Numerische Lösung von Anfangswertproblemen

Aufgabe 1: Die Familie der Einschritt-θ-Verfahren

Approximieren Sie die Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung $\frac{\mathrm{d}\phi(t)}{\mathrm{d}t} = t^2 e^{-5t} - 6\phi(t)$ mit $0 \leq t \leq 2$ zum Anfangswert $\phi(t_0 = 0) = 0$. Verwenden Sie dazu die folgenden Verfahren mit einer Zeitschrittlänge von $\Delta t = 0.1$, $\Delta t = 0.2$ sowie $\Delta t = 0.4$:

- Vorwärts-Euler Verfahren (Wie groß ist der maximale Zeitschritt für ein stabiles Verfahren?)
- Rückwärts-Euler Verfahren
- Trapezregel

Die exakte Lösung ist durch $\phi(t) = e^{-5t}(t^2 - 2t + 2) - 2e^{-6t}$ gegeben. Erstellen Sie jeweils einen Plot, der die ermittelte Lösung der exakten gegenüberstellt.

Aufgabe 2: Funktionen zur Zeitintegration: Einschrittverfahren, Mehrschrittverfahren

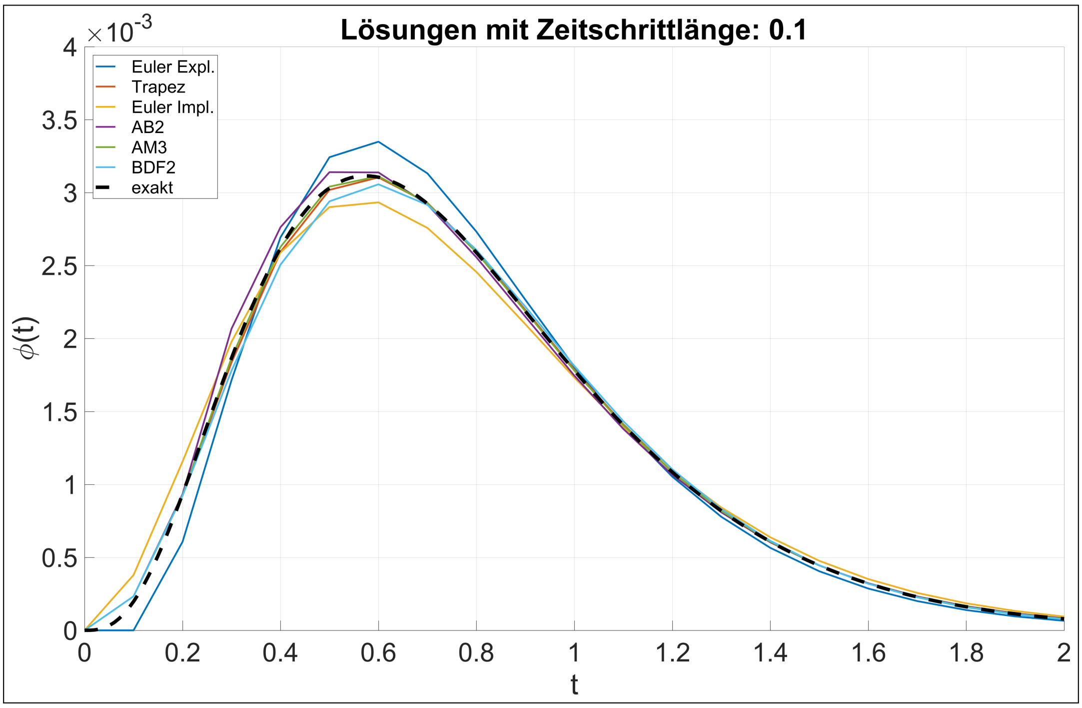
Gegeben sei eine gewöhnliche, skalare, lineare Differentialgleichung $M\frac{\mathrm{d}\phi(t)}{\mathrm{d}t} = B(t)\phi(t) + C(t)$. Erstellen Sie Funktionen, die die Größen L_{HS}, R_{HS} für die Gleichung $L_{HS}\ \phi_{n+1} = R_{HS}$ für folgende Zeitintegrationsverfahren ermitteln:

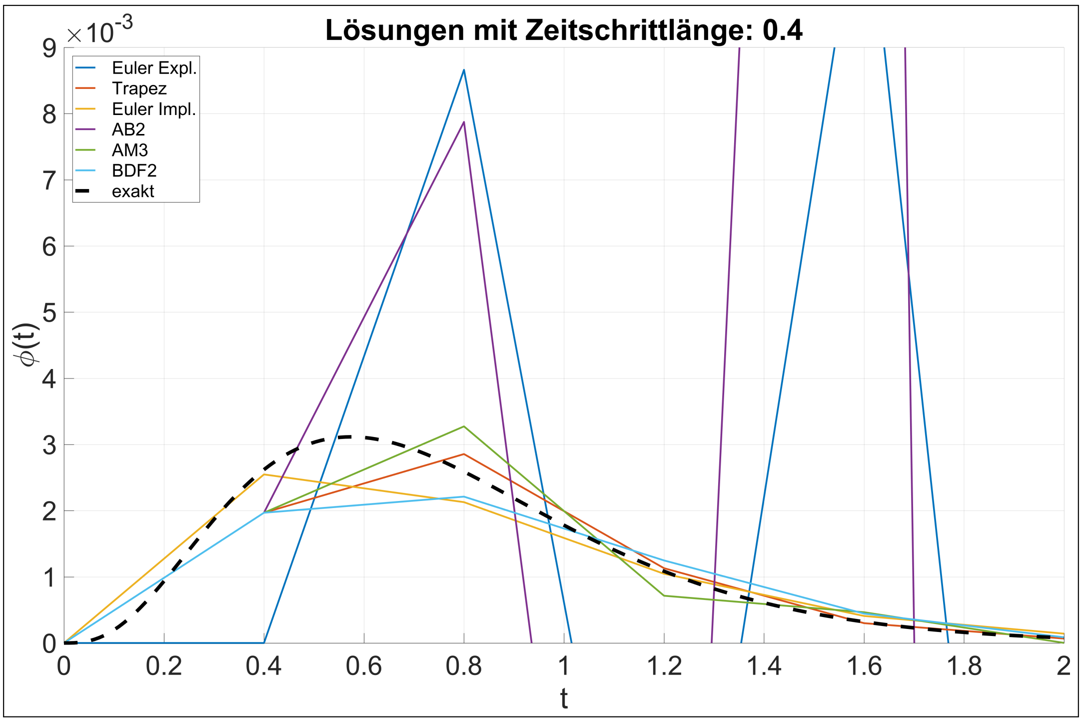
- Einschritt-θ-Verfahren in **Fkt. IX**
- Adams-Bashforth-Verfahren 2. Ordnung in **Fkt. X**
- Adams-Moulton-Verfahren 3. Ordnung in **Fkt. XI**
- BDF2-Verfahren in **Fkt. XII**

Wie groß ist jeweils der maximale Zeitschritt für ein stabiles Verfahren? Führen Sie keine Division durch M der gesamten Gleichung durch, um diese Funktionen später auch für vektorwertige Differentialgleichungen verwenden zu können.

Wenden Sie die Verfahren auf die Differentialgleichung aus Aufgabe 1 an. Verwenden Sie $\Delta t = 0.1, 0.2$ sowie 0.4 als Zeitschrittlänge. Für alle Verfahren, die eine Lösung aus Zeitschritt $\phi(t_{n-1})$ benötigen, verwenden Sie die Trapezregel ($\theta = 0.5$) für den ersten Zeitschritt. Testen Sie das Einschritt-θ-Verfahren für $\theta = 0.0, 0.5$ und 1.0. Plotten Sie die Lösung aller Verfahren für die jeweilige Zeitschrittlänge in ein Diagramm und vergleichen Sie diese mit der exakten Lösung.

Anbei finden Sie exemplarisch die Plots für $\Delta t = 0.1$ sowie $\Delta t = 0.4$:





Matlab-Funktionen

Folgende Funktionen sollen bei der Bearbeitung dieses Aufgabenblattes erstellt werden, da diese für spätere Aufgabenblätter wiederverwendet werden sollen. Erstellen Sie die Funktionen in Matlab und speichern Sie diese in eigenen *.m-files ab.

- **Fkt. IX**: `function [LHS,RHS] = OST(theta,timestep,M,B,C,sol)`

  [M ... $[M]$, B ... $[B(t^{n+1}), B(t^n)]$, C ... $[C(t^{n+1}), C(t^n)]$, sol ... $[\phi(t^n)]$]

  Rückgabewert: Zeilenvektor mit L_{HS} und R_{HS}

  Testen Sie die Funktion mit:

  $$(0.5, 0.2, [1.1], [1.4, 1.5], [1.7, 1.8], [2.0]) \rightarrow [0.96, 2.85]$$

- **Fkt. X**: `function [LHS,RHS] = AB2(timestep,M,B,C,sol)`

  [M ... $[M]$, B ... $[B(t^n), B(t^{n-1})]$, C ... $[C(t^n), C(t^{n-1})]$, sol ... $[\phi(t^n),\phi(t^{n-1})]$]

  Rückgabewert: Zeilenvektor mit L_{HS} und R_{HS}

  Testen Sie die Funktion mit:

  $$(0.2, [1.1], [1.5, 1.6], [1.8, 1.9], [2.0, 2.1]) \rightarrow [1.1, 3.114]$$

- **Fkt. XI**: `function [LHS,RHS] = AM3(timestep,M,B,C,sol)`

  [M ... $[M]$, B ... $[B(t^{n+1}), B(t^n), B(t^{n-1})]$, C ... $[C(t^{n+1}), C(t^n), C(t^{n-1})]$, sol ... $[\phi(t^n),\phi(t^{n-1})]$]

  Rückgabewert: Zeilenvektor mit L_{HS} und R_{HS}

  Testen Sie die Funktion mit:

  $$(0.2, [1.1], [1.4, 1.5, 1.6], [1.7, 1.8, 1.9], [2.0, 2.1]) \rightarrow [0.983333333333333, 2.894]$$

- **Fkt. XII**: `function [LHS,RHS] = BDF2(timestep,M,B,C,sol)`

  [M ... $[M]$, B ... $[B(t^{n+1})]$, C ... $[C(t^{n+1})]$, sol ... $[\phi(t^n),\phi(t^{n-1})]$]

  Rückgabewert: Zeilenvektor mit L_{HS} und R_{HS}

  Testen Sie die Funktion mit:

  $$(0.2, [1.1], [1.4], [1.7], [2.0, 2.1]) \rightarrow [1.37, 3.585]$$