离 散 数 学

2021年3月15日星期一

第7章 特殊关系

内容提要

1 等价关系

2 拟序关系

3 偏序关系

4 全序关系

5 良序关系

次序关系

7.1 本章学习要求

重点掌握

1

1 几个特殊关系的概念
2 等价和偏序关系的证明
3 等价类和商集的计算
4 8个特殊元

一般掌握

2

1 拟序、全序和良序关系的定义；
2拟序与偏序关系的联系
3 拟序、全序、良序的联系。

了解

3

1 拟序、全序和良序关系的相关性质。

判定下列关系具有哪些性质

1. 在全体中国人所组成的集合上定义的“同姓”关系；
2. 对任何非空集合A，A上的全关系；
3. 三角形的“相似关系”、“全等关系”；
4. “朋友”关系。

等价关系

解：1，2，3都具有*自反性，对称性和传递性*；

4. 具有自反和对称性，不具有传递性。

7.2 等价关系

定义7.2.1 设R是定义在非空集合A上的关系，如果R是自反的、对称的、传递的，则称R为A上的等价关系。

由定义7.2.1知：

（1）关系R是等价关系当且仅当R同时具备自反性、对称性和传递性；

（2）关系R不是等价关系当且仅当R不具备自反性或对称性或传递性。

例7.2.1

判定下列关系是否是等价关系?

1. 幂集上定义的“$\subseteq$”关系；
2. 整数集上定义的“<”关系；
3. 全体中国人所组成的集合上定义的“同性别”关系。

不具有对称性

不具有对称性，自反性

是等价关系

例7.2.2

在时钟集合A＝{0, 1, 2, …, 23}上定义**整除关系：**

$R=\{\langle x, y\rangle \mid \{(x, y\in A)\wedge((x-y)\text{被12所整除})\}$。

（1）写出R中的所有元素；

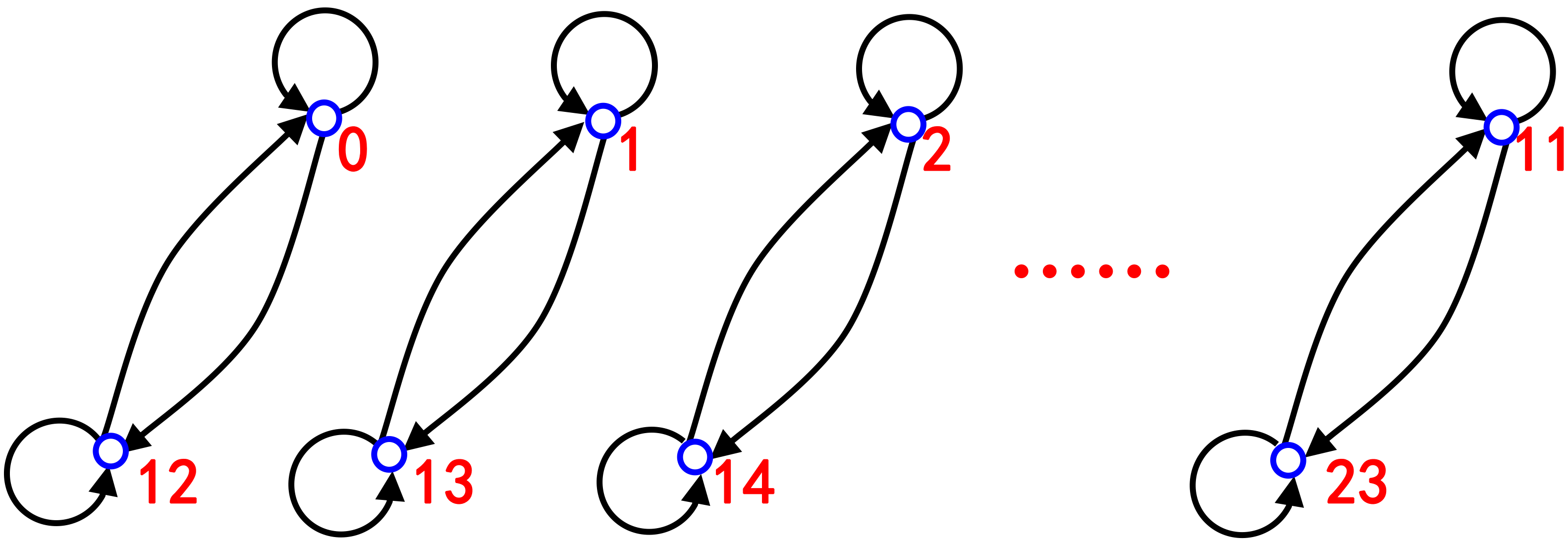
（2）画出R的关系图；

（3）证明R是一个等价关系。

解

（1）R={<0, 0>, <1, 1>, <2, 2>, ..., <23, 23 >, <0, 12>, <12, 0>, <1, 13>, <13, 1>, <2, 14>, <14, 2>, ..., <11, 23>, <23, 11>}}

（2）此关系的关系图：



解（续）

1. 对任意x∈A， 有（x－x）被12所整除， 所以<x, x>∈R，即R是自反的。
2. 对任意x, y∈A，若<x, y>∈R， 有(x−y)被12整除，则(y−x)＝−(x−y)被12整除，所以， <y, x>∈R，即R是对称的。
3. 对任意x, y, z∈A，若<x, y>∈R且<y, z>∈R，有(x−y)被12所整除且(y−z)被12所整除，所以(x−z)＝(x−y)＋(y−z)被12所整除，所以，<x, z>∈R，即R是传递的。

由1, 2, 3知R是等价关系。

从例7.2.2可以看出

关系R将集合A分成了如下的12个子集：

{0, 12}，{1, 13}，{2, 14}，{3, 15}，

{4, 16}，{5, 17}，{6, 18}，{7, 19}，

{8, 20}，{9, 21}，{10, 22}，{11, 23} 。

这12个A的子集具有如下特点：

1、在同一个子集中的元素之间都有关系R；

2、不同子集的元素之间无关系R。

例7.2.3

设n为正整数，考虑整数集合Z上的整除关系如下：

$R=\{\langle x,y\rangle \mid (x,y\in Z)\wedge(n\mid(x-y))\}$

证明R是一个等价关系。

证明 (1) 任意 $x\in Z$，有 $n\mid(x-x)$，所以 $\langle x,x\rangle\in R$，

即R是自反的。

(2) 对任意 $x,y\in Z$，若 $\langle x,y\rangle\in R$，即 $n\mid(x-y)$，所以 $n\mid(y-x)$，所以，$\langle y,x\rangle\in R$，即R是对称的。

事实上，对任意正整数n，整数集合Z的任意非空子集A上的关系

$$R=\{\langle x,y\rangle \mid (x,y\in A)\wedge(n\mid(x-y))\}$$

都是等价关系。

以n为模的同余关系

上述R称为Z上**以n为模的同余关系**(Congruence Relation)，记xRy为

$$x \equiv y \pmod{n}$$

称为**同余式**。如用$res_n(x)$表示x除以n的余数，则

$$x \equiv y \pmod{n} \Leftrightarrow res_n(x) = res_n(y)。$$

此时，R将Z分成了如下n个子集：

$\{\cdots, -3n, -2n, -n, 0, n, 2n, 3n, \cdots\}$

$\{\cdots, -3n+1, -2n+1, -n+1, 1, n+1, 2n+1, 3n+1, \cdots\}$

$\{\cdots, -3n+2, -2n+2, -n+2, 2, n+2, 2n+2, 3n+2, \cdots\}$

$\cdots$

$\{\cdots, -2n-1, -n-1, -1, n-1, 2n-1, 3n-1, 4n-1, \cdots\}$

说明

这n个Z的子集具有如下特点：

1. 在同一个子集中的元素之间都有关系R；
2. 不同子集的元素之间没有关系R；
3. 不同子集的交集是空集；
4. 所有这些子集的并集就构成集合Z。

称为集合Z
的一个划分

7.2.2 集合的划分

定义7.2.2 给定非空集合A，设有集合 $S=\{S_1, S_2, S_3, ..., S_m\}$。如果满足

1. $S_i \subseteq A$ 且 $S_i \neq \Phi$，$i=1, 2, ..., m$；
2. $S_i \cap S_j = \Phi$，$i \neq j$，$i, j=1, 2, ..., m$；
3. $\bigcup_{i=1}^{m} S_i = A$。

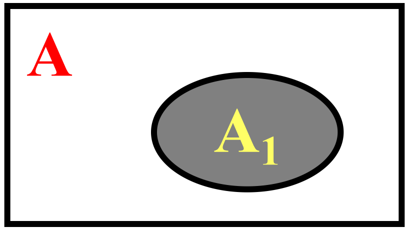
则集合S称作集合A的一个**划分**(Partition)，而S_1，S_2, ..., S_m叫做这个划分的**块**(Block)或**类**(Class)。

例7.2.4

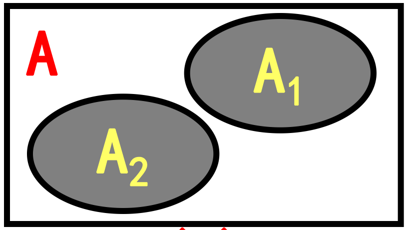
试给出非空集合A上2个不同的划分

解（1）在A中设定一个非空真子集A_1，令$A_2=A-A_1$，则根据集合划分的定义，$\{A_1, A_2\}$就构成了集合A的一个划分，见图(a)；

（2）在A中设定两个不相交非空真子集A_1和A_2，令$A_3=A-(A_1\cup A_2)$，则根据集合划分的定义，$\{A_1, A_2, A_3\}$就构成了集合A的一个划分，见图(b)。



(a)



(b)

例7.2.5

设设A={0, 1, 2, 4, 5, 8, 9}，

1、写出R是A上的以4为模的同余关系R的所有元素；

2、求分别与元素1, 2, 4有关系R的所有元素所作成的集合。

解：1、R={<0, 0>, <1, 1>, <2, 2>, <4, 4>, <5, 5>, <8, 8>, <9, 9>, <0, 4>, <4, 0>, <4, 8>, <8, 4>, <0, 8>, <8, 0>, <1, 5>, <5, 1>, <1, 9>, <9, 1>, <5, 9>, <9, 5>}。

显然，R是A的一个等价关系。

解

2、与元素1有关系R的所有元素所作成的集合{1, 5, 9}；

与元素2有关系R的所有元素所作成的集合{2}；

与元素4有关系R的所有元素所作成的集合{0, 4, 8}。

集合{1, 5, 9}称为元素1关于等价关系R的等价类，记为$[1]_R$，即$[1]_R=\{1, 5, 9\}$；

$[2]_R=\{2\}$， $[4]_R=\{0, 4, 8\}$。

7.2.3 等价类与商集

定义7.2.3 设R是非空集合A上的等价关系，对任意x∈A，称集合

$$[x]_R = \{y \mid y \in A \wedge \langle x, y\rangle \in R\}$$

为x关于R的等价类(equivalence class)，或叫作由x生成的一个R等价类，其中x称为$[x]_R$的生成元(或叫代表元，或典型元)(generator)。

由定义7.2.3可以看出：

1. 等价类产生的前提是A上的关系R必须是等价关系；
2. A中所有与x有关系R的元素y构成了$[x]_R$；
3. A中任意一个元素一定对应一个由它生成的等价类；
4. R具有自反性意味着对任意$x \in A$，$[x]_R \neq \Phi$；
5. R具有对称性意味着对任意$x, y \in A$，若有$y \in [x]_R$，则一定有$x \in [y]_R$。

例7.2.5(续)

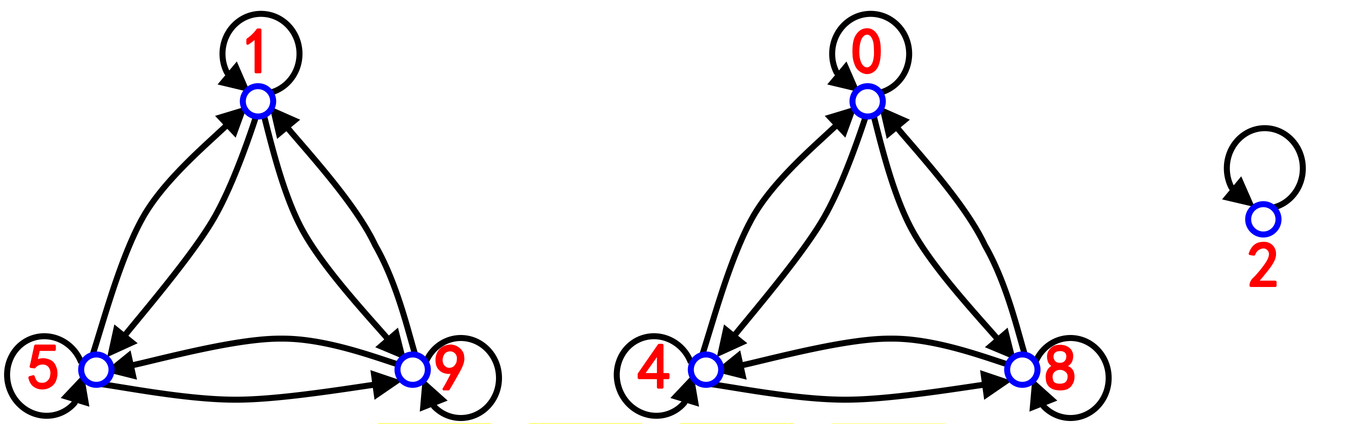
设A={0, 1, 2, 4, 5, 8, 9}，R是A上的以4为模的同余关系。求

（1）R的所有等价类；（2）画出R的关系图。

解：（1）$[1]_R = \{1, 5, 9\} = [5]_R = [9]_R$； $[2]_R = \{2\}$；

$[4]_R = \{0, 4, 8\} = [0]_R = [8]_R$。

（2）



定理7.2.1

设R是非空集合A上的等价关系，则有下面的结论成立：

1) 对任意$x \in A$，$[x]_R \neq \Phi$；

2) 对任意$x, y \in A$，

a) 如果$y \in [x]_R$，则有$[x]_R = [y]_R$，

b) 如果$y \notin [x]_R$，则有$[x]_R \cap [y]_R = \Phi$。

3) $\bigcup_{x \in A} [x]_R = A$；

证明 1）

对任意$x \in A$,

因为R是等价关系，所以R是自反的，

因此$\langle x, x\rangle \in R$，即$x \in [x]_R$，

故$[x]_R \neq \Phi$。

证明 2)

对任意x, y∈A,

a) 若y∈$[x]_R$，则<x,y>∈R，

对任意z∈$[x]_R$，则有：<x, z>∈R，又<x, y>∈R，

由R的对称性有：<y,x>∈R，

由R的传递性有：<y, z>∈R，

所以，z∈$[y]_R$，即：$[x]_R$⊆$[y]_R$。

对任意z∈$[y]_R$，则有：<y,z>∈R，又<x, y>∈R，

由R的传递性有：<x, z>∈R。所以，z∈$[x]_R$，即：

$[y]_R$⊆$[x]_R$。

所以，$[x]_R$=$[y]_R$。

b) 若y∉$[x]_R$，设$[x]_R$∩$[y]_R$≠Φ，则存在

z∈$[x]_R$∩$[y]_R$。

即z∈$[x]_R$，z∈$[y]_R$，

则有：<x, z>∈R，<y, z>∈R，

由R的对称性，<z, y>∈R，

由R的传递性有：<x,y>∈R，

即y∈$[x]_R$，矛盾。

所以$[x]_R$∩$[y]_R$=Φ。

证明 3)

因为对任意$x\in A$，$[x]_R\subseteq A$，所以 $\bigcup\limits_{x\in A}[x]_R\subseteq A$。

对任意$x\in A$，因R是自反的，所以$\langle x,x\rangle\in R$，即$x\in[x]_R$。

所以$x\in\bigcup\limits_{x\in A}[x]_R$，即$A\subseteq\bigcup\limits_{x\in A}[x]_R$。故$\bigcup\limits_{x\in A}[x]_R=A$。

商 集

定义7.2.4 设R是非空集合A上的等价关系，由R确定的一切等价类为元素构成的集合，称为集合A关于R的商集(Quotient Set)，记为A/R，即

$$A/R=\{[x]_R \mid (x\in A)\}$$

例7.2.6 设集合A={0,1,2,4,5,8,9}，R为A上以4为模的同余关系。求A/R。

解 根据例7.2.5，商集

$$A/R=\{[0]_R,[1]_R,[2]_R\}=\{\{0,4,8\},\{1,5,9\},\{2\}\}。$$

例7.2.7

设集合A={1, 2, 3, 4, 5, 8}，R为A上以3为模的同余关系。求A/R。

解 根据例7.2.3知，A上以3为模的同余关系R是等价关系。

因为$[1]_R=\{1,4\}=[4]_R$，$[2]_R=[5]_R=[8]_R=\{2,5,8\}$，$[3]_R=\{3\}$，

所以根据商集的定义，

$A/R=\{[1]_R, [2]_R, [3]_R\}=\{\{1,4\}, \{2,5,8\}, \{3\}\}$。

计算商集A/R的通用过程

1. 任选A中一个元素a，计算$[a]_R$；
2. 如果$[a]_R \neq A$，任选一个元素 $b \in A-[a]_R$，计算$[b]_R$；
3. 如果$[a]_R \cup [b]_R \neq A$，任选一个元素 $c \in A-[a]_R-[b]_R$，计算$[c]_R$；

以此类推，直到A中所有元素都包含在计算出的等价类中。

7.2.4 等价关系与划分

定理7.2.2 设R是非空集合A上的等价关系，则A对R的商集A/R是A的一个划分，称之为由R所导出的等价划分。

定理7.2.3 给定集合A的一个划分$\Pi=\{A_1, A_2, ..., A_n\}$，则由该划分确定的关系

$$R=(A_1\times A_1)\cup(A_2\times A_2)\cup\ldots\cup(A_n\times A_n)$$

是A上的等价关系。我们称该关系R为由划分Π所导出的等价关系。

定理7.2.3的证明

证明　1）R是自反的

对任意$x \in A$，

因为$\Pi(A)$是A的一个划分，所以存在一个划分块$A_i \in \Pi(A)$，使得$x \in A_i$，显然x和x同属于$\Pi(A)$的一个划分块A_i，故

$\langle x,x \rangle \in R$，所以R是自反的。

2)R是对称的

对任意$x,y \in A$，若$\langle x,y \rangle \in R$，

则x和y同属于$\Pi(A)$的一个划分块A_i，因此y和x同属于$\Pi(A)$的一个划分块A_i，故

$\langle y,x \rangle \in R$，所以R是对称的。

定理7.2.3的证明(续)

3） R是传递的

对任意$x, y, z\in A$，若$\langle x, y\rangle\in R$，$\langle y, z\rangle\in R$，

则x和y同属于$\Pi(A)$的一个划分块A_i，y和z同属于$\Pi(A)$的一个划分块A_j，因此$y\in A_i\cap A_j$，由于不同的划分块交为空，所以$A_i=A_j$，因此x和z同属于$\Pi(A)$的一个划分块A_i，即

$\langle x, z\rangle\in R$，所以R是传递的。

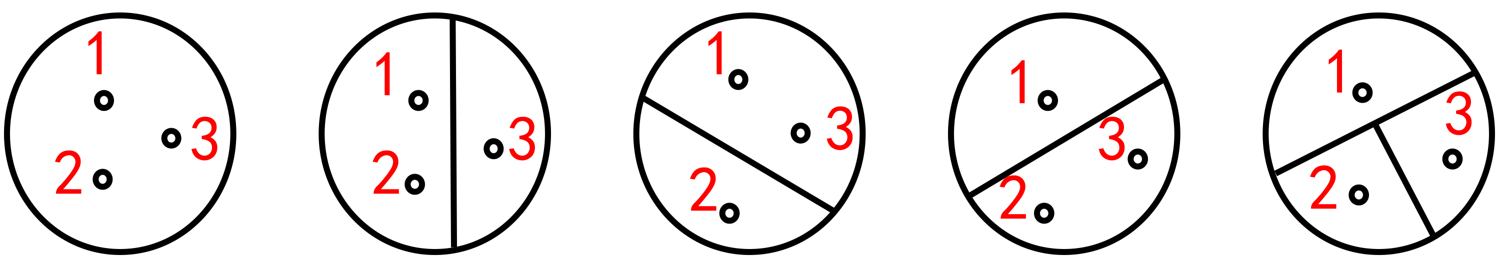
综上，由1)、2)、3)知，R是A上的等价关系。

说明：集合A上的等价关系和A的划分是一一对应的。

例7.2.8

设A={1,2,3}，求A上所有的等价关系及其对应的商集。

解　只有1个划分块的划分为S_1，见图(a)；具有2个划分块的划分为S_2、S_3和S_4，见图(b)、(c)和(d)，具有3个划分块的划分为S_5，见图(e)。



(a)　(b)　(c)　(d)　(e)

例7.2.8(续)

假设由S_i导出的对应等价关系为R_i， i=1, 2, 3, 4, 5, 则有

$R_1=S_1\times S_1=A\times A$, $A/R_1=\{\{1,2,3\}\}$;

$R_2=\{1,2\}\times\{1,2\}\cup\{3\}\times\{3\}$

$=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle\}$,

$A/R_2=\{\{1,2\},\{3\}\}$;

$R_3=\{1,3\}\times\{1,3\}\cup\{2\}\times\{2\}$

$=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 3,3\rangle\}$,

$A/R_3=\{\{1,3\},\{2\}\}$;

例7.2.8(续)

$R_4=\{2,3\}\times\{2,3\}\cup\{1\}\times\{1\}$

$=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 3,3\rangle\}$,

$A/R_4=\{\{1\},\{2,3\}\}$;

$R_5=\{1\}\times\{1\}\cup\{2\}\times\{2\}\cup\{3\}\times\{3\}$

$=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle\}=I_A$,

$A/R_5=\{\{1\},\{2\},\{3\}\}$。

例7.2.9

设R是A上的自反和传递关系，S也是A上的关系，且满足：对任意x, y∈A,

$$\langle x, y\rangle \in S \Leftrightarrow (\langle x, y\rangle \in R \land \langle y, x\rangle \in R)$$

证明 S是A上的等价关系。

证明（1）S是自反的：

对任意a∈A,

因R是自反的，所以<a, a>∈R，由<a, a>∈R并且<a, a>∈R和S的定义得

<a, a>∈S，即S是自反的。

例7.2.9（续）

（2）S是对称的：

对任意a,b∈A，若<a,b>∈S，

则由S的定义得<a,b>∈R并且<b,a>∈R，即有<b,a>∈R并且<a,b>∈R，所以有

<b,a>∈S，**即S是对称的。**

例7.2.9（续）

（3）S是传递的：

对任意$a,b,c\in A$，若$\langle a,b\rangle\in S$，$\langle b,c\rangle\in S$，

则由S的定义得$\langle a,b\rangle\in R$且$\langle b,a\rangle\in R$和$\langle b,c\rangle\in R$且$\langle c,b\rangle\in R$。

因为R是传递的，所以有$\langle a,c\rangle\in R$和$\langle c,a\rangle\in R$。从而，

$\langle a,c\rangle\in S$，**即S是传递的。**

由(1),(2)和(3)知，S是A上的一个等价关系。

例7.2.10

设R是集合A上的关系。

对任意$a, b, c \in A$，若$\langle a, b\rangle \in R$并且$\langle a, c\rangle \in R$，则有$\langle b, c\rangle \in R$，则R称为A上的循环关系。

试证明R是A上的等价关系的充要条件是R是A上的循环关系和自反关系。

证明"⇒"

若R是等价关系。

1）显然R是自反的。

2）对任意$a, b, c \in A$，若$\langle a, b\rangle \in R$，$\langle a, c\rangle \in R$，则由R是对称的，有$\langle b, a\rangle \in R$并且$\langle a, c\rangle \in R$，由R是传递的，所以，

$\langle b, c\rangle \in R$。即R是A上的循环的关系。

由1），2)知R是自反的和循环的。

证明“⇐”

若R是自反的和循环的。

1） 显然R是自反性的；

2） 对任意a, b∈A，若<a, b>∈R，

则由R是自反的，有<a, a>∈R，因R是循环的，所以<a, b>∈R且<a, a>∈R，故

<b, a>∈R，即R是对称的。

3） 对任意a, b, c∈A，若<a, b>∈R，<b, c>∈R，

由R对称的，有<b, a>∈R并且<c, b>∈R；

由R是循环的，所以由<b, a>∈R和<b, c>∈R得

<a, c>∈R，即R是传递的。

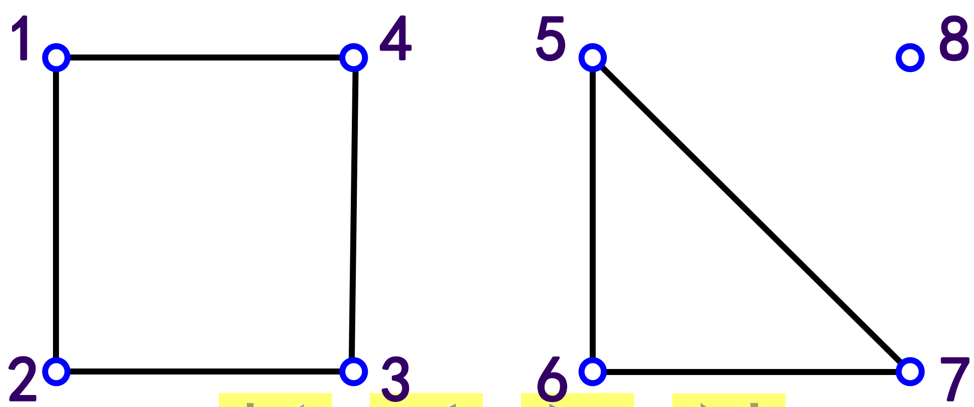
由1)、2)、3)知R是A上的等价关系。

7.2.6等价关系的应用

例7.2.11 在图7.2.5中，点i和j之间有路当且仅当从结点i通过图中的边能够到达结点j。规定对任意结点i，i和i之间一定有路。定义R如下：

$$\langle i,j\rangle \in R \Leftrightarrow i和j之间有路。$$

试说明该关系R是否可以给定结点集A={1,2,3,4,5,6,7,8}一个划分？如果能，请给出具体的划分。



解

（1）由于规定任意结点i与他自身之间一定有路，因此<i, i>∈R，即R具有自反性；

（2）若<i, j>∈R，则两个结点i和j之间存在路，当然也存在j和i之间的路，所以<j, i>∈R，即R具有对称性；

（3）若<i, j>∈R，<j, k>∈R，则结点i和j之间有路，j和k之间也有路，从而i到k之间存在经过j的路，即有<i, k>∈R，因此得到R具有传递性。

由(1)、(2)和(3)知，R是等价关系。

解(续)

于是所有不同的等价类为：

$[1]_R=\{1,2,3,4\}$，$[5]_R=\{5,6,7\}$，$[8]_R=\{8\}$。

根据定理7.2.2知，

$A/R=\{[1]_R,[5]_R,[8]_R\}=\{\{1,2,3,4\},\{5,6,7\},\{8\}\}$

就是A的一个划分。

例7.2.12

信息检索系统中的信息有{离散数学，高等数学，计算机操作系统，计算机网络，数据结构，编译原理，软件工程，计算机组成原理}。试给该信息检索系统指定三种不同的划分。

解 设A={离散数学，高等数学，计算机操作系统，计算机网络，数据结构，编译原理，软件工程，计算机组成原理}，则

解（续）

划分1：含关键词离散数学，则

A={{离散数学},{高等数学,计算机操作系统,计算机网络,数据结构,编译原理,软件工程,计算机组成原理}};

划分2：含关键词数学，则

A={{离散数学,高等数学},{计算机操作系统,计算机网络,数据结构,编译原理,软件工程,计算机组成原理}};

划分3：含关键词计算机，则

A={{离散数学，数据结构,编译原理,软件工程,高等数学},{计算机操作系统,计算机网络,计算机组成原理}}。

总结

1. 熟记等价关系的定义；
2. 利用等价关系的定义证明一个关系是等价关系；
3. 给定A上的等价关系R，会求所有的等价类和商集A/R；并求出对应的集合的划分；
4. 给定集合A上的划分，会求对应的等价类。

判定下列关系具有哪些性质

1. 对任何非空集合A，A上的恒等关系；
2. 多边形的“相似关系”、“全等关系”；
3. 集合A的幂集P(A)上定义的“包含关系”
4. 集合A的幂集P(A)上定义的“真包含关

偏序关系

解：1，2都具有自反性，对称性和传递性，是等价关系；

3 具有*自反性*，反对称性和传递性；

4 具有*反自反性*，反对称性和传递性。

拟序关系

7.3 次序关系

拍摄一张室内闪光灯照片，需要完成如下任务：

1、打开镜头盖；

2、照相机调焦；

3、打开闪光灯；

4、按下快门按钮。

这些任务中有的必须在其他任务之前完成。例如，任务1必须在任务2之前完成，任务2，3必须在任务4之前完成，即任务之间存在“先后”关系，即次序关系。

7.3.1 拟序关系

定义7.3.1 设R是非空集合A上的关系，如果R是反自反、反对称和传递的，则称R是A上的拟序关系(Quasi-Order Relation)，简称拟序，记为“$<$”，读作“小于”，并将“$\langle a,b\rangle \in <$”记为“$a<b$”。

序偶$\langle A,<\rangle$称为拟序集(Quasi-Order Set)。

由定义7.3.1知：

1. R是拟序关系 ⇔ R同时具有反自反性和传递性；
2. R不是拟序关系 ⇔ R不具有反自反性或者传递性；
3. 拟序“$<$”的逆关系“$<^{-1}$”也是拟序，用“$>$”表示，读作“大于”。

例7.3.1

设R是集合A上的拟序关系，则R是反对称的。

证明 用反证法。

假设R不是反对称的关系，则存在x, y∈A，且x≠y，满足<x, y>∈R并且<y, x>∈R。

因为R是A上的拟序关系，所以R具有传递性，从而有<x, x>∈R。

这与R是反自反的矛盾，从而假设错误，即R一定是

定义7.3.2 设R是非空集合A上的关系，如果R是反自反和传递的，则称R是A上的拟序关系。

例7.3.2

判断下列关系是否为拟序关系

（1）集合A的幂集P(A)上定义的“$\subset$”；

（2）实数集R上定义的“小于”关系(<)；

解（1）集合A的幂集P(A)上定义的“$\subset$”具有反自反性和传递性，所以<P(A), $\subset$ >是拟序集。

（2）实数集合R上定义的“小于”关系(<)具有反自反性和传递性，所以<R, <>是拟序集。

7.3.2 偏序关系

定义7.3.3 设R是非空集合A上的关系，如果R是自反的、反对称的和传递的，则称R是A上的**偏序关系**(Partial Order Relation)，简称**偏序**，记为“≤”，读作“小于等于”，并将“<a,b>∈≤”记为a≤b。

序偶<A, ≤>称为**偏序集**(PartialOrder Set)。

常将a≤b且a≠b记为a<b。

由定义7.3.2知

（1）R是偏序关系 $\Leftrightarrow$ R同时具有自反性、反对称性和传递性；

（2）R不是偏序关系 $\Leftrightarrow$ R不具备自反性或反对称性或传递性；

（3）偏序“$\leqslant$”的逆关系“$\leqslant^{-1}$”也是一个偏序，我们用“$\geqslant$”表示，读作“大于等于”；

（4）$(\leqslant - I_A)$为A上的拟序关系，$(< \cup I_A)$为A上的偏序关系。

例7.3.3

试判断下列关系是否为偏序关系

(1) 集合A的幂集P(A)上的包含关系“$\subseteq$”；

(2) 实数集合R上的小于等于关系“$\leqslant$”；

(3) 自然数集合N上的模m同余关系；

(4) 自然数集合N上的整除关系“|”；

(5) 正整数集合Z^+上的整除关系“|”；

(6) ALGOL或PL/I等都是块结构语言，设$B=\{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$是这种语言的一个程序中的块的集合。对所有i和j，定义关系“$\leqslant$”如下:

$b_i \leqslant b_j$当且仅当b_i被b_j所包含。

解

根据偏序关系的定义知，（1），（2），（5），（6）所对应的关系同时具有自反性，反对称性和传递性，所以都是偏序集；

(3)所对应的关系不具有反对称性，所以它不是偏序关系；

(4)所对应的关系不具有自反性，所以它不是偏序关系。

例7.3.4

设X是所有4位二进制串的集合，在X上定义关系R：如果s_1的某个长度为2的子串等于s_2的某个长度为2的子串，则$<s_1, s_2>\in R$，例如因为0111和1010中都含有子串01，所以$<0111, 1010>\in R$。

试判断R是否是一个偏序关系。

解

对任意$s, t \in X$，如果$\langle s, t\rangle \in R$，则s的某个长度为2的子串等于t的某个长度为2的子串，也可以说t的某个长度为2的子串等于s的某个长度为2的子串，即有$\langle t, s\rangle \in R$，从而R是对称的。根据对称性，存在$0111，1010 \in X$，有$\langle 0111，1010\rangle \in R$且$\langle 0111，1010\rangle \in R$，但是$0111 \neq 1010$，从而R不是反对称的，从而R不是偏序关系。

例7.3.5

考虑任务集T，它包含了拍摄一张室内闪光照片必须按顺序完成的任务：

1、打开镜头盖；

2、照相机调焦；

3、打开闪光灯；

4、按下快门按钮。

在T上定义关系R如下：

$\langle i,j\rangle \in R \Leftrightarrow$ 如果 $i=j$ 或者任务 i 必须在任务 j 之前完成。

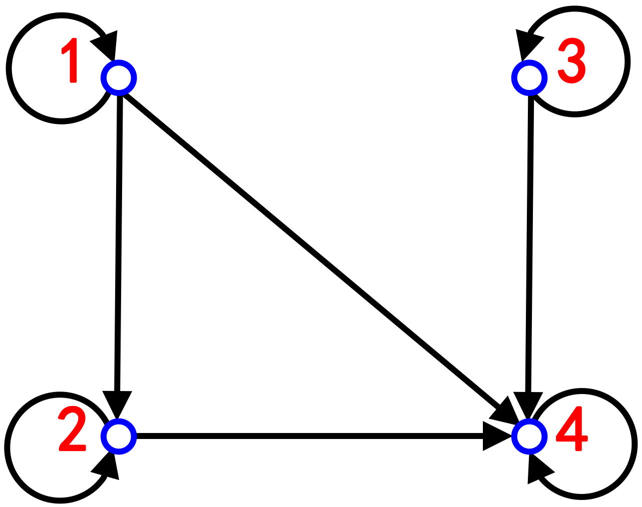
试判断R是T上的偏序关系并画出它的关系图。

解

根据R的定义，有

R={<1, 1>, <2, 2>, <3, 3>, <4, 4>, <1, 2>, <1, 4>, <2, 4>, <3, 4>}。

根据自反、反对称和传递的定义知，关系R具有自反性，对称性和传递性。从而R是偏序关系，其关系图如右图所示。



2 哈斯图

1. 用小圆圈或点表示A中的元素，省掉关系图中所有的环；（因自反性）

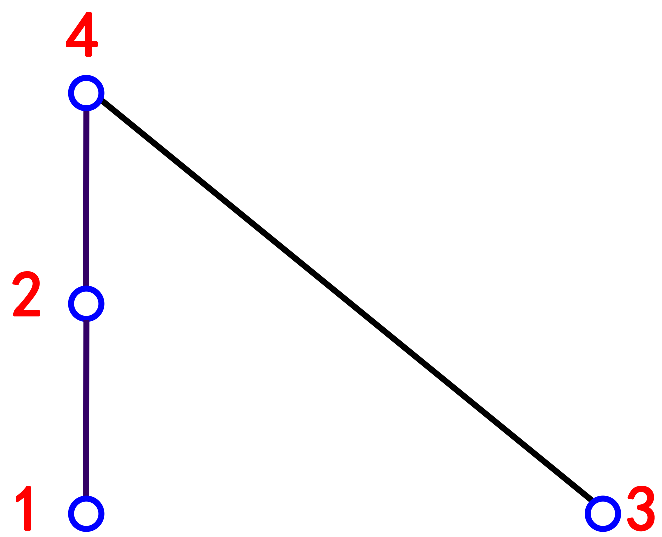
2. 对任意x, y∈A，若x<y，则将x画在y的下方，可省掉关系图中所有边的箭头；（因反对称性）

3. 对任意x, y∈A，若x<y，且不存在z∈A，使得x<z，z<y，则x与y之间用一条线相连，否则无线相连。（因传递性）

例7.3.6

画出例7.3.5中关系R的哈斯图。

解 例7.3.5中关系R的哈斯图如下图所示。



例7.3.7

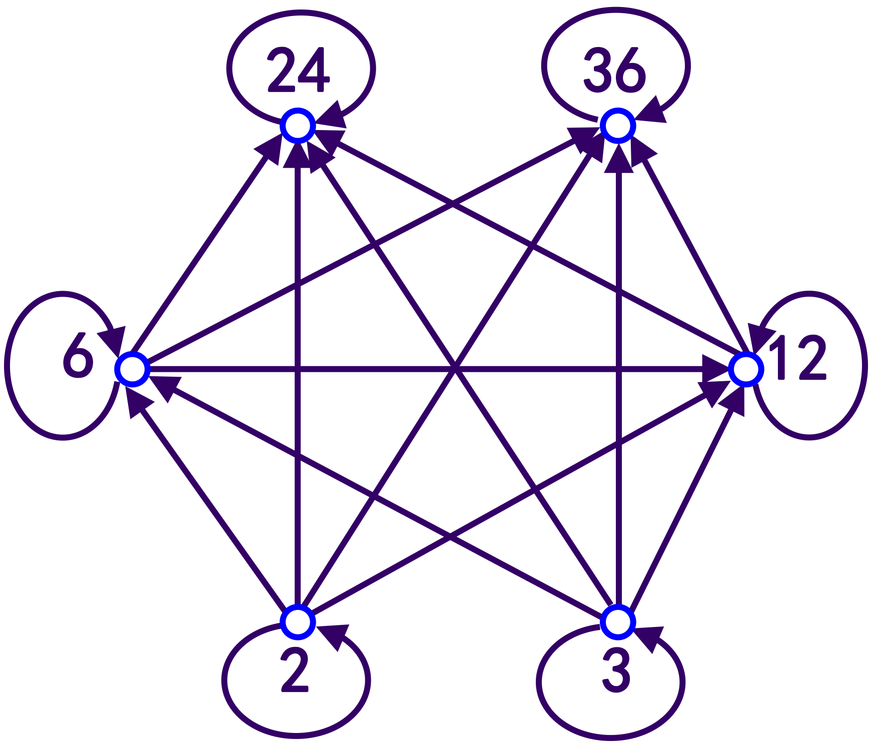
设A={2, 3, 6, 12, 24, 36}，“≼”是A上的整除关系R，**画出其一般的关系图和哈斯图。**

解 由题意可得

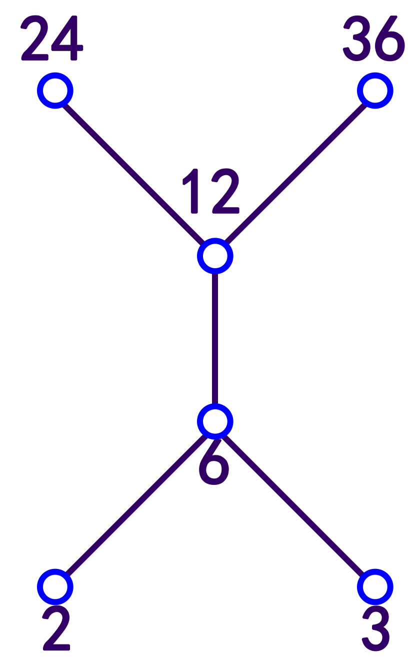
$R=\{\langle 2,2\rangle,\langle 2,6\rangle,\langle 2,12\rangle,\langle 2,24\rangle,\langle 2,36\rangle,$
$\langle 3,3\rangle,\langle 3,6\rangle,\langle 3,12\rangle,\langle 3,24\rangle,\langle 3,36\rangle,$
$\langle 6,6\rangle,\langle 6,12\rangle,\langle 6,24\rangle,\langle 6,36\rangle,\langle 12,12\rangle,$
$\langle 12,24\rangle,\langle 12,36\rangle,\langle 24,24\rangle,\langle 36,36\rangle\}$，

从而得出该偏序集$\langle A,\preccurlyeq\rangle$的一般关系图和哈斯图如下：

例7.3.7 （续）



关系图



哈斯图

3 特殊元素

定义7.3.4 设<A, ≤>是偏序集，B是A的任何一个子集，若存在元素b∈B，使得对任意x∈B，

1. 都有x≤b，则称b为B的最大元素，简称最大元；
2. 都有b≤x，则称b为B的最小元素，简称最小元；
3. 满足b≤x ⇒ x=b，则称b为B的极大元素，简称极大元；
4. 满足x≤b ⇒ x=b，则称b为B的极小元素，简称极小元。

定义7.3.4可以符号化为

b是B的最大元 $\Leftrightarrow (\forall x)((x \in B) \rightarrow (x \le b)) = 1$

b是B的最小元 $\Leftrightarrow (\forall x)((x \in B) \rightarrow (b \le x)) = 1$

b是B的极大元 $\Leftrightarrow (\forall x)((x \in B) \wedge (b \le x) \rightarrow (b = x)) = 1$

b是B的极小元 $\Leftrightarrow (\forall x)((x \in B) \wedge (x \le b) \rightarrow (b = x)) = 1$

注意

（1）B的最大元、最小元、极大元和极小元如果存在，一定在B中；

（2）b是B的最大元 $\Rightarrow$ B中所有其它元素都比b小；

b是B的最小元 $\Rightarrow$ B中所有其它元素都比b大；

b是B的极大元 $\Rightarrow$ B中没有比b大的元素；

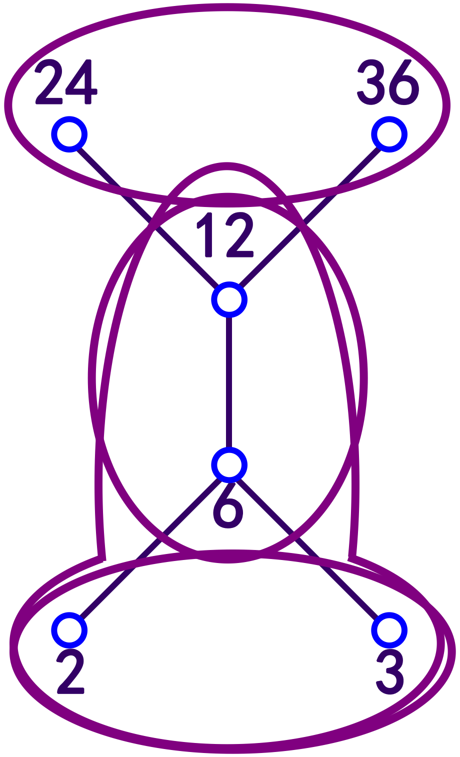
b是B的极小元 $\Rightarrow$ B中没有比b小的元素。

例7.3.8

在例7.3.7中，设$B_1=\{6, 12\}$，$B_2=\{2, 3\}$，$B_3=\{24, 36\}$，$B_4=\{2, 3, 6, 12\}$是集合A的子集，试求出B_1, B_2, B_3和B_4的最大元，最小元，极大元和极小元。

解 见下表。

集合	最大元	最小元	极大元	极小元
B_1	12	6	12	6
B_2	无	无	2, 3	2, 3
B_3	无	无	24, 36	24, 36
B_4	12	无	12	2, 3



定义7.3.5

设<A,≤>是偏序集，B是A的任何一个子集。若存在元素a∈A，使得

1. 对任意x∈B，都有x≤a，则称a为B的上界；
2. 对任意x∈B，都有a≤x，则称a为B的下界；
3. 若元素a′∈A是B的上界，元素a∈A是B的任何一个上界，若均有a′≤a，则称a′为B的最小上界或上确界。记a′=SupB；
4. 若元素a′∈A是B的下界，元素a∈A是B的任何一个下界，若均有a≤a′，则称a′为B的最大下界或下确界。记a′=InfB。

由定义7.3.5知

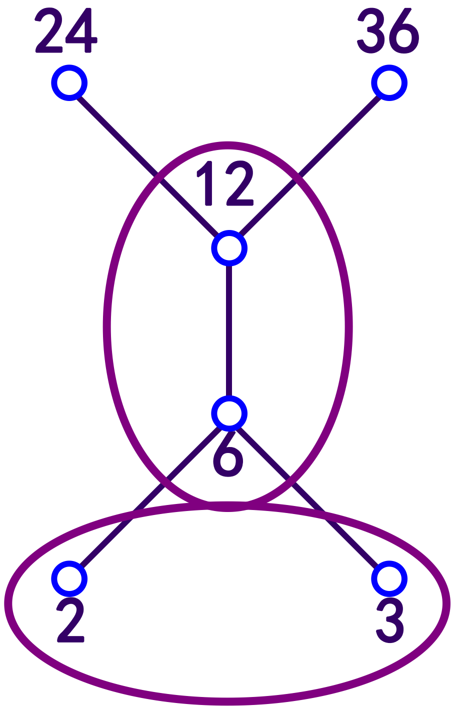
1. 子集B的上、下界和上、下确界**必须**在集合A中寻找；
2. 子集B的上、下界不一定存在，如果存在，可以不唯一的；
3. 子集B的上、下确界不一定存在，如果存在，则一定唯一；
4. 子集B有上(下)确界，一定有上(下)界；反之不然。

例7.3.9

在例7.3.7中，设B_1={6, 12}，B_2={2, 3}是集合A的子集，试求出B_1，B_2的上界、下界、上确界和下确界。

解 见下表。

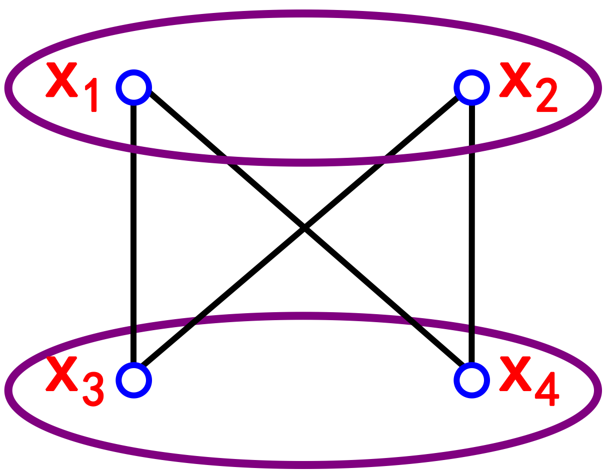
集合	上界	下界	上确界	下确界
B_1	12, 24, 36	2, 3, 6	12	6
B_2	6, 12, 24, 36	无	6	无



例7.3.10

A=$\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$，A上定义偏序集<A, ≤>的哈斯图如下图所示。求B=$\{x_1, x_2\}$和C=$\{x_3, x_4\}$上界、下界、上确界和下确界。

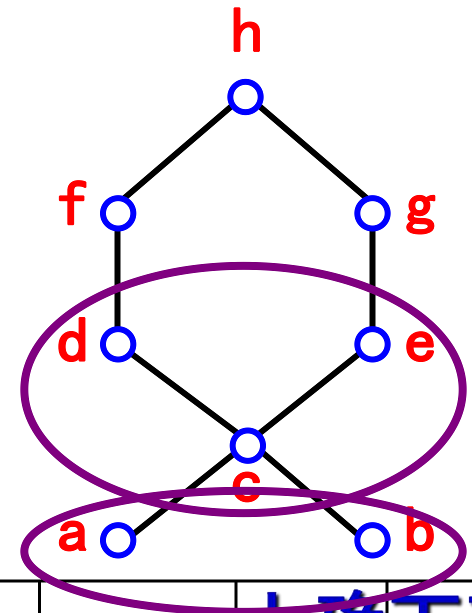
解 见右表。



集合	上界	下界	上确界	下确界
B	无	x_3, x_4	无	无
C	x_1, x_2	无	无	无

例7.3.11

设集合A={a, b, c, d, e, f, g, h}，对应的哈斯图见右图。令B_1={a, b}，B_2={c, d, e}。求出B_1，B_2的最大元、最小元、极大元、极小元、上界、下界、上确界、下确界。



集合	最大元	最小元	极大元	极小元	上界	下界	上确界	下确界
B_1	无	无	a, b	a, b	c, d, e, f, g, h	无	c	无
B_2	无	c	d, e	c	h	c, a, b	h	c

结论

(设<A, ≤>是一偏序集，B是A的子集)

（1）若b是B的最大元，则b一定是B的极大元，上界和上确界；反之，则不然；

（2）若b是B的最小元，则b一定是B的极小元，下界和下确界；反之，则不然。

定理7.3.1

设<A, ≼>是一偏序集，B是A的子集。则：

1. b是B的最大元 $\Rightarrow$ b是B的极大元、上界、上确界；
2. b是B的最小元 $\Rightarrow$ b是B的极小元、下界、下确界；
3. a是B的上确界且a∈B $\Rightarrow$ a是B的最大元；
4. a是B的下确界且a∈B $\Rightarrow$ a是B的最小元。

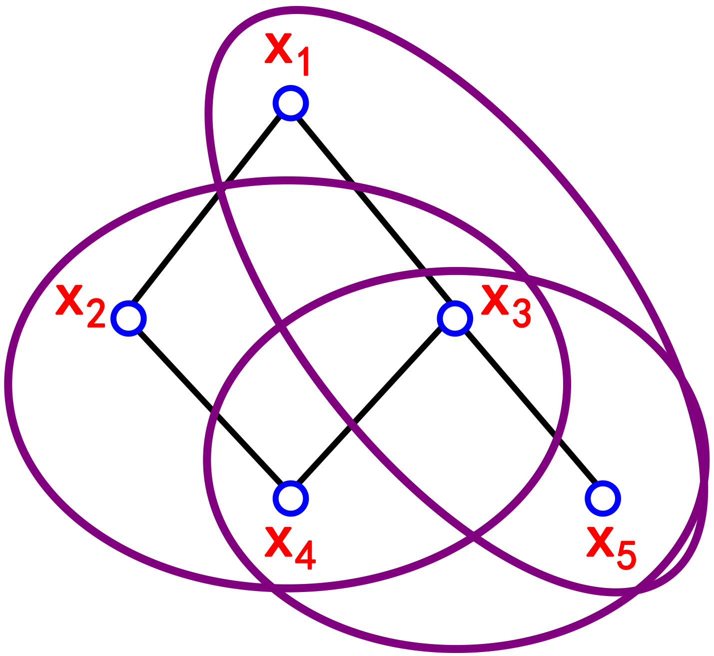
定理7.3.2

设<A, ≼>是一偏序集，B是A的子集。则：

1. 若B存在最大元，则B的最大元是惟一的；
2. 若B存在最小元，则B的最小元是惟一的；
3. b是B的最大元 $\Leftrightarrow$ b是B的惟一极大元；
4. b是B的最小元 $\Leftrightarrow$ b是B的惟一极小元；
5. 若B存在上确界，则B的上确界是惟一的；
6. 若B存在下确界，则B的下确界是惟一的。

例7.3.12

设集合$X=\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$上的偏序关系如下图所示，求X的最大元、最小元、极大元、极小元。求子集$X_1=\{x_2, x_3, x_4\}$，$X_2=\{x_3, x_4, x_5\}$，$X_3=\{x_1, x_3, x_5\}$的上界、下界、上确界、下确界、最大元、最小元、极大元和极小元。



例7.3.12 解

X_1，X_2和X_3的各种特殊元见下表。

集合	最大元	最小元	极大元	极小元	上界	下界	上确界	下确界
X_1	无	x_4	x_2, x_3	x_4	x_1	x_4	x_1	x_4
X_2	x_3	无	x_3	x_4, x_5	x_1, x_3	无	x_3	无
X_3	x_1	x_5	x_1	x_5	x_1	x_5	x_1	x_5

7.3.3全序关系

定义7.3.6 设<A,≤>为偏序集，若对任意x,y∈A，总有x≤y或y≤x，二者必居其一，则称关系“≤”为全序关系(Total Order Relation)，简称全序，或者线序关系，简称线序。称<A,≤>为全序集(Total Order Set)，或者线序集，或者链(Chain)。

从定义7.3.6可以看出：

全序关系是偏序关系，反之则不然。

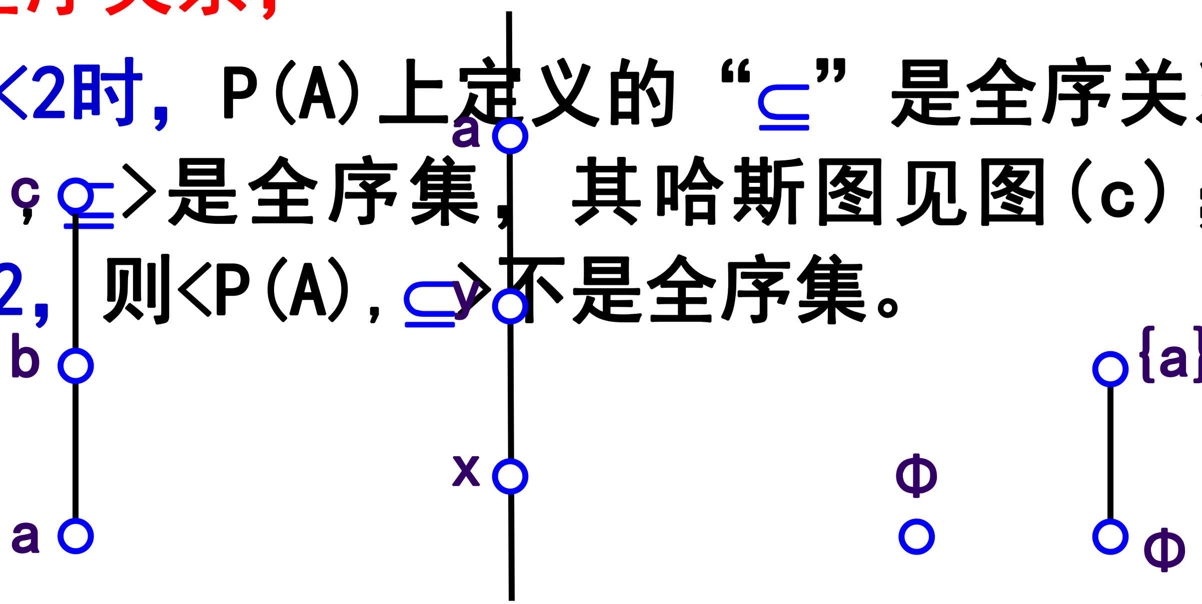
例7.3.13

试判断下列关系是否为全序关系，如果是，请画出其哈斯图。

1. 设集合A={a, b, c}，其上的关系“$\leqslant$”={<a, a>, <b, b>, <c, c>, <a, b>, <b, c>, <a, c>}
2. 实数集R上定义的小于等于关系“$\leqslant$”；
3. 实数集R上定义的小于关系“$<$”；
4. 集合A的幂集P(A)上定义的包含关系“$\subseteq$”。

例7.3.13 解

1. <A, ≤>是全序集，其哈斯图见图(a)；
2. <R, ≤>是全序集，其哈斯图是数轴，见图(b)，其中x, y, z∈R；
3. 不是全序关系；
4. 当|A|<2时，P(A)上定义的“⊆”是全序关系，<P(A), ⊆>是全序集，其哈斯图见图(c)；当|A|≥2，则<P(A), ⊆>不是全序集。



(a) (b) (c)

7.3.4 良序关系

定义7.3.7 设<A,≼>是一偏序集，若A的任何一个非空子集都有最小元素，则称“≼”为良序关系，简称良序，此时<A,≼>称为良序集。

从定义7.3.7可以看出：

（1）R是良序关系 ⇔ R是偏序关系和A的任何非空子集都有最小元；

（2）良序关系一定是偏序关系，反之则不然；

（3）良序关系一定是全序关系，反之则不然。

例7.3.14

试判断例7.3.13的(1)和(2)是否为良序关系。

解（1）<A, ≤>是良序集；

（2）<R, ≤>是不良序集。

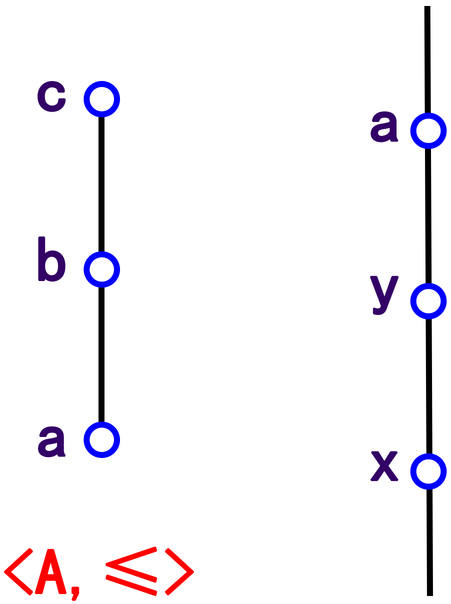
注：

1、 “≤”是良序关系

⇒“≤”是全序关系

⇒“≤”是偏序关系；

2、有限全序集一定是良序集。



<A, ≤>　　<R, ≤>

7.3.6次序关系的应用

例7.3.15 计算机科学中常用的字典排序如下：

设Σ是一有限的字母表。Σ上的字母组成的字母串叫Σ上的字；Σ*是包含空字“ε”的所有字组成的集合，建立Σ*上的字典次序关系L：

设 $x=x_1x_2\cdots x_n$，$y=y_1y_2\cdots y_m$，

其中$x_i, y_j\in\Sigma$ ($i=1, 2, \cdots, n$；$j=1, 2, \cdots, m$)，则$x, y\in\Sigma^*$。

例7.3.15 （续）

（1）当$x_1 \neq y_1$时，若$x_1 \leqslant y_1$，则xLy；若$y_1 \leqslant x_1$，则yLx。

（2）若存在最大的k且k<min(n, m)，使$x_i=y_i$ (i=1, 2, …, k)，而$x_{k+1} \neq y_{k+1}$，若$x_{k+1} \leqslant y_{k+1}$，则xLy；若$y_{k+1} \leqslant x_{k+1}$，则yLx。

（3）若存在最大的k且k=min(n, m)，使$x_i=y_i$ (i=1, 2, 3, …, k)，此时，若n≤m，则xLy；若m≤n，则yLx。

证明 L是Σ*上的一个偏序关系且是一个全序关系。

例7.3.15 证明

首先证明L是偏序关系。

（1）L是自反的。

对任意$x\in\Sigma^*$，令$x=x_1x_2\cdots x_n$，其中$x_i\in\Sigma$，显然有$x_i\leqslant x_i(i=1,2,\cdots,n)$，从而有xLx；

（2）L是反对称的。

对任意x，$y\in\Sigma^*$，令$x=x_1x_2\cdots x_n$，$y=y_1y_2\cdots y_m$，其中$x_i,y_j\in\Sigma(i=1,2,\cdots,n;\ j=1,2,\cdots,m)$。若xLy且yLx，根据L的定义有x=y；

例7.3.15 证明（续）

（3）L是传递的。

对任意$x, y, z \in \Sigma^*$，令$x=x_1x_2\cdots x_n$，$y=y_1y_2\cdots y_m$，$z=z_1z_2\cdots z_p$，其中$x_i, y_j, z_k \in \Sigma$（$i=1, 2, \cdots, n$；$j=1, 2, \cdots, m$；$k=1, 2, \cdots, p$）。若xLy且yLz，根据L的定义和“≤”的传递性，有xLz。

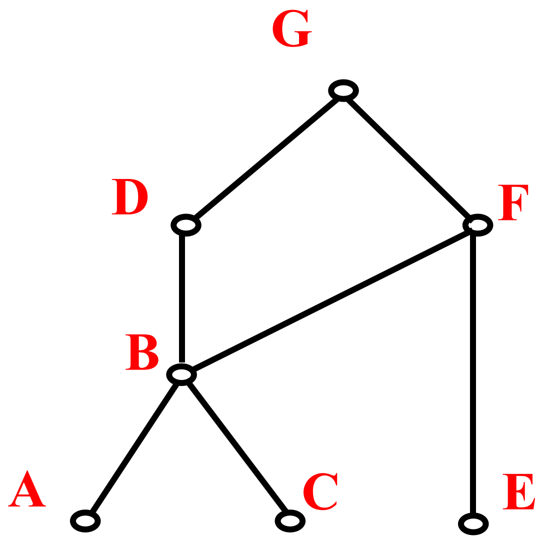
综上所述，L是Σ^*上的一个偏序关系。

对任意$x, y \in \Sigma^*$，由x和y的表示形式知，x_i和y_i($i=1, 2, \cdots, n$)总能进行比较，所以一定有xLy和yLx之一成立，从而L是Σ^*上的一个全序关系。

例7.3.16

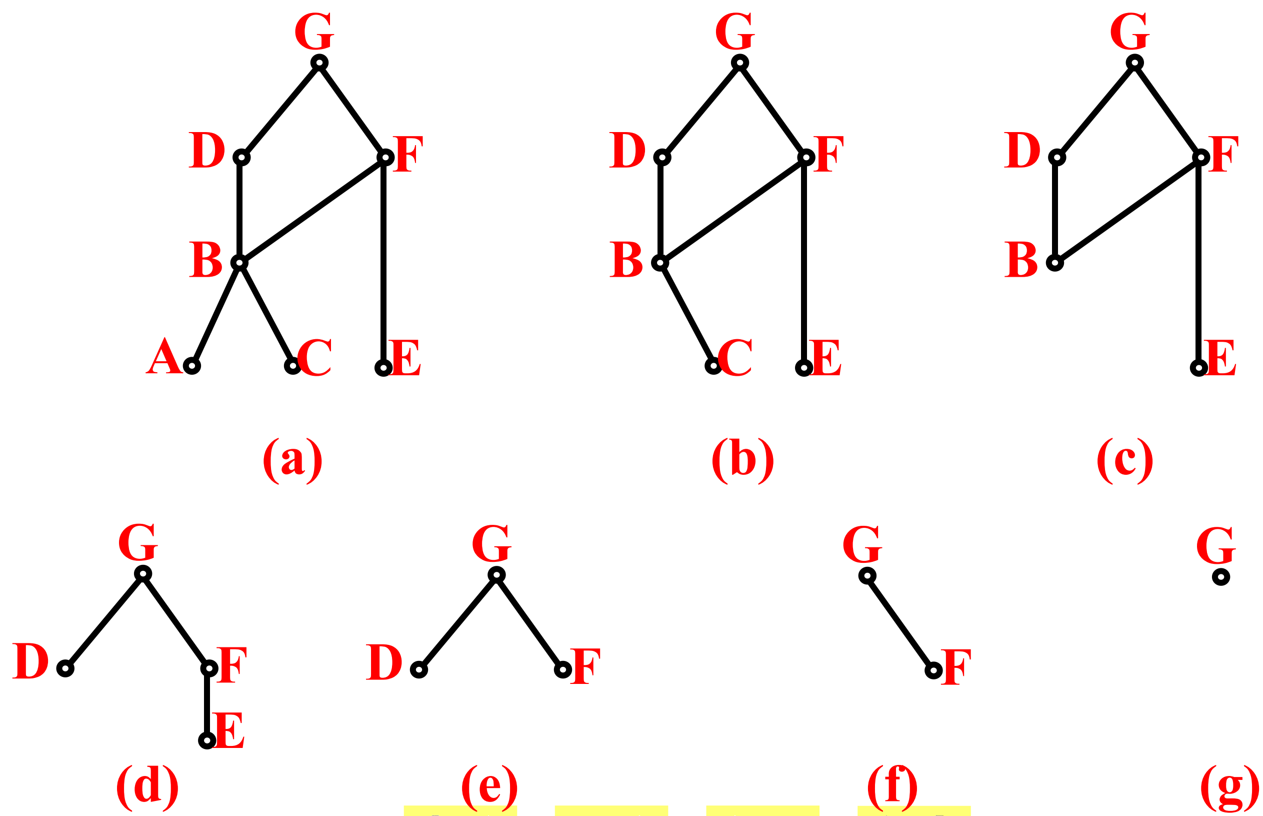
一个计算机公司开发的项目需要完成7个任务，其中的某些任务只能在其他任务结束之后才能开始。考虑如下建立任务上的偏序，如果任务Y在任务X介绍之后才能开始，则X≤Y。这7个任务的关于偏序的哈斯图如右图，

求一个全序执行这些任务以完成这个项目。



例7.3.16 解

可以通过执行一个排序得到7个任务的一种排序，排序的步骤见下图(a)到(g)



7.4 本章总结

1. 等价关系的概念及证明、等价类和商集的计算；
2. 集合划分的定义、求给定集合的划分；
3. 等价关系与集合划分的关系；
4. 偏序关系、拟序关系、全序关系和良序关系的定义，它们之间的异同；
5. 哈斯图的画法；
6. 八个特殊元的定义和基本性质。