射频电路测试原理

课程安排

教师　李国林　guolinli@tsinghua.edu.cn

　　　雷有华　leiyh@tsinghua.edu.cn

助教　喻学艺　yxy00@mails.tsinghua.edu.cn

课程安排（一）

- 第一讲　电子测量概述、测量误差与数据处理
- 第二讲　混合信号测试原理、DAC/ADC测试方法
- 第三讲　射频测试原理
  - 传输线理论，S参数含义及其测量方法
- 第四讲　无线通信系统中的测试项
  - 附：基本电子测量仪器原理
- 第五讲　示波器、时域测量原理
- 第六讲　频谱分析仪、频域测量方法
- 第七讲　信号发生器
- 第一次实验

课程安排（二）

- 第八讲　矢量信号分析仪
- 第九讲　网络分析仪、频域测试原理
- 第十讲　其他射频测试仪器
  - 噪声系数分析仪，射频阻抗分析仪，...
- 第十一讲　逻辑分析仪、数据域测试原理
  - 附讲GPIB总线接口
- 第十二讲　典型芯片测试
  - 选讲：运算放大器、低噪声放大器、功率放大器、滤波器、振荡器、锁相环、调制解调器等
- 第二次实验

中文主要参考文献

- 刘国林，殷贯西，《电子测量》，机械工业出版社，2003
- 董树义，《近代微波测量技术》，电子工业出版社，1995
- 吕洪国，《现代网络频谱测量技术》，清华大学出版社，2000
- 陈光禹，王厚军，田书林，李为民，《现代测试技术》，电子科技大学出版社，2002
- 杨乐平，李海涛，肖凯，杨磊，《虚拟仪器技术概论》，电子工业出版社，2003
- 网上搜索、agilent公司获取、以及仪器说明书等资料
  - www.agilent.com

英文主要参考文献

- Nihal Kularatna, **Digital and Analogue Instrumentation --- Testing and Measurement**,IEE,London,2003
  - Modern electronic test and measuring instruments, IEE, 1996
- Mark Burns, Gordon W. Roberts, **An Introduction to Mixed-Signal IC Test and Measurement**, Oxford University Press, 2001
- Michael L. bushnell, Vishwani D. Agrawal, **Essentials of Electronic Testing for Digital, Memory and Mixed-Signal VLSI Circuits**, Kluwer Academic Publishers, London, 2002
- Mark Baker, **Demystifying Mixed-Signal Test Methods**, Elsevier Science, Amsterdam, 2003
- Stanley L. Hurst, **VLSI Testing --- Digital and mixed analogue/digital techniques**, IEE, London, 1998

考核

- PROJECT 30分
  - 翻译，每个同学翻译一部分，向喻学艺报名，第三周大家确认选修本课后发给大家相应章节，第十周提交上来
  - 文笔流畅，论述准确，能自己画的图最好自己画
- 作业 20分
- 考试 30分
- 实验 20分
  - 如果以演示性实验为主，则实验分数的20分各分10分到期末考试和PROJECT中

Digital and Analogue Instrumentation

Testing and Measurement

Digital and Analogue Instrumentation

Testing and Measurement

An Introduction to Mixed-Signal IC Test and Measurement

An Introduction to Mixed-Signal IC Test and Measurement

射频电路测试原理

第一讲　电子测量概述

guolinli@tsinghua.edu.cn
leiyh@tsinghua.edu.cn

参考文献

- 刘国林，殷贯西，《电子测量》，机械工业出版社，2003
- 董怀武，《误差理论在电磁测量中的应用》，机械工业出版社，1986

- 陈光禹，王厚军，田书林，李为民，《现代测试技术》，电子科技大学出版社，2002
- 杨乐平，李海涛，肖凯，杨磊，《虚拟仪器技术概论》，电子工业出版社，2003

内容

- 测量概述
- 电子测量概述
- 虚拟仪器概述
- 误差分析与数据处理

- 人们通过测量建立对客观事物属性量度的认识，并通过测量结果进行归纳和演绎，从中得到客观事物的变化规律，由此提出科学理论
  - 没有测量，就没有科学

一、测量概述

- 科学的发展和技术的进步是建立在人们认识客观世界能力提高的基础上，测量和测试是人们对客观事物的两个基本认识过程
- 测量是人类认识客观世界最基本的方法
  - 在所有的自然科学和工程技术领域所进行的一切研究活动，其目的都是探求客观事物的质与量的变化关系，而研究事物质与量的变化关系离不开测量
  - 从广义上讲，测量本身是一种实验方法，它通过实验来获取客观世界的定量信息
    - 在这个过程中，人们借助于专门的仪器设备，把被测量直接或间接地与同类已知量进行比较，把已知量作为计量单位，取得用数值和单位共同表示的测量结果

- 测试和测量两个概念的基本含义是一致的，但测试概念的外延更宽，更注重强调试验性质与过程

测试与测量

- 测试概念含义较广，泛指生产和科学试验中进行的满足一定准确度要求的试验性测量过程
  - 测试可以是指试验和测量的全过程。这种过程既可定量，又可定性，目的在于鉴定被测对象的性质和特征。也就是说，测试可以指被测对象性质的测量过程，可以没有计量标准，如对人能力的评测，逻辑电平高低的测试，是不需要准确值的

测试技术

- 测试技术是一项涉及多学科领域的综合性技术
  - 测量原理
    - 测量所依据的物理原理。测量原理选择主要取决于被测量的物理化学性质、测量范围、性能要求和环境条件等因素
  - 测量方法
    - 依据测量原理完成测量的具体方式。按测量结果产生的方式分为直接测量和间接测量，以及组合测量三大类
  - 测量系统
    - 完成具体测量任务的各种仪器仪表所构成的实际系统。按传输方式一般分模拟式和数字式两种
  - 数据处理
    - 测量数据的精度和可信度同时还与数据处理密切相关

二、电子测量概述

- 电子测量是测量学的一个重要分支
  - 狭义：电子学中的电量值的测量
  - 广义：利用电子技术进行的测量
- 在电子测量中，电压、频率、相位、阻抗等是基本电参量，对它们的测量是其他许多派生电参数或非电量测量的基础

2.1 电子测量的范围

- 电能量的测量
  - 电压、电流、电功率、…
- 元件和电路参数的测量
  - 电阻、电容、电感、阻抗、品质因数、电子器件参数、…
- 电信号特性的测量
  - 信号波形、失真度、频率、相位、调制度、…
- 电子线路性能的测量
  - 放大倍数、衰减量、灵敏度、噪声系数、…
- 特性曲线测量
  - 幅频特性、相频特性、…

2.2 电子测量的特点（一）

- 频率范围宽
  - 低频：10^{-4}-10^{-5}Hz；高频：10^{12}Hz
- 仪器的量程广
  - 量程是仪器所能测试参数的范围
- 准确度高
  - 尤其是对频率、时间和电压的测量
    - 原子频标：时间测量误差：10^{-13}量级
    - 标准电池：电压测量误差：10^{-6}量级
      - 人们往往把其他被测量转换为频率或电压后再进行测量

电子测量的特点（二）

- 测量速度快
  - 电子运动、电磁波传播、器件反应速度
- 易于实现遥测和不间断测量
  - 通过传感器
- 易于实现测量自动化和仪器智能化
  - 测量量和测量结果都是电信号，可通过ADC和计算机连接，做成一个自动测试系统

2.3 电子测量仪器

- 用于检测或测量一个量或为测量目的供给一个量的器具称为测量仪器
  - 利用电子技术测量电或非电量的测量仪器称为电子测量仪器
- 分类
  - 专用仪器
    - 为某一个或几个专门目的而设计的电子测量仪器
      - 电视彩色信号发生器
  - 通用仪器
    - 测量某一个或几个电参数而设计的电子测量仪器
      - 示波器

通用电子测量仪器（一）

- 信号发生器
  - 提供各种波形的信号
    - 低频、高频信号源、函数信号发生器、射频数字与模拟信号发生器
- 信号分析仪器
  - 观测、分析和记录电量变化：频域、时域（数字域）
    - 示波器、频谱分析仪、逻辑分析仪
- 频率和相位测量仪器
  - 测试电信号的频率、时间间隔和相位
    - 频率计、波长表、相位计

通用电子测量仪器（二）

- 网络特性测量仪器
  - 测量电气网络特性
    - 扫频仪、网络分析仪
- 电子元器件测试仪器
  - 测量电子元器件的电参数或特性曲线
    - 阻抗分析仪
- 电波特性测试仪器
  - 对电波传播、电磁场强度、干扰等参量进行测量
- 辅助仪器
  - 配合上述各种仪器对信号进行放大、检波、隔离、衰减等，以便使上述仪器更充分地发挥作用
    - 放大器、衰减器、耦合器、检波器、滤波器、电源、标准负载

2.4 电子测量的方法（一）

- 按测量性质分类
  - 时域测量
    - 被测量与时间的函数关系
      - 电压、电流：波形
  - 频域测量
    - 被测量与频率的函数关系
      - 增益、相移、频谱、…
  - 数据域测量
    - 数字逻辑量
  - 随机量测量
    - 噪声干扰测量

电子测量的方法（二）

- 按测量手段分类
  - 直接测量
    - 测量仪器直接测得的量值就是它最终所需要的被测量的值
      - 测量过程就是一个直接比较的过程
        - 用标尺对电缆长度的测量，用温度计测量温度
      - 零示法
        - 将一个校对好的基准源与未知的被测量进行比较，并调节其中一个，使二者之差为零，如是基准源读数就是被测量值
  - 非直接测量
    - 测量值并非最终量值，而是以测量量为基础，参照各种条件计算获得最终量值
      - 直接的换算关系：间接测量

$$R=\rho\frac{l}{S}\quad\Rightarrow\quad\rho=R\frac{S}{l}$$

      - 求解方程组：组合测量
        - 精密测量

$$R(t)=R_0+R_1(t/20-1)+R_2(t/20-1)^2$$

$$R(t_1);R(t_2);R(t_3)\Rightarrow R_0;R_1;R_2$$

2.5 电子仪器发展特点

- 随着微电子、纳米技术、激光技术和生物技术的发展，测试仪器的工作原理正在酝酿新的变革，微型化、智能化和网络化将成为今后测试仪器开发的主导方向
- 测试仪器设计更注重系统集成和性能价格比，普遍采用EDA（电子设计自动化）、CAM（计算机辅助设计）、DSP（数字信号处理）、ASIC（专用集成芯片）及SMT（表面贴装技术）等新技术
- 测试仪器产品的数字化步伐加快，仪器变为ADC、DAC、CPU与软件的组合，集成的多功能仪器平台有可能取代传统意义上的各种功能仪器

三、虚拟仪器概述

- 所谓虚拟仪器，就是用户在通用计算机平台上，根据需求定义和设计仪器的测试功能，使得使用者在操作这台计算机时，就像操作一台他自己定义设计的测试仪器一样
  - 虚拟仪器最本质的表述：‘软件即仪器’
  - 虚拟仪器概念的出现，打破了传统仪器由厂家定义，用户无法改变的工作模式，使得用户可以根据自己的需求，设计自己的仪器系统，在测试系统和仪器设计中尽量用软件代替硬件，充分利用计算机技术来实现和扩展传统测试系统与仪器的功能

仪器构成

- 信号采集与控制单元
- 信号分析与处理单元
- 结果表达与输出单元

- 传统仪器的这些功能单元基本上由硬件或固化的软件形式存在
- 在通用计算机平台上增加必要的信号采集与控制单元，就已经具备了构成测试仪器的基本条件
  - 根据仪器功能设计开发包括数据采集、控制、分析、处理、显示、并支持灵活的人机交互操作的系统软件

创新的仪器设计思想

- 虚拟仪器概念最早由美国国家仪器公司（National Instruments，NI）在1986年提出
  - 1986年，NI公司推出了图形化的虚拟仪器编程环境LabVIEW
- 虚拟仪器实质上是一种创新的仪器设计思想，而非一种具体的仪器
  - 虚拟仪器可以有各种各样的形式，完全取决于实际的物理系统和构成仪器数据采集单元的硬件类型
  - 虚拟仪器离不开计算机控制，软件是虚拟仪器设计中最重要，也是最复杂的部分

虚拟仪器分类

- 最常用的分类方法是按照构成虚拟仪器的接口总线不同而分类
  - 数据采集插卡式DAQ：工业过程控制：ISA－PCI
  - RS232/RS422：支持长线传输，数据率低
  - 并行接口
  - USB：通用串行总线
  - GPIB：具有独立的仪器操作界面
  - VXI：依赖仪器驱动器提供虚拟操作界面
  - PXI：程控仪器专用计算机接口总线
  - IEEE1394：高速串行总线

开发环境

- 虚拟仪器的开发环境是虚拟仪器技术的重要组成部分
  - Visual C++, Visual Basic
  - LabWindows, LabVIEW：NI
  - VEE：HP
- 特点
  - 提供测试、控制和数据分析功能模块
  - 编程过程就是设计和定义程序流程图
  - 提供面板设计和数据可视化分析等专用工具
  - 可通过计算机网络构成一个分布式测试系统

四、测量误差与数据处理

- 基本概念
- 误差分类
- 对随机误差的数学处理
- 如何消除系统误差
- 误差的合成与分配
- 测量数据处理

4.1 基本概念

- 准确度 accuracy
  - 准确度是一种定性的概念，不是定量的
    - 测量结果：表示测量结果与被测量真值之间的一致程度
    - 测量仪器：测量仪器给出接近真值的能力
- 准确度等级 accuracy class
  - 测量仪器符合一定计量要求，使误差保持在规定极限以内的测量仪器的等级、级别
    - 级：按测量仪器示值误差大小划分的档次
- 准确度定量
  - 用于定量说明的量：测量误差、相对误差
  - 对于测量仪器：示值误差、最大允许误差、引用误差
  - 准确度只是这些量值的一个总称

术语

- 等精度测量
  - 在同一条件下，所进行的一系列重复测试称为等精度测量
- 非等精度测量
  - 在多次测量中，对测量结果精确度有影响的条件不全完全维持不变
- 真值
  - 被测量本身具有的真正值（理想的，可能未知）
- 实际值
  - 把精度等级高一级的标准器具所测量获得的值作为‘真值’，考虑此真非真，称其为实际值
- 标称值
  - 被测量物所标出的数值
- 示值
  - 测量器具所指示的测量值
- 测量误差
  - 测量出的数字与实际值之间的误差

4.2 误差分类（一）

- 按表示法分类
  - 绝对误差
  - 相对误差
    - 实际相对误差
    - 示值相对误差
    - 引用相对误差

用某电流表测得示值为0.83mA，查该表检定证书，知电流表在0.8mA的修正值为-0.02mA，于是可以推知被测电流的实际值为A=0.83+(-0.02)=0.81mA

绝对误差

- 示值与被测量真值之间的差值
  - 示值：x
  - 真值：A_0
  - 绝对误差：$\Delta x = x - A_0$
- 真值如果无法获得，一般以准确度高一级的标准器具的示值（实际值）A代替A_0
  - A不是A_0，但A一般比x更靠近A_0
- 修正值：$C = -\Delta x$
  - $A = x + C$
    - 某些测试系统中，为了提高测量精度，修正值预先编制成表格、曲线、公式等，可对测量示值进行自动修正

- 绝对误差不能很好地反映测量的准确程度：f_1=1kHz，Δf_1=1Hz；f_2=1MHz，Δf_2=10Hz
  - 如何评判？

相对误差

- 相对误差是绝对误差与被测量的约定值之比，较绝对误差更能确切地说明测量质量
  - 实际相对误差：$\gamma_A = \Delta x / A \times 100\%$：理论分析
  - 示值相对误差：$\gamma_x = \Delta x / x \times 100\%$：工程测量
  - 引用相对误差：$\gamma_m = \Delta x / x_m \times 100\%$：
    - x_m为仪器的满度值
      - 又称满度相对误差，满度误差，引用误差
      - 仪表量程内绝对误差最大值：$\Delta x_m = \gamma_m \times x_m$
    - 我国电工仪表的准确度等级s就是按满度误差γ_m分级的
      - 7级：0.1/0.2/0.5/1.0/1.5/2.5/5.0
        - 某电压表s=1.5，其0V-100V量程中的最大绝对误差为±1.5V
      - 为了减小测量中的示值误差，在进行量程选择时应尽量选择量程使得示值接近满度值

GB776-76
电气测量指示仪表通用技术条件

分贝误差

- 对数形式表示的物理量的测量误差

$$
\begin{aligned}
\gamma_{dB} &= G_x - G = 20\log x - 20\log A \\
&= 20\log(A + \Delta x) - 20\log A \\
&= 20\log\left(1 + \frac{\Delta x}{A}\right) = 20\log(1 + \gamma_A)
\end{aligned}
$$

相对误差比较小时，分贝误差和相对误差近似线性关系

$$
\begin{aligned}
\gamma_{dB} &\approx 8.69\gamma_A \quad \text{(电压、电流有关测量)} \\
&\approx 4.34\gamma_A \quad \text{(功率有关测量)}
\end{aligned}
$$

容许误差

- 容许误差是指测量仪器在规定使用条件下可能产生的最大误差
  - 测量仪器的误差是产生测量误差的主要因素。为了保证测量结果的准确可靠，必须对测量仪器本身的误差有一定要求
  - 容许误差又称仪器误差，是衡量电子测量仪器质量的最重要指标
    - 为了保证测量仪器示值的准确，规定某一类仪器误差不应超过的最大范围，仪器出厂前必须经检验部门对其误差指标进行检验；使用期间，定期校准；误差指标在容许范围内的，视为合格
    - 《电子测量仪器误差的一般规定》GB6592-1986规定：用工作误差、固有误差、影响误差和稳定误差四项指标来描述电子测量仪器的容许误差

容许误差的度量

- 在额定工作条件下仪器误差的极限值
  - 最不利条件下的测量误差：最大范围
- 固有误差
  - 仪器的各种影响量和影响特性均处于基准条件下，仪器所具有的误差
    - 便于在相同条件下，对同类仪器进行比较和校准
- 影响误差
  - 当一个影响量在其额定使用范围内取任一值，其他影响量均处于基准条件下的测量误差
    - 温度误差、频率误差
- 稳定误差
  - 仪器在影响量保持长期恒定的情况下，于规定时间内产生的误差极限
    - 最长连续工作时间

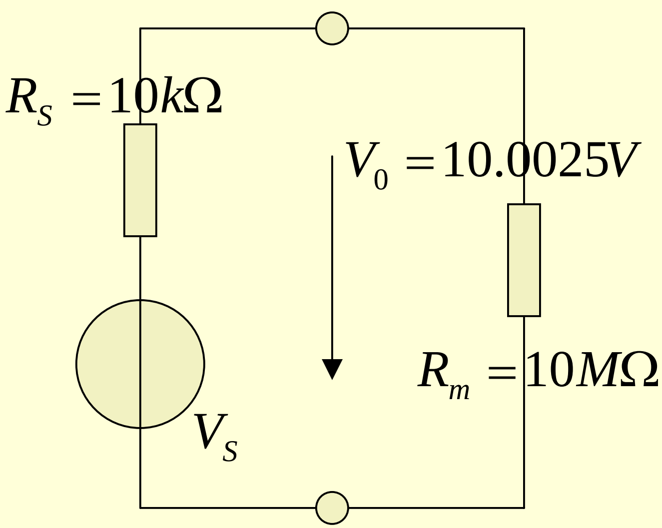
误差分类（二）

- 按误差来源分类
  - 工具误差：工具不完善
    - 读数误差
      - 标准误差
      - 分辨率不高引起的误差
    - 内部噪声误差
      - 热噪声、散粒噪声、电源不稳、...
    - 器件老化、工作条件变化引起的误差（环境误差）
    - 实验者分辨力不完善，固有习惯引起的误差（人员误差）
  - 方法误差：方法不完善、理论不严密、定义不明确---理论误差
    - 公式过于简化、...
    - 可以理论上进行修正

方法误差例

- 用一个内阻为10MΩ的数字电压表测量一个电压源，其中，电压内阻为10kΩ，数字电压表的工作误差为±0.005%读数±2个字。现电压表读数显示为10.0025V，分析本次测量中的仪器误差和方法误差

$$V_0 = \frac{R_m}{R_S + R_m} V_S = \frac{V_S}{1 + R_S / R_m}$$



方法误差：$\gamma_x = \frac{V_0 - V_S}{V_0} = -\frac{R_S}{R_m} = -0.1\%$

仪器误差：$\gamma = \pm\left(0.005\% + \frac{2}{100025}\right) \approx \pm 0.007\%$

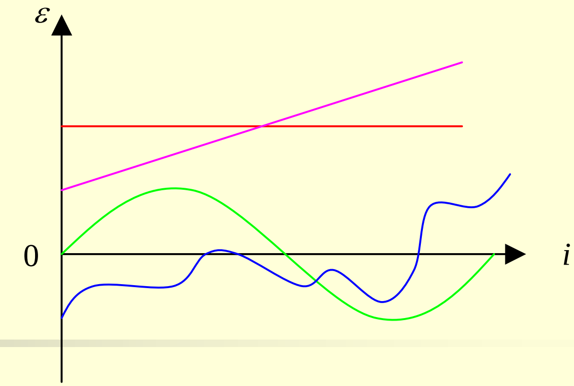
$$V_0 = \frac{R_m}{R_S + R_m} V_S = \frac{V_S}{1 + R_S / R_m}$$

方法误差可以修正：$V_S = (1 - \gamma_x) V_0 = 10.0325$

误差分类（三）

- 按误差出现的规律分类
  - 系统误差
  - 随机误差
  - 粗大误差

系统误差



- 在多次等精度测量同一量值时，误差的绝对值和符号保持不变；或当条件改变时，按某种规律变化的误差称为系统误差
  - 如果系统误差的大小、符号不变而保持恒定，称为恒定系差；
  - 否则称为变值系差：累进性系差、周期性系差、复杂规律变化系差
- 特点
  - 多次测量取平均不能消除系统误差
  - 系统误差具有某种可重复性
- 原因
  - 原理或制作缺陷：电池连续放电
  - 测量环境条件和仪器使用说明不一致：温度不一致，电阻值不一样
  - 采用近似测量方法或近似计算公式：方法误差
  - 测量人员习惯性读数

一定条件下，系统误差和随机误差可以相互转化。例如：指示仪标度尺的分度误差，对制造厂来说，属随机误差；对使用者而言，该误差属系统误差。

随机误差

- 对同一量值进行多次等精度测量，其绝对值和符号均以不可预定的方式无规则变化的误差
  - 就单次测量而言，随机误差没有规律，其大小和方向完全不可预定，但当测量次数足够多时，其总体服从统计学规律，多数情况下接近正态分布
    - 由各种互不相关的独立因素围绕其平均值产生的随机起伏
- 特点（统计学规律特点）
  - 误差绝对值波动有界：有界性
  - 测量次数足够多时，正负误差出现的机会几乎相同：对称性
  - 随机误差的算术平均值趋于0：抵偿性
    - 可以通过多次测量取平均的方法来减小随机误差对测量结果的影响
- 原因
  - 测量仪器元器件噪声，接触不良，摩擦
  - 温度或电源电压的无规律波动，电磁干扰、地基震动、热起伏
  - 测量人员感觉器官的无规则变化造成的读数不稳定

粗大误差

- 在一定测量条件下，测得值明显地偏离实际值所形成的误差称为粗大误差，简称粗差
  - 确认含有粗差的测得值称为坏值，应该剔除不用
- 原因
  - 测量方法不当或错误
  - 测量操作失误或疏忽
  - 测量条件的突然变化

误差分类（四）

- 按照测量随时间变化的速度分类
  - 静态误差
    - 测量过程中，被测量随时间变化很缓慢或基本不变时的测量误差
  - 动态误差
    - 被测量对时间变化很快，测量将会产生附加的误差
    - 一个有惯性、滞后性的测量系统，将不能让所有输入信号全部通过，或者是不同频率成分的信号通过时受到不同的衰减

误差分类（五）

- 按使用条件分类
  - 基本误差
    - 测试系统在规定的标准条件下使用时所产生的误差
    - 基本误差时测试系统在额定条件下工作所具有的误差，测试系统的精确度基本上是由基本误差决定的
  - 附加误差
    - 当使用条件偏离规定的标准条件时，除了基本误差外，还会产生附加误差
      - 附加误差一般是叠加到基本误差上的

误差分类（六）

- 按误差与被测量之间的关系分类
  - 定值误差
    - 在一次测量中，误差不随被测量变化而变化
      - 可能是系统误差，也可能是随机误差
  - 累积误差
    - 误差量和被测量成比例变化
      - 误差量随被测量增大而增大，故称累积误差

- 多次等精度测量时产生的随机误差服从统计学规律
- 数学期望

4.3 对随机误差的数学处理

n次测量样本：$x_1, x_2, ..., x_n$

样本平均值：$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$　数学期望：$E_x = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$

随机误差：$\delta_i = x_i - A$（假设无粗大误差和系统误差或消除）

$$\overline{\delta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\delta_i = \overline{x} - A \xrightarrow[n\to\infty]{} E_x - A = 0 \Rightarrow A = E_x \approx \overline{x}$$

$A \approx \overline{x}$:最后测量值：测量的最佳估值：最可信赖值

剩余误差

- 有限次测量的各次测得值和算术平均值之差，称为剩余误差或残差

$$v_i = x_i - \overline{x}$$

$$\overline{v} = 0$$

$$n \to \infty \qquad v(\text{剩余误差}) \to \delta(\text{随机误差})$$

方差

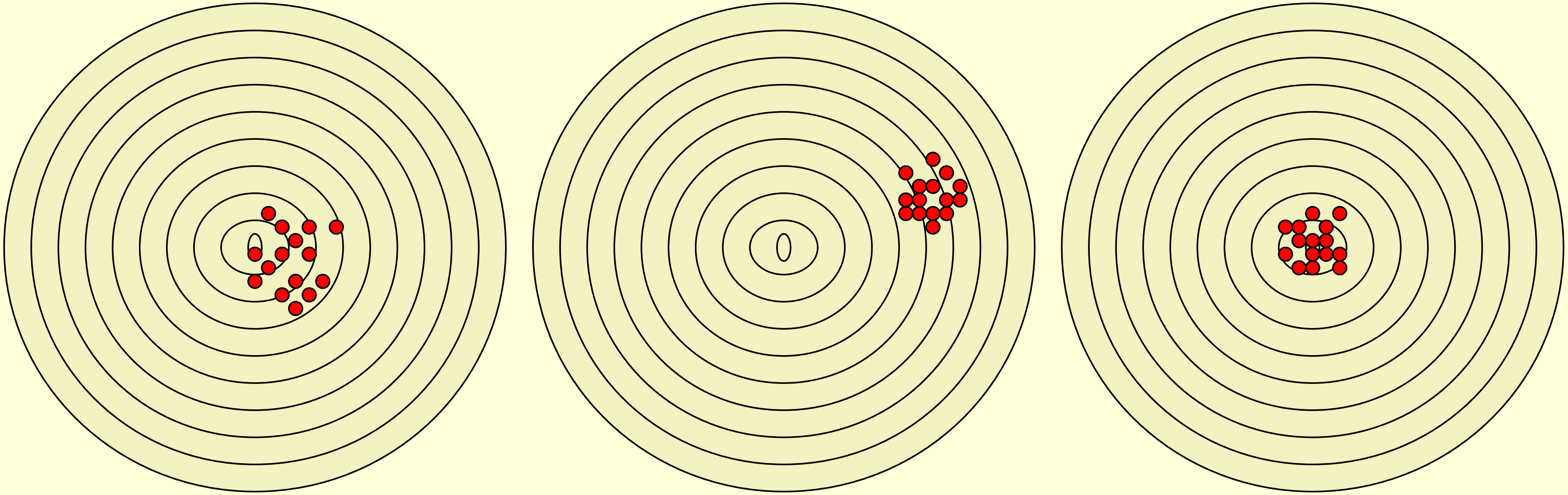
- 方差（标准差）反映的是测量紧密度，或者说反映了测量的分散程度

$$\sigma^2 = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\delta_i^2 \quad \text{标准误差}\ \sigma = \sqrt{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\delta_i^2}$$

$$\text{标准误差无偏估计值}\ \hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}v_i^2}$$

- 假设：测量误差由恒定的系统误差和正态分布的随机误差组成
  - 于是系统误差就是测量误差的算术平均，系统误差与真值之差是衡量测量正确度（correctness）的标尺；随机误差的标准偏差是衡量测量精密度（precision）的标尺；如果测量的正确度和紧密度均高，则称测量的准确度高

系统误差和随机误差的影响



正确度高、精密度低　　　　正确度低、精密度高　　　　正确度高、精密度高：准确度高

- 在测量工作中，为了获得准确的测量结果，必须使系统误差和随机误差都小

- 实际测量结果是否有效？显然，如下测量或处理的测量结果更有效
  - 多次测量，取算术平均/不同仪器多次测量，取其优者/同一标尺，不同位置测量，取其平均

不同误差不同处理

- 粗差要剔除
- 电磁干扰引起的误差较小时视为随机误差（取平均消除），误差较大且有规律可循，视为系统误差
- 系统误差远大于随机误差的影响时，忽略随机误差
- 系统误差得到修正后，按随机误差处理
- 系统误差和随机误差相差很近时，分别处理后，再估计其综合影响

正态分布

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}}$$

- 大多数测量数据满足正态分布
  - 由众多相互独立的因素的随机微小变化所造成的随机误差，根据大数定理，服从正态分布

$$E_x=\int_{-\infty}^{\infty}x\varphi(x)dx=x_0 \qquad \sigma_x^2=\int_{-\infty}^{\infty}(x-E_x)^2\varphi(x)dx=\sigma^2$$

$$P\{|\delta|\le 3\sigma\}=\int_{-3\sigma}^{3\sigma}\varphi(\delta)d\delta=0.9973 \qquad P\{|\delta|\le \sigma\}=0.6827 \quad P\{|\delta|\le 2\sigma\}=0.9545$$

- 随机变量x_i落入$[x_0-3\sigma,x_0+3\sigma]$区间的置信概率为99.7%
  - 随机误差绝对值大于3σ的可能性小于0.3%，因此定义Δ＝3σ为极限误差
  - 如果出现残差大于Δ，则可处理为粗大误差而剔除（测量次数足够多时，这种情况是小概率事件）

最大似然估计

- 测量某个物理量，假设系统误差已消除，无穷多次测量值的总体平均值就是被测量的真值。任何测量不可能是无限次测量，只能得到有限测量样本
  - 假设相同条件下，对某物理量进行了n次等精度（$\sigma_1=\ldots=\sigma_n=\sigma$）无系统误差的独立测量，得到随机测量样本$\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$，假设测量量服从正态分布$N(m_x,\sigma)$，如何根据有限次测量的随机样本来估计总体参数$m_x$和$\sigma$呢？
- 最大似然估计

$$p_{\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}}=\prod_{i=1}^{n}p_{\{x_i\}}=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x_i-m_x)^2}{2\sigma^2}}$$

$\psi(m_x,\sigma)=\ln p_{\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}}$：最佳估计值$\hat{m}_x,\hat{\sigma}$应使n个样本同时出现的概率最大

$$0=\left.\frac{\partial\psi}{\partial m_x}\right|_{m_x=\hat{m}_x,\sigma=\hat{\sigma}}=\frac{1}{\hat{\sigma}^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\hat{m}_x)\qquad \hat{m}_x=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$$

$$0=\left.\frac{\partial\psi}{\partial\sigma}\right|_{m_x=\hat{m}_x,\sigma=\hat{\sigma}}=-\frac{n}{2\hat{\sigma}^2}+\frac{1}{2\hat{\sigma}^4}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\hat{m}_x)^2\qquad \hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\hat{m}_x)^2$$

$$\hat{m}_x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{x} \qquad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2$$

算术平均值的数学期望和方差

- 样本的算术平均值是在有限次测量情况下获得的，它也是一个随机变量
- 如果在相同条件下对同一被测量分成m组，每组重复n次测量，则每组测量都有一个平均值，这些平均值也是随机变量

$$E\left(\bar{x}\right) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^j\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E\left(x_i^j\right) = m_x$$

$$\left(m \to \infty\right)$$

$$\sigma^2\left(\bar{x}\right) = \sigma^2\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^j\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sigma^2\left(x_i^j\right) = \frac{\sigma^2}{n}$$

- 算术平均值是一个好的估计值，估计量围绕真值摆动（无偏性），且摆动幅度随测量次数n的增加而减小，即算术平均值随着测量次数增加而渐进趋近于真值

$$\hat{m}_x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{x} \qquad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2$$

方差的无偏估计

- 由于样本数有限，估计出来的方差也是一个随机变量

$$E\left(\hat{\sigma}^2\right) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^j - \bar{x}^j\right)^2\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E\left(\left(\left(x_i^j - m_x\right) - \left(\bar{x}^j - m_x\right)\right)^2\right)$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[E\left(\left(x_i^j - m_x\right)^2\right) - 2E\left(\left(x_i^j - m_x\right)\left(\bar{x}^j - m_x\right)\right) + E\left(\left(\bar{x}^j - m_x\right)^2\right)\right] \qquad (m \to \infty)$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[\sigma_x^2 - 2\sigma_x\sigma_{\bar{x}} + \sigma_{\bar{x}}^2\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[\sigma^2 - 2\frac{\sigma^2}{n} + \frac{\sigma^2}{n}\right] = \frac{n-1}{n}\sigma^2$$

- 估计出来的方差是有偏估计，将会引入一个系统误差，为了消除该系统误差，需要进行修正

$$\hat{\sigma}^2 \leftarrow \frac{n}{n-1}\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^j - \bar{x}^j\right)^2$$

置信区间

- 例：用电压表测量10次，假设无系统误差和粗大误差，测得数据经处理后有平均值75.045V，标准方差无偏估计值为0.0303，则下面表述的置信区间的置信度为99.7%

$$x = \overline{x} \pm 3\sigma_{\overline{x}} = (75.045 \pm 0.028)V$$

其中：$0.028 = 3 \times 0.0303 / \sqrt{10}$

- 增加测量次数可使测量平均值更接近真值，但随着测量次数的增加，精度变化趋缓，且易引入系统误差（环境变化）和粗差（测试人员疲乏），因此，手工测量一般10-20次测量即可

$$\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & a\le x\le b\\ 0 & x<a\text{或}x>b\end{cases}$$

平均分布

- 均匀分布是仅次于正态分布的一种重要分布
  - 数字显示仪表最低位误差，舍入误差

$$E_x=\frac{a+b}{2}$$

$$\sigma_x=\frac{b-a}{\sqrt{12}}$$

1、只限定误差分量的取值范围在一个区间内，则均匀分布具有最大熵
2、给定平均值和方差，取值范围不定，则正态分布具有最大熵

4.4 如何消除系统误差

- 研究系统误差，有利于判断测量的正确性和可靠性，有时还能启发人们发现新事物和新规律
  - 雷莱利用不同的方法制取氮气，测得氮气的平均密度和标准方差分别为
    - 化学法提取：(2.29971,0.00041)
    - 大气中提取：(2.31022,0.00019)
      - 平均值差：0.01051
      - 标准偏差：10^{-5}*SQRT(41^2＋19^2)=0.00045
  - 均值之差（理论上为0），现超过标准偏差的20倍以上，两种方法之间必有系统误差
    - 雷莱发现了空气中的惰性气体

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n-1} v_i v_{i+1} : |\Delta| > \sqrt{n-1}\hat{\sigma}^2 \Rightarrow$$ 存在周期性系统误差：阿卑赫梅特判据

系统误差的判断

- 理论分析法
  - 如果属测量方法或测量原理引入的系统误差，必然可以通过定性定量分析发现并校正
- 校准和比对法
  - 用准确度更高的测量仪器进行重复测量，给出修正值（定期校准），或多台同型号仪器进行比对
- 改变测量条件法
  - 更换测量人员、测量环境、测量方法，分组测量对比
- 剩余误差观察法
  - 找剩余误差序列的规律，如果有明显规律存在，就可以认为有系统误差
- 公式判断法
  - 统计检测法

$$\Delta = \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} v_i - \sum_{i=\frac{n}{2}+1}^{n} v_i : |\Delta| > |v_{i\max}| \Rightarrow$$ 存在线性系统误差：马利可夫判据

系统误差不能通过数理统计的数学方法加以消除，因此，针对具体问题，采用不同的处理措施

减小系统误差的方法

- 从产生系统误差的根源上采取措施
  - 测量方法和测量原理是否正确；所选用仪器的应用范围是否满足应用要求；仪器使用条件是否满足；仪器应定期校准；工作环境是否需要特别安排；测量人员的培训；机械化智能化替代人工；管理规范化
- 用测量技术消除系统误差
  - 等值替代、对称观测

4.5 误差的合成与分配

- 高精度仪器及其测量，有可能找不到更高的标准进行比对，此时误差的估计需要进行局部分析，之后进行总体合成
  - 误差的来源是多方面的，单台仪器产生的误差，也与该仪器的各个组成单元有关
    - 已知各个单元误差，总误差是多少
      - 误差的合成
    - 对总误差提出要求，如何决定各个单元的误差
      - 误差的分配

误差传递公式

$$y = f(x_1, x_2) = f(x_{10} + \Delta x_1, x_{20} + \Delta x_2)$$

$$= f(x_{10}, x_{20}) + \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta x_2\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\Delta x_1{}^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}\Delta x_1 \Delta x_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\Delta x_2{}^2\right) + \ldots$$

$$\approx y_0 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta x_2\right)$$

$$\Delta y = \frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta x_2 + \ldots \frac{\partial f}{\partial x_m}\Delta x_m = \sum_{i=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial x_i}\Delta x_i$$ 线性函数误差

$$\gamma_y = \frac{\Delta y}{y_0} = \frac{1}{y_0}\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial x_i}\Delta x_i = \sum_{i=1}^{m}\frac{\partial \ln f}{\partial x_i}\Delta x_i \Big|_{(x_i = x_{i0})}$$ 幂函数误差

系统误差和随机误差的合成

$$\Delta y = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i \Rightarrow \overline{\Delta y} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i} \overline{\Delta x_i} \Rightarrow \boxed{\varepsilon_y = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i} \varepsilon_i}$$

$$(\Delta y - \varepsilon_y) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i} (\Delta x_i - \varepsilon_i) \Rightarrow \delta_y = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i} \delta_i$$

$$\delta_y^{\ 2} = \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i} \delta_i \right)^2 = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_k} \delta_j \delta_k$$

$$\overline{\delta_y^{\ 2}} = \overline{\sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_k} \delta_j \delta_k} \qquad \sigma^2(y) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_k} \sigma^2(x_j, x_k)$$

$$\sigma^2(y) = \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right)^2 \sigma^2(x_i) + 2 \sum_{j=1}^{m-1} \sum_{k=j+1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_k} \rho(x_j, x_k) \sigma(x_j) \sigma(x_k)$$

$$\boxed{\sigma^2(y) = \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \sigma^2(x_i)}$$

系统不确定度

- 系统误差可能变化的最大幅度称为系统不确定度
- 例：用R_1=100Ω±10%，和R_2=400Ω±5%的电阻串联，求总电阻的误差范围（系统不确定度）

$$\delta_1 = \pm 100 \times 10\% = \pm 10\Omega \qquad \delta_2 = \pm 400 \times 5\% = \pm 20\Omega$$

$$\delta_y = \pm\left(\left|\delta_1\right| + \left|\delta_2\right|\right) = \pm 30\Omega$$ 绝对值合成法

$$\delta_y = \pm\sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2} = \pm 22.4\Omega$$ 均方根合成法

- 绝对值合成法的结果非常保险，但过于保守，同时出现同方向的最大偏差的概率毕竟较小

误差合成例

- 某毫伏表技术指标为
  - 频率为1kHz，基本误差≤±2.5%
  - 20°C参考温度的温度误差≤±0.1%/°C
  - 在50Hz-50kHz范围内，频率附加误差≤±2.5%
  - 电源电压220V变化±10%附近误差≤±2%
  - 每进行一次测量附加误差≤±1%
- 现毫伏表已测量过一只晶体管，用其10V量程，测30kHz、5V信号，供电电源为210V，室温30°C，求总的测量误差

基本示值误差：$(10\times 2.5\%)/5 = 5\%$

温度误差：$(30-20)\times 0.1\% = 1\%$

频率误差：2.5%

电源误差：2%

累计误差：1%

绝对值合成误差：$(5+1+2.5+2+1)\% = 11.5\%$

均方根合成误差：$\sqrt{5^2+1^2+2.5^2+2^2+1^2}\,\% = 6.1\%$

如果误差取一位有效数字，标准仪器的系统误差应小于受检仪器的1/10-1/20；标准仪器的随机误差极限应小于受检仪器随机误差极限的1/3

$$\varepsilon_y = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i} \varepsilon_i$$

微小误差可略准则

$$\sigma^2(y) = \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \sigma^2(x_i)$$

- 系统误差可略准则
  - 若误差用一位有效数字表述，其取值只能是1到9的一位数码a_n，若该数码处于10^n位，则误差表述为$a_n \times 10^n$，根据舍入规则，由于截尾而产生的最大舍入误差不应超过误差保留数字一个单位的一半，即微小误差可略条件为

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_j} \varepsilon_j \right| \le \frac{1}{2} \times 10^n = \frac{a_n \times 10^n}{2a_n} = \frac{\varepsilon_y}{2a_n}$$

取 $\left| \frac{\partial f}{\partial x_j} \varepsilon_j \right| < \frac{\varepsilon_y}{20}$ 最为保险

工程测量放宽为 $\left| \frac{\partial f}{\partial x_j} \varepsilon_j \right| \le \frac{\varepsilon_y}{10}$

- 随机误差可略准则

$$\sigma_y - \sqrt{\sigma_y^2 - \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \sigma_j \right)^2} \le \frac{1}{2} \times 10^n = \frac{b_n \times 10^n}{2b_n} = \frac{\sigma_y}{2b_n}$$

$$\left| \frac{\frac{\partial f}{\partial x_j} \sigma_j}{\sigma_y} \right| \le \sqrt{\frac{1}{b_n} - \frac{1}{4b_n^2}} = \begin{cases} 0.866 & b_n = 1 \\ \cdot & \\ 0.329 & b_n = 9 \end{cases}$$

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_j} \sigma_j \right| \le \frac{1}{3} \sigma_y \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\sum \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \sigma_j \right)^2} \le \frac{1}{3} \sigma_y$$

$$\varepsilon_y=\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial x_i}\varepsilon_i$$

测量误差分配

$$\sigma^2(y)=\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2\sigma^2(x_i)$$

- 等准确度分配
  - 应用于各分项性质相同（量纲相同），大小相近的情况

$$\varepsilon_j=\frac{\varepsilon_y}{\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial x_i}}\qquad\sigma_j=\frac{\sigma_y}{\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2}}$$

- 等作用分配
  - 对测量总误差的影响是相同的

$$\varepsilon_j=\frac{\varepsilon_y}{m\frac{\partial f}{\partial x_j}}\qquad\sigma_j=\frac{\sigma_y}{\sqrt{m}\left|\frac{\partial f}{\partial x_j}\right|}$$

- 主要误差项分配
  - 微小误差可以舍去，只考虑主项影响

$$|\varepsilon_k|<\frac{|\varepsilon_y|}{\left|\frac{\partial f}{\partial x_k}\right|}\qquad\sigma_k<\frac{\sigma_y}{\left|\frac{\partial f}{\partial x_j}\right|}$$

最佳测量方案

- 令总误差越小越好
  - 方案比较法
  - 求极小值法
- 例：假设电阻、电压、电流测量的相对误差分别为±1%，±2%，±2.5%，问哪种测量方案较好？

$$P = VI : \gamma_P = \gamma_V + \gamma_I = \pm 4.5\%$$

$$P = V^2/R : \gamma_P = 2\gamma_V - \gamma_R = \pm 5\%$$

$$P = I^2 R : \gamma_P = 2\gamma_I + \gamma_R = \pm 6\%$$

4.6 测量数据处理

- 通过测量取得数据后，通常还要对这些数据进行计算、分析、整理、归纳，也就是需要进行数据处理
- 数据处理时建立在误差分析的基础上的
  - 去粗存精、去伪存真

近似公式

公式误差：系统误差

$$y=(x_0+\Delta x)^n \approx x_0^n\left(1+n\frac{\Delta x}{x_0}\right) \qquad \varepsilon_y \approx \frac{1}{2}x_0^n n(n-1)\left(\frac{\Delta x}{x_0}\right)^2 \qquad (\Delta x << x_0)$$

$$Z=\sqrt{R^2+(\omega L)^2} \approx R\left(1+\frac{1}{2}\frac{\omega^2 L^2}{R^2}\right) \qquad \varepsilon_Z \approx -\frac{1}{8}\left(\frac{\omega L}{R}\right)^4 R$$

$$R=1\Omega \qquad \omega L=0.1\Omega$$

$$Z=1.004987562\Omega$$

$$Z\approx 1.005\Omega$$

$$\varepsilon_Z=-\frac{1}{8}\cdot\left(\frac{0.1}{1}\right)^4\cdot 1=-0.0000125$$

测量中除了测量误差外，还有数据截尾而产生的舍入误差

有效数字

多写夸大准确度，少写则附加误差

- 测量中不可避免地存在误差，并且仪器的分辨力有限，测量数据不可能完全正确，数据只能是一个近似值
- 当我们用一个数表示一个量时，通常规定误差不得超过末位单位数字的一半
  - 3.1416:五位有效数字，极限误差≤0.00005
  - 8700:四位有效数字，极限误差≤0.5
  - 87×10^2:两位有效数字，极限误差$\leq0.5\times10^2$
  - 87.0×10^2:三位有效数字，极限误差$\leq0.05\times10^2$
  - 0.087:两位有效数字，极限误差≤0.0005

舍入规则

- 四舍五入
  - 以保留数字的末位为单位，后面的数字大于0.5，末位进1；小于0.5，末位不变
  - 恰好等于0.5?
    - 末位奇数加1，偶数不变
- 例：保留到小数点后一位
  - 12.34;12.36;12.35;12.45
    - 12.34 12.3
    - 12.36 12.4
    - 12.35 12.4
    - 12.45 12.4

- 例：用一台0.5级的电压表100V量程测量电压，电压表示值85.35V，确定有效位数，并记录下来

$$\Delta V_m = \pm 0.5\% \times 100V = \pm 0.5V$$

报告值：$85V$

记录值：$85.4V$

有效数字的运算规则

- 保留的位数原则上取决于精度最差的那一项
  - 加法：以最少位数为准，计算时精度高的可多取一位计算后舍去
  - 减法：当两数相差很大时，同加法。当两数相近时，减法将会造成很大的相对误差，应尽量避免导致两数相减的测量方法
  - 乘除法：以最少位数为准
    - 为了精度，有时也多保留一位
  - 乘方开方：比原数多保留一位有效数字

$$10.2838+15.03+8.69547=34.00927\approx 34.01$$
$$\approx 10.284+15.03+8.695=34.009\approx 34.01$$

$$517.43\times 0.28\div 4.08=35.5099...\approx 36$$
$$\approx 52\times 10^1\times 0.28\div 4.1=35.5121...\approx 36$$
$$\approx 517\times 0.28\div 4.08=35.4803...\approx 35.5$$

$$27.8^2\approx 772.8$$
$$115^2\approx 1.322\times 10^4$$
$$\sqrt{9.4}\approx 3.07$$
$$\sqrt{265}\approx 16.28$$

等精度测量结果处理

- 制表
- 求均值
- 求残差
- 求标准偏差估计
- 舍弃粗大误差
- 判断有无系统误差，修正、重测
- 求出最佳估计
- 列出结果

$$x = 205.21 \pm 0.21$$

例

205.30
204.94
205.63
205.24
~~206.65~~ $\boxed{n > 10}$
204.97
205.36
205.16
205.71
204.70
204.86
205.35
205.21
205.19
205.21
205.32

$$\bar{x} = \frac{1}{16}(205.30 + \ldots + 205.32) = 205.30$$

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{16-1}\sum_{i=1}^{16}(x_i - \bar{x})^2} = 0.4434$$

$$[\bar{x} - 3\hat{\sigma}, \bar{x} + 3\hat{\sigma}] = [203.97, 206.63]$$

$$\bar{x} = \frac{1}{15}(205.30 + \ldots + 205.32) = 205.21$$

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{15-1}\sum_{i=1}^{15}(x_i - \bar{x})^2} = 0.27$$

$$[\bar{x} - 3\hat{\sigma}, \bar{x} + 3\hat{\sigma}] = [204.40, 206.02]$$

判断后认为无变值系差

$$x = \bar{x} \pm 3\frac{\hat{\sigma}_x}{\sqrt{15}} = 205.21 \pm 0.21$$

注明剔除一个数据和剔除原因

最小二乘原理

- 在精密测量中，特别是在检定标准量具时，为了提高测量精密度，加快比对速度，减小标准器的老化与磨损，常采用组合测量法，对组合测量数据的处理，通常采用最小二乘法
  - 为了取得真值的最佳估计值，应使各测量值的残差的平方之和最小：最小二乘原理

$$\tilde{x} = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad \sum_{i=1}^{n} d_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \tilde{x})^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2n\bar{x}\tilde{x} + n\tilde{x}^2 \qquad \tilde{x} = \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$y = a_0 + a_1 x_1 + \ldots + a_m x_m$$

等精度线性组合测量

- 有m个待定的未知量需要测量；实际测量的是它们的线性组合y，改变组合系数a_i一次，测量一次，共进行n次等精度无误差独立测量，得到n个测量结果y_j，j=1,2,...,n

$$\begin{bmatrix}\delta_1\\ \delta_2\\ \cdot\\ \delta_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}y_1 - a_{10}\\ y_2 - a_{20}\\ \cdot\\ y_n - a_{n0}\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdot & a_{1m}\\ a_{21} & a_{22} & \cdot & a_{2m}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & a_{nm}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \cdot\\ x_m\end{bmatrix}$$

$$\vec{\delta} = (\vec{y} - \vec{a}_0) - \overline{A}\vec{x}$$

$Q = \sum_{i=1}^{n} \delta_i^2 = \vec{\delta}^T \vec{\delta}$在某个估计$\hat{x}$下达到最小

$$\left.\frac{\partial Q}{\partial \vec{x}}\right|_{\vec{x}=\hat{x}} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\frac{\partial \vec{\delta}^T}{\partial \vec{x}}\vec{\delta}_{\vec{x}=\hat{x}} = 0$$

$\Rightarrow \ \hat{x} = \left(\overline{A}^T \overline{A}\right)^{-1} \overline{A}^T (\vec{y} - \vec{a}_0)$ 参数估计

$\Sigma_x^2 = E\left((\hat{x} - E\hat{x})(\hat{x} - E\hat{x})^T\right) = \left(\overline{A}^T \overline{A}\right)^{-1} \sigma_y^2$ 协方差矩阵

$\hat{\sigma}_y^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2}{n - m}$ 测量值的方差

已知y=x，对其进行n次等精度无系统误差独立测量，求x的估计值和方差

$$\overline{A} = \begin{pmatrix}1\\ 1\\ \cdot\\ 1\end{pmatrix}$$

$$\hat{x} = \left(\overline{A}^T \overline{A}\right)^{-1} \overline{A}^T (\vec{y} - \vec{a}_0) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\Sigma_x^2 = \left(\overline{A}^T \overline{A}\right)^{-1} \sigma_y^2 = \frac{\sigma_y^2}{n} = \frac{\sigma_x^2}{n}$$

方案 1	方案 2	方案 3
X_1-N=y_1	X_1-N=y_1	X_1-N=y_1
X_1-N=y_2	X_1-N=y_2	X_2-N=y_2
X_2-N=y_3	X_2-X_1=y_3	X_3-N=y_3
X_2-N=y_4	X_2-X_1=y_4	X_2-X_1=y_4
X_3-N=y_5	X_3-X_2=y_5	X_3-X_2=y_5
X_3-N=y_6	X_3-X_2=y_6	X_3-X_1=y_6

$$\hat{x} = \left(\overline{A}^T\overline{A}\right)^{-1}\overline{A}^T\left(\vec{y}-\vec{a}_0\right)$$

$$\overline{\Sigma}_x^{\ 2} = \left(\overline{A}^T\overline{A}\right)^{-1}\sigma_y^2$$

例

- 今有三个参量待求的被检测量X_1,X_2,X_3，和一个数值已知的标准量N。现在为了确定未知参量的估计值，可采用三种方案测试，请问哪种方案最优？

$$\overline{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \overline{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \overline{A}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\overline{\Sigma}_x^{\ 2} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}\sigma_y^2 \qquad \overline{\Sigma}_x^{\ 2} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 1 & 1 \\ 0.5 & 1 & 1.5 \end{bmatrix}\sigma_y^2 \qquad \overline{\Sigma}_x^{\ 2} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.25 & 0.25 \\ 0.25 & 0.5 & 0.25 \\ 0.25 & 0.25 & 0.5 \end{bmatrix}\sigma_y^2$$

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$$
$$= f(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{m0}) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1 - x_{10}) + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(x_m - x_{m0}) + \ldots$$
$$\approx a_0 + a_1\theta_1 + \ldots + a_m\theta_m$$

等精度非线性组合测量

- 例：今对两个电容C_1和C_2进行等精度无系统误差独立测量，测得如下数据：测C_1=0.2071uF，测C_2=0.2056uF，测并联电容为0.4111uF，测串联电容为0.1035uF，求两电容的估计值

设电容的近似值为0.2070μF和0.2060μF，则

$$\begin{array}{ll} f_{10} = 0.2070 & 0.0001 \\ f_{20} = 0.2060 & -0.0004 \\ f_{30} = 0.4130 & -0.0019 \\ f_{40} = 0.10325 & -0.00025 \end{array}$$

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0.2488 & 0.2512 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\theta} = \left(\overline{A}^T \overline{A}\right)^{-1} \overline{A}^T (\vec{y} - \vec{a}_0) = \begin{bmatrix} -0.000387 \\ -0.000885 \end{bmatrix}$$

$$\hat{C} = \begin{bmatrix} 0.2070 - 0.000387 \\ 0.2060 - 0.000885 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.206613 \\ 0.205115 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2066 \\ 0.2051 \end{bmatrix}$$

- 对于非等精度的组合测量，其残差平方之和的权重不同，由最小二乘原理，可得

$$Q=\sum_{i=1}^{n} w_i\left(y_i-\hat{y}\right)^2=\min \qquad \hat{x}=\left(\bar{A}^T \vec{w} \bar{A}\right)^{-1} \bar{A}^T \vec{w}\left(\bar{y}-\vec{a}_0\right) \qquad \bar{\Sigma}_x{}^2=\left(\bar{A}^T \vec{w} \bar{A}\right)^{-1} \sigma_y^2$$

非等精度测量

$$\hat{\sigma}_y^2=\frac{\sum_{i=1}^{n} w_i\left(y_i-\hat{y}_i\right)^2}{n-m}$$

- 在高精度测量中，为了得到更精密的结果，往往在不同条件下，应用不同的仪器，采用不同的测试方法，由不同的测试人员进行不同次数的分组测量，那么各组测量的精度将不再相同
  - 各组平均值X_i和σ_i已知，如何获得总体最佳估值？
- 假设平均值服从正态分布，用最大似然法可以得到最佳估计值为

$$\hat{X}=\frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{\sigma_i^2}}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma_i^2}} \qquad w_1 : w_2 : \ldots : w_n=\frac{1}{\sigma_1^2} : \frac{1}{\sigma_2^2} : \ldots : \frac{1}{\sigma_n^2}\left(=\frac{n_1}{\sigma^2} : \frac{n_2}{\sigma^2} : \ldots : \frac{n_n}{\sigma^2}\right)$$

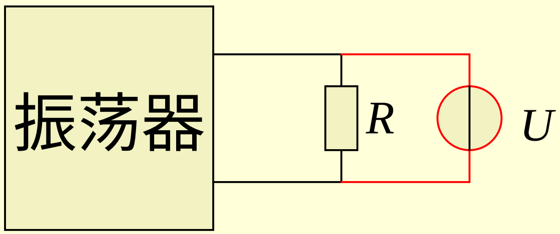
- 权重需要综合评述：测量方法是否完善？系统误差消除情况？仪器工作状况？环境因素？最优的测量权重最大，最差的测量可以剔除

直线拟合 $Y = A + BX$

- 如果测量序列具有直线特性，最小二乘拟合要求各个数据点与拟合直线的偏差平方和最小

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \left(A + Bx_i\right)\right)^2 : \min_{A,B} \varphi$$

$$\frac{d\varphi}{dA} = 0 \qquad \frac{d\varphi}{dB} = 0 \quad \Rightarrow \quad A = \overline{y} - B\overline{x} \qquad B = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)\left(y_i - \overline{y}\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2}$$



练习题

- 某被测电压约为95伏，现用0.5级量程为300伏和1.0级量程为100伏的电压表测试，求其示值相对误差。
- 有两个电阻R_1和R_2，R_1>>R_2，其误差分别为ΔR_1和ΔR_2，它们并联和串联时的误差由哪个电阻主导？
- 图示为一个测量振荡器功率输出的电路示意图。方法是用标准电阻R作为负载，并用一电压表测量其两端的电压U，然后用U^2/R计算获得振荡器的功率输出。已知标准电阻R=100.03±0.02Ω，电压表内阻为10000Ω，电压表测试结果为9.49±0.02V，试求振荡器功率的测量结果，其中系统误差和随机误差各多大？