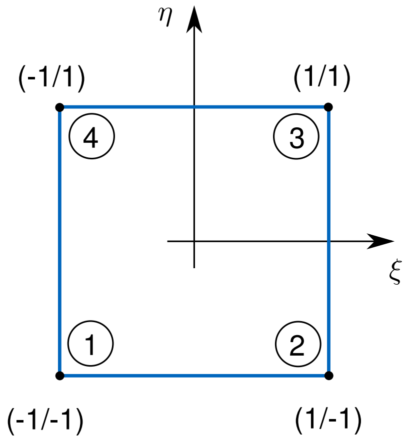
Interpolation und Kurvenanpassung

Aufgabe: 2D–Interpolation

Gegeben ist ein zweidimensionales vierknotiges Element Ω^e im $\boldsymbol{\xi} = (\xi, \eta)$-Koordinatensystem:



An den vier Knoten sind folgende Funktionswerte $f(\xi_i, \eta_i)$ gegeben:

$(\xi\|\eta)$	$(-1\|-1)$	$(+1\|-1)$	$(+1\|+1)$	$(-1\|+1)$
$f(\xi,\eta)$	0.0	1.0	3.0	1.0

Mithilfe von Lagrange'schen Ansatzfunktionen $N_i(\xi,\eta)$ sollen die Funktionswerte $f(\xi,\eta)$ sowie die Ableitungen $\frac{\partial f(\xi,\eta)}{\partial \xi}$, $\frac{\partial f(\xi,\eta)}{\partial \eta}$ an den Punkten $(\xi|\eta) = (0.0; 0.0)$ und $(\xi|\eta) = (0.577; -0.577)$ approximiert werden. Die Lagrange'schen bilinearen Ansatzfunktionen in 2D sind wie folgt definiert

$$N_1(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \qquad N_3(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)$$
$$N_2(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \qquad N_4(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)$$

Vorgehen:

1. Erstellen Sie eine Funktion **Fkt. I** (siehe unten), die alle Ansatzfunktionen $N_i(\xi,\eta)$ als Vektor zurückgibt.

2. Approximieren Sie die Funktionswerte $f(0.0; 0.0)$ und $f(0.577; -0.577)$.

   Lsg.: $f_L(0.0; 0.0) = 1.25$ und $f_L(0.577; -0.577) = 1.16676775$

3. Erstellen Sie die Funktion **Fkt. II**, die alle Ableitungen der Ansatzfunktionen $\frac{\partial N_i(\xi,\eta)}{\partial \xi}$, $\frac{\partial N^i(\xi,\eta)}{\partial \eta}$ als Matrix zurückgibt (Zeilen i, Spalten ξ, η).

4. Approximieren Sie die Ableitungen $\frac{\partial f(\xi,\eta)}{\partial \eta}$, $\frac{\partial f(\xi,\eta)}{\partial \xi}$ in den Punkten $(\xi|\eta) = (0.0; 0.0)$ sowie $(\xi|\eta) = (0.577| - 0.577)$

Lsg.:

$$\frac{\partial f(\xi,\eta)}{\partial \xi}_L |_{(0.0;0.0)} = 0.75; \qquad \frac{\partial f(\xi,\eta)}{\partial \eta}_L |_{(0.0;0.0)} = 0.75$$

$$\frac{\partial f(\xi,\eta)}{\partial \xi}_L |_{(0.577;-0.577)} = 0.60575; \qquad \frac{\partial f(\xi,\eta)}{\partial \eta}_L |_{(0.577;-0.577)} = 0.89425$$

Matlab-Funktionen

Folgende Funktionen sollen bei der Bearbeitung dieses Aufgabenblattes erstellt werden, da diese für spätere Aufgabenblätter wiederverwendet werden sollen. Erstellen Sie die Funktionen in Matlab und speichern Sie diese in eigenen *.m-files ab.

- **Fkt. I**: `function val = linquadref(xi,eta)`

  Rückgabewert: Lagrange-Polynome ausgewertet im Punkt (xi,eta).

  Testen Sie die Funktion mit:

  $$(xi = 0.0, eta = 0.0) \rightarrow [0.25; 0.25; 0.25; 0.25]$$

  $$(xi = 0.577, eta = -0.577) \rightarrow [0.16676775; 0.62173225; 0.16676775; 0.04473225]$$

- **Fkt. II**: `function deriv = linquadderivref(xi,eta)`

  Rückgabewert: Ableitungen der Lagrange-Polynome ausgewertet im Punkt (xi,eta).

  Testen Sie die Funktion mit:

  $$(xi = 0.0, eta = 0.0) \rightarrow [-0.25, -0.25; 0.25, -0.25; 0.25, 0.25; -0.25, 0.25]$$

  $$(xi = 0.577, eta = -0.577) \rightarrow [-b, -a; b, -b; a, b; -a, a] \quad \text{mit} \quad a = 0.10575,\ b = 0.39425$$