教学单元6.2

通路与回路

本节内容提要

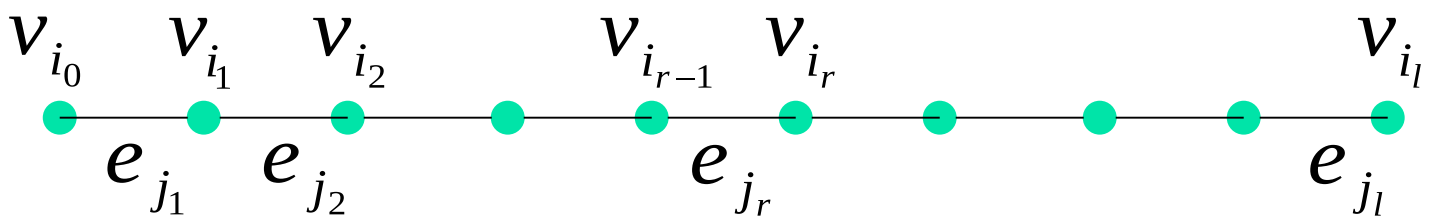
- 通路
  - 简单通路
  - 初级通路
- 回路
  - 简单回路
  - 初级回路
- 扩大路径法

通路(walk)

通路： 顶点与边的交替序列

$$\Gamma = v_{i_0} e_{j_1} v_{i_1} e_{j_2} \dots e_{j_l} v_{i_l}$$

$$e_{j_r} = (v_{i_{r-1}}, v_{i_r}), r = 1,2,\dots,l$$

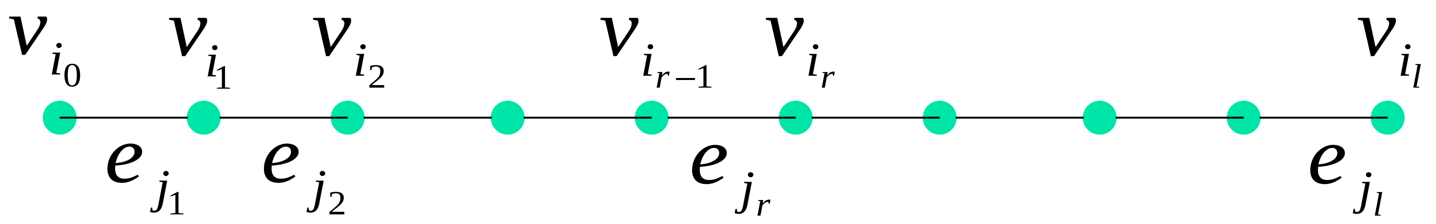


起点　终点　通路长度

v_{i_0}称为Γ的起点或始点

v_{i_l}称为Γ的终点

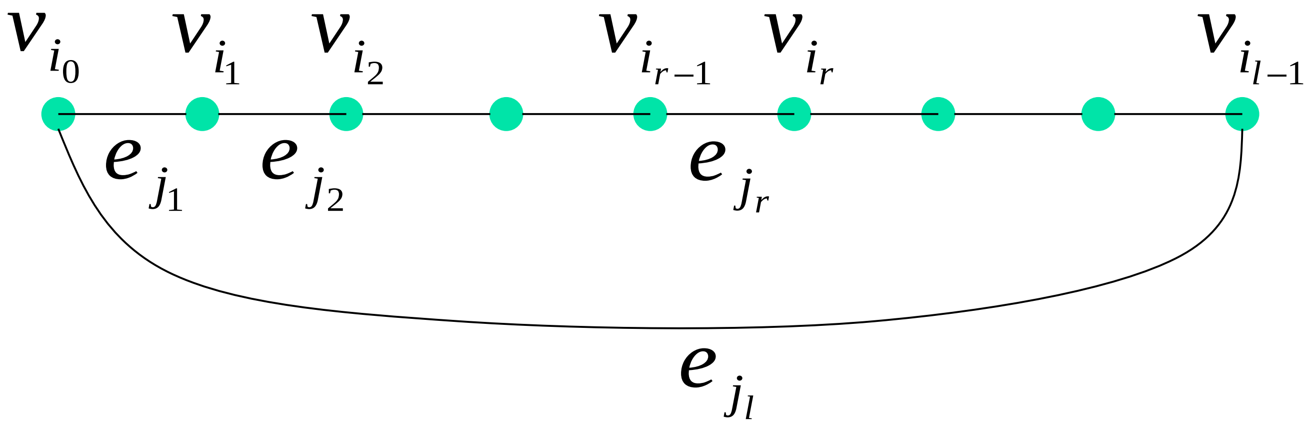
Γ的通路长度$|\Gamma| = l$



回路(closed walk)

若$v_{i_0} = v_{i_l}$, 称Γ为回路

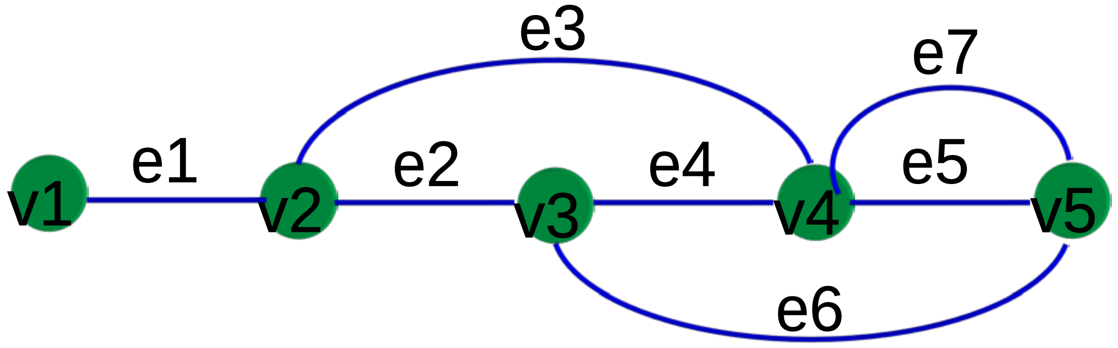
$$\Gamma = v_{i_0} e_{j_1} v_{i_1} e_{j_2} \dots e_{j_l} v_{i_0}$$



简单(复杂、初级)通(回)路

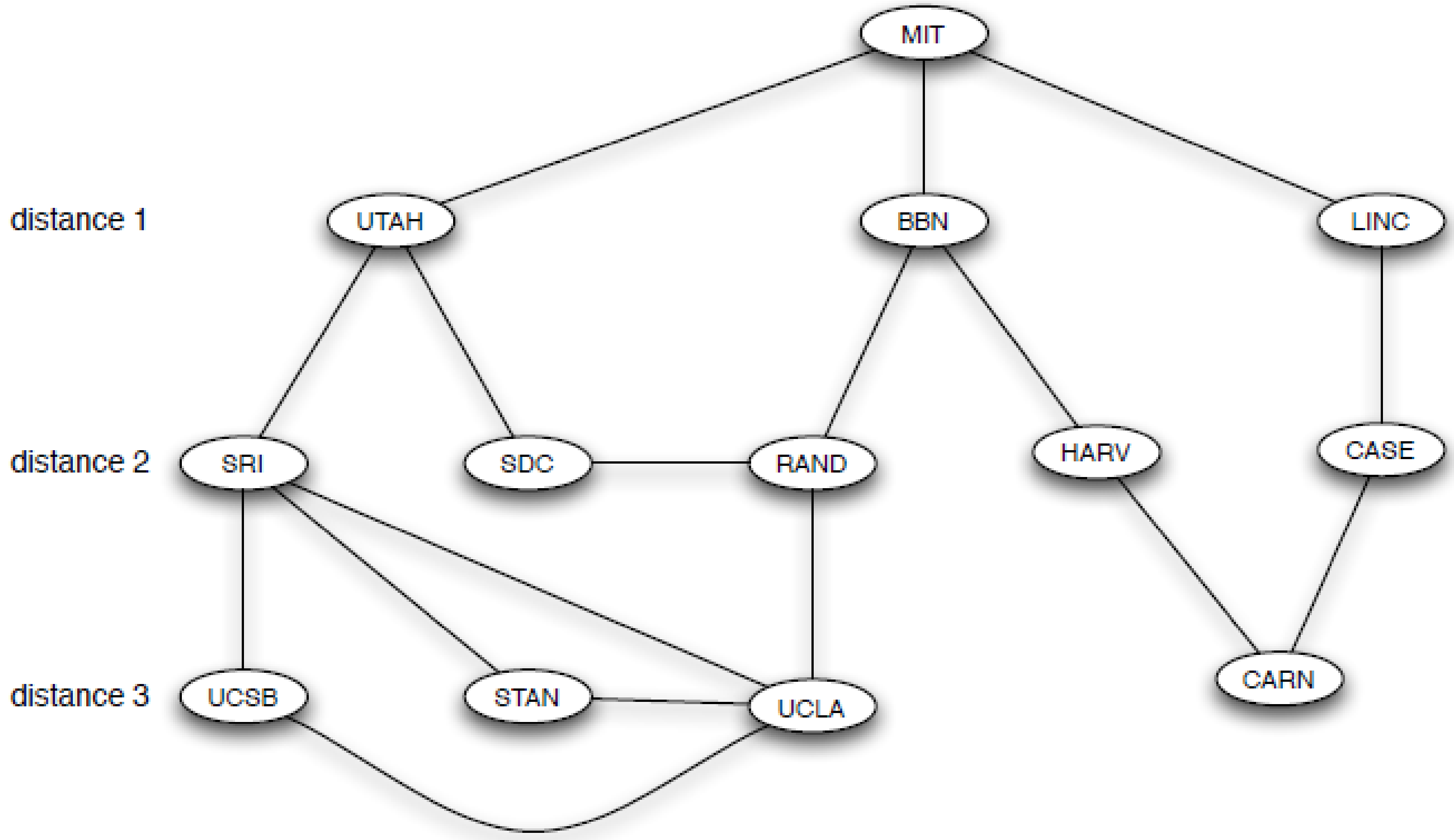
- 简单通路：没有重复边的通路
- 简单回路：没有重复边的回路
- 复杂通路：有重复边的通路
- 复杂回路：有重复边的回路
- 初级通路(路径)：没有重复顶点的通路
- 初级回路(圈)：没有重复顶点的回路

条条大路通罗马



- **简单通路**：v2 e3 v4 e5 v5 e6 v3 e4 v4
- **简单回路**：v5 e5 v4 e3 v2 e2 v3 e4 v4 e7 v5
- **复杂通路**：v1 e1 v2 e3 v4 e5 v5 e6 v3 e4 v4 e5 v5
- **复杂回路**： v3 e4 v4 e5 v5 e6 v3 e4 v4 e3 v2 e2 v3
- **初级通路(路径)**： v1 e1 v2 e3 v4 e5 v5
- **初级回路(圈)**： v5 e5 v4 e3 v2 e2 v3 e6 v5

圈可以增加网络的鲁棒性(ARPANET)



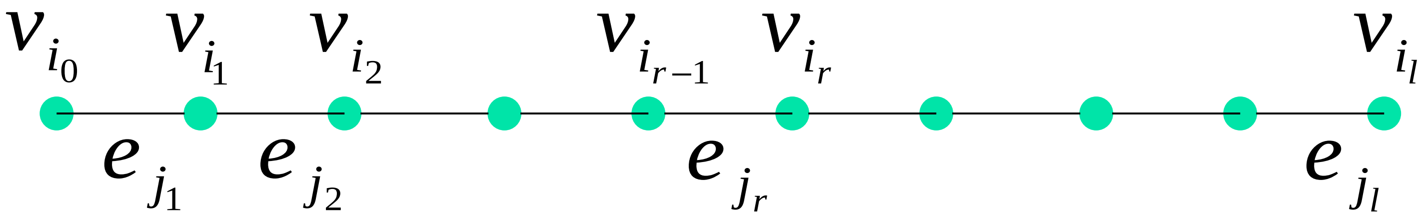
通(回)路的表示

可以只用边的序列来表示通(回)路

$$e_{j_1}e_{j_2}\dots e_{j_l}$$

简单图可以只用顶点的序列来表示通(回)路

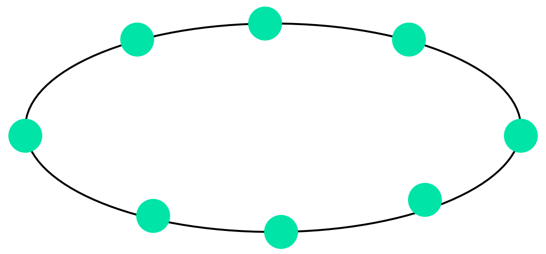
$$\Gamma = v_{i_0}v_{i_1}\dots e_{i_{l-1}}v_{i_l}$$



圈的表示

画出长度为l的圈

- 如果是非标定的，则在同构意义下是唯一的
- 如果是标定的(指定起点、终点)，则是 l 个不同的圈



周长

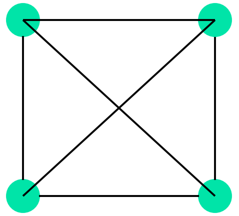
G是含圈的无向简单图

G的周长$c(G)$ = 最长圈的长度

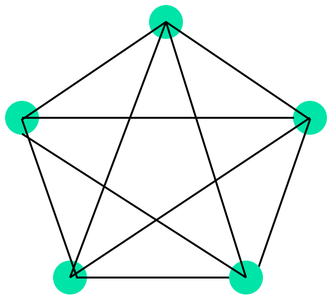
周长举例

$$c(K_n) = n(n \geq 3)$$

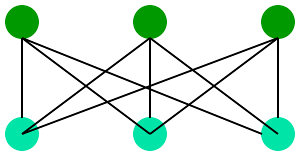
$$c(K_{n,n}) = 2n$$



K_4



K_5



$K_{3,3}$

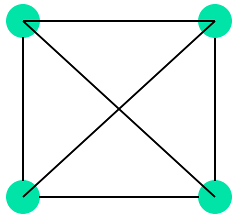
围长

G是含圈的无向简单图

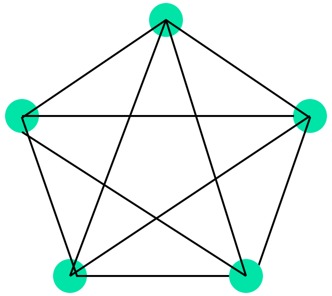
G的围长$g(G)$ = 最短圈的长度

围长举例

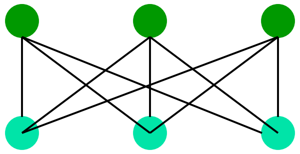
$$g(K_n) = 3 (n \geq 3) \qquad g(K_{n,n}) = 4\ (n \geq 2)$$



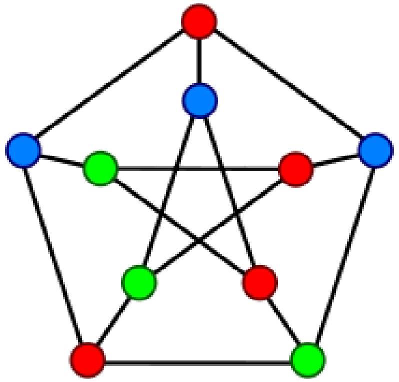
K_4



K_5



$K_{3,3}$



定理7.6

定理7.6 在n阶(有向或无向)图G中

若从不同顶点v_i到v_j有通路

则从v_i到v_j有长度小于等于$n-1$的通路

定理7.6证明

设 $\Gamma = v_{i_0}e_{j_1}v_{i_1}e_{j_2}\dots e_{j_l}v_{i_l}, v_{i_0} = v_i, v_{i_l} = v_j$

若 $l > n-1$，则 Γ 上顶点数 $l+1 > n$

必存在 $0 \le s \le k \le l$，使得 $v_{i_s} = v_{i_k}$

于是 Γ 上有从 v_{i_s} 到自身的回路 C_{sk}

在Γ上删除 C_{sk} 的所有边和除 v_{i_s} 外的所有顶点,得

$$\Gamma' = v_{i_0}e_{j_1}v_{i_1}e_{j_2}\dots e_{j_l}v_{i_s}e_{j_{k+1}}v_{i_{k+1}}\dots e_{j_l}v_{i_l}$$

则 $|\Gamma'| < |\Gamma|$，重复进行有限多步为止

定理7.6推论

推论 在n阶图G中

若从不同顶点v_i到v_j有通路

则从v_i到v_j有长度小于等于$n-1$的路径

(初级通路)

定理7.7

定理7.7 在n阶图G中

若有从顶点v_i到自身的回路

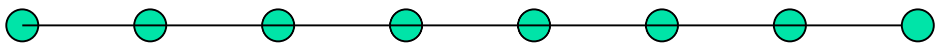
则有从v_i到自身长度小于等于n的回路

推论 在n阶图G中

若有从顶点v_i到自身的简单回路

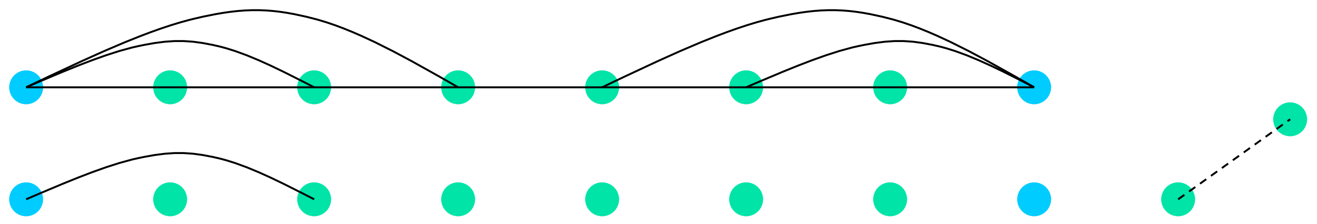
则有从v_i到自身长度小于等于n的圈

(初级回路)



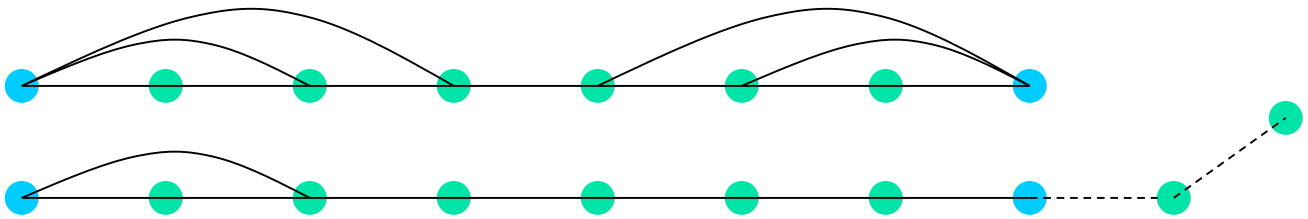
极大路径

- 在无向简单图中，路径的两个端点不与路径本身以外的顶点相邻，这样的路径称为极大路径
- 在有向图中，路径起点的前驱，终点的后继，都在路径本身上



扩大路径法

- 任何一条路径，只要不是极大路径，则至少有一个端点与路径本身以外的顶点相邻， 则路径还可以扩大， 直到变成极大路径为止



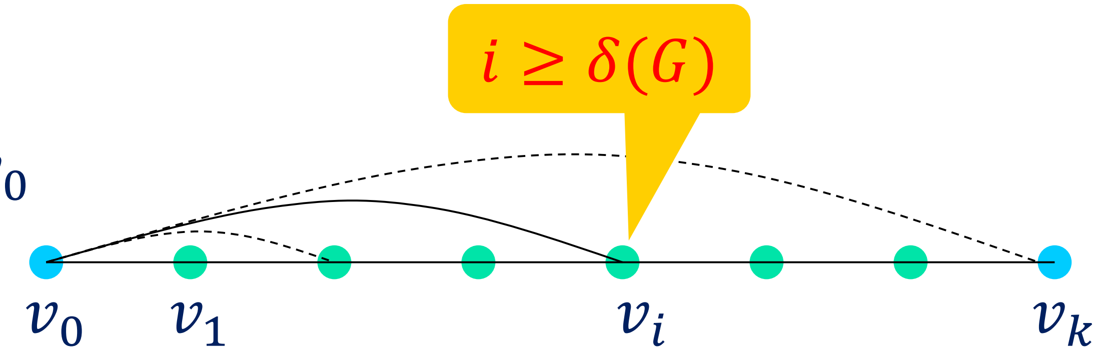
例7.6：极大路径法的应用例子

设 G是$n(n \geq 3)$阶无向简单图，$\delta(G) \geq 2$

证明 G中有长度$\geq \delta(G)+1$的圈

得到圈

$v_0 v_1 \dots v_i v_0$



若 v_0不与极大路径之外的点相邻

则 必与极大路径上的点相邻

例7.6

$\forall v_0 \in V(G), \delta(G) \geq 2 \Longrightarrow \exists v_1 \in N_G(v_0)$

对 $\Gamma_0 = v_0 v_1$采取扩大路径法

得到极大路径 $\Gamma_0 = v_0 v_1 \ldots v_k$

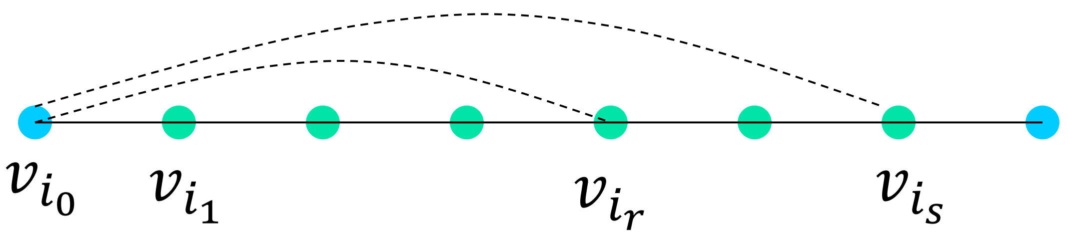
$d(v_k) \geq \delta(G) \Longrightarrow k \geq \delta(G)$

$d(v_0) \geq \delta(G) \Longrightarrow \exists v_i \in N_G(v_0), \delta(G) \leq i \leq k$

于是 $v_0 v_1 \ldots v_i v_0$ 是长度 $\geq \delta(G) + 1$的圈

习题15

$\delta(G) \geq 3$, 则各圈长度的最大公约数为1或2



三个圈，长度分别为$r+1, s+1, s-r+2$

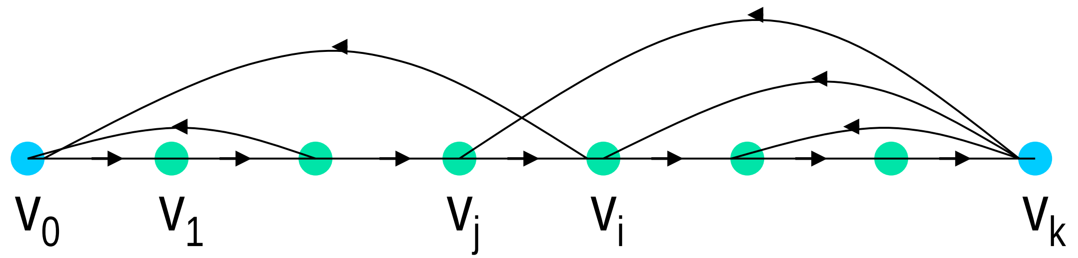
例7.7(有向图的例子)

D是有向简单图

$$\delta(D) \geq 2, \delta^-(D) > 0,\ \delta^+(D) > 0$$

证明D中有长度大于等于

$max\{\delta^-(D), \delta^+(D)\} + 1$的圈



分别考虑v_0, v_k

(1) $d^-(v_0) \geq \delta^-(D) \Longrightarrow \exists v_i \in N_D^-(v_0), \delta^- \leq i \leq k$

于是 $v_0v_1 \dots v_iv_0$ 是长度 $\geq \delta^- + 1$的圈

(2) $d^+(v_k) \geq \delta^+(D) \Longrightarrow \exists v_j \in N_D^+(v_l), 0 \leq j \leq k - \delta^+$

于是 $v_jv_{j+1} \dots v_kv_j$ 是长度 $\geq \delta^+ + 1$的圈

较长的就是D中长度$\geq max\{\delta^-, \delta^+\} + 1$的圈

小结

- 通路、简单通路、初级通路
- 回路、简单回路、初级回路
- 扩大路径法