Numerische Differentiation

Aufgabe 1: Finite–Differenzen–Approximation

Es ist die Funktion $f(x) = (\frac{x}{1+x})^5$ gegeben. Approximieren Sie die Ableitung f' an der Stelle $x_0 = 0.6$ unter Verwendung geeigneter diskreter Funktionswerte $f(x_0 + kh)$, $(k = -2, -1, 0, 1, 2)$ mit Hilfe der folgenden Finite-Differenzen-Verfahren für $h = 0.1$:

1. Zweipunkte-Formel $(x_0 - h, x_0)$

   Lsg.: $f'_{2P}(x = 0.6) = 0.03300545147$

2. Dreipunkte-Endpunkt-Formel $(x_0, x_0 + h, x_0 + 2h)$

   Lsg.: $f'_{3PE}(x = 0.6) = 0.03879792895$

3. Dreipunkte-Mittelpunkt-Formel $(x_0 - h, x_0, x_0 + h)$

   Lsg.: $f'_{3PM}(x = 0.6) = 0.03860940601$

4. Fünfpunkte-Mittelpunkt-Formel $(x_0 - 2h, x_0 - h, x_0, x_0 + h, x_0 + 2h)$

   Lsg.: $f'_{5PM}(x = 0.6) = 0.03861457357$

Der exakte Wert der Ableitung ist $f'(x = 0.6) = 0.0386238098144531$.

Aufgabe 2: Konvergenz der Finite-Differenzen-Approximation

Erstellen Sie zwei Plots für $x_0 = 0.6$ und $x_0 = 2.0$, die den Fehler der Approximation

$$|f'(x = x_0) - f'_{2P,3PE,3PM,5PM}(x = x_0)|$$

aller in Aufgabe 1 verwendeten Methoden in Abhängigkeit von h darstellen. Verwenden Sie dazu $h = 1.0$ bis $h = 10^{-5}$. Plotten Sie zusätzlich die Referenzkurven $g_1(h) = h$, $g_2(h) = h^2$ und $g_3(h) = h^4$. Skalieren Sie beide Achsen der Diagramme logarithmisch.

Analysieren Sie die Plots und erklären Sie das auftretende Verhalten. Vergleichen Sie die auftretende Konvergenzordnung der Verfahren mit den Referenzkurven.

Anbei finden Sie exemplarisch einen Plot zur Fünfpunkte-Mittelpunkt-Formel für $x_0 = 0.6$: