离散数学

2021年3月5日星期五

二元关系

关系理论历史悠久。它与集合论、数理逻辑、组合学、图论和布尔代数都有密切的联系。

关系是日常生活以及数学中的一个基本概念，例如：兄弟关系，师生关系、位置关系、大小关系、等于关系、包含关系等。

在某种意义下，关系可以理解为有联系的一些对象相互之间的比较行为。而根据比较结果来执行不同任务的能力是计算机最重要的属性之一，在执行一个典型的程序时，要多次用到这种性质。

关系理论在计算机科学技术中的应用

- 计算机程序的输入、输出关系；
- 数据库的数据特性关系；
- 数据结构本身就是一个关系等。
- 数据结构、情报检索、数据库、算法分析、计算机理论等计算机学科很好的数学工具。

内容提要

教学目标

- 关系是一种特殊的集合，从集合的观点理解关系的基本概念，基本运算和基本性质；
- 通过“一题多解”培养学生的逻辑思维能力和发散思维的能力。

二元关系

内容提要

1 二元关系

2 关系的运算

3 关系的性质

4 关系的闭包运算

1 本章学习要求

重点掌握

1

1 二元关系的概念和表示
2 关系的复合与逆运算
3 关系的性质

一般掌握

2

1 关系的闭包运算

了解

3

1 n重有序组
2 n个集合的笛卡儿积
3 n重有序组相等的判定

6.2 二元关系

6.2.1 序偶与笛卡尔积

- 上, 下；左，右；3<4；中国地处亚洲；平面上点的坐标（x, y）等。
- 特征：成对出现、具有一定的顺序。
- **定义6.2.1** 由两个元素x, y按照一定的次序组成的二元组称为有序偶对(序偶)，记作<x, y>，其中称x为<x, y>的第一元素，y为<x, y>的第二元素。

例6.2.1

用序偶表示下列语句中的次序关系

(1) 平面上点A的横坐标是x，纵坐标是y，x, y∈R； <x, y>，x, y∈R；

(2) 成都是四川的省会； <成都, 四川>；

(3) 英语课本在书桌上； <英语课本, 书桌>；

(4) 左，右关系。 <左, 右>。

序偶与集合的关系

1. 序偶可以看作是具有两个元素的集合，
2. 但是序偶中的两个元素具有**确定的次序**。即 $\langle a, b\rangle \neq \langle b, a\rangle$，**但是** $\{a, b\} = \{b, a\}$。

定义6.2.2 给定序偶$\langle a, b\rangle$和$\langle c, d\rangle$，

$$\langle a, b\rangle = \langle c, d\rangle \Leftrightarrow a=c \text{且} b=d。$$

N重有序组

定义6.2.3 由n个元素$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$按照一定次序组成的n元组称为**n重有序组**(n-Type)(Vector)，记作：$\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$

例6.2.2 用n重有序组描述下列语句。

（1）中国四川成都电子科技大学计算机学院；

<中国,湖北,武汉,华中科技大学,计算机学院>

（2）2006年5月10日18点16分25秒；

$\langle 2006, 5, 10, 18, 16, 25 \rangle$

（3）16减5再加3除以7等于2。

$\langle 16, 5, 3, 7, 2 \rangle$

定义6.2.4 给定n重有序组$\langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$和$\langle b_1, b_2, \ldots, b_n \rangle$。

$$\langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle = \langle b_1, b_2, \ldots, b_n \rangle \Leftrightarrow a_i = b_i \ (i=1, 2, \ldots, n)$$

笛卡尔乘积

定义6.2.5 设A，B是两个集合，称集合：

$$A\times B=\{\langle x,y\rangle \mid (x\in A)\wedge(y\in B)\}$$

为集合A与B的**笛卡尔积**(DescartesProduct)。

注意：

① 集合A与B的笛卡儿积A×B仍然是集合；

② 集合A×B中的元素是序偶，序偶中的第一元素取自A，第二元素取自B。

例6.2.3

设A={a}，B={b,c}，C=Φ，D={1,2}，请分别写出下列笛卡儿积中的元素。

（1）A×B，B×A；（2）A×C，C×A；

（3）A×(B×D)，(A×B)×D。

解 根据**笛卡儿积的定义**，有

（1）A×B={<a,b>,<a,c>}，

B×A={<b,a>,<c,a>}；

（2）A×C=Φ，C×A=Φ；

例6.2.3 解（续）

（3）因为$B\times D=\{\langle b,1\rangle,\langle b,2\rangle,\langle c,1\rangle,\langle c,2\rangle\}$，

所以$A\times(B\times D)$

$=\{\langle a,\langle b,1\rangle\rangle,\langle a,\langle b,2\rangle\rangle,\langle a,\langle c,1\rangle\rangle,\langle a,\langle c,2\rangle\rangle\}$。

同理，$(A\times B)\times D$

$=\{\langle\langle a,b\rangle,1\rangle,\langle\langle a,b\rangle,2\rangle,\langle\langle a,c\rangle,1\rangle,\langle\langle a,c\rangle,2\rangle\}$。

注意

由例6.2.3我们可以看出：

（1）笛卡儿积不满足交换律；

（2）$A\times B=\Phi$当且仅当$A=\Phi$或者$B=\Phi$；

（3）笛卡儿积不满足结合律；

（4）对有限集A,B，有$|A\times B|=|B\times A|=|A|\times|B|$。

定理6.2.1

设A,B,C是任意三个集合，则

（1）$A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$；

（2）$(B\cup C)\times A=(B\times A)\cup(C\times A)$；

（3）$A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$；

（4）$(B\cap C)\times A=(B\times A)\cap(C\times A)$。

分析　待证等式两端都是集合

等式成立$\Leftrightarrow$两个集合相等

集合相等$\Leftrightarrow$两个集合互相包含

定理6.2.1 分析

对（1）$A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$ $\Leftrightarrow$

$A\times(B\cup C)\subseteq(A\times B)\cup(A\times C)$，$(A\times B)\cup(A\times C)\subseteq A\times(B\cup C)$

利用按定义证明方法，首先叙述包含关系的定义，即首先叙述$A\times(B\cup C)\subseteq(A\times B)\cup(A\times C)$的定义：

对任意$\langle x,y\rangle\in A\times(B\cup C)$，...，

有$\langle x,y\rangle\in(A\times B)\cup(A\times C)$，

则$A\times(B\cup C)\subseteq(A\times B)\cup(A\times C)$。

同理可分析$(A\times B)\cup(A\times C)\subseteq A\times(B\cup C)$。

定理6.2.1 证明

（1）对任意$\langle x,y\rangle \in A\times(B\cup C)$，

由笛卡儿积的定义知，$x\in A$且$y\in B\cup C$；

由并运算定义知，$y\in B$或者$y\in C$。

于是有$x\in A$且$y\in B$或者$x\in A$且$y\in C$。

从而，$\langle x,y\rangle \in A\times B$或者$\langle x,y\rangle \in A\times C$。

即$\langle x,y\rangle \in (A\times B)\cup(A\times C)$，

所以，$A\times(B\cup C)\subseteq(A\times B)\cup(A\times C)$。

定理6.2.1 证明（续）

另一方面，对任意$\langle x, y\rangle \in (A\times B)\cup(A\times C)$，

由并运算定义知，$\langle x, y\rangle \in A\times B$或者$\langle x, y\rangle \in A\times C$。

由笛卡儿积的定义知，$x\in A$且$y\in B$或$x\in A$且$y\in C$。

进一步有$x\in A$且$y\in B\cup C$，

从而$\langle x, y\rangle \in A\times(B\cup C)$。

所以$(A\times B)\cup(A\times C)\subseteq A\times(B\cup C)$。

于是，根据定理1.2.2，

有$A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$。

(2)、(3)和(4)的证明作为练习，自证。

定理6.2.2

设A,B,C,D是任意四个集合，则

$$(A\times B)\subseteq(C\times D) \Leftrightarrow A\subseteq C,\ B\subseteq D。$$

证明 **充分性($\Leftarrow$)：**

对任意$\langle x,y\rangle\in A\times B$，有$x\in A$且$y\in B$。

又因为$A\subseteq C$，$B\subseteq D$，所以有$x\in C$且$y\in D$，即

$\langle x,y\rangle\in C\times D$，从而$(A\times B)\subseteq(C\times D)$。

定理6.2.2 证明（续）

必要性(⇒)：

对任意$x \in A$，$y \in B$，有$\langle x, y\rangle \in A \times B$。

又因为$(A \times B) \subseteq (C \times D)$，所以$\langle x, y\rangle \in C \times D$。

根据笛卡儿积的定义，有$x \in C$且$y \in D$，从而

$$A \subseteq C，B \subseteq D。$$

综上所述，定理成立。

推广

定义6.2.6　设$A_1, A_2, \cdots, A_n$是n个集合，称集合

$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$

$=\{\langle a_1, a_2, \cdots, a_n\rangle \mid (a_i \in A_i) \wedge i \in \{1, 2, 3, \cdots, n\}\}$

为集合$A_1, A_2, \cdots, A_n$的笛卡儿积(DescartesProduct)

当$A_1=A_2=\cdots=A_n=A$时，有$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n=A^n$。

定理6.2.3　当集合$A_1, A_2, \cdots, A_n$都是有限集时，

$|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n|=|A_1| \times |A_2| \times \cdots \times |A_n|$。

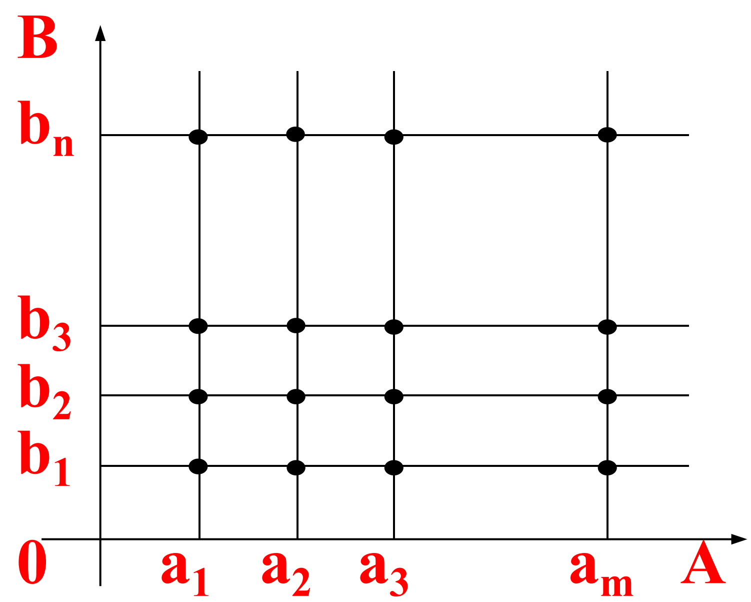
6.2.2关系的定义

问题：某学校组织学生看电影，电影院里共有n个座位，看电影的学生共有m个（m≤n），每个学生坐一个座位。请问，**怎样表示学生和座位之间的从属关系？**

假设A,B分别表示某学校所有学生的集合和电影院里所有座位的集合，即

$$A=\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$$

$$B=\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$$



二元关系

定义6.2.7 设A,B为两个非空集合，称A×B的任何子集R为**从A到B的二元关系**，简称关系(Relation)。如A＝B，则称R为**A上的二元关系**。

这里，A称为R的**前域**，B称为R的**后域**。

令 $C=\{x \mid \langle x,y\rangle \in R\} \subseteq A$,

$D=\{y \mid \langle x,y\rangle \in R\} \subseteq B$,

称C为R的**定义域**，记为C＝**domR**；称D为R的**值域**，记D＝**ranR**；并称fldR＝D∪C为R的**域**。

特别

当R=Φ时，称R为空关系(emptyrelation)；

当R=A×B时，则称R为全关系(TotalRelation)。

设一有序对<x, y>：

若<x, y>∈R，则记为xRy，读作“x对y有关系R”；

若<x, y>∉R，则记为$x \not{R} y$，读作“x对y没有关系R”。

例6.2.4

假设A={a, b}，B={c, d}，试写出从A到B的所有不同关系。

解 因为A={a, b}，B={c, d}，所以

$$A\times B=\{\langle a,c\rangle,\langle a,d\rangle,\langle b,c\rangle,\langle b,d\rangle\}。$$

于是A×B的所有不同子集为：

0－元子集：Φ；

1－元子集：$\{\langle a,c\rangle\}$，$\{\langle a,d\rangle\}$，$\{\langle b,c\rangle\}$，$\{\langle b,d\rangle\}$；

2－元子集：$\{\langle a,c\rangle,\langle a,d\rangle\}$，$\{\langle a,c\rangle,\langle b,c\rangle\}$，

$\{\langle a,c\rangle,\langle b,d\rangle\}$，$\{\langle a,d\rangle,\langle b,d\rangle\}$，

$\{\langle a,d\rangle,\langle b,d\rangle\}$，$\{\langle b,c\rangle,\langle b,d\rangle\}$；

例6.2.4 解（续）

3－元子集：

{<a, c>, <a, d>, <b, c>}，{<a, c>, <a, d>, <b, d>}，

{<a, c>, <b, c>, <b, d>}，{<a, d>, <b, c>, <b, d>}；

4－元子集：{<a, c>, <a, d>, <b, c>, <b, d>}。

注意

当集合A, B都是有限集时，A×B共有$2^{|A|\cdot|B|}$个不同的子集，即从A到B的不同关系共有$2^{|A|\cdot|B|}$个。

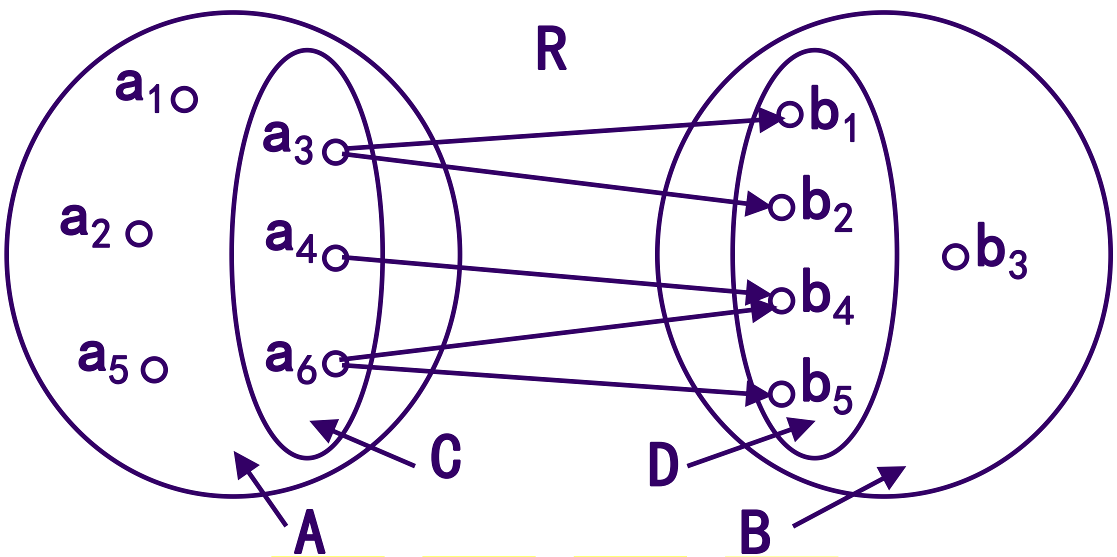
用图表示关系

假设$A=\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$，$B=\{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$，

$C=\{a_3, a_4, a_6\}$，$D=\{b_1, b_2, b_4, b_5\}$，

$R=\{\langle a_3, b_1\rangle, \langle a_3, b_2\rangle, \langle a_4, b_4\rangle, \langle a_6, b_4\rangle, \langle a_6, b_5\rangle\}$。

显然，$R\subseteq C\times D\subseteq A\times B$。



例6.2.5

求定义在Z上关系的定义域、值域和域。

（1）$R_1=\{\langle x,y\rangle \mid (x,y\in Z)\wedge \{y=x^2\}\}$；

（2）$R_2=\{\langle x,y\rangle \mid (x,y\in Z)\wedge \{|x|=|y|=7\}\}$。

解（1）$domR_1=Z$，

$ranR_1=\{x^2 \mid x\in Z\}$，

$fldR_1=Z$；

（2）$domR_2=\{7,-7\}$，

$ranR_2=\{7,-7\}$，

$fldR_2=\{7,-7\}$。

例6.2.6

设H={f,m,s,d}表示一个家庭中父母子女四个人的集合，确定H上的一个长幼关系R_H，指出该关系的定义域、值域和域。

解 $R_H=\{\langle f,s\rangle,\langle f,d\rangle,\langle m,s\rangle,\langle m,d\rangle\}$；

$\mathrm{dom}R_H=\{f,m\}$，$\mathrm{ran}R_H=\{s,d\}$， $\mathrm{fld}R_H=\{f,m,s,d\}$

推广

定义6.2.8 设$A_1,A_2,\cdots,A_n$为n个非空集合，称$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$的任意子集R为以$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$为基的**n元关系**(n-Relation)。

6.2.3关系的表示法

1. 集合表示法（枚举法和叙述法）

例6.2.7（1）设A={a}，B={b, c}，用枚举法写出从A到B的不同关系；

（2）用叙述法写出定义在R上的“相等”关系。

解（1）A到B的不同关系有：

$R_1=\Phi$，　　$R_2=\{\langle a, b\rangle\}$，

$R_3=\{\langle a, c\rangle\}$，　　$R_4=\{\langle a, b\rangle, \langle a, c\rangle\}$；

（2）设R上的“相等”关系为S，则

$$S=\{\langle x, y\rangle \mid (x, y\in R)\wedge(x=y)\}。$$

2. 关系图法

（1）$A \neq B$

设$A=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$，$B=\{b_1, b_2, \cdots, b_m\}$，R是从A到B的一个二元关系，则规定R的关系图如下：

①. 设$a_1, a_2, \ldots, a_n$和$b_1, b_2, \ldots, b_m$分别为图中的结点，用“。”表示；

②. 如$\langle a_i, b_j\rangle \in R$，则从$a_i$到$b_j$可用有向边$a_i$。$\rightarrow$。$b_j$相连。$\langle a_i, b_j\rangle$为对应图中的有向边。

关系图法（续）

(2) A=B

设$A=B=\langle a_1, a_2, \cdots, a_n \rangle$，R是A上的关系，则R的关系图规定如下：

①. 设$a_1, a_2, \cdots, a_n$为图中结点，用“。”表示

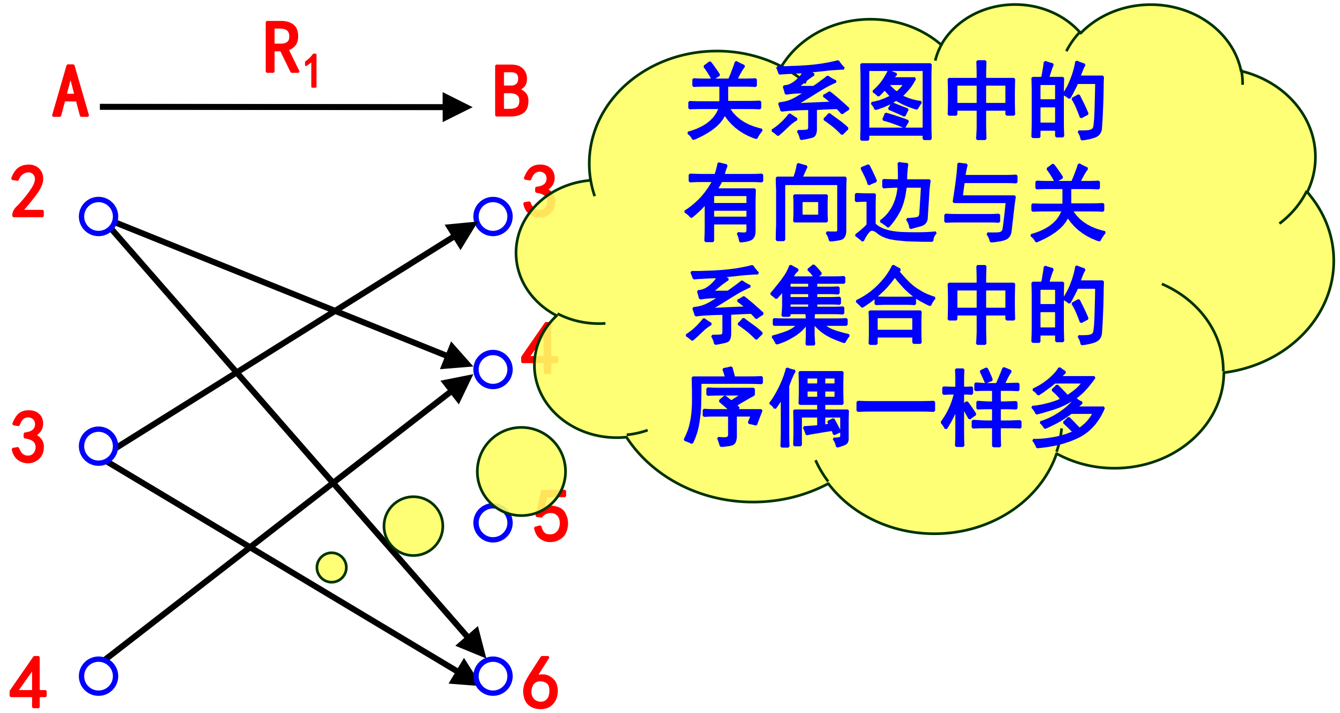
②. 如$\langle a_i, a_j \rangle \in R$，则从$a_i$到$a_j$可用有向边$a_i$ b_j相连。$\langle a_i, a_j \rangle$为对应图中的有向边。

③. 如$\langle a_i, a_i \rangle \in R$, 则从$a_i$到$a_i$用一带箭头的小圆环表示，即：$a_i$

例6.2.8

试用关系图表示下面的关系。

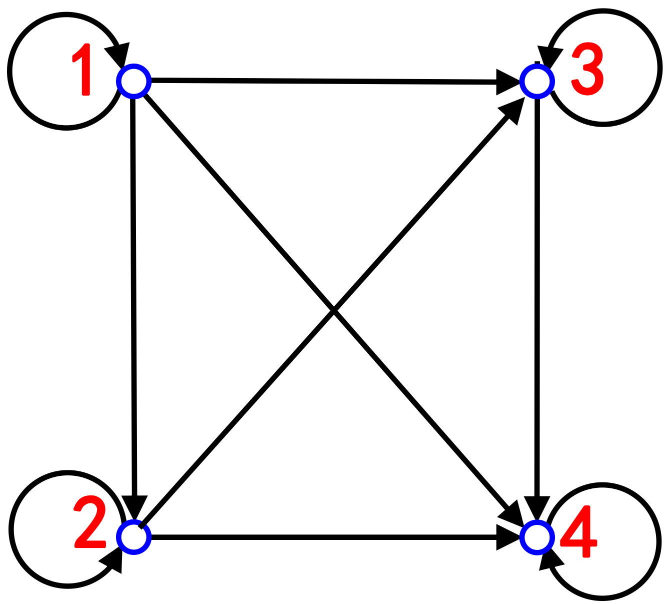
（1）设A={2, 3, 4}，B={3, 4, 5, 6}，则A到B之间的一种**整除关系**R_1={<2, 4>, <2, 6>, <3, 3>, <3, 6>, <4, 4>}



例6.2.8（续）

（2）假设A={1, 2, 3, 4}，则A上的小于等于关系

R_2={<1, 1>, <2, 2>, <3, 3>, <4, 4>, <1, 2>, <1, 3>, <1, 4>, <2, 3>, <2, 4>, <3, 4>}。



3. 关系矩阵

设$A=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$，$B=\{b_1, b_2, \cdots, b_m\}$，R是从A到B的一个二元关系，称矩阵$M_R=(r_{ij})_{n\times m}$为关系R的**关系矩阵**(Relation Matrix)，其中

$$r_{ij}=\begin{cases}1 & \langle a_i,b_j\rangle\in R\\ 0 & \langle a_i,b_j\rangle\notin R\end{cases}\quad (i=1,2,...,n,j=1,2,...,m)$$

又称M_R为R的**邻接矩阵**(Adjacency Matrix)。

注意
1. 必须先对集合A,B中的元素排序
2. A中元素序号对应矩阵元素的行下标，
3. B中元素序号对应矩阵元素的列下标；
4. 关系矩阵是0-1矩阵，称为布尔矩阵。

例6.2.9

设A = {1, 2, 3, 4}，考虑A上的整除关系R和等于关系S。

（1）试写出R和S中的所有元素；

（2）试写出R和S的关系矩阵。

例6.2.9 解

（1）根据整除关系和等于关系的定义，有

$R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,4\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,$
$\langle 1,4\rangle,\langle 2,4\rangle\}$

$S=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,4\rangle\}$。

（2）设R和S的关系矩阵分别为M_R和M_S，则有

$$M_R=\begin{array}{c}\\1\\2\\3\\4\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}1&2&3&4\end{array}\\\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\end{array}\qquad M_S=\begin{array}{c}\\1\\2\\3\\4\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}1&2&3&4\end{array}\\\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\end{array}$$

布尔矩阵的运算

定义6.2.9 如果$A=(a_{ij})_{m\times n}$和$B=(b_{ij})_{m\times n}$是布尔矩阵，则**A和B的并**(join)是矩阵$A\vee B=C=(c_{ij})_{m\times n}$，其中：

$$c_{ij}=\begin{cases}1, & \text{如果}a_{ij}=1\text{或}b_{ij}=1 \\ 0, & \text{如果}a_{ij}=0\text{且}b_{ij}=0\end{cases}\quad \begin{matrix}(1\le i\le m, \\ 1\le j\le n)\end{matrix}\qquad (6.2.2)$$

即　$c_{ij}=a_{ij}\vee b_{ij}$

定义6 和$B=(b_{ij})$是两个$m\times n$矩阵，则**A和B的交**(meet)是矩阵$A\wedge B=C=(c_{ij})$，其中：

$$c_{ij}=\begin{cases}1, \text{如果}a_{ij}=1\text{且}b_{ij}=1 \\ 0, \text{如果}a_{ij}=0\text{或}b_{ij}=0\end{cases}\quad \begin{matrix}(1\le i\le m, \\ 1\le j\le n)\end{matrix}\qquad (6.2.3)$$

即　$c_{ij}=a_{ij}\wedge b_{ij}$

布尔矩阵的运算(续)

定义6.2.11 如果矩阵$A=(a_{ij})_{m\times p}$，$B=(b_{ij})_{p\times n}$，则**A和B的布尔积**（Boolean product）是矩阵$A\odot B=C=(c_{ij})_{m\times n}$，其中：

$$c_{ij}=\begin{cases}1, & \text{存在}k\text{使得}a_{ik}=1\text{且}b_{kj}=1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}\quad (1\le k\le p,\ 1\le i\le m,\ 1\le j\le n)$$

即 $c_{ij}=\bigvee\limits_{k=1}^{p}(a_{ik}\wedge b_{kj})$

两个布 矩阵可进行并和交运算的前提

列数；

两个布 运算的前提是

前一矩阵的列数等于后一矩阵的行数。

例6.2.10

令 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$、$B=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$和 $C=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&1&1\\1&1&0&0\end{pmatrix}$。

计算

（1）$A\vee B$；　　（2）$A\wedge B$；　　（3）$A\odot C$。

解

(1) $A \vee B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(2) $A \wedge B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(3) $A \odot C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

6.2.4 二元关系的难点

1. 序偶有两层含义：一是“顺序”，二是“偶对”，即由两个元素形成的有顺序的一个偶对。当$x \neq y$时，一定有$\langle x, y\rangle \neq \langle y, x\rangle$。注意与由两个元素构成的集合的区别；
2. 关系是一种特殊的集合，牢记其元素是以序偶的形式出现的，注意与一般集合的区别。在一个普通集合A中任取一个元素表示为“$\forall x \in A$”，在一个关系R中任取一个元素表示为“$\forall \langle x,y\rangle \in R$”；
3. 在关系图表示法中，注意A到B的关系与A上的关系相应关系图的区别；
4. 在关系矩阵表示法中，对集合A到B的关系R，对应A和B中不同的元素顺序，可以得到不同的关系矩阵，但是，经过一些初等变换后，这些不同的关系矩阵可以变为同一矩阵。因此，在通常情况下，如果集合以枚举法表示时，则默认枚举的次序为元素的顺序。

6.2.5 关系的应用

集合A到集合B上的关系可以看成是列出了集合A中的一些元素与集合B中的相关元素的表(table)。

例6.2.11 试用关系表示图6.2.5。

解 图6.2.5可以用关系表示如下：

{<a, c>, <a, b>, <b, b>, <b, f>, <c, d>, <c, e>, <d, c>, <d, b>, <e, f>, <f, d>}。

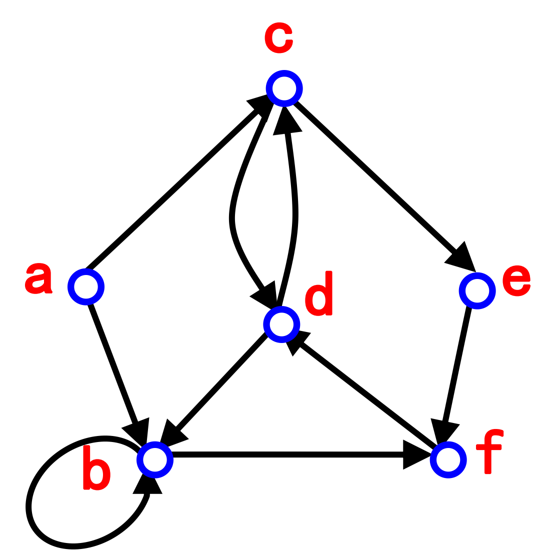


图6.2.5

例6.2.12

设集合A = {张红，李明，

B = {离散数学，操作系统

R = {<张红，离散数学>，

<王强，操作系统>，<程

计算机科学>，<张红，　算

数学>，<王强，　数据结构

<赵伟，计算机图形学>}，

试用表的形式表示关系R。

解　关系R的表的表示形式

学生	课程
张红	离散数学
李明	离散数学
王强	操作系统
程飞	操作系统
赵伟	计算机科学
张红	算法分析
李明	组合数学
王强	数据结构
程飞	组合数学
赵伟	计算机图形学

例6.2.13

请分别将下列表6.2.2和6.2.3表示的关系改写为关系集合表示形式。

表6.2.2

8840	锤子
9921	钳子
452	油漆
2207	地毯

表6.2.3

a	3
b	1
b	4
c	1

解 （1）设表6.2.2表示的关系为R_1，则

R_1={<8840, 锤子>, <9921, 钳子>, <452, 油漆>, <2207, 地毯>}；

(2) 设表6.2.3表示的关系为R_2，则R_2={<a, 3>, <b, 1>, <b, 4>, <c, 1>}

例6.2.14

请将下列关系改写为表。

（1）R ＝ {<a, 6>, <b, 2>, <a, 1>, <c, 1>}；

（2）在{1, 2, 3}上定义关系R：如果$x^2 \geq y$，则<x, y>∈R。

解（1）关系R的表表示形式见表6.2.4；

（2）由题意得R={<1, 1>, <2, 1>, <3, 1>, <2, 2>, <2, 3>, <3, 2>, <3, 3>}，其对应的表见表6.2.5

表6.2.4

a	6
b	2
a	1
c	1

表6.2.5

1	1
2	1
3	1
2	2
2	3
3	2
3	3

6.3 关系的运算

设R，S都是从集合A到B的两个关系，则：

$R\cup S=\{\langle x,y\rangle \mid (xRy)\vee(xSy)\}$

$R\cap S=\{\langle x,y\rangle \mid (xRy)\wedge(xSy)\}$

$R-S=\{\langle x,y\rangle \mid (xRy)\wedge(x\not S y)\}$

$\overline{R}=\{\langle x,y\rangle \mid (x\not R y)\}$

注意：A×B是相对于R的全集，所以有

$\overline{R}=A\times B-R$，且$R\cup\overline{R}=A\times B$，$R\cap\overline{R}=\Phi$。

$\overline{\overline{R}}=R$，　　$S\subseteq R \Leftrightarrow \overline{R}\subseteq\overline{S}$

例6.3.1

设A={a, b, c, d}，A上关系R和S定义如下：

$R = \{\langle a, b\rangle, \langle b, d\rangle, \langle c, c\rangle\}$，

$S = \{\langle a, c\rangle, \langle b, d\rangle, \langle d, b\rangle\}$。

计算 $R\cup S$，$R\cap S$，$R-S$，$S-R$，$\overline{R}$。

解

$R\cup S=\{\langle a,b\rangle,\langle a,\ c\rangle,\langle b,d\rangle,\langle c,c\rangle,\langle d,b\rangle\}$；

$R\cap S=\{\langle x,y\rangle\mid(xRy)\wedge(xSy)\}=\{\langle b,d\rangle\}$；

$R-S=\{\langle x,y\rangle\mid(xRy)\wedge(xy)\}=\{\langle a,b\rangle,\langle c,c\rangle\}$；

$\overline{R}=A^2-R=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle a,c\rangle,\langle a,d\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,b\rangle,$

$\langle b,c\rangle,\langle b,d\rangle,\langle c,a\rangle,\langle c,b\rangle,\langle c,c\rangle,\langle c,d\rangle,\langle d,a\rangle,$

$\langle d,b\rangle,\langle d,c\rangle,\langle d,d\rangle\}-\{\langle a,b\rangle,\langle b,d\rangle,\langle c,c\rangle\}$

$=\{\langle a,a\rangle,\langle a,c\rangle,\langle a,d\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,b\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,a\rangle,$

$\langle c,b\rangle,\langle c,d\rangle,\langle d,a\rangle,\langle d,b\rangle,\langle d,c\rangle,\langle d,\ d\rangle\}$。

6.3.1 关系的复合运算

定义6.3.1 设A,B,C是三个集合，R是从A到B的关系(R：A→B)，S是从B到C的关系(S：B→C)，则R与S的复合关系(合成关系)(Composite)RoS是从A到C的关系，并且：

1. R和S是可复合的⇔R的后域和S的前域完全相同；
2. RoS的前域是R的前域A，后域是S的后域C；
3. RoS＝Φ⇔对任意x∈A和z∈C，不存在y∈B，使得xRy和ySz同时成立；
4. ΦoR＝RoΦ＝Φ 。

例6.3.2

试判断下列关系是否是两个关系的复合，如果是，请指出对应的两个关系。

（1）“祖孙”关系；　（2）“舅甥”关系；

（3）“兄妹”关系。

解（1）“祖孙”关系是“父女”关系和“母子”关系的复合；

（2）“舅甥”关系是“兄妹”关系和“母子”关系的复合；

（3）不是。

例6.3.3

设A={a, b, c, d}， B={b, c, d}， C={a, b, d}，

R={<a, b>, <b, b>, <c, d>, <d, c>}是A到B的关系，

S={<b, d>, <d, a>, <d, b>}是B到C的关系。

试用关系的三种表示方法求R∘S。

解 （1） R∘S={<a, d>, <b, d>, <c, a>, <c, b>}；

根据关系复合的定义，$\langle a_i, c_j\rangle \in R\circ S$当且仅当存在$b_k \in B$使得$\langle a_i, b_k\rangle \in R$且$\langle b_k, c_j\rangle \in S$，用关系矩阵描述即为

$$r_{ij} = \bigvee_{k=1}^{p} (a_{ik} \wedge b_{kj}) \qquad \text{故 } M_{R\circ S} = M_R \circ M_S$$

（2） $M_{R\circ S} = M_R \circ M_S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

例6.3.3(续)

（3）R∘S的关系图如图6.3.2所示，其中图6.3.1是以y为“桥梁”的情形。根据图6.3.2得R∘S={<a, d>, <b, d>, <c, a>, <c, b>} 。

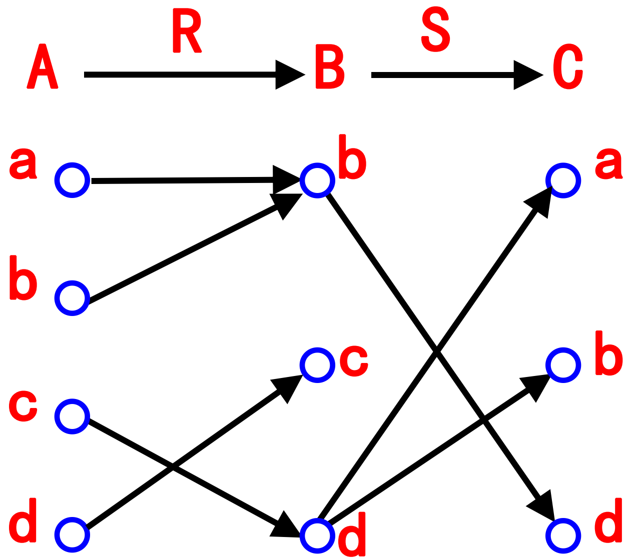


图6.3.1

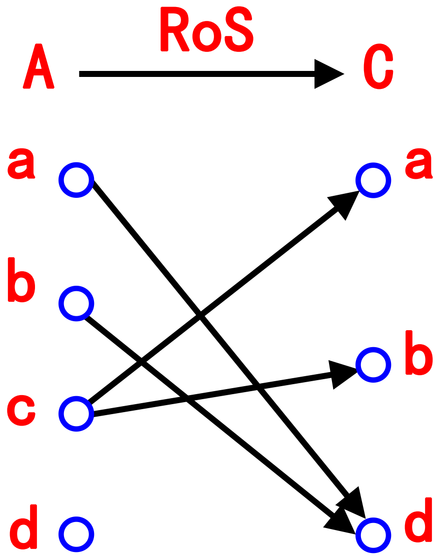


图6.3.2

例6.3.4

设A={1,2,3,4},

$R=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,4\rangle\}$,

$S=\{\langle 2,4\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 4,2\rangle\}$,

$T=\{\langle 1,4\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 4,2\rangle\}$

是A上的三个关系。**计算**

（1）$R\circ S$和$S\circ R$;

（2）$(R\circ S)\circ T$和$R\circ(S\circ T)$。

解

(1) $R \circ S = \{\langle 1,2\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 3,4\rangle\} \circ \{\langle 2,4\rangle, \langle 3,1\rangle, \langle 4,2\rangle\}$

$= \{\langle 1,4\rangle, \langle 2,4\rangle, \langle 3,2\rangle\}$

$S \circ R = \{\langle 2,4\rangle, \langle 3,1\rangle, \langle 4,2\rangle\} \circ \{\langle 1,2\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 3,4\rangle\}$

$= \{\langle 3,2\rangle, \langle 4,2\rangle\}$

(2) $(R \circ S) \circ T = (\{\langle 1,2\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 3,4\rangle\} \circ$

$\{\langle 2,4\rangle, \langle 3,1\rangle, \langle 4,2\rangle\}) \circ \{\langle 1,4\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 4,2\rangle\}$

$= \{\langle 1,4\rangle, \langle 2,4\rangle, \langle 3,2\rangle\} \circ \{\langle 1,4\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 4,2\rangle\}$

$= \{\langle 1,2\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 3,1\rangle\}$

$R \circ (S \circ T) = \{\langle 1,2\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 3,1\rangle\}$ $= (R \circ S) \circ T$

定理6.3.1

设A、B、C和D是任意四个集合，R、S和T分别是从A到B，B到C和C到D的二元关系，则

（1）$(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$；

（2）$I_A \circ R = R \circ I_B = R$，其中$I_A$和$I_B$分别是A和B上的恒等关系。

分析：二元关系是集合，二元关系的复合是关系，从而也是集合，因此上面两式就是证明两个集合相等。根据集合相等的定义，有$A=B \Leftrightarrow A \subseteq B$并且$B \subseteq A$，

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x \in A，有 x \in B。$$

证明

(1) 任意$\langle a,d\rangle\in(R\circ S)\circ T$，

由“o”知，至少存在$c\in C$，使得$\langle a,c\rangle\in R\circ S$，$\langle c,d\rangle\in T$。

对$\langle a,c\rangle\in R\circ S$，同样至少存一个$b\in B$，使得$\langle a,b\rangle\in R$，$\langle b,c\rangle\in S$。

于是，由$\langle b,c\rangle\in S$，$\langle c,d\rangle\in T$，有$\langle b,d\rangle\in S\circ T$，

由$\langle a,b\rangle\in R$和$\langle b,d\rangle\in S\circ T$，知

$\langle a,d\rangle\in R\circ(S\circ T)$，

所以$(R\circ S)\circ T\subseteq R\circ(S\circ T)$。

同理可证：$R\circ(S\circ T)\subseteq(R\circ S)\circ T$。

由集合性质知：$(R\circ S)\circ T=R\circ(S\circ T)$。

证明（续）

（2）任取$\langle a,b\rangle \in I_A o R$，其中$a\in A$，$b\in B$，由"o"的定义知，存在$a\in A$，使得$\langle a,a\rangle \in I_A$且$\langle a,b\rangle \in R$，从而有$I_A\ o\ R\subseteq R$。

反过来，任取$\langle a,b\rangle \in R$，由I_A的定义知，$\langle a,a\rangle \in I_A$，即$\langle a,b\rangle \in I_A o R$。

从而$R o I_A\subseteq R$。

于是由定理1.2.2知，$I_A o\ R=R$ 。

同理可证$R o I_B\ R$。

于是$I_A oR=R o I_B=R$得证。

定理6.3.2

设A、B、C和D是任意四个集合，R是从A到B的关系，S_1，S_2是从B到C的关系，T是从C到D的关系，则：

1) $R \circ (S_1 \cup S_2) = (R \circ S_1) \cup (R \circ S_2)$

2) $R \circ (S_1 \cap S_2) \subseteq (R \circ S_1) \cap (R \circ S_2)$

3) $(S_1 \cup S_2) \circ T = (S_1 \circ T) \cup (S_2 \circ T)$

4) $(S_1 \cap S_2) \circ T \subseteq (S_1 \circ T) \cap (S_2 \circ T)$

证明：4)

对任意$\langle b, d\rangle \in (S_1 \cap S_2) \circ T$，则由复合运算知，

至少存在$c \in C$，使得$\langle b, c\rangle \in (S_1 \cap S_2)$，$\langle c, d\rangle \in T$。

即：$\langle b, c\rangle \in S_1$，且$\langle b, c\rangle \in S_2$。

因此，由$\langle b, c\rangle \in S_1$，且$\langle c, d\rangle \in T$，则有：

$\langle b, d\rangle \in (S_1 \circ T)$，

由$\langle b, c\rangle \in S_2$，且$\langle c, d\rangle \in T$，则有：$\langle b, d\rangle \in (S_2 \circ T)$。

所以，$\langle b, d\rangle \in (S_1 \circ T) \cap (S_2 \circ T)$。即，

$$(S_1 \cap S_2) \circ T \subseteq (S_1 \circ T) \cap (S_2 \circ T)。$$

例6.3.5

试说明下面的包含关系不一定成立。

（1）$(R\circ S_1)\cap(R\circ S_2)\subseteq R\circ(S_1\cap S_2)$

（2）$(S_1\circ T)\cap(S_2\circ T)\subseteq(S_1\cap S_2)\circ T$

分析： 如要说明某一事实**不一定**成立，则可举一反例加以说明。

解（1）

设$A=\{a\}$，$B=\{b_1, b_2\}$，$C=\{c\}$，

关系R, S_1, S_2定义如下：

$R=\{\langle a, b_1\rangle, \langle a, b_2\rangle\}$，$S_1=\{\langle b_1, c\rangle\}$，$S_2=\{\langle b_2, c\rangle\}$

则由于$S_1 \cap S_2=\Phi$，所以$R\circ(S_1 \cap S_2) = R\circ\Phi = \Phi$，

但$(R\circ S_1)=\{\langle a, c\rangle\}$，$(R\circ S_2)=\{\langle a, c\rangle\}$，

所以 $(R\circ S_1) \cap (R\circ S_2)=\{\langle a, c\rangle\}$，

即 $(R\circ S_1) \cap (R\circ S_2) \not\subseteq R\circ(S_1 \cap S_2)$，

这说明$(R\circ S_1) \cap (R\circ S_2) \subseteq R\circ(S_1 \cap S_2)$不一定成立。

解（2）

设$A=\{a\}$，$B=\{b_1, b_2\}$，$C=\{c\}$，

关系S_1，S_2，T定义如下：

$S_1=\{\langle a, b_1\rangle\}$，$S_2=\{\langle a, b_2\rangle\}$，$T=\{\langle b_1, c\rangle, \langle b_2, c\rangle\}$。

则由于$S_1 \cap S_2=\Phi$，所以$(S_1 \cap S_2) \circ T=\Phi \circ T=\Phi$，

但$(S_1 \circ T)=\{\langle a, c\rangle\}$，$(S_2 \circ T)=\{\langle a, c\rangle\}$，

所以$(S_1 \circ T) \cap (S_2 \circ T)=\{\langle a, c\rangle\}$，

即$(S_1 \circ T) \cap (S_2 \circ T) \not\subseteq (S_1 \cap S_2) \circ T$，

这说明$(S_1 \circ T) \cap (S_2 \circ T) \subseteq (S_1 \cap S_2) \circ T$不一定成立。

说　明

- 如果说明某事实一定成立，则一定加以证明。
- 如要说明某一事实不一定成立，则可举一反例加以说明。
- 如要说明某事实一定不成立，则也一定加以证明。

6.3.2 关系的逆运算

定义6.3.2 设A，B是两个集合，R是A到B的关系，则从B到A的关系

$$R^{-1}=\{\langle b,a\rangle \mid \langle a,b\rangle\in R\}$$

称为R的**逆关系**(InverseRelation)，运算“-1”称为**逆运算**(InverseOperation)。

由定义：

$(R^{-1})^{-1}=R$；

$\Phi^{-1}=\Phi$。

注意：关系是一种集合，逆关系也是一种集合。

如果R是一个关系，则R^{-1}和$\overline{R}$都是关系，但R^{-1}和$\overline{R}$是完全不同的两种关系，千万不要混淆。

若$R\subseteq A\times B$，则$\overline{R}=A\times B-R\subseteq A\times B$，$R^{-1}\subseteq B\times A$。

例6.3.6

设$A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{a,b,c,d\}$，$C=\{2,3,4,5\}$，R是从A到B的一个关系且$R=\{\langle 1,a\rangle,\langle 2,c\rangle,\langle 3,b\rangle,\langle 4,b\rangle,\langle 4,d\rangle\}$，$S$是从$B$到$C$的一个关系且$S=\{\langle a,2\rangle,\langle b,4\rangle,\langle c,3\rangle,\langle c,5\rangle,\langle d,5\rangle\}$。

（1）计算R^{-1}，并画出R和R^{-1}的关系图；

（2）写出R和R^{-1}的关系矩阵；

（3）计算$(R\circ S)^{-1}$和$S^{-1}\circ R^{-1}$。

例6.3.6 解

(1) $R^{-1}=\{\langle 1,a\rangle,\langle 2,c\rangle,\langle 3,b\rangle,\langle 4,b\rangle,\langle 4,d\rangle\}^{-1}$

$=\{\langle a,1\rangle,\langle c,2\rangle,\langle b,3\rangle,\langle b,4\rangle,\langle d,4\rangle\}$,

R和R^{-1}的关系图见图6.3.3和图6.3.4。

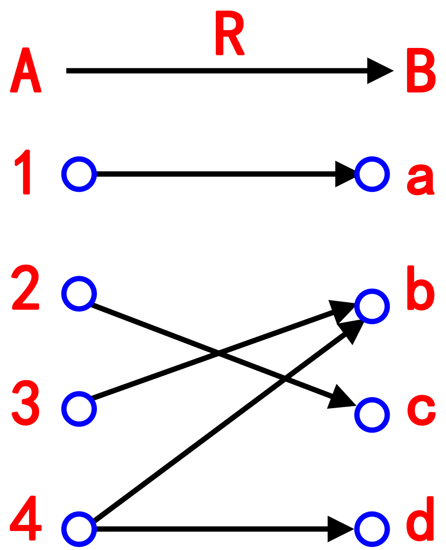


图6.3.3

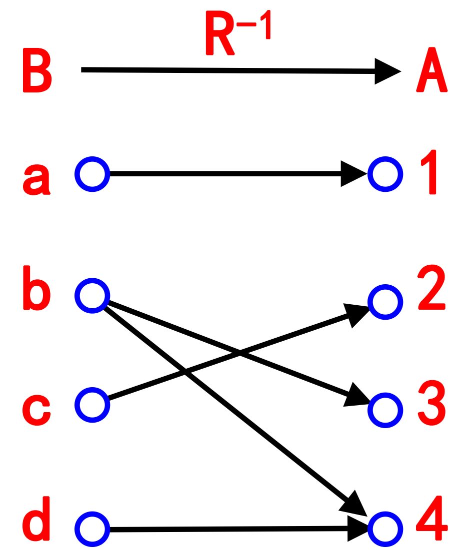


图6.3.4

例6.3.6 解（续）

（2）R和R^{-1}的关系矩阵为：

$$M_R=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&1&0&1\end{pmatrix},\qquad M_{R^{-1}}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&1\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

(3) ∵$R \circ S=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 2,5\rangle,\langle 3,4\rangle,\langle 4,4\rangle,\langle 4,5\rangle\}$，

∴ $(R \circ S)^{-1}=\{\langle 2,1\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 5,2\rangle,\langle 4,3\rangle,\langle 4,4\rangle,\langle 5,4\rangle\}$。

∵ $R^{-1}=\{\langle a,1\rangle,\langle c,2\rangle,\langle b,3\rangle,\langle b,4\rangle,\langle d,4\rangle\}$，

$S^{-1}=\{\langle 2,a\rangle,\langle 4,b\rangle,\langle 3,c\rangle,\langle 5,c\rangle,\langle 5,d\rangle\}$，

∴ $S^{-1} \circ R^{-1}=\{\langle 2,1\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 5,2\rangle,\langle 4,3\rangle,\langle 4,4\rangle,\langle 5,4\rangle\}$。

注意

1. 将R的关系图中有向边的方向改变成相反方向即得R^{-1}的关系图，反之亦然；
2. 将R的关系矩阵转置即得R^{-1}的关系矩阵，即R和R^{-1}的关系矩阵互为转置矩阵。
3. R^{-1}的前域与后域正好是R的后域和前域，即$domR=ranR^{-1}$，$domR^{-1}=ranR$；
4. $|R|=|R^{-1}|$；
5. $(R\circ S)^{-1}=S^{-1}\circ R^{-1}$。

定理6.3.3

设A、B和C是任意三个集合，R,S分别是从A到B,B到C的二元关系，则

$$(R\circ S)^{-1}=S^{-1}\circ R^{-1}。$$

证明

任取$\langle c, a\rangle \in (R\circ S)^{-1}$，则$\langle a, c\rangle \in R\circ S$

由"$\circ$"的定义知：则存在$b\in B$，使得：

$$\langle a, b\rangle \in R,\ \langle b, c\rangle \in S,$$

由"R^{-1}"的定义知，$\langle b, a\rangle \in R^{-1}$，$\langle c, b\rangle \in S^{-1}$，

从而有$\langle c, a\rangle \in S^{-1}\circ R^{-1}$，即$(R\circ S)^{-1} \subseteq S^{-1}\circ R^{-1}$。

反之，任取$\langle c, a\rangle \in S^{-1}\circ R^{-1}$，

由"$\circ$"的定义知：则至少存一个$b\in B$，使得：

$$\langle c, b\rangle \in S^{-1}\text{和}\langle b, a\rangle \in R^{-1}。$$

由"R^{-1}"的定义知，有$\langle a, b\rangle \in R$，$\langle b, c\rangle \in S$。

从而$\langle a, c\rangle \in R\circ S$，即$\langle c, a\rangle \in (R\circ S)^{-1}$，即$S^{-1}\circ R^{-1} \subseteq (R\circ S)^{-1}$。

由集合的定义知：$(R\circ S)^{-1} = S^{-1}\circ R^{-1}$。

定理6.3.4

设R，S是从集合A到集合B的关系，则有

① $(R\cup S)^{-1}=R^{-1}\cup S^{-1}$；　　(分配性)

② $(R\cap S)^{-1}=R^{-1}\cap S^{-1}$；

③ $(R-S)^{-1}=R^{-1}-S^{-1}$；

④ $(\overline{R})^{-1}=\overline{R^{-1}}$；　　(可换性)

⑤ $(A\times B)^{-1}=(B\times A)$；

⑥ $S\subseteq R \Leftrightarrow S^{-1}\subseteq R^{-1}$；　　(单调性)

6.3.3 关系的幂运算

定义6.3.3　设R是集合A上的关系，则R的n次幂，记为R^n，定义如下：

1. $R^0=I_A=\{\langle a,a\rangle | a\in A\}$；
2. $R^1=R$；
3. $R^{n+1}=R^n\circ R=R\circ R^n$。

由于关系的复合运算满足结合律，R^n即为n个R的复合，也是A上的二元关系。

显然，$R^m\circ R^n=R^{m+n}$，$(R^m)^n=R^{mn}$。

例6.3.7

设A={1, 2, 3, 4, 5, 6}，定义在A上的关系

R={<1, 1>, <1, 2>, <2, 3>, <3, 4>, <4, 5>, <5, 6>}，

S={<1, 2>, <2, 3>, <3, 4>, <4, 5>, <5, 6>}，

计算:

(1) R^n (n=1, 2, 3, 4, …)，$\bigcup_{i=1}^{6} R^i$ 和 $\bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$

(2) S^n (n=1, 2, 3, 4, …)，$\bigcup_{i=1}^{6} S^i$ 和 $\bigcup_{i=1}^{\infty} S^i$。

解

（1）$R^1 = R$,

$R^2 = R \circ R$

$= \{\langle a, a\rangle, \langle a, b\rangle, \langle a, c\rangle, \langle b, d\rangle, \langle c, e\rangle, \langle d, f\rangle\}$,

$R^3 = R \circ R \circ R = R^2 \circ R$

$= \{\langle a, a\rangle, \langle a, b\rangle, \langle a, c\rangle, \langle a, d\rangle, \langle b, e\rangle, \langle c, f\rangle\}$,

$R^4 = R^3 \circ R$

$= \{\langle a, a\rangle, \langle a, b\rangle, \langle a, c\rangle, \langle a, d\rangle, \langle a, e\rangle, \langle b, f\rangle\}$,

$R^5 = R^4 \circ R$

$= \{\langle a, a\rangle, \langle a, b\rangle, \langle a, c\rangle, \langle a, d\rangle, \langle a, e\rangle, \langle a, f\rangle\}$,

$R^6 = R^5 \circ R$

$= \{\langle a, a\rangle, \langle a, b\rangle, \langle a, c\rangle, \langle a, d\rangle, \langle a, e\rangle, \langle a, f\rangle\} = R^5$,

$R^7 = R^6 \circ R = R^5$, …, $R^n = R^5$ $(n > 5)$。

解（续1）

$$\bigcup_{i=1}^{6} R^i = R^1 \cup R^2 \cup \cdots \cup R^6 = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 1, 3\rangle,$$
$$\langle 1, 4\rangle, \langle 1, 5\rangle, \langle 1, 6\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 2, 4\rangle, \langle 2, 5\rangle, \langle 2, 6\rangle,$$
$$\langle 3, 4\rangle, \langle 3, 5\rangle, \langle 3, 6\rangle, \langle 4, 5\rangle, \langle 4, 6\rangle, \langle 5, 6\rangle\};$$

$$\therefore \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i = R^1 \cup R^2 \cup L \cup R^6 \cup R^7 \cup \cdots$$
$$= R^1 \cup R^2 \cup L \cup R^5 \cup R^5 \cup \cdots$$
$$= \bigcup_{i=1}^{6} R^i$$

解（续2）

（2）$S^1 = S$，

$S^2 = S \circ S = \{\langle a, c\rangle, \langle b, d\rangle, \langle c, e\rangle, \langle d, f\rangle\}$，

$S^3 = S \circ S \circ S = S2 \circ S = \{\langle a, d\rangle, \langle b, e\rangle, \langle c, f\rangle\}$，

$S^4 = S^3 \circ S = \{\langle a, e\rangle, \langle b, f\rangle\}$，

$S^5 = S^4 \circ S = \{\langle a, f\rangle\}$，

$S^6 = S^5 \circ S = \Phi$，

$S^7 = \Phi$，

…，

$S^n = \Phi \quad (n > 5)$。

解（续3）

$$\bigcup_{i=1}^{6} S^i = S^1 \cup S^2 \cup \cdots \cup S^6 = \{\langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 1,5\rangle, \langle 1,6\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 2,4\rangle, \langle 2,5\rangle, \langle 2,6\rangle, \langle 3,4\rangle, \langle 3,5\rangle, \langle 3,6\rangle, \langle 4,5\rangle, \langle 4,6\rangle, \langle 5,6\rangle\};$$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} S^i = S^1 \cup S^2 \cup \cdots \cup S^6 \cup \cdots = \bigcup_{i=1}^{6} S^i$$

由例6.3.7可以看出：

（1）幂集R^n的基数$|R^n|$并非随着n的增加而增加，而是呈递减趋势；

（2）当$n \geq |A|$时，则$R^n \subseteq \bigcup_{i=1}^{6} R^i$

定理6.3.5

设A是有限集合，且|A|＝n，R是A上的二元关系，则：

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} R^{i} = \bigcup_{i=1}^{n} R^{i}$$

证明　显然，$\bigcup_{i=1}^{n} R^{i} \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} R^{i}$。下面证：$\bigcup_{i=1}^{\infty} R^{i} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} R^{i}$。

由于，$\bigcup_{i=1}^{\infty} R^{i} = \left(\bigcup_{i=1}^{n} R^{i}\right) \cup \left(\bigcup_{i=n+1}^{\infty} R^{i}\right)$ 为此，只要证明对任意k＞n，

有$R^k \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} R^{i}$ 即可。

对任意$\langle a, b\rangle \in R^k$，则由“o”的定义知，存在$a_1, a_2, \ldots, a_{k-1} \in A$（为了统一，并假设$a_0=a$，$a_k=b$），使得：

$\langle a_0, a_1\rangle \in R$，$\langle a_1, a_2\rangle \in R$，$\langle a_2, a_3\rangle \in R$，…，$\langle a_{k-1}, a_k\rangle \in R$。

证明(续1)

由于$|A|=n$，所以由**鸽笼原理**知：$k+1$个元素中至少有两个以上元素相同，不妨假设$a_i=a_j(i<j)$，则可在

$$\langle a_0, a_1\rangle\in R,\ \langle a_1, a_2\rangle\in R,\ \langle a_2, a_3\rangle\in R,\ \cdots,$$

$$\langle a_{k-1}, a_k\rangle\in R$$

中删去$\langle a_i, a_{i+1}\rangle\in R$，$\langle a_{i+1}, a_{i+2}\rangle\in R$，$\cdots$，

$$\langle a_{j-1}, a_j\rangle\in R$$

后仍有

证明(续2)

$\langle a_0, a_1\rangle \in R$，$\langle a_1, a_2\rangle \in R$，$\langle a_2, a_3\rangle \in R$，…，$\langle a_{i-1}, a_i\rangle \in R$，$\langle a_j, a_{j+1}\rangle \in R$，…，$\langle a_{k-1}, a_k\rangle \in R$

由关系的复合运算得，$\langle a, b\rangle = \langle a_0, a_k\rangle \in R^{k'}$，其中 $k' = k-(j-i)$，此时：

证明(续2)

若$k' \leqslant n$，则：$\langle a, b\rangle \in \bigcup_{i=1}^{n} R^i$；

若$k' > n$，则重复上述做法，最终总能找到$k'' \leqslant n$，使得：$\langle a, b\rangle = \langle a_0, a_k\rangle \in R^{k''}$，

即有：$\langle a, b\rangle \in \bigcup_{i=1}^{n} R^i$，由此有：$R^k \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} R^i$。由k的任意性知：$\bigcup_{i=1}^{\infty} R^i \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} R^i$，

所以，$\bigcup_{i=1}^{\infty} R^i = \bigcup_{i=1}^{n} R^i$。

例

设$A=\{a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$，$|A|=6$，R是A上的二元关系。

取$k=8>6=n$， 有$R^8 \subseteq \bigcup_{i=1}^{6} R^i$ 即可。

对任意$<a,b>\in R^8$，则由“o”的定义知，存在$a_1, a_2, \ldots, a_7 \in A$（为了统一，假设$a_0=a$，$a_8=b$），使得：

$<a_0,a_1>\in R$，$<a_1,a_2>\in R$，$<a_2,a_3>\in R$，$<a_3,a_4>\in R$，$<a_4,a_5>\in R$，$<a_5,a_6>\in R$，$<a_6,a_7>\in R$，$<a_7,a_8>\in R$。

例（续）：

由于$|A|=6$，所以由鸽笼原理知：9个元素中至少有两个以上元素相同，不妨假设$a_4=a_7(4<7)$，则可在

$\langle a_0,a_1\rangle\in R$，$\langle a_1,a_2\rangle\in R$，$\langle a_2,a_3\rangle\in R$，$\langle a_3,a_4\rangle\in R$，$\langle a_4,a_5\rangle\in R$，$\langle a_5,a_6\rangle\in R$，$\langle a_6,a_7\rangle\in R$，$\langle a_7,a_8\rangle\in R$。

中删去

$\langle a_4,a_5\rangle\in R$，$\langle a_5,a_6\rangle\in R$，$\langle a_6,a_7\rangle\in R$，后有

$\langle a_0,a_1\rangle\in R$，$\langle a_1,a_2\rangle\in R$，$\langle a_2,a_3\rangle\in R$，$\langle a_3,a_4\rangle\in R$，$\langle a_7,a_8\rangle\in R$。

例（续）：

由**关系的复合运算**得，$\langle a, b\rangle = \langle a_0, a_8\rangle \in R^5$，其中 $5 = 8-(7-4)$，此时：

显然，$5<6$，则：$\langle a, b\rangle \in \bigcup_{i=1}^{6} R^i$；

6.3.4 关系运算的难点

对于关系运算，需要大家注意以下几点：

1. 关系是一种特殊的集合，关系的交、并、差、补等运算与普通集合的交、并、差、补运算的运算规则相同；
2. 任意两个关系R和S能进行复合运算当且仅当R的后域是S的前域。注意$R \circ S$的前域是R的前域，后域是S的后域；如果对任意的$x \in A$和$z \in C$，不存在$y \in B$，使得xRy和ySz同时成立，则$R \circ S$为空，从而有$\Phi \circ R = R \circ \Phi = \Phi$。

6.3.4 关系运算的难点

3. 利用关系的三种表示方法可以得到关系复合运算的三种计算方式，其中利用关系矩阵的计算方式是一个难点，R∘S的关系矩阵等于R的关系矩阵和S的关系矩阵的布尔积。

4. 关系幂运算本质上是复合运算，它是同一个关系的多次复合运算。注意集合A^n和关系R^n的区别，集合A^n是n个集合A的笛卡儿积，它的元素是n重有序组，关系R^n是n个R的(n-1)次复合运算。

6.3.5关系运算的应用

例6.3.8 设有关系R和S分别如表6.3.1和表6.3.2所示，现在在R中增加关系S中的所有元组，试求增加后的关系。

表6.3.1

A	B	C
1	2	5
2	1	3
5	6	2

表6.3.2

A	B	C
4	6	2
2	1	3
6	1	5

分析

在关系R中增加S中的所有元组，在关系数据库中称为对关系表的**插入操作**(InsertOperation)，该操作可以通过关系的**并运算**完成，即**求在R中增加关系S的所有元组等价于求R∪S。**

解 关系R增加S的元组后所构成的关系R∪S，见右表。

A	B	C
1	2	5
2	1	3
5	6	2
4	6	2
6	1	5

例6.3.9

设有关系R和S如表6.3.4和表6.3.5所示，现在在R中去掉关系S中所出现的元组，试求去掉S后的关系。

解 关系R中除去S中所出现的元组后所得的关系R-S如表6.3.6所示。

表6.3.4

A	B	C
1	2	3
4	5	6
7	8	9

表6.3.5

A	B	C
1	2	3
7	8	9

表6.3.6

A	B	C
4	5	6

6.4 关系的性质———重点

本节涉及到的关系，如无特别声明，都是**假定其前域和后域相同**。即都为定义在集合A上的关系，且**A是非空集合**。对于前后域不相同的关系，其性质无法加以定义。

6.4.1 关系性质的定义

1、自反性和反自反性

定义6.4.1 设R是集合A上的关系，

1. 如果对任意$x \in A$，都有$\langle x, x\rangle \in R$，那么称R在A上是**自反的**(Reflexive)，或称R具有**自反性**(Reflexivity)；

   例如：朋友关系。

2. 如果对任意$x \in A$，都有$\langle x, x\rangle \notin R$，那么称R在A上是**反自反的**(Antireflexive)，或称R具有**反自反性**(Antireflexivity)。

   例如：父子关系。

符号化

1. R在A上是自反的

$$\Leftrightarrow (\forall x)((x \in A) \rightarrow (\langle x, x\rangle \in R))=1$$

2. R在A上是反自反的

$$\Leftrightarrow (\forall x)((x \in A) \rightarrow (\langle x, x\rangle \notin R))=1$$

3. R在A上不是自反的

$$\Leftrightarrow (\exists x)((x \in A) \wedge (\langle x, x\rangle \notin R))=1$$

4. R在A上不是反自反的

$$\Leftrightarrow (\exists x)((x \in A) \wedge (\langle x, x\rangle \in R))=1$$

例6.4.1

设A={1,2,3}，定义A上的关系R,S和T如下：

（1）$R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle\}$；

（2）$S=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,1\rangle\}$；

（3）$T=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 3,3\rangle\}$。

例6.4.1 解

（1）a)因为A中任意x，都有$\langle x,x\rangle \in R$，

所以R是自反的；

b）因为A中任意x，都有$\langle x,x\rangle \notin S$，

所以S是反自反的；

c）因为存在$2\in A$，使$\langle 2,2\rangle \notin T$，

所以T不是自反的；

又因为存在$1\in A$，使$\langle 1,1\rangle \in T$，

所以T不是反自反的，

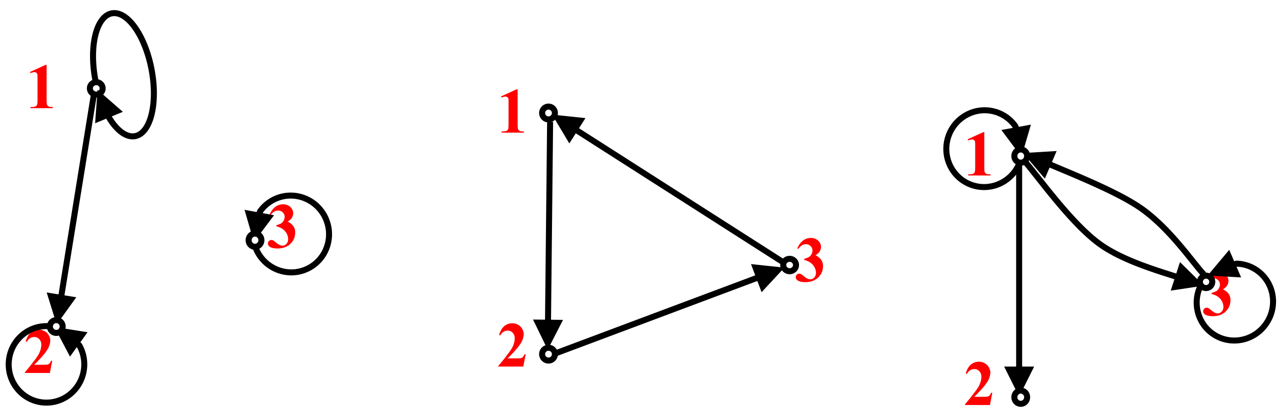
即T既不是自反的，也不是反自反的。

例6.4.1 解（续）

（2）设R, S和T的关系矩阵分别为M_R, M_S和M_T，则：

$$M_R=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\qquad M_S=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}\qquad M_T=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}$$

（3）R, S和T的关系图分别是下图的(a), (b)和(c)。



(a) (b) (c)

结论

1. 关系R是自反的 $\Leftrightarrow$ R不是反自反的
2. 存在既不是自反的也不是反自反的关系
3. 关系R是自反的 $\Leftrightarrow$
   关系图中每个结点都有环
4. 关系R是反自反的 $\Leftrightarrow$
   关系图中每个结点都无环
5. 关系R是自反的 $\Leftrightarrow$
   关系矩阵的主对角线上全为1
6. 关系R是反自反的$\Leftrightarrow$关系矩阵的主对角线上全为0

例6.4.2

设A={a, b}，试计算A上所有具有自反性的关系R的个数。

解 因为A^2={<a, a>, <b, b>, <a, b>, <b, a>}，所以A上具有自反性的关系R的个数为：

$$C(2,0) + C(2,1) + C(2,2) = 4。$$

2、对称性和反对称性

定义6.4.2 设R是集合A上的关系。

1. 对任意$x, y \in A$，如果$\langle x, y\rangle \in R$，那么$\langle y, x\rangle \in R$，则称关系R是**对称的**(Symmetric)，或称R具有**对称性**(Symmetry)；
2. 对任意$x, y \in A$，如果$\langle x, y\rangle \in R$且$\langle y, x\rangle \in R$，那么$x = y$（或者如果$x \neq y$且$\langle x, y\rangle \in R$，那么$\langle y, x\rangle \notin R$），则称关系R是**反对称的**(Antisymmetric)，或称R具有**反对称性**(Antisymmetry)。

符号化

1. R在A上是对称的⇔

$$(\forall x)(\forall y)((x\in A)\land(y\in A)\land(\langle x,y\rangle\in R)\rightarrow(\langle y,x\rangle\in R))=1$$

2. R在A上是反对称的⇔

$$(\forall x)(\forall y)((x\in A)\land(y\in A)\land(\langle x,y\rangle\in R)\land(\langle y,x\rangle\in R)\rightarrow(x=y))=1$$

3. R在A上不是对称的⇔

$$(\exists x)(\exists y)((x\in A)\land(y\in A)\land(\langle x,y\rangle\in R)\land(\langle y,x\rangle\notin R))=1$$

4. R在A上不是反对称的⇔

$$(\exists x)(\exists y)((x\in A)\land(y\in A)\land(x\neq y)\land(\langle x,y\rangle\in R)\land(\langle y,x\rangle\in R))=1$$

例6.4.2

设A={1,2,3,4}，

定义A上的关系R,S,T和V如下：

（1）R={<1,1>,<1,3>,<3,1>,<4,4>}；

（2）S={<1,1>,<1,3>,<1,4>,<2,4>}；

（3）T={<1,1>,<1,2>,<1,3>,<3,1>,<1,4>}；

（4）V={<1,1>,<2,2>,<3,3>,<4,4>}。

试判定它们是否具有对称性和反对称性，并写出R,S,T和V的关系矩阵和画出相应的关系图。

解（1）

a）关系R是对称的；

b）关系S是反对称的；

c）在关系T中，有<1, 2>，但没有<2, 1>，即S不是对称的；

另外有<1, 3>，且有<3, 1>，但是1≠3，即S不是反对称的。

因此T既不是对称的，也不是反对称的；

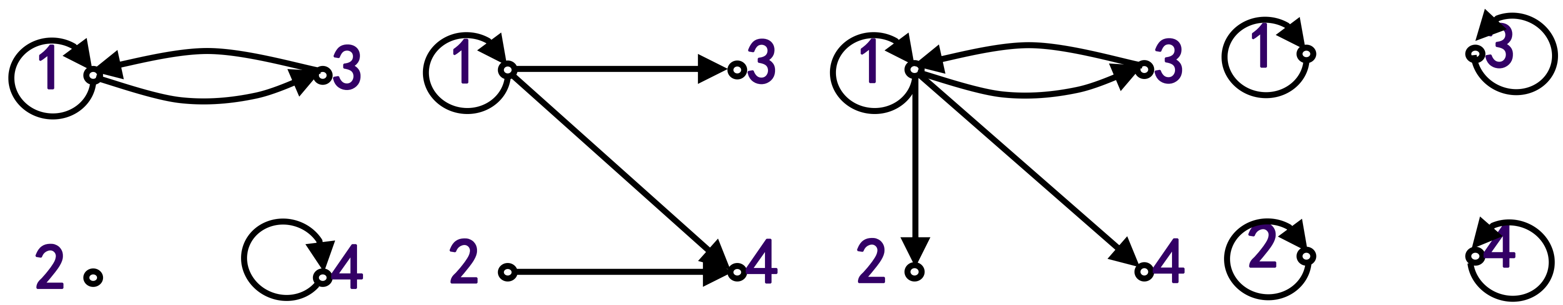
d）在关系V中，对任意x, y∈A，x≠y时都有<x, y>∉R，V既是对称的，也是反对称的。

解（2）

设R, S, T和V的关系矩阵分别为M_R, M_S, M_T和M_V，则

$$M_R=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\quad M_S=\begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\quad M_T=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\quad M_V=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

(3) R, S, T和 V 的关系图分别是图(a), (b), (c)和(d)。



(a) (b) (c) (d)

注意

1. 存在既不是对称也不是反对称的关系；
2. 存在既是对称也是反对称的关系；
3. 关系R是对称的⇔关系图中任何一对结点之间，要么有方向相反的两条边，要么无任何边；
4. 关系R是反对称的 ⇔ 关系图中任何一对结点之间，至多有一条边；
5. 关系R是对称的 ⇔ R的关系矩阵为对称矩阵；
6. 关系R是反对称的 ⇔ R的关系系矩阵满足

$r_{ij} \cdot r_{ji} = 0$，$i, j = 1, 2, \cdots, n$，$i \neq j$。

3、传递性

定义6.4.3 设R是集合A上的关系。对任意x, y, z∈A, 如果<x, y>∈R且<y, z>∈R，那么<x, z>∈R，则称关系R是传递的(Transitive)，或称R具有传递性(Transitivity)。

将定义6.4.3符号化为：

R在A上是传递的 ⇔

$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)((x\in A)\wedge(y\in A)\wedge(z\in A)\wedge(\langle x,y\rangle\in R)\wedge(\langle y,z\rangle\in R)\rightarrow(\langle x,z\rangle\in R))=1。$$

R在A上不是传递的 ⇔

$$(\exists x)(\exists y)(\exists z)((x\in A)\wedge(y\in A)\wedge(z\in A)\wedge(\langle x,y\rangle\in R)\wedge(\langle y,z\rangle\in R)\wedge(\langle x,z\rangle\notin R))=1。$$

例6.4.3

设A={1,2,3}，定义A上的关系R,S,T和V如下：

（1）R={<1,1>,<1,2>,<2,3>,<1,3>}；

（2）S={<1,2>}；

（3）T={<1,1>,<1,2>,<2,3>}；

（4）V={<1,2>,<2,3>,<1,3>,<2,1>}。

试判定它们是否具有传递性，并写出R,S,T和V的关系矩阵和画出相应的关系图。

解

（1）a）关系R是传递的；

b）关系S是传递的；

c）在关系T中，存在x=1，y=2，z=3∈A且<1,2>,<2,3>∈T，但<1,3>∉T，因此T不是传递的；

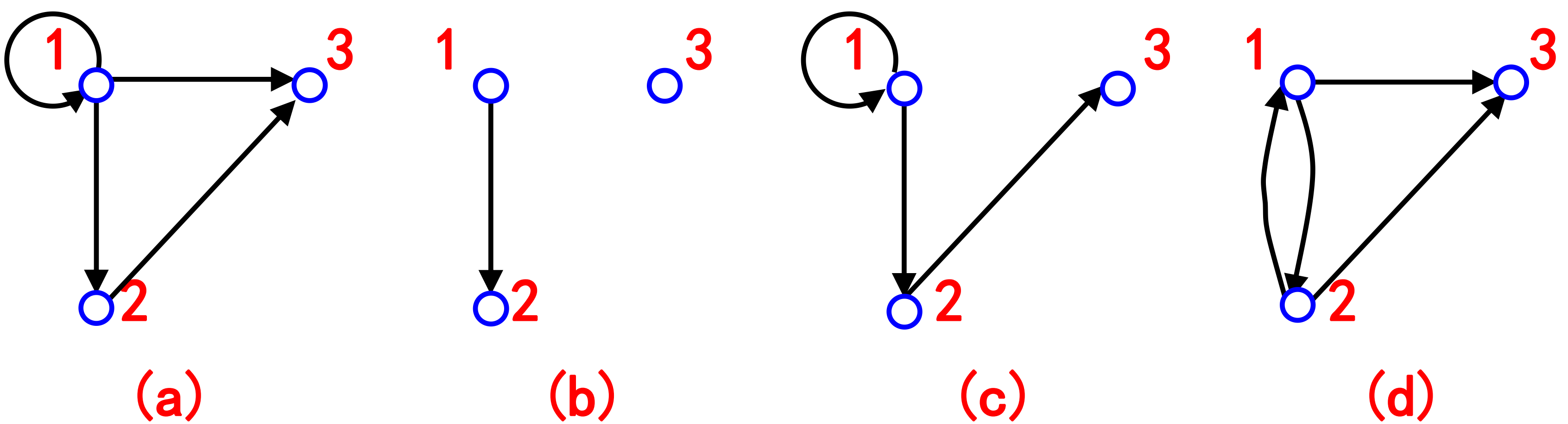
d）在关系V中，存在x=1，y=2和z=1∈A，使得<1,2>∈V且<2,1>∈V，但是<1,1>∉V，因此关系V不是传递的。

例6.4.3

（2）设R, S, T和V的关系矩阵分别为M_R, M_S, M_T和M_V，则

$$M_R=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\quad M_S=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\quad M_T=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\quad M_V=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

（3）R, S, T和 V 的关系图分别是图(a), (b), (c)和(d)。



例6.4.5

设A={a, b}，试画出A上所有具有传递性的关系R的关系图。

解　因为|A|=2，所以A上不同的关系共有$2^{2\times 2}$个。即

0－元子集：$R_1=\Phi$，

1－元子集：$R_2=\{\langle a,a\rangle\}$，$R_3=\{\langle b,b\rangle\}$，

$R_4=\{\langle a,b\rangle\}$，$R_5=\{\langle b,a\rangle\}$；

2－元子集：$R_6=\{\langle a,a\rangle,\langle b,b\rangle\}$，$R_7=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle\}$，

$R_8=\{\langle a,a\rangle,\langle b,a\rangle\}$，$R_9=\{\langle b,b\rangle,\langle a,b\rangle\}$，

$R_{10}=\{\langle b,b\rangle,\langle b,a\rangle\}$，$R_{11}=\{\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle\}$；

例6.4.5(续1)

3－元子集：$R_{12}=\{\langle a,a\rangle,\langle b,b\rangle,\langle a,b\rangle\}$，

$R_{13}=\{\langle a,a\rangle,\langle b,b\rangle,\langle b,a\rangle\}$，

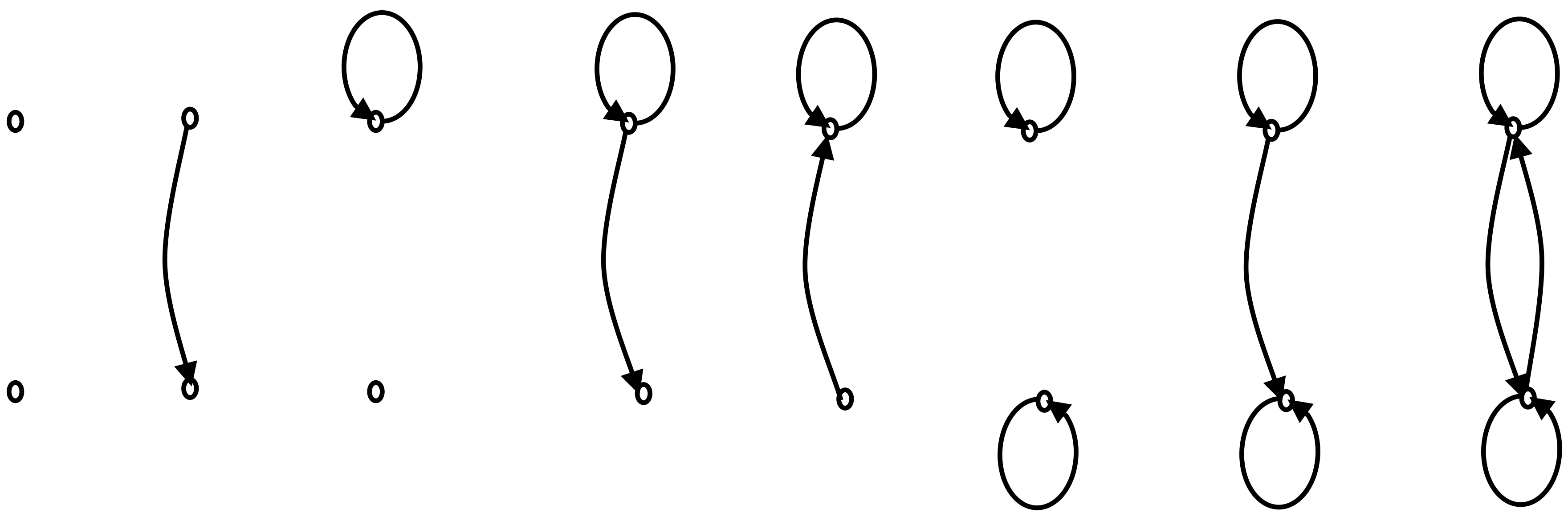
$R_{14}=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle\}$，

$R_{15}=\{\langle b,b\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle\}$；

4－元子集：$R_{16}=\{\langle a,a\rangle,\langle b,b\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle\}$。

例6.4.5(续2)

A上所有具有传递性的关系R共8种，其关系图见下图。



总结

	自反	反自反	对称	反对称	传递
定义	$\langle x, x\rangle \in R$	$\langle x, x\rangle \notin R$	$\langle x, y\rangle \in R \Rightarrow \langle y, x\rangle \in R$	$\langle x, y\rangle \in R \wedge \langle y, x\rangle \in R \Rightarrow x=y$	$\langle x, y\rangle \in R \wedge \langle y, z\rangle \in R \Rightarrow \langle x, z\rangle \in R$
关系图	每个结点都有环	每个结点都无环	每对结点间或有方向相反的两条边，或无任何边	每对结点间至多有一条边存在	任三个结点x, y, z，若从x到y有边，从y到z有边，则从x到z一定有边
关系矩阵	对角线上全为1	对角线上全为0	对称矩阵	$r_{ij} \cdot r_{ji}=0$, $i, j=1, 2, \cdots, n$, $i \neq j$	如$r_{ij}=1$且$r_{jk}=1$则$r_{ik}=1$

总结

对任意给定的A上的关系R，可以采用下面的四种方法判定它所具有的性质：

（1）定义判定法；

（2）关系矩阵判定法；

（3）关系图判定法；

（4）符号化语言判定法。

例6.4.6

判定下列关系所具有的特殊性质。

（1）集合A上的全关系；

（2）集合A上的空关系；

（3）集合A上的恒等关系。

解(1)集合A上的全关系具有自反性，对称性和传递性；

(2)集合A上的空关系具有反自反性、对称性、反对称性和传递性；

(3)集合A上的恒等关系具有自反性、对称性、反对称性和传递性。

例6.4.7

判定下列关系所具有的特殊性质。

（1）在实数集R上定义的“等于”关系；

（2）幂集上的“真包含”关系。

解（1）R上的“等于”关系具有自反性、对称性、反对称性和传递性；

（2）幂集上的“真包含”关系具有反自反性，反对称性和传递性。

例6.4.8

假设$A=\{a, b, c, d\}$，$R=\{\langle a, a\rangle, \langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle, \langle c, d\rangle\}$是定义在A上的关系。试判定R所具有的特殊性质。

解 由前面的分析可知，R既不是自反的，也不是反自反的；既不是对称的，也不是反对称的；而且也不是传递的。即R不具备关系的任何性质。

例

图(c)的关系

图(d)的关系是不具备任

是具备反自

称

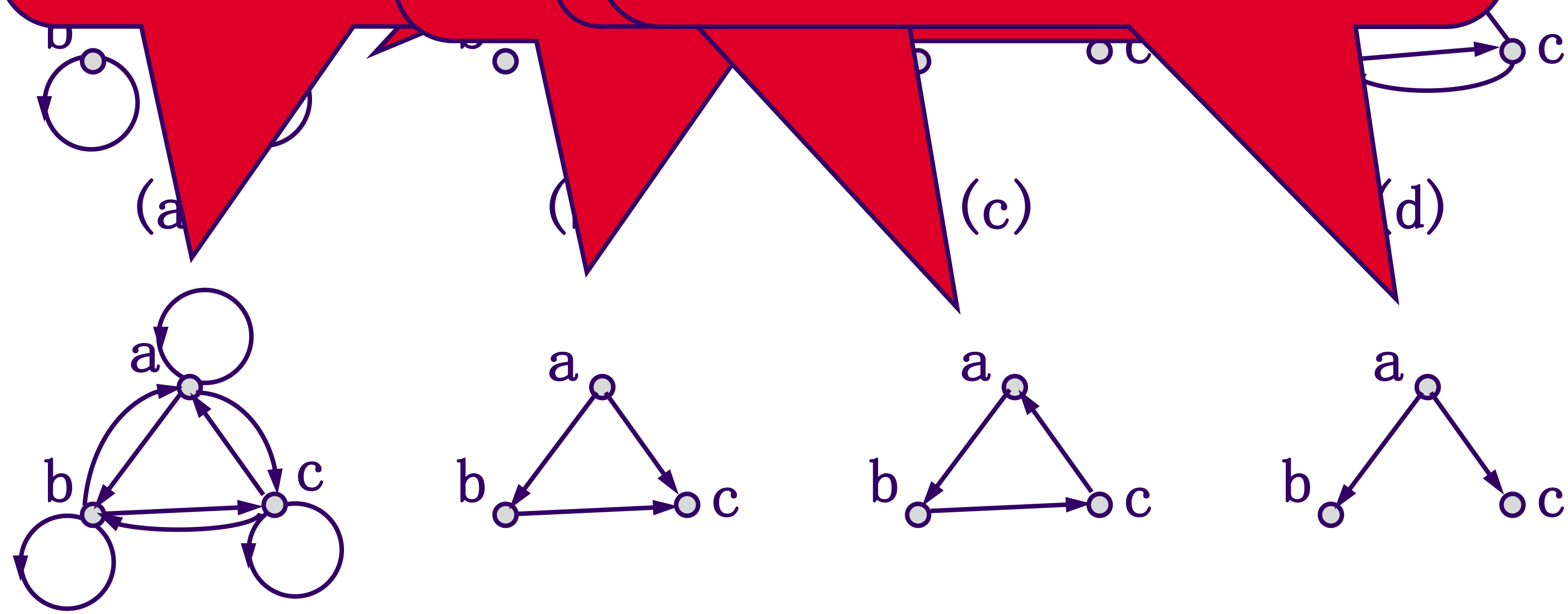
图(e)的关系

的、对称的

图(f)

反自

图(h)的关系是具备反自反的、反对称的、传递的关系



(a) (b) (c) (d)

(e) (f) (g) (h)

例6.4.9

设R={<1,1>,<2,2>}，试判断R在集合A和B上具备的特殊性质，其中A={1,2}，B={1,2,3}。

解 当R是定义在集合A上的关系时，R是自反、对称、反对称和传递的；

当R是定义在集合B上的关系时，R是对称、反对称和传递的。

注意：绝对不能脱离基集（即定义关系的集合）来谈论关系的性质。

关系性质的证明

在二元关系中，由于关系的性质的定义全部都是按"如……则……"来描述的，因此，在证明关系的性质时，一般都都采用按定义证明方法，即：将"如……"部分作为附加的已知条件，证得"则……"部分，就证明了关系具有该性质。

关系性质的证明方法

1. 自反

任取x∈A,	中间过程	$\langle x, x\rangle \in R$。

2. 反自反

任取x∈A,	中间过程	$\langle x, x\rangle \notin R$。

3. 对称

任取x, y∈A, 假设$\langle x, y\rangle \in R$,	中间过程	$\langle y, x\rangle \in R$。

关系性质的证明方法(续)

4. 反对称

任取x, y∈A，假设 $\langle x, y\rangle \in R$，$\langle y, x\rangle \in R$，

中间过程

x＝y。

或者

任取x, y∈A，x≠y，假设 $\langle x, y\rangle \in R$，

中间过程

$\langle y, x\rangle \notin R$。

5. 传递

任取x, y, z∈A，假设 $\langle x, y\rangle \in R$，$\langle y, z\rangle \in R$，

中间过程

$\langle x, z\rangle \in R$。

6.4.2 关系性质的判断定理

定理6.4.1 设R是集合A上的二元关系，则：

（1）R是自反的 $\Leftrightarrow$ $I_A \subseteq R$；

（2）R是反自反的 $\Leftrightarrow$ $R \cap I_A = \Phi$；

（3）R是对称的 $\Leftrightarrow$ $R = R^{-1}$；

（4）R是反对称的 $\Leftrightarrow$ $R \cap R^{-1} \subseteq I_A$；

（5）R是传递的 $\Leftrightarrow$ $R \circ R \subseteq R$。

证明（4）

“$\Rightarrow$” 设R是反对称的。

对任意$\langle a, b\rangle \in R \cap R^{-1}$，则$\langle a, b\rangle \in R$且$\langle a, b\rangle \in R^{-1}$，

即：$\langle a, b\rangle \in R$且$\langle b, a\rangle \in R$，

由于R是反对称的，则$a = b$。

所以，$\langle a, b\rangle = \langle a, a\rangle \in I_A$，即$R \cap R^{-1} \subseteq I_A$。

“$\Leftarrow$” 设$R \cap R^{-1} \subseteq I_A$。

对任意$a, b \in A$，若$\langle a, b\rangle \in R$且$\langle b, a\rangle \in R$，则有：

$\langle a, b\rangle \in R$且$\langle a, b\rangle \in R^{-1}$，即：$\langle a, b\rangle \in R \cap R^{-1}$。

又因$R \cap R^{-1} \subseteq I_A$，所以，$\langle a, b\rangle \in I_A$，即$a = b$。

即R是反对称的。

证明（5）

"$\Rightarrow$" 设R是传递的。

对任意$\langle a, c\rangle \in R \circ R$，根据"$\circ$"的定义，

必存在$b \in A$，使得$\langle a, b\rangle \in R$且$\langle b, c\rangle \in R$，

由R的传递性，有：$\langle a, c\rangle \in R$。所以，$R \circ R \subseteq R$。

"$\Leftarrow$" 设$R \circ R \subseteq R$。

对任意$a, b, c \in A$，若$\langle a, b\rangle \in R$并且$\langle b, c\rangle \in R$，

则有：$\langle a, c\rangle \in R \circ R$，

因$R \circ R \subseteq R$，所以，$\langle a, c\rangle \in R$，

即R是传递的。

6.4.3 关系性质的保守性

定理6.4.2 设R, S是定义在A上的二元关系，则：

(1) 若R, S是自反的，则R^{-1}, $R\cup S$, $R\cap S$, $R\circ S$也是自反的；

(2) 若R, S是反自反的，则R^{-1}, $R\cup S$, $R\cap S$也是反自反的。

(3) 若R, S是对称的，则R^{-1}, $R\cup S$, $R\cap S$也是对称的。

注意：

（1）逆运算与交运算具有较好的保守性；

（2）并运算、差运算和复合运算的保守性较差。

例6.4.10

试举例说明下列事实不一定成立。

（1）R和S是反自反、反对称和传递的，但是，R∘S不一定具备反自反性，反对称性；R∪S不一定具有反对称性和传递性；

（2）R和S是自反、对称和传递的，但是R∘S不一定是对称和传递的，R-S不一定是自反和传递的。

解 （1）设A={1, 2, 3}, R={<1, 2>, <2, 3>, <1, 3>}, S={<3, 2>, <3, 1>, <2, 1>}是定义在A上的两个关系。

显然R, S都是反自反的、反对称的、传递的。

例6.4.10 解（续）

则 $R\circ S=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 1,2\rangle\}$，

不具备反自反性和反对称性；

$R\cup S=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 3,1\rangle\}$，

不具备传递性和反对称性；

（2）设$A=\{1,2,3\}$，$R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle\}$，$S=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 2,3\rangle\}$是A上的两个关系。显然R，S都是自反的、对称的、传递的。此时，

$R\circ S=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 1,3\rangle\}$不具备对称性和传递性；

$R-S=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle\}$不具备自反性和传递性；

6.4.5关系性质的应用

例6.4.11 假设点i和j之间有路当且仅当从结点i通过图中的边能够到达结点j，其中点i到点j的路上边的数目称为该路的长度。

（1）找出图6.4.5中从点c开始的长度为1的所有的路；

（2）找出图6.4.5中从点c开始的长度为2的所有的路；

（3）找出图6.4.5中长度为2的所有的路。

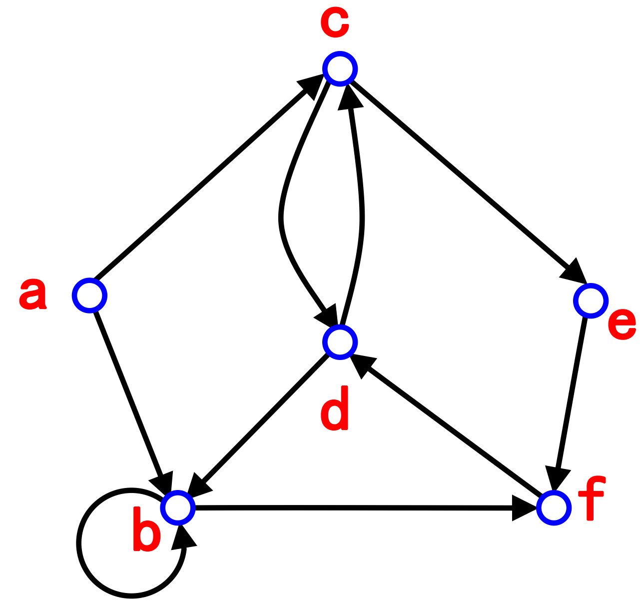


图6.4.5

例6.4.11 解

（1）图6.4.5中从点c开始的长度为1的所有的路有两条：c→d和c→e；

（2）图6.4.5中从点c开始的长度为2的所有的路有两条： c→d→b和c→e→f；

（3）图6.4.5中长度为2的所有的路有：

a→c→e，a→c→d，a→b→b，a→b→f，

b→b→f，b→f→d，c→d→b，c→e→f，

d→c→d，d→c→e，d→b→b，d→b→f，

e→f→d，f→d→b，f→d→c

共15条。

6.5 关系的闭包运算

对于一个给定的关系，可能不具有某一个特殊性质。但是，如果我们希望它具有该特定的性质，那么应该怎么做呢？

例如，对给定集合A={1,2,3}上的关系R={<1,1>,<1,2>,<2,1>}，它不具有自反性。根据自反性的定义，在关系R中添加<2,2>，<3,3>这两个元素后，所得到的新关系就具有自反性。另外，还可以添加<2,2>，<3,3>，<1,3>，得到的新关系仍然具有自反性。

6.5.1关系的闭包

定义6.5.1 设R是定义在A上的关系，若**存在A上的另一个关系R′**，满足：

（1）R′是**自反的**(**对称的**、或**传递的**)；

（2）对任何**自反的**(**对称的**、或**传递的**)关系R″，如果R⊆R″，就有R′⊆R″，则称为R的**自反闭包**(ReflexiveClosure)(**对称闭包**(SymmetricClosure)、或**传递闭包**(TransitiveClosure))，分别记为**r(R)**(**s(R)**或**t(R)**)。

从定义6.5.1可以看出，**关系的闭包是增加最少元素，使其具备所需性质的扩充。**

例6.5.1

设A={1,2,3}，R={<1,1>,<1,2>,<2,1>,<1,3>}是A上的关系。**试求R的自反闭包、对称闭包和传递闭包。**

解 由关系的自反性定义知，**R是自反的当且仅当对a∈A，都有<a,a>∈R，**因此，在R中添上<2,2>和<3,3>后得到的新关系就具有自反性，且满足自反闭包的定义，即

r(R)={<1,1>,<2,2>,<3,3>,<1,2>,<2,1>,<1,3>}；

例6.5.1(续)

由关系的对称性定义知，**R是对称的当且仅当对a, b∈A, 若<a, b>∈R，则必有<b, a>∈R，**因此，在R中添上<3, 1>后得到的新关系就具有对称性，且满足对称闭包的定义，即

s(R)={<1, 1>, <1, 2>, <2, 1>, <1, 3>, <3, 1>}；

由关系的传递性定义知，**R是传递的当且仅当对a, b, c∈A，若<a, b>∈R，且<b, c>∈R，则必有<a, c>∈R，**因此，在R中添上<2, 2>和<2, 3>后得到的新关系就具有传递性，且满足传递闭包的定义。即

t(R)={<1, 1>, <1, 2>, <2, 1>, <1, 3>, <2, 2>, <2, 3>}。

例6.5.2

求下列关系的r(R)，s(R)和t(R)。

（1）定义在整数集Z上的“＜”关系；

（2）定义在整数集Z上的“＝”关系。

解

（1）定义在Z上的“<”关系的

r(R)为“≤”，

s(R)为“≠”，

t(R)为“<”；

（2）定义在Z上的“=”关系的

r(R)为“=”，

s(R)为“=”，

t(R)为“=”。

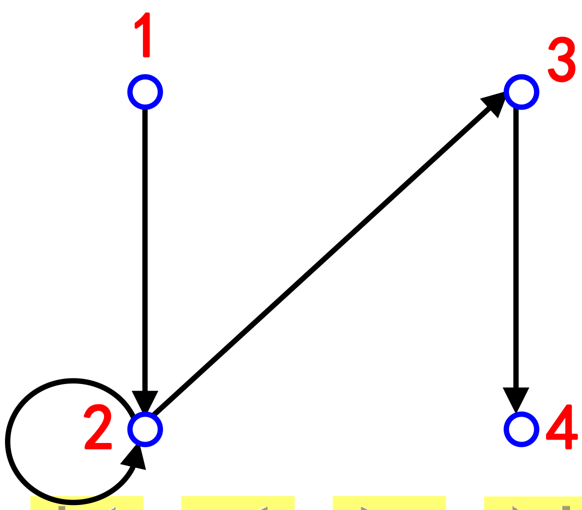
例6.5.3

设集合A={1, 2, 3, 4}， R={<1, 2>, <2, 2>, <2, 3>, <3, 4>}是定义在A上的二元关系。

（1）画出R的关系图；

（2）求出r(R), s(R), t(R), 并画出其相应的关系图。

解（1）R的关系图见下图；



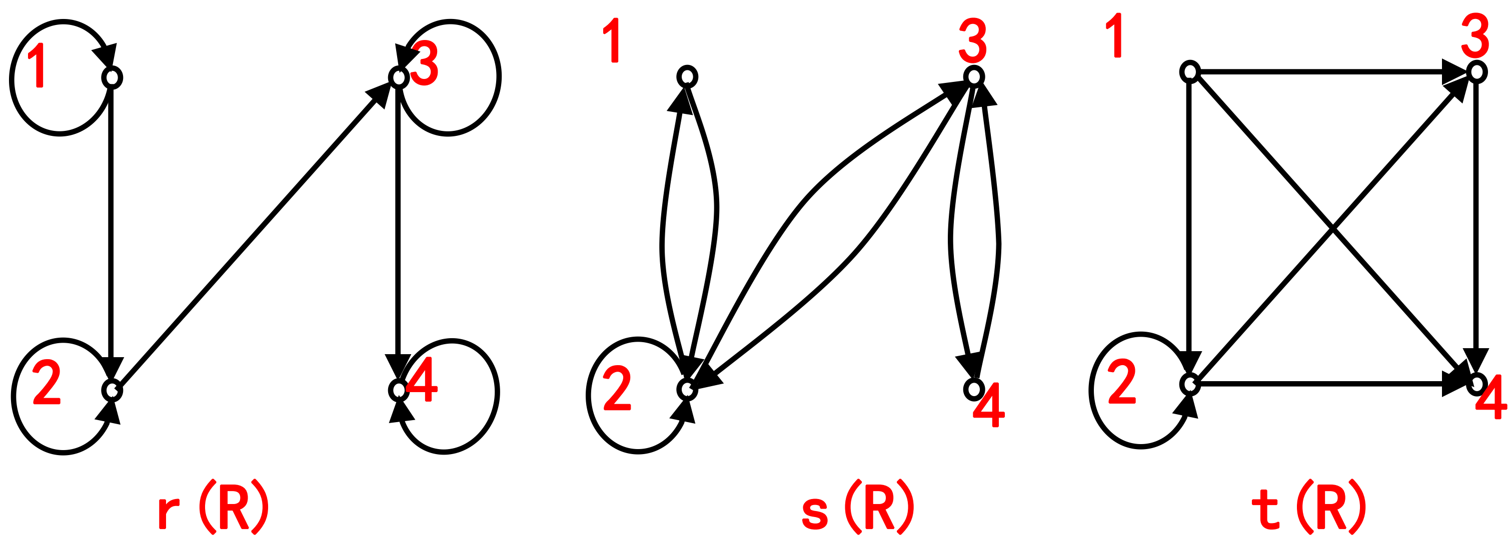
例6.5.3（续）（2）

$r(R)=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,4\rangle,\langle 1,1\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,4\rangle\}$；

$s(R)=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 3,4\rangle,\langle 4,3\rangle\}$；

$t(R)=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 3,4\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,4\rangle\}$。

r(R)，s(R)，t(R)的关系图分别如下：



总结

利用关系图求关系R闭包的方法：

1. 检查R的关系图，在没有环的结点处加上环，可得r(R)的关系图；
2. 检查R的关系图，将每条单向边全部改成双向边，可得s(R)的关系图；
3. 检查R的关系图，从每个结点出发，找到其终点，如果该结点到其终点没有边相连，就加上此边，可得t(R)的关系图。

定理6.5.1

设R是集合A上的二元关系，则：

（1）$r(R)=R\cup I_A$。

（2）$s(R)=R\cup R^{-1}$。

（3）$t(R)=\bigcup_{i=1}^{\infty}R^i$，若$|A|=n$，则$t(R)=\bigcup_{i=1}^{n}R^i$。

证明(1)

(1) (方法一)根据自反闭包的定义直接证明，即证$R\cup I_A$是自反闭包。

1）显然$R\subseteq R\cup I_A$。

2）证明$R\cup I_A$是自反的。

显然$I_A\subseteq R\cup I_A$，根据定理6.4.1知，$R\cup I_A$是自反的；

3）证明对任何包含R的自反关系R，都有$R\cup I_A\subseteq R'$

因为 $R\subseteq R'$。 (6.5.1)

又因为R'是自反的，由定理6.4.1，有

$I_A\subseteq R'$。 (6.5.2)

于是，根据式(6.5.1)和(6.5.2)，有$R\cup I_A\subseteq R'$

从而，根据自反闭包的定义知$r(R)= R\cup I_A$。

证明（3）

（3）按定义证明的方法直接证明$t(R)=\bigcup_{i=1}^{\infty}R^i$。

1）首先证明$t(R)\subseteq\bigcup_{i=1}^{\infty}R^i$

此时需要证明$R\subseteq\bigcup_{i=1}^{\infty}R^i$并且$\bigcup_{i=1}^{\infty}R^i$是可传递的。

a）因为$\bigcup_{i=1}^{\infty}R^i=R\cup R^2\cup R^3\cup\ldots$，所以$R\subseteq\bigcup_{i=1}^{\infty}R^i$

b）下面证明$\bigcup_{i=1}^{\infty}R^i$是可传递的。

对任意$a,b,c\in A$，若$\langle a,b\rangle\in\bigcup_{i=1}^{\infty}R^i$，$\langle b,c\rangle\in\bigcup_{i=1}^{\infty}R^i$，

则必存在$R^j,R^k(1\leqslant j,k<\infty)$，使得$\langle a,b\rangle\in R^j$，$\langle b,c\rangle\in R^k$，

证明（3）（续1）

即$<a,c> \in R^{j+k}$ $(1 \leqslant j+k \leqslant \infty)$，又$R^{j+k} \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$，所以

$<a,c> \in \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$，即是传递的。

由传递闭包的定义知：$t(R) \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$。

2) 证明 $\bigcup_{i=1}^{\infty} R^i \subseteq t(R)$。只需证对任意$i \in N^+$，有$R^i \subseteq t(R)$。

当$i=1$时，因$R \subseteq t(R)$，显然成立。

设$i=k$时，有$R^k \subseteq t(R)$成立。

当$i=k+1$时，对任意$<a,b> \in R^{k+1}$，则存在$c \in A$，使得

$<a,c> \in R^k$，$<c,b> \in R$由归纳假设有：

证明（3）（续2）

$\langle a,c\rangle \in t(R)$，$\langle c,b\rangle \in t(R)$，

由$t(R)$可传递，所以$\langle a,b\rangle \in t(R)$，

即有：$R^{k+1} \subseteq t(R)$。

由归纳法知，对任意有的$i \in N+$，有$R^i \subseteq t(R)$。

所以$\bigcup_{i=1}^{\infty} R^i \subseteq t(R)$。

由(1)、(2)知：$t(R) = \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$。

当$|A|=n$时，由定理6.3.5知：$\bigcup_{i=1}^{\infty} R^i = \bigcup_{i=1}^{n} R^i$。所以，

$t(R) = \bigcup_{i=1}^{n} R^i$

例6.5.4

设 $P=\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ 是四个程序，$R=\{\langle P_1,P_2\rangle, \langle P_1,P_3\rangle, \langle P_2,P_4\rangle, \langle P_3,P_4\rangle\}$ 是定义在P上的调用关系。计算r(R), s(R), t(R) 。

解：$r(R)=R\cup I_A$

$=\{\langle P_1,P_2\rangle, \langle P_1,P_3\rangle, \langle P_2,P_4\rangle, \langle P_3,P_4\rangle\}\cup$

$\{\langle P_1,P_1\rangle, \langle P_2,P_2\rangle, \langle P_3,P_3\rangle, \langle P_4,P_4\rangle\}$

$=\{\langle P_1,P_2\rangle, \langle P_1,P_3\rangle, \langle P_2,P_4\rangle, \langle P_3,P_4\rangle, \langle P_1,P_1\rangle,$

$\langle P_2,P_2\rangle, \langle P_3,P_3\rangle, \langle P_4,P_4\rangle\}$。

$=\{\langle P_1,P_2\rangle, \langle P_1,P_3\rangle, \langle P_2,P_4\rangle, \langle P_3,P_4\rangle, \langle P_1,P_4\rangle\}$。

例6.5.4(续)

$s(R) = R \cup R^{-1}$

$= \{\langle P_1, P_2\rangle, \langle P_1, P_3\rangle, \langle P_2, P_4\rangle, \langle P_3, P_4\rangle\}$

$\cup \{\langle P_2, P_1\rangle, \langle P_3, P_1\rangle, \langle P_4, P_2\rangle, \langle P_4, P_3\rangle\}$

$= \{\langle P_1, P_2\rangle, \langle P_1, P_3\rangle, \langle P_2, P_4\rangle, \langle P_3, P_4\rangle,$

$\langle P_2, P_1\rangle, \langle P_3, P_1\rangle, \langle P_4, P_2\rangle, \langle P_4, P_3\rangle\}$。

$t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \cup R^4 = \{\langle P_1, P_2\rangle, \langle P_1, P_3\rangle, \langle P_2, P_4\rangle,$

$\langle P_3, P_4\rangle\} \cup \{\langle P_1, P_4\rangle\} \cup \Phi \cup \Phi$

$= \{\langle P_1, P_2\rangle, \langle P_1, P_3\rangle, \langle P_2, P_4\rangle, \langle P_3, P_4\rangle, \langle P_1, P_4\rangle\}$。

6.5.3关系闭包的应用

例6.5.6 设$P=\{P_1, P_2, \cdots, P_n\}$是程序库中所有程序的集合(或程序中所有程序行的集合)，在P上定义二元关系“$\Rightarrow$”如下：

“$P_i \Rightarrow P_j$”当且仅当P_i执行完后才能执行P_j。

试指出“$\Rightarrow$”的传递闭包“$\Rightarrow^+$”和自反传递闭包“$\Rightarrow^*$”的意义。

例6.5.6 解

“$\Rightarrow^+$”描述在程序执行时，所有可能调用的程序：$P_i \Rightarrow^+ P_j$当且仅当执行P_i可导致调用P_j；

“$\Rightarrow^*$”描述在一个程序的执行(Execution)过程中的某一时刻所有可以运行(might be active)的程序：$P_i \Rightarrow^* P_j$当且仅当在执行P_i过程中某一时刻P_j可以运行。

注：$P_i \Rightarrow P_j$对所有i都成立，而$P_i \Rightarrow^* P_j$仅当P_i可以调用自身，即P_i是递归才成立。

6.6 本章总结

1. 序偶和笛卡儿积的概念
2. 二元关系的概念和表示
3. 关系的交、并、补、差运算、复合运算和逆运算
4. 关系性质的定义、关系性质的判定、关系性质的证明和关系性质的保守性；
5. 关系的自反、对称、和传递闭包的概念及计算。