

# 第四章 噪声、非线性及等比例缩小

- 引言
- 噪声(Noises)
- 非线性(Nonlinearities)
- 特征频率和单位功率增益频率
- 等比例缩小与短沟道效应

# 引言

---

## ➤噪声

普遍存在于电子元件、器件、网络和系统中，噪声会损害所需信号的质量，影响接收机可以处理的最小信号的能力（灵敏度）。

## ➤非线性

由于晶体管都是非线性的，因此放大器本质上都是非线性的。非线性影响接收机可以处理的最大信号的能力。

## ➤动态范围

接收机可以处理的最小信号和最大信号决定了接收机的动态范围。

## ➤CMOS工艺等比例缩小

随着集成电路工艺的特征尺寸不断缩小，晶体管的工作频率越来越高，其最高工作频率由特征频率和单位功率增益频率来反映。现代半导体工业中CMOS工艺占支配地位的两个最主要原因是CMOS逻辑的零静态功耗和MOS管能够按比例缩小。缩小器件尺寸可以减小元件寄生电容、提高器件速度、降低功耗、提高芯片集成度和降低成本。

# 噪声

## ➤ 噪声类型

噪声是一种随机过程，用概率密度函数(PDF)和功率谱密度(PSD)来描述。

### — 电阻的热噪声(Thermal Noise)

热噪声是由导体中电子的随机运动引起的，它会引起导体两端电压的波动，热噪声谱密度与绝对温度成正比。

$$\overline{v_n^2} = 4kTR \quad \text{其中 } R \text{ 为电阻, } k \text{ 为波尔茨曼常数, } k=1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K}$$

### — 散弹噪声(Shot Noise)

散弹噪声由载流子经过PN结时产生，电路模型为一个并联的电流源

$$\overline{i_n^2} = 2qI \quad \text{其中 } I \text{ 为电流, } q \text{ 为电子电荷, } q=1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$$

### — 闪烁噪声(Flicker Noise, 1/f Noise)

闪烁噪声主要由晶格的缺陷产生，电路模型为一个并联的电流源

$$\overline{i_n^2} = KI^a / f^b \quad \text{其中 } I \text{ 为电流, } a \text{ 在 } 0.5 \text{ 到 } 2 \text{ 之间, } b \text{ 约为 } 1$$

$$\overline{v_n^2} \text{ 的单位为 } V^2/\text{Hz}, \overline{i_n^2} \text{ 的单位为 } A^2/\text{Hz}.$$

—  $\overline{v_n^2}$  和  $\overline{i_n^2}$  其它表示法是将它们的表达式乘以带宽  $\Delta f$ 。

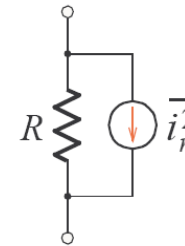
# 噪声

## ➤ 噪声模型

### — 电阻的热噪声

电阻的噪声电压均方值  $\overline{v_n^2} = 4kTR\Delta f$

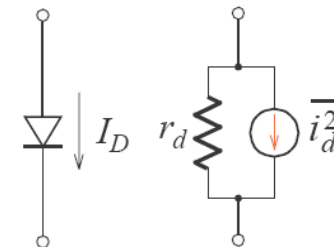
电阻的噪声电流均方值  $\overline{i_n^2} = \frac{4kT\Delta f}{R}$



### — 二极管噪声

二极管噪声电流的均方值  $\overline{i_d^2} = 2qI_D\Delta f + K \frac{I_D^a}{f^b} \Delta f$

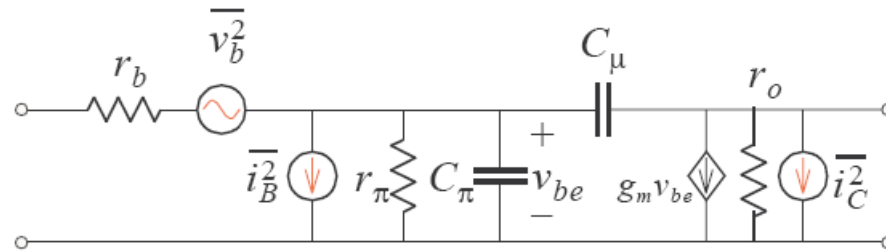
二极管的小信号等效电阻  $r_d = \frac{V_T}{I_D} = \frac{kT}{qI_D}$



注意： $I_D$ 为流过二极管的电流， $r_d$ 为二极管小信号等效电阻，因为 $r_d$ 不是物理电阻，因此不产生热噪声。

# 噪声

## — 双极型晶体管噪声



1) 集电极-发射极散弹噪声  $\overline{i_C^2} = 2qI_C \Delta f$

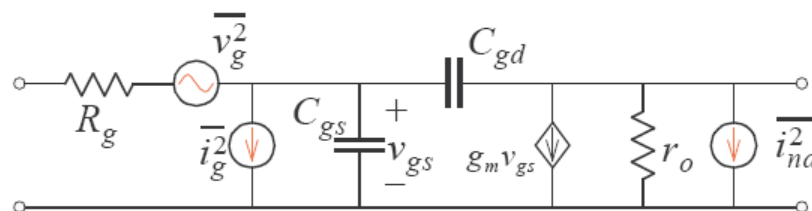
2) 基极-发射极散弹噪声和闪烁噪声  $\overline{i_B^2} = 2qI_B \Delta f + K \frac{I_B^a}{f^b} \Delta f$

3) 基极寄生电阻热噪声  $\overline{v_b^2} = 4kTr_b \Delta f$

注意:  $r_\pi$ 和 $r_o$ 不是物理电阻, 不产生热噪声。

# 噪声

## — 长沟道MOSFET噪声



### 1) 栅极电阻热噪声

$$\overline{v_g^2} = 4kTR_g \Delta f$$

栅极电阻 $R_g$ 主要是栅极多晶硅电阻，可以通过使用叉指结构使之降低。

### 2) 沟道热噪声和闪烁噪声

$$\overline{i_{nd}^2} = 4kT \frac{2}{3} g_m \Delta f + K \frac{I_D^a}{f^b} \Delta f$$

不同元件的闪烁噪声参数 $K$ 、 $a$ 和 $b$ 是不同的

### 3) 栅极电流散弹噪声

$$\overline{i_g^2} = 2qI_G \Delta f$$

这种散弹噪声是由栅极所存在的微量泄漏电流所引起的，常常可以忽略。

# 噪声

## 4) 沟道热噪声更一般性的表示

$$\overline{i_{nd}^2} = 4kT\gamma g_{do}\Delta f$$

其中  $g_{do}$  是当  $V_{DS} = 0$  时的沟道电导，可以表示为

$$g_{do} = \mu C_{ox}(W/L)(V_{gs} - V_{th})$$

长沟道器件:  $g_{do} = g_m$

短沟道器件:  $g_{do} = g_m / \alpha \quad \alpha < 1$

$\gamma$  是一个与偏置状态有关的系数

长沟道器件:  $2/3 \leq \gamma \leq 1$

(管子工作在饱和区时取值2/3，线性区零偏置时取1)

短沟道器件: 由于热载流子效应,  $\gamma$  值远大于1

# 噪声

## ➤ 噪声的平均功率与相关性

### — 噪声的平均功率

电路中使用的噪声电压和电流的均方值相当于 $1\Omega$ 负载上的平均噪声功率或功率谱密度(频率 $f$ 处 $1\text{ Hz}$ 带宽内的功率), 单个噪声源的平均功率可以表示为

$$\overline{n^2(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T n^2(t) dt$$

### — 噪声的相关性

两个噪声源 $n_1(t)$ 和 $n_2(t)$ 不相关  $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T n_1(t)n_2(t) dt = 0$

两个噪声源 $n_1(t)$ 和 $n_2(t)$ 相加以后的平均功率为

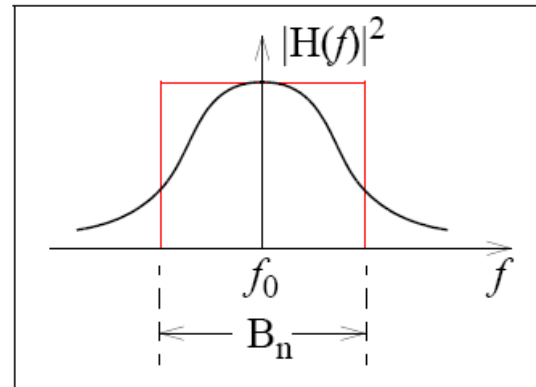
$$\begin{aligned} \overline{n^2(t)} &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [n_1(t) + n_2(t)]^2 dt \\ &= \overline{n_1^2(t)} + \overline{n_2^2(t)} + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T 2n_1(t)n_2(t) dt \end{aligned}$$

$n_1(t)$ 与 $n_2(t)$ 不相关时有  $\overline{n^2(t)} = \overline{n_1^2(t)} + \overline{n_2^2(t)}$



# 噪声

## ➤ 噪声带宽(Noise Bandwidth)

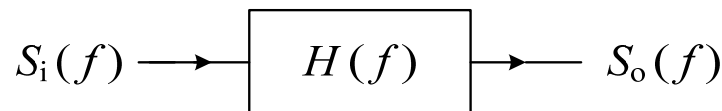


— 设系统的传递函数为 $\mathbf{H}(f)$ ，且在 $f=f_0$ 时 $|\mathbf{H}(f)|$ 值最大，则系统的噪声带宽定义为

$$B_n = \frac{1}{|H(f_0)|^2} \int_0^\infty |H(f)|^2 df$$

# 噪声

## ► 系统输出噪声功率



— 当功率谱密度为  $S_i(f)$  的噪声通过传递函数为  $H(f)$  的线性时不变系统后，输出噪声功率谱密度为

$$S_o(f) = S_i(f) |H(f)|^2$$

— 输出噪声的平均功率为

$$\overline{n_o^2(t)} = \int_0^\infty S_o(f) df = \int_0^\infty S_i(f) |H(f)|^2 df$$

— 当输入噪声为白噪声时，其功率谱密度为  $N_0$ ，则系统输出噪声功率为

$$\overline{n_o^2(t)} = \int_0^\infty S_i(f) |H(f)|^2 df = N_0 \int_0^\infty |H(f)|^2 df = N_0 B_n |H(f_0)|^2$$

# 噪声

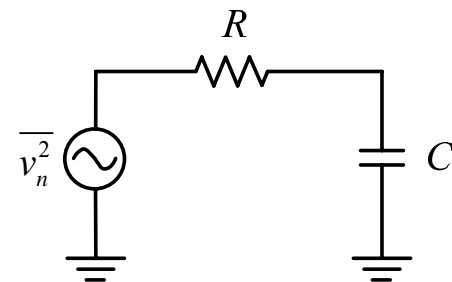
## ► $kT/C$ 噪声

— 对于一个RC低通网络，电阻 $R$ 的热噪声为  $\overline{v_n^2}$ ，其功率谱密度 $4kTR$ 为常数，是一个白噪声。

$$H(f) = \frac{1}{1 + j2\pi fRC} \quad |H(f)|^2 = \frac{1}{1 + (2\pi fRC)^2}$$

当  $f = 0$  时， $|H(f)|^2$  达到最大值，并有  $|H(0)|^2 = 1$

$$B_n = \frac{1}{|H(0)|^2} \int_0^\infty |H(f)|^2 df = \int_0^\infty \frac{1}{1 + (2\pi fRC)^2} df = \frac{\pi}{2} f_{3dB} = \frac{1}{4RC}$$



由电阻的热噪声引起的输出噪声功率（单位电阻上的功率，或者更精确地说是噪声的均方值电压）为

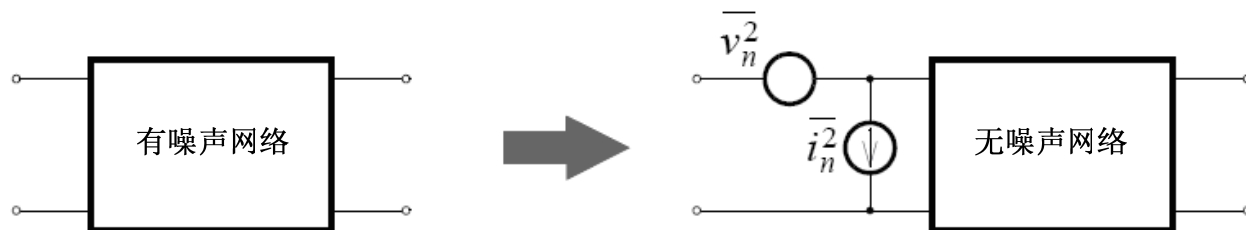
$$\overline{n_0^2(t)} = N_0 B_n |H(f_0)|^2 = 4kTR \cdot \frac{1}{4RC} \cdot 1 = \frac{kT}{C}$$

输出噪声功率与电阻的取值无关！这种噪声与电容成反比的关系在模拟电路设计(取样电路、滤波电路等)中造成了精度与速度之间的矛盾。

# 噪声

## ➤ 二端口网络的等效输入噪声源

- 既然电路元件(除了理想的电感、电容等)都存在噪声, 那么我们必须非常清楚的一个概念是, 普通电路的输出噪声功率谱密度都将大于输入噪声功率谱密度
- 噪声的存在限制了电路所能处理的最小输入信号, 亦即电路的灵敏度(Sensitivity<sub>1</sub>)或最小可测信号(MDS<sub>2</sub>, Minimum Detectable Signal), 因此电路的噪声通常被等效到输入端, 尽管噪声被等效到输出也可以达到同样的目的
- 任何一个有噪双端口网络的内部噪声都可以由其输入端的两个噪声源来等效: 噪声电压源  $\overline{v_n^2}$  和噪声电流源  $\overline{i_n^2}$



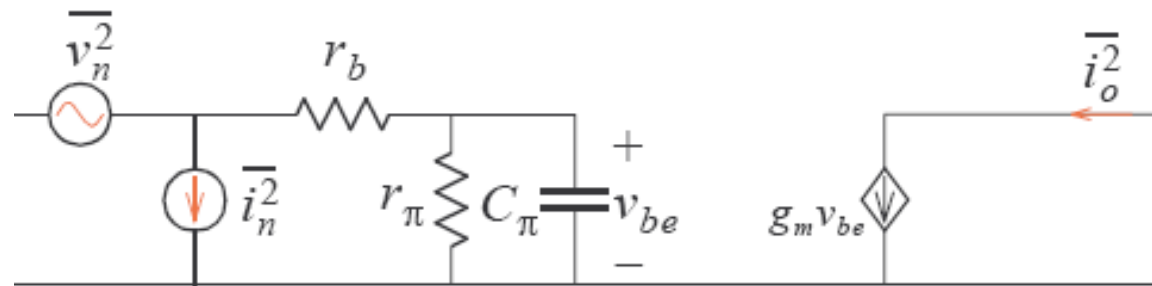
- 当信号源阻抗较小时, 噪声电压源起主要作用; 当信号源阻抗较大时, 噪声电流源起主要作用。噪声电压源和噪声电流源的计算分别在信号源短路和开路两种极端情况下进行。

# 噪声

## ➤ 晶体管等效输入噪声源

### — 双极型晶体管

双极型晶体管等效输入噪声模型如下：



等效输入噪声电压  $\overline{v_n^2}$  和等效输入噪声电流  $\overline{i_n^2}$  的计算分别在输入端短路和输入端开路两种极端情况下，使输出端的短路电流相等得到。

# 噪声

## 1) $\overline{v_n^2}$ 的计算

当  $r_b \ll \left| r_\pi \parallel \frac{1}{j\omega C_\pi} \right|$  时

图(a)有  $v_{be} = v_b + i_B r_b$

$$\begin{aligned} i_o &= g_m v_{be} + i_C \\ &= g_m v_b + g_m i_B r_b + i_C \end{aligned}$$

图(b)有  $v_{be} \approx v_n$   $i_o = g_m v_{be} = g_m v_n$

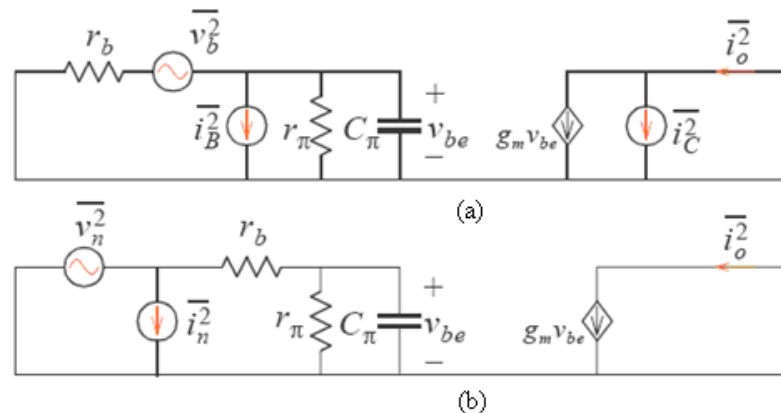
图(a)和(b)的输出电流相等, 有  $g_m v_b + g_m i_B r_b + i_C = g_m v_n$

于是有  $v_n = v_b + i_B r_b + i_C / g_m \approx v_b + i_C / g_m$  ( $r_b$  很小, 忽略  $r_b i_b$ )

考虑到  $\overline{v_b^2} = 4kTr_b \Delta f$   $\overline{i_C^2} = 2qI_C \Delta f$   $I_C = g_m V_T$   $V_T = kT / q$

$$\text{得 } \overline{v_n^2} \approx 4kTr_b \Delta f + 4kT \frac{1}{2g_m} \Delta f = 4kT \left( r_b + \frac{1}{2g_m} \right) \Delta f$$

$\overline{v_n^2}$  相当于一个等效电阻  $(r_b + 1/2g_m)$  所产生的热噪声。



# 噪声

## 2) $\overline{i_n^2}$ 的计算

$$\text{令 } Z_\pi = r_\pi \parallel \frac{1}{j\omega C_\pi}$$

图(a)有  $v_{be} = i_B Z_\pi$

$$i_o = i_C + g_m v_{be} = i_C + g_m i_B Z_\pi$$

图(b)有  $v_{be} = i_n Z_\pi$   $i_o = g_m v_{be} = g_m i_n Z_\pi$

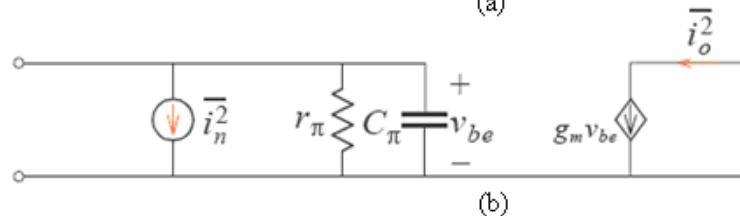
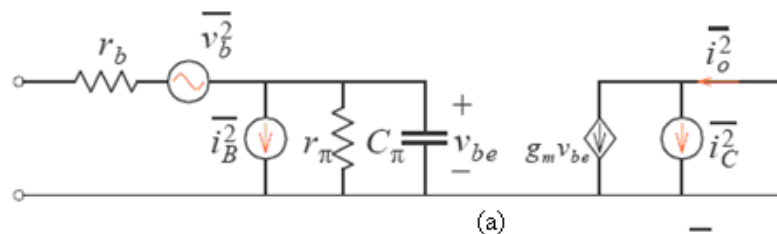
图(a)和(b)的输出电流相等, 有  $i_C + g_m i_B Z_\pi = g_m i_n Z_\pi$

$$\text{于是有 } i_n = i_B + \frac{i_C}{g_m Z_\pi}$$

$g_m Z_\pi$  为晶体管交流信号的电流放大倍数, 即  $\beta(\omega) = g_m Z_\pi = g_m \frac{r_\pi}{1 + j\omega r_\pi C_\pi}$

$$\text{考虑到 } \begin{matrix} \beta(0) = g_m r_\pi = \beta_o \\ \omega_T = g_m / C_\pi \end{matrix} \Rightarrow \beta(\omega) = \frac{\beta_o}{1 + j\beta_o \omega / \omega_T} \Rightarrow i_n = i_B + \frac{i_C}{\beta(\omega)}$$

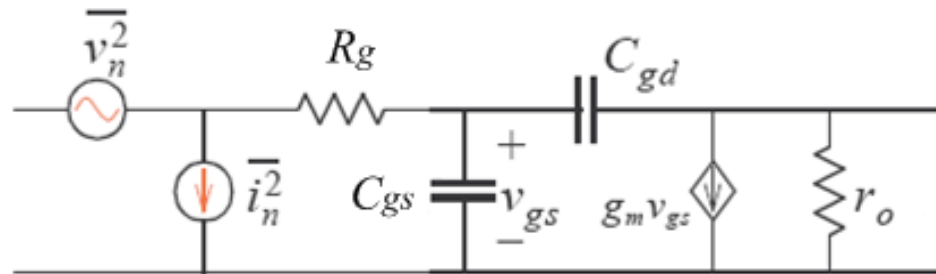
$$\text{由于 } i_B \text{ 与 } i_C \text{ 不相关, 因此有 } \overline{i_n^2} = \overline{i_B^2} + \frac{\overline{i_C^2}}{|\beta(\omega)|^2} \Rightarrow \boxed{\overline{i_n^2} = 2qI_B \Delta f + K \frac{I_B^a}{f^b} \Delta f + \frac{2qI_C \Delta f}{|\beta(\omega)|^2}}$$



# 噪声

## — MOS场效应管

MOS场效应管等效输入噪声模型如下



等效输入噪声电压  $\overline{v_n^2}$  和等效输入噪声电流  $\overline{i_n^2}$  的计算分别在输入端短路和输入端开路两种极端情况下，使输出端的短路电流相等得到。



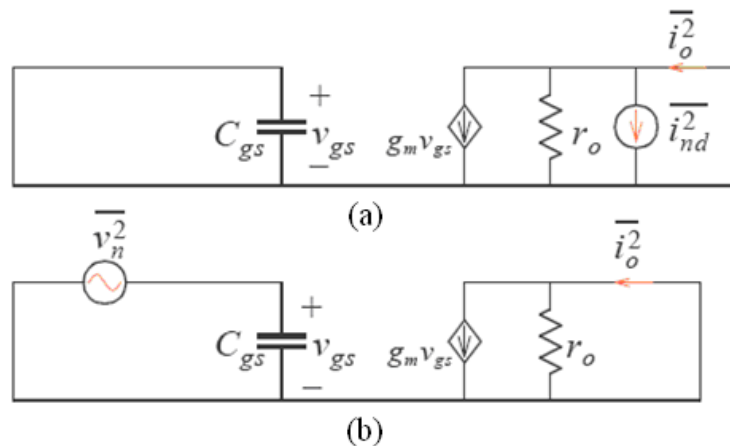
# 噪声

## 1) $\overline{v_n^2}$ 的计算

当忽略  $C_{gd}$ 、 $R_g$ 、 $\overline{v_g^2}$ 、 $\overline{i_g^2}$  时

图(a)有  $i_o = i_{nd}$

图(b)有  $i_o = g_m v_{gs} = g_m v_n$



图(a)和(b)的输出电流相等, 有  $i_{nd} = g_m v_n \Rightarrow \overline{i_{nd}^2} = g_m^2 \overline{v_n^2}$

$$\overline{v_n^2} = \frac{\overline{i_{nd}^2}}{g_m^2} = 4kT \frac{2}{3} \frac{1}{g_m} \Delta f + \frac{K}{g_m^2} \frac{I_D^a}{f^b} \Delta f$$

其中闪烁噪声对输入等效噪声的贡献可以表示为

$$\frac{K}{g_m^2} \frac{I_D^a}{f^b} \Delta f \approx \frac{K_f}{WLC_{ox} f} \Delta f \quad K_f \text{ 的典型值为 } 3 \times 10^{-12} \text{ (V}^2 \cdot \text{pF)}$$

# 噪声

## 2) $\overline{i_n^2}$ 的计算

当忽略  $C_{gd}$ 、 $R_g$ 、 $\overline{v_g^2}$ 、 $\overline{i_g^2}$  时

定义电流增益  $\beta(\omega) = \frac{g_m v_{gs}}{v_{gs} j\omega C_{gs}} \approx \frac{\omega_T}{j\omega}$

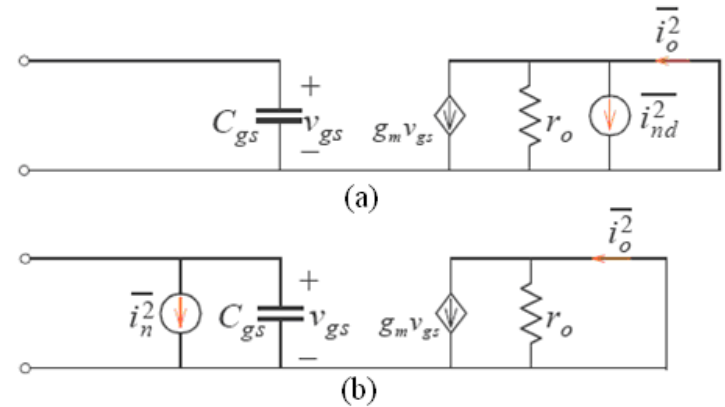
图(a)有  $i_o = i_{nd}$

图(b)有  $i_o = g_m v_{gs} = g_m \frac{i_n}{j\omega C_{gs}}$

图(a)和(b)的输出电流相等, 有  $i_{nd} = g_m \frac{i_n}{j\omega C_{gs}} \Rightarrow i_n = \frac{j\omega C_{gs}}{g_m} i_{nd} = \frac{j\omega}{\omega_T} i_{nd} = \frac{i_{nd}}{\beta(\omega)}$

$$\overline{i_n^2} = \frac{\overline{i_{nd}^2}}{|\beta(\omega)|^2} = \left( \frac{\omega}{\omega_T} \right)^2 \overline{i_{nd}^2}$$

(在低频时  $\overline{i_n^2}$  非常小)



# 噪声

## — 噪声特性比较

双极型晶体管和**MOS**晶体管的噪声特性总结如下：

(1) 低频工作时，**MOS**晶体管的等效输入噪声电压大于双极型晶体管，**MOS**晶体管的等效输入噪声电流小于双极型晶体管。对高阻抗信号源，等效输入噪声电流起主要作用。而对低阻抗信号源，等效输入噪声电压起主要作用。因此，**MOS**晶体管在高阻抗信号源的应用中占有优势，而双极型晶体管在低阻抗信号源的应用中占有优势。

(2) 对于低阻抗信号源，为了抑制**MOS**晶体管的等效输入噪声电压，需要提高其跨导，这就需要增大管子尺寸或增大偏置电流。

(3) 减小偏置电流可以降低闪烁噪声和散弹噪声所引起的等效输入噪声电流。

(4) 反馈电路对信号和噪声具有相同的影响，扣除反馈元件引入的噪声，反馈不会引起信噪比的变化。

# 噪声

## ➤ 噪声系数(Noise Factor)

### — 噪声系数定义

$$F = \frac{\text{总的输出噪声功率}}{\text{信号源噪声产生的输出噪声功率}} = \frac{N_{out, total}}{N_{out, source}}$$

式中  $N_{out, total}$  — 总的输出噪声功率

$N_{out, source}$  — 信号源噪声产生的输出噪声功率

### — 噪声指数(Noise Figure, $NF$ ) $NF = 10 \lg(F)$

### — 噪声功率

$$\begin{cases} N_{out, total} = N_{out, source} + N_{out, system} \\ N_{out, total} = F \cdot N_{out, source} \end{cases} \quad \longrightarrow \quad N_{out, system} = (F - 1)N_{out, source}$$

通信系统中通常认为信号源噪声是由其内阻  $R_S$  引起的，如果输入噪声功率为  $N_{in}$ ，系统功率增益为  $G$ ，则有

$$N_{out, source} = N_{in} \cdot G \quad \longrightarrow \quad N_{out, system} = (F - 1) \cdot N_{in} \cdot G$$

当输入匹配时， $N_{in} = kTB$ ，则有

$$N_{out, system} = (F - 1) \cdot kTB \cdot G$$

# 噪声

## — 噪声系数的另一种定义

若输入和输出信号功率分别为 $S_{in}$ 和 $S_{out}$ ， $F$  可以表示为

$$F = \frac{N_{out, total}}{N_{out, source}} = \frac{N_{out, total}}{N_{in} \cdot G} \cdot \frac{S_{in}}{S_{in}} = \frac{S_{in} / N_{in}}{G \cdot S_{in} / N_{out, total}} = \frac{S_{in} / N_{in}}{S_{out} / N_{out, total}} = \frac{SNR_{in}}{SNR_{out}}$$

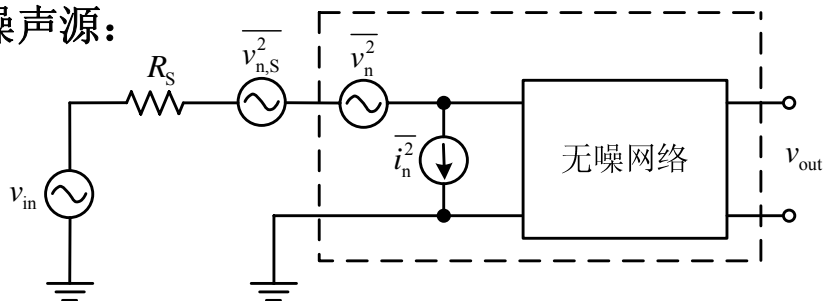
这是噪声系数另一个较为直观和更为常用定义。即噪声系数等于系统输入信噪比与输出信噪比的比值。如果用**dB**表示，噪声指数为输入信噪比与输出信噪比**dB**值的差值。上式成立的条件是系统的信号功率增益和噪声功率增益相等，或者说系统是线性的。

问题： $F < 1$ 还是 $F > 1$ ？经过一连串的电后，信噪比会不会低到不能忍受的地步？

# 噪声

## ➤ 噪声系数计算

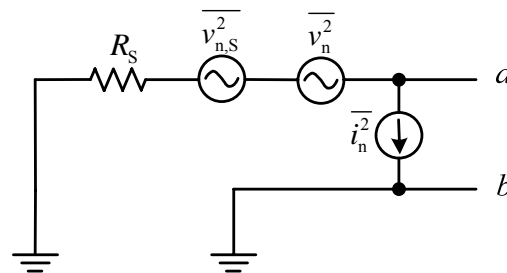
— 噪声系数的计算并不需要严格地按照定义去求输出噪声功率或信噪比，我们可以通过电路输入端的噪声来计算，而且这样更方便，因为我们可以利用电路的等效输入噪声源：



第一种情况：仅考虑信号源噪声，其它的电压源和电流源应分别短路和开路，此时 $ab$ 点之间的噪声电压为 $v_{n,S}$

噪声电压均方值为  $\overline{v_{n,S}^2}$

$$F = \frac{\overline{v_{n,S}^2} + \overline{(v_n + i_n R_S)^2}}{\overline{v_{n,S}^2}} = 1 + \frac{\overline{(v_n + i_n R_S)^2}}{4kTR_S}$$



第二种情况应考虑所有噪声源，总噪声电压为 $v_{n,S} + v_n + i_n R_S$

噪声电压均方值为

$$\overline{(v_{n,S} + v_n + i_n R_S)^2} = \overline{v_{n,S}^2} + \overline{(v_n + i_n R_S)^2}$$

$$F = \frac{\overline{i_n^2} + \overline{(i_n + v_n Y_S)^2}}{\overline{i_n^2}}$$

噪声系数与信号源内阻有关！

注意：这里计算噪声系数时使用的是噪声功率谱密度，即单位带宽内的噪声比值

# 噪声

— 当 $v_n$ 和 $i_n$ 不相关时

$$F = 1 + \frac{\overline{(v_n + i_n R_S)^2}}{4kTR_S} = 1 + \frac{\overline{v_n^2}}{4kTR_S} + \frac{\overline{i_n^2} R_S}{4kT}$$

求使噪声系数最小的最佳信号源内阻 $R_{Sopt}$

$$\frac{\partial F}{\partial R_S} = 0 \quad \longrightarrow \quad R_{Sopt}^2 = \frac{\overline{v_n^2}}{\overline{i_n^2}}$$

显然它不等于射频电路的实际信号源内阻**50**欧姆。因此在电路设计时，信号源和网络之间存在两种匹配，即功率传输最大的共扼匹配和噪声系数最小的噪声匹配。

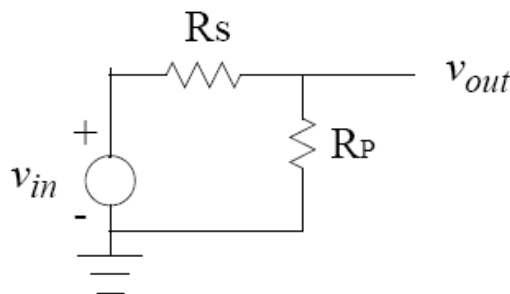
— 噪声系数的另一种计算公式

$$F = \frac{4kTR_S + \overline{(v_n + i_n R_S)^2}}{4kTR_S} = \frac{A^2 (4kTR_S + \overline{(v_n + i_n R_S)^2})}{A^2 4kTR_S} = \frac{v_{n,out}^2}{A^2} \cdot \frac{1}{4kTR_S}$$

其中  $A = \frac{v_{out}}{v_{in}}$  ， 输出端的总噪声为  $v_{n,out}^2 = A^2 (4kTR_S + \overline{(v_n + i_n R_S)^2})$

# 噪声

## 1) 电阻的噪声系数



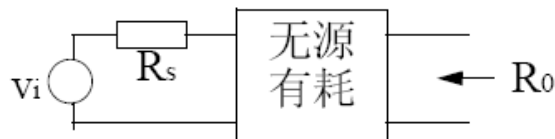
$$v_{n,out}^2 = 4kT(R_S \parallel R_P), \quad A_v = \frac{R_P}{R_S + R_P}$$

$$F = 4kT(R_S \parallel R_P) \times \frac{(R_S + R_P)^2}{R_P^2} \times \frac{1}{4kTR_S} = 1 + \frac{R_S}{R_P}$$

结论：电阻 $R_P$ 越大，噪声系数越小，这与最大功率传输要求的匹配条件不一致。

## 2) 无源有耗网络的噪声系数

设无源四端网络输入端的信号源内阻为 $R_s$ ，网络输出电阻为 $R_o$ ，在网络输入、输出端均匹配的条件下插入损耗为 $L$ 。



输入和输出匹配时， $N_i = N_o = kTB$

$$F = \frac{SNR_{in}}{SNR_{out}} = \frac{S_i/N_i}{S_o/N_o} = \frac{S_i}{S_o} = \frac{1}{G_p} = L$$

结论：无源有耗网络的噪声系数等于插入损耗。



# 噪声

## 3) 等效噪声温度

定义：任何一个线性网络，如果它产生的噪声是白噪声，则可以用处于网络输入端温度为 $T_e$ 的电阻所产生的热噪声源来代替，而把网络看作是无噪的。温度 $T_e$ 称为线性系统的等效噪声温度。

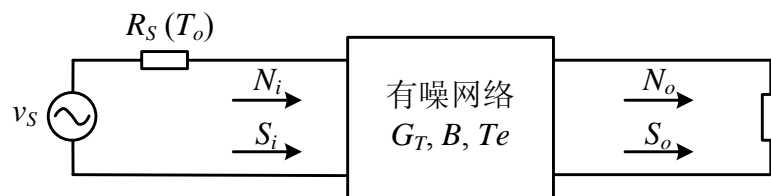
若放大器输入端的源内阻为 $R_s$ ，放大器的转化功率增益为 $G_T$ ，带宽为 $B$ ，由放大器本身产生的输出噪声功率为 $N_{oi}$ 。输入匹配时温度为 $T_e$ 的电阻在输入端产生的噪声功率是 $kT_e B$ ，输出噪声功率为 $N_{oi} = kT_e B G_T$ ，则等效噪声温度为 $T_e = N_{oi} / (k B G_T)$ ，注意等效噪声温度与引用电阻阻值无关。

## 4) 等效噪声温度与噪声系数的关系

当网络输入端匹配时，有  $N_i = kT_0 B$

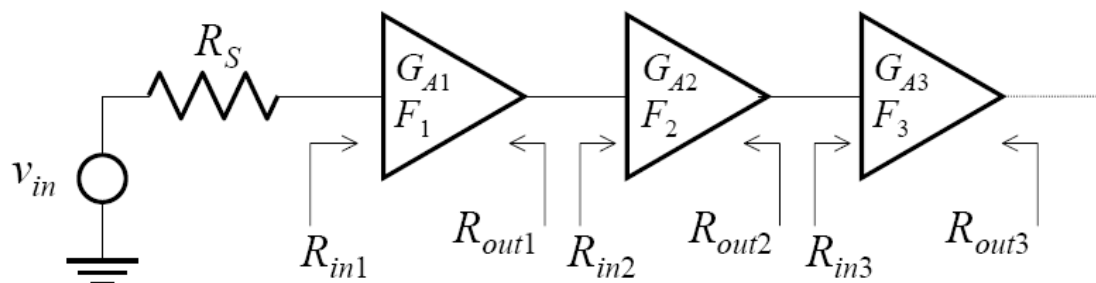
$$N_o = G_T k(T_0 + T_e) B$$

$$F = \frac{S_i / N_i}{S_o / N_o} = \frac{S_i / kT_0 B}{G_T S_i / [G_T k(T_0 + T_e) B]} = \frac{T_0 + T_e}{T_0} = 1 + \frac{T_e}{T_0} \quad \Rightarrow \quad T_e = (F - 1)T_0$$



# 噪声

## 5) 级联系统的等效噪声系数



图中 $G_{Ai}$ 为第 $i$ 级放大器的资用功率增益， $F_i$ 为第 $i$ 级的噪声系数，它是以其前一级的输出电阻为参考计算得到的。

级联后的总噪声系数为

$$F_{total} = F_1 + \frac{F_2 - 1}{G_{A1}} + \frac{F_3 - 1}{G_{A1}G_{A2}} + \cdots + \frac{F_n - 1}{\prod_{i=1}^{n-1} G_{Ai}}$$

公式中， $G_{Ai}$ 和 $F_i$ 均为线性值，而非dB值。

显然，系统噪声系数主要取决于前级电路的噪声系数。因此，为了实现较低的噪声系数，系统噪声的优化主要集中在对前级电路的噪声优化上。

# 噪声

## 1) 完全匹配情况下的噪声系数公式推导

考虑两级放大器级联。设系统的输入、输出和级间均匹配，即系统完全匹配。信号源内阻  $R_S$  在输出端产生的噪声功率  $N_S$  为

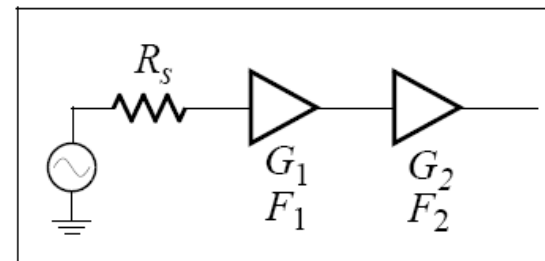
$$N_S = kTBG_1G_2$$

第一级放大器在输出端产生的噪声功率  $N_1$  为  $N_1 = (F_1 - 1)kTBG_1G_2$

第二级放大器在输出端产生的噪声功率  $N_2$  为  $N_2 = (F_2 - 1)kTBG_2$

总噪声系数为

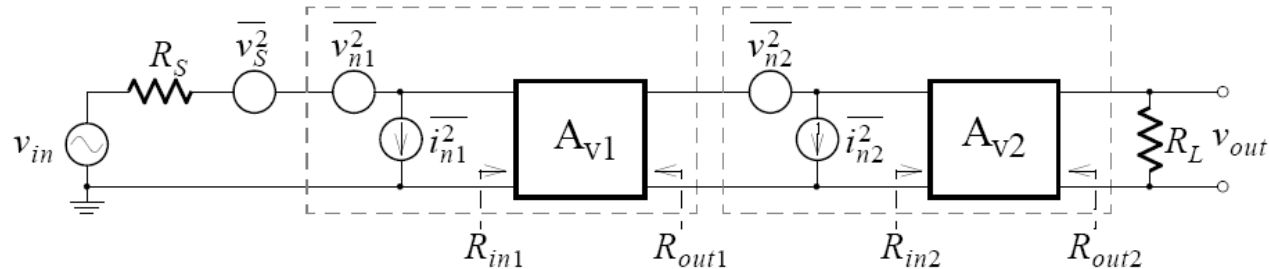
$$\begin{aligned} F_{total} &= \frac{N_S + N_1 + N_2}{N_S} \\ &= 1 + \frac{(F_1 - 1)kTBG_1G_2 + (F_2 - 1)kTBG_2}{kTBG_1G_2} \\ &= F_1 + \frac{F_2 - 1}{G_1} \end{aligned}$$



# 噪声

## 2) 一般情况下噪声系数公式推导

考虑两级放大器级联，其中 $A_{v1}$ 和 $A_{v2}$ 为相应放大器无负载时的电压增益。



$$\text{第一级输入端的噪声为 } \overline{v_{n,in1}^2} = \left[ i_{n1} (R_S \parallel R_{in1}) + v_{n1} \frac{R_{in1}}{R_{in1} + R_S} \right]^2 + \overline{v_S^2} \frac{R_{in1}^2}{(R_{in1} + R_S)^2}$$

$$\text{第二级输入端的噪声为 } \overline{v_{n,in2}^2} = \overline{v_{n,in1}^2} A_{v1}^2 \left( \frac{R_{in2}}{R_{out1} + R_{in2}} \right)^2 + \left[ i_{n2} (R_{out1} \parallel R_{in2}) + v_{n2} \frac{R_{in2}}{R_{in2} + R_{out1}} \right]^2$$

$$\text{最终的输出噪声为 } \overline{v_{n,out}^2} = \overline{v_{n,in2}^2} A_{v2}^2 \frac{R_L^2}{(R_L + R_{out2})^2}$$

# 噪声

从 $v_{in}$ 到 $v_{out}$ 的总电压增益为

$$A_{v, total} = \frac{R_{in1}}{R_S + R_{in1}} A_{v1} \frac{R_{in2}}{R_{out1} + R_{in2}} A_{v2} \frac{R_L}{R_{out2} + R_L}$$

信号源在输出端产生的噪声为

$$\overline{v_{n, out, S}^2} = A_{v, total}^2 4kTR_S$$

系统噪声系数为

$$F_{total} = \frac{\overline{v_{n, out}^2}}{\overline{v_{n, out, S}^2}} = \frac{\overline{v_{n, in2}^2} A_{v2}^2 \left( \frac{R_L}{R_{out2} + R_L} \right)^2}{A_{v, total}^2 4kTR_S}$$

经过化简之后

$$F_{total} = \frac{4kTR_S + (\overline{v_{n1} + i_{n1} R_S})^2}{4kTR_S} + \frac{(\overline{v_{n2} + i_{n2} R_{out1}})^2}{4kTR_S} \frac{1}{A_{v1}^2 \left( \frac{R_{in1}}{R_S + R_{in1}} \right)^2}$$

# 噪声

$F_{\text{total}}$ 表达式右边第一项为 $F_1$ ，下面关注右边第二项。信号源的资用功率为

$$P_{AVS} = \frac{v_{in}^2}{4R_S}$$

而第一级放大器的输出资用功率为

$$P_{AVN1} = v_{in}^2 \left( \frac{R_{in1}}{R_S + R_{in1}} \right)^2 A_{v1}^2 \frac{1}{4R_{out1}}$$

因此其资用功率增益为

$$G_{A1} = \frac{P_{AVN1}}{P_{AVS}} = \left( \frac{R_{in1}}{R_S + R_{in1}} \right)^2 A_{v1}^2 \frac{R_S}{R_{out1}}$$

# 噪声

$F_{\text{total}}$  可以表示为

$$\begin{aligned} F_{\text{total}} &= F_1 + \frac{\overline{(v_{n2} + i_{n2}R_{\text{out}1})^2}}{4kTR_{\text{out}1}} \frac{1}{A_{v1}^2 \left( \frac{R_{\text{in}1}}{R_S + R_{\text{in}1}} \right)^2 \frac{R_S}{R_{\text{out}1}}} \\ &= F_1 + \frac{F_2 - 1}{G_{A1}} \end{aligned}$$

其中 
$$F_2 = 1 + \frac{\overline{(v_{n2} + i_{n2}R_{\text{out}1})^2}}{4kTR_{\text{out}1}}$$

$F_2$  以第一级的输出电阻作为参考源电阻时第二级的噪声系数。

# 非线性 (Nonlinearities)

## ➤ 小信号和大信号

模拟电子线路中的晶体管交流等效电路为小信号等效电路，与晶体管的静态工作点有关，不适用于大信号状态。

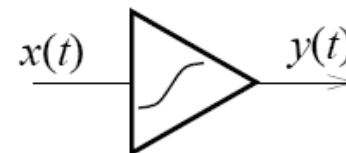
## ➤ 晶体管非线性模型(Modeling of the Nonlinearity)

由于晶体管都是非线性的，如双极型晶体管的集电极电流与基极-发射极电压之间呈指数关系，场效应管的漏极电流与栅源电压之间呈平方律关系，它们分别表示为

$$I_C = I_S e^{\frac{V_{BE}}{V_T}} \quad I_D = \frac{1}{2} \mu C_{ox} \frac{W}{L} (V_{GS} - V_{th})^2$$

### 1. 非线性模型

$$y(t) = \alpha_1 x(t) + \alpha_2 x^2(t) + \alpha_3 x^3(t) + \dots$$



如果输入信号幅度很小，那么上式中2次及以上的项就可以忽略而成为小信号的情况。在许多情况下我们可以忽略3次以上的项。



# 非线性 (Nonlinearities)

---

## 2. 谐波失真(Harmonic Distortion)

— 当输入信号为  $x(t)=A\cos(\omega t)$  时, 输出信号为

$$\begin{aligned} y(t) &= \alpha_1 A \cos(\omega t) + \alpha_2 A^2 \cos^2(\omega t) + \alpha_3 A^3 \cos^3(\omega t) + \dots \\ &\approx \alpha_1 A \cos(\omega t) + \frac{1}{2} \alpha_2 A^2 [1 + \cos(2\omega t)] + \frac{1}{4} \alpha_3 A^3 [3 \cos(\omega t) + \cos(3\omega t)] + \dots \\ &= \frac{\alpha_2 A^2}{2} + \left( \alpha_1 A + \frac{3\alpha_3 A^3}{4} \right) \cos(\omega t) + \frac{\alpha_2 A^2}{2} \cos(2\omega t) + \frac{\alpha_3 A^3}{4} \cos(3\omega t) + \dots \end{aligned}$$

## 3. 相位失真(AM-PM Conversion)

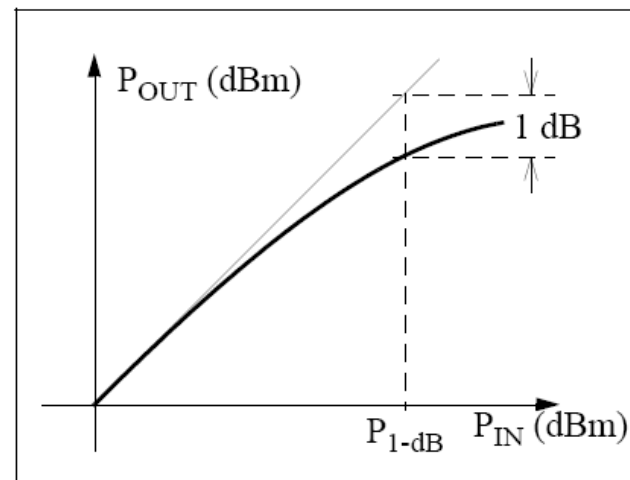
表现为调幅信号的幅度变化引起相位变化或相位调制, 这在非恒包络调制信号的功率放大器设计中需要特别加以考虑。

# 非线性 (Nonlinearities)

## 4. 增益压缩(Gain Compression)

当输入为一个单频信号时，输出的基波分量  
(The Fundamental Component) 幅度为

$$(\alpha_1 A + \frac{3\alpha_3 A^3}{4}) = \alpha_1 A (1 + \frac{3A^2}{4} \frac{\alpha_3}{\alpha_1})$$



如果 $a_1$ 和 $a_3$ 的符号相反，则信号增益将随幅度 $A$ 的增大而减小。如果用对数(功率)来表示放大器的输入和输出信号幅度，可以清楚地看到输出功率随输入功率增大而偏离线性关系的情况。当输出功率与理想的线性情况偏离达到1dB时，放大器的增益也下降了1dB，此时的输入信号功率(或幅度)值称为输入1-dB增益压缩点 (Input 1-dB Gain Compression Point,  $IP_{1dB}$ )，对应的输出功率表示为 $OP_{1dB}$ 。

# 非线性 (Nonlinearities)

## 5. 大信号阻塞(Blocking)和交调失真(Cross Modulation)

### 1) 大信号阻塞

— 系统同时接收到一个有用信号  $A_1 \cos(\omega_1 t)$  和一个干扰信号  $A_2 \cos(\omega_2 t)$

$$x(t) = A_1 \cos(\omega_1 t) + A_2 \cos(\omega_2 t)$$

系统输出信号中有用信号的基波幅度为

$$\text{基波幅度} = (\alpha_1 A_1 + \frac{3}{4} \alpha_3 A_1^3 + \frac{3}{2} \alpha_3 A_1 A_2^2)$$

当  $\frac{3}{4} \alpha_3 A_1^3 \ll \frac{3}{2} \alpha_3 A_1 A_2^2$  , 即  $A_1 \ll \sqrt{2} A_2$  时

$$\text{基波幅度} = (\alpha_1 A_1 + \frac{3}{2} \alpha_3 A_1 A_2^2) = \alpha_1 (1 + \frac{3}{2} \frac{\alpha_3}{\alpha_1} A_2^2) A_1$$

— 当  $A_2=0$  时, 基波幅度  $= \alpha_1 A_1$ , 有用信号所得到的增益为  $\alpha_1$ 。

— 当  $A_2$  很大, 且  $\alpha_1$  和  $\alpha_3$  的符号相反时, 有 基波幅度  $= \alpha_1 (1 + \frac{3}{2} \frac{\alpha_3}{\alpha_1} A_2^2) A_1 \ll \alpha_1 A_1$

即有用信号所得到的增益将远小于  $\alpha_1$ , 即有用信号被干扰信号阻塞了, 即放大器或接收器的灵敏度降低了。射频电路设计时, 抗强信号阻塞是一个很重要的指标, 通常要求引起射频接收机阻塞的信号比有用信号大60至70dB。

# 非线性 (Nonlinearities)

## 2) 交调失真

在大信号阻塞分析中，考虑干扰信号含有调幅成分，即输入信号为

$$x(t) = A_1 \cos(\omega_1 t) + A_2 [1 + m \cos(\omega_m t)] \cos(\omega_2 t)$$

系统输出信号为

$$y(t) = \left\{ \alpha_1 A_1 + \frac{3}{4} \alpha_3 A_1^3 + \frac{3}{2} \alpha_3 A_1 A_2^2 [1 + m \cos(\omega_m t)]^2 \right\} \cos(\omega_1 t) + \dots$$

一 有用信号含有干扰信号的调幅信号。因此干扰信号的调幅信号会通过系统的非线性转移到有用信号的幅度上，这就称为交叉调制，使有用信号产生了失真。

一 如果有用信号也为幅度调制信号，则解调后的信号含有干扰信号。交调失真是由非线性器件的三次方项产生的。

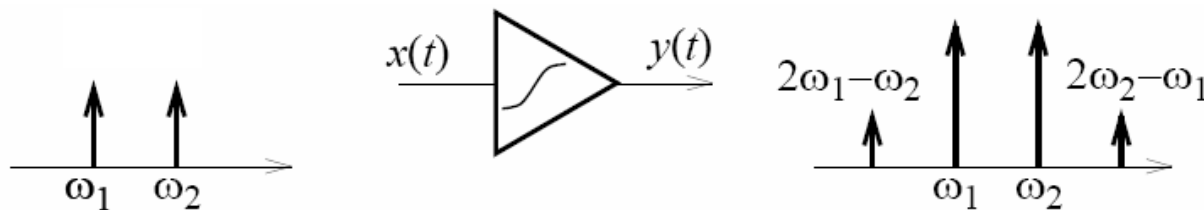
# 非线性 (Nonlinearities)

## 6. 互调(Intermodulation)

如果系统的输入信号为两个幅度相等、频率间隔很小的余弦波，表示为

$$x(t) = A \cos \omega_1 t + A \cos \omega_2 t$$

在系统的输出信号中,除了基波分量 $\omega_1$ 和 $\omega_2$ 外, 还包含了它们的各种组合频率(不仅仅是谐波), 即输出信号的频率分量为 $\omega = |m\omega_1 + n\omega_2|$ ,  $m, n = -\infty, \dots, -1, 0, 1, +\infty$ ,  $m$ 和 $n$ 不为0时的频率分量相当于通过 $\omega_1$ 和 $\omega_2$ 相互调制而产生, 因此称为互调分量, 由3次失真引起的互调分量称为3次互调分量(IM3), 其中需要重点考虑的是 $2\omega_1 - \omega_2$ 和 $2\omega_2 - \omega_1$ 这两项, 因为它们就在基波分量附近。



# 非线性 (Nonlinearities)

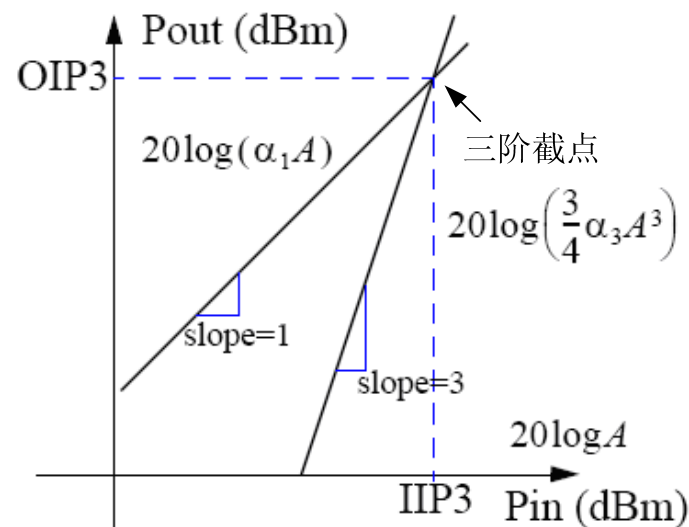
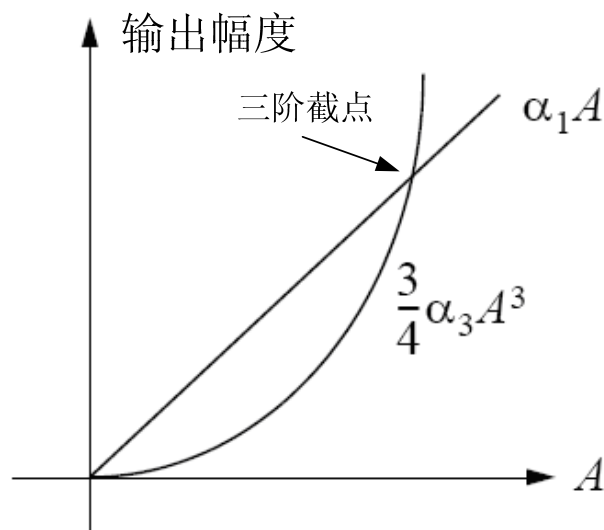
## 7. 三阶截点(IP3, 3rd order intercept point)

— 输入信号  $x(t) = A \cos \omega_1 t + A \cos \omega_2 t$  经过一个3阶非线性系统  $y(t) = \alpha_1 x(t) + \alpha_2 x^2(t) + \alpha_3 x^3(t)$  后, 输出信号中包含的频率分量为

Components	Amplitude
DC	$\alpha_2 A^2$
基波 ( $\omega_1, \omega_2$ )	$\alpha_1 A + \frac{9}{4} \alpha_3 A^3$
二次谐波 ( $2\omega_1, 2\omega_2$ )	$\frac{1}{2} \alpha_2 A^2$
三次谐波 ( $3\omega_1, 3\omega_2$ )	$\frac{1}{4} \alpha_3 A^3$
IM2 ( $\omega_1 \pm \omega_2$ )	$\alpha_2 A^2$
IM3 ( $2\omega_1 \pm \omega_2, \omega_1 \pm 2\omega_2$ )	$\frac{3}{4} \alpha_3 A^3$

# 非线性 (Nonlinearities)

— 比较基波分量中的  $\alpha_1 A$  和三次互调量  $3\alpha_3 A^3/4$  可以发现，随着信号幅度  $A$  的增大，输出信号中的基波分量  $\alpha_1 A$  与三次互调量  $3\alpha_3 A^3/4$  会在某一点达到相同的幅度，这一点称为三阶截点 **IP3**，对应的输入信号幅度或功率值称为输入三阶截点 **IIP3**，对应的输出信号幅度或功率值称为输出三阶截点 **OIP3**。



— 当用对数形式(dBm)来表示输入输出信号大小时，基波和IM3分量随输入信号的增加而上升的斜率分别为1和3，这个特点可以用于一些简单的估算。

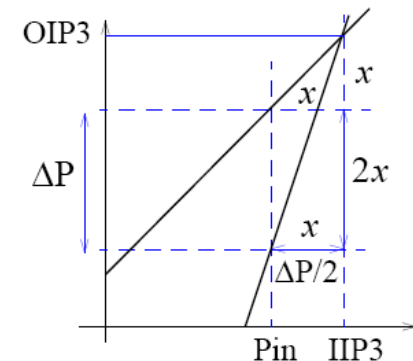
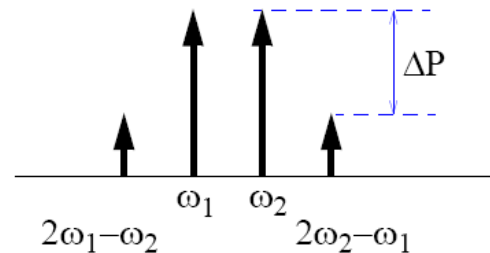
# 非线性 (Nonlinearities)

## — IIP3测量

在系统输入端加两个幅度相等、频率间隔很小的正弦波(双音信号), 输入功率为  $P_{in}$ 。然后测量系统输出端的基波分量与三次互调分量的功率之差, 记为  $\Delta P$ , 那么电路的 **IIP3** 可以近似表示为

$$IIP3_{dBm} = P_{in, dBm} + \frac{\Delta P_{dB}}{2}$$

测量时应注意, 为了保证 **IIP3** 测量的准确性, 输入的双音信号幅度应尽量小, 以避免产生增益压缩。

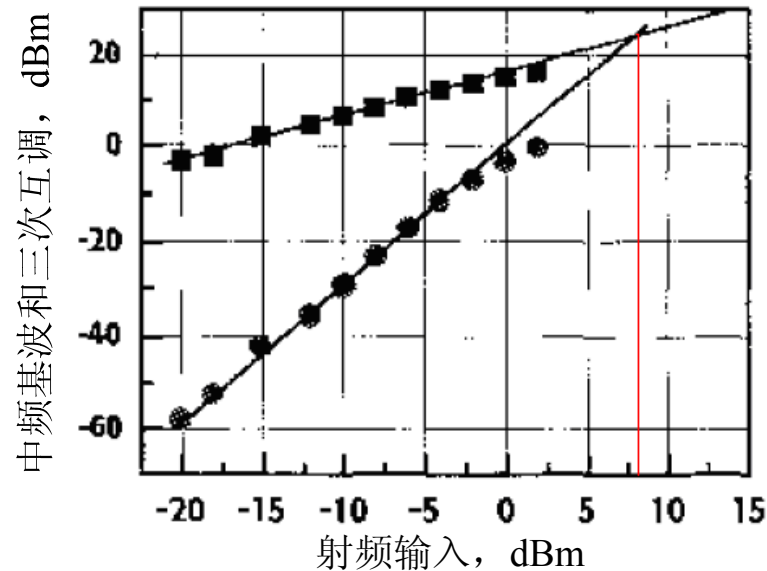




# 非线性 (Nonlinearities)

IIP3的准确测量需要在一定范围内逐点改变输入信号功率，直到可以在对数坐标中清楚地分辨出基波的斜率1和IM3的斜率3的直线，还常常包括增益压缩的特性。

下图为一个混频器的IIP3测量结果，其输入三阶截点达到8dBm。



# 非线性 (Nonlinearities)

## 8. $IP_{1dB}$ 与 $IIP3$ 的关系

— 根据 $IP_{1dB}$ 的定义可以推导出

$$20\lg|\alpha_1 A| - 20\lg\left|\alpha_1 A + \frac{3\alpha_3 A^3}{4}\right| = 1 \quad \longrightarrow \quad A_{1dB} \approx 0.38 \sqrt{\left|\frac{\alpha_1}{\alpha_3}\right|}$$

— 根据三阶截点的定义可以推导出

$$\alpha_1 A = \frac{3\alpha_3 A^3}{4} \quad \longrightarrow \quad A_{IP3} = \sqrt{\frac{4}{3} \left|\frac{\alpha_1}{\alpha_3}\right|}$$

— 计算三阶截点处的输入信号幅度与**1-dB**压缩点处输入信号幅度的比值，得

$$\frac{A_{IP3}}{A_{1dB}} \approx 3.03 \approx 9.6 \text{ dB}$$

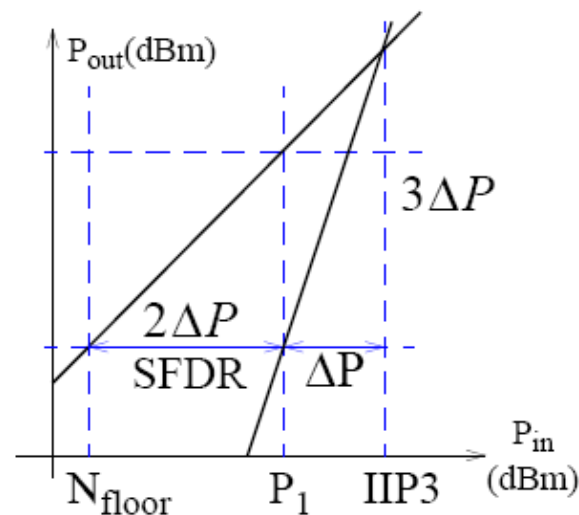
输入三阶交调点会比**1dB**压缩点高大约**10 dB**。

# 非线性 (Nonlinearities)

## 9. 无杂散动态范围(Spurious Free Dynamic Range, SFDR)

— 由于互调等非线性因素，信号不断增大将导致误码率上升，也就是说，噪声和非线性决定了系统的动态范围。动态范围有多种定义，例如可以用**1-dB**压缩点作为信号上限。**SFDR**常见的定义为**IM3**与输出噪声相等时输入信号与等效输入噪声之比。

$$\begin{cases} SFDR = P_1 - N_{\text{floor}} = 2\Delta P \\ \Delta P = IIP3 - P_1 = \frac{1}{3}(IIP3 - N_{\text{floor}}) \end{cases}$$
$$\longrightarrow SFDR = \frac{2}{3}(IIP3 - N_{\text{floor}})$$

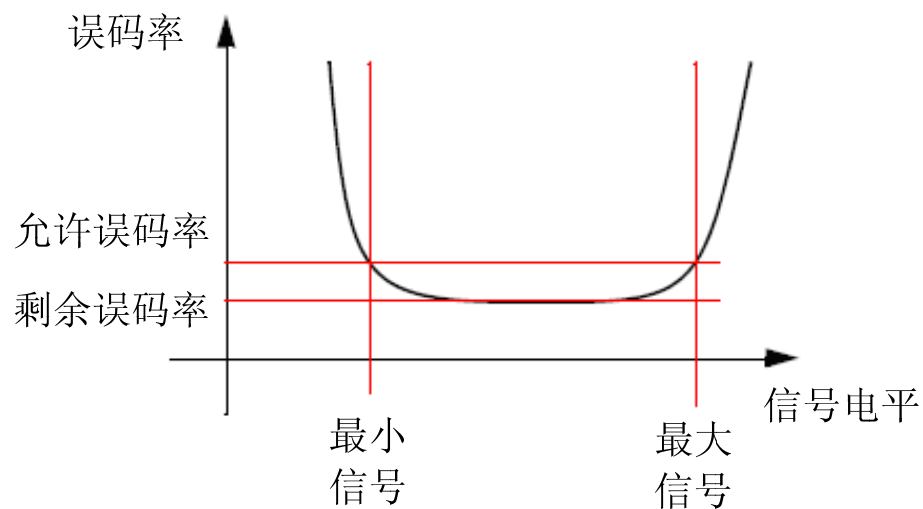


$$N_{\text{floor}} = 10\lg(kTBF) = 10\lg B + NF - 174 \text{ dBm/Hz}$$

# 非线性 (Nonlinearities)

## 10. 剩余误码率(Residual Bit Error Rate)

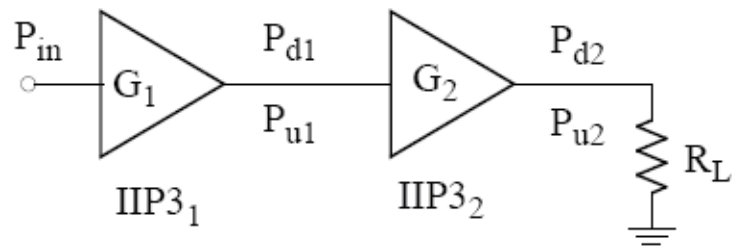
— 接收机对输入信号的信噪比有一个最低要求，以保证误码率(BER)指标。通常情况下输入信噪比应该保持在一个较高的水平以保证通信质量，此时的误码率称为“剩余误码率”，其值应远低于容许的最高临界值。



# 非线性 (Nonlinearities)

## 11. 级联电路的等效IIP3

— 两级放大器的级联电路如右图所示，图中符号的下标 $d$ 表示有用信号，下标 $u$ 表示三阶互调量。



$$IIP3_{dBm} = P_{in, dBm} + \frac{\Delta P_{dB}}{2} = P_{in, dBm} + \frac{P_{d, dBm} - P_{u, dBm}}{2} \longrightarrow 10 \lg IIP3 = 10 \lg \left( P_{in} \cdot \sqrt{\frac{P_d}{P_u}} \right)$$

$$\longrightarrow IIP3 = P_{in} \cdot \sqrt{\frac{P_d}{P_u}} \longrightarrow P_u = \frac{P_d P_{in}^2}{IIP3^2}$$

第一级放大器输出端的有用信号 $P_{d1}$ 为

$$P_{d1} = P_{in} G_1$$

第一级放大器输出端的三阶互调量 $P_{u1}$ 为

$$P_{u1} = \frac{P_{d1} P_{in}^2}{IIP3_1^2} = \frac{P_{in}^3 G_1}{IIP3_1^2}$$

# 非线性 (Nonlinearities)

第二级放大器输出端的有用信号为

$$P_{d2} = P_{d1} G_2 = P_{in} G_1 G_2$$

第二级放大器输出端的三阶互调量 $\mathbf{P}_{u2}$ 由两部分组成，第一部分是 $\mathbf{P}_{u1}$ 经第二级放大器放大后得到的，用 $\mathbf{P}_{u2,1}$ 表示；第二部分是 $\mathbf{P}_{d1}$ 通过第二级放大器的非线性产生的，用 $\mathbf{P}_{u2,2}$ 表示。

$$P_{u2,1} = P_{u1} G_2 = \frac{P_{in}^3 G_1 G_2}{IIP3_1^2} \quad P_{u2,2} = \frac{P_{d1}^3 G_2}{IIP3_2^2} = \frac{P_{in}^3 G_1^3 G_2}{IIP3_2^2}$$

由于 $\mathbf{P}_{u2,1}$ 和 $\mathbf{P}_{u2,2}$ 是相关的， $\mathbf{P}_{u2}$ 必须通过电压相加得到。

$\mathbf{P}_{u2,1}$ 对应的电压 $\mathbf{V}_{u2,1}$ 为：

$$V_{u2,1} = \sqrt{P_{u2,1} R_L} = \frac{\sqrt{P_{in}^3 G_1 G_2}}{IIP3_1} \sqrt{R_L}$$

$\mathbf{P}_{u2,2}$ 对应的电压 $\mathbf{V}_{u2,2}$ 为：

$$V_{u2,2} = \sqrt{P_{u2,2} R_L} = \frac{\sqrt{P_{in}^3 G_1^3 G_2}}{IIP3_2} \sqrt{R_L}$$

# 非线性 (Nonlinearities)

---

$$P_{u2} = \frac{(V_{u2,1} + V_{u2,2})^2}{R_L} = \left( \frac{1}{IIP3_1} + \frac{G_1}{IIP3_2} \right)^2 P_{in}^3 G_1 G_2$$

— 两级放大器级联后的等效**IIP3**(总**IIP3**)为

$$IIP3_{tot} = P_{in} \sqrt{\frac{P_{d2}}{P_{u2}}} = \frac{1}{\frac{1}{IIP3_1} + \frac{G_1}{IIP3_2}} \longrightarrow \frac{1}{IIP3_{tot}} = \frac{1}{IIP3_1} + \frac{G_1}{IIP3_2}$$

— **n**级放大器级联后的等效**IIP3**(总**IIP3**)为

$$\frac{1}{IIP3_{tot}} = \frac{1}{IIP3_1} + \frac{G_1}{IIP3_2} + \frac{G_1 G_2}{IIP3_3} + \dots + \frac{G_1 \dots G_{n-1}}{IIP3_n}$$

# 非线性 (Nonlinearities)

## 12. 其它非线性指标

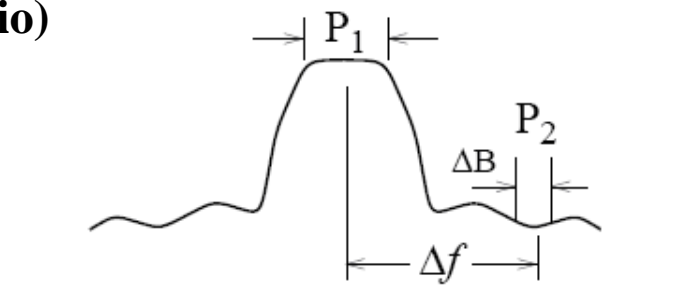
### 1) 相邻信道功率比

(ACPR, Adjacent Channel Power Ratio)

➤  $ACPR = P_1 / P_2$

➤  $P_1$ : 信道带宽内的信号功率

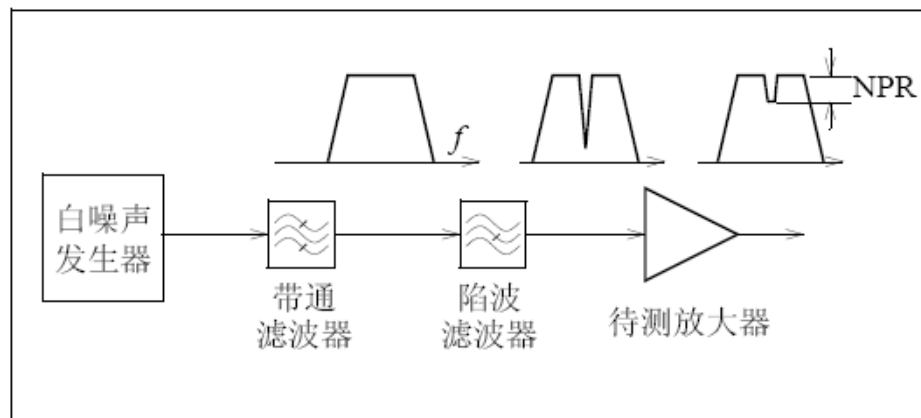
➤  $P_2$ : 距离信道中心频率  $\Delta f$  处(相邻信道)  $\Delta B$  带宽内泄漏或扩散的信号功率



### 2) 噪声功率比

(NPR, Noise Power Ratio)

➤ 噪声功率比用来测量非线性形成的带内干扰的大小。



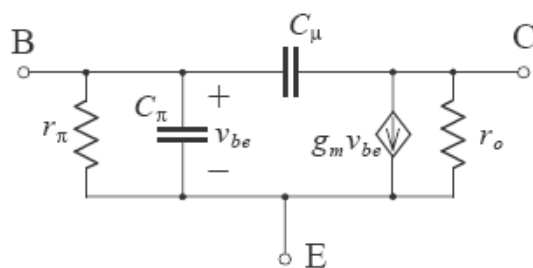


# 特征频率( $f_T$ )和单位功率增益频率( $f_{max}$ )

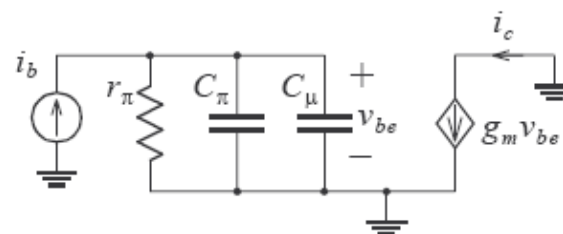
## ➤ 特征频率( $f_T$ )

特征频率又称为截止频率或临界频率，定义为晶体管连接成共射或共源组态在输出短路状态下晶体管电流增益降至1的频率，用 $f_T$ 表示。

### 1) 双极型晶体管



双极型晶体管小信号等效电路



晶体管在共射组态和输出短路时的等效电路

$$\beta(\omega) = i_c / i_b = g_m v_{be} / i_b = \beta_o \frac{1/[j\omega(C_\pi + C_\mu)]}{r_\pi + 1/[j\omega(C_\pi + C_\mu)]} \quad \text{其中} \quad \beta_o = g_m r_\pi$$

# 特征频率( $f_T$ )和单位功率增益频率( $f_{max}$ )

— 采用波特图法求  $\omega_T$   $|\beta(\omega_T)| = 1$

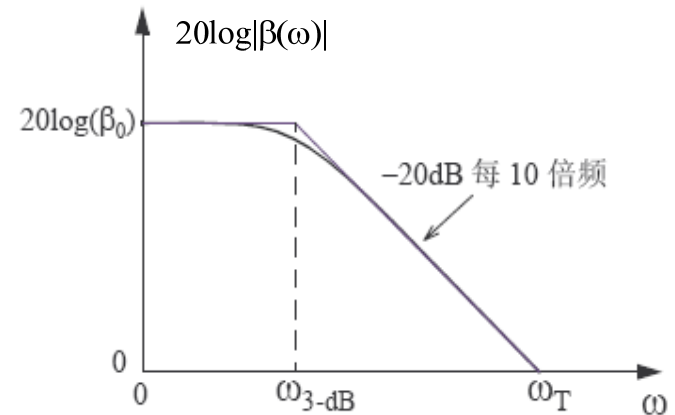
$$\frac{20 \lg \beta_o - 0}{\lg \omega_{3-dB} - \lg \omega_T} = -20 \quad \Rightarrow \quad \beta_o = \omega_T / \omega_{3dB}$$

$$\omega_{3dB} = \frac{1}{r_\pi (C_\pi + C_\mu)}$$

$$\omega_T = \beta_o \omega_{3dB} = \frac{\beta_o}{r_\pi (C_\pi + C_\mu)} = \frac{g_m}{C_\pi + C_\mu} \quad \Rightarrow \quad f_T = \frac{g_m}{2\pi (C_\pi + C_\mu)} \approx \frac{1}{2\pi} \frac{g_m}{C_\pi}$$

## 2) MOS晶体管

$$\omega_T = \frac{g_m}{C_{gs} + C_{gd}} \approx \frac{g_m}{C_{gs}} \quad \Rightarrow \quad f_T = \frac{g_m}{2\pi (C_{gs} + C_{gd})} \approx \frac{1}{2\pi} \frac{g_m}{C_{gs}}$$



## 特征频率( $f_T$ )和单位功率增益频率( $f_{max}$ )

特征频率作为晶体管的一个高频指标，在一定程度上描述了放大器所能工作的最高频率或带宽，但是其参考价值大于实用价值；由于输出端短路，该端口的电容、输出电阻、密勒效应等都被忽略了，因此它并不是放大器的实际带宽的关键参数，工程设计中常将 $f_T/10$ 到 $f_T/5$ 作为管子可实际工作的频率上限。双极型晶体管的 $f_T$ 取决于基区自由电子穿越基区所需的时间。

对于MOS管，有

$$\begin{aligned} g_m &= \mu C_{ox} \frac{W}{L} (V_{GS} - V_{th}) \\ C_{gs} &= \frac{2}{3} W L C_{ox} \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad f_T \approx \frac{1}{2\pi} \frac{g_m}{C_{gs}} = \frac{1}{2\pi} \frac{3}{2} \frac{\mu}{L^2} (V_{GS} - V_{th})$$

$L^2 / [\mu(V_{GS} - V_{th})]$  正比于载流子横渡沟道所需的平均时间。因此，双极型管和MOS管的 $f_T$ 都分别与载流子的穿越(或渡越)时间成反比，只不过前者载流子的运动方式是扩散，后者是漂移。

# 特征频率( $f_T$ )和单位功率增益频率( $f_{max}$ )

---

得出以下结论：

- 1) 双极型管的 $f_T$ 是一个固定值，而MOS管的 $f_T$ 可以在一定范围内通过 $V_{GS}$ 来调节，这种调节并不是线性的， $V_{GS}-V_{th}$ 的增加会降低载流子的有效迁移率，同时载流子的速度将最终趋向饱和。
- 2) 双极型管的基区宽度是一个纵向厚度(横向三极管除外)，由扩散、注入等工艺决定，而MOS管的栅长 $L$ 是一个横向长度，由光刻工艺决定，并以很快的速度递减。
- 3) MOS管载流子的漂移速度最终受到速度饱和现象的限制，短沟道器件载流子穿越沟道的时间将与 $L$ 而不是 $L^2$ 成正比，此时 $f_T$ 将随 $L$ 减小而线性增加。

# 特征频率( $f_T$ )和单位功率增益频率( $f_{\max}$ )

## ► 单位功率增益频率 ( $f_{\max}$ )

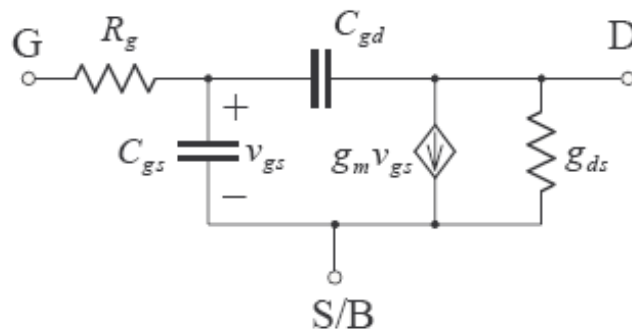
单位功率增益频率又称为最大振荡频率，定义为功率增益等于1的频率，用 $f_{\max}$ 表示。

在许多射频电路中， $f_T$ 并不能反映管子的真实工作情况，例如振荡器和功率放大器，这些电路的特点是将直流功率转换为交流信号功率，从而使输出信号功率大于输入信号功率，或者说具有一定的功率增益。等效电路中几乎所有参数都对功率增益产生影响，因此其精确的表达式非常复杂。

### 1) MOS管的 $f_{\max}$

在理想匹配且保证单向化的条件下，MOS管功率增益的表达式可近似为

$$G_p(\omega) \approx \frac{\omega_T^2}{4R_g \omega^2 (g_{ds} + \omega_T C_{gd})}$$



# 特征频率( $f_T$ )和单位功率增益频率( $f_{\max}$ )

$$G_p(\omega_{\max}) = 1 \longrightarrow \omega_{\max} = \frac{\omega_T}{2\sqrt{R_g(g_{ds} + \omega_T C_{gd})}} \quad f_{\max} = \frac{f_T}{2\sqrt{R_g(g_{ds} + \omega_T C_{gd})}}$$

$f_{\max}$  可能大于  $f_T$  也可能小于  $f_T$ , 这取决于分母的值。如果  $r_o$  足够大, 且满足  $g_{ds} \ll \omega_T C_{gd}$

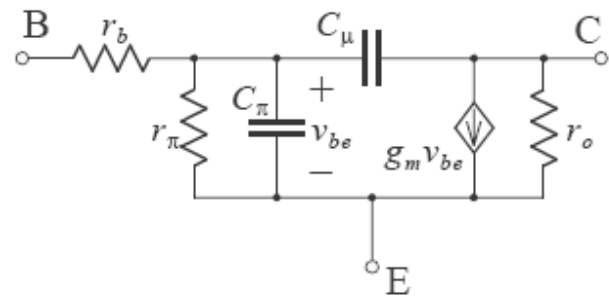
$$\text{则有} \quad f_{\max} \approx \sqrt{\frac{f_T}{8\pi R_g C_{gd}}}$$

$$\begin{array}{l} R_g \propto W/L \\ C_{gd} \propto WL \end{array} \longrightarrow f_{\max} \propto \frac{1}{W} \sqrt{f_T} \xrightarrow{\text{如果尺寸固定}} f_{\max} \propto \sqrt{f_T} \propto \sqrt{\mu(V_{GS} - V_{th})} \propto \sqrt{g_m}$$

## 2) 双极型管的 $f_{\max}$

在理想匹配且保证单向化的条件下,  
如果  $r_o$  足够大, 且满足  $1/r_o \ll \omega_T C_\mu$

$$\text{则有} \quad f_{\max} \approx \sqrt{\frac{f_T}{8\pi r_b C_\mu}}$$



# 等比例缩小与短沟道效应

## ► 等比例缩小

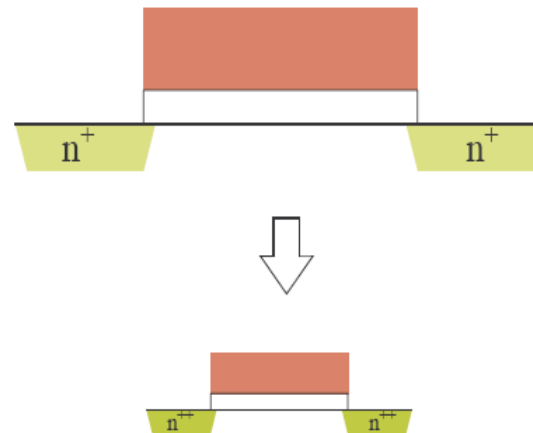
- 为什么要缩小尺寸
  - 元件寄生电容减小，速度提高、功耗降低
  - 芯片集成度提高，成本降低
- 为保证元件性能，各参数主要以电场和电压为依据按一定的比例进行缩放，因此元件尺寸的缩小称为按比例缩小(Scaling Down)

### 1. 恒电场(Constant-Field)规则

这是一个理想的缩放规则，它要求：

- 所有的几何尺寸缩小 $k$ 倍
- $V_{th}$ 和 $V_{DD}$ 缩小 $k$ 倍
- 所有掺杂浓度增加 $k$ 倍

由于电压和几何尺寸同步缩小，电场强度将保持不变，即载流子的运动不受影响。



# 等比例缩小与短沟道效应

## 1) 栅电容

栅极单位面积电容表示为  $C_{ox,new} = \frac{\epsilon_{ox}}{t_{ox}/k} = k \frac{\epsilon_{ox}}{t_{ox}} = kC_{ox}$

栅电容表示为  $C_{gs,new} = \frac{2}{3} \frac{W}{k} \frac{L}{k} C_{ox,new} = \frac{1}{k} C_{gs}$

等比例缩小的  $C_{ox,new}$  为以前的  $k$  倍,  $C_{gs,new}$  为以前的  $1/k$  倍。

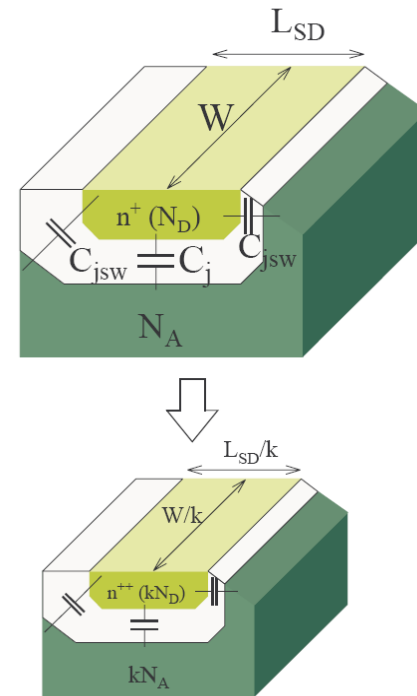
## 2) 源/漏结电容

耗尽层宽度表示为  $W_d = \sqrt{\frac{2\epsilon_{si}}{q} \left( \frac{1}{N_A} + \frac{1}{N_D} \right) (V_{Bi} + V_R)}$

式中,  $N_A$  和  $N_D$  表示结两边的掺杂浓度,  $V_R$  为反向偏置电压, 内建势  $V_{Bi} = V_T \ln(N_A N_D / n_i^2)$

假设  $V_R \gg V_{Bi}$   $W_{d,new} \approx \sqrt{\frac{2\epsilon_{si}}{q} \left( \frac{1}{kN_A} + \frac{1}{kN_D} \right) \frac{V_R}{k}} = \frac{W_d}{k}$

耗尽层宽度缩小了  $k$  倍。





# 等比例缩小与短沟道效应

源/漏pn结底板单位面积电容表示为

$$C_{j,new} = \frac{\varepsilon}{W_{d,new}} = \frac{\varepsilon}{W_d / k} = kC_j \quad \text{单位面积的耗尽区电容增大}k\text{倍}$$

由于PN结结深减小 $k$ 倍，耗尽层宽度减小 $k$ 倍，因此单位宽度的侧壁电容保持不变，即  $C_{jsw,new} = C_{jsw}$

源/漏结电容表示为

$$\begin{aligned} C_{S/D,new} &= \frac{W}{k} \frac{L_{SD}}{k} C_{j,new} + 2 \left( \frac{W}{k} + \frac{L_{SD}}{k} \right) C_{jsw,new} \\ &= \frac{W}{k} \frac{L_{SD}}{k} (kC_j) + 2 \left( \frac{W}{k} + \frac{L_{SD}}{k} \right) C_{jsw} \\ &= \frac{1}{k} C_{S/D} \quad \text{源/漏结电容缩小了}k\text{倍} \end{aligned}$$

# 等比例缩小与短沟道效应

## 3) 漏极饱和电流

$$I_{D,new} = \frac{1}{2} \mu(kC_{ox}) \frac{W/k}{L/k} \left( \frac{V_{GS}}{k} - \frac{V_{th}}{k} \right)^2 = \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{2} \mu C_{ox} \frac{W}{L} (V_{GS} - V_{th})^2 = \frac{1}{k} I_D$$

漏极饱和电流缩小 $k$ 倍。对于线性区有同样的结果。

## 4) 单位面积晶体管数量

由于器件的长和宽缩小 $k$ 倍，因此单位面积晶体管数量增加 $k^2$ 倍。

## 5) 等比例缩小给数字电路带来的好处

### — 减小CMOS反相器延时

$$T_d \approx \frac{C}{I} V_{DD} \quad T_{d,new} = \frac{C/k}{I/k} \frac{V_{DD}}{k} = \frac{1}{k} \frac{C}{I} V_{DD} = \frac{1}{k} T_d$$

等比例缩小的CMOS反相器延时缩小 $k$ 倍，因此数字电路的速度会提高 $k$ 倍。

# 等比例缩小与短沟道效应

## 一 减小数字电路的功耗

$$P = fC V_{DD}^2 \quad P_{new} = f \frac{C}{k} \left( \frac{V_{DD}}{k} \right)^2 = \frac{1}{k^3} fC V_{DD}^2 = \frac{1}{k^3} P$$

等比例缩小的数字电路功耗缩小了 $k^3$ 倍。同时，等比例缩小的版图密度，或者说单位面积的晶体管数量提高 $k^2$ 倍。

## 5) 等比例缩小对模拟电路的影响

按比例缩小后，器件跨导变为

$$g_{m,new} = \mu(kC_{ox}) \frac{W/k}{L/k} \frac{V_{GS} - V_{th}}{k} = \mu C_{ox} \frac{W}{L} (V_{GS} - V_{th}) = g_m$$

等比例缩小后跨导维持不变。可以证明，工作在饱和区的器件的输出阻抗也将维持不变。因此，本征增益 $g_m r_o$ 维持不变。

## 等比例缩小与短沟道效应

按比例缩小对模拟电路影响主要是电源电压的减小。由于最大允许电压摆幅下降 $k$ 倍，从而减小了电路的动态范围。例如，动态范围的下限值受热噪声的限制，如果 $V_{DD}$ 减小 $k$ 倍，因为 $g_m$ 不变，因此热噪声保持常数，那么动态范围减小 $k$ 倍。同时，功耗下降 $k^2$ 倍。

为了恢复动态范围，晶体管跨导必须增大 $k^2$ 倍，原因是热噪声电压和电流均与 $\sqrt{g_m}$ 成比例关系。

$$g_m = \frac{2I_D}{V_{GS} - V_{th}} \quad g_{m,new} = \frac{2I_{D,new}}{(V_{GS} - V_{th})_{new}} = \frac{2I_{D,new}}{(V_{GS} - V_{th}) / k}$$
$$\longrightarrow I_{D,new} = \frac{g_{m,new} (V_{GS} - V_{th})}{2k} = \frac{k}{2} g_m (V_{GS} - V_{th}) = kI_D$$

功耗为  $(V_{DD} / k)(kI_D) = V_{DD} I_D$

# 等比例缩小与短沟道效应

如果 $C_{ox}$ 按比例增加 $k$ 倍， $L$ 和 $V_{GS}-V_{th}$ 按比例缩小 $k$ 倍，有

$$g_{m,new} = \mu C_{ox,new} \frac{W_{new}}{L_{new}} (V_{GS} - V_{th})_{new} = \mu(kC_{ox}) \frac{W_{new}}{L/k} (V_{GS} - V_{th})/k = k \frac{W_{new}}{W} g_m = k^2 g_m$$
$$\longrightarrow W_{new} = kW$$

为了使晶体管跨导增大 $k^2$ 倍，MOS管的宽度必须增加 $k$ 倍。因此，为了保证热噪声限制的动态范围不变，线性模拟电路按比例缩小应保持功耗不变和增大器件的宽度。

## 2. 其它规则

恒电场规则存在一些问题，如亚阈值漏电流，随着阈值电压( $V_{th}$ )的降低， $V_{GS} = 0$ 所对应的漏电流会增加，晶体管无法关断，这不仅增加了数字电路功耗，还降低了噪声容限，因此 $V_{th}$ 不可能随 $L$ 同步降低；同时，固定的接口电平要求也限制了电压下调。如果在比例缩小的过程中保持电压不变，这种规则就称为恒电压规则。但是恒电压是另一个极端，实际工艺中电压随 $L$ 逐步减小，但并不同步。

# 等比例缩小与短沟道效应

## ➤ 短沟道效应

### 1. 速度饱和(Velocity Saturation)

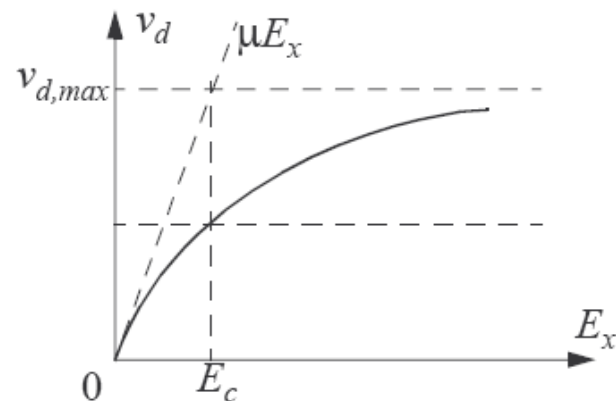
沟道中的载流子在外电场作用下加速，但散射现象会使载流子损失一部分能量。电场强度较低时，载流子的平均漂移速度 $v_d$ 与电场强度成正比，随着电场的增强， $v_d$ 趋向一个饱和值 $v_{d,max}$ ，一个常用的表示式为

$$v_d(x) = \frac{\mu E_x}{1 + E_x / E_c} \quad v_{d,max} = \lim_{E_x \rightarrow \infty} v_d(x) = \mu E_c$$

$$v_d(x) = v_{d,max} \frac{E_x / E_c}{1 + E_x / E_c}$$

当 $v_d$ 达到 $v_{d,max}$ 的一半所对应的电场强度称为临界电场强度 $E_c$

$$E_c = v_{d,max} / \mu$$



# 等比例缩小与短沟道效应

当存在速度饱和效应时，漏极电流不再满足长沟道的公式，而必须使用更一般性的表示方法。

— 晶体管工作在线性区  $V_{DS} < (V_{GS} - V_{th})$

$$I_D = \frac{\mu C_{ox}}{1 + \frac{1}{E_c} \frac{V_{DS}}{L}} \frac{W}{L} \left[ (V_{GS} - V_{th}) V_{DS} - \frac{1}{2} V_{DS}^2 \right]$$

— 晶体管工作在饱和区

当  $V_{DS} \geq (V_{GS} - V_{th})$   
当  $(V_{GS} - V_{th})/L \gg E_c$  时

$$I_{D,sat} \approx \frac{1}{2} \mu C_{ox} \frac{W}{L} (V_{GS} - V_{th}) E_c L = \frac{1}{2} \mu C_{ox} W (V_{GS} - V_{th}) E_c$$

此时的电流不再跟沟道长度 $L$ 相关，且与栅电压成线性关系，对应的跨导为

$$g_m \approx \frac{1}{2} \mu C_{ox} W E_c \quad g_m \text{ 与 } V_{DS} \text{ 无关，其值为常数。}$$

# 等比例缩小与短沟道效应

## 2. 纵向电场引起的迁移率退化

类似与趋肤效应，栅极与沟道之间的电场使沟道内的载流子更趋向于沟道表面的区域，使其迁移率降低，这种现象在长沟道器件中同样存在，只不过在短沟道器件中随着 $t_{ox}$ 的减小而更加明显，载流子的有效迁移率可以近似表示为

$$\mu_{eff} = \frac{\mu_o}{1 + \theta(V_{GS} - V_{th})}$$

式中， $\mu_o$ 为低电场强度时的迁移率， $\theta$ 是一个拟合参数，约为 $10^{-7}/t_{ox}$  ( $V^{-1}$ )。

将漏极饱和电流计算公式中的载流子迁移率用载流子的有效迁移率取代，得漏极饱和电流表示为

$$I_D \approx \frac{1}{2} \frac{\mu_o}{1 + \theta(V_{GS} - V_{th})} C_{ox} \frac{W}{L} (V_{GS} - V_{th})^2$$

当  $\theta(V_{GS} - V_{th}) \ll 1$  时

$$I_D \approx \frac{1}{2} \mu_o C_{ox} \frac{W}{L} [1 - \theta(V_{GS} - V_{th})] (V_{GS} - V_{th})^2 = \frac{1}{2} \mu_o C_{ox} \frac{W}{L} [(V_{GS} - V_{th})^2 - \theta(V_{GS} - V_{th})^3]$$

此时，漏极电流的表达式中出现了3次失真。同时，纵向电场引起的迁移率退化也会影响到器件的跨导。



# 等比例缩小与短沟道效应

---

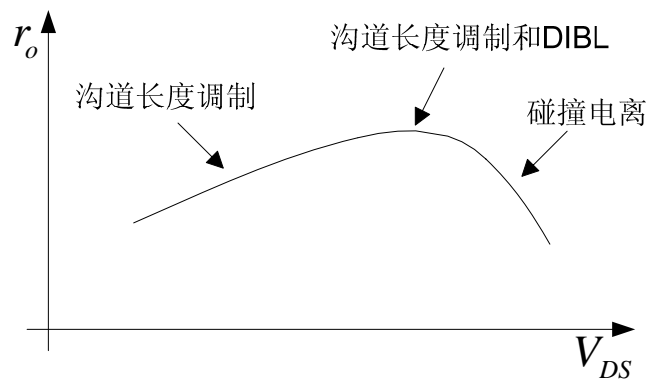
## 3. 热载流子效应(hot carrier effect)

- 当漏源电压足够大时，漏极附近的电场强度非常大，使得载流子获得足够的能量撞击硅原子，并使之发生电离，产生新的电子-空穴对，新产生的载流子又可以获得能量造成更多的原子发生电离，这些高能量的载流子称为热载流子。
- 热载流子的运动使短沟道器件的噪声电流远大于长沟道器件。
- 电离产生的电子-空穴对，电子流向漏区，而空穴流向衬底，形成衬底电流(NMOS)，这会使晶体管的输出电阻降低。
- 一部分电子穿透栅氧层而形成栅电流，另一部分电子被栅氧层捕获，造成阈值电压的偏移；在进入栅氧层时，热电子会造成栅氧与沟道界面的缺陷。
- 为减小或避免热载流子的形成，需要降低电压以减小电场强度，在现代工艺中常采用漏区轻掺杂(LDD -Lightly Doped Drain)结构来达到同样的目的。

# 等比例缩小与短沟道效应

## 4. 漏源电压引起的输出阻抗的变化

对于长沟道器件，通常假定饱和区的晶体管输出电阻 $r_o$ 为常数。而对于短沟道器件，这种假设不能成立。



### — Drain Induced Barrier Lowering (DIBL)

在短沟道器件中，漏极电压所形成的电场具有纵向分量，起到与栅极电场相同的作用，“加快”了反型层的形成，降低了等效的阈值电压

$r_o$ 的变化会在许多电路中引入非线性。例如，共源共栅放大器中，随着输出电压的变化，共源共栅器件的输出阻抗也随之变化，因而电路的电压增益也发生变化。而且，碰撞电离限制了共源共栅结构所能达到的最大增益，因为它引入了一个由漏极到衬底、而不是由漏极到源极的小信号电阻。

# 等比例缩小与短沟道效应

---

## ➤ Scaling Down对RFIC设计的影响

- $f_T$ 随着L减小而上升，长沟道器件  $f_T \propto \frac{1}{L^2}$ ，短沟道器件  $f_T \propto \frac{1}{L}$
- $f_{MAX}$ 也随相应增加，但是增幅较缓
- **IIP3**减小，但是仍优于**BJT** (长沟道器件不存在3次失真!)
- **NF**减小
- **Flicker noise** 更为严重(混频器、振荡器设计需要注意)

因此，**CMOS**特征尺寸的不断减小对**RFIC**设计有利有弊。

# 其它工艺

---

- **Si SOI (SOS)**
  - 使用绝缘的衬底大大减小了寄生电容，增加了隔离度，提高了高频性能
  - 模型十分复杂，存在**self-heating**等问题
  - **BiCMOS**将**BJT**的优良性能和**CMOS**的高集成度很好地结合在廉价的硅片上
- **GaAs (Gallium Arsenide)**
  - 极佳的高频性能
  - 高成本，较低的成品率，**GaAs MESFET**有很高的低频噪声
- **SiGe (Silicon Germanium)**
  - 在速度、噪声、增益、功耗等方面表现突出
  - 与现有的硅工艺相兼容，成本高

## 参考文献

---

- [1] 王蕴仪, 苗敬峰, 沈楚玉, 陈顺生编, 《微波器件与电路》, 江苏科学技术出版社, 1981年版。
- [2] T. H. Lee, *The Design of CMOS Radio-Frequency Integrated Circuits*, Chapter 10 and Section 11.6, Cambridge, 1998.
- [3] Guillermo Gonzalez, *Microwave Transistor Amplifiers: Analysis and Design*, 2nd Ed., Prentice Hall, 1997.
- [4] P. R. Gray and R. G. Meyer, *Analysis and Design of Analog Integrated Circuits*, 3rd Ed., Chapter 11, Wiley, 1993.
- [5] B. Razavi, *Design of Analog CMOS Integrated Circuits*, Chapter 7, McGraw-Hill, 2000.
- [6] B. Razavi, *RF Microelectronics*, Chapter 2, Prentice Hall, 1998.