1. 例 1 求 θ, 使复数 $z=\cos 2\theta+(\tan^2\theta-\tan\theta-2)i$ 是: (1) 实数. (2) 纯虚数. (3) 零. 解 (1) 由 $\tan^2\theta-\tan\theta-2=0$, 得 $\tan\theta=-1$, $\tan\theta=2$, $\theta=k\pi-\dfrac{\pi}{4}$, $\theta=k\pi+\arctan 2(k\in\mathbf{Z})$. (2) 由 $\begin{cases}\cos 2\theta=0,\\(\tan\theta-2)(\tan\theta+1)\neq 0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}\cos^2\theta-\sin^2\theta=0,\\(\tan\theta-2)(\tan\theta+1)\neq 0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\tan\theta=\pm 1,\\(\tan\theta-2)(\tan\theta+1)\neq 0,\end{cases}$ 则 $\tan\theta=1$, $\theta=k\pi+\dfrac{\pi}{4}(k\in\mathbf{Z})$. (3) 由 $\begin{cases}\cos 2\theta=0,\\(\tan\theta-2)(\tan\theta+1)=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}\tan\theta=\pm 1,\\(\tan\theta-2)(\tan\theta+1)=0,\end{cases}$ 则 $\tan\theta=-1$, $\theta=k\pi-\dfrac{\pi}{4}(k\in\mathbf{Z})$.

2. 复数和几何意义. 引进了“复平面”的概念以后, 复数 $z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$ 有两个几何意义: (1) 复数 $z=a+b\mathrm{i}(a,b\in R)$ 与复平面上的点 (a,b) 以一一对应. (2) 非零复数 $z=a+bi(a,b\in\mathbf{R},\ a^2+b^2\neq 0)$ 与复平面上自原点出发, 以点 $Z(a,b)$ 为终点的向量 $\overrightarrow{OZ}$ 一一对应. 需要特别说明的是, 非零复数和复平面上的向量并不是一一对应的, 这是因为向量具有“可平移性”, 这就是说, 两个方向一致、长度相等的向量是相等的.

3. 两个复数相等的条件. 两个复数 $z_1=a+b\mathrm{i}(a,b\in R)$ 和 $z_2=c+d\mathrm{i}(c,d\in R)$, 我们规定: $z_1=z_2\Leftrightarrow\begin{cases}a=c,\\b=d.\end{cases}$

特别地, 有 $a+bi=0\Leftrightarrow\begin{cases}a=0,\\b=0,\end{cases}\quad(a,b\in\mathbf{R})$.

4. 已知实数 a,x,y 满足 $a^2+(2+i)a+2xy+(x-y)i=0$, 则点 (x,y) 的轨迹是 ()

A. 直线　B. 圆心在原点的圆　C. 圆心不在原点的圆　D. 椭圆

解将题设之式整理得 $a^2+2a+2xy+(a+x-y)i=0$. $\begin{cases}a^2+2a+2xy=0,\\a+x-y=0.\end{cases}$ 由②, 得 $a=y-x$, 代入①, 得 $(y-x)^2+2(y-x)+2xy=0$ 即 $x^2+y^2-2x+2y=0$, $(x-1)^2+(y+1)^2=2$. 故应选 (C).

【训练题】

5. 若 $x,y\in\mathbf{R}$, 则 “$x=0$” 是 “$x+yi$ 为纯虚数” 的 ()

A. 充分不必要条件　B. 必要不充分条件　C. 充要条件　D. 既不充分也不必要条件

6. 复数 $a+b\mathrm{i}(a,b\in R)$ 在复平面内的对应点在虚轴上的一个充要条件是 ()

A. $a=0$　B. $b\neq 0$　C. $ab=0$　D. $\dfrac{a}{b}=0$

7. 下列结论中, 正确的是 ()

A. 复平面内, 原点是实轴与虚轴的公共点

B. 实数的共轭复数一定是实数, 虚数的共轭复数一定是虚数

C. 复数集 C 与复平面内所有向量所组成的集合是一一对应的. (1)) 若使得实数 x 对应于纯虚数 xi, 则实数集 R 与纯虚数集是一一对应的.

8. 复平面内, 若复数 $z = m^2(1+\mathrm{i}) - m(4+\mathrm{i}) - 6\mathrm{i}$ 所对应的点在第二象限, 则实数 m 的取值范围是 () (A)(0, 3). (B)(-2.0). (C)(3, 4)

D. $(-\infty, -2)$

9. 由方程 $|z|^2 - 8|z| + 15 = 0$ 所确定的复数在复平面内对应点的轨迹是 ()

A. 四个点　　B. 四条直线　　C. 一个圆　　D. 两个圆

10. 已知集合 $M = \{1, 2, (m^2-3m-1)+(m^2-5m+6)i, m \in \mathbf{R}\}$, $N = \{-1, 3\}$ 满足 $M \cap N \neq \varnothing$, 则 m 等于 ()

A. 0 或 3　　B. -1 或 3　　C. -1 或 6　　D. 3

11. 若复数 $z = 2m^2 - 3m - 2 + (m^2 - 3m + 2)\mathrm{i}$ 是纯虚数, 则实数 m 的值为 ()

A. 1 或 2　　B. $-\frac{1}{2}$ 或 2　　C. $-\frac{1}{2}$　　D. 2

12. 复平面内, 正方形的三个顶点对应的复数分别是 $1+2\mathrm{i}$, 0, $-2+\mathrm{i}$, 则第四个顶点所对应的复数为 ()

A. $3+i$　　B. $3-i$　　C. $1-3i$　　D. $-1+3i$

13. 判断下列命题的真假: (1)$x_1 + y_1 i = x_2 + y_2 i$ 的充要条件是 $x_1 = x_2$, 且 $y_1 = y_2$.() (2) 任意两个复数都不能比较大小.() (3) 若 $x, y \in \mathbf{R}$, 且 $x = y$, 则 $(x-y)+(x+y)i$ 是纯虚数.()

14. (1) 已知复数 $z = \dfrac{a^2+a-2}{a-3} + (a^2-4a+3)\mathrm{i}(a \in R)$. ① 若 $z \in \mathbf{R}$, 则 $a =$________; ② 若 z 是纯虚数, 则 $a =$________. (2) 已知 $z = (2\cos\theta - \sqrt{3}) + i(2\sin\theta - 1)$. ① 若 $z \in \mathbf{R}$, 则 $\theta =$________; ② 若 z 是纯虚数, 则 $\theta =$________. (3) 已知复数 $z = (\tan^2\theta + \tan\theta - 2) + \mathrm{i}(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$. ① 当 $\theta =$________ 时, z 为实数; ② 当 $\theta =$________ 时, z 为纯虚数; ③ 当 $\theta =$________ 时, $z = 0$. (4) 复平面内, 若复数 $z = (m^2-m-2) + (m^2-3m+2)\mathrm{i}$ 所对应的点在虚轴上, 则实数 m 的值等于________. (5) 复平面内, 若复数 $(m^2-8m+15)+(m^2-5m-14)i$ 所对应的点位于第四象限, 则实数 m 的取值范围是________.

15. (1) 满足 $|\log_3 x + 4i| = 5$ 的实数 x 的值是________. (2) 复平面内, 已知复数 $z = x - \frac{1}{3}\mathrm{i}$ 所对应的点都在单位圆内, 则实数 x 的取值范围是________. (3) 不等式 $|4 + i\log_{\frac{1}{2}}(x-1)| \geq |-3+4i|$ 的解集是________. (4) 若复数 $z = (x-1)+(2x-1)\mathrm{i}$ 的模小于 $\sqrt{10}$ 可, 则实数 x 的取值范围是________. (5) 若复数 $z = \cos\alpha + i(1-\sin\alpha)$, 则 $|z|$ 的取值范围是________.

16. (1) 若复数 $z_1=1-\mathrm{i}r\sin\alpha$ 与 $z_2=r\cos\alpha-\sqrt{3}\mathrm{i}(r>0)$ 相等, 则 $z_1=$__________. (2) 已知 $z_1=\sin 2\theta+i\cos\theta$, $z_2=\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta(0\le\theta<\pi)$. ① 若 $z_1=z_2$, 则 $\theta=$__________; ② 若 $z_1=\overline{z_2}$, 则 $\theta=$__________.

17. 根据下列条件, 求复数 z: $(1)z+|\overline{z}|=2+i$. $(2)z-2|z|=-7+4i$.

18. 已知复数 $z=\dfrac{x^2-3x+2}{x+3}+(x^2+2x-3)\mathrm{i}$, 求实数 x, 使: $(1)z$ 是实数. $(2)z$ 是虚数. $(3)z$ 是纯虚数.

19. 若 $\cos 2\theta+i(1-\tan\theta)$ 是纯虚数, 则 θ 的值取 ()

A. $k\pi-\dfrac{\pi}{4}(k\in\mathbf{Z})$　B. $k\pi+\dfrac{\pi}{4}(k\in\mathbf{Z})$　C. $k\pi\pm\dfrac{\pi}{4}(k\in\mathbf{Z})$　D. $\dfrac{k\pi}{2}+\dfrac{\pi}{4}(k\in\mathbf{Z})$

20. 方程 $3z+|z|=1-3i$ 的解是 ()

A. i　B. $-i$　C. $\dfrac{3}{4}-i$　D. $-i$ 和 $\dfrac{3}{4}-i$

21. 若虚数 $(x-2)+yi(x,y\in\mathbf{R})$ 的模为 $\sqrt{3}$, 则 $\dfrac{y}{x}$ 的最大值是 ()

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　B. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　C. $\dfrac{1}{2}$　D. $\sqrt{3}$

22. 设复数 $z=\log_2(\cos\alpha+\dfrac{1}{2})+\mathrm{i}\log_2(\sin\alpha+\dfrac{1}{2})$, 求 α, 使: $(1)z$ 为实数. $(2)z$ 为纯虚数. $(3)z$ 在复平面内的对应点在第二象限. $(4)z$ 的实部与虚部相等.

23. 根据条件, 在复平面内画出复数对应点的集合所表示的图形: $(1)1\le|R(z)|\le 2(R(z)$ 表示 Z 的实部). $(2)1\le|z|\le 2$ 且 $I(z)<0(I(z)$ 表示 z 的虚部).

24. 已知两个复数集 $M=\{z|z=t+(1-t^2)\mathrm{i},t\in R\}$ 及 $N=\{z|z=2\cos\theta+(\lambda+3\sin\theta)\mathrm{i},\lambda\in R,\theta\in R\}$ 的交集为非空集合, 求 λ 的取值范围. 二、复数的运算【典型题型和解题技巧】高中数学中, 复数的综合性特别强, 它把代数、三角和几何自然地揉合在一起. 本单元中, 解有关的复数问题主要有以下几类:

25. 应用复数的代数形式解题. 复数 $z=x+y\mathrm{i}(x,y\in R)$ 称为复数的代数形式, 利用复数的代数形式是解复数问题最基本的方法, 因此也是最重要的方法.

26. 已知 $\dfrac{z}{z-1}$ 是纯虚数, 求复数 z 在复平面内对应点的轨迹的普通方程. 解设 $z=x+yi(x,y\in\mathbf{R})$, 则 $\dfrac{z}{z-1}=\dfrac{x+yi}{(x-1)+yi}=\dfrac{(x+yi)[(x-1)-yi]}{(x-1)^2+y^2}=\dfrac{x(x-1)+y^2+[y(x-1)-xy]i}{(x-1)^2+y^2}$ __________ $=\dfrac{x(x-1)+y^2-yi}{(x-1)^2+y^2}$. $\dfrac{z}{z-1}$ 是纯虚数, $\begin{cases}x(x-1)+y^2=0,\\ y\neq 0.\end{cases}$ 即复数 z 在复平面内对应点的轨迹方程是圆 (除两点), $(x-\dfrac{1}{2})^2+y^2=\dfrac{1}{4}(y\neq 0)$.

27. 应用复数运算的几何意义解题. (1) 应用 $|z_1-z_2|$ 的几何意义. 设复数 z, z_1, z_2 在复平面内的对应点分别为 P, P_1, P_2, 则 $|z_1-z_2|$ 表示两点 P_1, P_2 间的距离, 特别地, $|z|$ 表示点 P 和原点的距离.

28. 若 $|z+1-i|=1$, 求 $|z-3+4i|$ 的最大值和最小值. 解由条件 $|z-(-1+\mathrm{i})|=1$, 知复数 Z 的对应点 A 在以 (-1, 1) 为圆心、1 为半径的圆上运动, 而 $|z-3+4\mathrm{i}|=|z-(3-4\mathrm{i})|$, 它表示点 A 和点 B(3, -4) 的距离 (如图 1), 显然, $|BE|\le|AB|\le|BD|$, $|z-3+4i|$ 的最大值和最小值分别是 $\sqrt{41}+1$ 和 $\sqrt{41}-1$. (图 1) 注意

设复数 z_0, z_1, z_2 在复平面内的对应点分别为 Z_0, Z_1, Z_2, 则: ① $|z-z_1|=|z-z_2|$ 表示线段 Z_1Z_2 的中垂线; ② $|z-z_0|=R(R>0)$ 表示以 Z_0 为圆心, R 为半径的圆; ③ $|z-z_1|+|z-z_2|=2a(2a>|Z_1Z_2|)$ 表示以 Z_1, Z_2 为焦点, a 为半长轴的椭圆; ④ $||z-z_1|-|z-z_2||=2a(0<2a<|Z_1Z_2|)$ 表示以 Z_1, Z_2 为焦点, a 为半实轴长的双曲线. (2) 应用复数加、减法的几何意义. 设复数 z_1, z_2 和复平面上的点 A, B 对应, 以 OA, OB 为邻边作 $ABCD(O$ 为原点), 并连接 AB(如图 2), 则复数 z_1+z_2 和向量 $\overrightarrow{OC}$ 对应, 复数 z_1-z_2 和向量 $\overrightarrow{BA}$ 对应. (图 2)

29. 已知 $|z_1|=|z_2|=1$, $z_1+z_2=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$, 求复数 z_1, z_2. 解如图 3, (图 3) $z_1+z_2=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, z_1+z_2 对应于向量 $\overrightarrow{OC}$, 其中 $\angle COA=60°$. 设 $\overrightarrow{OA}$ 对应于复数 z_1, $\overrightarrow{OB}$ 对应于复数 z_2, 则四边形 $AOBC$ 是菱形, 且 $\triangle AOC$ 和 $\triangle BOC$ 都是等边三角形, 于是 $z_1=1$, $z_2=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{i}$ 或 $z_1=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{i}$, $z_2=1$. 注意复平面内, 若非零复数 z_1, z_2 分别对应于点 A, B, z_1+z_2 对应于点 C, O 为原点, 则: ① $OACB$ 是平行四边形; ② 若 $|z_1|=|z_2|$, 则 $OACB$ 是菱形; ③ 若 $|z_1+z_2|=|z_1-z_2|$, 则 $OACB$ 是矩形; ④ 若 $|z_1|=|z_2|$ 且 $|z_1+z_2|=|z_1-z_2|$, 则 $OACB$ 是正方形.

30. 应用乘法公式解题. 应用下列两组乘法公式, 将会给计算带来便利: $(1)(1+i)^2=2i$, $(1-i)^2=-2i$. (2) 记 $\omega=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $\omega_1=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $\omega_2=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$, 则 $\omega^3=1$, $\omega^2+\omega+1=0$, $\omega+\frac{1}{\omega}=-1$, $\omega_1\omega_2=1$, $\omega_1^2=\omega_2$, $\omega_2^2=\omega_1$.

31. 求值: $(1)(1+i)^{10}-(1-i)^{10}$. $(1)\frac{(2+2i)^5}{(-1+\sqrt{3}i)^4}$. 解 (1) 原式 $=[(1+i)^2]^5-[(1-i)^2]^5=(2i)^5-(-2i)^5=2^5i+2^5i=64i$. (2) 原式 $=\frac{(2+2i)(1+i)^4}{(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)^4}=\frac{(2+2i)(2i)^2}{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}=\frac{-8(1+i)(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)}{(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)}$ $\underline{\qquad\qquad}=$ $4(1+i)(1+\sqrt{3}i)=4(1-\sqrt{3})+4(1+\sqrt{3})i$.

32. 应用复数模的运算法则解题. 容易证明, 复数模的运算有以下法则: $(1)|z|=|\overline{z}|$, $|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$, $|\frac{z_1}{z_2}|=|\frac{z_1}{z_2}|(z_2\neq 0)$, $|z^n|=|z|^n$. $(2)|z|^2=z\cdot\overline{z}$.

33. 求复数 $z=\frac{(3-4\mathrm{i})^3}{(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i})\cdot(\sqrt{3}+\sqrt{2}\mathrm{i})^4}$ 的模. 解 $|z|=\frac{|3-4i|^3}{|\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i|^2\cdot|\sqrt{3}+\sqrt{2}i|^4}=\frac{5^3}{(\sqrt{5})^4}=5$.

34. 已知 $|z|\le 1$, $|\omega|\le 1$, 求证: $|z+\omega|\le|1+\overline{z}\omega|$. 证明 $|z+\omega|^2-|1+\overline{z}\omega|^2=(z+\omega)(\overline{z}+\overline{\omega})-(1+\overline{z}\omega)(1+z\overline{\omega})=z\overline{z}+\omega\overline{\omega}-1-z\overline{z}\omega\overline{\omega}=|z|^2+|\omega|^2-1-|z|^2\cdot|\omega|^2=(|z|^2-1)(1-|\omega|^2)\le 0$. $|z+\omega|^2\le|1+\overline{z}\omega|^2$, 于是 $|z+\omega|\le|1+\overline{z}\omega|$.

35. 应用 $z\in\mathbf{R}$ 的充要条件解题. 复数 $z\in R$ 的充要条件是 $z=\overline{z}$.

36. 若复数 z 满足 $z+\frac{4}{z}\in\mathbf{R}$, 且 $|z-2|=2$, 求 z. 解 $z+\frac{4}{z}\in\mathbf{R}$, $z+\frac{4}{z}=\overline{z}+\frac{4}{\overline{z}}$, 整理得 $z^2\overline{z}+4\overline{z}=z\overline{z^2}+4z$, 即 $z|z|^2-|z|^2\cdot\overline{z}-4(z-\overline{z})=0$, 即 $(z-\overline{z})(|z|^2-4)=0$. (1) 若 $|z|=2$, 结合已知条件, $|z-2|=2$, 得 $z=1\pm\sqrt{3}i$. (2) 若 $z-\overline{z}=0$, 结合 $|z-2|=2$, 得 $z=0$(舍去) 和 $z=4$. 综合 (1) 与 (2), 得 $z=1\pm\sqrt{3}i$ 或 $z=4$.

37. 应用不等式 $||z_1|-|z_2||\le|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|$ 解题.

38. 求函数 $y=\sqrt{4a^2+x^2}+\sqrt{(x-a)^2+a^2}(a>0)$ 的最值. 解令 $z_1=x+2ai$, $z_2=a-x+ai$, 则 $y=|z_1|+|z_2|\geq|z_1+z_2|=|a+3ai|=\sqrt{10}a$. 当 $\frac{a-x}{x}=\frac{a}{2a}$, 即 $x=\frac{2a}{3}$ 时, 函数 y 有最小值 $\sqrt{10}a$.

39. 若 $|z+\frac{1}{z}|=1$, 求 $|z|$ 的取值范围. 解由 $||z|-|\frac{1}{z}||\leq|z+\frac{1}{z}|$, 得 $-1\leq|z|-\frac{1}{|z|}\leq1$, 即 $\begin{cases}|z|^2+|z|-1\geq0,\\|z|^2-|z|-1\leq0,\end{cases}$ $\frac{\sqrt{5}-1}{2}\leq|z|\leq\frac{\sqrt{5}+1}{2}$. 注意在应用不等式 $||z_1|-|z_2||\leq|z_1+z_2|\leq|z_1|+|z_2|$ 求函数的最大值、最小值时, 需留意取 "=" 的条件. 当 $\overrightarrow{OZ_1}$ 与 $\overrightarrow{OZ_2}$ 同向时, $|z_1+z_2|=|z_1|+|z_2|$; 当 $\overrightarrow{OZ_1}$ 与 $\overrightarrow{OZ_2}$ 异向时, $|z_1+z_2|=||z_1|-|z_2||$.

【训练题】(一) 复数的加法与减法

40. 两个共轭虚数的差一定是 ().,

A. 非零实数　B. 零　C. 纯虚数　D. 非纯虚数

41. 复平面内, 已知复数 $2-\mathrm{i}$ 和 $3+4\mathrm{i}$ 分别对于点 M,N, 则向量 $\overrightarrow{MN}$ 对应的复数是 ()

A. $5+3i$　B. $-1-5i$　C. $1+5i$　D. $1-5i$

42. 若复数 $z=3+a\mathrm{i}$ 满足条件 $|z-2|<2$, 则实数 a 的取值范围是 ()

A. $(-2\sqrt{2},2\sqrt{2})$　B. (-2, 2)　C. (-1, 1)　D. $(-\sqrt{3},\sqrt{3})$

43. 若复数 z 满足 $|z+3-4\mathrm{i}|=2$, 则 $|z|$ 的最小值和最大值分别是 ()

A. 1 和 9　B. 4 和 10　C. 5 和 11　D. 3 和 7

44. (1) 若 $|z-25i|\leq15$, $z\in\mathbf{C}$, 则 $|z|$ 最小时的 $z=$________, $|z|$ 最大时的 $z=$________. (2) 若复数 z 满足 $|z|=3$, 则 $|z-1+\sqrt{3}\mathrm{i}|$ 的最小值是________. (3) 若如数 z 满足 $|z-3|=5$, 则 $|z-(1+4i)|$ 的最大值是________, 最小值是________. (4) 若 $|z-1-2i|=1$, 则 $|z-3-i|$ 的取值范围是________.

45. 复平面内, 已知点 A,B,C 分别对应于复数 $z_1=1+\mathrm{i}$, $z_2=5+\mathrm{i}$, $z_3=3+3\mathrm{i}$, 以 AB,AC 为邻边作一平行四边形 $ABDC$, 求点 D 对应的复数 z_4 及 AD 的长.

46. 若 $f(\overline{z+i})=2z+\overline{z}+i$, 则 $f(i)$ 等于 ()

A. 1　B. -1　C. i　D. $-i$

47. 若复数 z 满足 $|z+1|^2-|z+\mathrm{i}|^2=1$, 则 z 在复平面内的对应点所表示的图形是 ()

A. 直线　B. 圆　C. 椭圆　D. 双曲线

48. 若复数 z 满足 $|z-1|+|z+1|=2$, 则 z 在复平面内的对应点所表示的图形是 ()

A. 圆　B. 椭圆　C. 双曲线　D. 线段

49. 若 z_1,z_2 都是虚数, 则 "$z_1=\overline{z}_2$" 的一个必要不充分条件是 ()

A. $|z_1-\overline{z}_2|=0$　B. $\overline{z}_1=z_2$　C. $z_1=z_2$　D. $|z_1|=|z_2|$

50. 复平面内, 曲线 $|z-1+i|=1$ 关于直线 $y=x$ 的对称曲线方程为 ()

A. $|z-1-i|=1$　　B. $|\overline{z}-1-i|=1$　　C. $|z+1+i|=1$　　D. $|\overline{z}+1+i|=1$

51. 若 $|z|=1$, 则 $|z+i|+|z-6|$ 的最小值等于 ()

A. 7　　B. $\sqrt{37}$　　C. 6　　D. 5

52. (1) 若复平面内的点 A,B 分别对应于复数 $2+\mathrm{i}$ 和 $1-\mathrm{i}$, 则线段 AB 的中垂线方程的复数形式是__________. (2) 设 $z\in\mathbf{C}$, 则方程 $|z+2|+|z-2|=6$ 对应的曲线的普通方程是__________. (3) 以 $(\pm3,0)$ 为两焦点, 且长半轴长为 5 的椭圆方程的复数形式是__________. (4) 已知复数 z 满足 $|z-(1+i)|-|z-(1-i)|=2$, 则复平面内 z 的对应点的轨迹是__________. (5) 若 $|z-3|+|z+3|=10$, 且 $|z-5\mathrm{i}|-|z+5\mathrm{i}|=8$, 则复数 $z=$__________. (6) 若 $|z-2|=\sqrt{17}$, $|z-3|=4$, 则复数 $z=$__________.

53. (1) 设 $|z_1|=3$, $|z_2|=5$, $|z_1+z_2|=6$, 求 $|z_1-z_2|$. (2) 若 $|z_1|=3$, $|z_1+z_2|=5$, $|z_1-z_2|=7$, 求 $|z_2|$.

54. (1) 已知两个复数集合 $A=\{z||z-2|\leq2\}$, $B=\{z|z=\frac{z_1}{2}\mathrm{i}+b,z_1\in A,b\in R\}$. ① 当 $b=0$ 时, 求集合 B 所对应的区域; ② 当 $A\cap B=\varnothing$ 时, 求 b 的取值范围. (2) 若复数 $z_1=1+2a\mathrm{i}$, $z_2=a+\mathrm{i}(a\in R)$, 集合 $A=\{z||z-z_1|\leq\sqrt{2}\}$, $B=\{z||z-z_2|\leq2\sqrt{2}\}$ 满足 $A\cap B=\varnothing$, 求 a 的取值范围.

55. (1) 已知复数 z_1,z_2 满足 $|z_1|=1$, $|z_2|=1$, 且 $z_1+z_2=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, 求 z_1,z_2. (2) 复平面内三点 A,B,C 依次对应于复数 $1+z$, $1+2z$, $1+3z$, 其中 $|z|=2$, O 为原点, 若 $S_{\triangle AOB}+S_{\triangle BOC}=2$, 求复数 z. (二) 复数的乘法与除法

56. 若复数 $z=(1+\mathrm{i})^2$, 则 $z\cdot\overline{z}$ 的值为 ()

A. $-4i$　　B. $4i$　　C. 4　　D. 8

57. 计算 $(\frac{\sqrt{2}i}{1+i})^{100}$ 的结果是 ()

A. i　　B. $-i$　　C. 1　　D. -1

58. 当 n 取遍正整数时, i^n+i^{-n} 表示不同值的个数是 ()

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

59. 使 $(\frac{1+i}{1-i})^n$ 为实数的最小自然数 n 是 ()

A. 2　　B. 4　　C. 6　　D. 8

60. “z_1 和 z_2 为共轭复数” 是 “$z_1+z_2\in R$ 且 $z_1\cdot z_2\in R$” 的 ()

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件　　C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

61. 若 $(z-1)^2=|z-1|^2$, 则 z 一定是 ()

A. 纯虚数　　B. 实数　　C. 虚数　　D. 零

62. 设 $z=1+ki(k\in\mathbf{R})$, 则 z^2 对应点的轨迹是 ()

A. 圆　　B. 椭圆　　C. 抛物线　　D. 双曲线

63. 若都是 z, z_1, z_2 复数, 判断下列命题的真假: (1)$|z|^2=z^2$.() (2)$|z|^2\neq z^2$.() (3)$|z^2|=|z|^2$.() (4)$|z|\leq 1\Leftrightarrow -1\leq z\leq 1$.() (5)$\sqrt{|z|^2}=|z|$.() (6) 若 $|z_1|=|z_2|$, 则 $z_1=\pm z_2$.() (7)$z+\overline{z}$ 是实数.() (8)$z-\overline{z}$ 是纯虚数.() (9)$z^2\geq 0$.() (10) 若 $|z|=1$, 则 $\overline{z}=\frac{1}{z}$.() (11)$z=\overline{z}\Leftrightarrow z\in\mathbf{R}$.() (12) 若 $z_1^2+z_2^2=0$, 则 $z_1=z_2=0$.()

64. (1)$(i-\frac{1}{i})^6$ 的虚部是__________. (2) 计算 $(1+i)^{20}-(1-i)^{20}=$__________. (3) 计算 $\frac{(1+i)^5}{1-i}+\frac{(1-i)^5}{1+i}=$__________. (4) 若 $z=1+i$, 则 $\frac{5}{1+z^2}=$__________. (5) 计算 $\frac{-2\sqrt{3}+i}{1+2\sqrt{3}i}+(\frac{\sqrt{2}}{1+i})^{3996}=$__________. (6) 若 $a\in\mathbf{R}$, 且 $\frac{a+2i}{3+i}\in\mathbf{R}$, 则 $\frac{a+2i}{3+i}=$__________.

65. (1) 已知 $\omega=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, 则: ① $\omega^2+\frac{1}{\omega^2}=$__________; ② $\omega^3+\frac{1}{\omega^3}=$__________. ③ $\omega^{14}+\frac{1}{\omega^{14}}=$__________; ④ $1+\omega+\omega^2+\omega^3+\cdots+\omega^{10}=$__________. (2) 若 $f(x)=2x^4-11x^3-7x^2-9x+4$, 则 $f(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)=$__________.

66. 计算下列各题: (1)$(i-\frac{1}{i})^{10}=$__________. (2)$\frac{(1+i)^3-(1-i)^3}{(1+i)^2-(1-i)^2}=$__________. (3)$i\cdot i^2\cdot i^3\cdot\cdots\cdot i^{1997}=$__________. (4)$i+i^2+i^3+\cdots+i^{1997}=$__________. (5)$(\frac{1+i}{\sqrt{2}})^{1997}+(\frac{1-i}{\sqrt{2}})^{1997}=$__________.

67. 已知 $i^{3m}=i^n(m,n\in\mathbf{Z})$, 则 i^{m+n} 的值为 ()

A. 1　　B. i　　C. $-i$　　D. -1

68. 若 $x+\frac{1}{x}=-1$, 则 $x^{17}+x^{-17}$ 的值等于 ()

A. 0　　B. -1　　C. 1　　D. 2

69. (1) 计算: $1+2i+3i^2+4i^3+\cdots+10i^9$. (2) 计算: $i+2i^2+3i^3+\cdots+359i^{359}$. (3) 求首项为 i, 公比为 $1+\frac{1}{i}$ 的等比数列的第七项.

70. (1) 计算: ① $(\frac{-1+i}{1+\sqrt{3}i})^3$; ② $\frac{(\sqrt{3}+i)^5}{-1+\sqrt{3}i}$. (2) 求下列复数的模: ① $(3+4i)(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)$; ② $\frac{5-12i}{-8+15i}$; ③ $\frac{(1+i)^3}{(1-i)^2(9+40i)}$; ④ $\frac{1-t^2}{1+t^2}+\frac{2t}{1+t^2}i(t\in\mathbf{R})$; ⑤ $\frac{(1-i)^{10}(3-4i)^4}{(-\sqrt{3}+i)^8}$; $\frac{(\sqrt{6}+i)(1+i)^2}{(-1+\sqrt{6}i)(-\frac{1}{3}+\frac{2\sqrt{2}}{3}i)(\sqrt{3}i)}$.

71. 已知 $z=1+i$, 且 $\frac{z^2+az+b}{z^2-z+1}=1-i$, 求实数 a,b 的值.

72. 已知 $a>0$, 且 $a\neq 1$, 若 $(\log_a x+i)z=1+i\log_a x$, 问: x 为何值时, z 为: (1) 实数. (2) 虚数. (3) 纯虚数. (4) 模等于 1 的复数.

73. (1) 已知 $z=|\frac{\sqrt{2}i(3+i)^2}{(\sqrt{3}+\sqrt{7}i)^2}|+2i$, 求 $|z|$. (2) 已知复数 $z=\frac{(1+\mathrm{i})^3(a-1)^2}{\sqrt{2}(a-3\mathrm{i})^2}$ 满足 $|z|=\frac{2}{3}$, 求实数 a 的值. (3) 已知复数 z 满足 $|z|=5$, 且 $(3+4i)z$ 是纯虚数, 求 z. (4) 已知 $z=\frac{\sqrt{3}\sin\theta+i\cos\theta}{\sin\theta-i\sqrt{3}\cos\theta}$, 求 z 的最大值. (5) 已知复数 z 满足 $|z+\frac{1}{z}|=1$, 求 $|z|$ 的取值范围.

74. (1) 已知复数 z 满足 $z+\frac{4}{z}\in\mathbf{R}$, $|z-2|=2$, 求 z. (2) 已知复数 z 满足 $|z-4|=|z-4\mathrm{i}|$, $z+\frac{14-z}{z-1}\in R$, 求 z. (3) 已知 $|\frac{z-12}{z-8i}|=\frac{5}{3}$, $|\frac{z-4}{z-8}|=1$, 求复数 z.

75. 根据条件, 求复数 z 在复平面内的对应点轨迹的普通方程: $(1)z^2+\frac{9}{z^2}\in\mathbf{R}$. $(2)\frac{z}{z-1}$ 为纯虚数. $(3)z\cdot\overline{z}+az+\overline{z}=0(a\in\mathbf{R})$.

76. 已知非零夏数 z_1,z_2 满足 $|z_1+z_2|=|z_1-z_2|$, 求证: $(\frac{z_1}{z_2})^2$ 一定是负数.

77. (1) 已知 P,Q 两点分别对应于复数 z_1 和 $2z_1+3-4\mathrm{i}$, 若点 P 在曲线 $|z|=2$ 上移动, 求点 Q 的轨迹. (2) 已知复数 z 满足 $|z|=2$, 求复数 $\omega=\frac{z+1}{z}$ 在复平面内的对应点的轨迹. (3) 复平面内两动点 P_1,P_2 所对应的复数 z_1,z_2 满足 $z_1=z_2\mathrm{i}+3$, 又点 P_2 沿着曲线 $|z-5|-|z+5|=6$ 运动, 试求点 P_1 的轨迹方程, 并指出它表示何种曲线. (4) 复平面内, 线段 AB 上的点 P 对应的复数为 z, 其中 A,B 点分别对应于复数 $z_A=1$, $z_B=i$, 求 z^2 的对应点轨迹的普通方程, 并画出图形. (5) 已知点 $Q(u,v)$ 在 $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(1,1)$ 为顶点的 $\triangle OAB$ 的边界上移动, 求 $z=(u+2vi)^2+2+3i$ 所对应的点 P 的轨迹, 并画出草图.

78. 求证: (1) 复数 z 可以表示为 $\frac{1+t\mathrm{i}}{1-t\mathrm{i}}(t\in R)$ 的充要条件是 $|z|=1$ 且 $z\neq-1$. $(2)\frac{z-1}{z+1}$ 为纯虚数的充要条件是 $|z|=1$ 且 $z\neq\pm1$.

79. 利用 $||z_1|-|z_2||\leq|z_1+z_2|\leq|z_2|+|z_2|$ 解下列各题: (1) 求函数 $y=\sqrt{x^2+4}+\sqrt{x^2-8x+17}$ 的最小值及相应的 x. (2) 求函数 $y=\sqrt{x^2+9}-\sqrt{x^2-2x+5}$ 的最大值及相应的 x. (3) 求证: $\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(x-2)^2+y^2}+\sqrt{x^2+(y-2)^2}+\sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2}\geq4\sqrt{2}$.

80. 利用 $|z|^2=z\cdot\overline{z}$ 解下列各题: . (1) 若 $|z|=1$, 求证 $|\frac{a-z}{1-a\overline{z}}|=1$. (2) 若 $|1-z_1z_2|=|z_1-\overline{z}_2|$, 求证: $|z_1|$, $|z_2|$ 中至少有一个为 1. (3) 若 $|z_1|\leq1$, $|z_2|\leq1$, 求证: $|\frac{z_1-z_2}{1-\overline{z}_1z_2}|\leq1$. (4) 若复数 z_i 满足 $|z_\mathrm{i}|=1(\mathrm{i}=1,2,3)$, 求 $|\frac{z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1}{z_1+z_2+z_3}|$ 的值. (5) 已知复数 $A=z_1\overline{z}_2+z_2\overline{z}_1$, $B=z_1\overline{z}_1+z_2\overline{z}_2$, 其中 z_1,z_2 是非零复数, 问: A,B 可不可以比较大小? 并证明之.

81. (1) 已知 $|z|=1$, $|z_2|=\sqrt{2}$, 求证: $|\frac{2z_1+(1+3i)z_2^2}{3+4i}|\leq\frac{12}{5}$. (2) 已知 $z=\frac{\sin\alpha+i\sqrt{2}\cos\alpha}{\sqrt{2}\sin\alpha-i\cos\alpha}$, 求证: $\frac{\sqrt{2}}{2}\leq|z|\leq\sqrt{2}$. (3) 复平面内三点 A,B,C 分别对应于复数 z_1,z_2,z_3, 若 $\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}=1+\frac{4}{3}\mathrm{i}$, 试求 $\triangle ABC$ 的三边之比.

82. 已知 $|z|=1$, 求下列各式的最大值和最小值: $(1)|z^2-z+1|$. $(2)|z^2-z+2|$. $(3)|z^3-3z-2|$. 三、复数的三角形式【典型题型和解题技巧】

83. 复数的三角形式. (1)"伪三角形式" 化为三角形式. 复数的三角形式是 $r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)(r\geq0)$, 读者需能熟练地将下列各 "伪三角形式, , 化为三角形式 $(r>0)$: $r(\cos\theta-i\sin\theta)=[\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)]$, $r(-\cos\theta+i\sin\theta)=[\cos(\pi-\theta)+i\sin(\pi-\theta)]$, $-r(\cos\theta+i\sin\theta)=r[\cos(\pi+\theta)+i\sin(\pi+\theta)]$, $r(\sin\theta+i\cos\theta)=r[\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)+i\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)]$.

84. 将下列复数化为三角形式: $(1)2(\cos\frac{\pi}{5}-i\sin\frac{\pi}{5})$. $(2)2(-\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5})$. $(3)-2(\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5})$. $(4)2(\sin\frac{\pi}{5}+i\cos\frac{\pi}{5})$. 解 $(1)2(\cos\frac{\pi}{5}-i\sin\frac{\pi}{5})=2[\cos(-\frac{\pi}{5})+i\sin(-\frac{\pi}{5})]$. $(2)2(-\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5})=2(\cos\frac{4\pi}{5}+i\sin\frac{4\pi}{5})$.

$(3)-2(\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5})=2(\cos\frac{6\pi}{5}+i\sin\frac{6\pi}{5})$. $(4)2(\sin\frac{\pi}{5}+i\cos\frac{\pi}{5})=2(\cos\frac{3\pi}{10}+i\sin\frac{3\pi}{10})$. (2) 代数形式化为三角形式. 将复数的代数形式 $z=a+bi(a,b\in R)$ 化为三角形式 $z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)(r>0)$, 可按如下步骤进行: ① 画图, 并标出 r 和 θ; ② 求 θ 和 r, 其中 $r=\sqrt{a^2+b^2}$, $\cos\theta=\frac{a}{r}$, $\sin\theta=\frac{b}{r}$; ③ 写出 z 的三角形式.

85. 将下列复数化成三角形式: $(1)z=-\sqrt{3}+i$. $(2)5-12i$. 解 (1) 如图 4(1), $r=2$, $\cos\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\theta=\frac{5\pi}{6}$, $-\sqrt{3}+i=2(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6})$. (2) 如图 4(2), $r=13$, $\cos\theta=\frac{5}{13}$, $\theta=-\arccos\frac{5}{13}$, $5-12i=13[\cos(-\arccos\frac{5}{13})+i\sin(-\arccos\frac{5}{13})]$. __________(1)__________(2) (图 4) (3) 复数的辐角、辐角主值 $\arg z$. 需要时时记住的是复数 z 的辐角主值的取值范围是 $[0,2\pi)$, $\arg z\in[0,2\pi)$.

86. 若复数 $z=\frac{1}{2}+\mathrm{i}\sin\alpha(\alpha\in R)$, 且 $|z|\le 1$, 求 $\arg z$ 和 α 的取值范围. 解 $|z|\le 1$, $\frac{1}{4}+\sin^2\alpha\le 1$, $-\frac{\sqrt{3}}{2}\le\sin\alpha\le\frac{\sqrt{3}}{2}$ 如图 5, z 的对应点 P 应在线段 AB 上运动, 当点 P 在 MA 上时, $\arg z\in[0,\frac{\pi}{3}]$, 当点 P 在 BM 上时, $\arg z\in[\frac{5\pi}{3},2\pi)$. (图 5) $\arg z\in[0,\frac{\pi}{3}]\cup[\frac{5\pi}{3},2\pi)$. $a\in[k\pi-\frac{\pi}{3},k\pi+\frac{\pi}{3}](k\in\mathbf{Z})$.

87. 复数 $z,\overline{z},\frac{1}{z}$ 之间的关系. 在很多复数问题中会出现有关 $z,\overline{z}$ 和 $\frac{1}{z}$ 的式子. 读者务必对它们的关系及与之相对应的点的位置十分熟悉. 设 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)(r>0)$, 则 $\overline{z}=r[\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)]$, $\frac{1}{z}=\frac{1}{r}[\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)]$. 它们的对应点如图 6 所示. __________$(r>1)$__________$(r=1)$__________$(r<1)$ (图 6)

88. 已知 $z+\frac{1}{z}=\cos x(x\in\mathbf{R})$, 且 $|z|\le 1$, 求 $\arg z$ 的取值范围. 解先设 $|z|<1$, 则如图 7 所示, 此时 $z+\frac{1}{z}$ 所对应的向量不在 x 轴上, (图 7) $z+\frac{1}{z}\ne\cos x$, 故 $|z|<1$ 不可能, 于是 $|z|=1$. 令 $z=\cos\theta+i\sin\theta(0\le\theta<2\pi)$, 则由 $z+\frac{1}{z}=z+\overline{z}=2\cos\theta=\cos x$, 得 $\cos\theta=\frac{1}{2}\cos x\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$. $\theta\in[\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}]\cup[\frac{4\pi}{3},\frac{5\pi}{3}]$, 即 $\arg z\in[\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}]\cup[\frac{4\pi}{3},\frac{5\pi}{3}]$.

89. 应用复数的三角形式解题. 若题目给出了 $|z|=r(r>0)$ 的条件, 一般来说, 复数的三角形式当是解题的最佳选择了, 即可令 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$. 特别地, 若 $|z|=1$, 则可令 $z=\cos\theta+i\sin\theta$.

90. 已知非零复数 z 满足 $|z-\mathrm{i}|=1$, 且 $\arg z=\theta$, 求: $(1)\theta$ 的取值范围. (2) 复数 z 的模. (3) 复数 z^2-zi 的辐角. 解 (1) $|z-i|=1$, z 的对应点 P 在以 (0, 1) 为圆心, 半径为 1 的圆上 (如图 8), θ 的取值范围是 $0<\theta<\pi$. (2) 如图 9, 在 $\mathrm{Rt}\triangle AOP$ 中, $|OP|=2\sin\theta$, 故 $|z|=2\sin\theta$. (3) 由 $|z-i|=1$, 故可令 $z-i=\cos\varphi+i\sin\varphi(\varphi\in\mathbf{R})$, 于是 $z^2-zi=z(z-i)=2\sin\theta(\cos\theta+i\sin\theta)\cdot(\cos\varphi+i\sin\varphi)=2\sin\theta[\cos(\theta+\varphi)+i2\sin(\theta+\varphi)]$. 又 $\cos\varphi+i\sin\varphi=z-i=2\sin\theta(\cos\theta+i\sin\theta)-i=2\sin\theta\cos\theta+i(2\sin^2\theta-1)=\sin 2\theta-i\cos 2\theta=\cos(2\theta-\frac{\pi}{2})+i\sin(2\theta-\frac{\pi}{2})$, $\varphi=2k\pi+2\theta-\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$, $\theta+\varphi=2k\pi+3\theta-\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$. 即 $\arg(z^2-zi)=2k\pi+3\theta-\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$. __________(图 8)__________(图 9)__________(图 10) 第 (3) 题有另一种解法: 如图 10, $z-i$ 和向量 $\overrightarrow{MP}$ 对应, 而 $\angle OMP=2\theta$, 则 $z-i$ 的一个辐角为 $2\theta-\frac{\pi}{2}$, 由 $z^2-zi=z(z-i)$ 知, z^2-zi 的辐角等于 z 的辐角和 $z-i$ 的辅角之和, 即 $2k\pi+3\theta-\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$. 注意需要掌握的是对于已知 $|z|=r(r>0)$ 的有关问题, 可以从以下四个方面去思考; (1) 令 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$. (2) 令 $z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$, 且 $a^2+b^2=r^2$. (3) 由 $|z|^2=r^2$, 得 $z\overline{z}=r^2$, $z=\frac{r^2}{\overline{z}}$, $\overline{z}=\frac{r^2}{z}$. $(4)z$ 在复平面内的对应点在以原点为圆心, r 为半径的圆上. 有时候, 并不一定以三角形式为最佳.

91. 运用复数乘法、除法的几何意义解题. 若 $u=z\cdot r(\cos\theta+i\sin\theta)$, 则只需将 $\overrightarrow{OP}$(P 为 z 在复平面内的对应点) 绕原点逆转 θ 角, 并将 $|\overrightarrow{OP}|$ 扩大到原来的 r 倍, 即得复数 u 的对应向量 $\overrightarrow{OU}$. 若 $u=\dfrac{z}{r(\cos\theta+i\sin\theta)}$, 则只需将 $\overrightarrow{OP}$ 前绕原点顺转 θ 角, 并将 $\overrightarrow{OP}$ 缩小到原来的 r 倍, 即得 u 的对应向量 $\overrightarrow{OU}$.

92. 已知等边 $\triangle ABC$ 的两个顶点坐标是 $A(2,\ 1)$, $B(3,\ 2)$, 求顶点 C 的对应坐标. 解记 A,B,C 的对应复数为 $z_A=2+\mathrm{i}$, $z_B=3+2\mathrm{i}$, z_C. 由 $z_C=z_A+(z_B-z_A)[\cos 60^\circ\pm i\sin 60^\circ]$, 得 $z_C=(2+i)+(1+i)(\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}i)=\dfrac{5\mp\sqrt{3}}{2}+\dfrac{3\pm\sqrt{3}}{2}i$, 即点 C 坐标是 $(\dfrac{5-\sqrt{3}}{2}+\dfrac{3+\sqrt{3}}{2})$ 或 $(\dfrac{5+\sqrt{3}}{2}+\dfrac{3-\sqrt{3}}{2})$.

93. 复平面内, 两点 A,B 分别对应于复数 α,β, 且 $\beta+(1+\mathrm{i})\alpha=0$, $|\alpha-2+\mathrm{i}|=1$, 求 $\triangle AOB$ 面积的最大值和最小值. 解 $|\alpha-(2-i)|=1$, A 是以 $C(2,-1)$ 为圆心, 1 为半径的圆上的动点. 而 $\beta=(-1-i)\alpha=\sqrt{2}(\cos\dfrac{5\pi}{4}+i\sin\dfrac{5\pi}{4})\alpha$, 故线段 OB 的长是 OA 长的 $\sqrt{2}$ 倍, 且由 OA 绕原点按逆时针方向旋转 $\dfrac{5\pi}{4}$ 而得 (如图 11). (图 11) 故 $S_{\triangle AOB}=\dfrac{1}{2}|OA|\cdot|OB|\cdot\sin\dfrac{3\pi}{4}=\dfrac{1}{2}\sqrt{2}\cdot|OA|^2\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{1}{2}|OA|^2$. 连接 OC 并延长, 与圆交于点 A_1, A_2, 则 $|OA_1|=\sqrt{5}-1$, $|OA_2|=\sqrt{5}+1$, 因此 $\triangle AOB$ 面积的最大值和最小值分别为 $\dfrac{1}{2}(\sqrt{5}+1)^2$ 和 $\dfrac{1}{2}(\sqrt{5}-1)^2$, 即 $3+\sqrt{5}$ 和 $3-\sqrt{5}$.

94. 已知定点 $A(-2,0)$ 和圆 $x^2+y^2=1$ 的动点 B, 点 A,B,C 按逆时针方向排列, 且 $|AB|:|BC|:|CA|=3:4:5$(如图 12), 求点 C 的轨迹方程. 解设点 C,B 分别对应复数 z,z_0, 则 $z=z_0+(-2-z_0)(-\dfrac{4}{3}i)=z_0+\dfrac{4}{3}iz_0+\dfrac{8}{3}i$, 于是 $(1+\dfrac{4}{3}i)z_0=z-\dfrac{8}{3}i$, 两边取模得 $|1+\dfrac{4}{3}i|\cdot|z_0|=|z-\dfrac{8}{3}i|$. 又 $|z_0|=1$, $|z-\dfrac{8}{3}i|=\dfrac{5}{3}$, 即点 C 的轨迹是以 $(0,\dfrac{8}{3})$ 为圆心, $\dfrac{5}{3}$ 为半径的圆. (图 12) 注意 (1) 用复数知识求点的轨迹, 主要用于求从动点的轨迹问题, 常用 "转移法". (2) 本例解法中, 设主动点对应于复数 z_0, 从动点对应于复数 z, 有时, 则需设主动点对应于复数 x_0+y_0i, 从动点对应于复数 $x+yi(x_0,y_0,x,y\in\mathbf{R})$.

95. 复数在三角中的应用.

96. 求值: $arc\cot\dfrac{1}{3}+\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{26}}+\arccos\dfrac{7}{\sqrt{50}}+arc\cot 8$. 解 $\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{26}}=\mathrm{arccot}\dfrac{1}{5}$, $\arccos\dfrac{1}{\sqrt{50}}=\mathrm{arccot}\dfrac{1}{7}$, $\mathrm{arccot}8=\mathrm{arccot}\dfrac{1}{8}$, 令 $z_1=3+i=r_1(\cos\alpha+i\sin\alpha)$, $z_2=5+i=r_2(\cos\beta+i\sin\beta)$, $z_3=7+i=r_3(\cos\gamma+i\sin\gamma)$, $z_4=8+i=r_4(\cos\delta+i\sin\delta)$, 其中 $0<\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta<\dfrac{\pi}{4}$, $z_1\cdot z_2\cdot z_3\cdot z_4=(3+i)(5+i)(7+i)(8+i)=650(1+i)=650\sqrt{2}(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4})$. 又 $z_1\cdot z_2\cdot z_3\cdot z_4=r_1r_2r_3r_4[\cos(\alpha+\beta+\gamma+\delta)+i\sin(\alpha+\beta+\gamma+\delta)]$, 而 $0<\alpha+\beta+\gamma+\delta<\pi$, $\alpha+\beta+\gamma+\delta=\dfrac{\pi}{4}$, 即所求之值为 $\dfrac{\pi}{4}$.

97. 记 $A=\cos\dfrac{\pi}{11}+\cos\dfrac{3\pi}{11}+\cos\dfrac{5\pi}{11}+\cos\dfrac{7\pi}{11}+\cos\dfrac{9\pi}{11}$, $B=\sin\dfrac{\pi}{11}+\sin\dfrac{3\pi}{11}+\sin\dfrac{5\pi}{11}+\sin\dfrac{7\pi}{11}+\sin\dfrac{9\pi}{11}$, 求证: $A=\dfrac{1}{2}$, $B=\dfrac{1}{2}\cot\dfrac{\pi}{22}$. 证明设 $z=\cos\dfrac{\pi}{11}+i\sin\dfrac{\pi}{11}$, 则
$$\begin{cases} A+Bi=z+z^3+z^5+z^7+z^9=\dfrac{z(1-z^{10})}{1-z^2}=\dfrac{z-z^{11}}{1-z^2}=\dfrac{z-(\cos\pi+i\,\mathrm{s}}{1-z^2} \\ =\dfrac{1-\overline{z}}{(1-z)(1-\overline{z})}=\dfrac{1-\cos\dfrac{\pi}{11}+i\sin\dfrac{\pi}{11}}{2-(z+\overline{z})}=\dfrac{1-\cos\dfrac{\pi}{11}+i\sin\dfrac{\pi}{11}}{2(1-\cos\dfrac{\pi}{11})} \\ =\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sin\dfrac{\pi}{11}}{1-\cos\dfrac{\pi}{11}}i=\dfrac{1}{2}+i\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\cot\dfrac{\pi}{22}, \end{cases}$$
$A=\dfrac{1}{2}$, $B=\dfrac{1}{2}\cot\dfrac{\pi}{22}$. 【训练题】(一) 复数的三角形式

98. 复数 $z=-\sin 100^\circ+i\cos 100^\circ$ 的轴角主值是 ()

A. $80°$　　B. $100°$　　C. $190°$　　D. $260°$

99. 复数 $z=-2(\sin 220°-\mathrm{i}\cos 220°)$ 在复平面内的对应点所在的象限是 ()

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三角限　　D. 第四象限

100. 若 $\frac{3\pi}{2}<\theta<2\pi$, 则 $-\sin\theta+i\cos\theta$ 的辐角主值等于 ()

A. $2\pi-\theta$　　B. $\theta-\frac{3\pi}{2}$　　C. $\theta-\pi$　　D. $\theta-\frac{\pi}{2}$

101. 复数 $z=1+\sin\theta+\mathrm{i}\cos\theta(0<\theta<\frac{\pi}{2})$ 的辐角主值是 ()

A. θ　　B. $\frac{\theta}{2}$　　C. $\frac{\pi}{2}-\theta$　　D. $\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}$

102. 若复数 $z=a+b\mathrm{i}(a,b\in R)$ 所对应的点在第四象限, 则 $\arg z$ 等于 ()

A. $\arcsin\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$　　B. $\arcsin\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$　　C. $arc\cot\frac{b}{a}$　　D. $2\pi+\arctan\frac{b}{a}$

103. 若复数 z 满足 $|z+3\mathrm{i}|\leq 2$, 则 $\arg z$ 的最大值为 ()

A. $\arcsin\frac{2}{3}$　　B. $\arccos\frac{2}{3}$　　C. $\pi-\arcsin\frac{2}{3}$　　D. $2\pi-\arccos\frac{2}{3}$

104. 复数 $z=1+\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta(\pi<\theta<2\pi)$ 的模是 ()

A. 1　　B. $1+\cos\theta$　　C. $2\cos\frac{\theta}{2}$　　D. $-2\cos\frac{\theta}{2}$

105. 若复数 z 的辐角主值是 $\frac{5\pi}{6}$, 实部是 $-2\sqrt{3}$, 则 z 的代数形式是 ()

A. $-2\sqrt{3}-2i$　　B. $-2\sqrt{3}+2i$　　C. $-2\sqrt{3}+2\sqrt{3}i$　　D. $-2\sqrt{3}-2\sqrt{3}i$

106. 若 $\arg z=\alpha(0<\alpha<\frac{\pi}{2})$, 则 $\arg\overline{z}$ 等于 ()

A. $-\alpha$　　B. $\pi-\alpha$　　C. $\pi+\alpha$　　D. $2\pi-\alpha$

107. 满足 $|z-2+2\mathrm{i}|=\sqrt{2}$ 的复数 z 的辐角主值的最小值是 ()

A. $105°$　　B. $265°$　　C. $285°$　　D. $315°$

108. 复数 $z=-1-2\mathrm{i}$ 的辐角主值是 ()

A. $\arctan 2$　　B. $\pi+\arctan 2$　　C. $-\arctan 2$　　D. $(2k+1)\pi+\arctan 2(k\in\mathbf{Z})$

109. 若复数 z 满足 $z=(a+\mathrm{i})^2$, 且 $\arg z=\frac{7}{4}\pi$, 则实数 a 的值为 ()

A. 1　　B. -1　　C. $-1\pm\sqrt{2}$　　D. $-1-\sqrt{2}$

110. 将下列复数化为三角形式: (1)$2(\cos\frac{\pi}{5}-i\sin\frac{\pi}{5})=$__________. (2)$2(\sin\frac{\pi}{5}+i\cos\frac{\pi}{5})=$__________. (3)$2(-\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5})=$__________. (4)$-2(\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5})=$__________. (5)$|\cos\theta|+i|\sin\theta|=$__________$(\frac{\pi}{2}<\theta<\pi)$.

111. 若复数 z 满足 $\arg(z+4)=\frac{\pi}{6}$, 则 $|z|$ 的最小值为 ()

A. 1　　B. 2　　C. $2\sqrt{3}$　　D. $3\sqrt{2}$

112. 若复数 z 满足 $|z|\leq\dfrac{1}{2}$, 则 $\arg(z+1)$ 的取值范围是 ()

A. $[0,\dfrac{\pi}{6}]$　　B. $[-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{6}]$　　C. $[0,\dfrac{\pi}{6}]\cup[\dfrac{11\pi}{6},2\pi)$　　D. $[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{11\pi}{6}]$

113. 若非零复数 z 的辐角主值为 $\dfrac{7\pi}{4}$, 则复数 $z+\mathrm{i}$ 的辐角主值的取值范围是 ()

A. $(-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2})$　　B. $(\dfrac{7\pi}{4},2\pi)$　　C. $[0,\dfrac{\pi}{2})$　　D. $[0,\dfrac{\pi}{2})\cup(\dfrac{7\pi}{4},2\pi)$

114. 若 $7+3i$ 的辐角主值为 θ, 则 $6-14i$ 的辐角主值为 ()

A. $\dfrac{\pi}{2}+\theta$　　B. $\dfrac{\pi}{2}-\theta$　　C. $\dfrac{3\pi}{2}-\theta$　　D. $\dfrac{3\pi}{2}+\theta$

115. (1) 复数 $\cot 20^\circ-\mathrm{i}$ 的模是__________, 辐角的主值是__________. (2) 若 $a,b\in\{-2,-1,1,2\}$, 且 $a\neq b$, 则 $\arg(a+bi)$ 的最大值是__________. (3) 若复数 $z=a+bi(a,b\in R)$ 的对应点在第四象限, 则 $\arg z=$__________. (4) 若 $z_1=1+\cos\theta+i\sin\theta$, $z_2=1-\cos\theta+i\sin\theta(\pi<\theta<2\pi)$, 则 z_1,z_2 的辐角主值之和等于__________. (5) 若 $\pi<\theta<\dfrac{3\pi}{2}$, 则 $\arg(|\cos\theta|+i|\sin\theta|)=$__________. (6) 若 $|z|\leq 1$, 则 $\arg(z-2)$ 的最大值为__________, 最小值为__________.

116. (1) 已知 $|z+1|=\sqrt{10}$, $\arg(z-3\overline{z})=\dfrac{5\pi}{4}$, 求复数 z. (2) 已知复数 z 满足 $|\dfrac{1}{z}-1|=\dfrac{1}{2}$, $\arg\dfrac{z-1}{z}=\dfrac{\pi}{3}$, 求 z 的值. (3) 已知复数 z 满足 $|\dfrac{z-\mathrm{i}}{2z}|=2$, $\arg\dfrac{1+\mathrm{i}z}{z}=\dfrac{\pi}{2}$, 求 z.

117. (1) 已知 $\omega=z+ai$, 其中 $a\in\mathbf{R}$, $z=\dfrac{(1+4i)(1+i)+2+4i}{3+4i}$. 且 $|\omega|\leq\sqrt{2}$, 求 ω 的辐角主值 θ 的取值范围. (2) 已知 $f(z)=|1+z|-\overline{z}$, $f(-\overline{z}i)=10+3i$, 求 $\dfrac{z+3}{z-2}$ 的模及辐角主值. (3) 已知复数 $1-\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta(-\pi<\theta<\pi)$.① 求 $|z|$ 及 $\arg z$; ② 要使 $1\leq|z|\leq\sqrt{2}$, 求 θ 的取值范围. (4) 求复数 $z=\dfrac{1+i}{1+\cos\theta+i\sin\theta}$ 的模和辐角, 其中 $\theta\in[0,2\pi)$, $\theta\neq\pi$.

118. 已知复数 $z=\sqrt{|\cos t|}+\mathrm{i}\sqrt{|\sin t|}$. 求: (1)$|z|$ 的取值范围. (2)t 的范围, 使 $0\leq\arg z\leq\dfrac{\pi}{4}$.

119. (1) 复平面内, 根据要求作出复数 z 的对应点所构成的图形: ① $\begin{cases}|z|\leq 1,\\ \arg z\in[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{2\pi}{3}];\end{cases}$ ② $\arg(z+2)=\dfrac{\pi}{4}$; ③ $\begin{cases}0\leq\arg(z-1)\leq\dfrac{\pi}{4},\\ R(z)\leq 2;\end{cases}$ ④ $\begin{cases}|z|=1,\\ \dfrac{\pi}{4}<\arg(z+i)<\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$ (2) 已知 $A=\{z||z-1|\leq 1,z\in\mathbf{C}\}$, $B=\{z|\arg z\geq\dfrac{\pi}{6},z\in\mathbf{C}\}$ 在复平面内, 求 $A\cap B$ 所表示的图形的面积. (3) 已知复数 z 满足 $|z-(1+\sqrt{3}\mathrm{i})|\leq 2$, $\arg z\leq\dfrac{\pi}{3}$, 求 z 所对应区域的面积. (二) 复数三角形式的运算

120. 若复数 $z_1=\cos\dfrac{2\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\dfrac{2\pi}{3}$, $z_2=\cos\dfrac{11\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\dfrac{11\pi}{6}$, 则 $\dfrac{2z_1^2}{z_2}$ 的辐角主值是 ()

A. $\dfrac{\pi}{6}$　　B. $\dfrac{5\pi}{6}$　　C. $\dfrac{3\pi}{2}$　　D. $-\dfrac{\pi}{2}$

(第 87 题)

121. 复平面内有 A,B,C,D,E 五点分别在单位圆内部和外部 (如图), 其中有一点对应的复数是点 A 对应复数的倒数, 则此点是 ()

A. 点 B. (C) 点 C. (C) 点 D. (D) 点 E. B. $-a+bi$ C. $b-ai$ D. $-b+ai$

122. 把复数 $a+b\mathrm{i}(a,b\in R)$ 在复平间内的对应向量绕原点 O 顺时针方向旋转 90° 后，所得向量对应的复数为 () (A)$a-bi$

123. 复平面内, 向量 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ 分别对应于非零复数 z_1, z_2, 若 $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$, 则 $\dfrac{z_2}{z_1}$ 一定是 ()

A. 非负数 B. 纯虚数 C. 正实数 D. 非纯虚数

124. 复数 $z=(\sin 25^\circ+\mathrm{i}\cos 25^\circ)^3$ 的三角形式为 ()

A. $\sin 75^\circ+i\cos 75^\circ$ B. $\cos 15^\circ+i\sin 15^\circ$ C. $\cos 75^\circ+i\sin 75^\circ$ D. $\cos 195^\circ+i\sin 195^\circ$

125. $(1-\sqrt{3}i)^2$ 的辐角主值为 ()

A. $\dfrac{10\pi}{3}$ B. $\dfrac{7\pi}{3}$ C. $\dfrac{4}{3}\pi$ D. $\dfrac{\pi}{3}$

126. (1) 若 α,β,γ 是一个三角形的三个内角, 则 $(\cos\alpha+i\sin\alpha)(\cos\beta+i\sin\beta)(\cos\gamma+i\sin\gamma)=$__________. (2)$(\cos 1^\circ+i\sin 1^\circ)(\cos 2^\circ+i\sin 2^\circ)(\cos 3^\circ+i\sin 3^\circ)\cdots(\cos 359^\circ+i\sin 359^\circ)=$__________. (3) 若 $\dfrac{\sin A+i\cos A}{(\sin B+i\cos B)(\sin C+$ 是纯虚数, 则 $\triangle ABC$ 是__________ 三角形.

127. 计算下列各题: (1)$\dfrac{[2(\cos 45^\circ+i\sin 45^\circ)]^4}{(\sin 80^\circ+i\cos 80^\circ)}=$__________. (2)$\dfrac{(\sqrt{3}+i)^5}{-1+\sqrt{3}i}=$__________. (3)$(1-\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ)=$__________. (4)$(\cos 15^\circ-i\sin 15^\circ)^3+(\cos 15^\circ-i\sin 15^\circ)^{-3}=$__________.

128. (1) 若 $z=(\sqrt{3}-i)^5$, 则 $\arg z=$__________. (2) 若复数 $z=7(\sin 140^\circ-\mathrm{i}\cos 140^\circ)$, 则 $\arg(-\dfrac{1}{z^2})=$__________. (3) 若 $\arg z=\theta$, 则 $\arg z^2=$__________. (4) 若 $\arg z=\theta$, $\dfrac{4}{3}\pi\le\theta<2\pi$, 则 $\arg z^3=$__________.

129. (1) 复平面内, 将 $1+\sqrt{3}\mathrm{i}$ 所对应的向量绕原点按逆时针方向旋转 θ 角, 所得向量对应的复数是 $-2\mathrm{i}$, 则 θ 的最小正值为__________. (2) 复平面内, 向量 $\overrightarrow{AB}$ 对应的复数为 $2+i$, 点 A 对应的复数为 -1, 将 $\overrightarrow{AB}$ 绕点 A 顺时针方向旋转 90° 后得到向量 $\overrightarrow{AC}$, 则点 C 对应的复数为__________. (3) 若复数 $z_1=\tan\theta-\mathrm{i}$, $z_2=\tan\theta+\mathrm{i}(0<\theta<\dfrac{\pi}{2})$, 将 z_1 的对应向量顺时针旋转到 z_2 所对应的向量, 则所转过的最小正角等于__________. (4) 若复数 $z_1\cdot z_2$ 满足 $|z_1|=|z_2|=1$, $z_2-z_1=-1$, 则 $\arg\dfrac{z_1}{z_2}=$__________. (5) 若 $\arg(zi)=\theta$, $\theta\in(\dfrac{\pi}{2},\pi)$, 则 $\arg\overline{z}=$__________.

130. 若 $\arg z_1=\alpha$, $\arg z_2=\beta$, 且 $\alpha<\beta$, 则 $\arg\dfrac{z_1}{z_2}$ 等于 ()

A. $\beta-\alpha$ B. $\alpha-\beta$ C. $2\pi+\alpha-\beta$ D. $\pi+\beta-\alpha$

131. 若 $|z|=1$, $\arg z=\theta(\theta\neq 0)$, 则 $\dfrac{z+\overline{z}}{1+z^2}$ 的辐角主值为 ()

A. $\dfrac{\theta}{2}$ B. θ C. $\pi-\theta$ D. $2\pi-\theta$

132. 若 $z_1=1+\cos 2\theta+i\sin 2\theta$, $z_2=1-\cos 2\theta+i\sin\theta$, 则下列各式中必为定值的是 ()

A. $z_1\cdot z_2$　B. $\frac{z_1}{z_2}$　C. $|z_1|+|z_2|$　D. $|z_1|^2+|z_2|^2$

133. 若复数 $-2+\mathrm{i}$ 和 $3-\mathrm{i}$ 的辐角主值分别为 α 和 β, 则 $\alpha+\beta$ 等于 ()

A. $\frac{3\pi}{4}$　B. $\frac{5\pi}{4}$　C. $\frac{7\pi}{4}$　D. $\frac{11\pi}{4}$

l00. 复平面内, 已知点 P_1, P_2 分别对应于复数 $3-2\mathrm{i}$, $7+4\mathrm{i}$, 线段 P_1P_2 绕点 P_1 按逆时针方向旋转 $\frac{5}{6}\pi$ 到 P_1P_3 的位置, 则点 P_3 对应的复数为 ()

A. $2\sqrt{3}+3\sqrt{3}i$　B. $2\sqrt{3}-3\sqrt{3}i$　C. $-2\sqrt{3}+3\sqrt{3}i$　D. $-2\sqrt{3}-3\sqrt{3}i$

134. 复平面内, 点 P_1 的对应复数是 $z_1=-2\sqrt{3}+4\mathrm{i}$, 将向量 $\overrightarrow{OP_1}$(O 为原点) 旋转一个锐角 θ 后得到新向量 $\overrightarrow{OP_2}$, 且点 P_2 的对应复数是 $z_2=\sqrt{3}+5\mathrm{i}$, 则 ()

A. $\theta=60^\circ$, 且按逆时针旋转　B. $\theta=60^\circ$, 且按顺时针旋转　C. $\theta=30^\circ$, 且按逆时针旋转　D. $\theta=30^\circ$, 且按顺时针旋转

135. 已知 $z_A=a+b\mathrm{i}(a,b\in R$, 且 $ab\neq 0)$, 复平面内, 把 z_A 对应的向量 $\overrightarrow{OA}$ 绕原点分别按逆、顺时针方向旋转 $\frac{2\pi}{3}$, 得向量 $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, 则 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ 所对应的复数之和等于 ()

A. $-a-bi$　B. $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$　C. $a-bi$　D. 0

l03. 若 $\arg z\in[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}]$, 则 $\arg(-\frac{1}{zi})$ 的取值范围是 () (4)$[\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4}]$. (B)$[\frac{5\pi}{4},\frac{7\pi}{4}]$. (C)$[\frac{\pi}{4},\frac{7\pi}{4}]$. (D)$[0,\frac{\pi}{4}]\cup[\frac{7\pi}{4},2\pi)$.

136. 若数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=(\cos\theta+i\sin\theta)^n(\theta\neq 2k\pi,\ k\in\mathbf{Z})$, 则 $\{a_n\}$()

A. 成等差数列, 但不成等比数列　B. 成等比数列, 但不成等差数列　C. 成等差数列又成等比数列　D. 既不成等差数列也不成等比数列

137. 若 $(-\sqrt{3}+i)^n\in\mathbf{R}^+$, 则最小的自然数 n 的值是 ()

A. 6　B. 8　C. 10　D. 12

138. 已知非纯虚数 z 满足 $\arg z=\arg[(z+1)i]$, 则 z 在复平面内的对应点所表示的图形为 () __________

A.　B.　C.　D.

139. 复平面内, 已知 $\triangle ABC$ 的三个顶点分别对应于复数 z, $\overline{z}$, $\frac{1}{z}$, 且 $|z|=3$, 点 A 的位置如图 24 所示. (1) 试在图上画出点 B,C 的大概位置. (2) 求 $\triangle ABC$ 面积的最大值. (第 107 题)

140. (1) 已知 $|z_1|=3$, $|z_2|=5$, $|z_1-z_2|=7$, 求 $\frac{z_1}{z_2}$. (2) 已知复数 z 满足 $|z|=5$, 且 $(3+4\mathrm{i})z$ 为纯虚数, 求 z. (3) 若 $|z|=1$, 求 $|z^2-z+1|$ 的最大值和最小值. (4) 已知 $z_1,z_2\in\mathbf{C}$, 且 $|z_1|=|z_2|=1$, $z_1+z_2=\frac{4}{5}+\frac{3}{5}i$, 求 $\tan(\arg z_1+\arg z_2)$. (5) 已知复数 z_1 和 z_2 满足 $|z_1|=|z_2|=1$, 且 $z_1-z_2=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\mathrm{i}$, 设 θ 是 $z_1\cdot z_2$ 的辐角, 求 $\sin\theta$ 的值.

141. (1) 已知复数 z_1,z_2,z_3 的辐角主值依次成公差为 $\dfrac{2\pi}{3}$ 的等差数列, 且 $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$, 求证: $z_1+z_2+z_3=0$. (2) 若复数 z_1,z_2,z_3 满足 $z_1+z_2+z_3=0$, 且 $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$, 求证: 复平面内以 z_1,z_2,z_3 所对应的点为顶点的三角形是内接于单位圆的正三角形. (3) 已知非零实数 x,y,z 满足了 $x+y+z=0$, 复数 α,β,γ 满足 $|\alpha|=|\beta|=|\gamma|\neq 0$, 且 $x\alpha+y\beta+z\gamma=0$, 求证: $\alpha=\beta=\gamma$.

142. (1) 计算: $\arg(i+2)+\arg(i+3)$. (2) 若 $\arg(-2-i)=\alpha$, $\arg(-3-i)=\beta$, 求 $\alpha+\beta$.

143. 复平面内, 两点 A,B 分别对应于非零复数 α,β, 试根据下列条件判断 $\triangle OAB$ 的形状 (O 为原点): (1)$\alpha=\beta(\cos\theta+i\sin\theta)(0<\theta<\pi)$. (2)$\alpha=\pm\beta i$. (3)$\dfrac{\alpha}{\beta}=\pm\sqrt{3}i$. (4)$\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$. (5)$\dfrac{\alpha}{\beta}=1+i$.

144. (1) 已知复数 z_1,z_2 满足 $4z_1^2-2z_1z_2+z_2^2=0$, 且 $|z_2|=4$, z_1, z_2, 0 所对应的点分别为 A, B, O, 求 $\triangle AOB$ 的面积. (2) 复平面内, 点 A, B 分别对应于复数 $\omega-z$ 和 $\omega+z$, 其中 $\omega=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$, 若 $\triangle AOB$ 是以原点 O 为直角顶点的等腰直角三角形. 求: ① 复数 z. ② $\triangle AOB$ 的面积.

145. (1) 已知等边三角形的两个顶点 A, B 对应的复数分别为 $z_A=2+i$, $z_B=3+2i$, 求第三个顶点 C 所对应的复数. (2) 复平面内, 等边三角形的一个顶点在原点, 中心 P 所对应的复数是 $1+\mathrm{i}$, 求其他两个顶点所对应的复数. (3) 复平面内, 矩形 $OMNP$ 的相邻两边之比是 $|OM|:|OP|=1:\sqrt{3}$, 且点 O, M 的对应复数分别是 0, $-1+2i$, 求点 N 对应的复数. (4) 已知等腰 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 的斜边 AB 的两个端点的坐标分别为 $A(-1,2)$, $B(2,3)$, 求顶点 C 的坐标. (5) 若等边 $\triangle ABC$ 的一个顶点为 $A(0,5)$, 中心 M 的坐标是 $M(2,3)$, 求其他两个顶点 B, C 的坐标.

146. 已知复数 $z_1=1+(2-\sqrt{3})\mathrm{i}$, $z_3=(2+\sqrt{3})+\mathrm{i}$, 又复数 z_1, z_2, z_3, z_4 在复平面内的对应点依逆时针方向排列足一个正方形的四个顶点. (1) 求 z_2, z_4. (2) 求证: z_2, z_4, 0 的对应点是一个等边三角形的三个顶点.

147. 复平面内, 已知 $\triangle AOB$ 的顶点 A, B 所对应的复数 α, β 满足 $\beta+(1-\mathrm{i})\alpha=0$, 且 $\triangle AOB$(O 为原点) 面积的最大值和最小值分别是 8 和 2, 求 $|\alpha|$ 与 $|\beta|$ 的取值范围.

148. (1) 已知复数 z_1, z_2, z_3 满足 $\dfrac{z_2-z_1}{z_3-z_1}=1+\sqrt{3}i$, 试判断复平面内的 z_1, z_2, z_3 的对应点为顶点的三角形的形状, 并求其各内角的值. (2) 复平面内, 已知 A, B, C 三点对应的复数 z_1, z_2, z_3 满足 $\dfrac{z_2-z_1}{z_3-z_1}=1+\dfrac{3}{4}\mathrm{i}$, 试求这个三角形三边长之比.

149. (1)一个三角形的底边 BC 的两端所表水的复数是 $z_B=a$, $z_C=-a$, 顶点 A 的位置不定, 以两边 AB, AC 为腰, 分别以 B, C 为直角的顶点, 在 $\triangle ABC$ 外作等腰直角三角形 ABD, ACE, 求证: DE 的中点 M 为定点, (2) 已知 B 是半圆 $x^2+y^2=1(y\geq 0)$ 上的动点, $A(2,0)$ 是 x 轴上的一个定点, 以 A 为直角顶点作等腰直角 $\triangle ABC$(字母按顺时针排列), 求 $|OC|$ 的最大值及其相应的点 B 的坐标 (O 为坐标原点).

150. (1) 复平面内, 已知 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 的三个顶点 A, B, C 分别对应于复数 z, z^2, z^3, 且 $|z|=2$, $\angle BAC=90^\circ$, 求复数 z. (2) 已知复数 z_1 满足 $\arg z_1=\dfrac{5\pi}{12}$, $|z_1-z_0|=\sqrt{2}$, $z_0-(1+i)z_1=0$. ① 求 z_1 和 z_0; ② 求证: 在满足 $|z_1-z_0|=\sqrt{2}$ 条件的所有复数 z 中, z_1 的辐角主值最小.

151. 已知复数 $z=[\cos(\pi+\alpha)+i\sin(\pi+\alpha)]\cdot[\sin(\dfrac{3}{2}\pi+\beta)+i\cos(\dfrac{3}{2}\pi+\beta)]$, $0<\beta<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$, 且 $\sin(\alpha+\beta)=4\cos\alpha\sin\beta$, 求 $\arg z$ 的最大值.

152. 已知 $|z-1-\mathrm{i}|=2$, 求复数 z^2 虚部的取值范围.

153. 已知复数 $z=x+yi$ 满足 $|z+\frac{1}{z}|=1(x,y\in\mathbf{R})$. 求证: $(1)(x^2+y^2)^2+x^2-3y^2+1=0$. $(2)k\pi+\frac{\pi}{3}\leq\arg z\leq k\pi+\frac{2\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$. $(3)\frac{\sqrt{5}-1}{2}\leq|z|\leq\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

154. 对 $n\in\mathbf{N}$, $k\in\mathbf{N}$, 求证: $(1)(\frac{1+i}{\sqrt{2}})^n+(\frac{1-i}{\sqrt{2}})^n=2\cos\frac{n\pi}{4}$. $(2)(1+\cos\alpha+i\sin\alpha)^n=2^n\cos^n(\frac{\alpha}{2})(\cos\frac{n\alpha}{2}+i\sin\frac{n\alpha}{2})$. $(3)(\frac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha})^n=\frac{1+i\tan n\alpha}{1-i\tan n\alpha}$. $(4)(\frac{1-\cos\theta+i\sin\theta}{1-\cos\theta-i\sin\theta})^n=\cos n(\pi+\theta)-i\sin n(\pi+\theta)(\theta\neq 2k\pi)$.

155. (1) 若 $(1+\sqrt{3}i)^n$ 是一个实数, 求自然数 n 的值. (2) 已知复数 $z=\frac{(1+\mathrm{i})^3}{\sqrt{2}(a+\mathrm{i})^2}(a>0)$ 满足 $|z|=\frac{1}{2}$. 求: ① a 的值; ② 使 z^n 为实数的最小自然数 n.

156. 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项 $a_n=\frac{1}{(1+\sqrt{3}i)^n}$, 当 n 取 1, 2, 3, ⋯时, 依次得到的实数记为 b_1, b_2, b_3, ⋯, 求数列 $\{b_n\}$ 的所有项之和.

157. (1) 已知复数 $z=\cos 20°+\mathrm{i}\sin 20°$, 求 $|z-z^2+z^3-z^4+z^5-z^6+z^7-z^8+z^9-z^{10}|$. (2) 设 $z=\cos 40°+i\sin 40°$, 求 $|z+z^2+\cdots+z^{100}|$. (3) 已知 $z=\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}$, 求 $(1+z^8)(1+z^4)(1+z^2)(1+z)$. (4) 已知 $z=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$, 求 $|z+2z^2+3z^3+\cdots+12z^{12}|$.

158. 已知 $z_n=(\frac{1+i}{2})^n(n\in\mathbf{N})$. (1) 记 $a_n=|z_{n+1}|-|z_n|(n\in\mathbf{N})$, 求数列 $\{a_n\}$ 所有项之和. (2) 记 $b_n=|z_{n+2}-z_n|(n\in\mathbf{N})$, 求数列 $\{b_n\}$ 所有项之和.

159. 设复数 $z=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta(0<\theta<\pi)$, $\omega=\frac{1-(\overline{z})^4}{1+z^4}$, 且 $|\omega|=\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\arg\omega<\frac{\pi}{2}$, 求 θ.

160. 已知复数 $z=\cos\theta+i\sin\theta(0<\theta<2\pi)$, $\omega=\frac{1-z^3}{1-z}$. 求: (1) 满足 $|\omega|=1$ 的复数 z. $(2)\omega$ 的辐角 (用 θ 表示). 四、复数方程【典型题型和解题技巧】复数方程主要有以下几种类型: 1, 一次方程 $az=b(a,b\in\mathbf{C}$, $a\neq 0)$. 此类方程的解是 $z=\frac{b}{a}$.

161. 解方程 $3z+i=2iz+1$. 解由已知, 得 $(3-2i)z=1-i$, $z=\frac{1-i}{3-2i}=\frac{(1-i)(3+2i)}{13}=\frac{5}{13}-\frac{1}{13}i$. 注意关于 z 的一次方程, 若令 $z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$ 也可获解, 但显然不妥.

162. 二次方程 $az^2+bz+c=0(a,b,c\in\mathbf{C}$, $a\neq 0)$. 对于这类方程需强调两点: 韦达定理仍可沿用——若 α, β 是上述方程的两根, 则 $\begin{cases}\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\\ \alpha\beta=\frac{c}{a},\end{cases}$ 反之亦真; 若 a, b, c 不全是实数, 则 $\triangle=b^2-4ac$ 不能用来判断方程有无实根. (1) 二次方程 $az^2+bz+c=0(a,b,c\in\mathbf{C}$, $a\neq 0)$, 这就是通常所说的“实系数一元二次方程. 解此类方程可分为两步: 第一步, 先算 $\triangle=b^2-4ac$; 第二步, 若 $\triangle\geq 0$, 则方程的解是 $z=\frac{-b\pm\sqrt{\triangle}}{2a}$; 若 $\triangle<0$, 则方程的解是 $z=\frac{-b\pm\sqrt{-\triangle}i}{2a}$. 显然, 此类方程的 $\triangle=b^2-4ac$ 可以用来判断此方程有无实根, 若方程有虚根, 则虚根一定“成对出现”, 即若 $p+qi(p\cdot q\in\mathbf{R})$ 是上述方程的根, 则 $p-qi$ 也是此方程的根.

163. 设 x 是模不为 1 的虚数, 记 $y=x+\frac{1}{x}$, 求满足 $y^2+ay+1=0$ 的实数 a 的取值范围. 解由题意可设 $x=r(\cos\theta+i\sin\theta)(r>0,\ r\neq 1,\ \theta\neq k\pi)$, 则 $y=x+\frac{1}{x}=r(\cos\theta+i\sin\theta)+\frac{1}{r}(\cos\theta-i\sin\theta)=$

$(r+\frac{1}{r})\cos\theta+i(r-\frac{1}{r})\sin\theta$. $\theta\neq k\pi$, $r>0$, 且 $r\neq 1$, $(r-\frac{1}{r})\sin\theta\neq 0$. 故 y 是虚数, 即方程 $y^2+ay+1=0$ 有虚数根, $\triangle=a^2-a<0$, 故实数 a 的取值范围是 $-2<a<2$.

164. 已知关于 x 的实系数方程 $z^2-2pz+q=0(p\neq 0)$ 的两虚根 z_1, z_2 在复平面内的对应点为 F_1, F_2, 求以 F_1, F_2 为两焦点, 且经过原点的椭圆的普通方程. 解设 $z_1=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$, 则 $z_2=a-bi$. 由韦达定理, 得 $\begin{cases} z_1+z_2=2a=2p, \\ z_1z_2=a^2+b^2=q. \end{cases}$ 于是 $a=p$, $|OF_1|=|OF_2|=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{q}$(如图 13). 显然, 椭圆的半短轴长 $=|OM|=|a|=|p|$, 半焦距 $=|b|$, 半长轴 $=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{q}$, 而椭圆的中心为 $(a,0)$, 即 $(p,0)$, 所以椭圆的普通方程为 $\frac{(x-p)^2}{p^2}+\frac{y^2}{q}=1$. (图 13) (2) 齐二次方程 $az_1^2+bz_1z_2+cz_2^2=0(a,b,c\in\mathbf{R},\ a\neq 0)$. 此类方程称为关于 z_1, z_2 的齐二次方程, 在 $z_2\neq 0$ 的前提下, 方程可变形为 $a(\frac{z_1}{z_2})^2+b\cdot\frac{z_1}{z_2}+c=0$. 若令 $t=\frac{z_1}{z_2}$, 则有 $at^2+bt+c=0$. 因此, 就实质而言, 它也是实系数的二次方程.

165. 若非零复数 z_1, z_2 在复平面内的对应点分别为 A, B, 且满足 $|z_2|=2$, $z_1^2-2z_1z_2+4z_2^2=0$. (1) 试判断 $\triangle AOB$(O 为原点) 的形状. (2) 求 $\triangle AOB$ 的面积. 解 (1) 由 $z_1^2-2z_1z_2+4z_2^2=0$, 得 $z_1=\frac{2z_2\pm 2\sqrt{3}iz_2}{2}$, 即 $z_1=(1\pm\sqrt{3}i)z_2$, 即 z_1=$2(\cos\frac{\pi}{3}\pm i\sin\frac{\pi}{3})z_2$. 由此得 $\triangle AOB$ 是直角三舟形, 且 $\angle AOB=60^\circ$. (2)$S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}|AO|\cdot|BO|\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 2\cdot|BO|^2=2\sqrt{3}$. (3) 二次方程 $az^2+bz+c=0(a,\ b,\ c$ 不全为实数, $a\neq 0)$. 此类方程布些超过教科书的要求, 它的解法可按以下步骤进行: 先计算 $\triangle=b^2-4ac$, 再把 $\triangle$ 化成一个复数 u 的平方, 即 $\triangle=u^2$, 然后用公式 $z=\frac{-b\pm u}{2a}$.

166. 解方程 $x^2-(3-2i)x+5-5i=0$. 解 $\triangle=(3-2i)^2-4(5-5i)=-15+8i=(1+4i)^2$, $x=\frac{3-2i\pm(1+4i)}{2}$. 故 $x_1=2+i$, $x_2=1-3i$.

167. 一元高次方程. 本单元出现的一元高次方程的系数均为实数, 即 $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0$, 其中 $a_k\in\mathbf{R}(k=0,1,2,3,\cdots n)$. 解实系数的高次方程主要有下面两种方法. (1) 分解因式法.

168. 解方程 $x^3+8=0$. 解原方程即为 $(x+2)(x^2-2x+4)=0$. 由 $x+2=0$, 得 $x=-2$. 由 $x^2-2x+4=0$, 得 $x=1\pm\sqrt{3}i$. 原方程的解为 $x_1=-2$, $x_2=1+\sqrt{3}i$, $x_3=1-\sqrt{3}i$. (2) 公式法. 所谓公式法, 即对于 "n 次方程"$z^n=a$(常数 $a\in\mathbf{C}$), 可利用公式求解. 先将 a 化成三角形式, 即 $a=r(\cos\theta+i\sin\theta)(r>0)$. 再用公式 $z=\sqrt[n]{r}(\cos\frac{2k\pi+\theta}{n}+i\sin\frac{2k\pi+\theta}{n})(k=0,1,2,\cdots n-1)$.

169. 解方程 $(1+z)^n-(1-z)^n=0$. 解由已知, 得 $(1+z)^n=(1-z)^n$, 显然 $(1-z)^n\neq 0$, 故有 $(\frac{1+z}{1-z})^n=1$. $\frac{1+z}{1-z}=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}(k=0,1,2,\cdots n-1)$. 由合分比定理得 $z=\frac{\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}-1}{\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}+1}=\frac{\sin\frac{k\pi}{n}(-\sin\frac{k\pi}{n}+i\cos\frac{k\pi}{n})}{\cos\frac{k\pi}{n}(\cos\frac{k\pi}{n}+i\sin\frac{k\pi}{n})}=\tan\frac{k\pi}{n}\cdot\frac{(\cos\frac{k\pi}{n}+i\sin\frac{k\pi}{n})i}{(\cos\frac{k\pi}{n}+i\sin\frac{k\pi}{n})}=-i\tan\frac{k\pi}{n}(n=0,1,2,\cdots,n-1)$.

170. 方程 $f(z,\overline{z},|z|)=0$. 这是一类比较特殊的方程, 方程中含有 z, $\overline{z}$ 和 $|z|$. 解此类方程通常有以下两种方法. (1) 代数式法. 所谓代数式法, 即令 $z=x+yi(x,y\in\mathbf{R})$ 代入方程求解.

171. 解方程 $(\overline{z})^2=z$. 解令 $z=x+yi(x,y\in\mathbf{R})$, 则有 $(x-yi)^2=x+yi$, 即 $x^2-y^2-2xyi=x+yi$, 于是 $\begin{cases}x^2-y^2=x,\\-2xy=y.\end{cases}$ 若 $y=0$, 则 $x^2=x$, 得 $x=0$ 或 $x=1$, $z_1=0, z_2=1$. 若 $y\neq 0$, 则 $x=-\dfrac{1}{2}$, $y=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $z_3=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$, $z_4=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$. 方程的解为 $0, 1, -\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$. (2) 定性法. 有一类方程, 可以通过初步观察, 对方程的根先 "定性", 从而为求解带来一定的方便.

172. 解方程 $z^2-4|z|+3=0$. 解由已知, $z^2=-3+4|z|$, 故 z^2 必是实数, 因此, z 是实数或纯虚数. (1)z 是实数时, 原方程即为 $|z|^2-4|z|+3=0$, $(|z|-1)(|z|-3)=0$, 于是得 $z=\pm 1$ 或 $z=\pm 3$. (2)z 是纯虚数时, 可令 $z=ti(t\in\mathbf{R}, t\neq 0)$, 则原方程即为 $(ti)^2-4|ti|+3=0$, 即 $-t^2-4|t|+3=0$, 即 $|t|^2+4|t|-3=0$, $|t|=-2+\sqrt{7}$, 故 $z=\pm(-2+\sqrt{7})i$. 方程的解为 $\pm 1, \pm 3, \pm(2-\sqrt{7})i$ 【训练题】

173. 若 $z\in\mathbf{C}$, 则方程 $|z|^2-|z|=0$ 解的个数是 ()

A. 2　　B. 3　　C. 5　　D. 无穷多

174. 方程 $z^2=\overline{z}$ 的解的个数是 ()

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

175. 二次方程 $x^2-2xi-5=0$ 的根的情况是 ()

A. 有两个不等的实根　　B. 有一个实根和一个虚根　　C. 有一对共轭的虚根　　D. 有两个不共轭的虚根

176. 满足 $z+|\overline{z}|=2+\mathrm{i}$ 的复数 z 等于 ()

A. $-\dfrac{3}{4}+i$　　B. $\dfrac{3}{4}-i$　　C. $-\dfrac{3}{4}-i$　　D. $\dfrac{3}{4}+i$

177. 若关于 x 的方程 $x^2+x+p=0$ 的两个虚根 α, β 满足 $|\alpha-\beta|=3$, 则实数 p 的值为 ()

A. -2　　B. $-\dfrac{1}{2}$　　C. $\dfrac{5}{2}$　　D. 1

178. 若 $a>1$, α, β 是关于 x 的方程 $x^2+2x+a=0$ 的两根, 则 $|\alpha|+|\beta|$ 的值为 ()

A. 2　　B. $2\sqrt{a}$　　C. $2\sqrt{a-1}$　　D. $2\sqrt{1-a}$

179. (1) 若关于 x 的实系数二次方程 $x^2+ax+b=0$ 的一个根是 $2+i$, 则 $a=$_________, $b=$_________. (2) 若实系数的一元二次方程的一个根是 $\dfrac{1}{3}-\dfrac{4\sqrt{5}}{3}i$, 则这个方程为_________.

180. 1 的 5 次方根的五个复数的辐角主值之和是 ()

A. 2π　　B. 4π　　C. 6π　　D. 8π

181. 若 ω 是 $x^5-1=0$ 的一个虚根, 则 $\omega(1+\omega)(1+\omega^2)$ 的值是 ()

A. 1　　B. -1　　C. i　　D. $-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

182. 复平面内, 两点 M, N 所对应的非零复数是 α, β(O 是原点). (1) 若 $\alpha^2+\beta^2=0$, 则 $\triangle OMN$ 是_________ 三角形. (2) 若 $2\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2=0$, 则 $\triangle OMN$ 是_________ 三角形.

183. 在复数范围内解方程: (1)$z\cdot\overline{z}-3i\overline{z}=1+3i$. (2)$z^2-5|z|+6=0$. (3)$2z+|z|=2+6i$. (4)$z|z|+az+i=0(a\geq 0)$. (5)$|z|^2-2zi+2a(1+i)=0(a\in\mathbf{R})$.

184. (1) 已知关于 x 的方程 $x^2+(k+2i)x+2+ki=0$ 有一个实根, 求实数 k 的值. (2) 已知关于 x 的方程 $x^2-ix-m+4ni=0$ 有实根, 求点 (m,n) 应满足的方程. (3) 已知关于 x 的方程 $x^2-zx+4+3\mathrm{i}=0$ 有实根, 求复数 z 的模的最小值和此时的 z 值.

185. (1) 已知方程 $x^2+ix+6=2i+5x$ 有一个实数解, 试在复数范围内解此方程. (2) 已知关于 x 的方程 $x^2+2px+1=0$ 的两根 α, β 在复平面内的对应点和原点恰是一个等边三角形的三个顶点, 求实数 p 的值. (3) 已知 $p,q\in\mathbf{R}$, 方程 $x^2+px+q=0$ 有两虚根 α, β, 方程 $x^2-px+q=0$ 有两虚根 α^2, β^2, 求 α, β, p, q 的值. (4) 已知 a, b 是实数, 关于 x 的方程 $x^2+(2a-b\mathrm{i})x+a-b\mathrm{i}=0$ 的两个非零复数根的辐角分别为 $\dfrac{2\pi}{3}$ 及 π, 求 a, b 的值.

186. (1) 求 $5+12i$ 的平方根. (2) 解方程: ① $z^2-i=0$. ② $z^2-2zi-5=0$.

187. 复平面内, 已知非零复数 z_1, z_2 对应于点 A 和 B, 复数 z_1-a 与 z_1+a 所对应的两个向量相互垂直且模不相等, 又 $z_1^2-4z_1z_2+6z_2^2=0$. (1) 求 z_1 与 z_2 的模. (2)O 为复平面上的坐标原点, 求 $\triangle AOB$ 的面积.

188. 非零复数 α, β 分别对应于点 A, B(O 是原点), 已知 $4\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2=0$. (1) 求证: $\triangle AOB$ 是直角三角形. (2) 若 $|\alpha|=1$, 求 $\triangle AOB$ 的面积. (3) 若 $|\alpha|=t>0$, 求 $|\beta|^2-\alpha\overline{\beta}-\overline{\alpha}\beta$ 的值.

189. 设 α, β 是实系数一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两根, α 为虚数, 而 $\dfrac{\alpha^2}{\beta}$ 为实数, 求复数 $\dfrac{\alpha}{\beta}$ 的值.

190. 已知: $x+\dfrac{1}{x}=2\cos\varphi$. 求证: (1)$x=\cos\varphi\pm i\sin\varphi$. (2)$x^n+\dfrac{1}{x^n}=2\cos n\varphi(n\in\mathbf{N})$.

191. (1) 要使关于 x 的方程 $(1-i)x^2+2mix-(1+i)=0$ 有实根, 求实数 m 的值. (2) 若关于 x 的实系数方程 $2x^2+3ax+a^2-a=0$ 至少布一个模为 1 的根, 求实数 a 的值. (3) 若关于 x 的方程 $x^2+(2+i)x+4mn+(2m-n)i=0(m,n\in\mathbf{R})$ 有实根, 求点 (m,n) 的轨迹方程. (4) 已知 α, β 是方程 $x^2-2x+2=0$ 的两根, p, q 是关于 x 的方程 $x^2+2mx-1=0(m\in\mathbf{R})$ 的两根, 且 α, β, p, q 在复平面内的对应点共圆, 求 m 的值. (5) 已知关于 x 的方程 $3x^2-6(m-1)x+m^2+1=0$ 的两根 x_1, x_2 满足 $|x_1|+|x_2|=2$, 求实数 m 的值.

192. (1) 实系数方程 $x^4-4x^3+9x^2-ax+b=0$ 的一个根是 $1+i$, 求 a, b 的值, 并解此方程. (2) 已知关于 x 的实系数方程 $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$ 有一个纯虚根, 求证: $a^2d+c^2-abc=0$. (3) 已知模为 2, 辐角为 $\dfrac{\pi}{6}$ 的复数是方程 $x^5+a=0$ 的一个根, 求 a. (4) 已知复数 $z=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ 满足 $z^n=\overline{z}$, 求整数 n 的一般形式.

193. 利用复数乘法、除法的几何意义, 求证: (1)$\arctan 1+\arctan 2+\arctan 3=\pi$. (2)$\arcsin\dfrac{\sqrt{10}}{10}+\arccos\dfrac{7\sqrt{2}}{10}+\arctan\dfrac{7}{31}+arc\cot 10=\dfrac{\pi}{4}$. (3)$\arctan(3+2\sqrt{2})-\arctan\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\pi}{4}$. (4)$\arctan\dfrac{1}{7}+2\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{10}}=\dfrac{\pi}{4}$.

194. (1) 复平面内, 已知动点 A, B 所对应的复数 z_1, z_2 的一个辐角为定值 θ 和 $-\theta(0<\theta<\dfrac{\pi}{2})$, 且 $\triangle AOB$ 的面积为定值 S(O 为坐标原点〉, 求 $\triangle AOB$ 的重心 M 所对应复数 z 的模的最小值. (2) 复数 z_1, z_2, z_3 的辐角主值分别为 α, β, γ, 模分别为 1, k 和 $2-k$, 且 $z_1+z_2+z_3=0$, 求 k, 使 $\cos(\beta-\alpha)$ 分别取到最大值和最小值, 并求出大值和最小值.

195. 已知复数 $z=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$. (1) 当实数 k 和 θ 分别为何值时, $z^3+k\overline{z}^3$ 是纯虚数? (2) 求 $|z^3+k\overline{z}^3|$ 的最大值与最小值.

196. (1) 已知复数 z_1, z_2, z_3 满足 $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$, 求证: $|z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1|=|z_1+z_2+z_3|$. (2) 已知复数 α, β, γ 满足 $|\alpha|=|\beta|=|\gamma|\neq 0$, 求证: $\dfrac{(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)}{\alpha\beta\gamma}$ 是实数.

197. 设 A, B, C 分别是复数 z_1, z_2, z_3(z_1, z_2, z_3 互不相等) 在复平面内所对应的点, 求证: $\triangle ABC$ 为等边三角形的充要条件是 $z_1^2+z_2^2+z_3^2=z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1$.

198. 利用复数知识证明: $\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$, $\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$.

199. (1) 求证: $\cos\dfrac{\pi}{2n+1}+\cos\dfrac{3\pi}{2n+1}+\cos\dfrac{5\pi}{2n+1}+\cdots+\cos\dfrac{2n-1}{2n+1}\pi=\dfrac{1}{2}(n\in\mathbf{N})$. (2) 已知 $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=0$, $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=0$. 求证: ① $\cos 3\alpha+\cos 3\beta+\cos 3\gamma=3\cos(\alpha+\beta+\gamma)$, $\sin 3\alpha+\sin 3\beta+\sin 3\gamma=3\sin(\alpha+\beta+\gamma)$; ② $\cos 3k\alpha=\cos 3k\beta=\cos 3k\gamma=\cos k(\alpha+\beta+\gamma)$, $\sin 3k\alpha=\sin 3k\beta=\sin 3k\gamma=\sin k(\alpha+\beta+\gamma)(k\in\mathbf{N})$.

200. (1) 若 $|z|=1$, 求复数 $u=3z^2+\dfrac{1}{z^2}$ 在复平面内的对应点的轨迹. (2) 求复数 $z=\dfrac{1}{1-bi}(b\in\mathbf{R}$ 且 $b\neq 0)$ 在复平面内对应点的轨迹方程. (3) 复平面内, 若复数 z 对应的点在连接复数 $2+\mathrm{i}$ 和 $2-\mathrm{i}$ 对应点的线段上移动, 求 z^2 对应点的轨迹方程.

201. 根据条件, 求复数 $z+\dfrac{1}{z}$ 在复平面内的对应点轨迹的普通方程: (1)$|z|=1$. (2)$|z|=r(r>0, r\neq 1)$. (3)$|z|\neq 0$, 且 $\arg z=\theta$.

202. (1) 在等腰 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中, 已知 $\angle C=90^\circ$, $|AC|=a$. 若点 A 在 x 轴上移动, 点 B 在抛物线上移动, 且点 A, B, C 按逆时针方向排列, 求顶点 C 的轨迹方程. (2) 设 P 是抛物线 $y=x^2$ 上任意一点, 以线段 OP 为边, 按逆时针方向作正方形 $OPQR$(如图), 利用复数知识求点 R 的轨迹方程. (第 158 题)

203. 一动点从原点出发, 开始沿 x 轴的正半轴运动, 每运动一个长度单位, 就向左转 θ 角, 求此动点运动 n 个长度单位时与原点的距离.

204. (1) 复平面内, 复数 α 的对应点在连接 $1+\mathrm{i}$ 和 $1-\mathrm{i}$ 的对应两点的线段上运动, 复数 β 的对应点在以原点为圆心, 半径为 1 的圆周上运动, 试求: ① 复数 $\alpha+\beta$ 的对应点运动范围的面积; ② 复数 $\alpha\beta$ 的对应点运动范围的面积. (2) 已知半径为 1 的定圆 O 的内接正 n 边形的顶点为 $P_k(k=1,2,\cdots n)$, P 为该圆周上任意一点, 求证: $|PP_1|^2+|PP_2|^2+\cdots+|PP_n|^2$ 为一定值.