单元1.6

集合恒等式

内容提要

- 集合恒等式
- 半形式化方法
- 推导集合等式和包含式

集合恒等式(①~④)

① 幂等律：$A = A \cup A$,　　$A = A \cap A$

② 交换律：$A \cup B = B \cup A$,　$A \cap B = B \cap A$

③ 结合律：$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

④ 分配律：$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

基本的等值式(⑤~⑥)

⑤ 德•摩根律：

绝对形式： $\sim(A\cup B)=\sim A\cap\sim B$

$\sim(A\cap B)=\sim A\cup\sim B$

相对形式： $E-(A\cup B)=(E-A)\cap(E-B)$

$E-(A\cap B)=(E-A)\cup(E-B)$

⑥ 吸收律： $A\cup(A\cap B)=A$

$A\cap(A\cup B)=A$

基本的等值式(⑦～⑬)

⑦ 零律：$A \cup E = E, \quad A \cap \phi = \phi$

⑧ 同一律：$A \cup \phi = A, \quad A \cap E = A$

⑨ 排中律：$A \cup \sim A = E$

⑩ 矛盾律：$A \cap \sim A = \phi$

⑪ 余补律：$\sim \phi = E, \quad \sim E = \phi$

⑫ 双重否定律：$\sim(\sim A) = A$

⑬ 补交转换律：$A - B = A \cap \sim B$

分配律的证明

对于任意的x

$$x \in A \cup (B \cap C)$$

$$\Leftrightarrow x \in A \vee x \in (B \cap C)$$

$$\Leftrightarrow x \in A \vee (x \in B \wedge x \in C)$$

$$\Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C) \quad (?)$$

$$\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \wedge x \in (A \cup C)$$

$$\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

因而，$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

零律的证明

对于任意的x

$$x \in A \cap \emptyset$$

$$\Leftrightarrow x \in A \wedge x \in \emptyset$$

$$\Leftrightarrow x \in A \wedge 0$$

$$\Leftrightarrow 0 \qquad (?)$$

$$\Leftrightarrow x \in \emptyset$$

因而， $A \cap \emptyset = \emptyset$

排中律的证明

对于任意的x

$$x \in A \cup \sim A$$

$$\Leftrightarrow x \in A \vee x \in \sim A$$

$$\Leftrightarrow x \in A \vee x \notin A$$

$$\Leftrightarrow x \in A \vee \neg x \in A \qquad (?)$$

$$\Leftrightarrow 1$$

$$\Leftrightarrow x \in E$$

因而，$A \cup \sim A = E$

用其他恒等式证明吸收律

$$A \cup (A \cap B) = A$$

$$
\begin{aligned}
& A \cup (A \cap B) & \\
&= (A \cap E) \cup (A \cap B) & \text{同一律} \\
&= A \cap (E \cup B) & \text{分配律} \\
&= A \cap E & \text{零律} \\
&= A & \text{同一律}
\end{aligned}
$$

证明对称差的结合律

$$A \oplus (B \oplus C) = (A \oplus B) \oplus C$$

$$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A) = (A \cap \sim B) \cup (\sim A \cap B)$$

$$A \oplus (B \oplus C) == \big(A \cap \sim (B \oplus C)\big) \cup \big(\sim A \cap (B \oplus C)\big)$$

$$= (A \cap \sim ((B \cap \sim C) \cup (\sim B \cap C))) \cup (\sim A \cap ((B \cap \sim C) \cup (\sim B \cap C)))$$

$$= (A \cap ((\sim B \cup C) \cap (B \cup \sim C))) \cup ((\sim A \cap B \cap \sim C) \cup (\sim A \cap \sim B \cap C))$$

$$= (A \cap ((B \cap \sim B) \cup (\sim B \cap \sim C) \cup (B \cap C) \cup (C \cap \sim C)))$$

$$\cup \big((\sim A \cap B \cap \sim C) \cup (\sim A \cap \sim B \cap C)\big)$$

$$= (A \cap \sim B \cap \sim C) \cup (A \cap B \cap C) \cup (\sim A \cap B \cap \sim C) \cup (\sim A \cap \sim B \cap C)$$

$(A \oplus B) \oplus C = C \oplus (A \oplus B)$,　　对$C \oplus (A \oplus B)$得到同样的结果

思考

是否存在集合A, B, C，使得$A \cap B \neq \emptyset$,

$A \cap C = \emptyset$，并且$(A \cap B) - C = \emptyset$？

下式哪些正确？

$$(A \cup B) - C = (A - C) \cup B$$

$$(A \cap B) - C = (A - C) \cap B$$

$$A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$$

$$A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$$


请挂了的患者立即
到前台护士处激活

将恒等式推广到集族上

设$\{A_\alpha\}_{\alpha\in S}$为集族，$B$为一集合：

分配律：

$$B\cup\left(\bigcap\{A_\alpha\}_{\alpha\in S}\right)=\bigcap_{\alpha\in S}(B\cup A_\alpha)$$

$$B\cap\left(\bigcup\{A_\alpha\}_{\alpha\in S}\right)=\bigcup_{\alpha\in S}(B\cap A_\alpha)$$

将恒等式推广到集族上

德●摩根律：

$$\sim(\bigcup\{A_\alpha\}_{\alpha\in S})=\bigcap_{\alpha\in S}(\sim A_\alpha)$$

$$(\sim\bigcap\{A_\alpha\}_{\alpha\in S})=\bigcup_{\alpha\in S}(\sim A_\alpha)$$

$$B-(\bigcap\{A_\alpha\}_{\alpha\in S})=\bigcap_{\alpha\in S}(B-A_\alpha)$$

$$B-(\bigcup\{A_\alpha\}_{\alpha\in S})=\bigcup_{\alpha\in S}(B-A_\alpha)$$

集族的性质

设 $\mathcal{A},\mathcal{B}$ 为集族

1. 若 $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{B}$, 则 $\bigcup\mathcal{A}\subseteq\bigcup\mathcal{B}$
2. 若 $\mathcal{A}\neq\emptyset$ 且 $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{B}$, 则 $\bigcap\mathcal{B}\subseteq\bigcap\mathcal{A}$
3. 若 $\mathcal{A}\in\mathcal{B}$, 则 $\mathcal{A}\subseteq\bigcup\mathcal{B}$
4. 若 $\mathcal{A}\in\mathcal{B}$,则 $\bigcap\mathcal{B}\subseteq\mathcal{A}$
5. 若 $\mathcal{A}\neq\emptyset$, 则 $\bigcap\mathcal{A}\subseteq\bigcup\mathcal{A}$

$\mathcal{A}=\{\{a\},\{a,b\}\}$

$\mathcal{B}=\{\{\{a\},\{a,b\}\},\{a\}\}$

$\bigcup\mathcal{B}=\{\{a\},\{a,b\},a\}$

集族性质(1) (3)的证明

(1) 对于任意的x

$$x \in \bigcup \mathcal{A}$$

$$\Leftrightarrow \exists A(A \in \mathcal{A} \land x \in A)$$

$$\Rightarrow \exists A(A \in \mathcal{B} \land x \in A) \qquad (\text{已知} \mathcal{A} \subseteq \mathcal{B})$$

$$\Leftrightarrow x \in \bigcup \mathcal{B}$$

所以，$\bigcup \mathcal{A} \subseteq \bigcup \mathcal{B}$

(3) 若 $\mathcal{A} \in \mathcal{B}$, 由广义并集定义可知$\mathcal{A} \subseteq \bigcup \mathcal{B}$

集族性质(2)的证明

(2) 由$\mathcal{A} \neq \emptyset$, 知$\mathcal{B} \neq \emptyset$, 故$\bigcap\mathcal{A}$与$\bigcap\mathcal{B}$均有意义

对于任意的x

$$x \in \bigcap\mathcal{B}$$

$$\Leftrightarrow \forall y(y \in \mathcal{B} \rightarrow x \in y)$$

$$\Rightarrow \forall y(y \in \mathcal{A} \rightarrow x \in y) \qquad (\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B})$$

$$\Leftrightarrow x \in \bigcap\mathcal{A}$$

所以，$\bigcap\mathcal{B} \subseteq \bigcap\mathcal{A}$

集合幂集运算的性质

$$A \subseteq B \Leftrightarrow P(A) \subseteq P(B)$$

$\Rightarrow$

对于任意的x

$x \in P(A)$

$\Leftrightarrow x \subseteq A$

$\Rightarrow x \subseteq B \quad (A \subseteq B)$

$\Leftrightarrow x \in P(B)$

故有 $P(A) \subseteq P(B)$

$\Leftarrow$

对于任意的y

$y \in A$

$\Leftrightarrow \{y\} \in P(A)$

$\Rightarrow \{y\} \in P(B) \quad (P(A) \subseteq P(B))$

$\Leftrightarrow y \in B$

所以 $A \subseteq B$

集合幂集运算的性质

$$P(A-B) \subseteq \big(P(A)-P(B)\big) \cup \{\phi\}$$

对于任意的集合x

若 $x=\phi$，$x \in P(A) \cup P(B)$ 且 $x \in \big(P(A)-P(B)\big) \cup \{\phi\}$

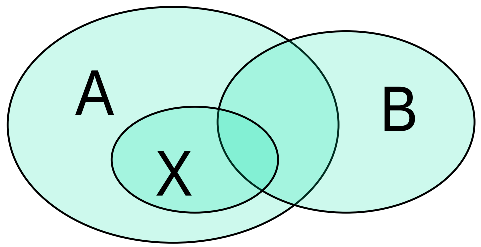
若 $x \neq \phi$，$x \in P(A-B)$

$\Leftrightarrow x \subseteq A-B$

$\Rightarrow x \subseteq A \wedge x \nsubseteq B$

$\Leftrightarrow x \in P(A) \wedge x \notin P(B)$

$\Leftrightarrow x \in \big(P(A)-P(B)\big)$



综上所述，可知 $P(A-B) \subseteq \big(P(A)-P(B)\big) \cup \{\phi\}$

小结

(1) 集合恒等式

13组最基本的集合恒等式

(2) 半形式化方法

推导集合等式和包含式

集合列极限

（1）属于集合列 $\{A_k\}$ 中**无限多个集合**的元素的全体组成的集合就是集合列 $\{A_k\}$ 的上限集，即：

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} A_k = \{x|\text{对任一自然数}j,\ \text{存在}k(k\geq j), x\in A_k\}$$

（2）除去集合列 $\{A_k\}$ 中的**有限多个集合**外，被其余集合均包含的元素的全体组成的集合就是集合列 $\{A_k\}$ 的下限集，即：

$$\underline{\lim_{k\to\infty}} A_k = \{x|\text{存在自然数}j,\ \text{当}k\geq j\text{时}, x\in A_k\}$$

集合列极限

$$\Omega = \{\omega | \omega\text{是革命党}\}$$

$$A_i = \{\omega | \text{参加第}i\text{次起义的革命党成员}\}$$

{参加无数次起义的成员} = {有限次不参加起义的成员} ∪

{无数次参加也无数次不参加起义的成员}

上极限： $$\lim_{k\to\infty} sup A_k = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$$

下极限： $$\lim_{k\to\infty} inf A_k = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$$