Lehrstuhl für Numerische Mechanik
TUM School of Engineering and Design
Technische Universität München

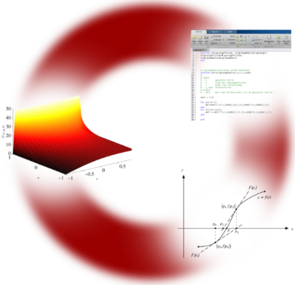
6. Numerische Lösung von Anfangswertproblemen

A Practical Course in Numerical Methods for Engineers

Barbara Wirthl, M.Sc.

Technische Universität München

Lehrstuhl für Numerische Mechanik



Pingo

Aufgabenblatt 5 – Aufgabe 2

Konnten Sie Aufgabe 2 zur 2D–Gaußintegration lösen?

- Ja und ich habe alles verstanden.
- Ich habe `getJacobian` nicht verstanden.
- Ich habe `getxPos` nicht verstanden.
- Ich habe die 2D-Gaußintegration nicht verstanden.

Aufgabenblatt 5: Gaußintegration

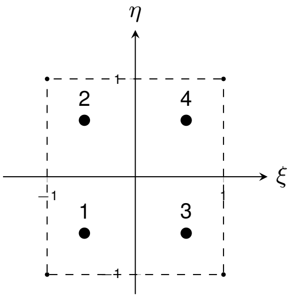
$$\int_\Omega f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \approx \sum_{k=1}^{n} w_k f(x_k, y_k)$$

- Reihenfolge der Gaußpunkte k beliebig
- w_k zu (x_k, y_k) zugeordnet

Beispiel für 2 Punkte in jeder Richtung:

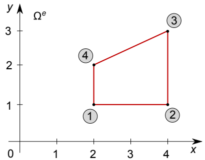
$x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}},\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ und $w_1 = w_2 = 1$

k	w_k	ξ_k, η_k
1	$w_1 \cdot w_1$	ξ_1, η_1
2	$w_1 \cdot w_2$	ξ_1, η_2
3	$w_2 \cdot w_1$	ξ_2, η_1
4	$w_2 \cdot w_2$	ξ_2, η_2



Gaußintegration: Beispiel

Gegeben: $\Omega^e \quad \rightarrow \quad$ Knoten: $\quad \boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2, \boldsymbol{x}^3, \boldsymbol{x}^4$



$$I = \int_{\Omega^e} (2x + y)\, d\Omega^e$$

$$= \int_{\Omega^{ref}} (2x + y) \det(\underline{\boldsymbol{J}}(\xi, \eta))\, d\Omega^{ref}$$

$$= \int_{\Omega^{ref}} [2x(\xi, \eta) + y(\xi, \eta)] \det(\underline{\boldsymbol{J}}(\xi, \eta))\, d\Omega^{ref}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} [2x(\xi_k, \eta_k) + y(\xi_k, \eta_k)] \det(\underline{\boldsymbol{J}}(\xi_k, \eta_k))\, w_k$$

```
getJacobian(nodes, xi, eta):
```

ξ_k, η_k

$$\boldsymbol{J} = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{\xi}} = \sum_{i=1}^{4} \frac{\partial N^i(\xi,\eta)}{\partial \boldsymbol{\xi}} \boldsymbol{x}^i$$

$$\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \\ y^1 & y^2 & y^3 & y^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N^1}{\partial \xi} & \frac{\partial N^1}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N^2}{\partial \xi} & \frac{\partial N^2}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N^3}{\partial \xi} & \frac{\partial N^3}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N^4}{\partial \xi} & \frac{\partial N^4}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

```
getxPos(nodes, xi, eta):
```

ξ_k, η_k

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{4} N^i(\xi, \eta)\boldsymbol{x}^i$$

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N^1 & N^2 & N^3 & N^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^1 & y^1 \\ x^2 & y^2 \\ x^3 & y^3 \\ x^4 & y^4 \end{bmatrix}$$

Aufgabenblatt 6

$\phi_0 \curvearrowright \phi_1 \curvearrowright \phi_2 \ \dots$

Aufgabe 1: Die Familie der Einschritt-θ-Verfahren

Approximieren Sie die Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}\phi(t)}{\mathrm{d}t} = t^2 e^{-5t} - 6\phi(t)$$

mit $0 \leq t \leq 2$ zum Anfangswert $\phi(t_0 = 0) = 0$. Verwenden Sie dazu die folgenden Verfahren mit einer Zeitschrittlänge von $\Delta t = 0.1$, $\Delta t = 0.2$ sowie $\Delta t = 0.4$:

- Vorwärts-Euler-Verfahren (Wie groß ist der maximale Zeitschritt für ein stabiles Verfahren?)
- Rückwärts-Euler-Verfahren
- Trapezregel

Die analytische Lösung ist durch $\phi(t) = e^{-5t}(t^2 - 2t + 2) - 2e^{-6t}$ gegeben. Erstellen Sie jeweils einen Plot, der die ermittelte Lösung der analytischen gegenüberstellt.

Numerische Lösung von Anfangswertproblemen

Allgemeine Formulierung:

ges. geg.

$$\frac{d\phi(t)}{dt} = f(t, \phi(t))$$

mit der Anfangsbedingung $\phi(t_0) = \phi_0$

Beispiel:

$$\frac{d\phi(t)}{dt} = \underbrace{t^2 e^{-5t} - 6\phi(t)}_{f(t,\phi)}$$

mit $\phi(t_0 = 0) = 0$

Überlegungen:

1. Numerische Differentiation

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\phi_{n+1} - \phi_n}{\Delta t} \overset{!}{=} f(t,\phi) \longrightarrow \phi_{n+1} = \phi_n + \Delta t\, f(t,\phi)$$

2. Numerische Integration

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{d\phi}{dt}\, dt \overset{!}{=} \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t,\phi)\, dt$$

$$\phi_{n+1} - \phi_n \overset{!}{=} \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t,\phi)\, dt \longrightarrow \phi_{n+1} = \phi_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t,\phi)\, dt$$

Vorwärts-Euler-Verfahren

$$\frac{\mathrm{d}\phi(t)}{\mathrm{d}t} = f(t, \phi(t)) \quad \text{mit} \quad \phi(t_0) = \phi_0$$

Numerische Differentiation:

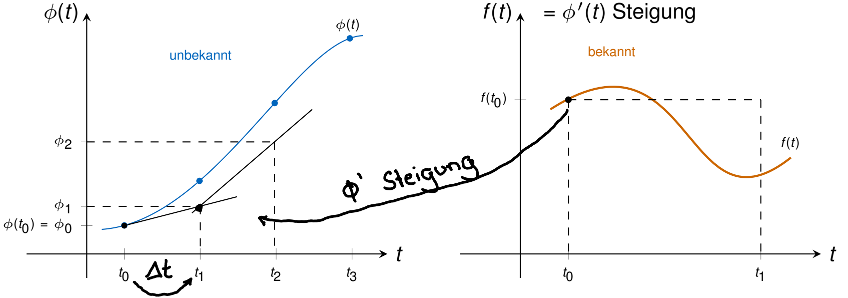
$$\phi_{n+1} = \phi_n + \Delta t \; f(t, \phi)$$

Numerische Integration:

$$\phi_{n+1} = \phi_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, \phi(t)) \; \mathrm{d}t$$

Vorwärts-Euler-Verfahren: Auswertung in t_n und ϕ_n

$$\phi_{n+1} = \phi_n + \Delta t \, f(t_n, \phi_n)$$



Stabilität des Vorwärts-Euler-Verfahrens

Ergänzung:

$$\frac{\mathrm{d}\phi(t)}{\mathrm{d}t} = f(t, \phi(t)), \qquad \phi(t=0) = \phi_0$$

2D–Taylorreihenentwicklung der rechten Seite:

$$f(t,\phi) = f(t_0,\phi_0) + (t - t_0)\,\frac{\partial f(t_0,\phi_0)}{\partial t} + (\phi - \phi_0)\,\frac{\partial f(t_0,\phi_0)}{\partial \phi} + \dots = \alpha + \beta t + \lambda\phi + \dots$$

Betrachtung von:

$$\frac{\mathrm{d}\phi(t)}{\mathrm{d}t} = \lambda\,\phi \quad \text{da } \alpha + \beta t \text{ nur konstanter bzw. linearer Beitrag}$$

Einsetzen in Vorwärts–Euler–Verfahren:

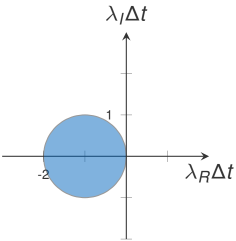
$$\phi_{n+1} = \phi_n + \Delta t\; f(t_n,\phi_n) = \phi_n + \Delta t\,\lambda\,\phi_n = \phi_n\,(1 + \lambda\,\Delta t)$$

$$\downarrow$$

$$\phi_{n+1} = \phi_0\;\underbrace{(1+\lambda\Delta t)}_{\text{stabil falls } <1}{}^{n+1}$$

$$\downarrow$$

$$|1 + \lambda\Delta t| \leq 1$$



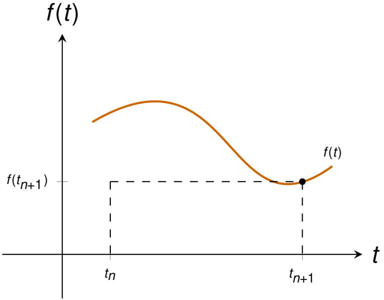
$\rightarrow$ bedingt stabil

Rückwärts-Euler-Verfahren und Trapezregel

Rückwärts-Euler

$$\phi_{n+1} = \phi_n + \Delta t\ f\left(t_{n+1}, \phi_{n+1}\right)$$

- Auswertung am Endpunkt
- implizites Verfahren

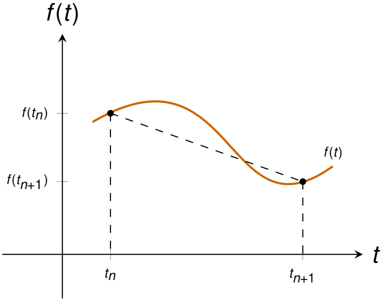


→ A-stabil

Trapezregel

$$\phi_{n+1} = \phi_n + \frac{1}{2}\Delta t\left[f\left(t_{n+1}, \phi_{n+1}\right) + f\left(t_n, \phi_n\right)\right]$$

- Auswertung durch Interpolation zwischen Anfangs- und Endpunkt
- implizites Verfahren



→ A-stabil

Einschritt-θ-Verfahren

Allgemeine Form

$$\phi_{n+1} = \phi_n + \theta\, \Delta t\ f\,(t_{n+1}, \phi_{n+1}) + (1 - \theta)\, \Delta t\ f\,(t_n, \phi_n)$$

- $\theta = 0$ das Vorwärts-Euler-Verfahren
- $\theta = 1$ das Rückwärts-Euler-Verfahren
- $\theta = \frac{1}{2}$ die Trapezregel

Aufgabenblatt 6

Aufgabe 2: Funktionen zur Zeitintegration: Einschrittverfahren, Mehrschrittverfahren

Gegeben sei eine gewöhnliche, skalare, lineare Differentialgleichung

$$M\frac{\mathrm{d}\phi(t)}{\mathrm{d}t} = B(t)\phi(t) + C(t).$$

Erstellen Sie Funktionen, die die Größen L_{HS}, R_{HS} für die Gleichung $L_{HS}\phi_{n+1} = R_{HS}$ für folgende Zeitintegrationsverfahren ermitteln:

- Einschritt-θ-Verfahren in **Fkt. IX**
- Adams-Bashforth-Verfahren 2. Ordnung in **Fkt. X**
- Adams-Moulton-Verfahren 3. Ordnung in **Fkt. XI**
- BDF2-Verfahren in **Fkt. XII**

Wenden Sie die Verfahren mithilfe der Funktionen auf die Differentialgleichung aus Aufgabe 1 an. Für alle Verfahren, die eine Lösung aus Zeitschritt $\phi(t_{n-1})$ benötigen, verwenden Sie für den ersten Zeitschritt die Trapezregel ($\theta = 0.5$).

Einschritt-θ-Verfahren

Notation:

$\phi(t_n) = \phi_n;\ \phi(t_{n+1}) = \phi_{n+1}$

$B(t_n) = B_n;\ B(t_{n+1}) = B_{n+1}$

$C(t_n) = C_n;\ C(t_{n+1}) = C_{n+1}$

Allgemeine DGL:

$$\frac{\mathrm{d}M\phi(t)}{\mathrm{d}t} = B(t)\phi(t) + C(t)$$

Einschritt–θ–Verfahren: $\phi_{n+1} = \phi_n + \theta\,\Delta t\, f(t_{n+1}, \phi_{n+1}) + (1-\theta)\,\Delta t\, f(t_n, \phi_n)$

$$M\phi_{n+1} = M\phi_n + \theta\Delta t\left[B_{n+1}\phi_{n+1} + C_{n+1}\right] + (1-\theta)\Delta t\left[B_n\phi_n + C_n\right]$$

$$\downarrow$$

$$\underbrace{\left[M - \theta\Delta t B_{n+1}\right]}_{LHS}\phi_{n+1} = \underbrace{\left[M + (1-\theta)\Delta t B_n\right]\phi_n + \Delta t\left[\theta C_{n+1} + (1-\theta)C_n\right]}_{RHS}$$

$$\downarrow$$

$$LHS\ \phi_{n+1} = RHS$$

$$\downarrow$$

$$\phi_{n+1} = \frac{RHS}{LHS} \quad \text{bzw} \quad \phi_{n+1} = LHS \backslash RHS$$

Einschritt-θ-Verfahren: Beispiel

$$\underbrace{\frac{d\phi(t)}{dt}}_{M=1} = \underbrace{\cos(t)e^{-7t}}_{C(t)} \quad \underbrace{- \quad 9\phi(t)}_{B(t) = B = -9}$$

mit $\phi_0 = 7$ und $\Delta t = 0.1$

Erster Schritt ϕ_1:

$$LHS = [M - \theta\, \Delta t\, B(t_1)] = 1 - \theta \cdot 0.1 \cdot (-9)$$

$$RHS = [M + (1-\theta)\Delta t\, B(t_0)]\,\phi_0 \quad + \quad \Delta t\,[\theta\, C(t_1) + (1-\theta)C(t_0)]$$

$$= [1 + (1-\theta)\cdot 0.1\ (-9)]\cdot 7 + 0.1\,[\theta \cos(0.1)\, e^{-0.7} + (1-\theta)\ 1]$$

$$\downarrow$$

$$\phi_1 = \frac{RHS}{LHS}$$

Einschritt-θ-Verfahren: Tipps zur Implementierung

Fkt. IX: `function [LHS,RHS] = OST(theta,timestep,M,B,C,sol)`

M ... $[M]$, ***B*** ... $[B(t^{n+1}), B(t^n)]$, ***C*** ... $[C(t^{n+1}), C(t^n)]$, ***sol*** ... $[\phi(t^n)]$

Rückgabewert: Zeilenvektor mit L_{HS} und R_{HS}

Mehrschrittverfahren

Adams-Bashforth-Verfahren

$$\phi_{n+1} = \phi_n + \frac{\Delta t}{2}\left[3f(t_n, \phi_n) - f(t_{n-1}, \phi_{n-1})\right]$$

$\rightarrow$ bedingt stabil

Adams-Moulton-Verfahren

$$\phi_{n+1} = \phi_n + \frac{\Delta t}{12}\left[5f(t_{n+1}, \phi_{n+1}) + 8f(t_n, \phi_n) - f(t_{n-1}, \phi_{n-1})\right]$$

$\rightarrow$ bedingt stabil

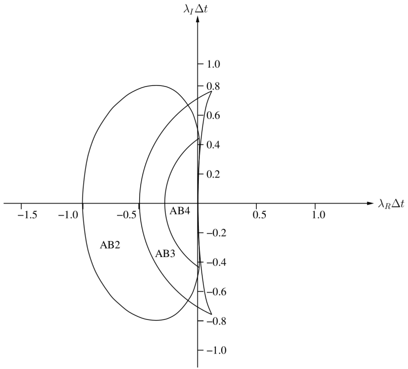
BDF2-Verfahren

$$\frac{3}{2}\phi_{n+1} = 2\phi_n - \frac{1}{2}\phi_{n-1} + \Delta t\, f(t_{n+1}, \phi_{n+1})$$

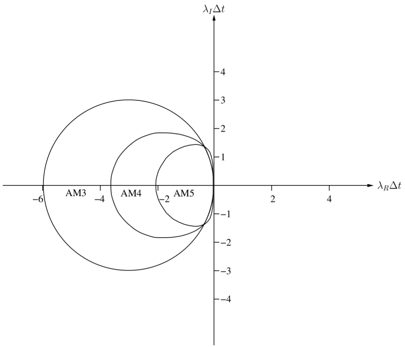
$\rightarrow$ A-stabil

Mehrschrittverfahren

Stabilitätsbereiche der Adams-Verfahren:



Adams-Bashforth-Verfahren



Adams-Moulton-Verfahren

Modultests

Erinnerung Modultests:

- alle Funktionen, die getestet werden, in einem Ordner
- alle Funktionen von **Fkt. I** bis **Fkt. XII**
- mit allen vorgegebenen Testergebnissen getestet

Und los...

Nächste Tutorsprechstunden:

Montag	28.11.	10:00 – 12:15 Uhr	MW1264
Mittwoch	30.11.	15:30 – 17:45 Uhr	MW1264
Montag	05.12.	10:00 – 12:15 Uhr	MW1264

1. Überprüfung

Mittwoch	07.12.	MW1264

Nächstes Aufgabenblatt:

Donnerstag	08.12.	17:00 – 17:45 Uhr	MW2050 + Zoom