公理集合论

集合的朴素定义

康托尔的集合定义(Cantor,1874)：吾人直观或思维之对象，如为相异而确定之物，其总括之全体即谓之集合，其组成此集合之物谓之集合之元素

概括公理(axiom schema of comprehension)：对每一个公式P(x)，存在一个以满足P(x)的所有对象为元素的集合

康托悖论

- 据康托集合理论，任何性质都可以决定一个集合，这样所有的集合又可以组成一个集合，即“所有集合的集合”
- 显然，此集合应该是最大的集合，因此其基数也应是最大的
- 然而其幂集的基数按“康托定理”又必然是更大的，那么“所有集合的集合”就不成其为“所有集合的集合”，这就是“康托悖论”

布拉利－福尔蒂悖论

- 设W为一切序数所组成的集合
- 因为W按自然大小顺序成一良序集，故W有一序数Ω
- 由序数性质，Ω必比W中任一序数都大
- 但由定义，Ω也出现在W中，从而将有Ω>Ω，这是矛盾的

罗素悖论

S由一切不属于自身的集合所组成，S是否属于S？

“我只给所有不给自己刮脸的人刮脸”，他是否给自己刮脸？

存在属于自身的集合：

$X=\{x|x\neq\emptyset\},\{a\}\neq\emptyset,\{a\}\in X,X\neq\emptyset,X\in X$

存在不属于自身的集合：

$\emptyset\notin\emptyset,\{a\}\notin\{a\},\exists x(x\notin x)$

定义：$S=\{x|x\notin x\},S\in S$？

$S\in S\Rightarrow S\notin S$

$S\notin S\Rightarrow S\in S$

ZF系统

外延公理

$$A = B \Leftrightarrow x(x \in A \leftrightarrow x \in B)$$

一个集合完全由它的元素所决定。如果两个集合含有同样的元素，则它们是相等的

空集公理

∅是集合

存在一集合s，它没有元素

ZF系统

无序对公理

a, b是集合 $\Longrightarrow \{a, b\}$是集合

任给两个集合x、y，存在第三个集合z，而w∈z当且仅当w=x或者w=y。又名配对公理，取义可由二个集合生成第三个集合，集合无次序

并集公理

$\mathcal{A}$是集族 $\Longrightarrow \bigcup\mathcal{A}$是集合

$(A \cup B = \bigcup\{A, B\})$

任给一集合x，我们可以把x的元素的元素汇集到一起，组成一个新集合

ZF系统

幂集公理

A是集合 $\Longrightarrow \{x \in A | P(x)\}$是集合

对任意集合x，存在集合y，使z∈y当且仅当对z的所有元素w，w∈x

无穷公理

$$x^+ = x \cup \{x\}$$

$$\exists X\{\emptyset \in X \wedge \forall x(x \in X \rightarrow x^+ \rightarrow X\}$$

存在一集合x，它有无穷多元素

存在一个包含所有自然数的集合

ZF系统

替换公理

f是A上函数 $\Longrightarrow$

$\{f(a) \mid a \in A\}$是集合

任意集合在一个函数下的像仍然是一个集合；像总不比原像大

正则公理

$$\forall x\big(x \neq \emptyset \rightarrow \exists y(y \in x \wedge x \cap y = \emptyset)\big)$$

对任意非空集合x，x至少有一元素y使x∩y为空集

每个非空集合都有一极小元

任意集合x都不属于自身

ZF系统

分离公理

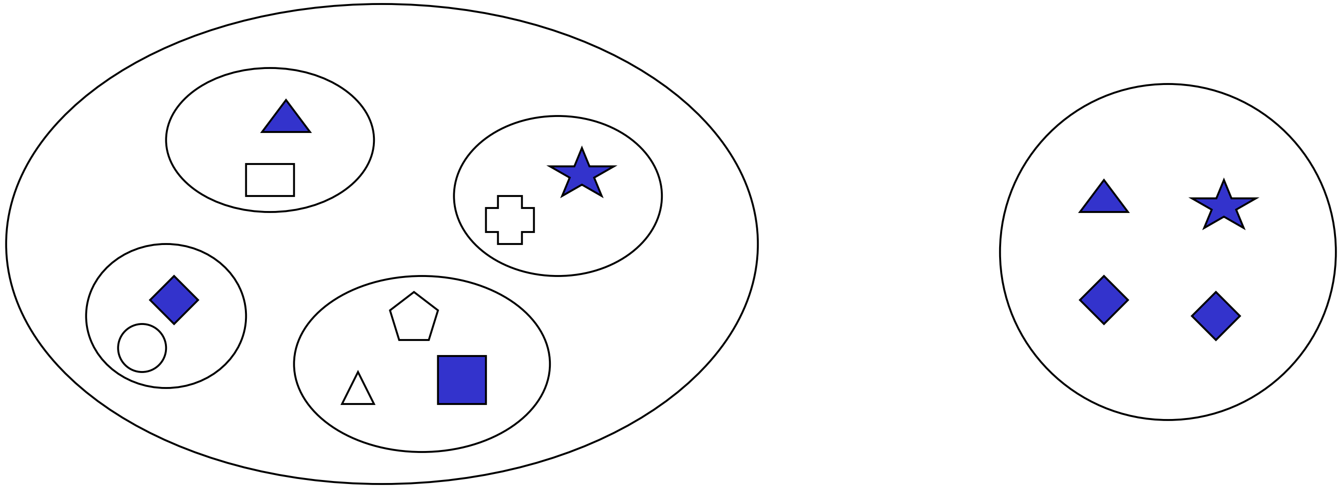
φ是公式，$\forall X \exists Y \forall x \big(x \in Y \leftrightarrow x \in X \land \varphi(x)\big)$

- 从某个已经存在的集合X中把所有满足性质φ的元素全都分离出来，构成一个新的集合Y
- 概括公理从整个“集合universe”中筛选元素，而分离公理只允许从已经存在的集合中筛选元素，分离公理创造的新集合总是比原来的小
- 没有集合能容纳所有集合；类以集合为元素，不能子类为元素

ZFC系统： ZF系统 + 选择公理

选择公理(Choice axiom)

A是元素互不相交的非空集族， 可以从A的每个元素中选择一个元素,组成一个集合



为什么需要选择公理？

在能够指定一个明确选择方式的时候，选择公理是没有必要的。也就是说集族中存在具体规则，可以不应用选择公理

- 设有无穷多双鞋，想要建立一个集合，使它恰好含有每双鞋中的一只，这是不必进行无穷多次选择的。因为鞋分左右脚，只要取全部的左脚鞋就可以了。**这个“左脚鞋”就是性质P**
- 但是如果是散乱的无穷多双袜子，上述方法就行不通了，袜子不分左右，找不到性质P把他们区分开