Lösung von nichtlinearen Gleichungssystemen

Aufgabe 1: Lösung von Gleichungen mit einer Variablen

Bestimmen Sie die Nullstelle der Funktion $f(x)$ mit Hilfe des Newton-Verfahrens mit Startwert x_0. Die Konvergenz des Verfahrens soll mit Hilfe des absoluten Fehlers des Funktionswertes mit der Toleranz 10^{-12} überprüft werden.

a) Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^3 + 3^x$ mit $x_0 = 0.0$.

Lsg.: $x_N = -0.757696978830$ nach 5 Iterationen

b) Gegeben ist die Funktion $f(x) = \arctan(x)$ mit $x_0 = 2.0$ sowie $x_0 = 1.0$.

Lsg.: analytische Lösung bekannt

Aufgabe 2: Newton'sches Verfahren für nichtlineare Gleichungssysteme

Gegeben ist die stationäre Wärmeleitungsgleichung in 2D:

$$-\nabla \cdot (\lambda \nabla T) = \dot{q}(T) \quad \text{in } \Omega$$

$$\text{mit} \quad T = T_D \quad \text{auf} \quad \Gamma_D, \qquad \lambda \nabla T \cdot \boldsymbol{n} = 0 \quad \text{auf} \quad \Gamma_N$$

Die Wärmeleitfähigkeit λ ist eine vom Material abhängige bekannte Größe. Es soll angenommen werden, dass an den Rändern (Γ_D - Dirichlet Rand) entweder die Temperatur T vorgegeben wird oder die Ränder (Γ_N - Neumann Rand) adiabat sind ($\lambda \nabla T \cdot \boldsymbol{n} = 0$).

Durch eine temperaturabhängige, exotherme, chemische Reaktion wird Wärme in das System eingebracht. Folgende Gleichung für $\dot{q}(T)$ soll diesen Effekt modellieren:

$$\dot{q}(T) = c_1 e^{-\frac{c_2}{T}}$$

Diskretisieren Sie die Gleichung mithilfe der Finiten-Elemente-Methode mit bilinearen Viereckselementen. Verwenden Sie die Gauß-Quadratur mit $n = 3$ (Punkte in einer Richtung) zur numerischen Integration.

Lösen Sie das resultierende nichtlineare Gleichungssystem mithilfe des Newton'schen Verfahren. Als Abbruchkriterium soll der maximale Wert der l_2- Norm des Residuumsvektors $\|\boldsymbol{f}^{(k)}\|_2 < 10^{-8}$ sowie eine geeignet gewählte, maximale Anzahl an Iterationen $iter_{\max}$ vorgegeben werden. Die Temperaturen in den Knoten für den ersten Iterationschritt sollen mit den Dirichlet-Werten $\widehat{T}_{iD}^{(0)} = T_{iD}$ sowie alle anderen Knoten mit $\widehat{T}_i^{(0)} = 300\,\text{K}$ festgelegt werden.

Erstellen Sie ein Programm in Matlab, welches die Lösung der stationären Wärmeleitungsgleichung in 2D unter den gegeben Einschränkungen für eine beliebige Anordnung von Viereckselementen und vorgegebener Dirichlet Randbedingung berechnet.

Hinweis zum Programmaufbau:

Schleife über alle Newton-Iterationsschritte k

  Schleife über alle Elemente

    `Funktion Evaluieren()`

      Schleife über alle Gausspunkte im Element

        Schleife über alle Zeilen der Elementmatrix

          Schleife über alle Spalten der Elementmatrix

    `Funktion Assemblieren()`

  `Funktion Dirichlet()`

  `Funktion Lösen()`

  `Funktion Update()`

Vorgehen: Die ersten 3 Punkte sind von Hand durchzuführen.

1. Leiten Sie ausgehend von der gegeben Gleichung die schwache Form der Gleichung unter Berücksichtigung der gegebenen Einschränkungen her.

2. Ersetzen Sie den unendlich-dimensionalen Funktionenraum der Testfunktionen sowie der Temperatur $T(\boldsymbol{x})$ durch einen endlich-dimensionalen Funktionenraum. Stellen Sie diesen mithilfe einer global nodalen Basis durch elementweise Lagrange'sche bilineare Ansatzfunktionen dar.

3. Ermitteln Sie die Systemmatrix (Jacobi-Matrix) sowie den Vektor auf der rechten Seite des Gleichungssystems $\boldsymbol{J}^{(k)}\boldsymbol{\Delta T}^{(k)} = -\boldsymbol{F}^{(k)}$ für das Newton Verfahren.

4. Erstellen Sie eine Funktion (`Evaluieren`) zur Berechnung der Elementmatrizen $\boldsymbol{J}^{(e)}(\boldsymbol{T}^{(k)})$ sowie des Elementlastvektors $-\boldsymbol{F}^{(e)}(\boldsymbol{T}^{(k)})$. Verwenden Sie dazu die bereits vorbereiteten Funktionen aus den letzten Arbeitsblättern.

5. Verwenden Sie die Funktion **Fkt. XVIII** zur Assemblierung der Elementmatrizen $\boldsymbol{J}^{(e)}(\boldsymbol{T}^{(k)})$ in die globale Matrix $\boldsymbol{J}^{(k)}$ sowie des Elementlastvektors $-\boldsymbol{F}^{(e)}(\boldsymbol{T}^{(k)})$ in den globalen Lastvektor $-\boldsymbol{F}^{(k)}$.

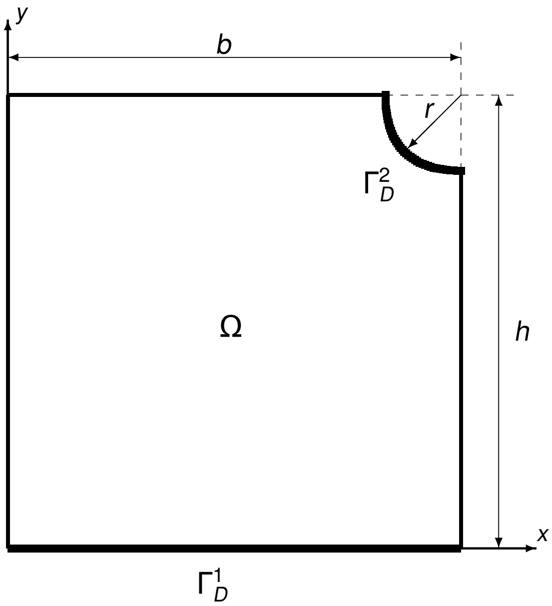
6. Erstellen Sie eine Funktion (`Dirichlet_nlin`) zur Aufbringung der Dirichlet-Randbedingungen in die globale Matrix $\boldsymbol{J}^{(k)}$ sowie in den globalen Lastvektor $-\boldsymbol{F}^{(k)}$.

7. Lösen Sie das Gleichungsystem $\boldsymbol{J}^{(k)}\boldsymbol{\Delta T}^{(k)} = -\boldsymbol{F}^{(k)}$ mithilfe von Matlab (`Lösen`).

8. Bestimmen Sie den neuen Lösungsvektor $\boldsymbol{T}^{(k+1)}$ (`Update`).

Wenden Sie das erstellte Programm auf folgende Problemstellung an:

Ein Stahlträger (Ausdehnung in z-Richtung) liegt an der Fläche $y = 0$ auf einem Bauteil mit einer Temperatur von 600 K auf. Zur Kühlung des Trägers soll eine Ausnehmung, die von Wasser durchflossen wird, angebracht werden. Dadurch wird die Oberfläche dieser Ausnehmung auf eine Temperatur von 300 K gekühlt. Durch eine temperaturabhängige, exotherme, chemische Reaktion wird Wärme in den Träger eingebracht. Die Temperaturverteilung im Bauteil und insbesondere an der Fläche $y = h$ soll analysiert werden. Diese Analyse soll durch ein 2D-Modell am Querschnitt erfolgen.



$\dot{q}(T) = c_1 \exp\left(-\frac{c_2}{T}\right), \quad c_1 = 10^6 \ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^3}, \quad c_2 = 10^3$ K in Ω

$\lambda(x, y) = 48.0 \ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{mK}}$ in Ω

$\lambda \nabla T \cdot \boldsymbol{n} = 0.0$ auf $\{\Gamma \setminus (\Gamma_D^1 \cup \Gamma_D^2)\}$

$T = 600$ K auf Γ_D^1

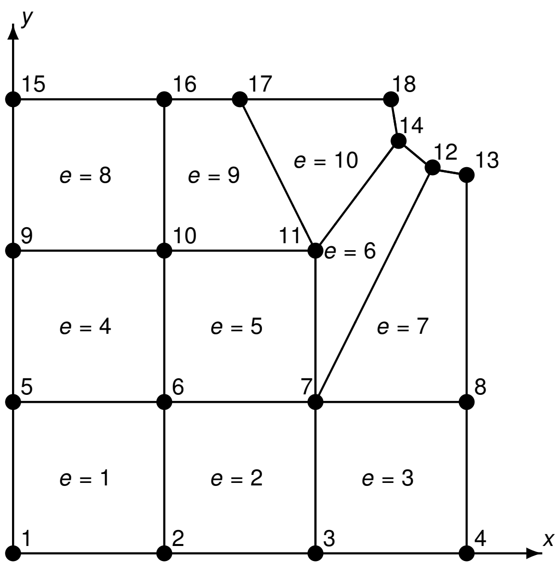
$T = 300$ K auf Γ_D^2

$r = 0.1$ m

$b = 0.3$ m

$h = 0.3$ m

Vernetzen Sie die Problemstellung folgendermaßen:



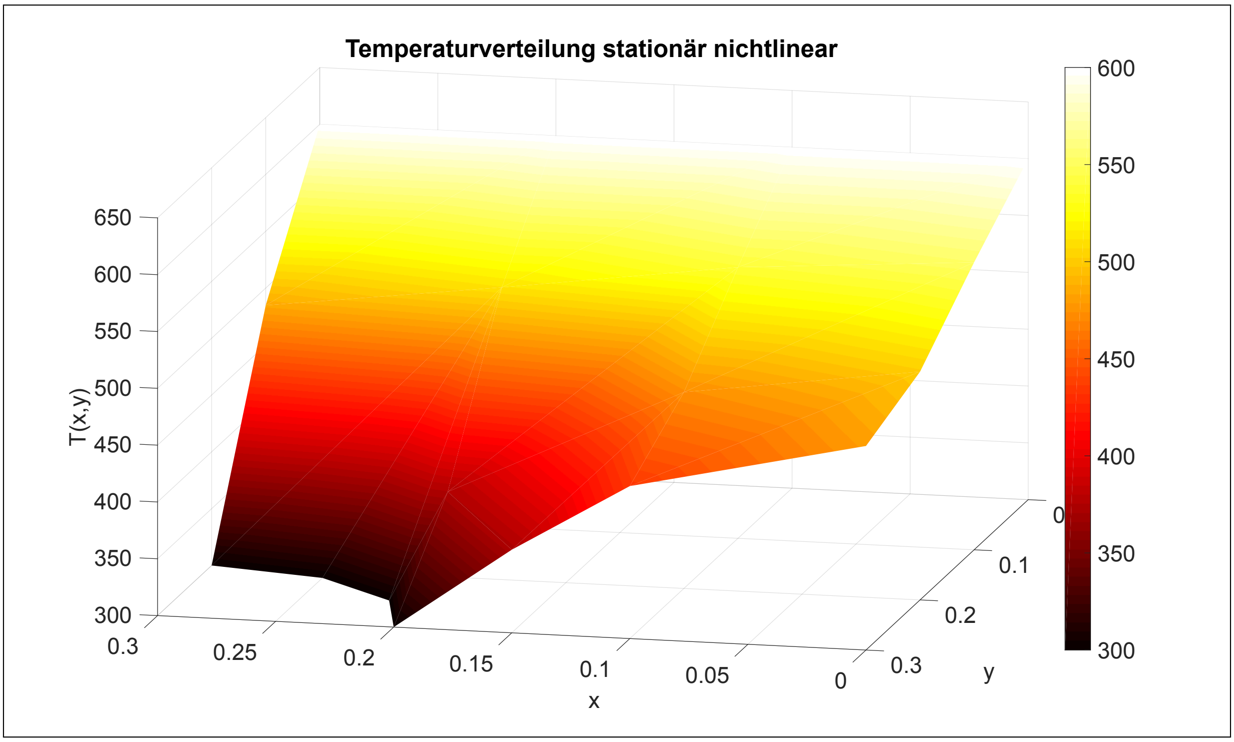
Spezielle Knotenkoordinaten:

$$\boldsymbol{x}_{12} = \begin{bmatrix} b - r\sin(\frac{\pi}{6}) \\ h - r\cos(\frac{\pi}{6}) \end{bmatrix}, \boldsymbol{x}_{13} = \begin{bmatrix} b \\ h - r \end{bmatrix}, \boldsymbol{x}_{14} = \begin{bmatrix} b - r\cos(\frac{\pi}{6}) \\ h - r\sin(\frac{\pi}{6}) \end{bmatrix}, \boldsymbol{x}_{17} = \begin{bmatrix} \frac{b}{2} \\ h \end{bmatrix}, \boldsymbol{x}_{18} = \begin{bmatrix} b - r \\ h \end{bmatrix}$$

Alle weiteren Knoten liegen auf dem strukturierten Gitter mit Weite $\frac{h}{3}$ bzw. $\frac{b}{3}$.

- Werten Sie die Temperatur in den Knoten $(15, 16, 17, 18)$ aus und erstellen Sie einen 3D-Plot der gesamten Temperaturverteilung (mithilfe von **Fkt. 0**).

  Lsg.: $T_{15} = 479.5699762861$, $T_{16} = 434.1885799345$, $T_{17} = 373.1416173689$, $T_{18} = 300.0$



- An die Fläche $y = h$ soll ein temperaturkritisches Bauteil montiert werden. Die Effekte durch das angrenzende Bauteil werden nicht modelliert. Die maximal zulässige Temperatur $T_k = 450\,\mathrm{K}$ sollte auf keinen Fall überschritten werden . Überprüfen Sie, ob dies bereits erfüllt ist.

  Falls nicht, reduzieren Sie die Temperatur der Wasserkühlung auf ein Temperaturniveau, sodass die kritische Temperatur nicht überschritten wird. Reduzieren Sie dazu die Temperatur am Rand Γ_D^2 in $\Delta T = 10\,\mathrm{K}$ Schritten. Finden Sie somit die maximale Temperatur T^*, um das angrenzende Bauteil nicht zu zerstören.
  Erstellen Sie einen 3D-Plot der gesamten Temperaturverteilung in dieser Konfiguration (mithilfe von **Fkt. 0**).

  Lsg.: $T_{15} = 443.8315732888$, $T_{16} = 394.4872428375$, $T_{17} = 328.5025170909$, $T_{18} = 250.0$, $T^* = 250\,\mathrm{K}$

Testen Sie für die Lösung des linearen Gleichungssystems zusätzlich Ihre selbst programmierten Funktionen (**Fkt. XIV**, **Fkt. XV** sowie **Fkt. XVI**).