单元2.1

有序对与卡氏积

本节内容提要

- 有序对(有序二元组)
- 有序三元组、有序n元组
- 卡氏积
- 卡氏积性质

关于序

序

熵

- 伦理纲常：天地君亲师，君为臣纲
- 失序：牝鸡司晨
- 位次：位在廉颇之右，座位的尊卑
- 排名：论文作者
- 序结构：线性表、栈、队列、数组、树、图
- 排序：冒泡排序、选择排序、快速排序、插入排序、shell排序、归并排序、基数排序...

生活中的有序对

序偶

<委托人、受托人>

<出借人、借用人>

<今借给、今借到>

<打败了、战胜了>

若$< x_1, y_1 > = < x_2, y_2 >$，要保证$x_1 = x_2, y_1 = y_2$

集合是无序的，那如何基于集合定义序？

有序对

称$\{\{a\},\{a,b\}\}$为由元素a,b构成的有序对

记作$<a,b>$

(*Kuratowski*)

- a 是第一元素， b是第二元素
- $<a,b>$也记作(a,b)
- a,b可以相同

练习

$$<\phi,\phi> = \{\{\phi\},\{\phi,\phi\}\}$$

$$= \{\{\phi\},\{\phi\}\}$$

$$= \{\{\phi\}\}$$

如何确定有序对中的第一个元素？

$$\cap <a,b>$$

$$= \cap\{\{a\},\{a,b\}\}$$

$$= \{a\}$$

引理1

$$\{x,a\}=\{x,b\}\Leftrightarrow a=b$$

证明： ($\Leftarrow$) **显然** ($\Rightarrow$) **分两种情况**

1. $x=a$

$$\{x,a\}=\{x,b\}$$
$$\Rightarrow \{a,a\}=\{a,b\}$$
$$\Rightarrow \{a\}=\{a,b\}$$
$$\Rightarrow a=b$$

2. $x\neq a$ $a\in\{x,a\}=\{x,b\}\Rightarrow a=b$

引理2

若$\mathcal{A}=\mathcal{B}\neq\phi$，则

(1) $\bigcup\mathcal{A}=\bigcup\mathcal{B}$

(2) $\bigcap\mathcal{A}=\bigcap\mathcal{B}$

(1) $\forall x, x\in\bigcup\mathcal{A}$

$\Leftrightarrow \exists z(z\in\mathcal{A}\wedge x\in z)$

$\Leftrightarrow \exists z(z\in\mathcal{B}\wedge x\in z)$

$\Leftrightarrow x\in\bigcup\mathcal{B}$

(2) $\forall x, x\in\bigcap\mathcal{A}$

$\Leftrightarrow \forall z(z\in\mathcal{A}\rightarrow x\in z)$

$\Leftrightarrow \forall z(z\in\mathcal{B}\rightarrow x\in z)$

$\Leftrightarrow x\in\bigcap\mathcal{B}$

定理2.1

$$<a,b> = <c,d> \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$$

证明： （$\Leftarrow$） 显然 （$\Rightarrow$） 分两步

$<a,b> = <c,d>$

$\Rightarrow \{\{a\},\{a,b\}\} = \{\{c\},\{c,d\}\}$

$\Rightarrow \cap\{\{a\},\{a,b\}\} = \cap\{\{c\},\{c,d\}\}$

$\Rightarrow \{a\} = \{c\}$

$\Rightarrow a = c$

$<a,b> = <c,d>$

$\Rightarrow \{\{a\},\{a,b\}\} = \{\{c\},\{c,d\}\}$

$\Rightarrow \cup\{\{a\},\{a,b\}\} = \cup\{\{c\},\{c,d\}\}$

$\Rightarrow \{a,b\} = \{c,d\}$

$\Rightarrow b = d$

推论

$$a \neq b \Rightarrow < a, b > \neq < b, a >$$

反证：

$$< a, b > = < b, a > \Leftrightarrow a = b$$

与$a \neq b$矛盾

有序对的另外一种定义形式

$$\{\{\emptyset, \{a\}\}, \{\{b\}\}\}$$

Norbert Wiener

有序三元组

有序三元组：

$$< a, b, c > = << a, b >, c >$$

有序n元组：

$$< a_1, a_2, \ldots, a_n > = << a_1, a_2, \ldots, a_{n-1} >, a_n >$$

定理2：

$$< a_1, a_2, \ldots, a_n > = < b_1, b_2, \ldots, b_n >$$

$$\Leftrightarrow$$

$$a_i = b_i, i = 1,2, \ldots, n$$

练习

$$< a,b,c > = << a,b >,c >$$

$$= \{\{< a,b >\},\{< a,b >,c\}\}$$

$$= \left\{\left\{\{\{a\},\{a,b\}\}\right\},\left\{\{\{a\},\{a,b\}\},c\right\}\right\}$$

$$< a,< b,c >> = \{\{a\},\{a,< b,c >\}\}$$

$$= \left\{\{a\},\left\{a,\{\{b\},\{b,c\}\}\right\}\right\}$$

卡氏积

卡氏积：

$$A \times B = \{ < x, y > | x \in A \wedge y \in B \}$$

设 $A = \{\phi, a\}$, $B = \{1, 2, 3\}$

则 $A \times B = \{< \phi, 1 >, < \phi, 2 >, < \phi, 3 >, < a, 1 >, < a, 2 >, < a, 3 >\}$

$B \times A = \{< 1, \phi >, < 1, a >, < 2, \phi >, < 2, a >, < 3, \phi >, < 3, a >\}$

$A \times A = \{< \phi, \phi >, < \phi, a >, < a, \phi >, < a, a >\}$

$B \times B = \{< 1, 1 >, < 1, 2 >, < 1, 3 >, < 2, 1 >, < 2, 2 >, < 2, 3 >,$

$< 3, 1 >, < 3, 2 >, < 3, 3 >\}$

卡氏积性质

非交换：$A \times B \neq B \times A$

(除非$A = \phi \vee B = \phi \vee A = B$)

非结合：$(A \times B) \times C \neq A \times (B \times C)$

(除非$A = \phi \vee B = \phi \vee C = \phi$)

$A = \{1\}, \quad B = \{2\}$

$A \times B = \{< 1,2 >\}$

$B \times A = \{< 2,1 >\}$

$A = \{1\}, B = \{2\}, C = \{3\}$

$(A \times B) \times C = \{<< 1,2 >,3 >\}$

$A \times (B \times C) = \{< 1,< 2,3 >>\}$

卡氏积性质

分配律：

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$

$$(B \cup C) \times A = (B \times A) \cup (C \times A)$$

$$(B \cap C) \times A = (B \times A) \cap (C \times A)$$

卡氏积分配律的证明

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$

$$\forall < x, y > \in A \times (B \cup C)$$

$$\Leftrightarrow x \in A \wedge y \in B \cup C$$

$$\Leftrightarrow x \in A \wedge (y \in B \vee y \in C)$$

$$\Leftrightarrow (x \in A \wedge y \in B) \vee (x \in A \wedge y \in C)$$

$$\Leftrightarrow (< x, y > \in A \times B) \vee (< x, y > \in A \times C)$$

$$\Leftrightarrow < x, y > \in (A \times B) \cup (A \times C)$$

卡氏积分配律的一个练习题

$$(A \times C) \cup (B \times D) \subseteq (A \cup B) \times (C \cup D)$$

$$(A \cup B) \times (C \cup D)$$

$$= \big((A \cup B) \times C\big) \cup \big((A \cup B) \times D\big)$$

$$= \big((A \times C) \cup (B \times C)\big) \cup \big((A \times D) \cup (B \times D)\big)$$

$$= (A \times C) \cup (B \times C) \cup (A \times D) \cup (B \times D)$$

卡氏积的其他性质

1. $A \times B = \phi \Leftrightarrow A = \phi \vee B = \phi$

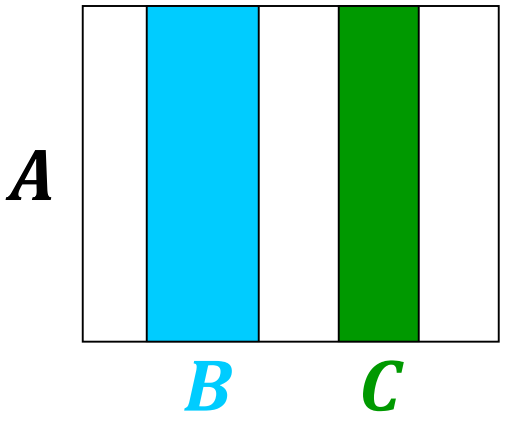
2. 若$A \neq \phi$, 则$A \times B \subseteq A \times C \Leftrightarrow B \subseteq C$

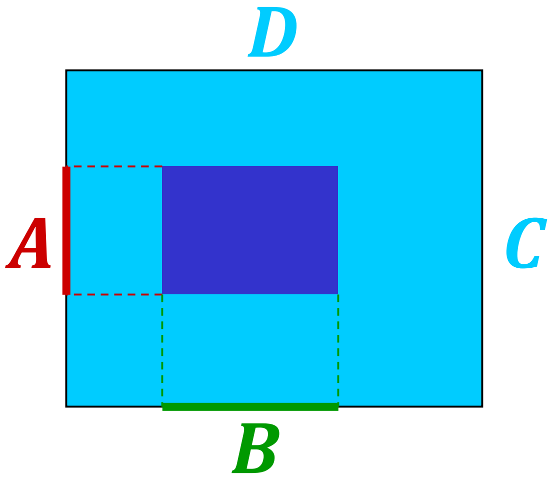
3. 若$A \subseteq C \wedge B \subseteq D \Rightarrow A \times B \subseteq C \times D$

并且当 $(A = B = \phi) \vee (A \neq \phi \wedge B \neq \phi)$时

若$A \times B \subseteq C \times D \Rightarrow A \subseteq C \wedge B \subseteq D$

卡氏积图示





$A \times (B \cup C) =$

$(A \times B) \cup (A \times C)$

$A \subseteq C \wedge B \subseteq D \Longrightarrow$

$A \times B \subseteq C \times D$

证明 $A \times B \subseteq A \times C \Leftrightarrow B \subseteq C$

$(\Longrightarrow)$

若 $B = \phi$, 则 $B \subseteq C$

设 $B \neq \phi$, 由 $A \neq \phi$, 设 $x \in A$

$\forall y \in B$

$\Longrightarrow < x, y > \in A \times B$

$\Longrightarrow < x, y > \in A \times C$

$\Longrightarrow x \in A \wedge y \in C$

$\Longrightarrow y \in C$

$\therefore B \subseteq C$

$(\Longleftarrow)$

若 $B = \phi$, 则 $A \times B = \phi$

$\therefore A \times B = \phi \subseteq A \times C$

设 $B \neq \phi$

$\forall < x, y > \in A \times B$

$\Leftrightarrow x \in A \wedge y \in B$

$\Longrightarrow x \in A \wedge y \in C$

$\Leftrightarrow < x, y > \in A \times C$

$\therefore A \times B \subseteq A \times C$

n维卡氏积

n维卡氏积：

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{< x_1, x_2, \ldots, x_n > \mid x_1 \in A_1 \wedge x_2 \in A_2 \wedge \cdots \wedge x_n \in A_n\}$$

$$A^n = A \times A \times \cdots \times A$$

设 $|A_i| = n_i$

则 $|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n| = n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_n$

卡氏积关于集合差的一个练习题

$$(A-B)\times(C-D)\subseteq(A\times C)-(B\times D)$$

$$\forall\langle x,y\rangle\in(A-B)\times(C-D)$$

$$\Leftrightarrow x\in(A-B)\wedge y\in(C-D)$$

$$\Leftrightarrow x\in A\wedge y\in C\wedge x\notin B\wedge y\notin D$$

$$\Rightarrow\langle x,y\rangle\in A\times C\wedge\langle x,y\rangle\notin B\times D$$

$$\Leftrightarrow\langle x,y\rangle\in(A\times C)-(B\times D)$$

小结

- 有序对(有序二元组)

$$<a,b> = \{\{a\},\{a,b\}\}$$

- 有序三元组，有序n元组
- 卡氏积 $A \times B = \{ <x,y> \mid x \in A \wedge y \in B \}$
- 卡氏积性质：非结合、非交换、分配律等