教学单元10.1

平面图的概念

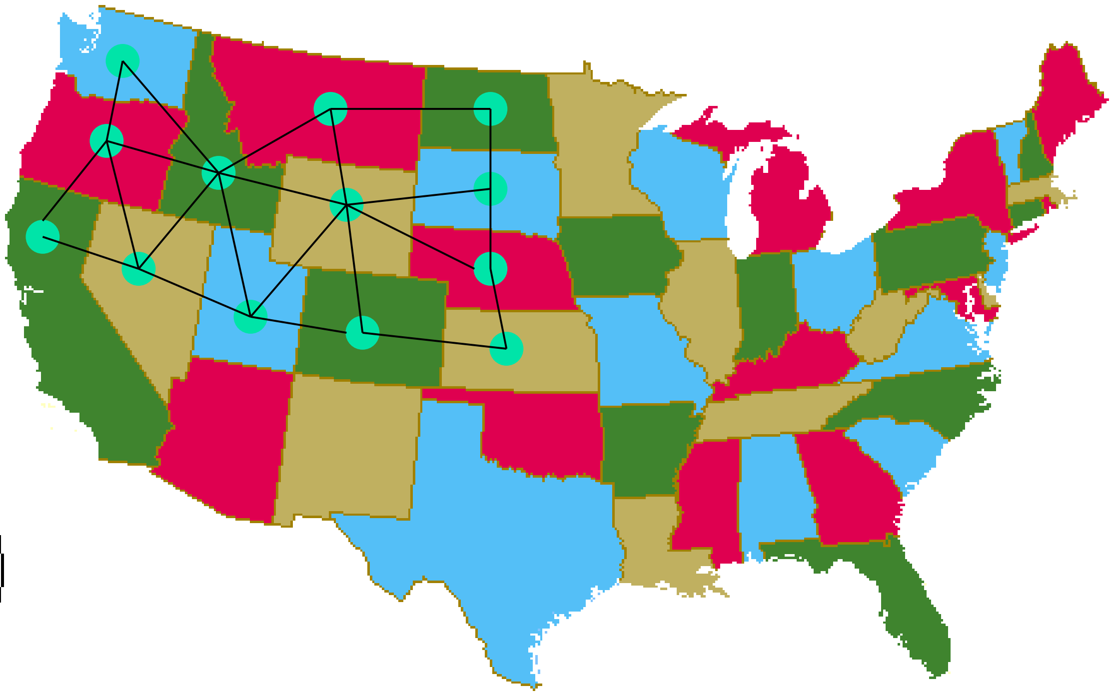
本节内容提要

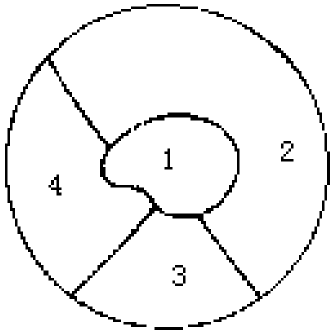
- 平面图应用示例
- 平面图、平面表示、球面表示
- 面、面的边界、面的次数
- 极小非平面图
- 极大平面图

四色问题

中华人民共和国地图
新疆维吾尔自治区
塔里木河
西藏自治区
青海省
甘肃省
内蒙古自治区
宁夏回族自治区
黑龙江省
吉林省
辽宁省
北京
北京市
天津
天津市
河北省
山西省
陕西省
山东省
河南省
江苏省
安徽省
上海
上海市
湖北省
四川省
重庆
重庆市
湖南省
江西省
浙江省
福建省
台湾省
贵州省
云南省
广西壮族自治区
广东省
香港特别行政区
海南省
南海诸岛
黄河
长江

四色问题



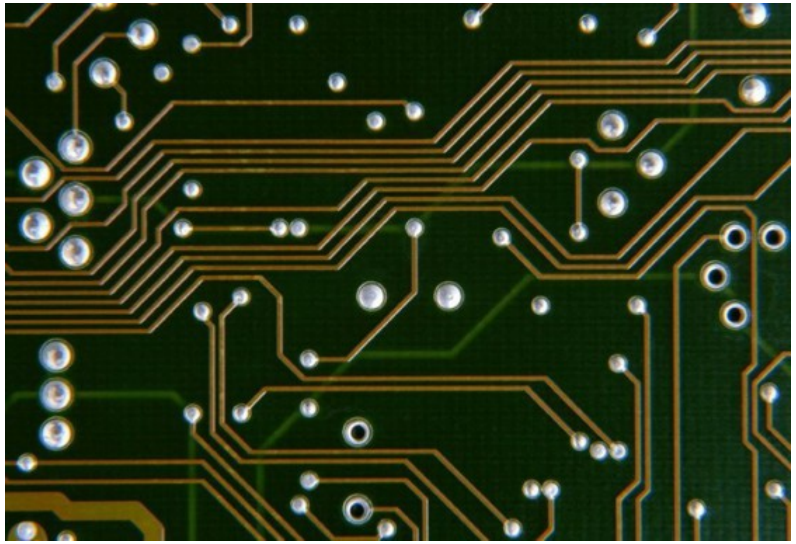


图一

电路板设计

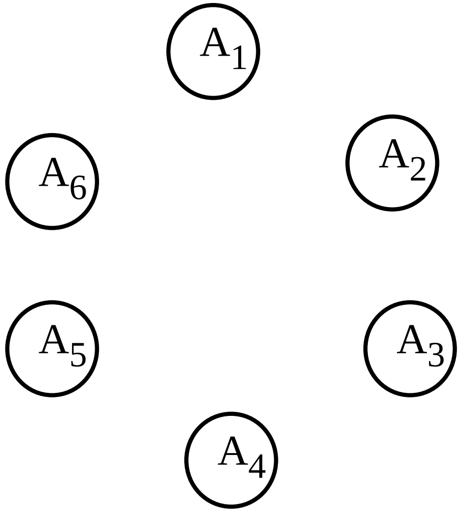
在电路板设计时，需要考虑的问题之一是连接电路元件间的导线间不能交叉。否则，当绝缘层破损时，会出现短路故障

显然，电路板可以模型为一个图，“要求电路元件间连接导线互不交叉”，对应于“要求图中的边不能相互交叉”



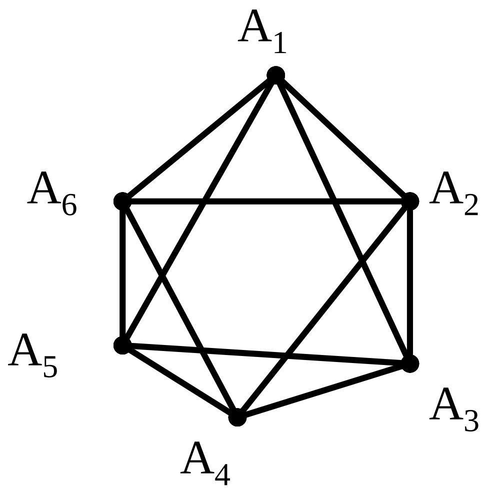
空调管道设计

某娱乐中心有6个景点，位置分布如下图

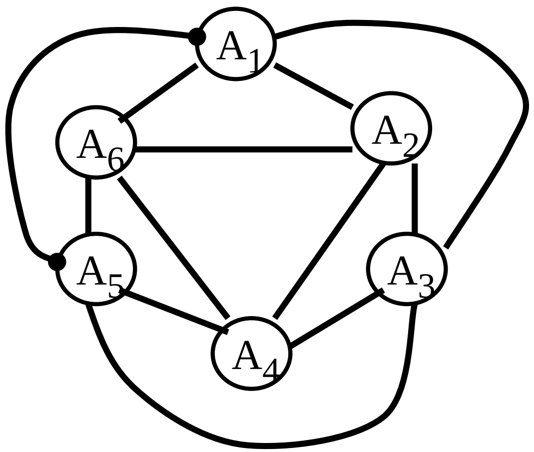


分析认为：(1) A1与A4, (2) A2与A5, (3) A3与A6间人流较少，其它景点之间人流量大，必须投资铺设空调管道，但要求空调管道间不能交叉。如何设计？

如果把每个景点分别模型为一个点，景点间连线，当且仅当两景点间要铺设空调管道。那么，上面问题直接对应的图为：

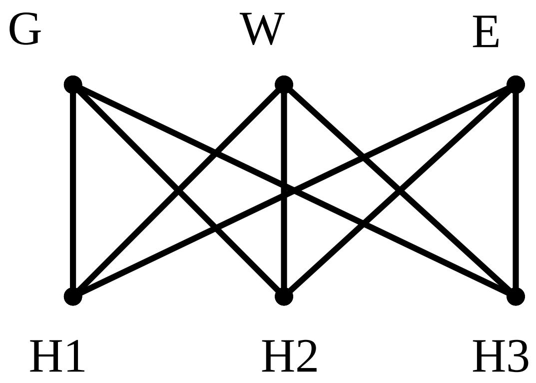


于是问题转化为：能否把上图画在平面上，使得边不会相互交叉？



3间房子和3种设施

问题：要求把3种公用设施(煤气，水和电)分别用煤气管道、水管和电线连接到3间房子里，要求任何一根线或管道不与另外的线或管道相交，能否办到？

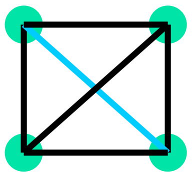


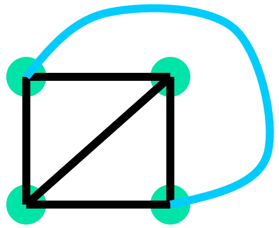
上面的例子都涉及同一个图论问题：

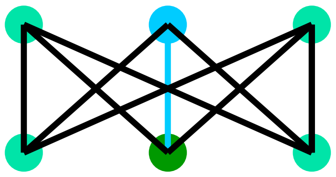
能否把一个图画在平面上，使得边与边之间没有交叉？

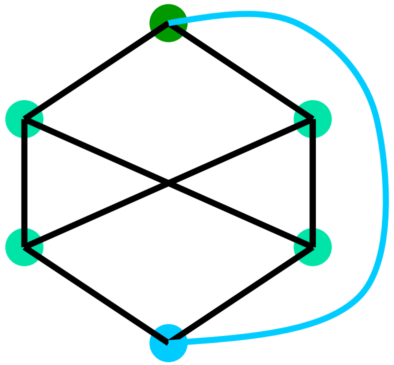
平面图

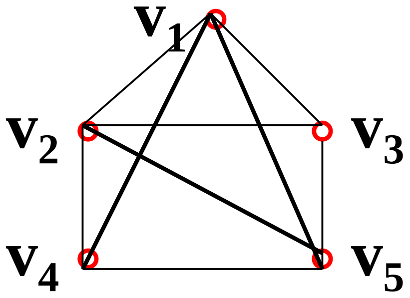
在平面上边与边不在非顶点处相交的图

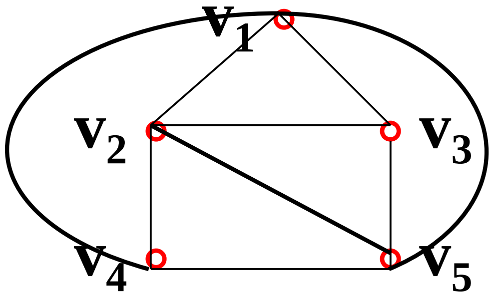




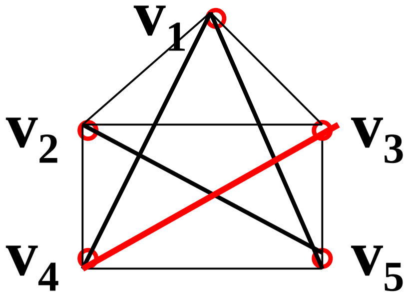


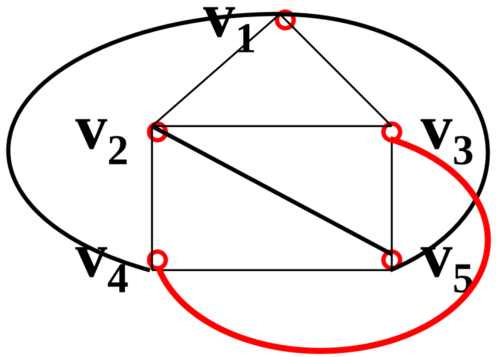


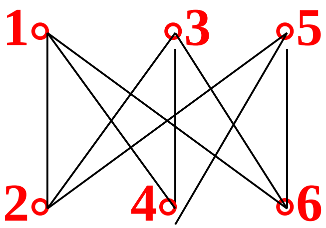


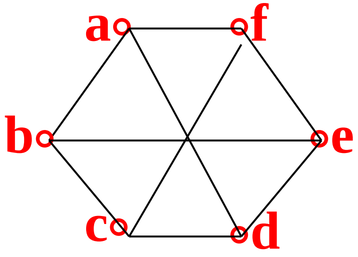


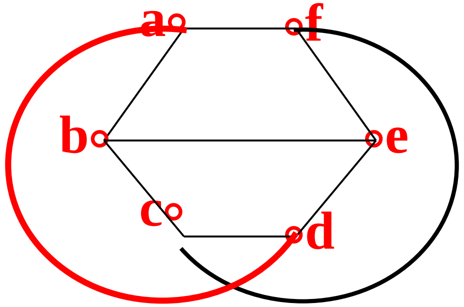
非平面图







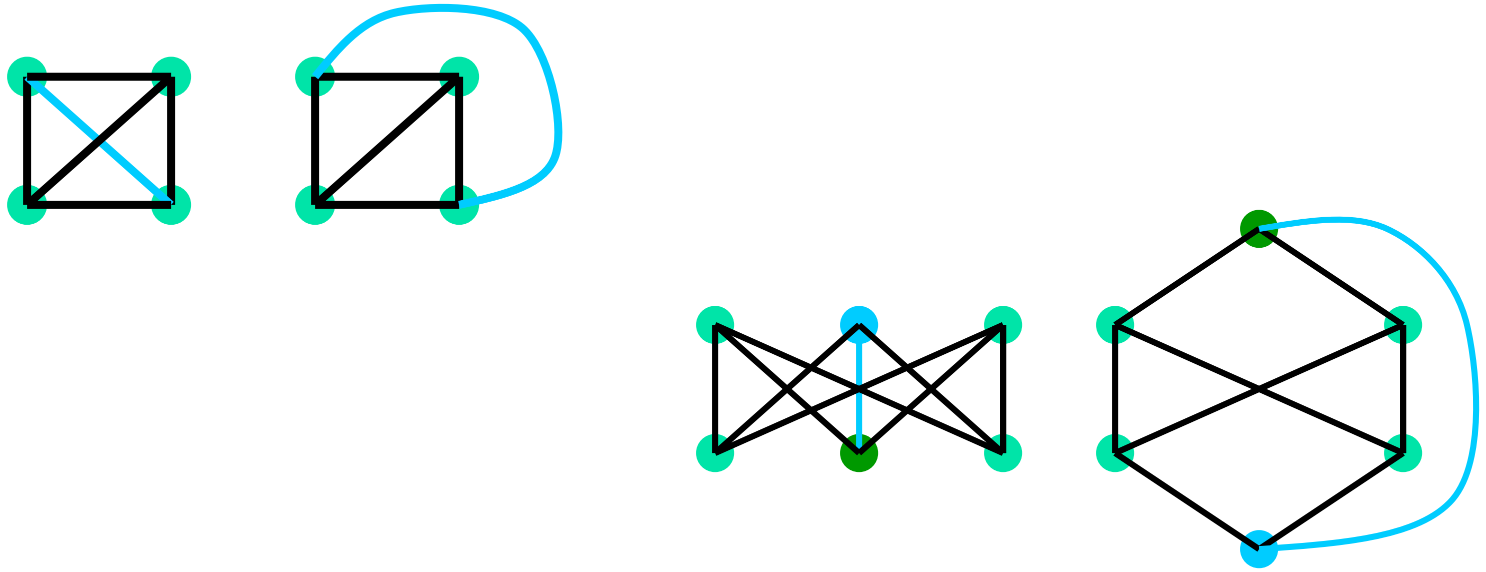




可平面图

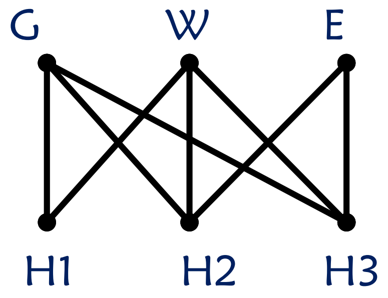
可以画在平面上，使得边与边

不在非顶点处相交的图

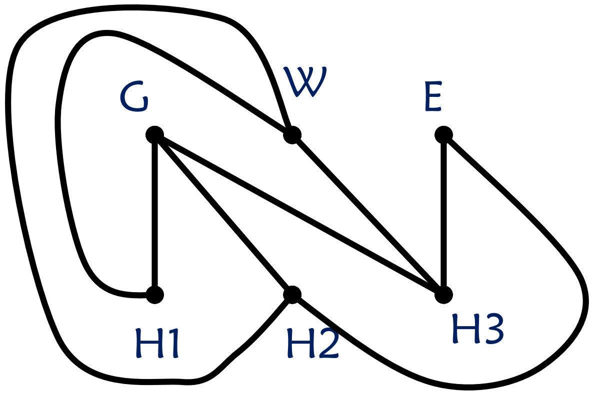


平面嵌入

画在平面上使得边与边不在非顶点处相交

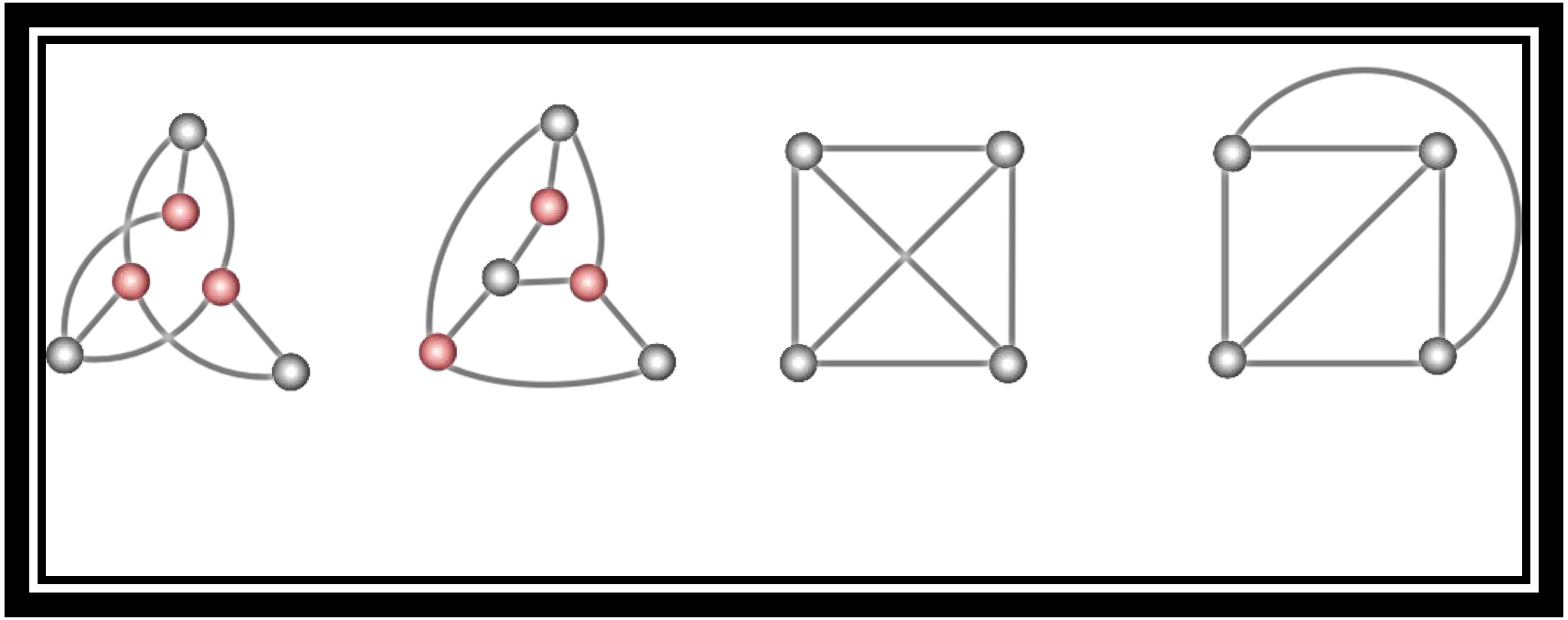


图G



图G的平面嵌入

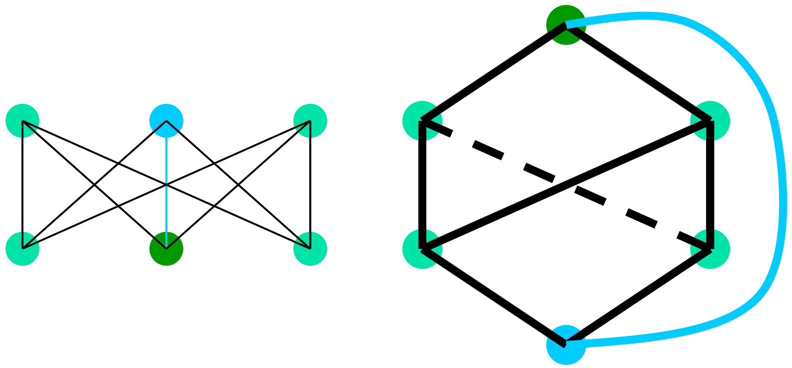
平面嵌入



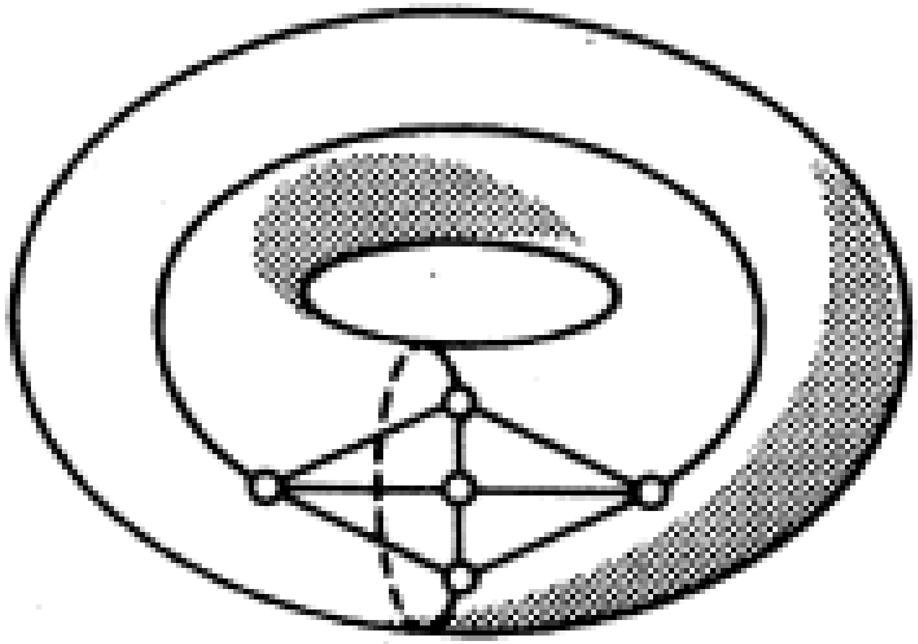
球面嵌入　曲面嵌入

球面嵌入： 画在球面上使得边与边不在非顶点处相交

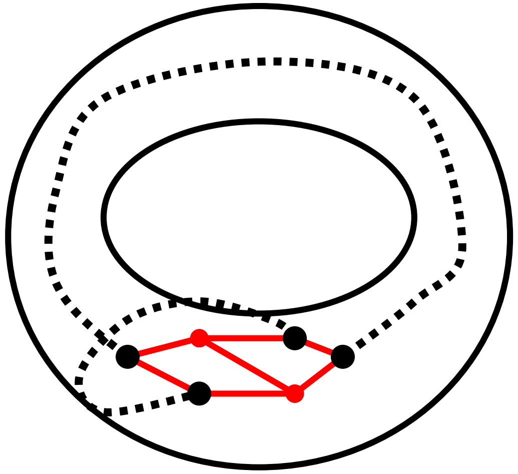
曲面嵌入： 画在曲面上使得边与边不在非顶点处相交，如环面嵌入



环面嵌入



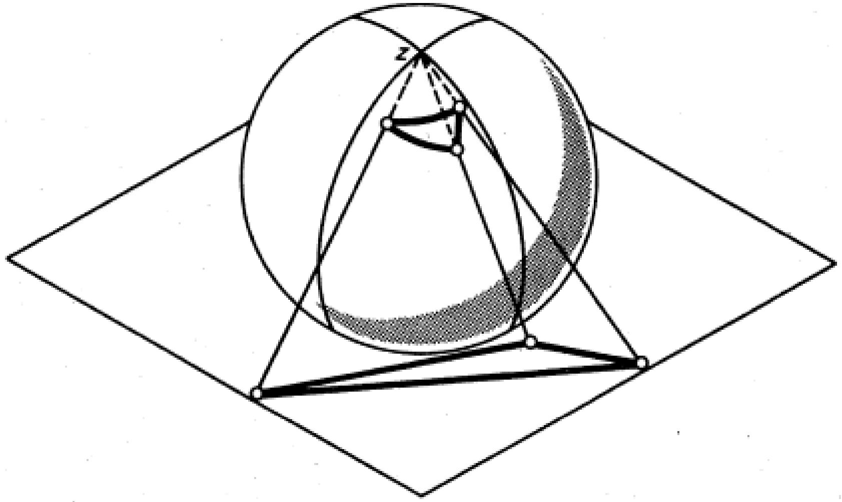
K_5的环面嵌入



$K_{3,3}$的环面嵌入

球极投影

将一球 S 置于平面 P 上，球与平面的接触点称为球的南极，通过南极的直径的另一端称为北极 n，将平面P 的任意点与 n 相连，连线与球面有且仅一个交点



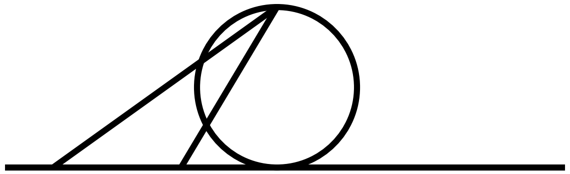
定义映射 $\pi: S\backslash\{n\} \to P$

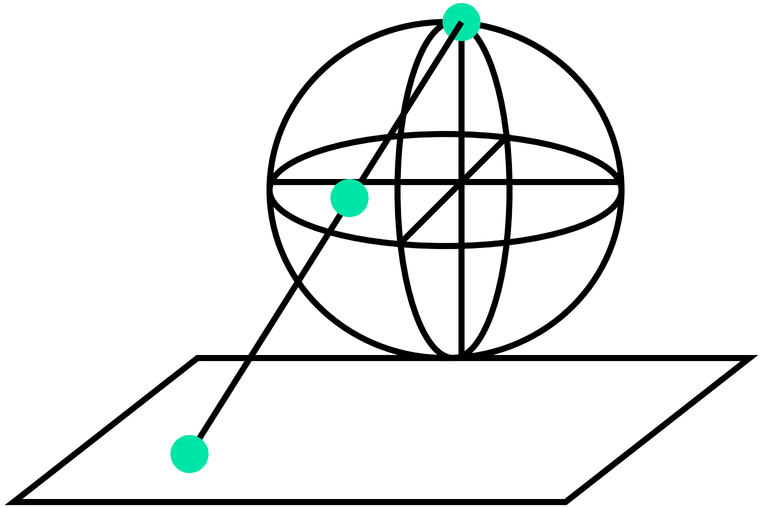
$\pi(s) = p$ 当且仅当 s, n, p 是共线的

该映射称为投影中心为 n 的球极投影

定理11.1：可平面嵌入 ⟺ 可球面嵌入

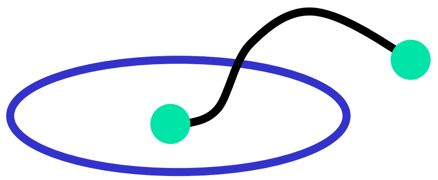
证明 连续球极投影





Jordan定理

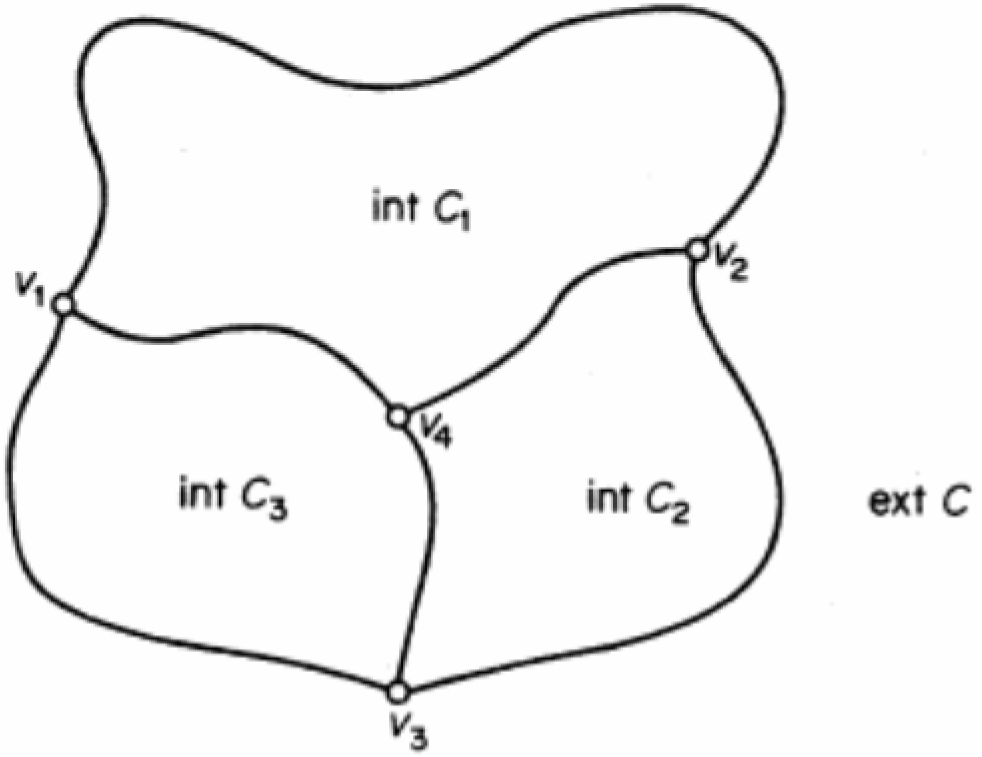
Jordan曲线把平面分为2部分，连接内部与外部点的任意曲线必然与Jordan曲线相交



Jordan曲线：自身不相交的封闭曲线

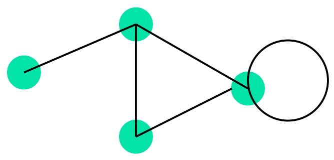
定理：K_5是非可平面图

- 若 G 是与 K_5 对应的平面图，v_1,v_2,v_3,v_4,v_5 是 G 的顶点。回路 $C=v_1v_2v_3v_1$ 是一个Jordan曲线，则 $v_4\in intC$ 或 $v_4\in extC$
- 若 $v_4\in intC,(v_4,v_1),(v_4,v_2),(v_4,v_3)$ 把 C 分成三部分
- v_5 属于 $intC_1,intC_2,intC_3,extC$ 之一

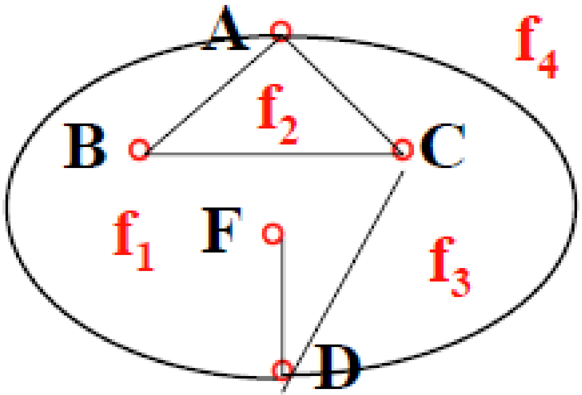


面

- **面**：由 G 的平面嵌入的边将平面划分成的区域
- **无限面或外部面**：面积无限的面，R_0
- **有限面或内部面**：面积有限的面，$R_1, R_2, \ldots$
- **面R_i的边界**：包围 R_i 的回路组
- **面R_i的次数**：R_i 边界的长度，用 $deg(R_i)$表示



面

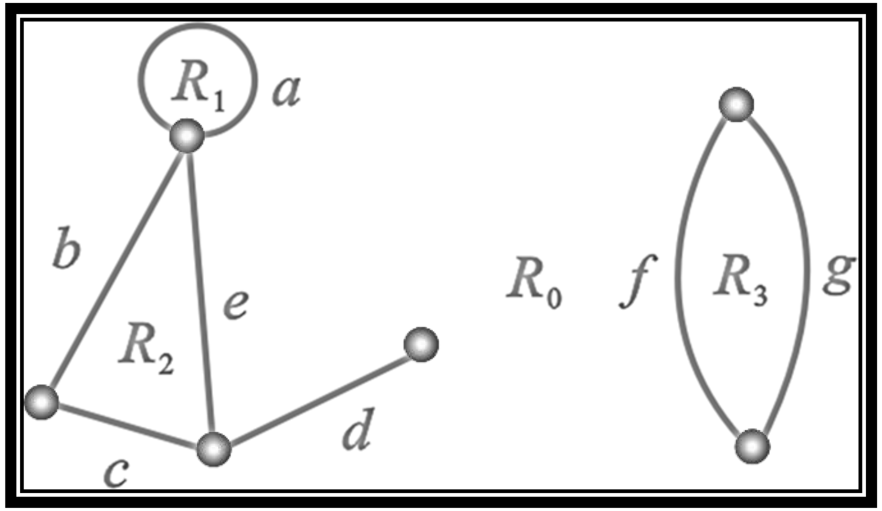


f_1 : 边界: ABCDFDA　$\deg(f_1)=6$

f_2 : 边界: ABCA　$\deg(f2)=3$

f_3 : 边界: ACDA　$\deg(f_3)=3$

f_4 : 边界: ADA　$\deg(f4)=2$



$\deg(R_1)=1$

$\deg(R_2)=3$

$\deg(R_3)=2$

$\deg(R_0)=8$

定理11.2

$$\sum_{i=1}^{r} deg(R_i) = 2m$$

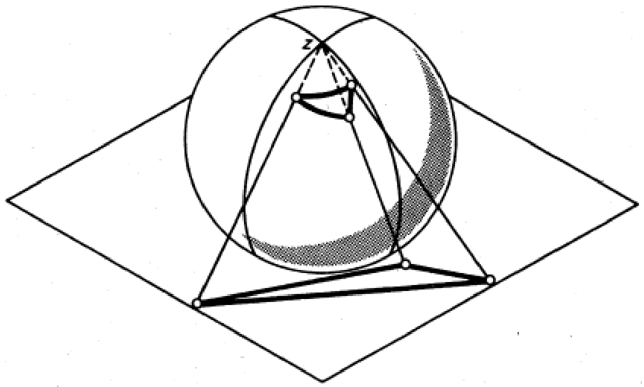
一条边作为两个面的公共边界

或者只出现在一个面的边界上

树T, $|T| = n$, $deg(T_0) = ?$

树$T, |T| = n$, 添加一条边构成回路C, $max\left(deg(C_0)\right) = ?$

定理11.3：任何平面嵌入的内部面都可以在另一种平面嵌入下成为外部面



平面嵌入

$\Longrightarrow$ 球面嵌入

$\Longrightarrow$ 把该面旋转到北极

$\Longrightarrow$ 平面嵌入

极大平面图

是平面图，但是在任意两个不相邻顶点之间加边就是非平面图

例如，K_5 删除任意一边

- 极大平面图是连通的
- $n(\geq 3)$ 阶极大平面图中不可能有割点和桥

定理11.4：n(≥3)阶简单连通平面图是极大平面图 $\Leftrightarrow \forall R, deg(R)=3$

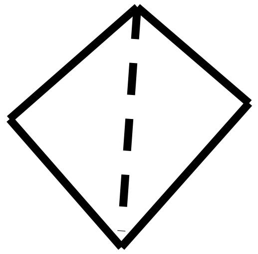
$(\Rightarrow)$

简单图

$\Rightarrow \quad deg(R) \geq 3$

极大平面图

$\Rightarrow \quad deg(R) \leq 3$



$(\Leftarrow)$

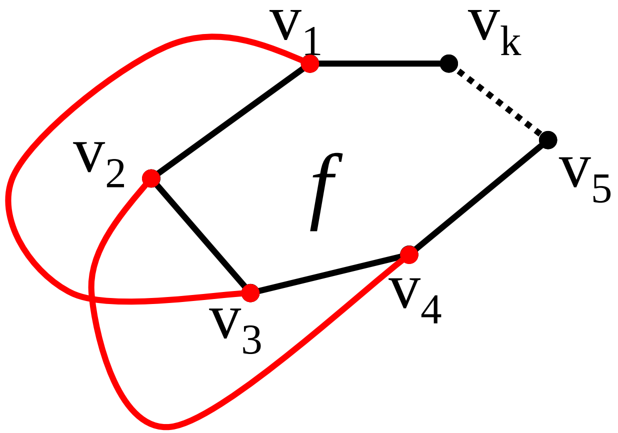
$\forall R, deg(R)=3$

$\Rightarrow$ 不能加边而不交叉

定理11.4必要性证明

假设 G 中某个面 f 的次数大于等于4

记 f 的边界是 $v_1v_2v_3v_4\cdots v_k$

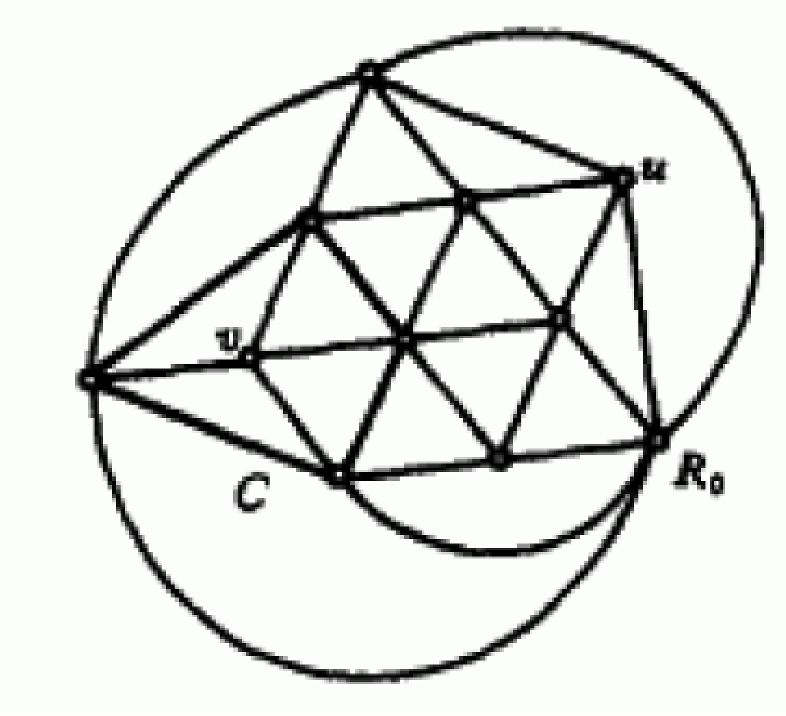


如果 v_1 与 v_3 不邻接，则连接 v_1v_3，没有破坏 G 的平面性，这与 G 是极大平面图矛盾。所以 v_1v_3 必须邻接，但必须在 f 外连线；同理 v_2 与 v_4 也必须在 f 外连线。但边 v_1v_3 与边 v_2v_4 在 f 外交叉，与 G 是平面图矛盾！

定理11.4充分性证明

若所有顶点都相邻，得证

若顶点u,v不相邻，则它们不可能都在外部面R_0的边界上($deg(R_0)=3$)

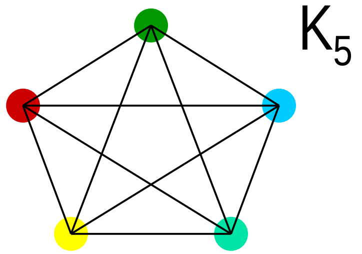


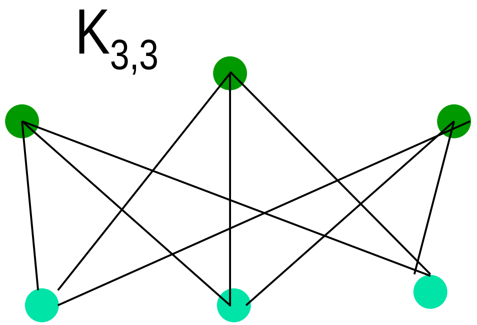
设v不在R_0上，和v相邻的顶点构成一个圈，和v不相邻的顶点在圈外

极小非平面图

是非平面图，但是删除任意1边就是平面图

例如，$K_5, K_{3,3}$





小结

☞ 平面图、平面表示、球面表示

☞ 面、面的边界、面的次数

☞ 极小非平面图

☞ 极大平面图