Numerische Integration

Aufgabe 1: Einfache Quadraturverfahren und 1D Gauß-Quadratur

Approximieren Sie das Integral der Funktion $f(x) = \frac{x^5}{(1+x)^5}$ auf dem Intervall $[a, b] = [0, 4]$. Die Berechnung in Matlab soll mit folgenden Quadraturverfahren erfolgen:

- Mittelpunktregel

  Lsg.: $I_M = 0.52675$

- Trapezregel

  Lsg.: $I_T = 0.65536$

Erstellen Sie die Funktionen **Fkt. III** & **Fkt. IV** zur Berechnung der Positionen und Gewichte und wenden Sie sie auf die folgenden drei Beispiele an:

- Gauß-Quadratur mit einer Stützstelle

  Lsg.: $I_{G1} = 0.52675$

- Gauß-Quadratur mit zwei Stützstellen

  Lsg.: $I_{G2} = 0.54514$

- Gauß-Quadratur mit drei Stützstellen

  Lsg.: $I_{G3} = 0.5585$

Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem Wert der exakten Integration $I = 0.556543771162832$.

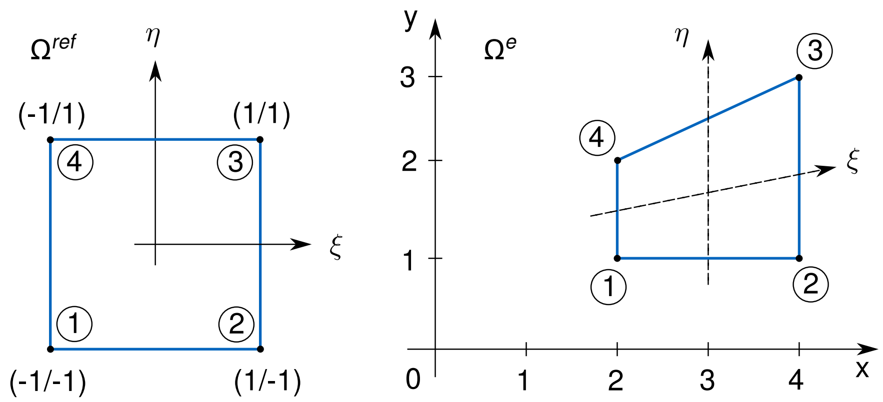
Aufgabe 2: Mehrdimensionale Gauß-Quadratur

Approximieren Sie das Integral

$$m_{12} = \int_{\Omega^e} \bar{N}^1(\boldsymbol{x}) \cdot \bar{N}^2(\boldsymbol{x})\, \mathrm{d}\Omega^e$$

mit der Gauß-Quadratur für $n = 1, 2$ sowie 3 Gauß'sche Integrationspunkte in jeder Koordinatenrichtung. $\bar{N}^i(\boldsymbol{x})$ sind die transformierten Ansatzfunktionen im (x, y)-Koordinatensystem ($\bar{N}^i(\boldsymbol{x}) = \bar{N}^i(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{\xi})) = N^i(\boldsymbol{\xi})$). Die Lagrange'schen bilinearen Ansatzfunktionen in der Referenzkonfiguration $N^1(\xi, \eta)$, $N^2(\xi, \eta)$, $N^3(\xi, \eta)$ und $N^4(\xi, \eta)$ in 2D sind bereits in Aufgabenblatt 3 definiert worden und können über die Funktion **Fkt. I** abgerufen werden.

Gegeben sei ein zweidimensionales vierknotiges Element Ω^e (siehe rechtes Bild). Die Abbildung zeigt die Referenzkonfiguration im lokalen $\boldsymbol{\xi}$-Koordinatensystem ($\boldsymbol{\xi} = (\xi, \eta)$, links) und den verzerrten Zustand im globalen $\boldsymbol{x}$-Koordinatensystem ($\boldsymbol{x} = (x, y)$, rechts).



Die sogenannte isoparametrische Transformation der Koordinaten innerhalb des Elements erfolgt mit Hilfe der Lagrange'schen Ansatzfunktionen $N^i(\xi, \eta)$: $\boldsymbol{x}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{4} N^i(\xi, \eta)\bar{\boldsymbol{x}}^i$, wobei $\bar{\boldsymbol{x}}^i$ die Knotenkoordinaten des verzerrten Elements darstellt. Entnehmen Sie die Knotenkoordinaten der Abbildung.

Hinweis: Durch Transformation des Integrals auf das Referenzelement können die Standard-Gauß-Positionen und -Gewichte verwendet werden:

$$m_{12} = \int_{\Omega^{ref}} \bar{N}^1(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{\xi})) \cdot \bar{N}^2(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{\xi})) \cdot \det(J(\boldsymbol{\xi}))\, d\Omega^{ref} = \int_{\Omega^{ref}} N^1(\boldsymbol{\xi}) \cdot N^2(\boldsymbol{\xi}) \cdot \det(J(\boldsymbol{\xi}))\, d\Omega^{ref}$$

Vorgehen:

1. Stellen Sie die isoparametrische Transformationsbeziehung zwischen Referenzsystem und globalem Koordinatensystem mithilfe der Lagrange'schen Ansatzfunktionen auf ($\boldsymbol{x}(\boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{...}$) und implementieren Sie dies in der Funktion **Fkt. VII**. Diese Funktion wird erst später im Verlauf des Praktikums benötigt.

2. Berechnen Sie die Jacobi-Determinante $\det(J(\xi, \eta)) = \det\left(\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \xi}, \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \eta}\right)$. Implementieren Sie dazu die Funktion **Fkt. VIII**.

3. Approximieren Sie das erhaltene Integral mithilfe einer mehrdimensionalen Gauß-Quadratur (mit je $n = 1, 2$ sowie 3 Gaußpunkten in jeder Koordinatenrichtung). Implementieren Sie dazu die Funktionen **Fkt. V** & **Fkt. VI**. Hinweis: Verwenden Sie die Funktionen **Fkt. III** & **Fkt. IV**.

   Lsg.: $m_{12G1} = 0.1875$; $m_{12G2} = 0.16667$; $m_{12G3} = 0.16667$

4. Wie gut wird das exakte Integral durch die Gaußquadratur approximiert? Wie erklären Sie sich das Ergebnis?

Matlab-Funktionen

Folgende Funktionen sollen bei der Bearbeitung dieses Aufgabenblattes erstellt werden, da diese für spätere Aufgabenblätter wiederverwendet werden sollen. Erstellen Sie die Funktionen in Matlab und speichern Sie diese in eigenen *.m-files ab.

Folgende Funktionen sollen für den Intervall $[a, b] = [-1, 1]$ und $n < 4$ erstellt werden. Nutzen Sie dabei die Werte aus Tabelle 1.

- **Fkt. III**: `function gaussx = gx(n)` [n ... Anz. der Integrationspunkte]

  Rückgabewert: Positionen ξ_i für die 1D-Gauß-Integration als Zeilenvektor

  Testen Sie die Funktion mit (Reihenfolge der Gaußpunkte ist beliebig):

  $$(n = 3) \rightarrow [-0.774596669241483, 0, 0.774596669241483]$$

- **Fkt. IV**: `function gaussw = gw(n)` [n ... Anz. der Integrationspunkte]

  Rückgabewert: Gewichte w_i für die 1D-Gauß-Integration als Zeilenvektor

  Testen Sie die Funktion mit (Reihenfolge der Gaußpunkte ist beliebig):

  $$(n = 3) \rightarrow [0.555555555555555, 0.888888888888889, 0.555555555555555]$$

Folgende Funktionen sollen für das Gebiet $\Omega^{\text{ref}} = \{(\xi, \eta)| -1 \leq \xi \leq 1, -1 \leq \eta \leq 1\}$ und $n < 4$ erstellt werden.

- **Fkt. V**: `function gaussx = gx2dref(n)` [n ... Anz. der Integrationspunkte in einer Richtung]

  Rückgabewert: Positionen $\boldsymbol{\xi}_i$ für die 2D-Gauß-Integration auf dem Gebiet Ω^{ref}

  (Zeile: Integrationspunkt i; Spalte: ξ, η)

  Testen Sie die Funktion mit (Reihenfolge der Gaußpunkte ist beliebig):

  $(n = 1) \rightarrow [0.0, 0.0]$

  $(n = 2) \rightarrow [-a, -a; -a, a; a, -a; a, a]$ mit $a = 0.577350269189626$

  $(n = 3) \rightarrow [-b, -b; -b, 0; -b, b; 0, -b; 0, 0; 0, b; b, -b; b, 0; b, b]$ mit $b = 0.774596669241483$

- **Fkt. VI**: `function gaussw = gw2dref(n)` [n ... Anz. der Integrationspunkte in einer Richtung]

  Rückgabewert: Gewichte w_i für die 2D-Gauß-Integration auf dem Gebiet Ω^{ref} als Spaltenvektor

  Testen Sie die Funktion mit (Reihenfolge der Gaußpunkte ist beliebig):

  $(n = 1) \rightarrow [4.0]$

  $(n = 2) \rightarrow [1.0; 1.0; 1.0; 1.0]$

  $(n = 3) \rightarrow [0.308642; 0.493827; 0.308642; 0.493827; 0.790123; 0.493827; 0.308642; 0.493827; 0.308642]$

Für folgende Funktionen ist der Inputparameter '`nodes`' eine Matrix mit den Positionen der Ecken des Elements: (Zeile: Knoten i, Spalte: x,y)

- **Fkt. VII**: `function x = getxPos(nodes, xi, eta)`

  Rückgabewert: Spaltenvektor Position im (x, y)-Koordinatensystem

  Testen Sie die Funktion mit:

$$([2,1;4,1;4,3;2,2], 0.577, -0.577) \rightarrow [3.577; 1.37826775]$$

- **Fkt. VIII**: `function [J,detJ,invJ] = getJacobian(nodes, xi, eta)`

  Rückgabewert: [Jacobi-Matrix, Determinante der Jacobi-Matrix, Inverse der Jacobi-Matrix]

  Testen Sie die Funktion mit:

$$([2,1;4,1;4,3;2,2], 0.577, -0.577) \rightarrow [[1.0, 0; 0.10575, 0.89425], 0.89425, [1.0, 0; -0.1182555, 1.1182555]]$$

Gaußpunkte und -gewichte

n	ξ_i	w_i
1	0	2
2	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	1
	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1
3	$-\sqrt{\frac{3}{5}}$	$\frac{5}{9}$
	0	$\frac{8}{9}$
	$\sqrt{\frac{3}{5}}$	$\frac{5}{9}$
4	$-\sqrt{\frac{3}{7}+\frac{2}{7}\sqrt{\frac{6}{5}}}$	$\frac{18-\sqrt{30}}{36}$
	$-\sqrt{\frac{3}{7}-\frac{2}{7}\sqrt{\frac{6}{5}}}$	$\frac{18+\sqrt{30}}{36}$
	$\sqrt{\frac{3}{7}-\frac{2}{7}\sqrt{\frac{6}{5}}}$	$\frac{18+\sqrt{30}}{36}$
	$\sqrt{\frac{3}{7}+\frac{2}{7}\sqrt{\frac{6}{5}}}$	$\frac{18-\sqrt{30}}{36}$
5	$-\frac{1}{3}\sqrt{5+2\sqrt{\frac{10}{7}}}$	$\frac{322-13\sqrt{70}}{900}$
	$-\frac{1}{3}\sqrt{5-2\sqrt{\frac{10}{7}}}$	$\frac{322+13\sqrt{70}}{900}$
	0	$\frac{128}{225}$
	$\frac{1}{3}\sqrt{5-2\sqrt{\frac{10}{7}}}$	$\frac{322+13\sqrt{70}}{900}$
	$\frac{1}{3}\sqrt{5+2\sqrt{\frac{10}{7}}}$	$\frac{322-13\sqrt{70}}{900}$