

1. (005100) 利用反证法证明: 若  $x, y > 0$ , 且  $x + y > 2$ , 则  $\frac{1+y}{x}$  和  $\frac{1+x}{y}$  中至少有一个小于 2.
2. (005101) 利用反证法证明: 若  $0 < a < 1, b > 0$ , 且  $a^b = b^a$ , 则  $a = b$ .
3. (005102) 若  $a > 0, b > 0$ , 且  $a^3 + b^3 = 2$ , 试分别利用  $x^3 + y^3 + z^3 \geq 3xyz (x, y, z \geq 0)$  构造方程, 并利用判别式以及反证法证明:  $a + b \leq 2$ .
4. (005103) 下列函数中, 最小值为 2 的是 ( ).  
A.  $x + \frac{1}{x}$  B.  $\frac{x^2 + 2}{\sqrt{x^2 + 1}}$   
C.  $\log_a x + \log_x a (a > 0, x > 0, a \neq 1, x \neq 1)$  D.  $3^x + 3^{-x} (x > 0)$
5. (005104) 若  $\log_{\sqrt{2}} x + \log_{\sqrt{2}} y = 4$ , 则  $x + y$  的最小值是 ( ).  
A. 8 B.  $4\sqrt{2}$  C. 4 D. 2
6. (005105) 若  $a, b$  均为大于 1 的正数, 且  $ab = 100$ , 则  $\lg a \cdot \lg b$  的最大值是 ( ).  
A. 0 B. 1 C. 2 D.  $\frac{5}{2}$
7. (005106) 若实数  $x$  与  $y$  满足  $x + y - 4 = 0$ , 则  $x^2 + y^2$  的最小值是 ( ).  
A. 4 B. 6 C. 8 D. 10
8. (005107) 若非负实数  $a, b$  满足  $2a + 3b = 10$ , 则  $\sqrt{3b} + \sqrt{2a}$  的最大值是 ( ).  
A.  $\sqrt{10}$  B.  $2\sqrt{5}$  C. 5 D. 10
9. (005108) 若  $x > 1$ , 则  $\frac{x^2 - 2x + 2}{2x - 2}$  有 ( ).  
A. 最小值 1 B. 最大值 1 C. 最小值 -1 D. 最大值 -1
10. (005109) 若  $x, y \in \mathbf{R}^+$ , 且  $x^2 + y^2 = 1$ , 则  $x + y$  的最大值是\_\_\_\_\_.
11. (005110) 若  $x + 2y = 2\sqrt{2}a (x > 0, y > 0, a > 1)$ , 则  $\log_a x + \log_a y$  的最大值是\_\_\_\_\_.
12. (005111) 若  $x > 1$ , 则  $2 + 3x + \frac{4}{x-1}$  的最小值\_\_\_\_\_, 此时  $x =$ \_\_\_\_\_.
13. (005112) 若  $x > 0$ , 则  $x + \frac{1}{x} + \frac{16x}{x^2 + 1}$  的最小值是\_\_\_\_\_, 此时  $x =$ \_\_\_\_\_.
14. (005113) 若正数  $a, b$  满足  $a^2 + \frac{b^2}{2} = 1$ , 则  $a\sqrt{1+b^2}$  的最大值为\_\_\_\_\_, 此时  $a =$ \_\_\_\_\_,  $b =$ \_\_\_\_\_.
15. (005114) 若  $x > 0$ , 则  $3x + \frac{12}{x^2}$  的最小值是\_\_\_\_\_, 此时  $x =$ \_\_\_\_\_.
16. (005115) 若  $0 < x < \frac{1}{3}$ , 则  $x^2(1-3x)$  的最大值是\_\_\_\_\_, 此时  $x =$ \_\_\_\_\_.
17. (005116) 若  $xy > 0$ , 且  $x^2y = 2$ , 则  $xy + x^2$  的最小值是\_\_\_\_\_.
18. (005118) 若正数  $x, y, z$  满足  $5x + 2y + z = 100$ , 则  $\lg x + \lg y + \lg z$  的最大值是\_\_\_\_\_.

19. (005119) 若  $\frac{x^2}{4} + y^2 = x$ , 则  $x^2 + y^2$  有 ( ).  
 A. 最小值 0, 最大值 16    B. 最小值  $-\frac{1}{3}$ , 最大值 0    C. 最小值 0, 最大值 1    D. 最小值 1, 最大值 2
20. (005121) 若  $x > 0$ , 则  $\frac{x}{x^3 + 2}$  的最大值是 ( ).  
 A. 5    B. 3    C. 1    D.  $\frac{1}{3}$
21. (005122) 若正数  $a, b$  满足  $ab - (a + b) = 1$ , 则  $a + b$  的最小值是 ( ).  
 A.  $2 + 2\sqrt{2}$     B.  $2\sqrt{2} - 2$     C.  $\sqrt{5} + 2$     D.  $\sqrt{5} - 2$
22. (005127) 若  $x, y > 0$ , 求  $\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x+y}}$  的最大值.
23. (005128) 已知正常数  $a, b$  和正变数  $x, y$  满足  $a + b = 10$ ,  $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} = 1$ ,  $x + y$  的最小值为 18, 求  $a, b$  的值.
24. (005129) 已知  $x^2 + y^2 = 1$ , 求  $(1 + xy)(1 - xy)$  的最大值和最小值.
25. (005130) 已知  $x^2 + y^2 = 3$ ,  $a^2 + b^2 = 4$ , 求  $ax + by$  的最大值和最小值.
26. (005131) 已知  $\sqrt{1 - y^2} + y\sqrt{1 - x^2} = 1$ , 求  $x + y$  的最大值和最小值.
27. (005132) 已知函数  $f(x) = \frac{2^{x+3}}{4^x + 8}$ .  
 (1) 求  $f(x)$  的最大值;  
 (2) 对于任意实数  $a, b$ , 求证:  $f(a) < b^2 - 4b + \frac{11}{2}$ .
28. (005133) 若直角三角形的周长为 1, 求它的面积的最大值.
29. (005134) 若直角三角形的内切圆半径为 1, 求它的面积的最小值.
30. (005135) 若球半径为  $R$ , 试求它的内接圆柱的最大体积. 请指出下向解法的错误, 并给出正确的解答.  
 解: 设圆柱底面半径为  $r$ , 则  $4r^2 = 4R^2 - h^2$ , 而  $V = \pi r^2 h = \frac{\pi}{4}(4R^2 - h^2)h = \frac{\pi}{4}(2R + h)(2R - h) = \frac{\pi}{8}(2R + h)(4R - 2h)h \leq \frac{\pi}{8}(\frac{2R + h + 4R - 2h + h}{3})^3 = \frac{\pi}{8}(2R)^3 = \pi R^3$ . 所以所求最大体积为  $\pi R^3$ .
31. (005136) 在  $\triangle ABC$  中, 已知  $BC = a$ ,  $CA = b$ ,  $AB = c$ ,  $\angle ACB = \theta$ . 现将  $\triangle ABC$  分别以  $BC, CA, AB$  所在直线为轴旋转一周, 设所得三个旋转体的体积依次为  $V_1, V_2, V_3$ .  
 (1) 设  $T = \frac{V_3}{V_1 + V_2}$ , 试用  $a, b, c$  表示  $T$ ;  
 (2) 若  $\theta$  为定值, 并令  $\frac{a+b}{c} = x$ , 将  $T = \frac{V_3}{V_1 + V_2}$  表示为  $x$  的函数, 写出这个函数的定义域, 并求这个函数的最大值  $M$ ;  
 (3) 若  $\theta \in [\frac{\pi}{3}, \pi)$ , 求 (2) 中  $M$  的最大值.
32. (005137) 已知  $A(0, \sqrt{3}a)$ ,  $B(-a, 0)$ ,  $C(a, 0)$  是等边  $\triangle ABC$  的顶点, 点  $M, N$  分别在边  $AB, BC$  上, 且将  $\triangle ABC$  的面积两等分, 记  $N$  的横坐标为  $x$ ,  $|MN| = y$ .  
 (1) 写出  $y = f(x)$  的表达式;  
 (2) 求  $y = f(x)$  的最小值.

33. (005139) 已知关于  $x$  的不等式  $ax^2 + bx + c > 0$  的解集是  $\{x | \alpha < x < \beta\}$ , 其中  $0 < \alpha < \beta$ , 求  $cx^2 + bx + a < 0$  的解集.
34. (005140) 解不等式  $(x+1)^2(x-1)(x-4)^3 > 0$ .
35. (005141) 解不等式  $\frac{3x^2 - 14x + 14}{x^2 - 6x + 8} \geq 1$ .
36. (005142) 解不等式  $\sqrt{x^2 - 3x + 2} > x - 3$ .
37. (005143) 解不等式  $\sqrt{2x-1} < x-2$ .
38. (005144) 解不等式  $|x^2 - 4| \leq x + 2$ .
39. (005145) 解不等式  $|x^2 - \frac{1}{2}| > 2x$ .
40. (005146) 解关于  $x$  的不等式  $|\log_a x| < |\log_a(ax^2)| - 2 (0 < a < 1)$ .
41. (005147) 若关于  $x$  的不等式  $2x - 1 > a(x - 2)$  的解集是  $\mathbf{R}$ , 则实数  $a$  的取值范围是 ( ).
- A.  $a > 2$                       B.  $a = 2$                       C.  $a < 2$                       D.  $a$  不存在
42. (005148) 若关于  $x$  的不等式  $ax^2 + bx - 2 > 0$  的解集是  $(-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{3}, +\infty)$ , 则  $ab$  等于 ( ).
- A.  $-24$                       B.  $24$                       C.  $14$                       D.  $-14$
43. (005149) 若关于  $x$  的不等式  $(a-2)x^2 + 2(a-2)x - 4 < 0$  对一切实数  $x$  恒成立, 则实数  $a$  的取值范围是 ( ).
- A.  $(-\infty, 2]$                       B.  $(-\infty, -2)$                       C.  $(-2, 2]$                       D.  $(-2, 2)$
44. (005151) 若关于  $x$  的不等式  $(a+b)x + 2a - 3b < 0$  的解集是  $\{x | x < -\frac{1}{3}\}$ , 则  $(a-3b)x + b - 2a > 0$  的解集是\_\_\_\_\_.
45. (005152) 若不等式  $\frac{2x^2 + 2kx + k}{4x^2 + 6x + 3} < 1$  对一切  $x \in \mathbf{R}$  恒成立, 则实数  $k$  的取值范围是\_\_\_\_\_.
46. (005153) 若关于  $x$  的不等式  $ax^2 + bx + c > 0$  的解集是  $\{x | 3 < x < 5\}$ , 则不等式  $cx^2 + bx + a < 0$  的解集是\_\_\_\_\_.
47. (005154) 若关于  $x$  的不等式  $\frac{x-a}{x^2-3x+2} \geq 0$  的解集是  $\{x | 1 < x \leq a \text{ 或 } x > 2\}$ , 则实数  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_.
48. (005155) 不等式  $(x+2)(x+1)^2(x-1)^3(x-3) > 0$  的解集为:\_\_\_\_\_.
49. (005156) 不等式  $\frac{(x-1)^2(x+2)}{(x-3)(x-4)} \leq 0$  的解集为:\_\_\_\_\_.
50. (005157) 不等式  $x+1 \leq \frac{4}{x+1}$  的解集为:\_\_\_\_\_.
51. (005158) 若不等式  $f(x) \geq 0$  的解集为  $[1, 2]$ , 不等式  $g(x) \geq 0$  的解集为  $\emptyset$ , 则不等式  $\frac{f(x)}{g(x)}$  的解集是 ( ).
- A.  $\emptyset$                       B.  $(-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$                       C.  $[1, 2)$                       D.  $\mathbf{R}$

52. (005159) 若关于  $x$  的不等式  $ax^2 - bx + c < 0$  的解集为  $(-\infty, \alpha) \cup (\beta, +\infty)$ , 其中  $\alpha < \beta < 0$ , 则不等式  $cx^2 + bx + a > 0$  的解集为 ( ).
- A.  $(\frac{1}{\beta}, \frac{1}{\alpha})$       B.  $(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta})$       C.  $(-\frac{1}{\beta}, -\frac{1}{\alpha})$       D.  $(-\frac{1}{\alpha}, -\frac{1}{\beta})$
53. (005160) 解关于  $x$  的不等式:  $m^2x - 1 < x + m$ .
54. (005161) 解关于  $x$  的不等式:  $x^2 - ax - 2a^2 < 0$ .
55. (005162) 已知关于  $x$  的不等式  $\sqrt{x} > ax + \frac{3}{2}$  的解集是  $\{x|4 < x < b\}$ , 求  $a, b$  的值.
56. (005163) 已知  $x = 3$  是不等式  $ax > b$  解集中的元素, 求实数  $a, b$  应满足的条件.
57. (005164) 已知集合  $\{x|x < -2 \text{ 或 } x > 3\}$  是集合  $\{x|2ax^2 + (2-ab)x - b > 0\}$  的子集, 求实数  $a, b$  的取值范围.
58. (005165) 已知集合  $A = \{x|\frac{2x-1}{x^2+3x+2} > 0\}$ ,  $B = \{x|x^2+ax+b \leq 0\}$ , 且  $A \cap B = \{x|\frac{1}{2} < x \leq 3\}$ , 求实数  $a, b$  的取值范围.
59. (005166) 已知集合  $A = \{x|(x+2)(x+1)(2x-1) > 0\}$ ,  $B = \{x|x^2+ax+b \leq 0\}$ , 且  $A \cup B = \{x|x+2 > 0\}$ ,  $A \cap B = \{x|\frac{1}{2} < x \leq 3\}$ , 求实数  $a, b$  的值.
60. (005167) 已知关于  $x$  的不等式  $x^2 - ax - 6a \leq 0$  有解, 且解  $x_1, x_2$  满足  $|x_1 - x_2| \leq 5$ , 求实数  $a$  的取值范围.
61. (005168) 已知关于  $x$  的方程  $3x^2 + x \log_{\frac{2}{3}} a + 2 \log_{\frac{1}{3}} a = 0$  的两根  $x_1, x_2$  满足条件  $-1 < x_1 < 0 < x_2 < 1$ , 求实数  $a$  的取值范围.
62. (005169) 已知关于  $x$  的方程  $x^2 + (m^2 - 1)x + m - 2 = 0$  的一个根比  $-1$  小, 另一个根比  $1$  大, 求参数  $m$  的取值范围.
63. (005170) 已知集合  $A = \{x|x - a > 0\}$ ,  $B = \{x|x^2 - 2ax - 3a^2 < 0\}$ , 求  $A \cap B$  与  $A \cup B$ .
64. (005171) 不等式  $\sqrt{x+3} > -1$  的解集是 ( ).
- A.  $\{x|x > -2\}$       B.  $\{x|x \geq -3\}$       C.  $\emptyset$       D.  $\mathbf{R}$
65. (005172) 不等式  $(x-1)\sqrt{x+2} \geq 0$  的解集是 ( ).
- A.  $\{x|x > 1\}$       B.  $\{x|x \geq 1\}$       C.  $\{x|x \geq 1 \text{ 或 } x = -2\}$       D.  $\{x|x > 1 \text{ 或 } x = -2\}$
66. (005173) 与不等式  $\sqrt{(x-4)(x+3)} \leq 1$  的解完全相同的不等式是 ( ).
- A.  $|(x-4)(x+3)| \leq 1$       B.  $(x-4)(x+3) \leq 1$       C.  $\lg[(x-4)(x+3)] \leq 0$       D.  $0 \leq (x-4)(x+3) \leq 1$
67. (005174) 解不等式:  $\sqrt{x-5} + 4x - 3 > 3x + 1 + \sqrt{x-5}$ .
68. (005175) 解不等式:  $\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2-x+3}$ .
69. (005176) 解不等式:  $(x-4)\sqrt{x^2-3x-4} \geq 0$ .
70. (005177) 解不等式:  $\frac{x+1}{x+4} \sqrt{\frac{x+3}{1-x}} < 0$ .

71. (005178) 解不等式:  $\sqrt{x+2} + \sqrt{x-5} \geq \sqrt{5-x}$ .

72. (005179) 解不等式:  $\sqrt{x-6} + \sqrt{x-3} \geq \sqrt{3-x}$ .

73. (005180) 解不等式:  $\sqrt{2-x} < x$ .

74. (005181) 解不等式:  $\sqrt{4-x^2} < x+1$ .

75. (005182) 解不等式:  $\sqrt{3-2x} > x$ .

76. (005183) 解不等式:  $\sqrt{(x-1)(2-x)} > 4-3x$ .

77. (005184) 不等式  $\sqrt{4-x^2} + \frac{|x|}{x} \geq 0$  的解集是 ( ).

A.  $[-2, 2]$

B.  $[-\sqrt{3}, 0) \cup (0, 2]$

C.  $[-2, 0] \cup (0, 2]$

D.  $[-\sqrt{3}, 0) \cup (0, \sqrt{3}]$

78. (005185) 已知关于  $x$  的不等式  $\sqrt{2x-x^2} > kx$  的解集是  $\{x|0 < x \leq 2\}$ , 则实数  $k$  的取值范围是 ( ).

A.  $k < 0$

B.  $k \geq 0$

C.  $0 < k < 2$

D.  $-\frac{1}{2} < k < 0$

79. (005186) 解不等式:  $\sqrt{2x-4} - \sqrt{x+5} < 1$ .

80. (005187) 解不等式:  $\sqrt{x^2-5x-6} < |x-3|$ .

81. (005188) 解不等式:  $|2\sqrt{x+3} - x + 1| < 1$ .

82. (005189) 解关于  $x$  的不等式:  $\sqrt{a(a-x)} > a-2x (a > 0)$ .