Lehrstuhl für Numerische Mechanik
TUM School of Engineering and Design
Technische Universität München

2. Interpolation und Kurvenanpassung

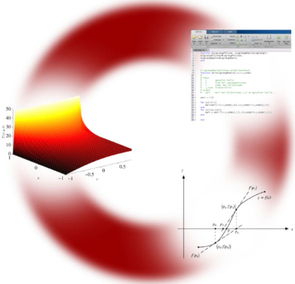
3. Interpolation in 2D

A Practical Course in Numerical Methods for Engineers

Barbara Wirthl, M.Sc.

Technische Universität München

Lehrstuhl für Numerische Mechanik



1. Aufgabenblatt

- Generelle Unterschiede zwischen Matlab Versionen
- *.m-files erstellen und nicht direkt in Konsole
- Funktion `disp` für Ausgabe verwenden
- Plots nicht symbolisch

Binäre Zahlendarstellung

Darstellung durch bits (0 oder 1)

X	X	X	X

Beispiel: 4 bit Zahl

3	2	1	0
1	0	0	1

$$[1\;0\;0\;1]_2 = 1 \; 2^0 + 1 \; 2^3$$

$$= 1 + 8 = 9$$

Rechengenauigkeit bei Gleitkommaarithmetik:

- kein Genauigkeitsverlust bei Multiplikation und Division
- Subtraktion kann zu Auslöschung führen

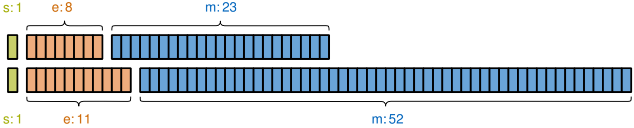
Gleitkommazahlen

$$\overbrace{-}^{s}1.\underbrace{234}_{m}\cdot 10^{\underbrace{-4}_{e}}$$

IEEE Standard 754: Vorzeichen (s), Exponent (e), Mantisse (m)

Single precision (32 bit)

Double precision (64 bit)



Umrechnung:

$$\zeta = \begin{cases} (-1)^s \cdot 2^{e-\text{bias}} \times 1. \times m & \text{falls } 0 < e < 2^{|e|} - 1 \\ (-1)^s \cdot 2^{0-\text{bias}} \times 0. \times m & \text{falls } e = 0 \wedge m \neq 0 \\ 0 & \text{falls } e = 0 \wedge m = 0 \\ (-1)^s \cdot \infty & \text{falls } e = 2^{|e|} - 1 \wedge m = 0 \\ \text{NaN} & \text{falls } e = 2^{|e|} - 1 \wedge m \neq 0 \end{cases}$$

mit $|\cdot|$ = Anzahl der Bits

Wähle

$$\text{bias} = \Big(\underbrace{2^{|e|}}_{\text{mögl. Kombinationen}} - \overbrace{2}^{\text{für Sonderfälle}}\Big) \Big/ \underbrace{2}_{\text{Zahlen: }>1,<1}$$

Single: bias $= \frac{1}{2}\left(2^8 - 2\right) = 127$

Double: bias $= \frac{1}{2}\left(2^{11} - 2\right) = 1023$

Gleitkommazahlen

8 bit *Spielzeug*-Gleitkommazahlen

X	X	X	X	X	X	X	X

bias = $\frac{1}{2}(2^3 - 2) = 3$

$$(-1)^s \quad \times \quad 2^{e-\text{bias}} \quad \times \quad \left(1 + \sum_{i=1}^{4} b_{4-i}\, 2^{-i}\right)$$

$a =$

0	1	1	0	0	0	0	0

$= (-1)^0 \cdot 2^{6-3} \cdot 1.0$

$= 8$

$b =$

				-1	-2	-3	-4
0	1	0	1	1	0	1	1

$= (-1)^0 \cdot 2^{5-3} \cdot (1 + 2^{-1} + 2^{-3} + 2^{-4})$

$= 6.75$

Subtraktion von Gleitkommazahlen

Binär:

0	1	1	0	0	0	0	0

−

0	1	0	1	1	0	1	1

Dezimal: $a - b = 8 - 6.75 =$ 1.25

尾数m右移一位，阶码e增加1位，而数值保持不变；对阶时，总是使小阶向大阶看齐；尾数右移时，要将不显示表示的1移到小数位，高位补0，低位移到附加位。

1. Schritt: Auf gleichen Exponenten bringen

0	1	0	1	1	0	1	1

1

→

0	1	1	0	1	1	0	1

0

2. Schritt: Mantissen binär subtrahieren

2.1 Zweierkomplement der Mantisse

$$\begin{array}{r} 0010 \\ +\quad 1 \\ \hline 0011 \end{array}$$

负数补码，取反加一，符号位不变

2.2 Addition

$$\begin{array}{r} 0000 \\ +\ 0011 \\ \hline 0011 \end{array}$$

0	1	1	0	0	0	1	1

0

3. Schritt: Ergebnis normalisieren

0	1	0	1	0	1	1	*

0

→

0	1	0	0	1	1	*	*

0

→

0	0	1	1	1	*	*	*

1

4. Schritt: Kontrolle

0	0	1	1	1	0	0	0

1

$= (-1)^0 \cdot 2^{3-3} \cdot (1 + 2^{-1}) = 1.5$

尾数左移，阶码减1，直到尾数符号重新为1

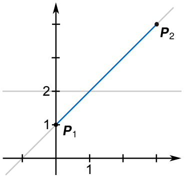
Aufgabenblatt 2

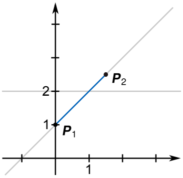
Aufgabe 1: Rechengenauigkeit

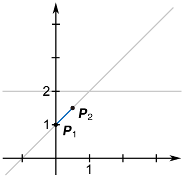
Erstellen Sie eine Matlab-Funktion (`function x_num = lineintersection(P1,P2)`) zur Berechnung der x-Koordinate des Schnittpunktes zweier Geraden. Die erste Gerade ist durch die Punkte P_1 und P_2 festgelegt. Die zweite Gerade ist die Horizontale durch $y = 2$. Die Punkte P_1 und P_2 sind gegeben als

$$\boldsymbol{P}_1 = \left(0.0, 1.0\right) \quad \text{und} \quad \boldsymbol{P}_2 = \left(\delta, 1.0 + \delta\right).$$

Berechnen Sie die x-Koordinate des Schnittpunktes für $10^{-20} \leq \delta \leq 10^5$. Wählen Sie dazu eine geeignete Verteilung des Parameters δ. Plotten Sie für die verschiedenen δ den Betrag des absoluten Fehlers der Position $(\delta, |x_{\text{ex}} - x_{\text{num}}|)$ in doppelt logarithmischem Maßstab im relevanten Bereich. Dabei ist x_{ex} der analytische exakte Schnittpunkt und x_{num} Ihr ermittelter Wert. Interpretieren Sie das Ergebnis qualitativ.







Aufgabenblatt 2

Aufgabe 2: Interpolation mit Lagrange-Polynomen

Erstellen Sie ein Matlab-Programm, das die Auswertung der Lagrange-Polynome und deren Ableitung für einen beliebigen Grad ermöglicht. Es sind fünf Stützstellen x mit den zugehörigen Funktionswerten $f(x) = \left(\frac{x}{1+x}\right)^5$ gegeben:

x	0.0	1.0	2.0	3.0	4.0
$f(x)$	0.000000	0.031250	0.131687	0.237304	0.327680

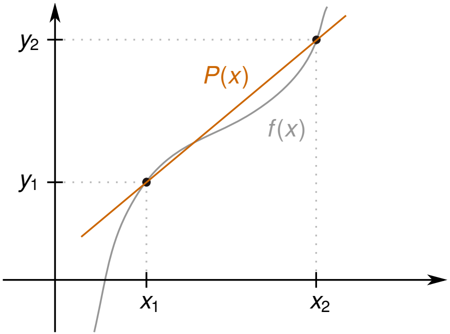
Berechnen Sie mit Hilfe des erstellten Programmes den Funktionswert und die Ableitung an der Stelle $x = 0.6$ und plotten Sie die jeweilige Funktion sowie die Ableitung der untenstehenden Lagrange-Interpolation.

Lagrange-Interpolation mit 2 Punkten

Gegeben: 2 Stützstellen (x_1, y_1), (x_2, y_2) mit $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$

Polynominterpolation:

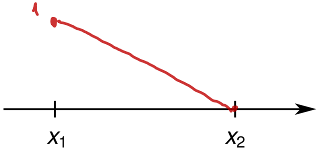
$$P(x) = \underbrace{\frac{(x - x_2)}{(x_1 - x_2)}}_{=L_{11}(x)} y_1 + \underbrace{\frac{(x - x_1)}{(x_2 - x_1)}}_{=L_{12}(x)} y_2 = L_{11}(x) y_1 + L_{12}(x) y_2$$



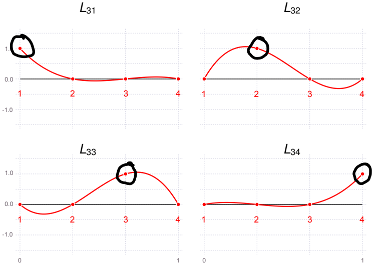
Beispiel Basispolynom L_{11}:

$$L_{11}(x_1) = \frac{x_1 - x_2}{x_1 - x_2} = 1$$

$$L_{11}(x_2) = \frac{x_2 - x_2}{x_1 - x_2} = 0$$



Lagrange-Interpolation mit $n+1$ Punkten



$n+1$ Stützstellen x_i mit Funktionswerten $y_i = f(x_i)$
$\rightarrow$ Polynom von Grad n

Basispolynome:

$$L_{ni}(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{falls } i \neq j \end{cases}$$

$$L_{ni}(x) = \frac{(x - x_1)\dots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\dots(x - x_{n+1})}{(x_i - x_1)\dots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\dots(x_i - x_{n+1})}$$

Lagrange-Polynom: Grad n

$$P_n(x) = L_{n1}(x)\ y_1 + \dots + L_{n(n+1)}(x)\ y_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} L_{ni}(x)\ y_i$$

Lagrange-Interpolation: Tipps zur Implementierung

Umsetzung:

- `function wert_basis = LagrangeBasis(x,n,i,x_node)`

Ordnung

Index des Polynoms

Stützstellen

funktionswert

- `function wert_poly = LagrangePolynom(x,n,x_node,f_node)`

Verwenden Sie die elementweisen Operatoren in den Funktionen (.* bzw. ./ bzw. .^)

Lagrange-Interpolation: Ableitung

Beispiel für Lagrange-Polynom 2. Ordnung:

$$P_2(x) = L_{21}(x)\; y_1 + L_{22}(x)\; y_2 + L_{23}(x)\; y_3$$

$$\frac{dP_2(x)}{dx} = \frac{dL_{21}(x)}{dx} y_1 + \frac{dL_{22}(x)}{dx} y_2 + \frac{dL_{23}(x)}{dx} y_3$$

Beispiel Basispolynom L_{22}:

$$L_{22}(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)} \qquad L_{23}(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$$

Ableitung des Basispolynoms:

$$\frac{dL_{22}(x)}{dx} = \frac{1}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)} \left[1 \cdot (x-x_3) + (x-x_1) \cdot 1 \right]$$

Lagrange-Interpolation: Ableitung

Ableitung des Lagrange-Polynoms:

$$\frac{\mathrm{d}P_n(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}L_{n1}(x)}{\mathrm{d}x}\, y_1 + \ldots + \frac{\mathrm{d}L_{n(n+1)}(x)}{\mathrm{d}x}\, y_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\mathrm{d}L_{ni}(x)}{\mathrm{d}x}\, y_i$$

Basispolynome:

$$L_{ni}(x) = \frac{(x - x_1)\ldots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\ldots(x - x_{n+1})}{(x_i - x_1)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_{n+1})}$$

$$= \prod_{k=1,k\neq i}^{n+1} \frac{(x - x_k)}{(x_i - x_k)}$$

Ableitung der Basispolynome:

$$\frac{\mathrm{d}L_{ni}(x)}{\mathrm{d}x} = \sum_{m=1,m\neq i}^{n+1} \left[\frac{1}{x_i - x_m} \prod_{k=1,k\neq(i,m)}^{n+1} \frac{(x - x_k)}{(x_i - x_k)} \right]$$

Lagrange-Interpolation: Tipps zur Implementierung

Umsetzung:

- `function wert_basis = LagrangeBasis(x,n,i,x_node)`
- `function wert_poly = LagrangePolynom(x,n,x_node,f_node)`
- `function wert_dbasis = LagrangeDerivBasis(x,n,i,x_node)`
- `function wert_dpoly = LagrangeDerivPolynom(x,n,x_node,f_node)`

Verwenden Sie die elementweisen Operatoren in den Funktionen (.* bzw. ./ bzw. .^)

Tipp:

$$L_{ni}(x) = \prod_{k=1,k\neq i}^{n+1} \frac{(x - x_k)}{(x_i - x_k)}$$

for $k = 1 : (n+1)$

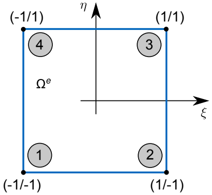
  if $k \neq i$

    $\text{wert} = \text{wert} \cdot \dfrac{x - \text{x\_node}(k)}{\text{x\_node}(i) - \text{x\_node}(k)}$

Aufgabenblatt 3

2D - Interpolation

Gegeben ist ein zweidimensionales vierknotiges Element Ω^e im $\boldsymbol{\xi} = (\xi, \eta)$-Koordinatensystem:



An den vier Knoten sind folgende Funktionswerte $f(\xi_i, \eta_i)$ gegeben:

$(\xi \vert \eta)$	$(-1 \vert -1)$	$(+1 \vert -1)$	$(+1 \vert +1)$	$(-1 \vert +1)$
$f(\xi, \eta)$	0.0	1.0	3.0	1.0

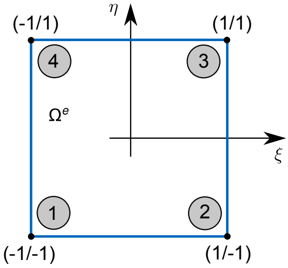
Mithilfe von Lagrange'schen Ansatzfunktionen $N_i(\xi, \eta)$ sollen die Funktionswerte $f(\xi, \eta)$ sowie die Ableitungen $\frac{\partial f(\xi,\eta)}{\partial \xi}$, $\frac{\partial f(\xi,\eta)}{\partial \eta}$ an den Punkten $(\xi|\eta) = (0.0; 0.0)$ sowie $(\xi|\eta) = (0.577; -0.577)$ approximiert werden. Die Lagrange'schen bilinearen Ansatzfunktionen in 2D sind wie folgt definiert

$$N_1(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \quad N_2(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \quad N_3(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \quad N_4(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)$$

Lagrange-Interpolation in 2D

Gegeben:

- zweidimensionales vierknotiges Element Ω^e im $\boldsymbol{\xi} = (\xi, \eta)$-Koordinatensystem
- Funktionswerte an den Stützstellen $f(\xi_i, \eta_i)$



Lagrange-Polynom in 2D:

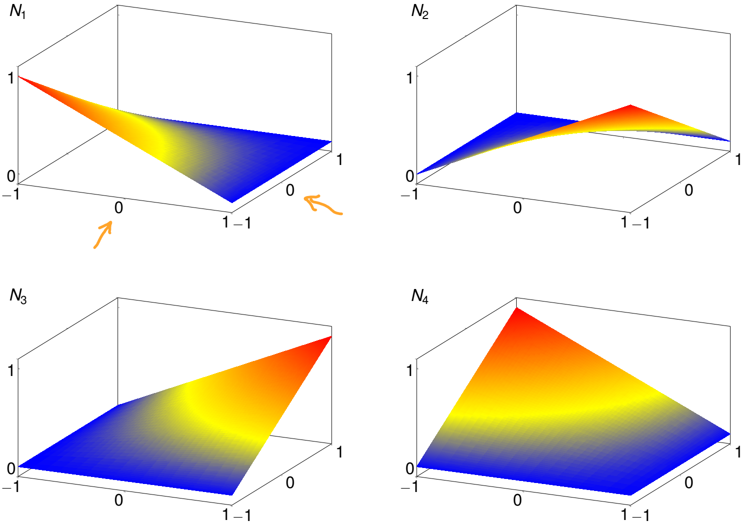
$$P(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{4} N_i(\xi, \eta)\, y_i$$

$$N_i(\xi_i, \eta_i) \overset{!}{=} 1 \qquad i = 1, 2, 3, 4$$

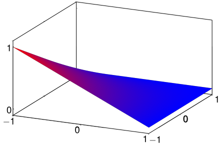
$$N_i(\xi_j, \eta_j) \overset{!}{=} 0 \qquad i \neq j$$

$\rightarrow$ speziell für diese Koordinaten implementieren

Lagrange-Interpolation in 2D



Lagrange-Interpolation in 2D



Herleitung: 1D lineare Basispolynome multiplizieren

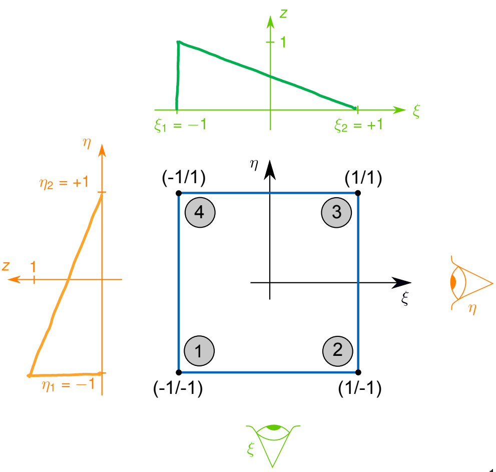
Beispiel $N_1(\xi, \eta)$:

$$L_{11}^{\xi} = -\frac{1}{2}(\xi - 1)$$

$$L_{11}^{\eta} = -\frac{1}{2}(\eta - 1)$$

$$\rightarrow N_1(\xi, \eta) = L_{11}^{\xi} \cdot L_{11}^{\eta}$$

$$= \frac{1}{4}(\xi - 1)(\eta - 1)$$



Lagrange-Interpolation in 2D: Tipps zur Implementierung

Lagrange'sche bilineare Ansatzfunktionen in 2D:

$$N_1(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \qquad N_3(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)$$

$$N_2(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \qquad N_4(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)$$

$$\text{val} = \begin{bmatrix} N_1(\xi,\eta) \\ N_2(\xi,\eta) \\ N_3(\xi,\eta) \\ N_4(\xi,\eta) \end{bmatrix} \quad 4\times 1$$

Umsetzung:

- **Fkt. I**: `function val = linquadref(xi,eta)`
  Rückgabewert: Lagrange-Polynome ausgewertet im Punkt (xi,eta).
- **Fkt. II**: `function deriv = linquadderivref(xi,eta)`
  Rückgabewert: Ableitungen der Lagrange-Polynome ausgewertet im Punkt (xi,eta).

$$\text{deriv} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \frac{\partial N_1}{\partial \eta} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial N_4}{\partial \xi} & \frac{\partial N_4}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad 4\times 2$$

Und los...

Nächste Tutorsprechstunden:

Montag	31.10. 10:00 – 12:15 Uhr	MW1264
Mittwoch	02.11. 15:30 – 17:45 Uhr	MW1264
Montag	07.11. 10:00 – 12:15 Uhr	MW1264
Mittwoch	09.11. 15:30 – 17:45 Uhr	MW1264

Nächstes Aufgabenblatt:

Donnerstag	03.11. 17:00 – 17:45 Uhr	Entfällt
Donnerstag	10.11. 17:00 – 17:45 Uhr	MW2050 + Zoom