Rechengenauigkeit, Interpolation und Kurvenanpassung

Aufgabe 1: Rechengenauigkeit

Erstellen Sie eine Matlab-Funktion (`function x_num = lineintersection(P1,P2)`) zur Berechnung der x-Koordinate des Schnittpunktes zweier Geraden. Die erste Gerade ist durch die Punkte P_1 und P_2 festgelegt. Die zweite Gerade ist die Horizontale durch $y = 2$. Die Punkte P_1 und P_2 sind gegeben als

$$\boldsymbol{P}_1 = \begin{pmatrix} 0.0 \\ 1.0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{P}_2 = \begin{pmatrix} \delta \\ 1.0 + \delta \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die x-Koordinate des Schnittpunktes für $10^{-20} \leq \delta \leq 10^5$. Wählen Sie dazu eine geeignete Verteilung des Parameters δ. Plotten Sie für die verschiedenen δ den Betrag des absoluten Fehlers der Position $(\delta, |x_{\text{ex}} - x_{\text{num}}|)$ in doppelt logarithmischem Maßstab im relevanten Bereich. Dabei ist x_{ex} der analytische exakte Schnittpunkt und x_{num} Ihr ermittelter Wert. Interpretieren Sie das Ergebnis qualitativ.

Aufgabe 2: Interpolation mit Lagrange-Polynomen

Erstellen Sie ein Matlab-Programm, das die Auswertung der Lagrange-Polynome und deren Ableitung für einen beliebigen Grad ermöglicht. Es sind fünf Stützstellen x mit den zugehörigen Funktionswerten $f(x) = \left(\frac{x}{1+x}\right)^5$ gegeben:

$\boldsymbol{x}$	0.0	1.0	2.0	3.0	4.0
$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$	0.000000000000	0.031250000000	0.131687242798	0.237304687500	0.327680000000

Berechnen Sie mit Hilfe des erstellten Programmes den Funktionswert und die Ableitung an der Stelle $x = 0.6$ und plotten Sie die jeweilige Funktion sowie die Ableitung der untenstehenden Lagrange-Interpolation. Es ist exemplarisch der Plot für Polynome vom Grad 4 gezeigt.

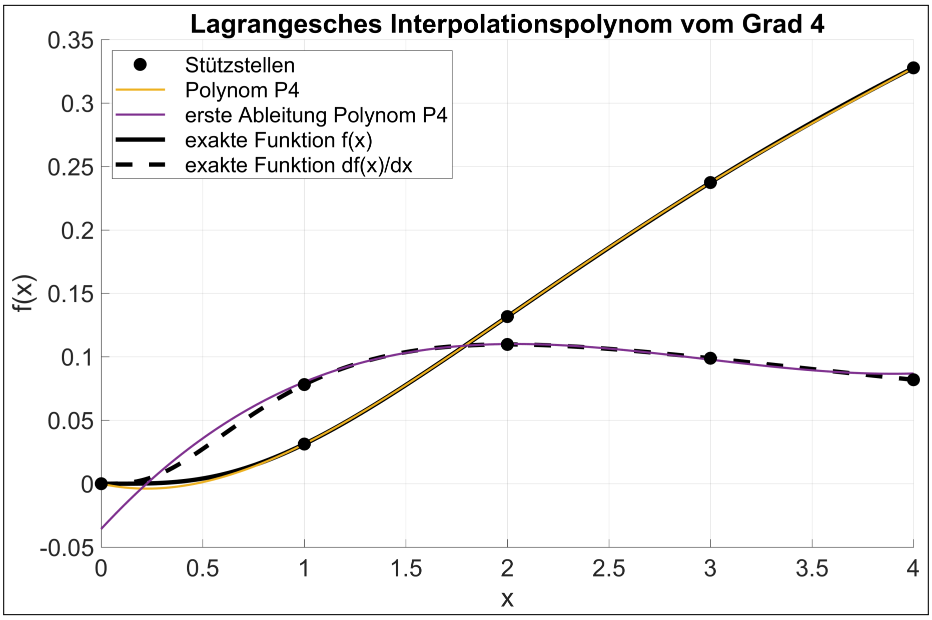
Wenden dies auf folgende Fälle an:

a) Polynome vom Grad 1. Verwenden Sie nur die Punkte $x = 0.0$ und $x = 1.0$.

   Lsg.: $f_{L1}(0.6) = 0.01875$, $f'_{L1}(0.6) = 0.03125$

b) Polynome vom Grad 4.

Lsg.: $f_{L4}(0.6) = 0.0053987$, $f'_{L4}(0.6) = 0.046593$



c) Polynome vom Grad 80. Verwenden Sie dazu die gegebene Funktion $f(x)$ und werten Sie diese in gleichmäßigen Abständen im Intervall $[0.0, 4.0]$ aus.

Lsg.: $f_{L80}(0.6) = 0.0074158$, $f'_{L80}(0.6) = 0.038624$

Hinweis: Die exakte Lösung der zugrunde liegenden Funktion lautet: $f(0.6) = 0.0074158$, $f'(0.6) = 0.038624$.