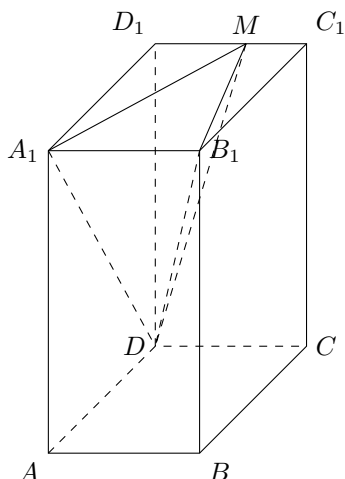
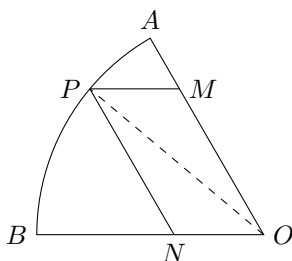


1. 已知全集 $U = \{x|x < 2\}$, 集合 $A = \{x|x < 1\}$, 则 $\complement_U A =$ _____.
2. 设集合 $A = \{x||x-2| < 1, x \in \mathbf{R}\}$, $B = \{x|\frac{x-3}{x-1} \geq 0\}$, 则 $A \cup B =$ _____.
3. 若函数 $f(x) = 2^x - 3$, 则 $f^{-1}(1) =$ _____.
4. 设函数 $f(x) = \begin{cases} 2^{-x} - 1, & x \leq 0, \\ x^{\frac{1}{2}}, & x > 0, \end{cases}$ 若 $f(x_0) > 1$, 则 x_0 的取值范围是_____.
5. 已知 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, 则方程 $\begin{vmatrix} 2\sin x & 1 \\ 1 & 2\cos x \end{vmatrix} = 0$ 的解集是_____.
6. 关于 x 的不等式 $x^2 + ax + 1 > 0$ 有解, 则实数 a 的取值范围是_____.
7. 已知 $f(x) = x^2 + 2(a-2)x + 4$, 对 $x \in [-3, 1]$, $f(x) > 0$ 恒成立, 则实数 a 的取值范围是_____.
8. 设正数 a, b , 当 $(a+b)^2 + \frac{1}{4ab}$ 取最小值时, a 的值为_____.
9. 设椭圆 $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} + y^2 = 1 (a > 1)$ 的左顶点为 A , 过点 A 的直线 l 与 Γ 相交于另一点 B , 与 y 轴相交于点 C . 若 $|OA| = |OC|$, $|AB| = |BC|$, 则 $a =$ _____.
10. 已知常数 $b, c \in \mathbf{R}$. 若函数 $f(x) = (x^2 + x - 2)(x^2 + bx + c)$ 为偶函数, 则 $b + c =$ _____.
11. 记 a, b, c, d, e, f 为 $1, 2, 3, 4, 5, 6$ 的任意一个排列, 则使得 $(a+b)(c+d)(e+f)$ 为奇数的排列共有_____个.
12. 已知函数 $f(x) = |x + \frac{1}{x} + a|$, 若对任意实数 a , 关于 x 的不等式 $f(x) \geq m$ 在区间 $[\frac{1}{2}, 3]$ 上总有解, 则实数 m 的取值范围为_____.
13. 已知 $x \in \mathbf{R}$, 则“ $x > 0$ ”是“ $x > 1$ ”的 ().
 A. 充分非必要条件 B. 必要非充分条件 C. 充要条件 D. 既非充分又非必要条件
14. 已知 a, b, c 是互不相等的正数, 则下列不等式中正确的是 ().
 A. $|a-b| < |a-c| + |c-b|$ B. $a^2 + \frac{1}{a^2} \leq a + \frac{1}{a}$
 C. $|a-b| + \frac{1}{a-b} \geq 2$ D. $\sqrt{a+3} - \sqrt{a+1} \leq \sqrt{a+2} - \sqrt{a}$
15. 设 a, b, c 表示三条互不重合的直线, α, β 表示两个不重合的平面, 则使得“ $a \parallel b$ ”成立的一个充分条件为 ().
 A. $a \perp c, b \perp c$ B. $a \parallel \alpha, b \parallel \alpha$
 C. $a \parallel \alpha, a \parallel \beta, \alpha \cap \beta = b$ D. $b \perp \alpha, c \parallel \alpha, a \perp c$
16. 已知函数 $y = f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, 满足对任意 $x \in (0, +\infty)$, 恒有 $f[f(x) - \frac{1}{x}] = 4$. 若函数 $y = f(x) - 4$ 的零点个数为有限的 $n (n \in \mathbf{N}^*)$ 个, 则 n 的最大值为 ().
 A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

17. 如图, 在长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $2AB = BC = AA_1$, 点 M 为棱 C_1D_1 上的动点.



- (1) 求三棱锥 $D - A_1B_1M$ 与长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的体积比;
 (2) 若 M 为棱 C_1D_1 的中点, 求直线 DB_1 与平面 DA_1M 所成角的大小.
18. 已知常数 $a \in \mathbf{R}^+$, 函数 $f(x) = 3^x + a^2 \cdot 3^{-x}$.
- (1) 若 $a = \sqrt{3}$, 解关于 x 的不等式 $f(x) < 4$;
 (2) 若 $f(x)$ 在 $[3, +\infty)$ 上为增函数, 求 a 的取值范围.
19. 某居民小区为缓解业主停车难的问题, 拟对小区内一块扇形空地 AOB 进行改建. 如图所示, 平行四边形 $OMPN$ 区域为停车场, 其余部分建成绿地, 点 P 在围墙 \widehat{AB} 上, 点 M 和 N 分别在道路 OA 和道路 OB 上, 且 $OA = 60\text{m}$, $\angle AOB = \frac{\pi}{3}$. 设 $\angle POB = \theta$.



- (1) 求停车场面积 S (单位: m^2) 关于 θ 的函数关系式, 并写出 θ 的取值范围;
 (2) 求停车场面积 S 的最大值以及相应 θ 的值.
20. 在平面直角坐标系 xOy 中, 抛物线 $\Gamma: y^2 = 4x$, 点 $C(1, 0)$. A, B 为 Γ 上的两点, A 在第一象限, 满足 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = -4$.
- (1) 求证: 直线 AB 过定点, 并求定点坐标;
 (2) 设 P 为 Γ 上的动点, 求 $\frac{|OP|}{|CP|}$ 的取值范围;
 (3) 记 $\triangle AOB$ 的面积为 S_1 , $\triangle BOC$ 的面积为 S_2 , 求 $S_1 + S_2$ 的最小值.

21. 已知函数 $f(x) = x|x - a|$, 其中 a 为常数.

(1) 当 $a = 1$ 时, 解不等式 $f(x) < 2$;

(2) 已知 $g(x)$ 是以 2 为周期的偶函数, 且当 $0 \leq x \leq 1$ 时, 有 $g(x) = f(x)$. 若 $a < 0$, 且 $g(\frac{3}{2}) = \frac{5}{4}$, 求函数 $y = g(x) (x \in [1, 2])$ 的反函数;

(3) 若在 $[0, 2]$ 上存在 n 个不同的点 $x_i (i = 1, 2, \dots, n, n \geq 3)$, $x_1 < x_2 < \dots < x_n$, 使得 $|f(x_1) - f(x_2)| + |f(x_2) - f(x_3)| + \dots + |f(x_{n-1}) - f(x_n)| = 8$, 求实数 a 的取值范围.

22. 设集合 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{x | x < 3\}$, 则 $A \cap B =$ _____.

23. 已知常数 $a \in \mathbf{R}$, 函数 $f(x) = x^2 (-1 \leq x \leq a)$ 是偶函数, 则 $a =$ _____.

24. 设函数 $f(x) = \lg(x+1)$ 的反函数为 $f^{-1}(x)$, 则 $f^{-1}(1) =$ _____.

25. 函数 $f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{x}}$ 的定义域为_____.

26. 已知常数 $a \in \mathbf{R}$, 设 $p: 1 \leq x < 2$, $q: x < a$. 若 p 是 q 的充分条件, 则 a 的取值范围为_____.

27. 关于 x 的方程 $\log_2 x + \log_2(x-3) = 2$ 的解为_____.

28. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , 满足对任意 $x \in \mathbf{R}$, 恒有 $f(x) + f(x+2) = 4$. 若 $f(1) + f(2) = 1$, 则 $f(2021) - f(2020) =$ _____.

29. 已知常数 $a \in \mathbf{R}$, 函数 $f(x) = a \cdot 4^x + 2^x + 1$ 在 $[3, +\infty)$ 上单调递减, 则 a 的取值范围为_____.

30. 已知常数 $m, n \in \mathbf{Z}$, 若对任意 $x \in [0, +\infty)$, 不等式 $(mx - 2)(x^2 - 2n) \geq 0$ 恒成立, 则 $m + n$ 的取值集合为_____.

31. 已知常数 $a \in \mathbf{R}$, 函数 $f(x) = x^2 - 4x + a$, $g(x) = ax^2 - 8x + 4$. 若存在 $x_0 \in (0, +\infty)$, 使得 $f(x_0)$ 与 $g(x_0)$ 都不是正数, 则 a 的取值范围为_____.

32. 对任意的非零实数 a, b , 下列不等式恒成立的是 ().

A. $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \geq 2$

B. $(a + b)(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}) \geq 4$

C. $\frac{|a+b|}{2} \geq 2\sqrt{|ab|}$

D. $\frac{a^2 + b^2}{2} \geq \left(\frac{a + b}{2}\right)^2$

33. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , $f(x)$ 满足对任意 $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, 当 $x_1 \neq x_2$ 时, 恒有 $|f(x_1) - f(x_2)| > 2|x_1 - x_2|$. 对于命题: ① $f(x)$ 的解析式可以是 $f(x) = x^3 + 2021x$; ② $f(x)$ 的解析式可以是 $f(x) = 2021^{-x}$, 下列判断正确的是 ().

A. ①、②均为真命题

B. ①、②均为假命题

C. ①为真命题、②为假命题

D. ①为假命题、②为真命题

34. 已知常数 $a \in \mathbf{R}$, 函数 $f(x) = ax^2 + \lg \frac{1+x}{1-x}$.

(1) 若 $a = 0$, 判断 $f(x)$ 的单调性并证明;

(2) 问: 是否存在 a , 使得 $f(x)$ 为奇函数? 若存在, 求出所有 a 的值; 若不存在, 说明理由.

35. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, 若对任意 $x \in (0, +\infty)$, 恒有 $f(2x) = 2f(x)$, 则称 $f(x)$ 为“2 阶缩放函数”.

(1) 已知函数 $f(x)$ 为“2 阶缩放函数”, 当 $x \in (1, 2]$ 时, $f(x) = 1 - \log_2 x$, 求 $f(2\sqrt{2})$ 的值;

(2) 已知函数 $f(x)$ 为“2 阶缩放函数”, 当 $x \in (1, 2]$ 时, $f(x) = \sqrt{2x - x^2}$, 求证: 函数 $y = f(x) - x$ 在 $(1, +\infty)$ 上无零点.

36. 设全集 $U = \mathbf{R}$, $A = (-\infty, 3)$, 则 $\complement_U A =$ _____.

37. 函数 $f(x) = x^{-\frac{1}{2}}$ 的定义域为_____.

38. 已知函数 $f(x)$ 的反函数 $f^{-1}(x) = \log_2 x$, 则 $f(-1) =$ _____.

39. 已知球的半径为 2, 则它的体积为_____.

40. 已知 $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}$, $\alpha \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, 则 $\sin(\alpha + \frac{3\pi}{2}) =$ _____.

41. 已知圆锥的底面半径为 1cm, 侧面积为 $2\pi\text{cm}^2$, 则母线与底面所成角的大小为_____.

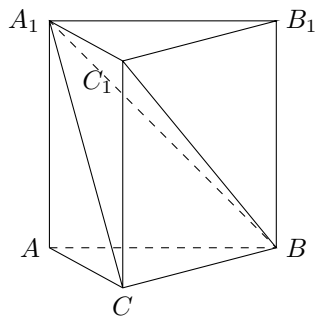
42. 已知 $(x^2 + \frac{2}{x})^n$ 的二项展开式中, 所有二项式系数的和为 512, 则展开式中的常数项为_____ (结果用数值表示).

43. $f(x)$ 是偶函数, 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = 2^x - 1$, 则不等式 $f(x) > 1$ 的解集为_____.

44. 方程 $1 + \log_2 x = \log_2(x^2 - 3)$ 的解为_____.

45. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + (4a - 3)x + 3a, & x < 0, \\ \log_a(x + 1) + 1, & x \geq 0, \end{cases}$ ($a > 0, a \neq 1$) 在 \mathbf{R} 上单调递减, 且关于 x 的方程 $|f(x)| = 2 - x$ 恰好有两个不相等的实数解, 则 a 的取值范围是_____.

46. 我国古代数学名著《九章算术》中记载了有关特殊几何体的定义: 阳马指底面为矩形, 一侧棱垂直于底面的四棱锥, 堑堵指底面是直角三角形, 且侧棱垂直于底面的三棱柱. 某堑堵 $ABC - A_1B_1C_1$, $AC \perp BC$, 若 $A_1A = AB = 2$, 当阳马 $B - AA_1C_1C$ 的体积最大时, 二面角 $C - A_1B - C_1$ 的大小为_____.



47. 对于全集 \mathbf{R} 的子集 A , 定义函数 $f_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \in \complement_{\mathbf{R}} A \end{cases}$ 为 A 的特征函数, 设 A, B 为全集 \mathbf{R} 的子集,

① 若 $A \subseteq B$, 则 $f_A(x) \leq f_B(x)$; ② $f_{\complement_{\mathbf{R}} A}(x) = 1 - f_A(x)$;

③ $f_{A \cap B}(x) = f_A(x) \cdot f_B(x)$; ④ $f_{A \cup B}(x) = f_A(x) + f_B(x)$;

⑤ $f_{A \cap \complement_{\mathbf{R}} B}(x) = f_A(x) - f_B(x)$; ⑥ 对于任意 $x \in \mathbf{R}$, 若 $f_A(x) \cdot f_B(x) = 0$ 恒成立, 则 $A \cap B = \emptyset$.

其中正确的命题为_____ (填所有正确命题的序号).

48. 已知实数 a, b 满足 $a > b$, 则下列不等式中恒成立的是 ().

- A. $a^2 > b^2$ B. $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ C. $|a| > |b|$ D. $2^a > 2^b$

49. 下列函数中, 值域为 $(0, +\infty)$ 的是 ().

- A. $y = x^2$ B. $y = \frac{2}{x}$ C. $y = 2^x$ D. $y = |\log_2 x|$

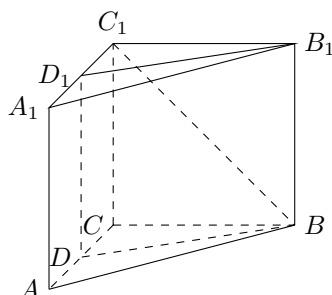
50. 从正方体的 8 个顶点中选取 4 个作为顶点, 可得到四面体的个数为 ().

- A. $C_8^4 - 12$ B. $C_8^4 - 8$ C. $C_8^4 - 6$ D. $C_8^4 - 4$

51. 设集合 $A = \{y | y = a^x, x > 0\}$ (其中常数 $a > 0, a \neq 1$), $B = \{y | y = x^k, x \in A\}$ (其中常数 $k \in \mathbf{Q}$), 则“ $k < 0$ ”是“ $A \cap B = \emptyset$ ”的 ().

- A. 充分非必要条件 B. 必要非充分条件
C. 充分必要条件 D. 既非充分又非必要条件

52. 如图所示, 在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, 底面是等腰直角三角形, $\angle ACB = 90^\circ$, $CA = CB = CC_1 = 2$. 点 D, D_1 分别是棱 AC, A_1C_1 的中点.

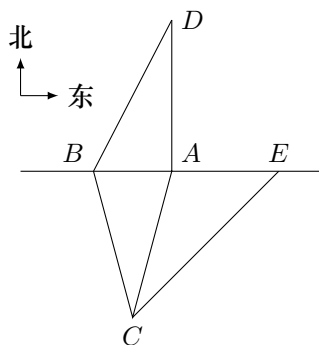


- (1) 求四棱锥 $C - AA_1B_1B$ 的体积;
(2) 求直线 BC_1 与平面 DBB_1D_1 所成角的大小.

53. 设常数 $k \in \mathbf{R}$, $f(x) = k \cos^2 x + \sqrt{3} \sin x \cos x, x \in \mathbf{R}$.

- (1) 若 $\tan \alpha = 2$ 且 $f(\alpha) = \sqrt{3}$, 求实数 k 的值;
(2) 设 $k = 1$, $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c . 若 $f(A) = 1, a = \sqrt{7}, b = 3$, 求 $\triangle ABC$ 的面积 S .

54. 东西向的铁路上有两个道口 AB , 铁路两侧的公路分布如图, C 位于 A 的南偏西 15° , 且位于 B 的南偏东 15° 方向, D 位于 A 的正北方向, $AC = AD = 2\text{km}$, C 处一辆救护车欲通过道口前往 D 处的医院送病人, 发现北偏东 45° 方向的 E 处 (火车头位置) 有一列火车自东向西驶来, 若火车通过每个道口都需要 1 分钟, 救护车和火车的速度均为 60km/h .



(1) 判断救护车通过道口 A 是否会受火车影响, 并说明理由;

(2) 为了尽快将病人送到医院, 救护车应选择 AB 中的哪个道口? 通过计算说明.

55. 已知函数 $f(x) = \frac{ax^2 + 1}{bx + c}$ 是奇函数, a, b, c 为常数.

(1) 求实数 c 的值;

(2) 若 $a, b \in \mathbf{Z}$, 且 $f(1) = 2, f(2) < 3$, 求 $f(x)$ 的解析式;

(3) 已知 $b > 0$, 若 $f(x) \geq f(1)$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立, 且 $\{x | f[f(x)] \geq x\} \cap [1, 2] \neq \emptyset$, 求 b 的取值范围.

56. 记函数 $f(x)$ 的定义域为 D . 如果存在实数 a, b 使得 $f(a-x) + f(a+x) = b$ 对任意满足 $a-x \in D$ 且 $a+x \in D$ 的 x 恒成立, 则称 $f(x)$ 为 Ψ 函数.

(1) 设函数 $f(x) = \frac{1}{x} - 1$, 试判断 $f(x)$ 是否为 Ψ 函数, 若是求出 a, b , 若不是请说明理由;

(2) 设函数 $g(x) = \frac{1}{2^x + t}$, 其中常数 $t \neq 0$, 证明: $g(x)$ 是 Ψ 函数;

(3) 若 $h(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的 Ψ 函数, 且函数 $h(x)$ 的图像关于直线 $x = m$ (m 为常数) 对称, 试判断 $h(x)$ 是否为周期函数? 并证明你的结论.

57. 不等式 $\frac{1}{x} \leq 3$ 的解集是_____.

58. 若函数 $y = \sin(2x + \frac{\pi}{4})$, 则它的最小正周期 $T =$ _____.

59. 若函数 $y = \log_2(x - m) + 1$ 的反函数的图像经过点 $(1, 3)$, 则实数 $m =$ _____.

60. 函数 $f(x) = x + \frac{1}{x-2}$ 的值域是_____.

61. 已知函数 $f(x)$ 的周期为 2, 且当 $0 < x \leq 1$ 时, $f(x) = \log_4 x$, 那么 $f(\frac{9}{2}) =$ _____.

62. 已知集合 $M = \{y | y = 3 \sin x, x \in \mathbf{R}\}$, $N = \{x | |x| < a\}$, 若 $M \subseteq N$, 则实数 a 的取值范围是_____.

63. 函数 $f(x) = |x^2 - 1| + |x - 2|$ 的最小值是_____.

64. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x, & x \leq a, \\ -x + 2, & x > a, \end{cases}$ 若存在实数 x_0 , 使得对于任意的实数 x 都有 $f(x) \leq f(x_0)$ 成立, 则实数 a 的取值范围是_____.

65. 函数 $f(x) = \frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x+2} + \frac{x+2}{x+3}$ 图像的对称中心的坐标是_____.

66. 若 $f(x) = |x+1| + |x+2| + \cdots + |x+2020| + |x-1| + |x-2| + \cdots + |x-2020|$, $x \in \mathbf{R}$, 且 $f(a^2 - 3a + 2) = f(a - 1)$, 则满足条件的所有整数 a 的和是_____.

67. 王昌龄《从军行》中两句诗“黄沙百战穿金甲，不破楼兰终不还”，其中后一句中“攻破楼兰”是“返回家乡”的()条件.

- A. 充分 B. 必要 C. 充要 D. 既不充分也不必要

68. 为了得到函数 $y = \sin(2x + \frac{\pi}{3})$ 的图像, 可将函数 $y = \sin x$ 的图像().

- A. 左移 $\frac{\pi}{3}$ 个长度 B. 右移 $\frac{\pi}{3}$ 个长度 C. 左移 $\frac{\pi}{6}$ 个长度 D. 右移 $\frac{\pi}{6}$ 个长度

69. 已知 $M, N, P \subseteq \mathbf{R}$, $M = \{x | f(x) = 0\}$, $N = \{x | g(x) = 0\}$, $P = \{x | f(x)g(x) = 0\}$, 则集合 P 恒满足的关系为().

- A. $P = M \cup N$ B. $P \neq \emptyset$ C. $P = \emptyset$ D. $P \subseteq (M \cup N)$

70. 已知 a_1, a_2 与 b_1, b_2 是 4 个不同的实数, 关于 x 的方程 $|x - a_1| + |x - a_2| = |x - b_1| + |x - b_2|$ 的解集为 A , 则集合 A 中元素的个数为().

- A. 1 个 B. 0 个或 1 个或 2 个
C. 0 个或 1 个或 2 个或无限个 D. 1 个或无限个

71. 设函数 $f(x)$ 是定义在 $[a, b]$ 上的函数, 若存在 $x_0 \in (a, b)$, 使得 $f(x)$ 在 $[a, x_0]$ 上单调递增, 在 $[x_0, b]$ 上单调递减, 则称 $f(x)$ 为 $[a, b]$ 上的单峰函数, x_0 称为峰点.

(1) 判断下列函数中, 哪些是 $[0, 2]$ 上的单峰函数? 若是, 指出峰点; 若不是, 说出原因;

① $f_1(x) = 3x - x^2$; ② $f_2(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$;

(2) 若函数 $f(x)$ 是区间 $[0, 1]$ 上的单峰函数, 证明: 对任意的 $x_1, x_2 \in (0, 1)$, $x_1 < x_2$, 若 $f(x_1) \geq f(x_2)$, 则峰点在区间 $(0, x_2)$ 内; 若 $f(x_1) \leq f(x_2)$, 则峰点在区间 $(x_1, 1)$ 内.

72. 设 $\mu(x)$ 表示不小于 x 的最小整数, 例如 $\mu(0.3) = 1$, $\mu(-2.5) = 2$.

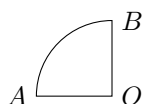
(1) 解方程 $\mu(x - 1) = 3$;

(2) 设 $f(x) = \mu(x \cdot \mu(x))$, $n \in \mathbf{N}^*$, 试分别求出 $f(x)$ 在区间 $(0, 1]$ 、 $(1, 2]$ 以及 $(2, 3]$ 上的值域; 若 $f(x)$ 在区间 $(0, n]$ 上的值域为 M_n , 求集合 M_n 中的元素的个数;

(3) 设实数 $a > 0$, $g(x) = x + a \cdot \frac{\mu(x)}{x} - 2$, $h(x) = \frac{\sin(\pi x) + 2}{x^2 - 5x + 7}$, 若对于任意 $x_1, x_2 \in (2, 4]$ 都有 $g(x_1) > h(x_2)$, 求实数 a 的取值范围.

73. 函数 $y = \log_2(4 - x^2)$ 的定义域是_____.

74. 如图所示, 弧长为 $\frac{\pi}{2}$, 半径为 1 的扇形 (及其内部) 绕 OB 所在的直线旋转一周, 所形成的几何体的表面积为_____.



88. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \log_{\frac{1}{2}}(1-x), & -1 \leq x \leq n, \\ 2^{2-|x-1|} - 3, & n < x \leq m, \end{cases}$ ($n < m$) 的值域是 $[-1, 1]$, 有下列结论: ① 当 $n = 0$ 时, m 的取值范围为 $(0, 2]$; ② 当 $n = \frac{1}{2}$ 时, m 的取值范围为 $(\frac{1}{2}, 2]$; ③ 当 $n \in [0, \frac{1}{2})$ 时, m 的取值范围为 $[1, 2]$; ④ 当 $n \in [0, \frac{1}{2})$ 时, m 的取值范围为 $(n, 2]$; 其中结论正确的所有的序号是 ().

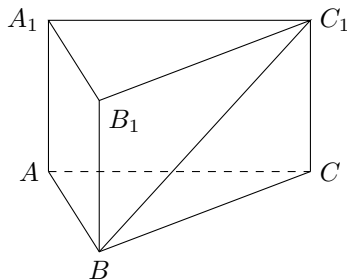
A. ①②

B. ③④

C. ②③

D. ②④

89. 如图, 在正三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $AA_1 = 4$, 异面直线 BC_1 与 AA_1 所成角的大小为 $\frac{\pi}{3}$.



(1) 求正三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 的体积;

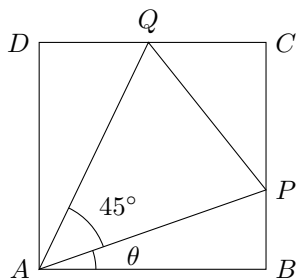
(2) 求直线 BC_1 与平面 AA_1C_1C 所成角的大小.

90. 已知函数 $f(x) = \frac{3}{2} \sin \omega x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \omega x$ (其中 $\omega > 0$).

(1) 若 $\omega = 2$, $0 < \alpha < \pi$, 且 $f(\alpha) = \frac{3}{2}$, 求 α 的值;

(2) 若函数 $f(x)$ 的最小正周期为 3π , 求 ω 的值, 并求函数 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上的单调递增区间.

91. 如图, 有一块边长为 1 的正方形区域 $ABCD$, 在点 A 处有一个可转动的探照灯, 其照射角 $\angle PAQ$ 始终为 45° (其中点 P 、 Q 分别在边 BC 、 CD 上), 设 $\angle PAB = \theta$, $\tan \theta = t$.



(1) 当三点 C 、 P 、 Q 不共线时, 求直角 $\triangle CPQ$ 的周长;

(2) 设探照灯照射在正方形 $ABCD$ 内部区域 $PAQC$ 的面积为 S , 试求 S 的最大值.

92. 定义区间 (m, n) 、 $[m, n]$ 、 $(m, n]$ 、 $[m, n)$ 的长度均为 $n - m$, 已知不等式 $\frac{7}{6-x} \geq 1$ 的解集为 A .

(1) 求 A 的长度;

(2) 函数 $f(x) = \frac{(a^2 + a)x - 1}{a^2 x}$ ($a \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$) 的定义域与值域都是 $[m, n]$ ($n > m$), 求区间 $[m, n]$ 的最大长度;

(3) 关于 x 的不等式 $\log_2 x + \log_2(tx + 3t) < 2$ 的解集为 B , 若 $A \cap B$ 的长度为 6, 求实数 t 的取值范围.

93. 对于函数 $y = f(x) (x \in D)$, 如果存在实数 $a, b (a \neq 0, \text{ 且 } a = 1, b = 0 \text{ 不同时成立})$, 使得 $f(x) = f(ax + b)$ 对 $x \in D$ 恒成立, 则称函数 $f(x)$ 为 “ (a, b) 映像函数”.

(1) 判断函数 $f(x) = x^2 - 2$ 是否是 “ (a, b) 映像函数”, 如果是, 请求出相应的 a, b 的值, 若不是, 请说明理由;

(2) 已知函数 $y = f(x)$ 是定义在 $[0, +\infty)$ 上的 “ $(2, 1)$ 映像函数”, 且当 $x \in [0, 1)$ 时, $f(x) = 2^x$, 求函数 $y = f(x) (x \in [3, 7))$ 的反函数;

(3) 在 (2) 的条件下, 试构造一个数列 $\{a_n\}$, 使得当 $x \in [a_n, a_{n+1}) (n \in \mathbf{N}^*)$ 时, $2x + 1$ 的取值范围为 $[a_{n+1}, a_{n+2})$, 并求 $x \in [a_n, a_{n+1}) (n \in \mathbf{N}^*)$ 时, 函数 $y = f(x)$ 的解析式, 及 $y = f(x) (x \in [0, +\infty))$ 的值域.

