教学单元10.4

平面图与哈密顿图

本节内容提要

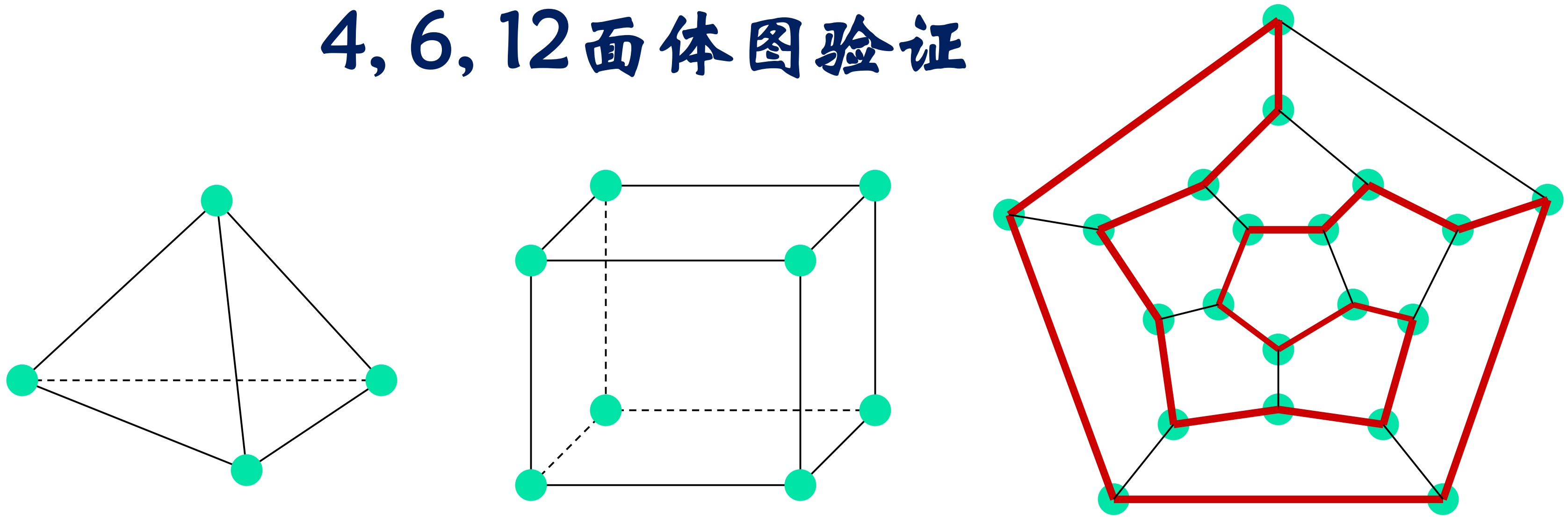
- 平面图与哈密顿图
- Tait猜想的反例
- 平面哈密顿图的充分条件
- 平面哈密顿图的必要条件

Tait猜想

3连通 3正则 平面图 都是 哈密顿图

解决四色猜想

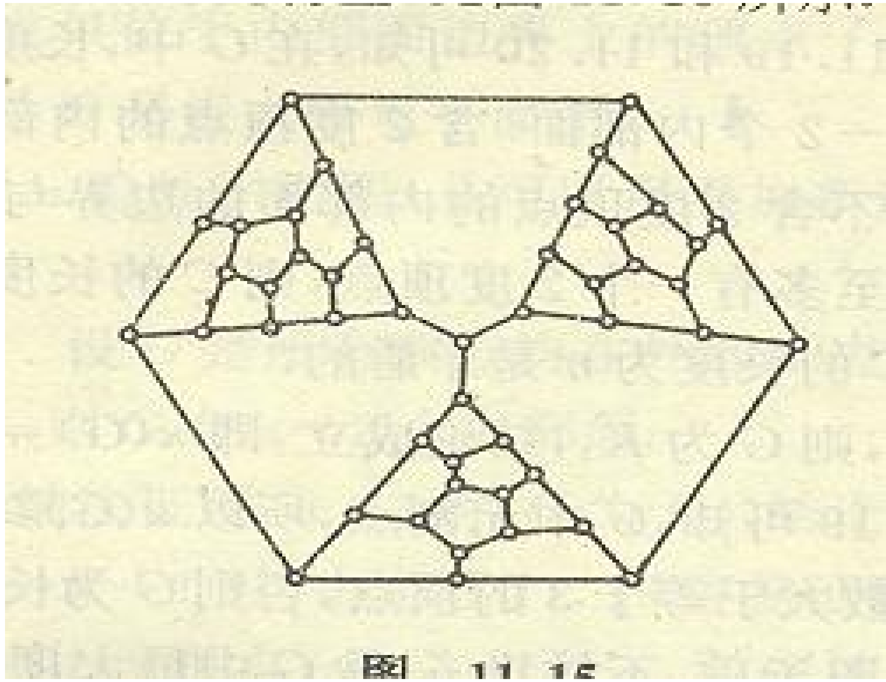
4, 6, 12面体图验证



Tait猜想的反例

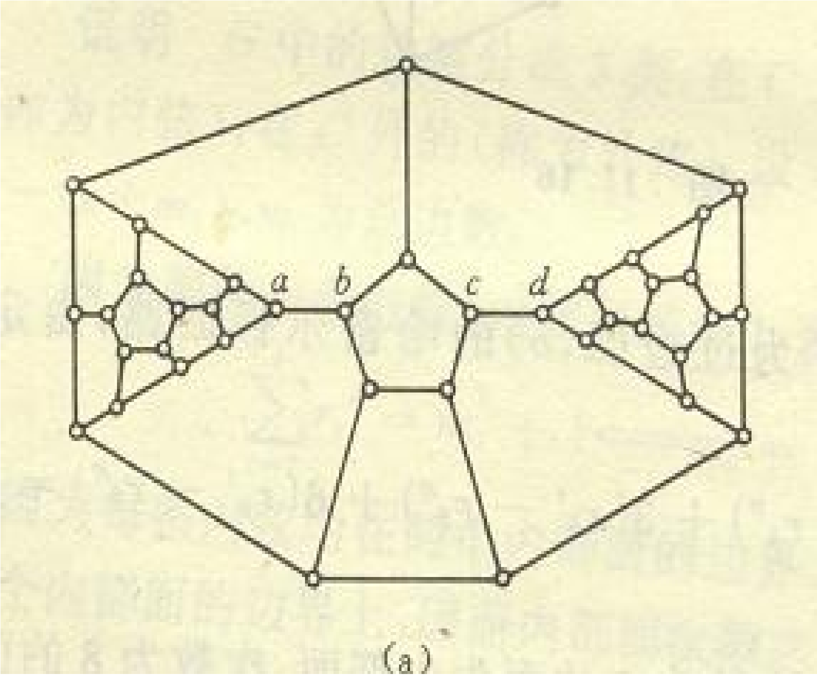
Tutte图(1946)：

46阶反例



Lederberg图(1967)：

38阶反例



平面哈密顿图充分条件

定理11.24（Tutte, 1956）：

4连通 平面图 是 哈密顿图

平面哈密顿图必要条件

定理11.23(Grinberg, 1968)：

n 阶简单平面哈密顿图，哈密顿回路内(外)部次数为 i 的面数为 $r_i'(r_i'')$

$$\Longrightarrow$$

$$\sum_{i=3}^{n}(i-2)(r_i'-r_i'')=0$$

定理11.23证明

$$\sum_{i=3}^{n}(i-2)(r_i'-r_i'')=0$$

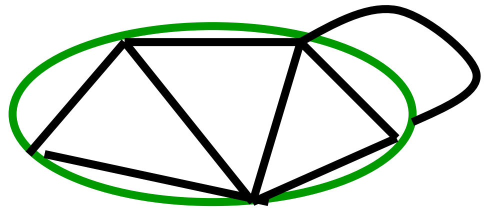
设　　哈密顿回路 C 内有 m_1 条边

则　　$\sum_{i=3}^{n} r_i' = m_1 + 1$

$$\sum_{\text{内部面}} \boldsymbol{deg}(\boldsymbol{R_j}) = \sum_{i=3}^{n} i r_i' = 2m_1 + n$$

故　　$\sum_{i=3}^{n}(i-2) r_i' = n-2$

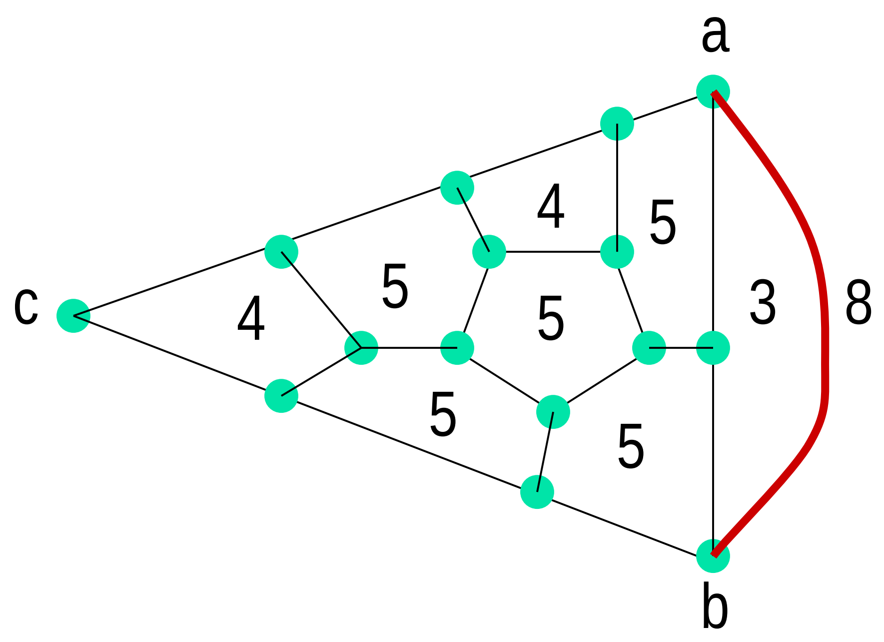
同理　$\sum_{i=3}^{n}(i-2) r_i'' = n-2$



例11.5

下图中不存在过边 (a, b) 的哈密顿回路

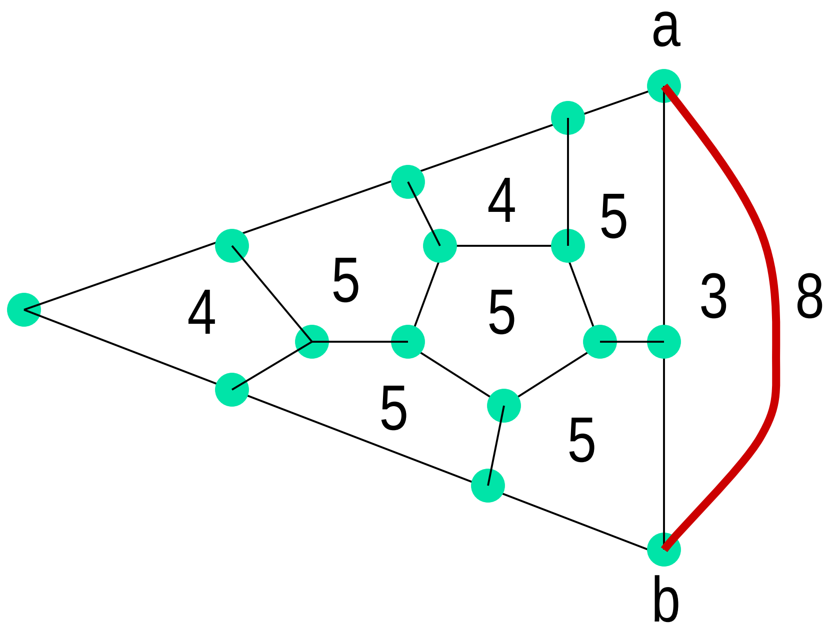
(由此可证*Tutte*图和*Lederberg*图不是哈密顿图)



例11.5

$$\sum_{i=3}^{n}(i-2)(r_i' - r_i'') = 0$$ (定理11.23)

$$(r_3' - r_3'') + 2(r_4' - r_4'') + 3(r_5' - r_5'') + 6(r_8' - r_8'') = 0$$

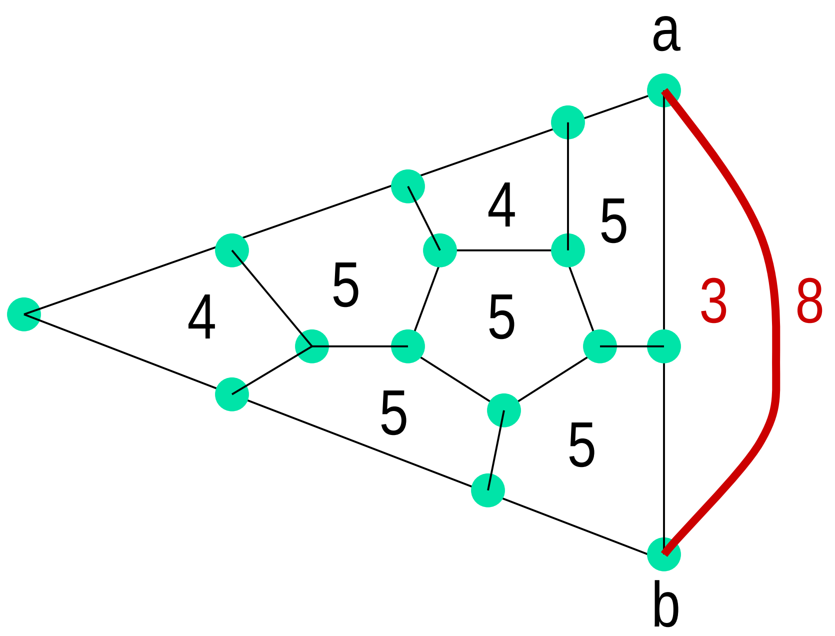


例11.5

$$(r_3' - r_3'') + 2(r_4' - r_4'') + 3(r_5' - r_5'') + 6(r_8' - r_8'') = 0$$

$$(1 - 0) + 2(r_4' - r_4'') + 3(r_5' - r_5'') + 6(0 - 1) = 0$$

$$2(r_4' - r_4'') + 3(r_5' - r_5'') = 5$$

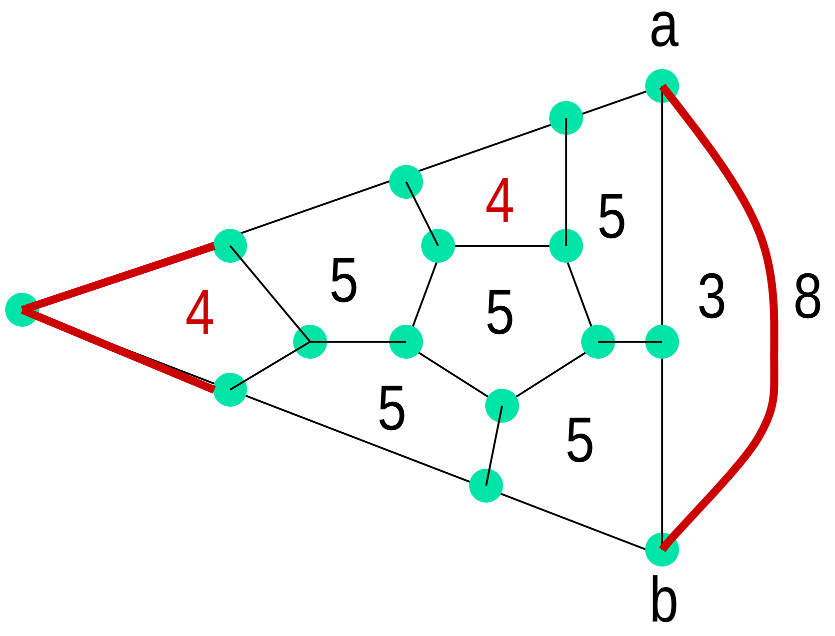


例11.5

$$2(r_4' - r_4'') + 3(r_5' - r_5'') = 5$$

$$2(1 - 1) + 3(r_5' - r_5'') = 5 \Longrightarrow 3(r_5' - r_5'') = 5$$

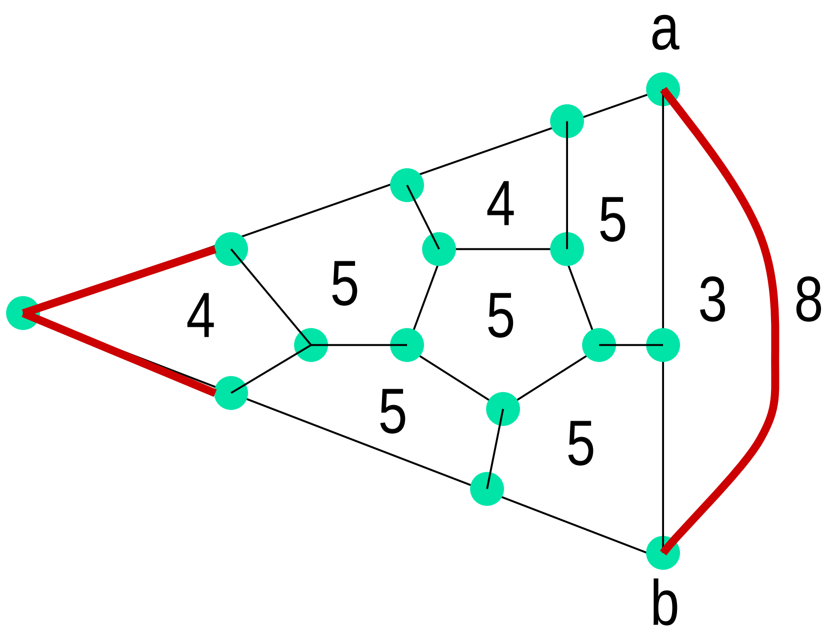
$$2(2 - 0) + 3(r_5' - r_5'') = 5 \Longrightarrow 3(r_5' - r_5'') = 1$$



例11.5

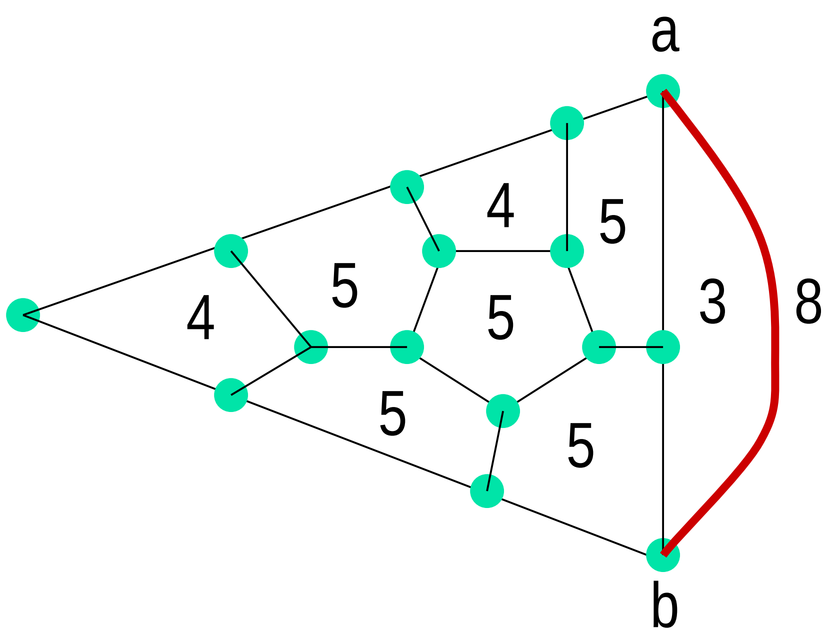
$$3(r_5' - r_5'') = 5 \text{ 或 } 1$$

上式不可能成立，因为 $(r_5' - r_5'')$ 是整数



Gadget 设计

- 有没有更小的gadget(小配件)?
- 注意是 3-正则平面图



习题

G是连通 简单 平面图， 围长$g(G) = l \geq 4$

则G是l−可着色的

$\delta(G) \leq l - 1$, 否则$2m \geq nl$

平面图$\Longrightarrow m \leq \frac{l}{l-2}(n-2)$

$\delta(G) \leq l - 1$, 否则$2m \geq nl$

平面图$\Longrightarrow m \leq \frac{l}{l-2}(n-2)$

小结

- ☞ 平面哈密顿图
- ☞ Tait猜想的反例
- ☞ 平面哈密顿图的充分条件
- ☞ 平面哈密顿图的必要条件