教学单元10.3

对偶图和外平面图

本节内容提要

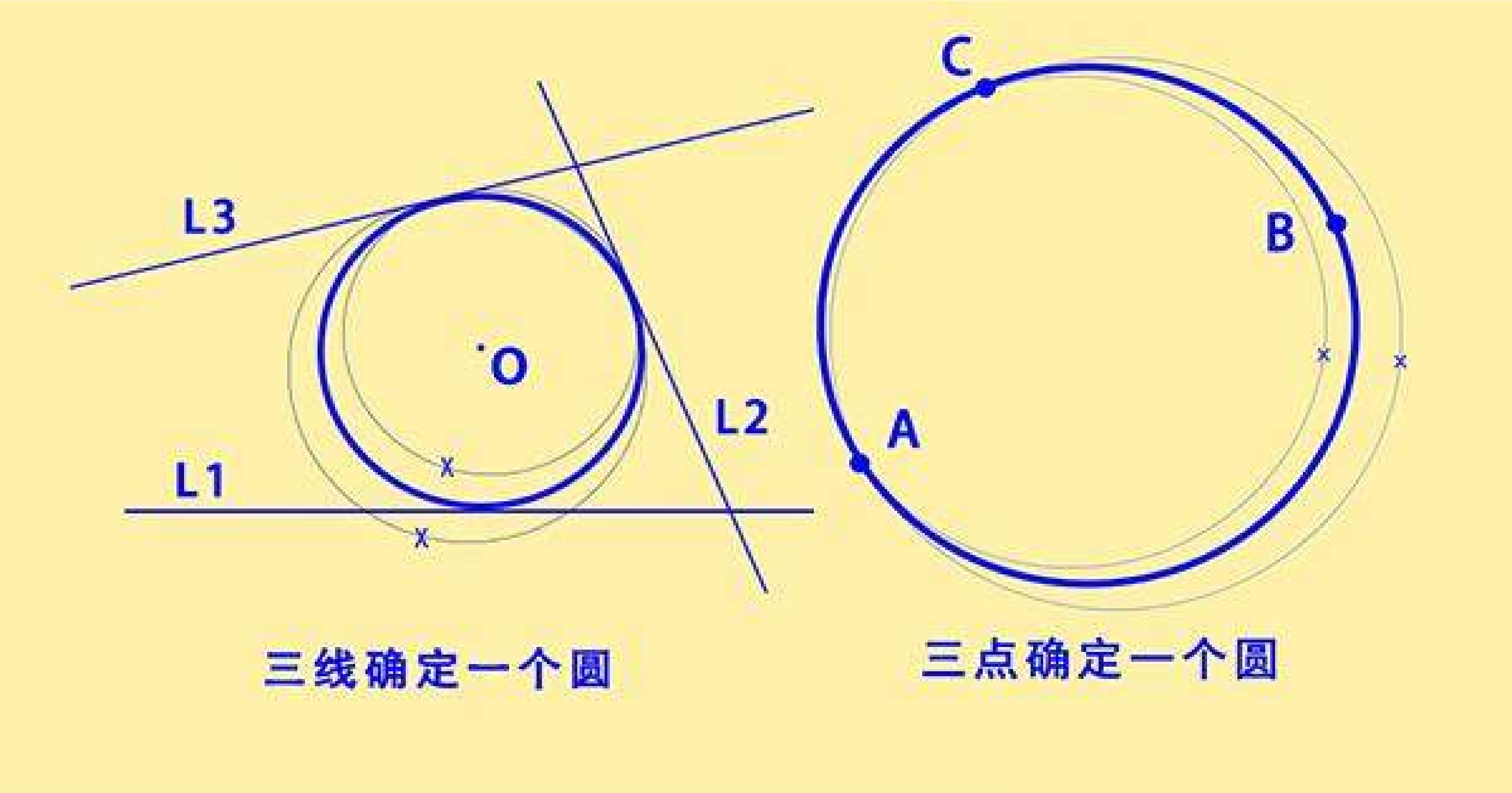
- 对偶图
- 自对偶图
- 外平面图
- 极大外平面图

对偶句

黑发不知勤学习	白发方悔读书迟
屋漏更遭连夜雨	船破又遇顶头风
三杯竹叶穿心过	两朵桃花上脸来
酒逢知己千杯少	话不投机半句多
风吹云动星不动	水推船移岸不移
鸟宿池边树	僧敲月下门
久旱逢甘雨	他乡遇故知
三星白兰地	五月黄梅天
孙行者	祖冲之
文竹	武松

不相交的三点，可唯一确定过这三点的圆

对偶原理：不共线的三条线，可唯一确定相切于这三条直线的圆

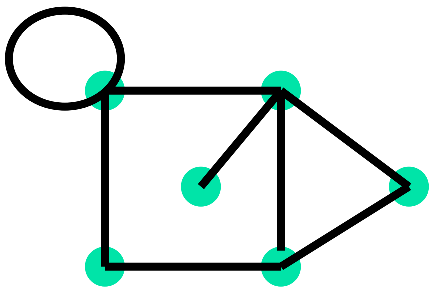


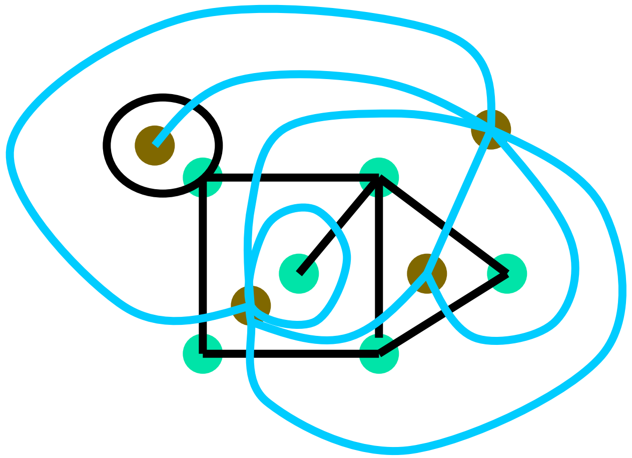
对偶图

- 在G的每个面R_i内取一个点v_i^*作为G^*的顶点
- 对 G 的 边 e,构造G^*中的边e^*，它 穿 过 边 e,

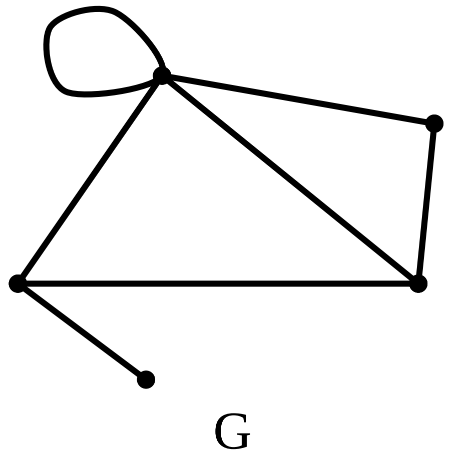
  且不与其他任何边相交：

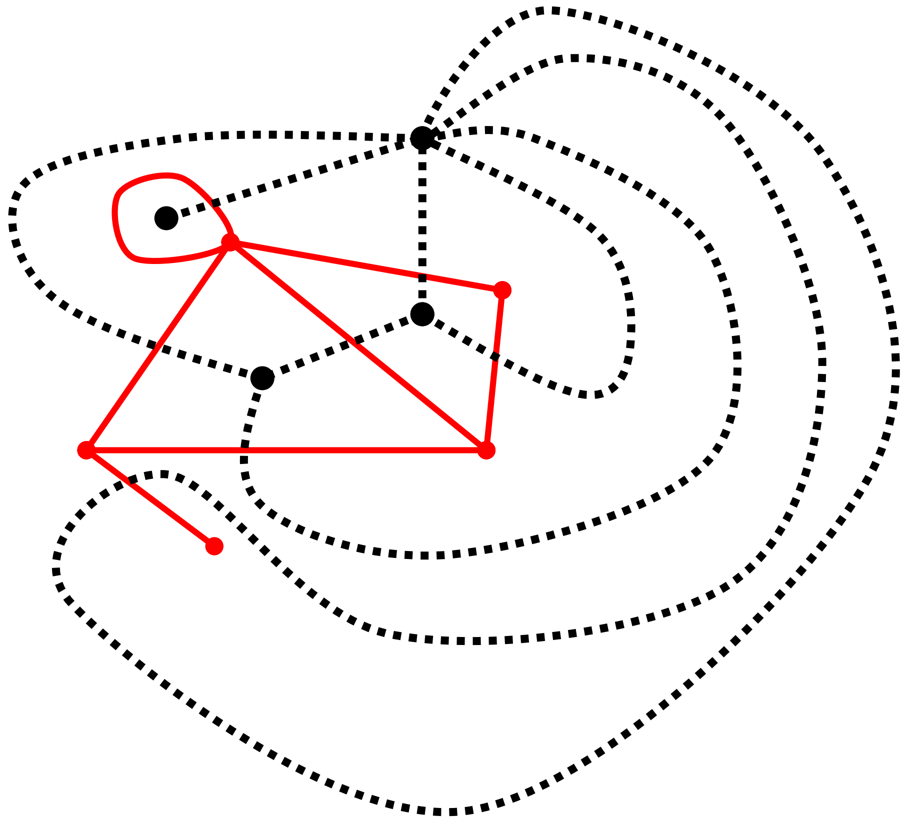
  - 若e是面R_i与R_j的**公共边**，则$e^* = (v_i^*, v_j^*)$
  - 若e是面R_i中的**桥**，则$e^* = (v_i^*, v_i^*)$





对偶图





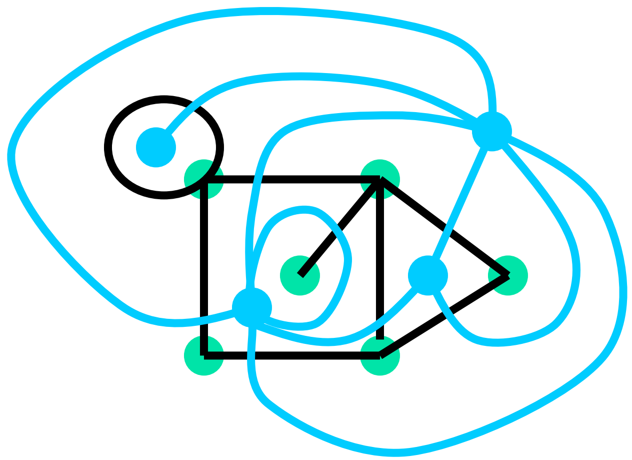
对偶图的性质

平面图 $G=<V,E>$, 面集合是 R

对偶图 $G^*=<V^*,E^*>$, 面集合是 R^*

则 V^* 与 R, E^* 与 E,都是一一对应的

- 对偶图是连通平面图
- 环与桥互相对偶
- 平行边对偶于2个面之间的多条边界

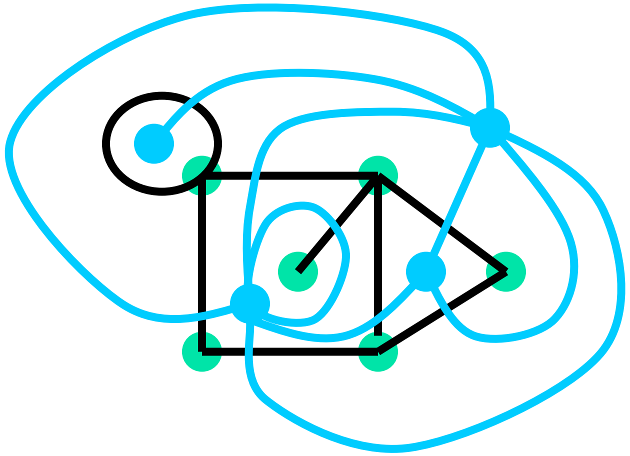


定理11.16：对偶图的性质

- $n^* = r, m^* = m$
- $r^* = n - p + 1$

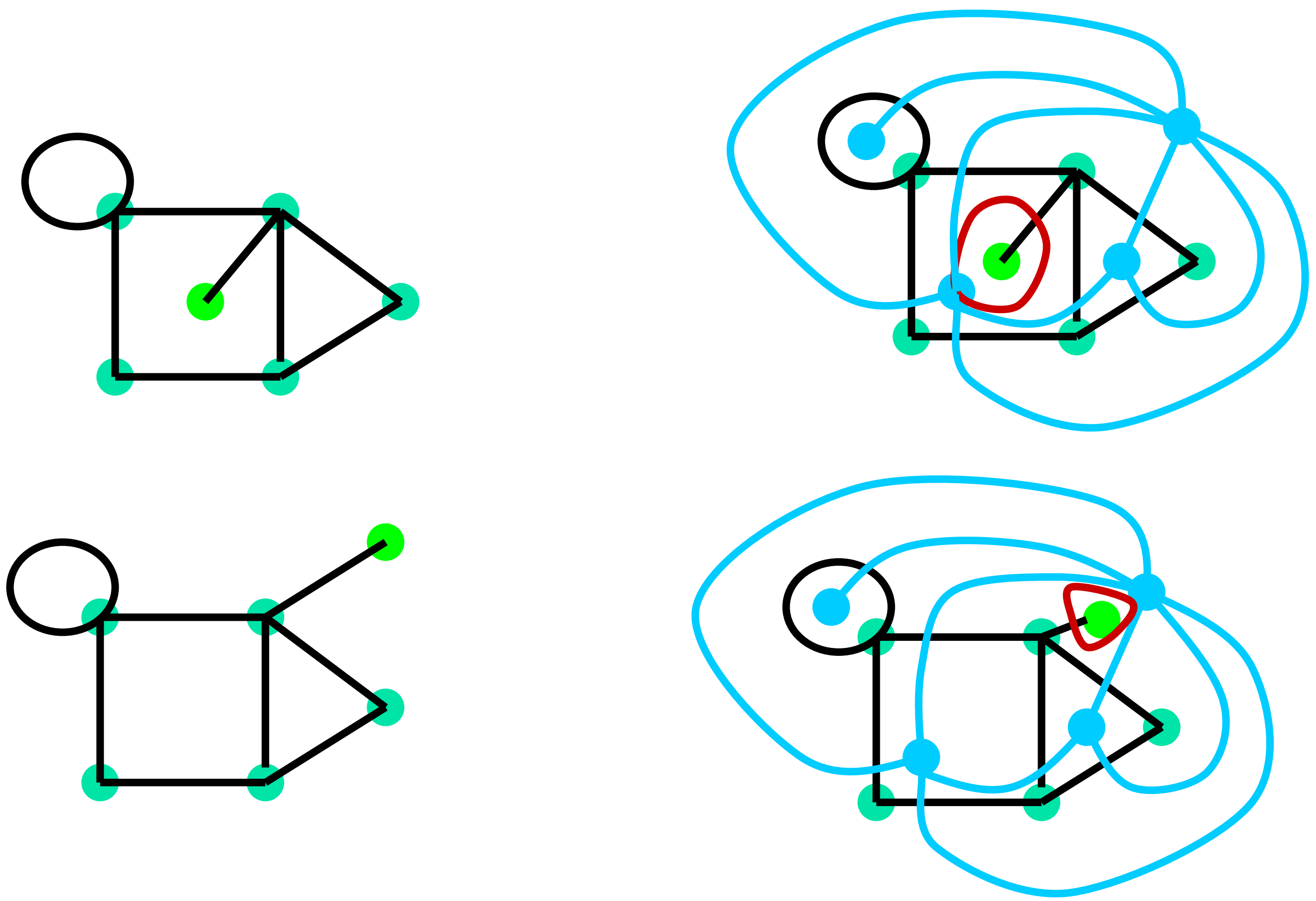
$(n - m + r = 1 + p, n^* - m^* + r^* = 2)$

- $d_{G^*}(v_i^*) = deg_G(R_i)$



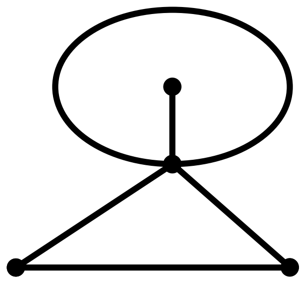
对偶图的性质

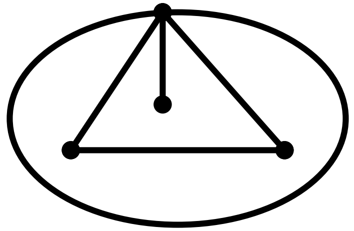
$G_1 \cong G_2$, 不一定 $G_1^* \cong G_2^*$



对偶图的性质

$$G_1 \cong G_2 \qquad G_1^* \ncong G_2^*$$





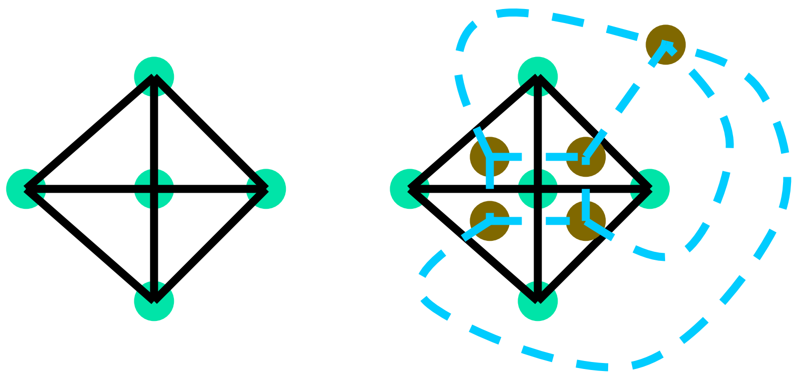
G_2中有次数是1的面，而G_1没有次数是1的面，

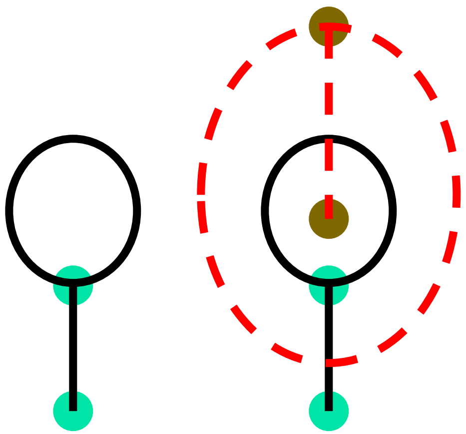
它们的对偶图不能同构

对偶图的性质

G 连通 $\Longleftrightarrow G \cong G^{**}$

（要求 G^* 不改变形状）

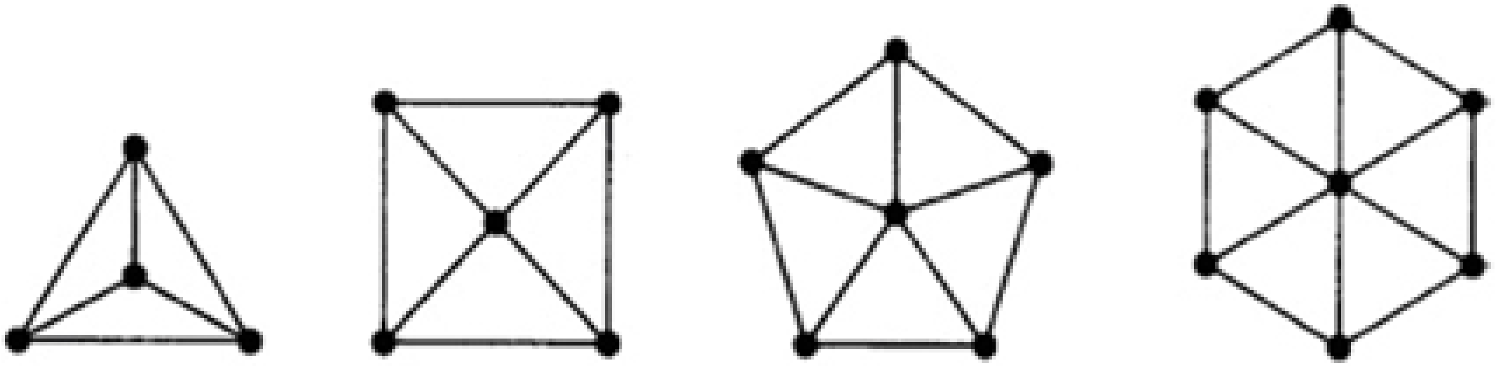




轮图

圈 + 中心顶点

奇阶轮图　　偶阶轮图

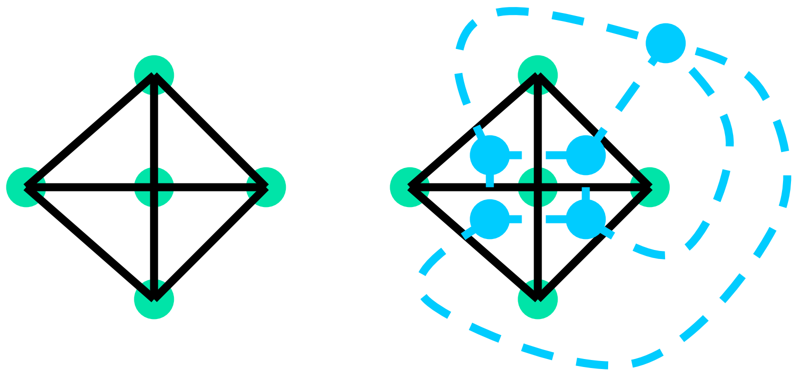


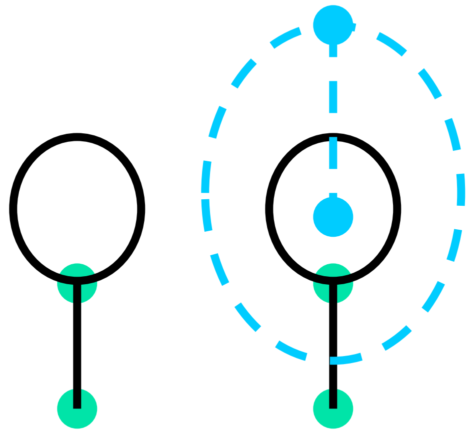
W_3 W_4 W_5 W_6

自对偶图

自对偶图：$G \cong G^*$

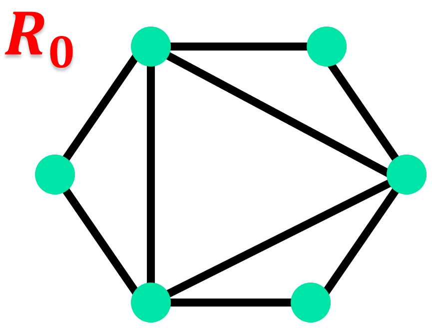
$n \geq 4$时，轮图 W_n 是自对偶图

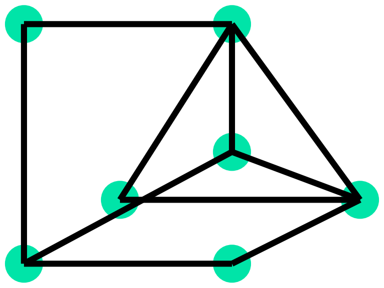


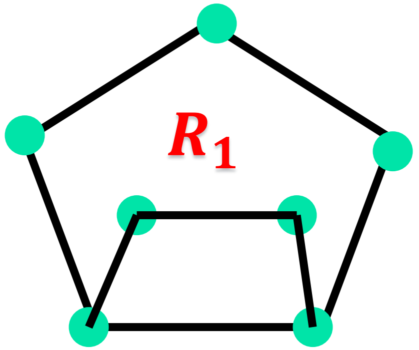


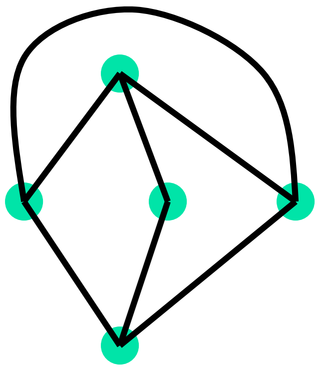
外(可)平面图

平面图的所有顶点可都在**一个面**的边界上





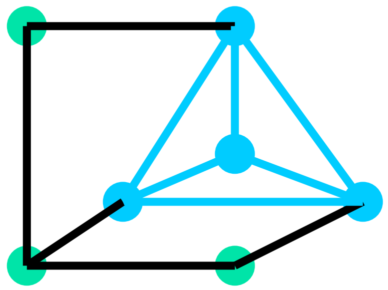


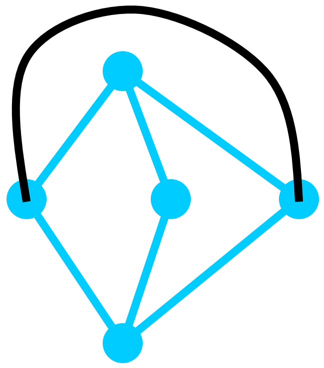


定理11.22：外平面图充要条件

G 是外平面图 $\Leftrightarrow$ G 不含与 K_4 或 $K_{2,3}$ 同胚子图

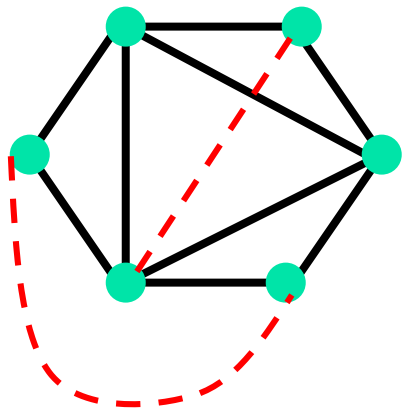
G 是平面图 $\Leftrightarrow$ G 不含与 K_5 或 $K_{3,3}$ 同胚子图

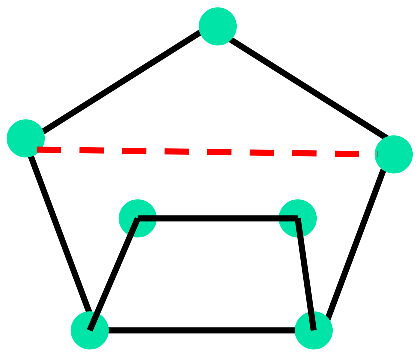




极大外平面图

本身是**简单**外平面图，但是在任意不相邻顶点之间加边就不是外平面图了



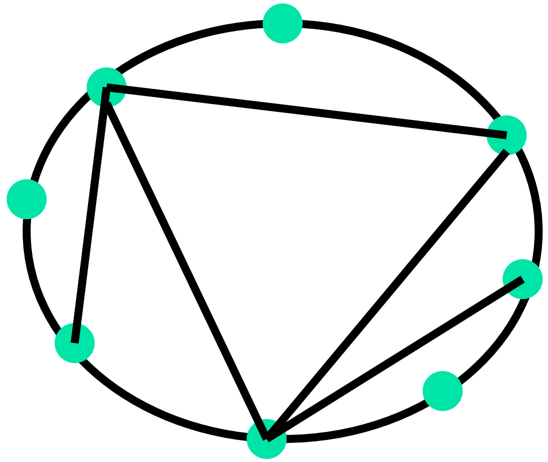
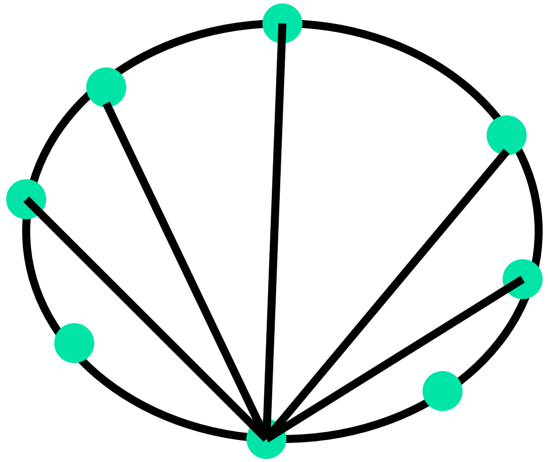


定理11.19：极大外平面图充要条件

设 G 是 $n(\geq 3)$ 阶外平面图，所有顶点在外部面边界上，则 G 是极大外平面图

$$\Longleftrightarrow$$

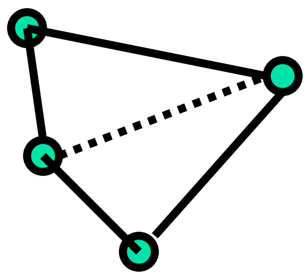
G 外部面边界是 n−圈，所有内部面边界是 3−圈

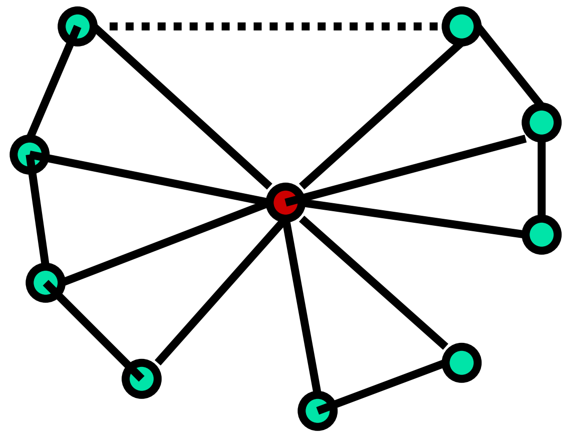
定理11.19证明($\Longrightarrow$)

($\Rightarrow$) 反证，分情形讨论

(1) 有 4 次以上内部面 $\Rightarrow$ 可加边，矛盾



(2) 外部面边界不是圈 $\Rightarrow$ 有割点 $\Rightarrow$ 可加边，矛盾

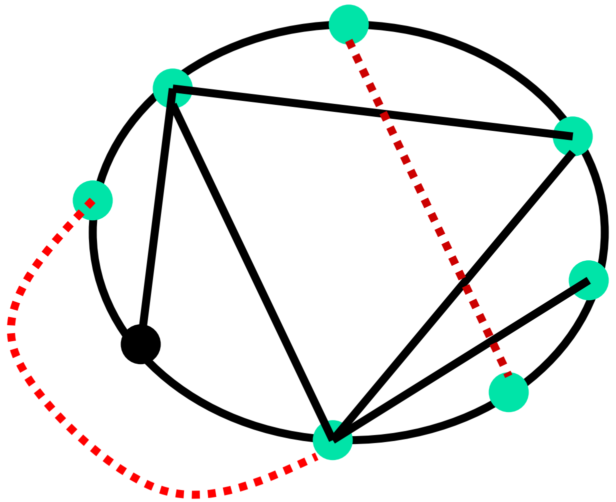


定理11.19证明($\Longleftarrow$)

($\Leftarrow$) 分情形讨论

(1) 只有一个内部面 $\Rightarrow K_3 \Rightarrow$ 是极大外平面图

(2) 至少有两个内部面



加边 $e=(u,v)$

若从内部走，穿越至少两个内部面

若从外部走，则将u,v之间的顶点变成内部面顶点

极大外平面图必要条件

$n(\geq 3)$阶极大外平面图 G 所有顶点在外部面边界上

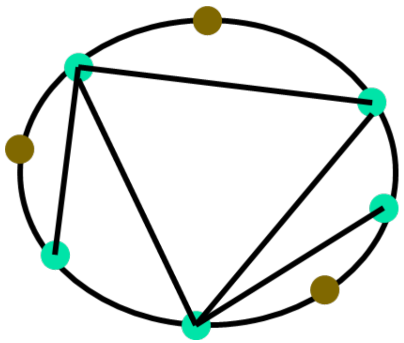
$\Longrightarrow G$ 有 $n-2$ 个内部面

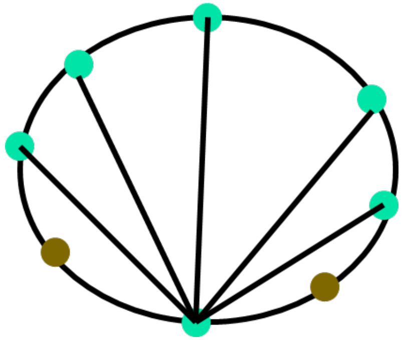
$\Longrightarrow m = 2n-3$

$\Longrightarrow$ 至少有 3 个顶点度数 ≤ 3

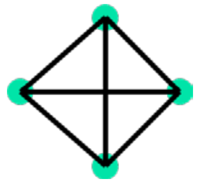
$\Longrightarrow$ 至少有 2 个顶点度数 $= 2$

$\Longrightarrow \kappa = 2$





关键要点：
存在二度顶点



极大外平面图必要条件

$n(\geq 3)$阶极大外平面图 G 所有顶点在外部面边界上

$\Longrightarrow G$ 有 $n-2$ 个内部面

$n=3$时，是K_3

$n=k+1$时，存在2度顶点v，$G'=G-v$

G'内部面为K_3,外部面为$k-$圈,所以为极大外平面图

G'有$k-2$个内部面，G有$k-1$个内部面

$\Longrightarrow m=2n-3$

(面的握手定理)

$(2m=\sum deg(R_i)=3*(n-2)+n=4n-6)$

极大外平面图必要条件

$n(\geq 3)$阶极大外平面图 G 所有顶点在外部面边界上

至少有 3 个顶点度数 ≤ 3

$n-2$个次数为3的内部面，一个次数为n的外部面

$$2m = \Sigma deg(R_i) = 3(n-2) + n = 2n-3$$

若至多有两个顶点度小于等于3，则有n−2个大于等于4

$$2m \geq 4(n-2) + 2 * 2 = 2n-2$$

极大外平面图必要条件

$n(\geq 3)$阶极大外平面图 G 所有顶点在外部面边界上

$\Longrightarrow$ 至少有 2 个顶点度数 $= 2$

(2度顶点提供2条内部面与外部面的边界,

其他顶点提供0或1条边界)

$\Longrightarrow \kappa = 2$

(K_3;

圈$\Rightarrow$无割点;

2度点 $\Rightarrow$ 有2点割集)

小结

- ☞ 对偶图
- ☞ 自对偶图
- ☞ 外平面图
- ☞ 极大外平面图