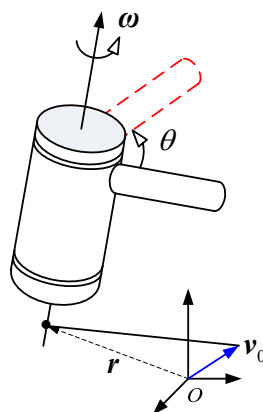


图 F-2 刚体的瞬时转动与转轴

## 2 刚体的瞬时移动和移动副

如图 F-3 所示的刚体做移动运动。设  $\mathbf{v}(\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3)$  是表示移动副导路中心线方向的单位矢量，速度大小为  $v$ 。我们知道，对于移动运动，刚体上所有点都有相同的移动速度，也就是说将速度方向平移并不改变刚体的运动状态，因而这里的  $\mathbf{v}$  是自由矢量。该自由矢量对应的 Plücker 坐标为  $\mathbf{v}(\mathbf{0}; \mathbf{v})$ 。另外，刚体移动可以看作是绕转动轴线位于与  $\mathbf{v}$  正交的无穷远平面内的一个瞬时转动。

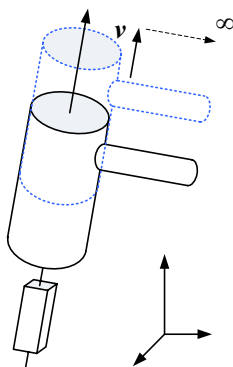


图 F-3 刚体的瞬时移动

## 3 刚体上的作用力（或者力约束）

与刚体瞬时转动的表示相类似，作用在刚体上的纯力或者施加在刚体上的纯力约束也可以用线矢量来表示。

如图 F-4 所示，某刚体作用一纯力或力约束。设  $\mathbf{f}(\mathbf{f} \in \mathbb{R}^3)$  是表示该力作用线方向的单位矢量，大小为  $f$ ， $\mathbf{c}$  为作用线上一点。同样清楚描述该力只用一个方向矢量是不够的，还需要给点该作用线的空间位置。很显然，根据前面对线矢量的定义，可以很容易地给出表示该力作用线的线矢量  $\mathbf{f}(\mathbf{f}; \boldsymbol{\tau}_0)$ ，即

$$\mathbf{f} \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{c} \times \mathbf{f} \end{bmatrix} \quad (\text{F.1-8})$$

其中，线矢量的第二项  $\mathbf{f}\boldsymbol{\tau}_0 = \mathbf{f}\mathbf{c} \times \mathbf{f}$  表示力对原点的力矩。当该力通过坐标系原点时，该线矢量可以简化为  $\mathbf{f}(\mathbf{f}; \mathbf{0})$ 。

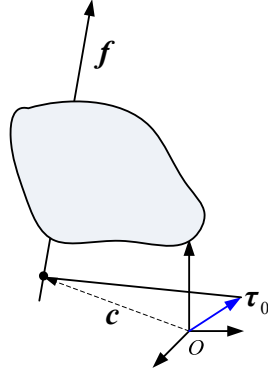


图 F-4 刚体受纯力（或者约束力）的作用

#### 4 刚体上作用的力偶（或者约束力偶）

如图 F-5 所示的刚体受到纯力偶的作用。设  $\tau (\tau \in \mathbb{R}^3)$  是表示力偶平面法线方向的单位矢量，力偶大小为  $\tau$ 。实际上，力偶也是一个自由矢量，即将力偶在其所在平面内平移并不改变它对刚体的作用效果。该自由矢量对应的 Plücker 坐标为  $\tau(\mathbf{0}; \tau)$ 。另外，（约束）力偶也可以看作是一个作用在刚体上的“无限小的力”对原点的矩，该力的作用线与  $\tau$  正交，并位于无穷远的平面上。

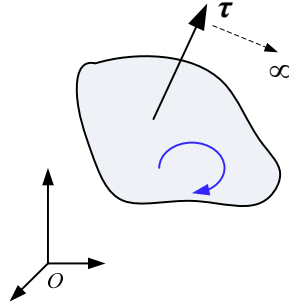


图 F-5 刚体受力偶（或者约束力偶）的作用

#### F.1.3 旋量的定义

我们知道，点、直线和平面是描述欧氏几何空间的三种基本元素，而旋量 (screw quantity 或 screw，有些书也称为螺旋)，作为另外一种几何元素，是由直线引申而来的。根据 Ball 的定义，“旋量是一条具有节距的直线”。简单而言，可直观地视之为一个机械螺旋。

【定义】 设  $s$  与  $s^0$  为三维空间的两个单位矢量，且满足迁移公式  $s^{02} = s^{01} + (r_2 - r_1) \times s$ ，则  $s$  与  $s^0$  共同构成一个单位旋量，记作

$$\mathcal{S} = (s; s^0) = (s; s_0 + hs) = (s; r \times s + hs) = (L, M, N; P^*, Q^*, R^*), \quad (\text{F.1-9a})$$

$$\text{或者} \quad \mathcal{S} = \begin{bmatrix} s \\ s^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ r \times s + hs \end{bmatrix} \quad (\text{F.1-9b})$$

式中， $s$ — 表示旋量轴线方向的单位矢量，可用三个方向余弦表示，即  $s = (L, M, N)$ ， $L^2 + M^2 + N^2 = 1$ ；

$R$ — 旋量轴线上的任意一点（可以看出： $r$  用  $\mathcal{S}$  上其他点  $r' (r' = r + \lambda s)$  代替时，式 (6.1a) 得到相同的结果，即  $r$  在  $\mathcal{S}$  上可以任意选定）；

$s^0$ — 旋量的对偶部矢量， $s^0 = (P^*, Q^*, R^*) = (P + hL, Q + hM, R + hN)$ 。

$$h \text{— 节距 (pitch), } h = \frac{\mathbf{s} \cdot \mathbf{s}^0}{\mathbf{s} \cdot \mathbf{s}} = LP^* + MQ^* + NR^*。$$

其中 (F.1-9a) 是旋量的 Plücker 坐标表示形式,  $L, M, N, P^*, Q^*, R^*$  称为  $\$$  的正则化 Plücker 坐标; (F.1-9b) 是旋量的向量表示形式, 其中称为  $\mathbf{s}$  原部矢量, 线矩  $\mathbf{s}^0$  称为对偶部矢量。当节距  $h$  为零 (即  $\mathbf{s} \cdot \mathbf{s}^0 = 0$ ) 时, 单位旋量就退化为单位线矢量 (unitary line vector)。记作

$$\$ = \begin{bmatrix} \mathbf{s} \\ s_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{s} \\ \mathbf{r} \times \mathbf{s} \end{bmatrix} \quad (\text{F.1-10})$$

当原部矢量  $\mathbf{s}$  为零时, 单位旋量就退化为单位偶量 (unitary couple), 记作

$$\$ = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{s} \end{bmatrix} \quad (\text{F.1-11})$$

很显然, 由于单位旋量满足  $\mathbf{s} \cdot \mathbf{s} = 1$  (归一化条件), 这样, 6 个 Plücker 坐标中需要 5 个独立的参数来确定。不过, 如果用 Plücker 坐标表示一个任意的旋量, 而不是单位旋量, 则需要 6 个独立的参数坐标。

定义

$$\$ = (\mathcal{L}, \mathcal{M}, \mathcal{N}; \mathcal{P}^*, \mathcal{Q}^*, \mathcal{R}^*) = (\vec{s}; \vec{s}^0) \quad (\text{F.1-12})$$

且

$$\$ = \rho \$ \quad (\text{F.1-13})$$

其中,  $\rho$  表示旋量的大小。

与单位线矢量一样, 单位旋量中旋量的方向  $\mathbf{s}$  与原点的位置选择无关; 而  $\mathbf{s}^0$  与原点的位置有关。同样可以证明旋量的节距  $h$  也是原点不变量。

我们知道, 线矢量在空间对应着一条确定的直线; 同样, 旋量在空间也可对应有一条确定的轴线。为此可以将  $\mathbf{s}^0$  分解成平行和垂直于  $\mathbf{s}$  的两个分量  $h\mathbf{s}$  和  $\mathbf{s}^0 - h\mathbf{s}$ , 这样可以得到旋量的轴线方程:

$$\mathbf{r} \times \mathbf{s} = \mathbf{s}^0 - h\mathbf{s} \quad (\text{F.1-14})$$

由式 (F.1-9a) 可知, 1 个旋量可以分解成

$$\$ = (\mathbf{s}; \mathbf{s}^0) = (\mathbf{s}; \mathbf{s}^0 - h\mathbf{s}) + (\mathbf{0}; h\mathbf{s}) = (\mathbf{s}; \mathbf{s}_0) + (\mathbf{0}; h\mathbf{s}) \quad (\text{F.1-15})$$

式 (F.1-15) 表明线矢量与偶量可以组成一个旋量, 而旋量可以看作是由线矢量和偶量同轴叠加而成。由此, 可以得到线矢量的另外一种表达形式

$$\$ = (\mathcal{L}, \mathcal{M}, \mathcal{N}; \mathcal{P}^* - h\mathcal{L}, \mathcal{Q}^* - h\mathcal{M}, \mathcal{R}^* - h\mathcal{N}) \quad (\text{F.1-16})$$

根据线矢量中原部矢量与对偶部矢量相互正交的特性, 可以得到旋量  $\$$  所对应的节距

$$h = \frac{\mathcal{L}\mathcal{P}^* + \mathcal{M}\mathcal{Q}^* + \mathcal{N}\mathcal{R}^*}{\mathcal{L}^2 + \mathcal{M}^2 + \mathcal{N}^2} \quad (\text{F.1-17})$$

**【例 F-1】** 求旋量  $\$ = (1, 0, 0; 1, 0, 1)$  的轴线与节距。

**解:** 首先根据式 (F.1-17) 计算旋量的节距

$$h = \frac{LP^* + MQ^* + NR^*}{L^2 + M^2 + N^2} = 1$$

轴线方程由式 (F.1-14) 求得:

$$\mathbf{r} \times \mathbf{s} = \mathbf{s}^0 - h\mathbf{s} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T$$

## F.1.4 旋量 (线矢量) 的运算与性质

### ■ 旋量的加法

**【定义】** 两旋量  $\$, \$_2$  的代数和 ( $\$ = \$_1 + \$_2$ ) 仍为旋量,  $\$$  的原部矢量和对偶部矢量

分别是 $\mathcal{S}_1$ ,  $\mathcal{S}_2$ 原部矢量和对偶部矢量之和。

$$\mathcal{S}_\Sigma = \mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2 = (\vec{s}_1 + \vec{s}_2) + \epsilon(\vec{s}^{01} + \vec{s}^{02}) \quad (\text{F.1-18})$$

旋量的加法满足交换律与结合律。

**【定理】** 若两单位线矢量 $\mathcal{S}_1$ ,  $\mathcal{S}_2$ 共面, 且两原部矢量之和非零 ( $\mathcal{S}_\Sigma = \mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2 \neq \mathbf{0}$ ) 时, 则两单位线矢量的代数和 ( $\mathcal{S}_\Sigma = \mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2$ ) 仍为线矢量,  $\mathcal{S}_\Sigma$  过两线矢量的交点 (满足平行四边形法则, 图 F-6 所示)。

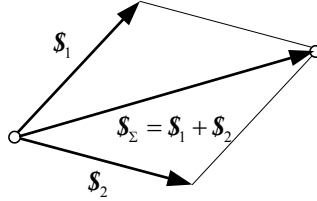


图 F-6 两线矢量的代数和满足平行四边形法则

由于在射影几何 (projective geometry) 中, 可将平面平行看作平面汇交的一种特例 (交于无穷远点), 如图 F-7b 所示。因而可以得到如下的推论。

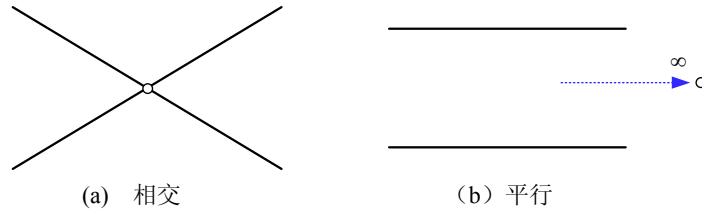


图 F-7 线矢量共面的两种情况, 而平行可以看作是相交的一种特例

**【推论】** 若两单位线矢量 $\mathcal{S}_1$ ,  $\mathcal{S}_2$ 平行, 且两原部矢量之和非零 ( $\mathcal{S}_\Sigma = \mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2 \neq \mathbf{0}$ ) 时, 则两单位线矢量的代数和 ( $\mathcal{S}_\Sigma = \mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2$ ) 仍为线矢量,  $\mathcal{S}_\Sigma$  与两线矢量平行。

## ■ 旋量的数乘

**【定义】** 设有旋量 $\mathcal{S}$ 和纯数 $\rho$ , 则旋量的数乘为

$$\rho\mathcal{S} = \rho\vec{s} + \epsilon\rho\vec{s}^0 \quad (\text{F.1-19})$$

## ■ 旋量的互易积

**【定义】** 两旋量的互易积 (reciprocal product) 是指将两旋量 $\mathcal{S}_1$ ,  $\mathcal{S}_2$  的原部矢量与对偶矢量交换后作点积之和, 即

$$\mathcal{S}_1 \circ \mathcal{S}_2 = \vec{s}_1 \cdot \vec{s}^{02} + \vec{s}_2 \cdot \vec{s}^{01} = \mathcal{L}_1\mathcal{P}_2^* + \mathcal{M}_1\mathcal{Q}_2^* + \mathcal{N}_1\mathcal{R}_2^* + \mathcal{L}_2\mathcal{P}_1^* + \mathcal{M}_2\mathcal{Q}_1^* + \mathcal{N}_2\mathcal{R}_1^* \quad (\text{F.1-20})$$

考虑到 $\mathcal{S}_1 = (\vec{s}_1; \vec{s}^{01}) = \rho(s_1; s^{01})$ ,  $\mathcal{S}_2 = (\vec{s}_2; \vec{s}^{02}) = \rho(s_2; s^{02})$ , 因此

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_1 \circ \mathcal{S}_2 &= \vec{s}_1 \cdot \vec{s}^{02} + \vec{s}_2 \cdot \vec{s}^{01} \\ &= \rho_1\rho_2 s_1 \cdot (r_2 \times s_2 + h_2 s_2) + \rho_1\rho_2 s_2 \cdot (r_1 \times s_1 + h_1 s_1) \\ &= \rho_1\rho_2 (h_1 + h_2)(s_1 \cdot s_2) + \rho_1\rho_2 (r_2 - r_1) \cdot (s_2 \times s_1) \\ &= \rho_1\rho_2 [(h_1 + h_2) \cos \alpha_{12} - a_{12} \sin \alpha_{12}] \end{aligned} \quad (\text{F.1-21})$$

如果 $h_1 = h_2 = 0$ , 则旋量退化成线矢量, 式 (F.1-21) 变成了两条直线的互矩 (mutual moment), 如图 F-8 所示。

$$\mathcal{S}_1 \circ \mathcal{S}_2 = s_1 s_{02} + s_2 s_{01} = -a_{12} \sin \alpha_{12} \quad (\text{F.1-22})$$

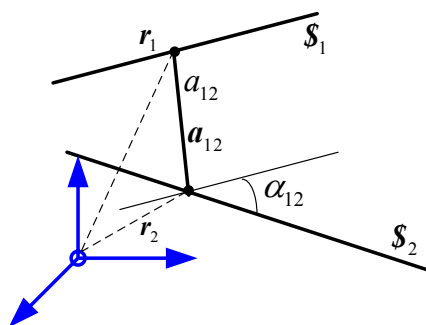


图 F-8 两线矢量的互矩

■ **旋量空间是一个线性空间。**

由线性代数的知识可知，一个向量集合构成线性空间的充要条件是该向量集合对于向量加法及数乘运算是封闭的，即对于任意的标量  $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$  和集合  $\mathcal{S}$  的任何元素  $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2 \in \mathcal{S}$ ，线性组合

$$\mathcal{S} = \mu_1 \mathcal{S}_1 + \mu_2 \mathcal{S}_2 \in \mathcal{S} \quad (\text{F.1-23})$$

【定义】 对于由旋量组成的集合而言，如果全体旋量都满足式 (F.1-23)，则这些旋量构成线性的向量空间  $\mathbb{R}^6$ ，称之为**旋量空间** (screw space)。

不过并不是所有的旋量集合都能构成旋量空间，这与我们所学的向量空间有所不同。例如某些特殊的旋量集合就不能构成旋量空间。

## F.2 运动旋量、力旋量和反旋量

### F.2.1 运动旋量和力旋量

旋量可以表示运动学中的一般刚体运动（即螺旋运动）或者静力学中的广义力（包含力合力偶）。前者称为**运动旋量** (twist)，后者称为**力旋量** (wrench)。

Chasles 证明了任何物体从一个位形到另一个位形的刚体运动都可以用绕某直线的转动和沿该直线的移动复合实现。通常将这种复合运动称为**螺旋运动** (screw motion)，而螺旋运动的无穷小量就是运动旋量，从而将旋量与螺旋运动紧密结合起来。另一方面，Poinsot 发现作用在刚体上的任何力系都可以合成为一个由沿某直线的集中力与绕该直线轴的力矩组成的广义力，这一广义力称为力旋量。这些都成为了旋量理论的起源。19 世纪末，英国剑桥大学的 Ball 教授首先对旋量理论进行了系统的研究，并于 1900 年完成了经典著作《A Treatise on the Theory of Screws》。书中指出运动旋量与力旋量即旋量与反旋量之间存在着**互易性** (reciprocity)。

如图 F-9 所示，刚体螺旋运动可以认为是绕某旋转轴的匀速转动与沿此轴的等速移动的合成运动。若将坐标原点取在轴线上，则刚体运动后的位形可表示为

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{R}\mathbf{p}(0) + \mathbf{t} \quad (\text{F.2-1})$$

若用  $\boldsymbol{\omega} (\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^3)$  表示旋转轴（其模表示角速度的值）， $h$  为节距，则由本书第二章可知， $\mathbf{R} = e^{\hat{\boldsymbol{\omega}} t}$ ， $\mathbf{t} = h\boldsymbol{\omega} t$ ，因此

$$\mathbf{p}(t) = e^{\hat{\boldsymbol{\omega}} t} \mathbf{p}(0) + h\boldsymbol{\omega} t \quad (\text{F.2-2})$$

对上式求导，可得刚体上任一点的瞬时线速度

$$\mathbf{v}(\mathbf{p}) = \mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega} + \mathbf{v}_0 = \mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega} + h\boldsymbol{\omega} \quad (\text{F.2-3})$$

式中， $\mathbf{v}_0, \boldsymbol{\omega}$  为旋转轴线上一点的瞬时线速度和瞬时角速度。

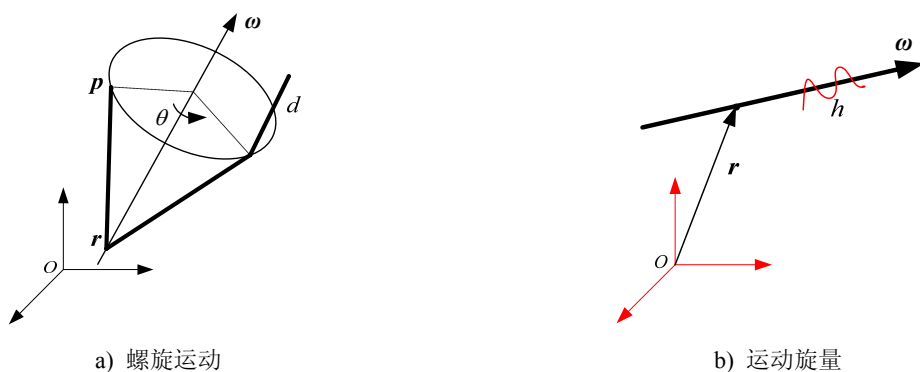


图 F-9 螺旋运动与运动旋量

这样  $\mathbf{v}, \boldsymbol{\omega}$  构成了一个运动旋量。

$$\xi = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega} \\ \mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega} + h\boldsymbol{\omega} \end{bmatrix} \quad (\text{F.2-4})$$

写成 Plücker 坐标为  $\xi = (\boldsymbol{\omega}; \mathbf{v})$ 。

可以将旋转运动看作是螺旋运动的特例。这时，还可以得到  $\xi = (\boldsymbol{\omega}; \mathbf{v})$  与旋转轴线 Plücker 坐标  $\mathcal{S} = (\mathbf{s}; \mathbf{s}_0)$  的关系。

$$\mathcal{S} = (\mathbf{s}; \mathbf{s}_0) = (\boldsymbol{\omega}; \mathbf{v} - h\boldsymbol{\omega}) \quad (\text{F.2-5})$$

【例 F-2】：已知某一刚体的角速度为  $\boldsymbol{\omega}$ ，其上一一点  $P$  的线速度为  $\mathbf{v}_P$ ，试描述该刚体运动。

解：根据 Chasles 定理，刚体运动也是螺旋运动，因此可以用螺旋运动描述该刚体运动。

为此，选择点  $P$  为坐标原点， $\mathbf{v}_P$  即为刚体在原点处的线速度，这时螺旋运动所对应的运动旋量坐标为  $\xi = (\boldsymbol{\omega}; \mathbf{v}_P)$ 。根据式 (F.1-17) 可得该旋量的节距

$$h = \frac{\mathbf{v}_P \cdot \boldsymbol{\omega}}{\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}}$$

该旋量的轴线方程可由式 (F.2-5) 得到。

$$\mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega} = (\mathbf{v}_P - h\boldsymbol{\omega})$$

类似的方法可以得到力旋量的表达。

相对于某一参考坐标系，作用在刚体上的广义力包括移动分量  $\mathbf{f}$  (纯力) 和作用在一点的转动分量  $\boldsymbol{\tau}$  (纯力矩)，可用一个 6 维向量 (双矢量) 即旋量坐标来表示

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \boldsymbol{\tau} \end{bmatrix} \quad (\text{F.2-6})$$

或者用 Plücker 坐标表示， $\mathbf{F} = (\mathbf{f}; \boldsymbol{\tau})$ 。

式中， $\mathbf{f}, \boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^3$ 。通常将力与力矩组合而成的 6 维向量称为力旋量。其中力 (force) 和力偶 (couple) 是两种特殊的力旋量。

表 F-1 中总结出了几种常见物理量的旋量坐标。

表 F-1 各种物理量的旋量坐标比较

类别	节距特点	运动学	静力学	通用表达式
线矢量	$h = 0$	角速度 $(\boldsymbol{\omega}; \mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega})$	力 $(\mathbf{f}; \mathbf{r} \times \mathbf{f})$	$(\mathbf{s}; \mathbf{r} \times \mathbf{s})$ 或者 $(\mathbf{s}; \mathbf{s}_0)$
偶量	$h = \infty$	线速度 $(\mathbf{0}; \mathbf{v})$	力偶 $(\mathbf{0}; \boldsymbol{\tau})$	$(\mathbf{0}; \mathbf{s})$
旋量	$h$ 为有限值	螺旋速度 $(\boldsymbol{\omega}; \mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega} + h\boldsymbol{\omega})$ 或者 $(\boldsymbol{\omega}; \mathbf{v})$	力旋量 $(\mathbf{f}; \mathbf{r} \times \mathbf{f} + h\mathbf{f})$ 或者 $(\mathbf{f}; \boldsymbol{\tau})$	$(\mathbf{s}; \mathbf{r} \times \mathbf{s} + h\mathbf{s})$ 或者 $(\mathbf{s}; \mathbf{s}^0)$



为突出运动旋量（或力旋量）的物理意义，表示运动旋量（或力旋量）时使用的符号与一般旋量的坐标表示符号不太一致。运动旋量中，单位转轴矢量的符号一般用  $\omega$ ，单位运动旋量的坐标通常用  $\xi = (\omega; \nu)$  表示；力旋量中，单位转轴矢量的符号一般用  $f$ ，单位运动旋量的坐标通常用  $F = (f; \tau)$  表示；而在一般旋量中经常用  $s$  表示单位转轴，对应的旋量坐标通常采用  $\mathcal{S} = (s; s^0)$ 。

## F.2.2 反旋量

反旋量的概念最初是 Ball 提出来的，它从运动旋量与力旋量引申而来，习惯上主要表征力旋量。而从物理意义上讲是一种**约束力旋量**，可表示物体在三维空间内受到的约束。

通常反旋量可用运动旋量与力旋量的瞬时功率来定义。

如图 F-10 所示，一个刚体只允许沿单位旋量  $\mathcal{S}_1 = (s_1; s^{01}) = (s_1; r_1 \times s_1 + h_1 s_1)$  作螺旋运动，相对应的单位运动旋量的坐标为  $\xi = (\omega_1; \nu_1) = (\omega_1; r_1 \times \omega_1 + h_1 \omega_1)$ 。设想在其上沿单位旋量  $\mathcal{S}_2 = (s_2; s^{02}) = (s_2; r_2 \times s_2 + h_2 s_2)$  方向作用一个单位力旋量  $F = (f_2; \tau_2) = (f_2; r_2 \times f_2 + h_2 f_2)$ 。

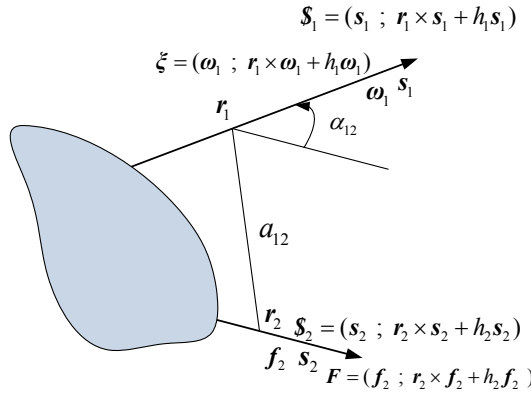


图 F-10 反旋量的概念

不失一般性，假定点  $r_1$ 、 $r_2$  分别位于距离最近的两轴线上，因此  $r_2$  可改写成  $r_2 = r_1 + a_{12}n$ ，其中  $n$  是垂直于两轴线的单位向量。这时， $\xi$  与  $F$  的瞬时功率为

$$\begin{aligned}
 P_{12} &= F \circ \xi \\
 &= f_2 \cdot \nu_1 + \tau_2 \cdot \omega_1 \\
 &= f_2 \cdot (r_1 \times \omega_1 + h_1 \omega_1) + \omega_1 \cdot (r_2 \times f_2 + h_2 f_2) \\
 &= (h_1 + h_2)(\omega_1 \cdot f_2) + (r_2 - r_1) \cdot (f_2 \times \omega_1) \\
 &= (h_1 + h_2) \cos \alpha_{12} - a_{12} \sin \alpha_{12}
 \end{aligned} \tag{F.2-7}$$

而根据本章第一节所给出的两旋量互易积的定义，可得

$$\begin{aligned}
 \mathcal{S}_1 \circ \mathcal{S}_2 &= s_1 \cdot s^{02} + s_2 \cdot s^{01} \\
 &= s_1 \cdot (r_2 \times s_2 + h_2 s_2) + s_2 \cdot (r_1 \times s_1 + h_1 s_1) \\
 &= (h_1 + h_2)(s_1 \cdot s_2) + (r_2 - r_1) \cdot (s_2 \times s_1) \\
 &= (h_1 + h_2) \cos \alpha_{12} - a_{12} \sin \alpha_{12}
 \end{aligned} \tag{F.2-8}$$

对比式 (F.2-7) 与式 (F.2-8)，结果完全相同，则表明力旋量  $F$  与运动旋量  $\xi$  的互易积正是这两个旋量产生的瞬时功率。

因此，如果  $\mathcal{S}_1$ 、 $\mathcal{S}_2$  的互易积为零，则意味着力旋量与运动旋量的瞬时功率为零。这种情况下，无论该力旋量中力或力矩有多大，都不会对刚体做功，也不能改变该约束作用下刚体

的运动状态。由此称与  $\zeta$  构成互易积为零的力旋量  $F$  为  $\zeta$  的**反旋量** (reciprocal screw)，反之亦然。一般情况下反旋量用  $\mathcal{S}^r$  表示，单位反旋量用  $\mathcal{S}^r$  表示。

由式 (F.2-8) 可知，旋量  $\mathcal{S}$  与反旋量  $\mathcal{S}^r$  互易，满足如下关系式：

$$(h + h_r) \cos \alpha_{12} - a_{12} \sin \alpha_{12} = 0 \quad (\text{F.2-9})$$

或

$$\mathcal{S} \circ \mathcal{S}^r = \mathcal{L}\mathcal{P}_r^* + \mathcal{M}\mathcal{Q}_r^* + \mathcal{N}\mathcal{R}_r^* + \mathcal{L}_r\mathcal{P}^* + \mathcal{M}_r\mathcal{Q}^* + \mathcal{N}_r\mathcal{R}^* = 0 \quad (\text{F.2-10})$$

【定理】 两个旋量  $\mathcal{S}$ ， $\mathcal{S}^r$  互为反旋量的充要条件是二者的互易积为零，即

$$\mathcal{S} \circ \mathcal{S}^r = \vec{s} \cdot \vec{s}_r^0 + \vec{s}_r \cdot \vec{s}^0 = \mathcal{L}\mathcal{P}_r^* + \mathcal{M}\mathcal{Q}_r^* + \mathcal{N}\mathcal{R}_r^* + \mathcal{L}_r\mathcal{P}^* + \mathcal{M}_r\mathcal{Q}^* + \mathcal{N}_r\mathcal{R}^* = 0 \quad (\text{F.2-11})$$

反旋量具有如下特性：

### 1. 反旋量具有互易性

从上面的分析过程可知，当力旋量沿轴线  $\mathcal{S}_1$  作用时，该力旋量不能使该物体产生沿轴线  $\mathcal{S}_2$  的螺旋运动，这就是反旋量的互易性。当  $\mathcal{S}_1$  是  $\mathcal{S}_2$  的反旋量时， $\mathcal{S}_2$  也是  $\mathcal{S}_1$  的反旋量。

如果  $\mathcal{S}_1$  与自身具有互易性，则称  $\mathcal{S}_1$  为**自互易旋量** (self-reciprocal screw)。

不过尽管反旋量具有互易性，但习惯上反旋量通常是指约束力旋量。

### 2. 旋量的互易性是原点不变量

从式 (F.2-9) 还可以看出两个旋量的互易性只与这两个旋量自身的参数 (Plücker 坐标) 有关，与原点的位置无关，即与坐标系的选择无关。

### 3. 特殊几何条件下的互易旋量对

- 若旋量  $\mathcal{S}_1$  与反旋量  $\mathcal{S}_2$  的轴线相交不垂直

这时公法线为零，即  $a_{12} = 0$ ，则式 (F.2-9) 简化为

$$(h_1 + h_2) \cos \alpha_{12} = 0 \quad (\text{F.2-12})$$

由于  $\cos \alpha_{12} \neq 0$ ，因而

$$h_1 = -h_2 \quad (\text{F.2-13})$$

这是两个轴线相交但不垂直的旋量互易时应满足的几何条件。

- 旋量  $\mathcal{S}_1$  与反旋量  $\mathcal{S}_2$  的轴线垂直相交

由于  $a_{12} = 0$ ， $\cos \alpha_{12} = 0$ ，满足式 (F.2-9)，因而无论节距取何值，两个旋量都互易。

这表明与运动旋量垂直相交的力旋量，无论节距多大都无法改变刚体的运动状态。

- 旋量  $\mathcal{S}_1$  与反旋量  $\mathcal{S}_2$  轴线相交，且其中之一的节距为零 ( $h_1 = 0$  或  $h_2 = 0$ )

要满足互易的条件，可导出另外一个旋量的节距也为零。这时，两旋量退化成线矢量。共面的两个线矢量互易，而线矢量与其自身互易。

- 考虑纯移动情况：当物体受到约束，仅能沿  $\mathbf{v}_2$  方向移动，速度为  $\mathbf{v}_2(\mathbf{0}; \mathbf{v}_2)$ ，作用在物体上的力旋量为  $\mathbf{f}_1(\mathbf{f}_1; \boldsymbol{\tau}_1)$ ，所引起的瞬时功率为

$$P_{12} = \mathbf{f}_1 \mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_2 = \mathbf{f}_1 \mathbf{v}_2 \mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = \mathbf{f}_1 \mathbf{v}_2 \cos \alpha_{12} \quad (\text{F.2-14})$$

因此，除非运动旋量与力旋量的轴线相互垂直，或者力旋量退化成一个纯力偶，有限节距或零节距的力旋量都能对物体做功，进而改变物体的运动状态。

为此，由以上分析并根据互易旋量的定义可以得到以下几点结论：

- (1) 2 个线矢量互易的充要条件是共面；
- (2) 2 个偶量必然互易；
- (3) 1 个线矢量与 1 个偶量只有当相互垂直时才互易；
- (4) 线矢量与偶量都具有自互易性；
- (5) 任何垂直相交的 2 个旋量必然互易，且与其节距大小无关。

## F.3 线系与线空间

### F.3.1 线集与线系

【定义】 由  $n$  个单位线矢量  $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \dots, \mathbf{s}_n$  的任意线性组合所构成的向量空间称为**线集**，可记为  $\mathbf{S} = \{\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \dots, \mathbf{s}_n\}$ 。

【定义】 在线集  $\mathbf{S}$  中，若存在一组线性无关的单位线矢量  $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \dots, \mathbf{s}_r$ ，且  $\mathbf{S}$  中所有线矢量都是这些  $r$  个线矢量的线性组合，则称该  $r$  个线矢量为线集  $\mathbf{S}$  的一组基即组成所谓的**线系**  $\mathbf{S}$ ， $r$  称为该线系的阶数或维数。或者称为该**线集（系）的秩**，记作  $r = \text{rank}(\mathbf{S})$ 。例如如下的线集中由三个线性无关的单位线矢量组成，因此它们组成了一个秩为 3 的线系。

$$\begin{cases} \mathbf{s}_1 = (1, 0, 0 ; 0, 0, 0) \\ \mathbf{s}_2 = (0, 1, 0 ; 0, 0, 0) \\ \mathbf{s}_3 = (0, 0, 1 ; 0, 0, 0) \end{cases} \quad (\text{F.3-1})$$

由  $n$  个线性无关的单位线矢量可以组成许多种具有不同几何特性的线系。由此可以根据其所具有的几何特性将线系进行分类研究。注意这里的  $n$  取值为 1~6 而不是更多，源于这些线系具有很强的物理意义。实际上法国数学家 Grassmann 在十九世纪的时候就研究了其中典型线系的几何特性，后人称之为 Grassmann 线几何。

如表 F-2 所示，Merlet 所给的 Grassmann 线几何包括以下内容：

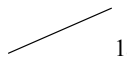
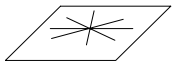
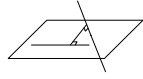
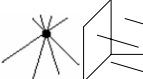
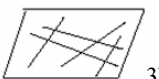




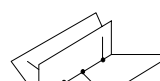
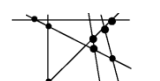


由 1 个线矢量所组成的线系空间其维数为 1。

线系空间维数为 2 时包括两种情况：① 平面汇交于一点的任意多个线矢量（共面平行可以看作相交平面无穷远点）组成**平面线列**（line pencil），但其中只用两个线矢量线性无关。② 异面（空间交错）的两个线矢量。

线系空间维数为 3 时包括四种情况：① 空间汇交于一点的任意多个线矢量（空间平行可以看作相交空间无穷远点）组成空间共点**线束**（line bundle），但其中只有三个线矢量线性无关。② 共面的任意多个线矢量组成共面**线域**（line field），其中也只有三个线矢量线性无关。③ 汇交点在两平面交线上的两个平面线列，其中也只有三个线矢量线性无关。④ 空间既不平行也不相交的 3 个线矢量组成**二次线列**（regulus），它们线性无关。后面将详细介绍这种二次线列的几何特性。

线系空间维数为 4 时包括四种情况：① 由空间既不平行也不相交的 4 个线矢量组成，它们线性无关。② 由共点及共面两组线束组成，且汇交点在平面上，其中只有 4 个线矢量线性无关。③ 由有 1 条公共交线的 3 个平面线列组成。这种情况下，有 4 个线矢量线性无关。④ 能同时与另两个线矢量相交的 4 个线矢量，它们线性无关。

表 F-2 Grassmann 线几何<sup>[34]</sup>

秩	线系种类
1	 1a
2	<div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="text-align: center;">             2a            平面线列 (平面汇交或共面平行)         </div> <div style="text-align: center;">             2b            异面 (空间交错) 的两个线矢量         </div> </div>
3	<div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="text-align: center;">             3a            空间共点线束 (包括平行)         </div> <div style="text-align: center;">             3b            共面         </div> <div style="text-align: center;">             3c            两平面汇交线束         </div> <div style="text-align: center;">             3d            二次线列         </div> </div>
4	<div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="text-align: center;">             4a            空间不平行不相交的 4 条直线         </div> <div style="text-align: center;">             4b            共面共点         </div> <div style="text-align: center;">             4c            交 1 条公共直线, 且交角一定         </div> <div style="text-align: center;">             4d            交 2 条公共直线         </div> </div>
5	<div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="text-align: center;">             5a            交 1 条公共直线         </div> <div style="text-align: center;">             5b            非奇异线丛         </div> </div>

线系空间维数为 5 时称为**线丛** (line complex), 它包括 2 种情况: ① 由空间既不平行也不相交的 5 个线矢量组成一般线性丛, 也称非奇异线丛。这 5 条直线线性无关。② 当所有线矢量同时与一条直线相交时构成特殊线性丛或称奇异线丛, 这时只有 5 个线矢量线性无关。

以上给出了一些典型线系的同时也给出了其维数 (秩)。实际上, 对于复杂的线系而言, 其维数的确定并非是一件容易的事情。而维数对认识线系而言是最为基本的事情。那么如何来准确地确定其维数呢?

**【定义】** 设有由  $n$  个单位线矢量  $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \dots, \mathbf{s}_n$  组成的线集  $\{\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \dots, \mathbf{s}_n\}$ , 若存在不全为零的数  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , 使得  $\sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{s}_i = \mathbf{0}$ , 则该线集线性相关; 否则, 该线集线性无关, 并构成一个线系。设线集中各个线矢量的 Plücker 坐标为  $(L_i, M_i, N_i; P_i^*, Q_i^*, R_i^*)$ , 则该线集的线性相关性可用下列矩阵  $A$  的秩来判定。

$$A = \begin{bmatrix} L_1 & M_1 & N_1 & P_1^* & Q_1^* & R_1^* \\ L_2 & M_2 & N_2 & P_2^* & Q_2^* & R_2^* \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ L_n & M_n & N_n & P_n^* & Q_n^* & R_n^* \end{bmatrix} \quad (\text{F.3-2})$$

在原坐标系下为线性相关的线集, 在新坐标系下仍保持线性相关。容易证明本问题的对称命题, 即在原坐标系下为线性无关的线集, 在新坐标系下仍保持线性无关。所以, **线集的线性相关性与坐标系的选择无关**。这使得在下面的分析中, 可以选取最方便的坐标系, 从而可以最大程度地将线矢量表达式简化。例如, 尽量使线集中各线矢量的 Plücker 坐标中出现更多 1 和 0 元素。

我们再讨论一下线系线性无关特性的应用。即根据“**线集的线性相关性与坐标系的选择无关**”的特性来讨论三维空间中由若干线矢量组成的线集在不同几何条件下的维数 (或者最大线性无关组的维数), 即所生成的线系情况。考虑到三维空间内全部由线矢量组成的线系其维数最大为 6。但在一些特殊几何条件下, 其维数会退化, 即满足维数公式

$$\dim(\mathcal{S}) = \text{rank} \begin{pmatrix} L_1 & M_1 & N_1 & P_1 & Q_1 & R_1 \\ L_2 & M_2 & N_2 & P_2 & Q_2 & R_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \quad (\text{F.3-3})$$

那么，隐藏在线集无关性背后的物理意义是什么呢？这里先简单提及一下。前面我们知道，线矢量可以表达约束力。如果一个刚体受到空间共点力的约束，这就意味着非共面的 3 个共点力就足够实现预期的约束，任何多余的共点力都是**冗余约束**（redundant constraint）或者虚约束，即增加的约束不会改变对刚体的约束效果。反之，如果多余的约束满足不了共点的几何条件，则这些多余的约束就变成了真正的约束，原有的约束状态发生改变。

下面再对完全由偶量所组成的偶量集的线性相关性问题予以讨论。

为形象地反映偶量集的线性相关性（表 F-3），这里以约束力偶为例：

（1）无论是空间平行还是共面平行其  $\mathbf{s}$  是相同的，其实质上都是限制一个方向的转动，所以最大线性无关数是 1。

（2）无论是平面汇交还是在一个平面上两两相交，其实质上都是限制两个方向上的转动，所以最大线性无关数是 2。

（3）在空间汇交的情况下 3 个力偶实质上限制 3 个方向的转动，所以最大线性无关数是 3。

空间刚体无论受到几个力偶作用，最后都可以得出上述结论。因而，完全由偶量组成的线系其最大维数是 3 而不是 6。

**表 F-3** 偶量集的线性相关性

各偶量满足的几何条件	最大线性无关数	所代表的物理意义
共轴或平行	1	沿偶量轴线方向的移动或者限制偶量轴线方向的转动
共面（含平面汇交或两两相交）	2	所有沿与两偶量轴线所在平面（或平行平面）的移动或者限制与偶量轴线方向平行平面的所有转动
非共面（如空间汇交）	3	空间的所有三维移动或者限制空间的所有三维转动

### F.3.2 线空间与偶量空间的分类及其可视化表征

由于线矢量的 Plücker 坐标只有 6 维，因而由它们组成的线系的最高维数为 6。根据线系的阶数可将线系分为一、二、三、四、五、六阶线系。而根据线系的定义，线系构成**向量空间**（vector space）；而在满足某些特殊的条件下，又可以构成**线矢量空间**（简称**线空间**，line space）。

**【定义】** **线空间**是指由满足特定条件（几何或者物理条件）的一系列线矢量所组成的集合（线集），是具有确定维数的特殊线系。

实际上我们在上一节中已经提到了若干种线空间：如表 F.2 中描述的 Grassmann 线几何中大多数都可以构成线空间。

根据维数（或者线系的阶数）可分为一、二、三、四、五、六维线空间，其中 1~3 维为低维线空间，4~6 维为高维线空间。根据几何特征，线空间可分为基本型（如表 F.4 所示）和组合型（或者复合型），前者一般按照几何特征进行分类，而后者通常是由前者组合而成。一般情况下，基本线空间都是低维（1~3）空间。

传统对线系的研究主要建立在 Klein 映射层面上，并对其几何特性进行研究。这是一种通用的抽象的研究模式。而引入线空间的概念可以从更特殊的角度通过形象化的方式对其进行研究。这种形象化的方式在这里更习惯称之为可视化（或图谱化）表达，例如表 F-4 和表

F-5 所示的就分别是线空间和偶量空间的图谱表达形式。鉴于无论线系还是线空间的集合特性，还可借助集合论的方法来进行描述。图 F-11 给出了基本型线空间之间的本构关系。

表 F-4 基本型线空间的表达

维数	图示	集合符号	几何条件
1		$\mathcal{R}(N, u)$	$N$ 是线上任意一点, $u$ 表示线的方向
2		$\mathcal{U}(N, n)$	$N$ 在两直线所在平面上, $n$ 是平面的法线
		$\mathcal{F}_2(N, u, n)$	$N$ 在两直线所在平面上, 平行线的方向与平面的法线 $n$ 满足 $u \cdot n = 0$
		$\mathcal{N}_2(u, v)$	$u$ 和 $v$ 分别代表 2 条发生线的方向
3		$\mathcal{L}(N, n)$	$n$ 是平面的法线.
		$\mathcal{F}(u)$	$u$ 表示所有平行线的方向
		$\mathcal{S}(N)$	$N$ 是所有线的交点
		$\mathcal{N}(n)$	$n$ 与所有线都正交
		$\mathcal{N}(u, v, w)$	$u, v$ 和 $w$ 分别代表 3 条发生线的方向

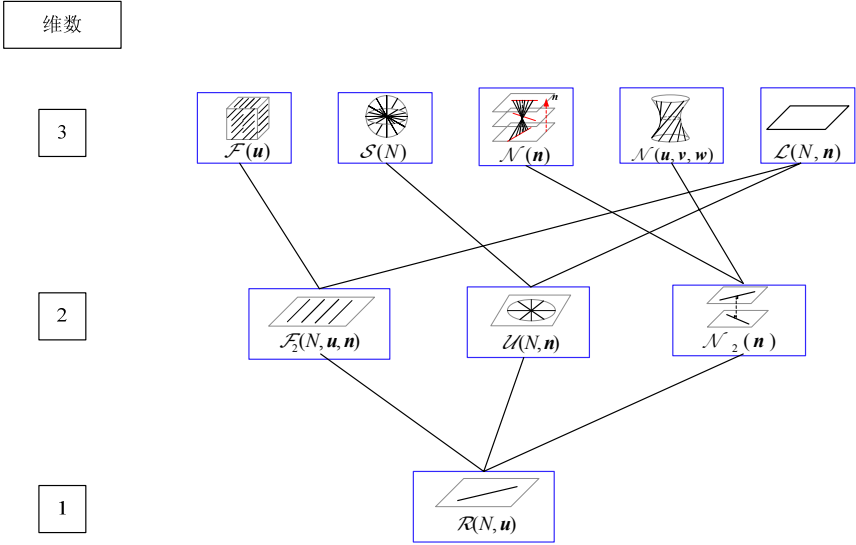
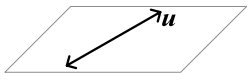
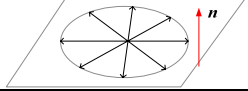
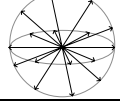


图 F-11 基本型线空间之间的本构关系

表F-5 基本型偶量空间的表达

维数	图示	集合符号	几何条件
1		$\mathcal{P}(u)$	$u$ 表示偶量的方向 所有偶量平行（含共线）
2		$\mathcal{I}_2(n)$	$n$ 与平面内的所有偶量正交 所有偶量共面
3		$\mathcal{I}$	包含空间所有偶量

对以上基本线空间枚举式求并（包括同类线空间，也包括满足某种特殊条件下的多个线空间求并），可以得到数以百计的组合型线空间。通过这种方式可以得到各种类型的高维线空间。例如：2 个平行的平面二维基本型线空间可以组合而成 1 个三维线空间，如图 F-12 所示。

用集合符号表示

$$\mathcal{F}_2(N, u, n) \cup \mathcal{F}_2(N', u', n)$$

考虑到

$$\mathcal{F}_2(N, u, n) \cap \mathcal{F}_2(N', u', n) = \mathcal{P}(n)$$

根据维数定理得到

$$\text{Dim}(\mathcal{F}_2(N, u, n) \cup \mathcal{F}_2(N', u', n)) = 2 + 2 - 1 = 3$$

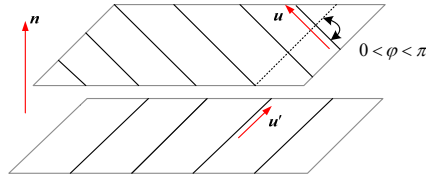


图 F-12  $\mathcal{F}_2(N, u, n) \cup \mathcal{F}_2(N', u', n)$

再如，2 个基本型线空间组合而成的线空间（四维），如图 F-13 所示。

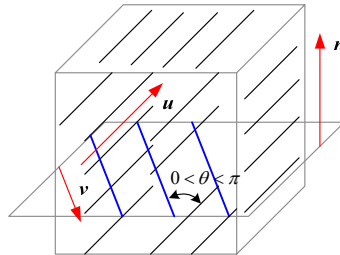


图 F-13  $\mathcal{F}(u) \cup \mathcal{F}_2(N, v, n)$

考虑到

$$\mathcal{F}(u) \cap \mathcal{F}_2(N, v, n) = \mathcal{P}(n)$$

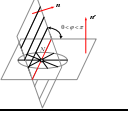
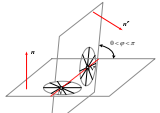
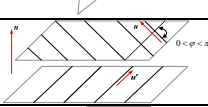

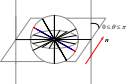
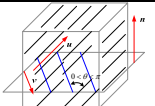
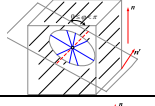
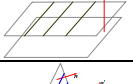
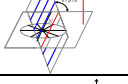
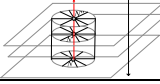
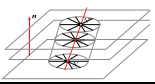
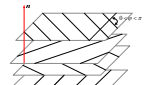
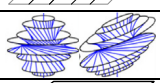
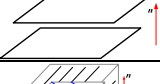
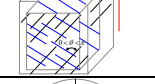
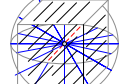
根据维数定理得到



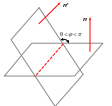
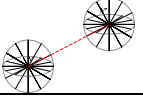
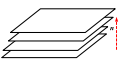
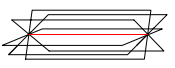
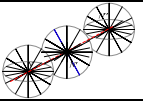
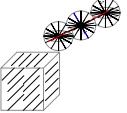
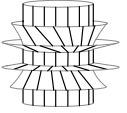
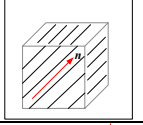
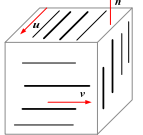
$$\text{Dim}(\mathcal{F}(u) \cup \mathcal{F}_2(N, v, n)) = 3 + 2 - 1 = 4$$

表 F-5 给出了一些典型的组合型线空间。

表F-5 组合型线空间

维数	子类型图示	符号表达	应满足的几何条件
3		$\mathcal{U}(N, n) \cup \mathcal{F}_2(N', u', n')$	$u' \cdot n = 0, \overline{NN'} \cdot n = 0$
		$\mathcal{U}(N, n) \cup \mathcal{U}(N', n')$	$n \neq n', N \neq N',$ $\overline{NN'} \cdot n = 0, \overline{NN'} \cdot n' = 0$
		$\mathcal{F}_2(N, u, n) \cup \mathcal{F}_2(N', u', n')$	$n = n', u \neq u', \overline{NN'} \cdot n \neq 0$
4		$\mathcal{L}(N, n) \cup \mathcal{F}(u)$	$u \cdot n' = 0$
		$\mathcal{L}(N, n) \cup \mathcal{S}(N')$	$\overline{NN'} \cdot n = 0$
		$\mathcal{F}(u) \cup \mathcal{F}_2(N, u', n)$	$u \neq u', u \times u' = n$
		$\mathcal{F}(u) \cup \mathcal{U}(N, n)$	$u \cdot n = 0$
		$\mathcal{L}(N, n) \cup \mathcal{F}_2(N', u', n)$	$n \neq n', u = n \times n'$
		$\mathcal{F}_2(N, u, n) \cup \mathcal{U}(N', n')$	$u \cdot n' \neq 0, \overline{NN'} \cdot n = 0$
		$\bigcup_i \mathcal{U}(N_i, n_i)$	$\bigcap_i \mathcal{U}(N_i, n_i) = \mathcal{P}(n), \quad n = n_i, \overline{N_i N_j} \perp n$
		$\bigcup_i \mathcal{U}(N_i, n_i)$	$\bigcap_i \mathcal{U}(N_i, n_i) = \mathcal{P}(n),$ $n = n_i, \angle(\overline{NN_i}, n) \neq 0 (N_i = N', N'', \dots)$
		$\bigcup_i \mathcal{F}_2(N_i, u_i, n_i)$	$\bigcap_i \mathcal{F}_2(N_i, u_i, n_i) = \mathcal{P}(n), \quad n = n_i,$ $u_i \neq u_j \quad (i \neq j), \overline{NN_i} \cdot n \neq 0 (N_i = N', N'', \dots)$
		$\bigcup_i \mathcal{N}(d_i, \varphi_i)$	$d_i \tan \varphi_i = \text{常数}1, \quad d_j \tan \varphi_j = \text{常数}2$
5		$\mathcal{L}(N, n) \cup \mathcal{L}(N', n')$	$n = n', \overline{NN'} \cdot n \neq 0$
		$\mathcal{F}(u) \cup \mathcal{F}(u')$	$u \neq u', u \times u' = n$
		$\mathcal{F}(u) \cup \mathcal{S}(N)$	



		$\mathcal{L}(N, n) \cup \mathcal{L}(N', n')$	$n \neq n' \quad \overline{NN'} \cdot n \neq 0$
		$\mathcal{S}(N) \cup \mathcal{S}(N')$	$N \neq N'$
		$\left( \bigcup_i \mathcal{L}(N_i, n_i) \right) \cup \mathcal{P}(n)$	$\bigcap_i \mathcal{L}(N_i, n_i) = \mathcal{P}(n), \quad n = n_i, \quad \overline{N_i N_j} \cdot n \neq 0$
		$\bigcup_i \mathcal{L}(N_i, n_i)$	$\bigcap_i \mathcal{L}(N_i, n_i) = \mathcal{R}(N, u), \quad n_i \neq n_j \quad (i \neq j)$
		$\bigcup_i \mathcal{S}(N_i)$	$N_i \text{ 共线}$
		$\left( \bigcup_i \mathcal{S}(N_i) \right) \cup \mathcal{F}(u)$	$\left( \bigcup_i \mathcal{S}(N_i) \right) \cap \mathcal{F}(u) = \mathcal{R}(N, u), \quad N_i \text{ 共线}$
		$\bigcup_i \mathcal{N}(d_i, \varphi_i)$	$d_i \tan \varphi_i = \text{常数}$
6		$\mathcal{L}(N, n) \cup \mathcal{F}(n)$	
		$\mathcal{F}_2(L, u, w) \cup \mathcal{F}_2(M, v, u) \cup \mathcal{F}_2(N, w, v)$	$u \perp v \perp w$

### F.3.3 Blanding 法则——对偶线空间

首先考虑一个线矢量 ( $\mathcal{S}_r$ ) 与一个线系 ( $\mathcal{S}_i, i=1, 2, \dots$ ) 的互易积 (图 F-14a)。根据定义

$$\begin{aligned}
 \mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_i &= \mathbf{s}_r \cdot \mathbf{s}_{0i} + \mathbf{s}_i \cdot \mathbf{s}_{0r} \\
 &= \mathbf{s}_r \cdot (\mathbf{r}_i \times \mathbf{s}_i) + \mathbf{s}_i \cdot (\mathbf{r}_r \times \mathbf{s}_r) \\
 &= (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_r) \cdot (\mathbf{s}_i \times \mathbf{s}_r) \\
 &= -a_{ri} \sin \alpha_{ri}
 \end{aligned} \tag{F.3-4}$$

式中,  $a_{ri}$  为两条空间线矢量公法线的长度,  $\alpha_{ri}$  为夹角。

因此, 如果线矢量  $\mathcal{S}_r$  与线系  $\mathcal{S}$  ( $\mathcal{S}_i, i=1, 2, \dots$ ) 的互易积为零, 则意味着  $a_{ri} = 0$  或者  $\alpha_{ri} = 0$ 。前者表示线矢量  $\mathcal{S}_r$  与线系  $\mathcal{S}$  中的各条直线都相交 (空间汇交); 后者表示线矢量  $\mathcal{S}_r$  与线系  $\mathcal{S}$  中的各条直线都平行 (空间平行)。而后者可以看作是前者的特例 (相交于无穷远点), 即线矢量  $\mathcal{S}_r$  与线系  $\mathcal{S}$  中的各条直线都相交。这种互易关系可以采用可视化图谱来表达 (图 F-14b)。

Blanding 在其专著 “Exact Constraint: Machine Design Using Kinematic Principles” 中, 从 (柔性) 机构自由度与约束度之间的对偶关系满足 Maxwell 公式出发, 将机构的自由度与约束表示成图谱形式, 同时两者之间必须满足 **轴线相交** 的法则。基于此法则, 可以很容

易地通过自由度分析确定机构约束的分布，反之亦然。从而给出了一种颇具实用价值的基于图谱可视化表达的机构概念创新设计方法。该方法被称为精确约束机械设计方法。

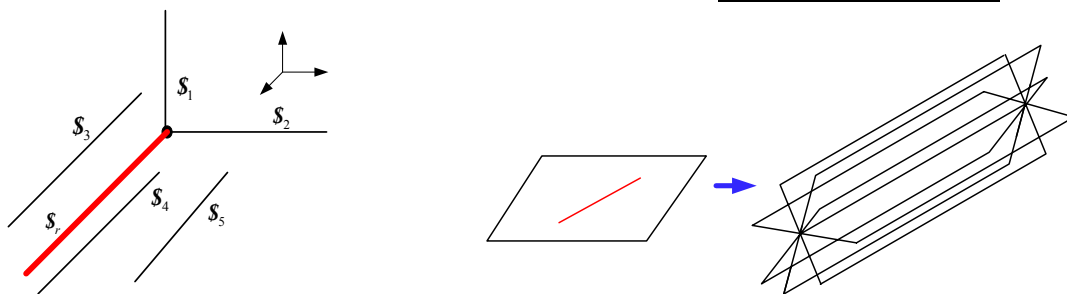


图 F-14 五维线空间及其对偶线空间

大家可以惊奇地发现：去掉 Blanding 法则中对线空间物理含义（自由度线和约束线）的约束，并对照前面对线系互易积的推演结果，两者的结论是惊人的相似。从另外一个角度讲，本节前面的推演给出了 Blanding 法则一种科学的理论依据。

这样，我们可以很自然地将 Blanding 法则广义化，即在不考虑其物理含义的同时，能够给出一种通用的求解线空间与其对偶线空间的可视化方法。其法则如前节所给：与线空间  $S$  对偶线空间中的每个线矢量  $s_{rj}$  应与  $S$  中的各条直线都相交。

## F.4 旋量系与反旋量系

### F.4.1 旋量集与旋量系

如果将前面对线系的描述进行推广，完全可以得到对旋量系的描述（包括定义等）。因为线系是旋量系的一种特例。旋量系中的各个组成元素包含着更一般形式的旋量。因此，对于线系部分详细描述的内容这里是给出必要的简要描述。

**【定义】** 由  $n$  个单位旋量  $s_1, s_2, \dots, s_n$  的任意线性组合构成的向量空间称为旋量集，可记为  $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ 。

**【定义】** 在旋量集  $S$  中，若存在一组线性无关的单位旋量  $s_1, s_2, \dots, s_r$ ，且  $S$  中所有旋量都是这些  $r$  个旋量的线性组合，则称该  $r$  个旋量为旋量集  $S$  的一组基即组成所谓的旋量系  $S$ ， $r$  称为该旋量系的阶数或维数。或者称为该旋量集（系）的秩，记作  $r = \text{rank}(S)$ 。因此，刚体在空间的所有瞬时运动可以由 1 个六维旋量系的正交标准基表示，即

$$\begin{cases} s_1 = (1, 0, 0; 0, 0, 0) \\ s_2 = (0, 1, 0; 0, 0, 0) \\ s_3 = (0, 0, 1; 0, 0, 0) \\ s_4 = (0, 0, 0; 1, 0, 0) \\ s_5 = (0, 0, 0; 0, 1, 0) \\ s_6 = (0, 0, 0; 0, 0, 1) \end{cases} \quad (\text{F.4-1})$$

设有由  $n$  个单位旋量  $s_1, s_2, \dots, s_n$  组成的旋量集  $\{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ ，若存在不全为零的数  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ，使得  $\sum_{i=1}^n \lambda_i s_i = 0$ ，则该旋量集线性相关；否则，该旋量集线性无关，并构成一个旋量系。设旋量集中各个旋量的 Plücker 坐标为  $(L_i, M_i, N_i; P_i^*, Q_i^*, R_i^*)$ ，则该旋量集的线性相关性可用下列矩阵  $A$  的秩来判定。

$$A = \begin{bmatrix} L_1 & M_1 & N_1 & ; & P_1^* & Q_1^* & R_1^* \\ L_2 & M_2 & N_2 & ; & P_2^* & Q_2^* & R_2^* \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ L_n & M_n & N_n & ; & P_n^* & Q_n^* & R_n^* \end{bmatrix} \quad (\text{F.4-2})$$

注意：由于旋量的 Plücker 坐标有 6 个分量，显然三维空间线性无关的旋量最多有 6 个。

同样，**旋量集的线性相关性与坐标系的选择无关**。这使得在下面的分析中，可以选取最方便的坐标系，从而最大程度地将旋量表达式简化。例如，尽量使旋量集中各旋量的 Plücker 坐标中出现更多 1 和 0 元素。另外，由于**旋量的互易性也与坐标系的选择无关**。这两个命题相结合可以使对许多问题的分析变得十分简单，例如求某个旋量系的反旋量时就可以利用这两个结论使计算大大简化，甚至利用观察的方法即能得到正确结果。

**【例 F-3】**：试通过对图 F-15 中所示的机构或运动链选取合适的坐标系，建立与之对应的旋量集，并计算该旋量集的秩，进而给出与之对应的一组旋量系。

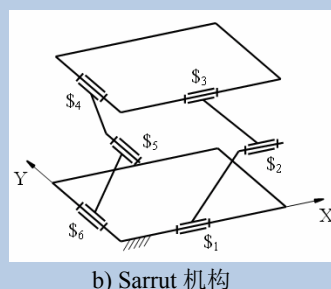
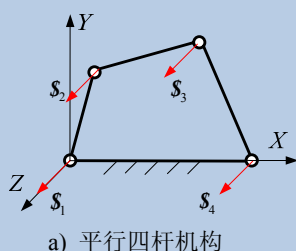


图 F-15 例 F-3 图

**解：**建立如上图所示的坐标系，分别列出各自对应的旋量系。具体如下：

(a)

$$\begin{cases} \mathcal{S}_1 = (0, 0, 1; 0, 0, 0) \\ \mathcal{S}_2 = (0, 0, 1; p_2, q_2, 0) \\ \mathcal{S}_3 = (0, 0, 1; p_3, q_3, 0) \\ \mathcal{S}_4 = (0, 0, 1; 0, q_4, 0) \end{cases}$$

可以看到 4 个旋量的 Plücker 坐标中，第 1、2、6 列元素都为零，故该旋量集的秩为 3。与之对应的旋量系可以用一组正交基表达。

$$\begin{cases} \mathcal{S}_1 = (0, 0, 1; 0, 0, 0) \\ \mathcal{S}_2 = (0, 0, 1; 1, 0, 0) \\ \mathcal{S}_3 = (0, 0, 1; 0, 1, 0) \end{cases}$$

(b)

$$\begin{cases} \mathcal{S}_1 = (1, 0, 0; 0, 0, 0) \\ \mathcal{S}_2 = (1, 0, 0; 0, q_2, r_2) \\ \mathcal{S}_3 = (1, 0, 0; 0, q_3, r_3) \\ \mathcal{S}_4 = (0, 1, 0; 0, 0, 0) \\ \mathcal{S}_5 = (0, 1, 0; p_5, 0, r_5) \\ \mathcal{S}_6 = (0, 1, 0; p_6, 0, r_6) \end{cases}$$

可以看到 6 个旋量的 Plücker 坐标中，第 3 列元素都为零，故该旋量集的秩为 5。对应的旋量系可以用一组正交基表达。

$$\begin{cases} \mathcal{S}_1 = (1, 0, 0; 0, 0, 0) \\ \mathcal{S}_2 = (0, 1, 0; 0, 0, 0) \\ \mathcal{S}_3 = (0, 0, 0; 1, 0, 0) \\ \mathcal{S}_4 = (0, 0, 0; 0, 1, 0) \\ \mathcal{S}_5 = (0, 0, 0; 0, 0, 1) \end{cases}$$

## F.4.2 旋量系（空间）的分类

由于旋量系的概念源于刚体运动，而刚体运动最多为 6 个自由度，因此旋量系的最高维数也是 6。根据旋量系的阶数可将旋量系分为 1 ~ 6 阶旋量系，简称旋量一系、旋量二系、旋量三系、旋量四系、旋量五系和旋量六系。在旋量系的研究中，目前对旋量二系和旋量三系的研究是最多的。其中旋量二系是最为基础的，而旋量三系是最重要也最复杂的。旋量四系和旋量五系可以通过研究与之对应的反旋量系即旋量二系和旋量一系得到。此外，根据旋量系的运动特性及约束特性可将旋量系分为运动旋量系和约束旋量系。有关详细的旋量系的分类问题这里不予以讨论，具体可参考文献[69, 86]。

研究旋量系的目的在于确定运动旋量节距的范围和运动旋量轴线的分布曲面，进而从几何角度研究机构或机械系统的运动特性。

根据所表达的物理意义旋量空间又可以表现为自由度空间（freedom space）和约束空间（constraint space）。同样，完全可以将线空间的分类及其可视化表征推广到旋量空间上（图 F-16）。不过，实现旋量空间的可视化相对困难很多。采用解析方法可以给出相关表达。

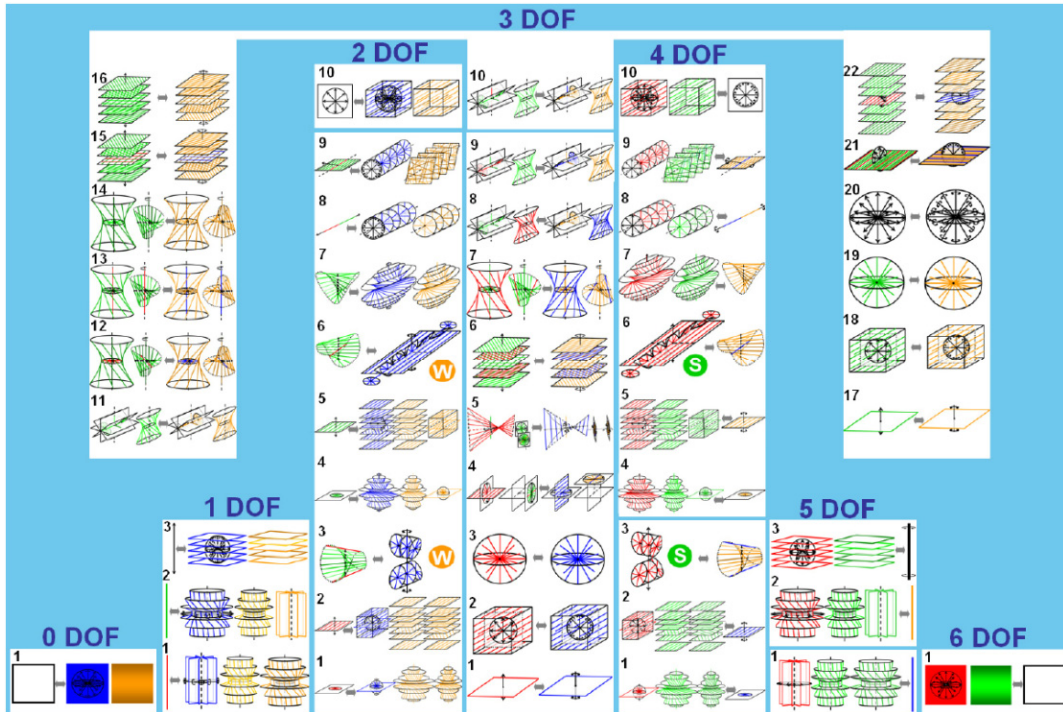


图 F-16 旋量空间的分类与其互逆的对偶旋量空间 [21]

## F.4.3 反旋量系与对偶旋量空间

【定义】 有一个  $n$  阶旋量系  $\mathcal{S} = \{\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \dots, \mathcal{S}_n\}$ ，必然存在一个  $6-n$  阶的反旋量系  $\mathcal{S}^r = \{\mathcal{S}_1^r, \mathcal{S}_2^r, \dots, \mathcal{S}_{6-n}^r\}$ ，该旋量系由  $6-n$  个与  $\mathcal{S}$  中每个旋量都互易（简称与  $\mathcal{S}$  互易）的旋量组成，反之亦然。

$$\dim(\mathcal{S} \cup \mathcal{S}^r) = \dim(\mathcal{S}) + \dim(\mathcal{S}^r) - \dim(\mathcal{S} \cap \mathcal{S}^r) \quad (\text{F.4-3})$$

式中， $\dim(\cdot)$  表示旋量系的阶数或维数。

$$\mathcal{S}_d = \{\mathcal{S}_{d1}, \mathcal{S}_{d2}, \dots, \mathcal{S}_{df}\} = \mathcal{S} \cap \mathcal{S}^r = \{\mathcal{S}_{di} \mid \mathcal{S}_{di} \in \mathcal{S} \text{ 和 } \mathcal{S}_{di} \in \mathcal{S}^r, i = 1, 2, \dots, f\} \quad (\text{F.4-4})$$

用集合图示旋量系与反旋量系之间的关系，可以表示成图 F-17 的形式。

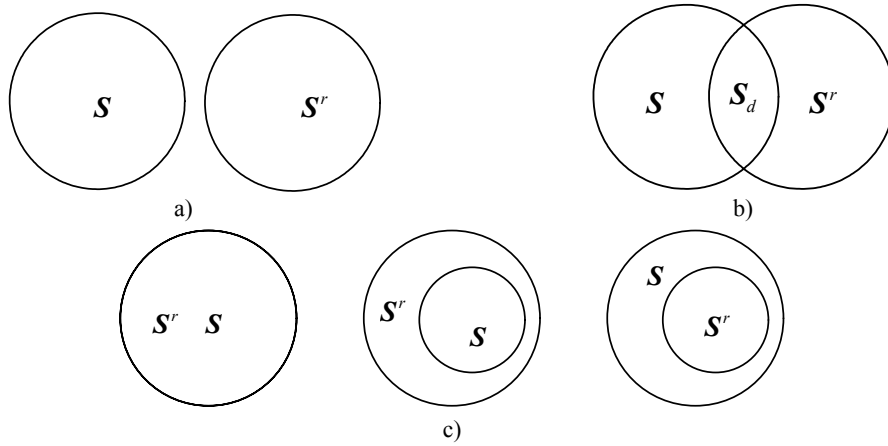


图 F-17 旋量系与反旋量系之间关系的集合表示

假设  $n$  阶旋量系  $S$  的矩阵表示形式为  $A = [S_1, S_2, \dots, S_n]^T$ ,  $6-n$  阶反旋量系  $S^r$  的矩阵表示形式为  $J^r = [S_1^r, S_2^r, \dots, S_{6-n}^r]$ , 则

$$A \tilde{A} J^r = 0 \quad (F.4-5)$$

令  $\tilde{A} J^r = B$ , 则

$$AB = 0 \quad (F.4-6)$$

对上式的求解可归结为线性代数中的求解齐次线性方程的零空间 (null space) 问题。具体求解过程这里不予详细讨论, 有兴趣的读者可参考文献[86]。

此外, 还有其它通用的方法可以用于求解反旋量系, 例如 Gram-Schmidt 方法。而观察法与等效旋量系构造法都是基于观察和经验的构造方法, 同时又具有较强的物理意义, 不过通用性相对较差。

求解反旋量系是建立对偶旋量空间的基础。下面具体讨论一下如何求取对偶旋量空间? 这里给出三种方法, 结果会殊途同归。

#### (1) 几何法

基于Blanding提出的约束设计准则, 直接给出空间模型。不过仅限于线空间与其对偶线空间。

#### (2) 解析推演法

给出线矢量空间中各元素的一般表达式, 通过解析推演的方法得到其对偶线矢量空间。

#### (3) 解析-几何综合法

从线矢量空间中挑选出具有典型性的具有特殊表达式的元素, 同样通过解析法得到其对偶线矢量空间, 再根据其几何特性, 将结论扩展到一般。

下面以求取一维纯线矢量空间的对偶旋量为例来说明这三种方法的具体应用。

#### 方法一：几何法

基于Blanding提出的约束设计准则, 直接给出三个子空间模型 (图F-18), 进而得到完全的一维线空间对偶线空间, 但无法得到全部对偶空间, 因为还包含一般旋量空间。

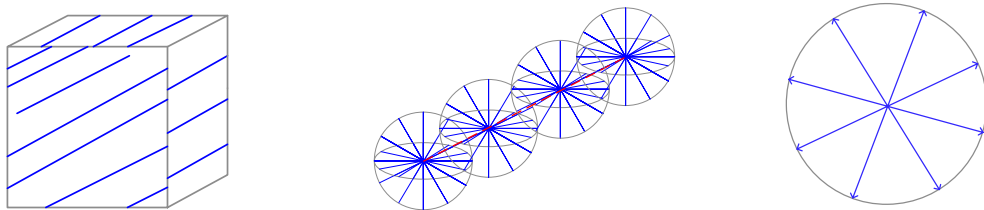


图 F-18 3 个子空间

## 方法二：解析推演法

一维纯线矢量空间中只存在一个线性无关的纯线矢量，其一般表达式为

$$\mathbf{s}_r = (\mathbf{s}_r; \mathbf{r}_r \times \mathbf{s}_r) = (l_r, m_r, n_r; p_r, q_r, r_r) \quad (\text{F.4-7})$$

式中， $\mathbf{s}_r = [l_r, m_r, n_r]^T$  表示该线矢量的单位方向矢量，因此  $l_r^2 + m_r^2 + n_r^2 = 1$ 。

$\mathbf{r}_r = [x_r, y_r, z_r]^T$  表示该线矢量的位置矢量。通过求解式 (F.4-7)，得到与该线矢量互逆的 5 个基本线矢量表达。

$$\begin{cases} \mathbf{s}_1 = (1, 0, 0; -\frac{n_r y_r - m_r z_r}{l_r}, 0, 0) \\ \mathbf{s}_2 = (0, 1, 0; -\frac{l_r z_r - n_r x_r}{l_r}, 0, 0) \\ \mathbf{s}_3 = (0, 0, 1; -\frac{m_r x_r - l_r y_r}{l_r}, 0, 0) \\ \mathbf{s}_4 = (0, 0, 0; -\frac{m_r}{l_r}, 1, 0) \\ \mathbf{s}_5 = (0, 0, 0; -\frac{n_r}{l_r}, 0, 1) \end{cases} \quad (\text{F.4-8})$$

通过对以上 5 个基本线矢量进行线性组合可得到通用的表示形式。

$$\mathbf{s} = a\mathbf{s}_1 + b\mathbf{s}_2 + c\mathbf{s}_3 + d\mathbf{s}_4 + e\mathbf{s}_5 = (a, b, c; -\frac{dm_r + en_r + f}{l_r}, d, e) \quad (\text{F.4-9})$$

式中， $a, b, c, d$  和  $e$  为任意常值，但不能同时为零， $f = a(n_r y_r - m_r z_r) + b(l_r z_r - n_r x_r) + c(m_r x_r - l_r y_r)$ 。这里首先仅考虑线矢量和偶量的情况。

**【特例 1】**  $a = b = c = 0$  并正则化矢量，式 (F.4-9) 退化为一偶量。

$$\mathbf{s} = (\mathbf{0}; \mathbf{s}) = (0, 0, 0; -\frac{dm_r + en_r + f}{l_r}, d, e) \quad (\text{F.4-10})$$

式中， $(\frac{dm_r + en_r + f}{l_r})^2 + d^2 + e^2 = 1$ 。而由式 (F.4-7) 可知， $\mathbf{s}^T \cdot \mathbf{s}_r = 0$ ，即所有与该线矢量互逆的偶量都有之正交。

由该结论可以得到与该一维线矢量空间对偶的一个 2 维偶量子空间（图 F-19）。

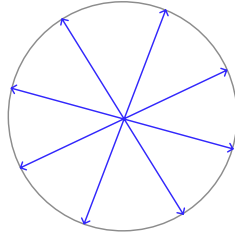


图 F-19 2 维偶量子空间

**【特例 2】** 满足条件  $\mathbf{s}^T \mathbf{s}^0 = 0$  且  $\mathbf{s}^T \mathbf{s} = 1$ ，式 (F.4-9) 退化为一纯单位线旋量。

$$\mathbf{s} = (\mathbf{s}; \mathbf{r} \times \mathbf{s}) = (a, b, c; \frac{d(bn_r - cm_r) - cf}{cl_r - an_r}, d, \frac{d(am_r - bl_r) + af}{cl_r - an_r}) \quad (\text{F.4-11})$$

式中， $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ 。

不失一般性，可取位置矢量  $\mathbf{r}_r = [x_r, y_r, z_r]^T$  为特殊值，即  $\mathbf{r}_r = [0, 0, 0]^T$ ，则  $f = 0$ 。由此根据式 (F.4-11) 的表达式可以导出：

$$\mathbf{r} \times \mathbf{s} = -\frac{d}{cl_r - an_r} (\mathbf{s}_r \times \mathbf{s}) = \lambda \mathbf{s}_r \times \mathbf{s} \quad (\text{F.4-12})$$

式中， $\lambda = -\frac{d}{cl_r - an_r}$ 。



如果  $\mathbf{s}_r = \mathbf{s}$ ，则表示线矢量与其互逆线矢量平行，这时  $\mathbf{r} \times \mathbf{s} = \mathbf{0}$ ，则  $\mathbf{s} = (\mathbf{s}; \mathbf{0})$ ，带入式 (F.4-9) 永远满足，因此这里的  $\mathbf{r}$  可以取任意值，即与该线矢量平行的互逆线矢量可分布在空间任意位置。由该结论可以得到与该一维线矢量空间对偶的一个 3 维线矢量子空间（图 F-20）。

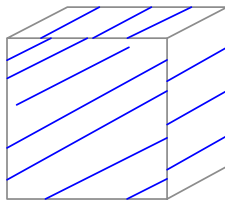


图 F-20 3 维空间平行线矢量子空间

If  $\mathbf{s}_r \neq \mathbf{s}$ ，则表示线矢量与其互逆线矢量不平行，这时根据式 (F.4-12) 可以得到  $\mathbf{s}_r$  始终与  $\mathbf{r}$  相交，即与该线矢量不平行的互逆线矢量始终与之相交。由该结论可以得到与该一维线矢量空间对偶的另一个 5 维线矢量子空间（图 F-21）。

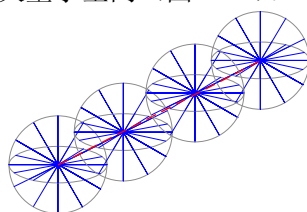


图 F-21 5 维线矢量子空间

以上得到的 3 个子空间共同组成了一维线矢量空间的对偶线空间，如图 F-22 所示。

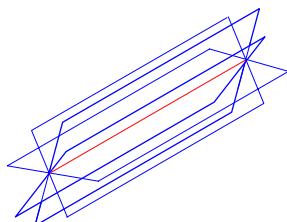
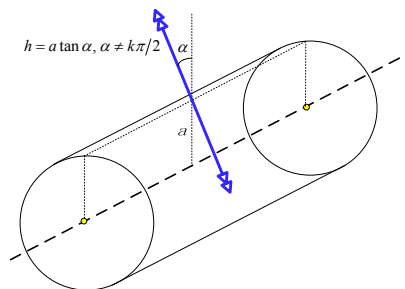


图 F-22 一维线矢量空间的对偶线空间

此外，若考虑一维线矢量空间的对偶空间中还包含包括旋量在内，则该对偶空间还应包含有一般旋量子空间。为找到之，可直接通过旋量子系互易积的定义或者前面介绍的求解反旋量子系的方法得到。这里直接给出结果（图F-23）。



图F-23 一维线矢量空间的对偶旋量子空间

图F-22和图F-23共同组成了一维线矢量空间的完全对偶空间。

### 方法三：解析-几何综合法

不妨先考虑单个线矢量与其互逆线矢量之间满足的关系，直接根据定义可以得到

$$\mathbf{s}_r \circ \mathbf{s}_i = \mathbf{s}_r \mathbf{s}_{0i} + \mathbf{s}_i \mathbf{s}_{0r} = -a_{ri} \sin \alpha_{ri} \quad (\text{F.4-13})$$

由上式可以看出，等式的右边是一个与坐标系无关量。可将单个线矢量扩展到线矢量系，可以得到同样的结论。因此完全可以证明上面的命题。

基于此原理可以通过选择适当的局部坐标系，达到简化计算和分析的目的。例如已知某一线矢量空间，求其对偶线矢量空间时，可以选择某一特殊的局部坐标系及线矢量，以简化线矢量坐标和其对偶线系的表达。将所得结论再由特殊扩展到一般，得到普遍意义的结论，这时完全可能的。

不同于方法一的是，即局部坐标系取法特殊。这里取线矢量空间为特殊空间（ $xy$  平面），从中取 1 个特殊线矢量（对应  $x$  轴）。这时的坐标表达式变成

$$\mathbf{s}_r = (\mathbf{s}_r; \mathbf{0}) = (1, 0, 0; 0, 0, 0) \quad (\text{F.4-14})$$

通过求解式（F.4-13），得到与之互逆的 5 个基本线矢量表达。

$$\begin{cases} \mathbf{s}_1 = (1, 0, 0; 0, 0, 0) \\ \mathbf{s}_2 = (0, 1, 0; 0, 0, 0) \\ \mathbf{s}_3 = (0, 0, 1; 0, 0, 0) \\ \mathbf{s}_4 = (0, 0, 0; 0, 1, 0) \\ \mathbf{s}_5 = (0, 0, 0; 0, 0, 1) \end{cases} \quad (\text{F.4-15})$$

通过对以上 5 个基本线矢量进行线性组合可得到通用的表示形式。

$$\mathbf{s} = a\mathbf{s}_1 + b\mathbf{s}_2 + c\mathbf{s}_3 + d\mathbf{s}_4 + e\mathbf{s}_5 = (a, b, c; 0, d, e) \quad (\text{F.4-16})$$

式中， $a, b, c$  和  $d$  为任意常值，但不能同时为零。这里仅考虑线矢量和偶量的情况。

【特例 1】  $a = b = c = 0$  并正则化矢量，式（F.4-16）退化为一偶量。

$$\mathbf{s} = (\mathbf{0}; s) = (0, 0, 0; 0, d, e) \quad (\text{F.4-17})$$

即所有与该线矢量空间互逆的偶量都与  $x$  轴正交。

由该结论可以得到与该一维线矢量空间对偶的一个 2 维偶量子空间，如图 F.19 所示。

【特例 2】 满足条件  $\mathbf{s}^T \mathbf{s}^0 = 0$  且  $\mathbf{s}^T \mathbf{s} = 1$ ，式（F.4-16）退化为一纯单位线旋量。

$$\mathbf{s} = (a, b, 0; 0, 0, e) \quad (\text{或者 } \mathbf{s} = (a, 0, c; 0, d, 0)) \quad (\text{F.4-18})$$

式中， $a^2 + b^2 = 1$ （或者  $b^2 + c^2 = 1$ ）。或者

$$\mathbf{s} = (a, b, c; 0, d, -bd/c) \quad (\text{F.4-19})$$

式中， $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ 。

式（F.4-18）表示所有平行  $x$  轴的线矢量所组成的空间三维平行线系。结合 Blanding 法则，可以得到与该二维线矢量空间对偶的一个 3 维线矢量子空间（图 F-20）。

式（F.4-19）表示为一个五维线系，它们都与公共的轴线（ $x$  轴）相交。结合 Blanding 法则，可以得到与该二维线矢量空间对偶的一个 5 维线矢量子空间（图 F-21）。

以上得到的 3 个子空间共同组成了一维线矢量空间的<sub>对偶空间</sub>，如图 F-22 所示。

图 F-22 给出的线矢量空间及其对偶空间都处在特殊空间中，完全可以通过坐标变换将此空间处于一般位置，即得到如图 F-22 所示的空间。可以看出此空间与方法一得到的结果是一致的。

图 F-23 给出了当旋量空间是一般旋量情况下所对应的对偶旋量空间图谱。

事实上利用以上三种方法或前面介绍的通用计算反旋量系的方法，我们可以得到任何旋量空间及其对应的对偶空间的完整图谱。