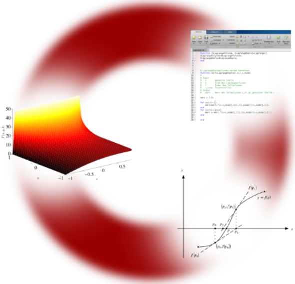
5. Numerische Integration

A Practical Course in Numerical Methods for Engineers

Barbara Wirthl, M.Sc.

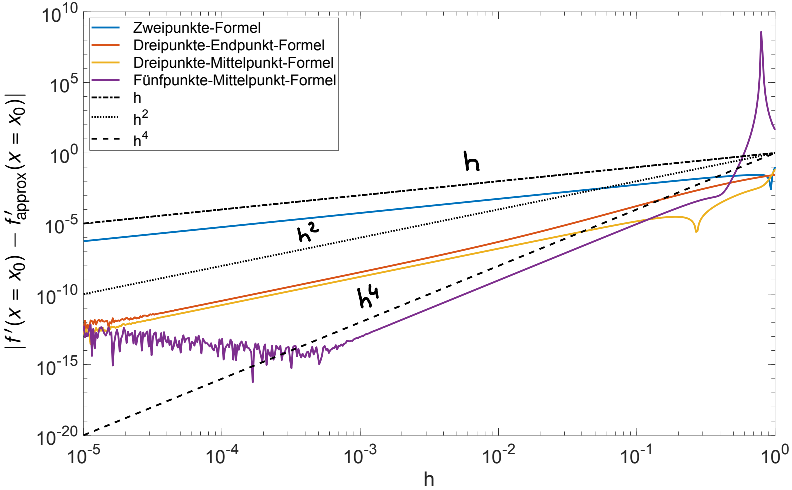
Technische Universität München

Lehrstuhl für Numerische Mechanik



Ergebnis FD-Konvergenzplot $x_0 = 0.6$

$f(x) = \left(\frac{x}{1+x}\right)^5$ mit $x_0 = 0.6$



- `logspace` statt `linspace`

Numerische Differentiation: Finite-Differenzen

Zweipunkte-Formel:

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} - \frac{h}{2} f''(\xi)$$

Dreipunkte-Endpunkt-Formel:

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h}\left[-3f(x_0) + 4f(x_0+h) - f(x_0+2h)\right] + \frac{h^2}{3} f^{(3)}(\xi)$$

Dreipunkte-Mittelpunkt-Formel:

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h}\left[f(x_0+h) - f(x_0-h)\right] - \frac{h^2}{6} f^{(3)}(\xi)$$

Fünfpunkte-Mittelpunkt-Formel:

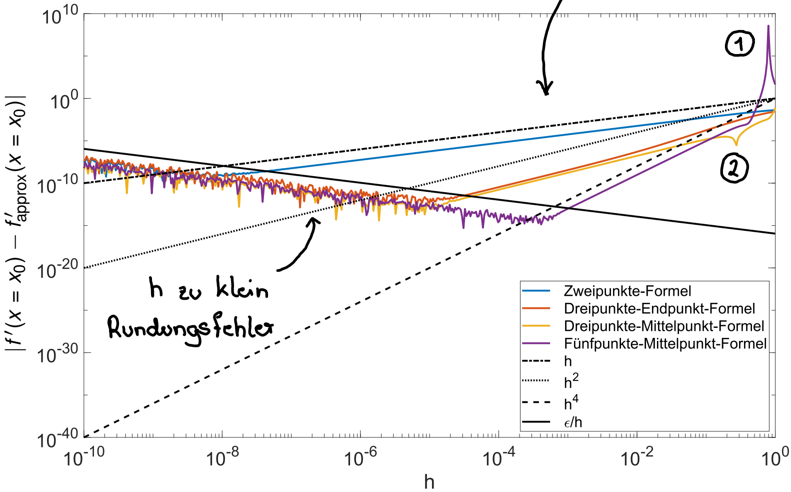
$$f'(x_0) = \frac{1}{12h}\left[f(x_0-2h) - 8f(x_0-h) + 8f(x_0+h) - f(x_0+2h)\right] + \frac{h^4}{30} f^{(5)}(\xi)$$

Herleitung: Faires, J. D., & Burden, R. L. (1994). Numerische Methoden. Näherungsverfahren und ihre praktische Anwendung. Heidelberg, Berlin, Oxford: Spektrum Akademischer Verlag. Kapitel 4.9

Ergebnis FD-Konvergenzplot $x_0 = 0.6$

$f(x) = \left(\frac{x}{1+x}\right)^5$ mit $x_0 = 0.6$

h zu groß:
Diskretisierungsfehler



h zu klein
Rundungsfehler

Ergebnis FD-Konvergenzplot $x_0 = 0.6$

① Peak $\longrightarrow \infty$ in Fünfpunkte-Mittelpunkt-Formel:

$x_0 = 0\,6$ und $h = 0\,8$

Auswertung in $x = x_0 - 2h = -1$ $\longrightarrow$ Polstelle

② Peak $\longrightarrow 0$ in Dreipunkte-Mittelpunkt-Formel:

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} \overset{!}{=} \frac{5x_0^4}{(x_0+1)^6}$$

$h \approx 0.27147.$ $\longrightarrow$ exakt

Pingo

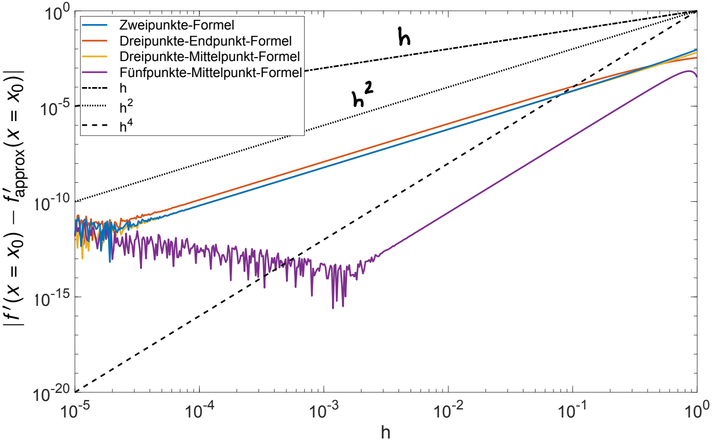
Finite Differenzen für $f(x) = \left(\frac{x}{1+x}\right)^5$ mit $x_0 = 2.0$

Was ändert sich im Konvergenzplot für die Stelle $x_0 = 2.0$ im Vergleich zu $x_0 = 0.6$?

- Nichts.
- Die Peaks. ✓
- Eine Konvergenzordnung. ✓

Ergebnis FD-Konvergenzplot $x_0 = 2.0$

$f(x) = \left(\frac{x}{1+x}\right)^5$ mit $x_0 = 2.0$



Ergebnis FD-Konvergenzplot $x_0 = 2.0$

Konvergenz der Zweipunkte-Formel mit h^2?

Taylor-Entwicklung am Punkt $x_0 + h$:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + h f'(x_0) + \frac{h^2}{2} f''(x_0) + \frac{h^3}{6} f'''(x_0) + O(h^4)$$

$$\longrightarrow \quad f'(x_0) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} - \overbrace{\frac{h}{2} f''(x_0)}^{f''(x_0) = 0} - \frac{h^2}{6} f'''(x_0) - O(h^3)$$

$$f''(x) = \frac{d^2}{dx^2}\left[\left(\frac{x}{x+1}\right)^5\right] = -\frac{10(x-2)x^3}{(1+x)^7}$$

$\rightarrow$ Nullstelle in $x = 2$ $\rightarrow$ $f''(x_0 = 2) = 0$

$\rightarrow$ Konvergenzordnung h^2

Aufgabenblatt 5

Aufgabe 1: Einfache Quadraturverfahren und 1D Gauß-Quadratur

Approximieren Sie das Integral der Funktion $f(x) = \left(\frac{x}{1+x}\right)^5$ auf dem Intervall $[a, b] = [0, 4]$. Die Berechnung soll mit folgenden Quadraturverfahren erfolgen:

- Mittelpunktregel
- Trapezregel

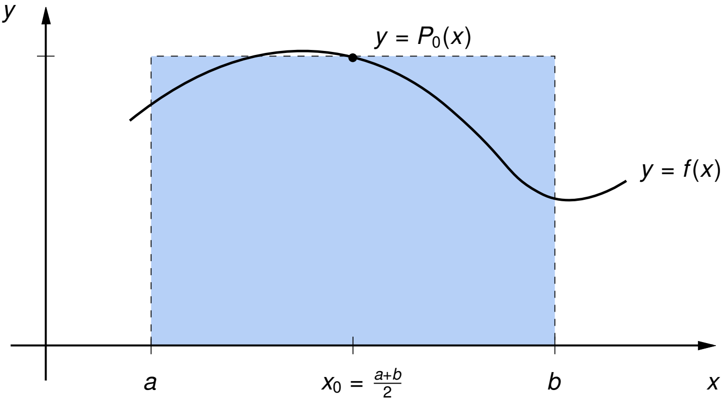
Erstellen Sie die Funktionen **Fkt. III** & **Fkt. IV** zur Berechnung der Positionen und Gewichte und wenden Sie sie auf die folgenden drei Beispiele an:

- Gauß-Quadratur mit einer Stützstelle
- Gauß-Quadratur mit zwei Stützstellen
- Gauß-Quadratur mit drei Stützstellen

Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem Wert der exakten Integration
$I = 0.556543771162832$.

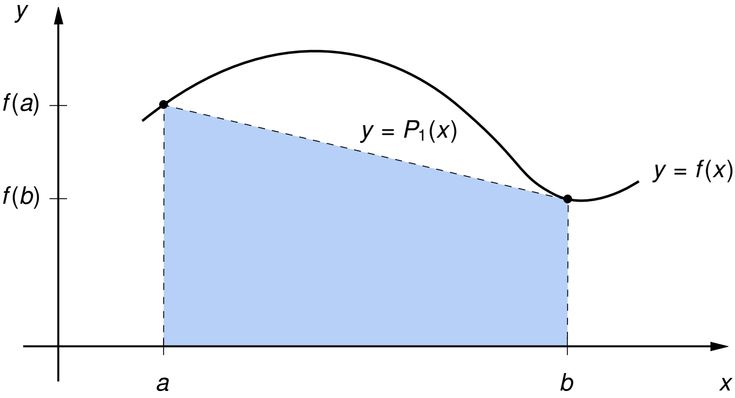
Einfache Quadraturverfahren: Mittelpunktregel

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (b-a)\,f\left(\frac{a+b}{2}\right) \quad + \quad \frac{(b-a)^3}{24} f''(\xi)$$



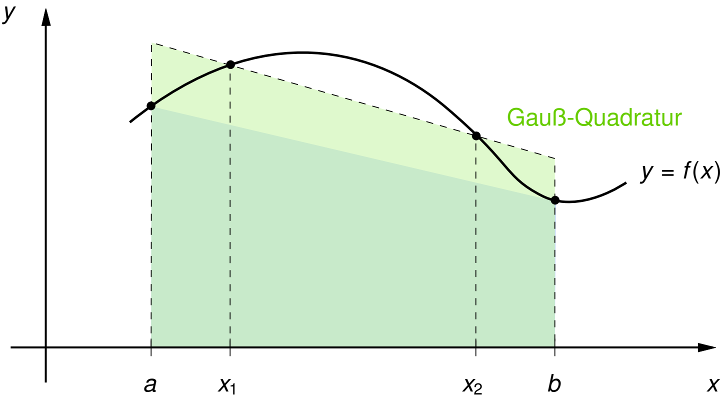
Einfache Quadraturverfahren: Trapezregel

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = (b-a)\,\frac{f(a)+f(b)}{2} \quad + \quad \frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi)$$



Gauß-Quadratur

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i) \quad + \quad C_n(b-a)^{2n+1} f^{(2n)}(\xi)$$



Gauß-Quadratur: Tipps zur Implementierung

Für $n = 1, 2, 3$ und $[a, b] = [-1, 1]$:

n	x_i	w_i
1	$x_1 = 0$	$w_1 = 2$
2	$x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, $x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$	$w_1 = w_2 = 1$
3	$x_1 = -\sqrt{3/5}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \sqrt{3/5}$	$w_1 = \frac{5}{9}$, $w_2 = \frac{8}{9}$, $w_3 = \frac{5}{9}$

- **Fkt. III**: `function gaussx = gx(n)` [n ... Anz. der Integrationspunkte]

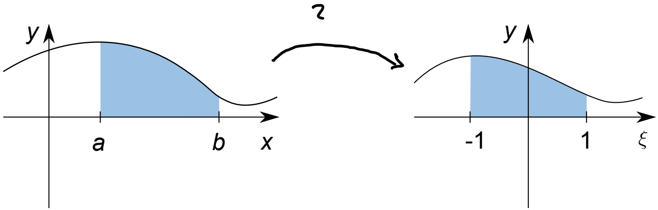
  Rückgabewert: Positionen x_i für die 1D-Gauß-Integration als Zeilenvektor

- **Fkt. IV**: `function gaussw = gw(n)` [n ... Anz. der Integrationspunkte]

  Rückgabewert: Gewichte w_i für die 1D-Gauß-Integration als Zeilenvektor

Gauß-Quadratur auf beliebigem Intervall

Für $[a, b] \neq [-1, 1]$:



Transformationsbeziehung $x(\xi) = \frac{b-a}{2}\xi + \frac{a+b}{2}$

$$\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} f(x(\xi)) \frac{dx(\xi)}{d\xi}\, d\xi$$

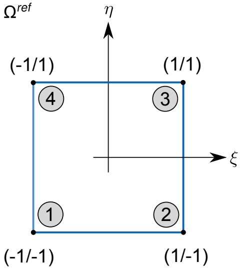
Aufgabenblatt 5

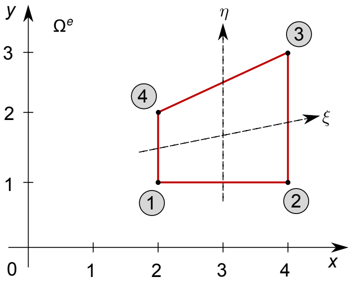
Aufgabe 2: Mehrdimensionale Gauß-Quadratur

Approximieren Sie das Integral

$$m_{12} = \int_{\Omega^e} \bar{N}^1(\boldsymbol{x}) \cdot \bar{N}^2(\boldsymbol{x})\, \mathrm{d}\Omega^e$$

mit der Gauß-Quadratur für $n = 1, 2$ sowie 3 Gauß'sche Integrationspunkte in jeder Koordinatenrichtung. $\bar{N}^i(\boldsymbol{x})$ sind die transformierten Ansatzfunktionen im (x, y)-Koordinatensystem $\bar{N}^i(\boldsymbol{x}) = \bar{N}^i(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{\xi})) = N^i(\boldsymbol{\xi})$.





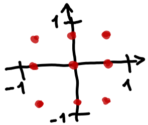
Mehrdimensionale Gauß-Quadratur

Auf dem Referenzelement $\Omega^{ref} = [-1.0, 1.0] \times [-1.0, 1.0]$:

$$\int_{\Omega^{ref}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \approx \int_{y=-1}^{1} \sum_{i=1}^{n^x} w_i^x\, f(x_i, y)\, dy$$

$$= \sum_{i=1}^{n^x} \sum_{j=1}^{n^y} w_i^x\, w_j^y\, f(x_i, y_j)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} w_k\, f(x_k, y_k)$$



mit $n = n^x n^y$, $w_k = w_i^x w_j^y$, $[x_k, y_k] = [x_i, y_j]$

Mehrdimensionale Gauß-Quadratur: Tipps zur Implementierung

Erstellen Sie für das Gebiet $\Omega^{ref} = \{(\xi, \eta) | -1 \leq \xi \leq 1, -1 \leq \eta \leq 1\}$ und $n < 4$ die folgenden Funktionen:

- **Fkt. V**: `function gaussx = gx2dref(n)`

  [n ... Anzahl der Integrationspunkte in einer Richtung]

  Rückgabewert: Positionen $\boldsymbol{\xi_i}$ für die 2D-Gauß-Integration auf dem Gebiet Ω^{ref}

  (Zeile: Integrationspunkt i; Spalte: ξ, η)

- **Fkt. VI**: `function gaussw = gw2dref(n)`

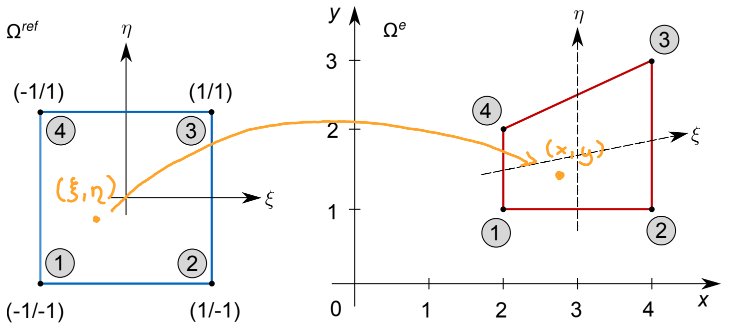
  [n ... Anzahl der Integrationspunkte in einer Richtung]

  Rückgabewert: Gewichte w_i für die 2D-Gauß-Integration auf dem Gebiet Ω^{ref} als Zeilenvektor

Mehrdimensionale Gauß-Quadratur auf beliebigem Element

Referenzkonfiguration im lokalen $\boldsymbol{\xi}$-Koordinatensystem $\boldsymbol{\xi} = (\xi, \eta)$:

Verzerrter Zustand im globalen $\boldsymbol{x}$-Koordinatensystem $\boldsymbol{x} = (x, y)$:



$$\text{getxPos} \begin{cases} \Omega^{ref} \to \Omega^{e} \\ (\xi,\eta) \mapsto \underline{x}(\xi,\eta) = (x,y) \end{cases}$$

Ansatzfunktionen: $\bar{N}^i(\boldsymbol{x}) = \bar{N}^i(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{\xi})) = N^i(\boldsymbol{\xi})$

Mehrdimensionale Gauß-Quadratur auf beliebigem Element

Transformation einer Position (ξ, η) im Referenzelement ins (x, y)-Koordinatensystem:

$$\boldsymbol{x}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{4} N^i(\xi, \eta)\, \underline{x}^i$$

Knoten

→ isoparametrische Transformation

Reminder Lagrange-Polynom in 2D:

$$P(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{4} N^i(\xi, \eta) f^i$$

Transformation des Integrals auf das Referenzelement:

$$m_{12} = \int_{\Omega^e} \bar{N}^1(\boldsymbol{x}) \cdot \bar{N}^2(\boldsymbol{x})\, \mathrm{d}\Omega^e$$

$$= \int_{\Omega^{ref}} \bar{N}^1(\underline{x}(\xi,\eta)) \cdot \bar{N}^2(\underline{x}(\xi,\eta))\, \det(\underline{J}(\xi,\eta))\, d\Omega^{ref}$$

$$= \int_{\Omega^{ref}} N^1(\xi,\eta) \cdot N^2(\xi,\eta)\, \det(\underline{J}(\xi,\eta))\, d\Omega^{ref}$$

$$\text{mit} \quad \underline{J}(\xi,\eta) = \left(\frac{\partial \underline{x}}{\partial \xi} \, , \, \frac{\partial \underline{x}}{\partial \eta} \right)$$

⟶ Verwendung der Standard-Gauß-Punkte und -Gewichte möglich

Mehrdimensionale Gauß-Quadratur: Tipps zur Implementierung

Für folgende Funktionen ist der Inputparameter 'nodes' eine Matrix mit den Positionen der Ecken des Elements: (Zeile: Knoten i, Spalte: x,y)

- **Fkt. VII**: `function x = getxPos(nodes, xi, eta)`

  Rückgabewert: Position im (x, y)-Koordinatensystem

- **Fkt. VIII**: `function [J,detJ,invJ] = getJacobian(nodes, xi, eta)`

  Rückgabewert: [Jacobi-Matrix, Determinante der Jacobi-Matrix, Inverse der Jacobi-Matrix]

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

Und los...

Nächste Tutorsprechstunden:

Montag	21.11. 10:00 – 12:15 Uhr	MW1264
Mittwoch	23.11. 15:30 – 17:45 Uhr	MW1264

Nächstes Aufgabenblatt:

Donnerstag	24.11. 17:00 – 17:45 Uhr	MW2050 + Zoom