教学单元10.2

欧拉公式和平面图的判断

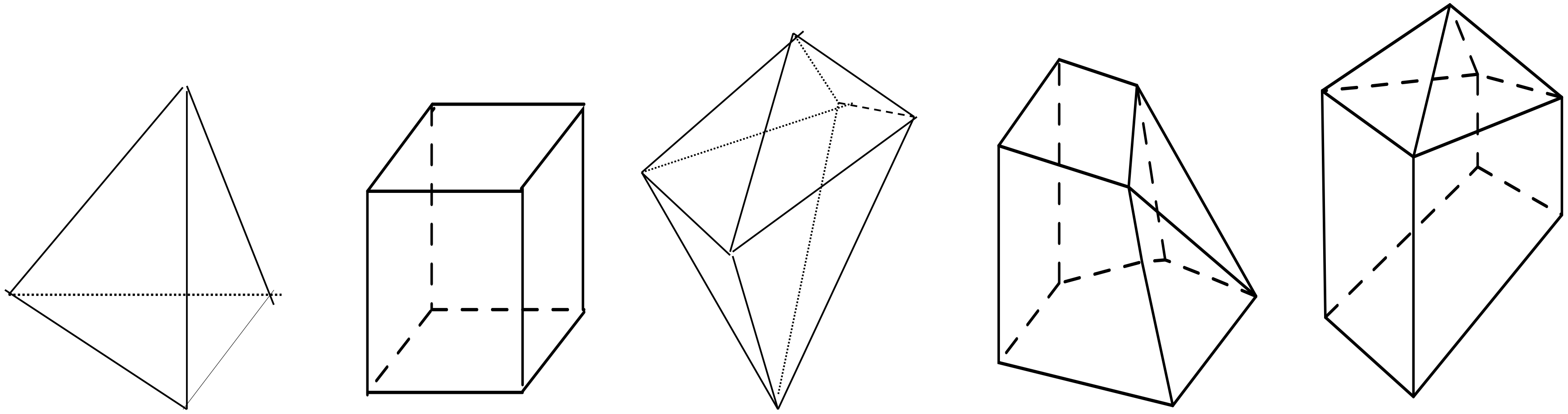
本节内容提要

- 欧拉公式

  （平面图的必要条件）

- 库拉图斯基定理

  （平面图的充要条件）



(1) (2) (3) (4) (5)

图形编号	顶点数V	面数 F	棱数 E
(1)	4	4	6
(2)	8	6	12
(3)	6	8	12
(4)	9	8	15
(5)	9	9	16

$$V + F - E = 2$$

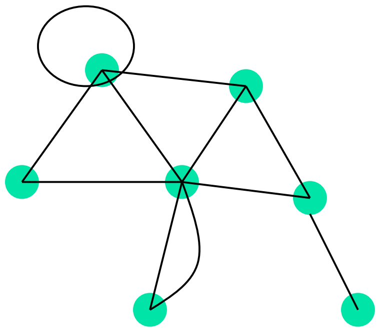
欧拉公式

欧拉公式：设 G 是连通平面图，则

$$n - m + r = 2$$

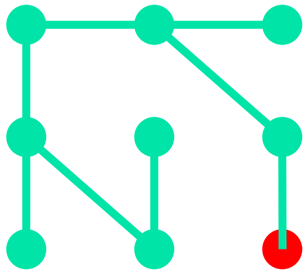
其中 r 是 G 的面数

$$n = 7, m = 11, r = 6:\ 7 - 11 + 6 = 2$$

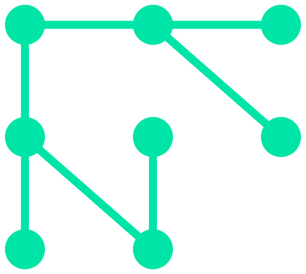


欧拉公式的证明

树



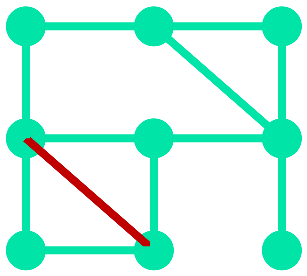
删树叶



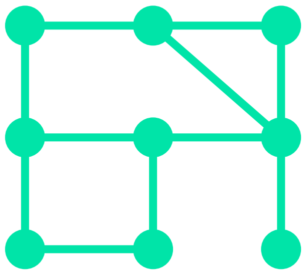
$n = 9, m = 8, r = 1$

$n = 8, m = 7, r = 1$

含圈图



删圈边



$n = 9, m = 12, r = 5$

$n = 9, m = 11, r = 4$

欧拉公式的证明

对边数 m 做归纳法

$m=0, G$ 为平凡图，结论为真

设 $m=k(k\geq 1)$ 时成立，当 $m=k+1$：

（1）若 G 是树，设 v 为树叶，令 $G'=G-v$, 则 G' 仍然是连通图，且 G' 的边数 $m'=m-1=k$

设 n', m', r' 分别为 G' 的顶点数、边数和面数

由归纳假设可知 $n'-m'+r'=2$

而 $n'=n-1, r'=r$, 于是

$$n-m+r=(n'+1)-(m'+1)+r'=n'-m'+r'=2$$

欧拉公式的证明

（2）若 G 不是树，则 G 中含圈

设边 e 在 G 中某个圈上，令 $G' = G - e$

则 G' 仍连通且 $m' = m - 1 = k$

由归纳假设有：$n' - m' + r' = 2$

而 $n' = n,\ r' = r - 1$, 于是

$$n - m + r = n' - (m' + 1) + (r' + 1) = n' - m' + r' = 2$$

欧拉公式(推广形式)

欧拉公式：设 G 是平面图，则

$$n - m + r = 1 + p$$

其中 r 是 G 的面数，p 是 G 的连通分支数

欧拉公式(推广形式)的证明

$$n_t - m_t + r_t = 2, t = 1, 2, \dots, p$$

$$n = \sum_{i=1}^{p} n_i \quad m = \sum_{i=1}^{p} m_i \quad r = \sum_{i=1}^{p} r_i - p + 1$$

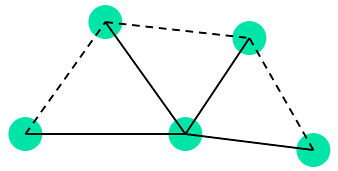
$$2p = \sum_{i=1}^{p} (n_i - m_i + r_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{p} n_i - \sum_{i=1}^{p} m_i + \sum_{i=1}^{p} r_i$$

$$= n - m + r + p - 1 \Rightarrow n - m + r = p + 1$$

欧拉公式(推广形式)的证明

(破圈法)



任选一个回路，删除回路上1边，$m' = m - 1$

这边分隔的2个面合并，$r' = r - 1$

所以 $n - m + r = n - m' + r'$

到最后无回路时是森林，$m'' = n - p, r'' = 1$

即 $n - m + r = n - m'' + r'' = 1 + p$

定理11.8

设 G 是连通平面图，其各面次数至少是 $\ell(\ell \geq 3)$

则 $m \leq (n-2)\frac{\ell}{\ell-2}$

$$r = 2 + m - n$$

$$2m = \sum_{i=1}^{r} deg(R_i) \geq \ell \bullet r = \ell \bullet (2 + m - n)$$

所以 $m \leq (n-2)\frac{\ell}{\ell-2}$

定理11.9

设　平面图 G 有 p 个连通分支

G 的各面的次数至少是 $\ell\,(\ell \geq 3)$

则　$m \leq (n-p-1)\frac{\ell}{\ell-2}$

推论：K_5 和 $K_{3,3}$ 都不是平面图

(反证) 假设 K_5 和 $K_{3,3}$ 都是平面图

(1) K_5 是简单图，所以 $\ell = 3$

$$10 = m \leq (n-2)\frac{\ell}{\ell-2} = (5-2)\frac{3}{3-2} = 9,\ \text{矛盾}$$

(2) $K_{3,3}$ 是偶图，无奇圈，所以 $\ell = 4$

$$9 = m \leq (n-2)\frac{\ell}{\ell-2} = (6-2)\frac{4}{4-2} = 8,\ \text{矛盾}$$

定理11.10：设 $n(\geq 3)$阶简单平面图 G 有 m 条边，则 $m \leq 3n-6$

G 是简单图 $\Longrightarrow \ell \geq 3$

$$m \leq (n-p-1)\frac{\ell}{\ell-2} \leq (n-2)3 = 3n-6$$

其中 $p \geq 1$，$\frac{\ell}{\ell-2}$ 在 $\ell = 3$ 时达到最大值

定理11.11：设 $n(\geq 3)$ 阶简单极大平面图 G 有 m 条边，则 $m = 3n - 6$

G 是极大平面图 $\Longrightarrow 2m = 3r$

G 一定连通 $\Longrightarrow r = 2 + m - n$

定理 11.12：设 G 是简单平面图，则 $\delta(G) \leq 5$

（反证）

设 $n \geq 6$ 并且 $\delta \geq 6$

则 $2m = \sum d(v) \geq n\delta \geq 6n \Rightarrow m \geq 3n$

与 $m \leq 3n - 6$ 矛盾

习题

设 G 是$n(\geq 4)$阶连通简单平面图， G 中不含长度为3的回路，则 $\delta(G) \leq 3$

若

$\delta(G) \geq 4$

握手定理： $2m = \Sigma d(v) \geq 4n$

面的握手定理： $2m = \Sigma deg(R) \geq 4r$

$4m \geq 4n + 4r$，与$n - m + r = 2$矛盾

简单平面二部图的最小度不超过3

习题

设 G 是n阶m条边的简单连通平面图，

$n=7, m=15$时，G 是极大平面图

极大平面图 $\Leftrightarrow \forall R_i, deg(R_i)=3$

简单图$\Longrightarrow deg(R_i)\geq 3$

$n=7, m=15$，代入$n-m+r=2 \Longrightarrow r=10$

面的握手定理：$2m=30=\Sigma deg(R_i), r=10$

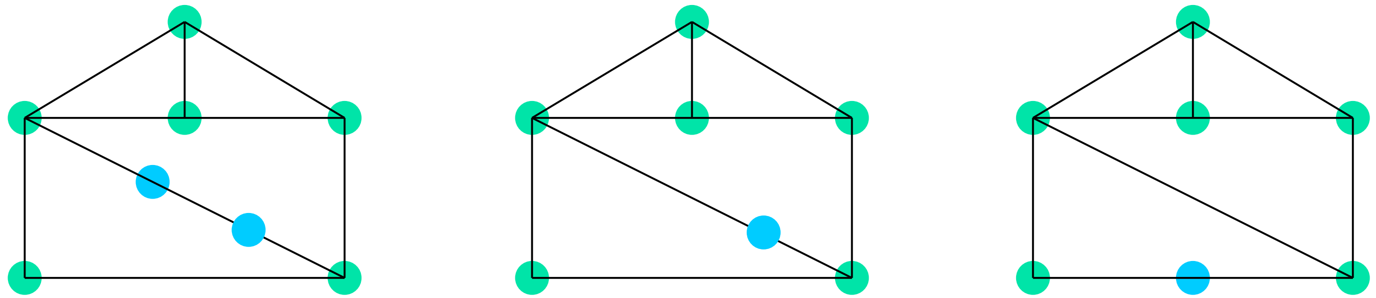
$\Longrightarrow deg(R_i)=3$

同胚

- 插入 2 度顶点：把(u, v)变成$(u, w), (w, v)$

- 删除 2 度顶点：$deg(w) - 2$

把$(u, w), (w, v)$ 变成(u, v)



同胚：反复插入或删除 2 度顶点后同构

Kuratowski定理

定理11.13　图 G 是平面图

$\Longleftrightarrow$

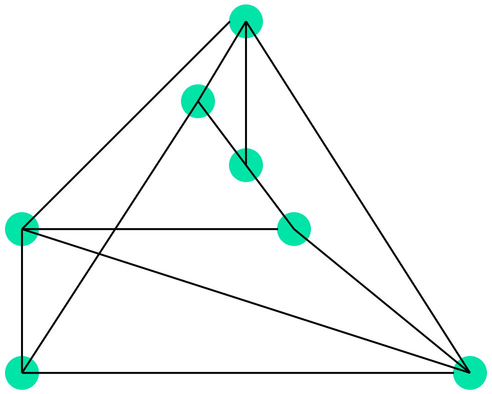
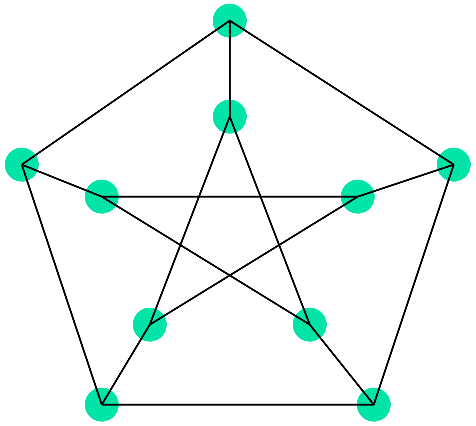
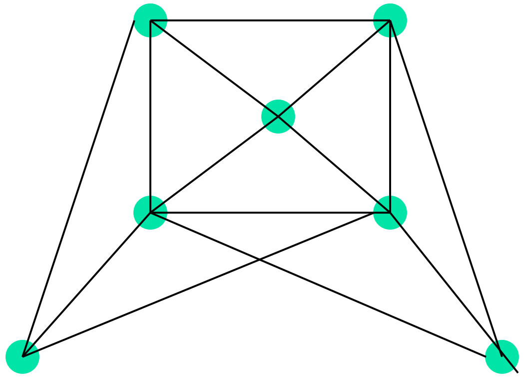
G 没有与 K_5 或 $K_{3,3}$ 同胚的子图

定理11.14　图 G 是平面图

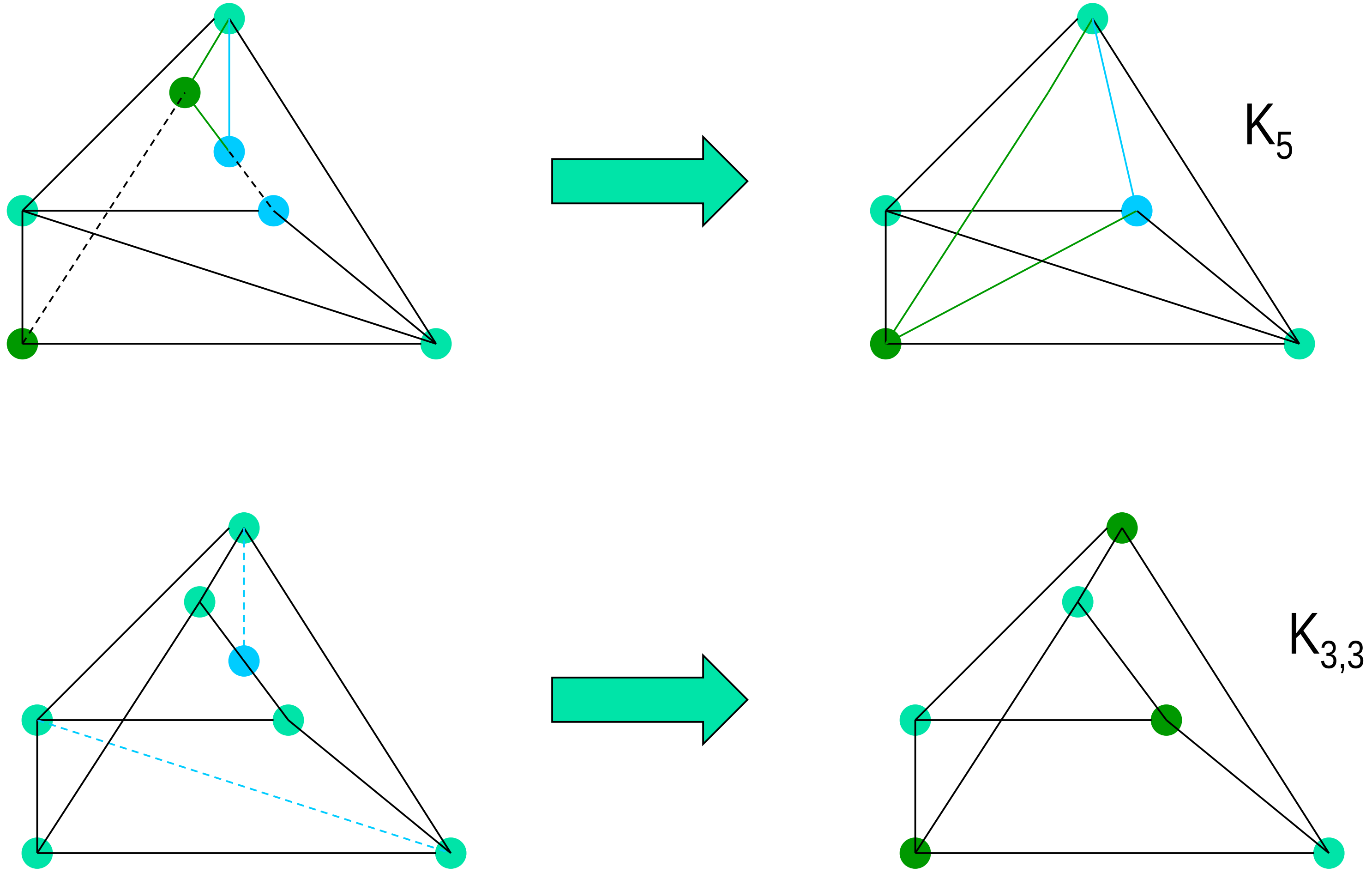
$\Longleftrightarrow$

G 没有可以边收缩到 K_5 或 $K_{3,3}$ 的子图

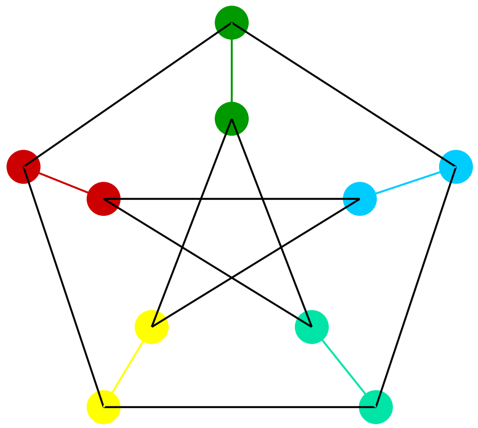
例11.3

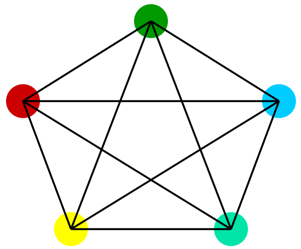




例11.3(1)



例11.3(2)

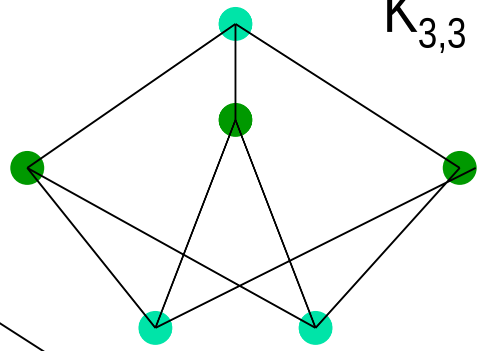


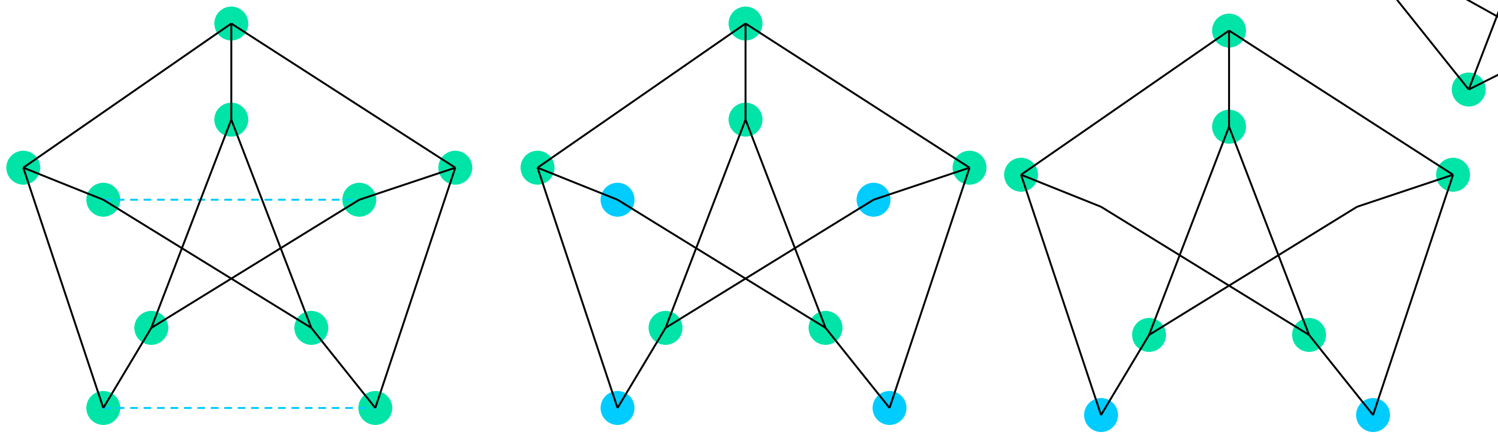


K_5

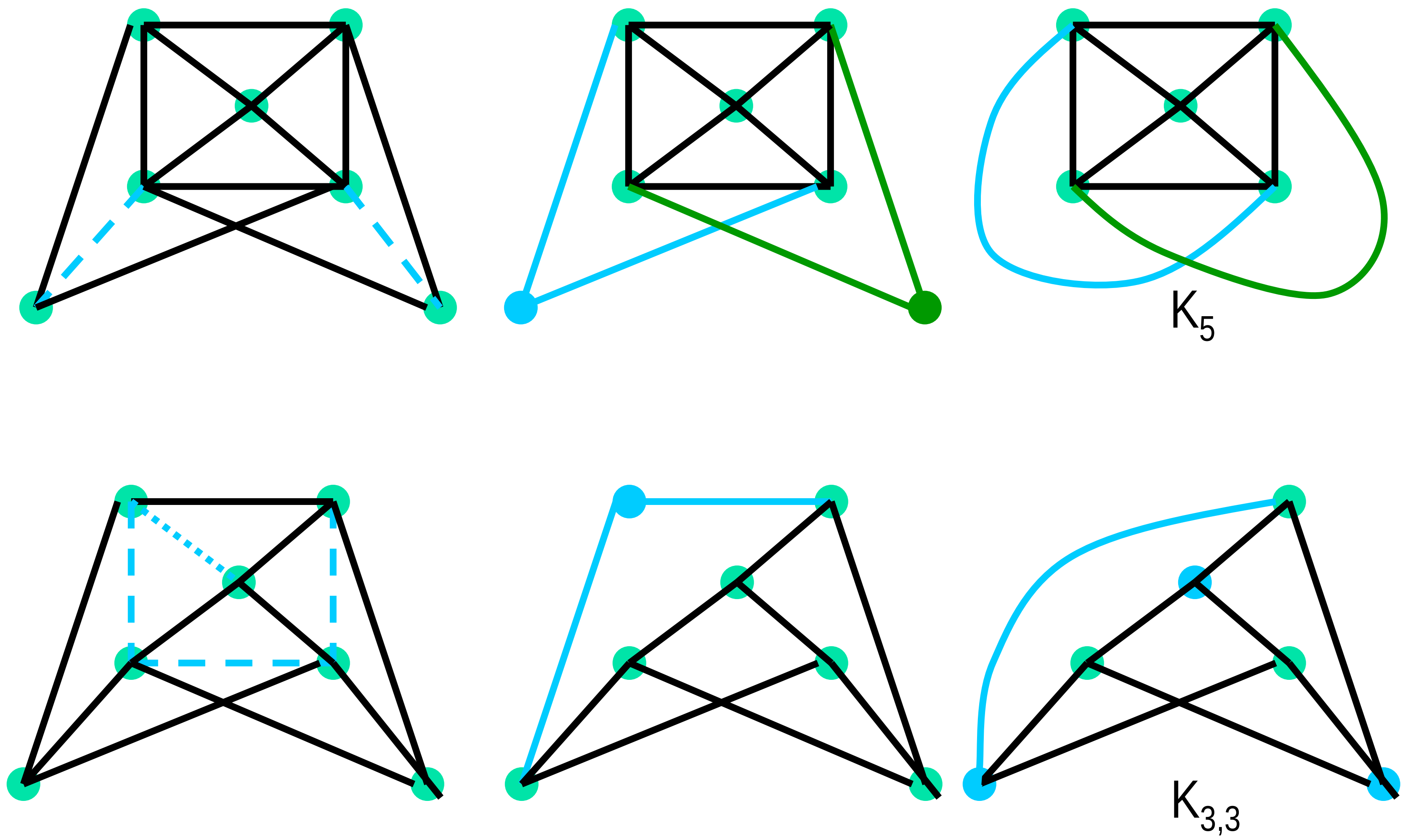
边收缩比同
胚条件强

$K_{3,3}$





例11.3(3)

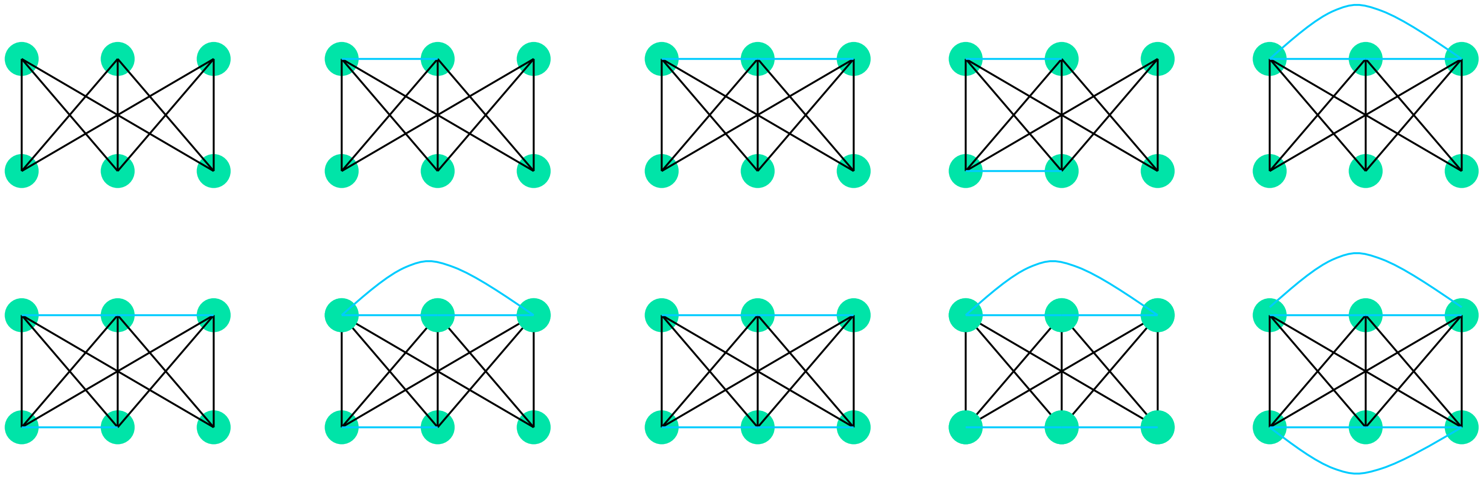


例11.6

K_6 的含 $K_{3,3}$ 的非同构子图有哪些?

解：K_6 有 15 条边，$K_{3,3}$ 有 9 条边

分别给 $K_{3,3}$ 加 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 条边：共 10 种



小结

- ☞ 欧拉公式
- ☞ Kuratowski 定理


帮视频
拉松
ATHON
原来她在等待参赛男友
想给他一个惊喜