Numerische Lösung von partiellen Differentialgleichungen

Aufgabe: FEM – Instationäre Wärmeleitungsgleichung 2D

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} - \nabla \cdot (\lambda \nabla T) = \dot{q} \quad \text{in } \Omega \times [0, t^*]$$

$$\text{mit} \quad T = T_D \quad \text{auf} \quad \Gamma_D \quad \forall t, \qquad \lambda \nabla T \cdot \boldsymbol{n} = 0 \quad \text{auf} \quad \Gamma_N \quad \forall t$$

$$\text{mit} \quad T = T_0 \quad \text{in } \Omega \quad \text{für } t = 0.$$

Die Dichte ρ sowie die spezifische Wärmekapazität c sind vom Material abhängig und gegeben. Unter Beibehaltung aller Einschränkungen und Definitionen aus Arbeitsblatt 7 ($\dot{q} = 0$ und $\lambda \nabla T \cdot \boldsymbol{n} = 0$ an den Neumann-Rändern) soll nun die instationäre Wärmeleitungsgleichung in 2D mittels Matlab gelöst werden. Erweitern Sie das in Arbeitsblatt 7 erstellte Programm für den instationären Fall so, dass die bereits erstellten Funktionen zur Zeitintegration (**Fkt. IX**, **Fkt. X**, **Fkt. XI**, **Fkt. XII**) verwendet werden können.

Hinweis zum Programmaufbau:

Schleife über alle Zeitschritte

    Schleife über alle Elemente

        `Funktion Evaluieren()`

            Schleife über alle Gaußpunkte im Element

                Schleife über alle Zeilen der Elementmatrix

                    Schleife über alle Spalten der Elementmatrix

        `Funktion Assemblieren()`

    `Funktion Dirichlet()`

    `Funktion Lösen()`

Vorgehen: Die ersten 3 Punkte sind von Hand durchzuführen.

1. Leiten Sie ausgehend von der gegebenen Gleichung die schwache Form der Gleichung unter Berücksichtigung der gegebenen Einschränkungen her.

2. Ersetzen Sie den unendlich-dimensionalen Funktionenraum der Testfunktionen sowie der Temperatur $T(\boldsymbol{x})$ durch einen endlich-dimensionalen Funktionenraum. Stellen Sie diesen mithilfe einer global nodalen Basis durch elementweise Lagrange'sche bilineare Ansatzfunktionen dar.

3. Diskretisieren Sie die Gleichung in der Zeit mittels Einschritt-θ-Verfahren.

4. Erstellen Sie die Funktion **Fkt. XX** zur Berechnung der Elementmatrizen $\boldsymbol{A}^{(e)}$ sowie des Elementlastvektors $\boldsymbol{f}^{(e)}$. Verwenden Sie dazu die bereits vorbereiteten Funktionen aus den letzen Arbeitsblättern.

5. Verwenden Sie die Funktion **Fkt. XVIII** zur Assemblierung der Elementmatrizen $\boldsymbol{A}^{(e)}$ in die globale Matrix $\boldsymbol{A}$ sowie des Elementlastvektors $\boldsymbol{f}^{(e)}$ in den globalen Lastvektor $\boldsymbol{f}$.

6. Verwenden Sie die Funktion **Fkt. XIX** zur Aufbringung der Dirichlet-Randbedingungen in die globale Matrix $\boldsymbol{A}$ sowie in den globalen Lastvektor $\boldsymbol{f}$.

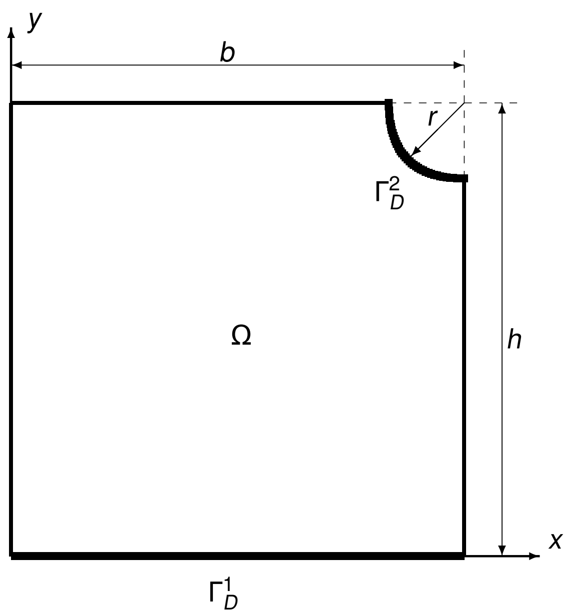
7. Lösen Sie das Gleichungssystem $\boldsymbol{A}\boldsymbol{T} = \boldsymbol{f}$ mithilfe von Matlab (`Lösen`).

Wenden Sie das erstellte Programm auf folgende Problemstellung an:

Geg.: Einschritt-θ-Verfahren mit $\theta = 0.5$ und einer Zeitschrittlänge von $\Delta t = 500\,\text{s}$

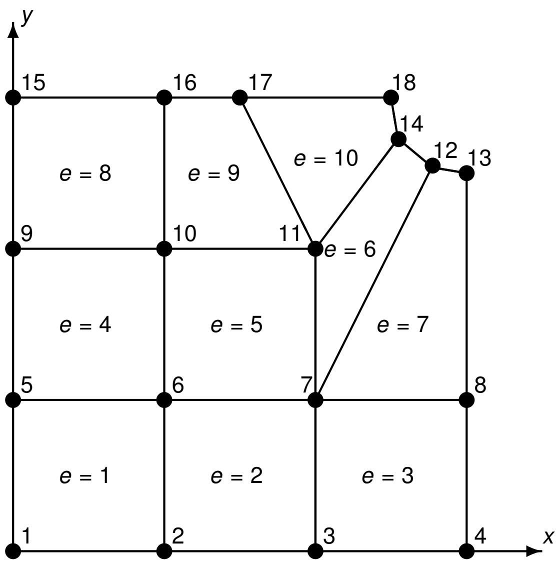
Ein Stahlträger (Ausdehnung in z-Richtung) liegt an der Fläche $y = 0$ auf einem Bauteil mit einer Temperatur von 600 K auf. Zur Kühlung des Trägers soll eine Ausnehmung, die von Wasser durchflossen wird, angebracht werden. Dadurch wird die Oberfläche dieser Ausnehmung auf eine Temperatur von 300 K gekühlt.

Die Temperaturverteilung im Bauteil und im Speziellen an der Fläche $y = h$ soll analysiert werden. Diese Analyse soll durch ein 2D-Modell am Querschnitt erfolgen.



$t \in [0.0, t^*]$
$\rho(x, y) = 7800\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ in $\{\Omega, t\}$
$c(x, y) = 452\,\frac{\text{J}}{\text{kgK}}$ in $\{\Omega, t\}$
$\lambda(x, y) = 48.0\,\frac{\text{W}}{\text{mK}}$ in $\{\Omega, t\}$
$\lambda \nabla T \cdot \boldsymbol{n} = 0.0$ auf $\{\Gamma \setminus (\Gamma_D^1 \cup \Gamma_D^2), t\}$
$T = T_0 = 300\,\text{K}$ in $\{\Omega, t = 0.0\}$
$T = T_{\Gamma_D^1} = 600\,\text{K}$ auf $\{\Gamma_D^1, t\}$
$T = T_{\Gamma_D^2} = 300\,\text{K}$ auf $\{\Gamma_D^2, t\}$
$r = 0.02\,\text{m}$
$b = 0.3\,\text{m}$
$h = 0.3\,\text{m}$

Vernetzen Sie die Problemstellung folgendermaßen:



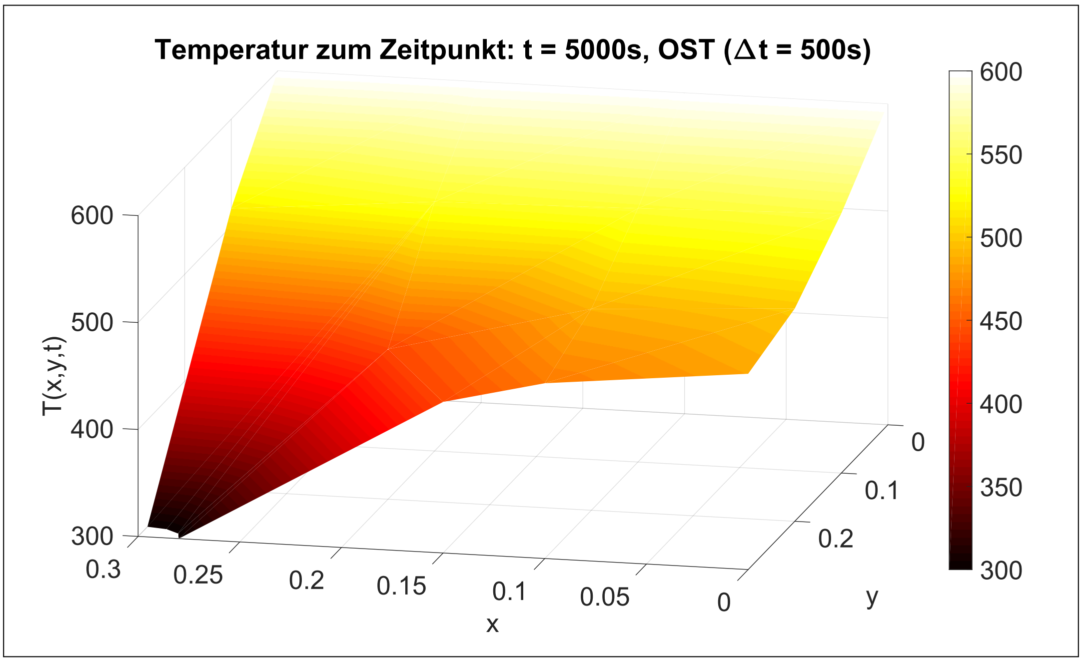
Spezielle Knotenkoordinaten:

$$\boldsymbol{x}_{12} = \begin{bmatrix} b - r\sin(\frac{\pi}{6}) \\ h - r\cos(\frac{\pi}{6}) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_{13} = \begin{bmatrix} b \\ h - r \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_{14} = \begin{bmatrix} b - r\cos\frac{\pi}{6}) \\ h - r\sin(\frac{\pi}{6}) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_{17} = \begin{bmatrix} \frac{b}{2} \\ h \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_{18} = \begin{bmatrix} b - r \\ h \end{bmatrix}$$

Alle weiteren Knoten liegen auf dem strukturierten Gitter mit Weite $\frac{h}{3}$ bzw. $\frac{b}{3}$.

- Werten Sie die Temperatur in den Knoten (15, 16, 17, 18) für $t^* = 5000.0\,\mathrm{s}$ aus und erstellen Sie einen Plot der Temperaturverteilung zu diesem Zeitpunkt. Verwenden Sie zwei Gaußpunkte pro Richtung.

Lsg.: $T^{10}_{15} = 483.0904955082072$, $T^{10}_{16} = 463.920357865233$, $T^{10}_{17} = 441.2822085402274$, $T^{10}_{18} = 300.0$



Testen Sie zusätzlich andere Zeitschrittlängen Δt sowie die anderen Zeitintegrationsverfahren (**Fkt. IX**, **Fkt. X**, **Fkt. XI** bis **Fkt. XII**).

- An die Fläche $y = h$ soll ein temperaturkritisches Bauteil montiert werden. Die Effekte durch das angrenzende Bauteil werden nicht modelliert. Die maximal zulässige Temperatur $T_k = 450\,\mathrm{K}$ darf auf keinen Fall überschritten werden. Überprüfen Sie für die gegebene Geometrie, wie lange es dauert bis diese kritische Temperatur überschritten wird, wenn die Temperatur im gesamten Bauteil bei $t = 0$ bei $T_0 = 300\,\mathrm{K}$ liegt. Ab dem nächsten Zeitschritt wird an der Fläche $y = 0$ ein Bauteil mit $T = 600\,\mathrm{K}$ angebracht.

  Finden Sie den ersten Zeitschritt mit der Zeit $\tilde{t}^*$, bei dem die maximal zulässige Temperatur $T_k = 450\,\mathrm{K}$ überschritten wird. Erstellen Sie einen 3D-Plot der gesamten Temperaturverteilung zu diesem Zeitpunkt in dieser Konfiguration (mithilfe von **Fkt. 0**).

Lsg.: $T^7_{15} = 462.63454655276$, $T^7_{16} = 446.0152482665$, $T^7_{17} = 426.7693248011598$, $T^7_{18} = 300.0$, $\tilde{t}^* = 3500\,\mathrm{s}$

Matlab-Funktionen

Folgende Funktionen sollen bei der Bearbeitung dieses Aufgabenblattes erstellt werden, da diese für spätere Aufgabenblätter wiederverwendet werden sollen. Erstellen Sie die Funktionen in Matlab und speichern Sie diese in eigenen *.m-files ab.

- **Fkt. XX**: `function [elemat,elevec] = evaluate_instat(elenodes,gpx,gpw,elesol,eleosol,timInt_m,timestep,theta,firststep)`

  [elenodes ... [Knotenpositionen(Zeile: Knoten i, Spalte: x,y)],
  gpx ... [Positionen ξ_i Gauss-Integration],
  gpw ... [Gewichte w_i Gauß-Integration],
  elesol ... [Lösung Zeitschritt (n)-Spaltenvektor],
  eleosol ... [Lösung Zeitschritt (n-1)-Spaltenvektor],
  timInt_m ... [Zeitintegrationsverfahren: 1 = OST, 2 = AB2, 3 = AM3, 4 = BDF2],
  timestep ... [Zeitschrittlänge Δt],
  theta ... [θ für OST],
  firststep ... [erste Zeitschritt?]]

  Rückgabewert: Elementmatrix $\boldsymbol{A}^{(e)}$ und Elementvektor $\boldsymbol{f}^{(e)}$

  Testen Sie die Funktion mit: ([0,0;1,0;1,2;0,2],`gx2dref(3)`,`gw2dref(3)`,[1;2;3;4],[0;0;0;0],1,1000,0.66,1) $\rightarrow$
  [[809866.6666666666,373253.3333333334,182666.6666666667,397013.3333333334;
  373253.3333333334,809866.6666666669,397013.3333333334,182666.6666666667;
  182666.6666666667,397013.3333333334,809866.6666666667,373253.3333333334;
  397013.3333333334,182666.6666666667,373253.3333333334,809866.6666666666],
  [3736426.6666666665;3918693.3333333335;4895306.6666666670;5077573.3333333321]]