

1. (000004) 已知方程 $x^2 + px + 4 = 0$ 的所有解组成的集合为 A , 方程 $x^2 + x + q = 0$ 的所有解组成的集合为 B , 且 $A \cap B = \{4\}$. 求集合 $A \cup B$ 的所有子集.
2. (000008) 设 a 是实数. 若 $x = 1$ 是 $x > a$ 的一个充分条件, 则 a 的取值范围为_____.
3. (000010) 证明: 若梯形的对角线不相等, 则该梯形不是等腰梯形.
4. (000015) 已知全集 $U = \mathbf{R}$, 集合 $A = \{x | x \leq a - 1\}$, $B = \{x | x > a + 2\}$, $C = \{x | x < 0 \text{ 或 } x \geq 4\}$, 且 $\overline{A \cup B} \subseteq C$. 求实数 a 的取值范围.
5. (000017) 证明: $\sqrt[3]{2}$ 是无理数.
6. (000019) 已知非空数集 S 满足: 对任意给定的 $x, y \in S$ (x, y 可以相同), 有 $x + y \in S$ 且 $x - y \in S$.
 - (1) 哪个数一定是 S 中的元素? 说明理由;
 - (2) 若 S 是有限集, 求 S ;
 - (3) 若 S 中最小的正数为 5, 求 S .
7. (000020) 设一元二次方程 $2x^2 - 6x - 3 = 0$ 的两个实根为 x_1, x_2 , 求下列各式的值:
 - (1) $(x_1 + 1)(x_2 + 1)$;
 - (2) $(x_1^2 - 1)(x_2^2 - 1)$.
8. (000021) 设 $a > b > 0$, 比较 $\frac{b + 2a}{a + 2b}$ 与 $\frac{a}{b}$ 的值的大小.
9. (000022) 已知 $x > y$, 求证: $x^3 - y^3 > x^2y - xy^2$.
10. (000023) 若关于 x 的不等式 $(a + 1)x - a < 0$ 的解集为 $(2, +\infty)$, 求实数 a 的值, 并求不等式 $(a - 1)x + 3 - a > 0$ 的解集.
11. (000024) 解下列一元二次不等式:
 - (1) $-x^2 + 11 < -2x - 4$;
 - (2) $3x^2 < 13x + 10$;
 - (3) $6x + 2 \geq 5x^2$;
 - (4) $x^2 \leq 8(1 - x)$;
 - (5) $-x^2 \geq 9(9 - 2x)$;
 - (6) $3(x - 3) \leq x^2$.
12. (000025) 试写出一个二次项系数为 1 的一元二次不等式, 使它的解集分别为:
 - (1) $(-\infty, \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$;
 - (2) $[2 - \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3}]$.
13. (000026) 求不等式 $5 \leq x^2 - 2x + 2 < 26$ 的所有正整数解.

14. (000027) 解下列分式不等式:

(1) $\frac{2x+1}{x+7} > -3;$

(2) $\frac{3x}{x^2+2} \geq 1.$

15. (000028) 设关于 x 的不等式 $a_1x^2 + b_1x + c_1 > 0$ 与 $a_2x^2 + b_2x + c_2 > 0$ 的解集分别为 A 、 B , 试用集合运算表示下列不等式组的解集:

(1)
$$\begin{cases} a_1x^2 + b_1x + c_1 > 0, \\ a_2x^2 + b_2x + c_2 > 0; \end{cases}$$

(2)
$$\begin{cases} a_1x^2 + b_1x + c_1 \leq 0, \\ a_2x^2 + b_2x + c_2 > 0; \end{cases}$$

(3)
$$\begin{cases} a_1x^2 + b_1x + c_1 \leq 0, \\ a_2x^2 + b_2x + c_2 \leq 0. \end{cases}$$

16. (000029) 解下列含绝对值的不等式:

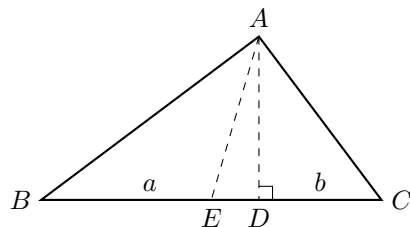
(1) $|2x-1| \leq x;$

(2) $|2x+1| + |x-2| < 8.$

17. (000031) 如图, 在直角三角形 ABC 中, AD 垂直于斜边 BC , 且垂足为 D . 设 BD 及 CD 的长度分别为 a 与 b .

(1) 求斜边上的高 AD 与中线 AE 的长;

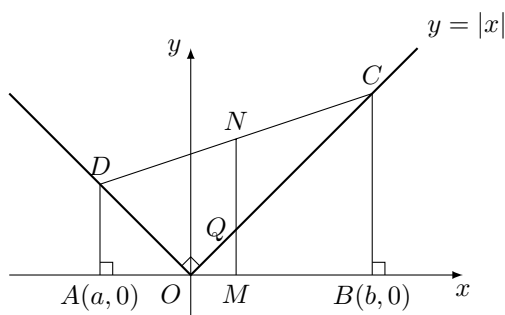
(2) 用不等式表示斜边上的高 AD 与中线 AE 长度的大小关系.



18. (000032) 如图, 已知直角梯形 $ABCD$ 的顶点 $A(a, 0)$ 、 $B(b, 0)$ 位于 x 轴上, 顶点 C 、 D 落在函数 $y = |x|$ 的图像上, M 、 N 分别为线段 AB 、 CD 的中点, O 为坐标原点, Q 为线段 OC 与线段 MN 的交点.

(1) 求中点 M 的坐标, 以及线段 MQ 、 MN 的长度;

(2) 用不等式表示 MQ 、 MN 长度的大小关系.



19. (000033) 已知一元二次方程 $x^2 + px + p = 0$ 的两个实根分别为 α 、 β , 且 $\alpha^2 + \beta^2 = 3$, 求实数 p 的值.
20. (000034) 已知一元二次方程 $2x^2 - 4x + m + 3 = 0$ 有两个同号实根, 求实数 m 的取值范围.
21. (000035) 设 $a, b \in \mathbf{R}$, 已知关于 x 的不等式 $(a+b)x + (b-2a) < 0$ 的解集为 $(1, +\infty)$, 求不等式 $(a-b)x + 3b - a > 0$ 的解集.
22. (000036) 解下列不等式:
 (1) $-2 < \frac{1}{2x+1} \leq 3$;
 (2) $2 < |x+1| \leq 3$.
23. (000037) 已知集合 $A = \{x ||x-a| < 2\}$, $B = \{x | \frac{2x-1}{x+2} < 1\}$, 且 $A \subseteq B$. 求实数 a 的取值范围.
24. (000038) 证明: 若 $x > -1$, 则 $x + \frac{1}{x+1} \geq 1$, 并指出等号成立的条件.
25. (000039) 设 a 、 b 为正数, 且 $a+b=2$. 求 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ 的最小值.
26. (000041) 设实数 x 、 y 满足 $|x+y|=1$, 求 xy 的最大值.
27. (000043) 已知 a 、 b 是实数,
 (1) 求证: $a^2 + ab + b^2 \geq 0$, 并指出等号成立的条件;
 (2) 求证: 如果 $a > b$, 那么 $a^3 > b^3$.
28. (000044) 解下列不等式:
 (1) $\frac{3x-11}{x^2-6x+9} \leq 1$;
 (2) $|3-2x| \geq |x+1|$.
29. (000045) 已知集合 $A = \{x | x^2 - 2x - 3 > 0\}$, $B = \{x | x^2 + px + q \leq 0\}$. 若 $A \cup B = \mathbf{R}$, 且 $A \cap B = [-2, -1)$, 求实数 p 及 q 的值.
30. (000046) 已知实数 $0 < a < b$, 求证: $a < \frac{2ab}{a+b} < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} < b$.
31. (000047) 方程 $(x-1)(x-2)(x-3) = 0$ 的三个根 1、2、3 将数轴划分为四个区间, 即 $(-\infty, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 3)$, $(3, +\infty)$. 试在这四个区间上分别考察 $(x-1)(x-2)(x-3)$ 的符号, 从而得出不等式 $(x-1)(x-2)(x-3) > 0$ 与 $(x-1)(x-2)(x-3) < 0$ 的解集.
 一般地, 对 x_1 、 x_2 、 $x_3 \in \mathbf{R}$, 且 $x_1 \leq x_2 \leq x_3$, 试分别求不等式 $(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) > 0$ 与 $(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) < 0$ 的解集 (提示: x_1 、 x_2 、 x_3 相互之间可能相等, 需要分情况讨论).
32. (000326) 若 “ $a > b$ ”, 则 “ $a^3 > b^3$ ” 是_____命题 (填: 真、假).
33. (000346) 设集合 $A = \{x ||x-2| < 1, x \in \mathbf{R}\}$, 集合 $B = \mathbf{Z}$, 则 $A \cap B =$ _____.
34. (000371) 已知 $x, y \in \mathbf{R}^+$, 且 $x+2y=1$, 则 xy 的最大值为_____.
35. (000378) 不等式 $\frac{x+1}{x+2} < 0$ 的解集为_____.

36. (000389) 不等式 $x|x-1| > 0$ 的解集为_____.
37. (000397) 已知集合 $A = \{x | \frac{1}{2} \leq 2^x < 16\}$, $B = \{x | y = \log_2(9 - x^2)\}$, 则 $A \cap B =$ _____.
38. (000407) 若关于 x 的不等式 $\frac{x-a}{x-b} > 0 (a, b \in \mathbf{R})$ 的解集为 $(-\infty, 1) \cup (4, +\infty)$, 则 $a+b =$ _____.
39. (000415) 已知 x, y 满足曲线方程 $x^2 + \frac{1}{y^2} = 2$, 则 $x^2 + y^2$ 的取值范围是_____.
40. (000433) 若正项等比数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_3 + a_5 = 4$, 则 a_4 的最大值为_____.
41. (000436) “ $x < 0$ ” 是 “ $x < a$ ” 的充分非必要条件, 则 a 的取值范围是_____.
42. (000446) 若集合 $M = \{x | x^2 - 2x < 0\}$, $N = \{x | |x| > 1\}$, 则 $M \cap N =$ _____.
43. (000459) 不等式 $\frac{x+2}{x+1} > 1$ 的解集为_____.
44. (000468) 不等式 $\frac{x}{x+1} < 0$ 的解是_____.
45. (000496) 已知全集 $U = \mathbf{R}$, 集合 $A = \{x | |x-1| > 1\}$, $B = \{x | \frac{x-3}{x+1} < 0\}$, 则 $(\complement_U A) \cap B =$ _____.
46. (000507) 不等式 $\frac{x-1}{x} < 0$ 的解为_____.
47. (000526) 集合 $P = \{x | 0 \leq x < 3, x \in \mathbf{Z}\}$, $M = \{x | x^2 \leq 9\}$, 则 $P \cap M =$ _____.
48. (000540) 不等式 $\frac{1}{|x-1|} \geq 1$ 的解集为_____.
49. (000547) 已知集合 $A = \{x | 0 < x < 3\}$, $B = \{x | x^2 \geq 4\}$, 则 $A \cap B =$ _____.
50. (000586) 不等式 $\frac{x}{x+1} \leq 0$ 的解集为_____.
51. (000596) 设全集 $U = \{1, 2, 3, 4\}$, 集合 $A = \{x | x^2 - 5x + 4 < 0, x \in \mathbf{Z}\}$, 则 $\complement_U A =$ _____.
52. (000627) 若全集 $U = \mathbf{R}$, 集合 $A = \{x | x \geq 1\} \cup \{x | x < 0\}$, 则 $\complement_U A =$ _____.
53. (000636) 集合 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{x | (x-1)(x-5) < 0\}$, 则 $A \cap B =$ _____.
54. (000639) 若方程组 $\begin{cases} ax + 2y = 3, \\ 2x + ay = 2 \end{cases}$ 无解, 则实数 $a =$ _____.
55. (000647) 若关于 x, y 的方程组 $\begin{cases} ax + y - 1 = 0, \\ 4x + ay - 2 = 0 \end{cases}$ 有无数多组解, 则实数 $a =$ _____.
56. (000648) 若 “ $x^2 - 2x - 3 > 0$ ” 是 “ $x < a$ ” 的必要不充分条件, 则 a 的最大值为_____.
57. (000666) 已知集合 $A = \{x | \frac{x-2}{x+1} \geq 0\}$, 集合 $B = \{y | 0 \leq y < 4\}$, 则 $A \cap B =$ _____.
58. (000686) 已知集合 $A = \{x | x > -1, x \in \mathbf{R}\}$, 集合 $B = \{x | x < 2, x \in \mathbf{R}\}$, 则 $A \cap B =$ _____.
59. (000706) 设全集 $U = \mathbf{R}$, 若集合 $A = \{2\}$, $B = \{x | -1 < x < 2\}$, 则 $A \cap (\complement_U B) =$ _____.

60. (000726) 集合 $A = \{x | \frac{x}{x-2} < 0\}$, $B = \{x | x \in \mathbf{Z}\}$, 则 $A \cap B$ 等于_____.
61. (000736) 已知全集 $U = \mathbf{R}$, 集合 $A = \{x | x^2 - 2x - 3 > 0\}$, 则 $\complement_U A =$ _____.
62. (000757) 不等式 $|1 - x| > 1$ 的解集是_____.
63. (000768) 已知集合 $P = \{x | (x+1)(x-3) < 0\}$, $Q = \{x | |x| > 2\}$, 则 $P \cap Q =$ _____.
64. (000797) 不等式 $\frac{x}{x-1} < 0$ 的解集为_____.
65. (000816) 不等式 $|x - 3| < 2$ 的解集为_____.
66. (000846) 已知全集 $U = \mathbf{R}$, 若集合 $A = \{x | \frac{x}{x-1} > 0\}$, 则 $\complement_U A =$ _____.
67. (000857) 设集合 $A = \{x | |x| < 2, x \in \mathbf{R}\}$, $B = \{x | x^2 - 4x + 3 \geq 0, x \in \mathbf{R}\}$, 则 $A \cap B =$ _____.
68. (000879) 若集合 $A = \{x | 3x + 1 > 0\}$, $B = \{x | |x - 1| < 2\}$, 则 $A \cap B =$ _____.
69. (000891) 已知集合 $A = \{x | |x - 2| < a\}$, $B = \{x | x^2 - 2x - 3 < 0\}$, 若 $B \subseteq A$, 则实数 a 的取值范围是_____.
70. (000920) 已知全集 $U = \mathbf{R}$, $A = \{x | x^2 - 2x < 0\}$, $B = \{x | x \geq 1\}$, 则 $A \cap \complement_U B =$ _____.
71. (000924) 已知 $x, y \in \mathbf{R}^+$, 且满足 $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$, 则 xy 的最大值为_____.
72. (000932) 集合 $A = \{x | x^2 - 3x < 0\}$, $B = \{x | |x| < 2\}$, 则 $A \cup B$ 等于_____.
73. (000939) 若 $m > 0, n > 0, m + n = 1$, 且 $\frac{t}{m} + \frac{1}{n} (t > 0)$ 的最小值为 9, 则 $t =$ _____.
74. (000975) 下列各句是否是命题? (T or F)
- _____ (1) 1 是偶数;
- _____ (2) 线段 AB 太长;
- _____ (3) 所有有理数都大于零;
- _____ (4) $2 > 5$;
- _____ (5) 存在实数 a 使 $|a| = -a$ 不成立.
75. (000976) 在下列各命题的右边写出其否定形式 (否定命题).
- (1) $2 \times 2 = 5$; _____.
- (2) $\sqrt{3 - \pi}$ 有意义; _____.
- (3) a 不是非负数; _____.
- (4) \sqrt{a} 不是无理数; _____.(本小题中已知 $a \geq 0$)
- (5) $x = 1$ 不是方程 $x(x + 1) = 0$ 的根; _____.
76. (000977) 下列各组命题是否互为否定形式? (\checkmark or \times).
- _____ (1) 所有直角三角形都不是等边三角形; / 所有直角三角形都是等边三角形.
- _____ (2) 对一切实数 $x, x^2 + 1 \neq 0$; / 存在实数 x , 使得 $x^2 + 1 = 0$.

- _____(3) 所有一元二次方程都没有实数根; / 有些一元二次方程没有实数根.
- _____(4) 所有自然数都不是 0; / 所有自然数都是 0.
- _____(5) 存在实数 x , 使得 $x^2 - 5x + 6 = 0$; / 所有实数 x , 都使得 $x^2 - 5x + 6 \neq 0$.
- _____(6) 对于一些实数 x , $x^3 + 1 = 0$; / 对于一些实数 x , $x^3 + 1 \neq 0$.
- _____(7) 有些三角形两边的平方和等于第三边的平方; / 所有三角形两边的平方和不等第三边的平方.
- _____(8) 对于某些实数 x , $x = x + 1$; / 对于任意实数 x , $x \neq x + 1$.
- _____(9) 负实数没有平方根; / 负实数有平方根.

77. (000978) 在下列各陈述句的右边写出其否定形式.

- (1) $a = 0$ 且 $b = 0$; _____.
- (2) $x > 0$ 或 $x \leq -3$; _____.
- (3) 平面上的点 P 在第一象限或第二象限; _____.

78. (000981) 在下列各命题的右边写出其否定形式.

- (1) 若 x 是实数, 则 $x^2 + x + 1 > 0$; _____ x 是实数, 使得 $x^2 + x + 1 \leq 0$.
- (2) 若 $a > 0$, 则 $|a| \leq a$; _____.
- (3) 若实数 x 满足 $x^2 - x = 0$, 则 $x = 1$ 或 $x = 0$; _____.
- (4) 若实数 x 满足 $x^2 - x < 0$, 则 $0 < x < 1$; _____.

79. (000982) 模仿讲义中的真值表, 列出下列每组逻辑运算的真值表并回答各问题:

- (1) “非 (P 且 Q)” 与 “($\text{非 } P$) 或 ($\text{非 } Q$)” (De Morgan 律之一);

P	Q	P 且 Q	非 (P 且 Q)	非 P	非 Q	(非 P) 或 (非 Q)
T	T					
T	F					
F	T					
F	F					

- (2) “ P 且 (Q 且 R)” 与 “(P 且 Q) 且 R ”(模仿 (1) 完成); 你的结论是什么? 如果把两个运算中的 “且” 都换成 “或”, 结论 (毋需证明) 又是什么?

- (3) “ P 且 (Q 或 R)” 与 “(P 且 Q) 或 (P 且 R)”(模仿 (1) 完成); 你的结论是什么? 如果把两个运算中的 “且” 都换成 “或”, 同时把 “或” 都换成 “且”, 结论 (毋需证明) 又是什么?

80. (000983) 用反证法证明如下命题:

- (1) 已知 n 是整数. 如果 3 整除 n^3 , 则 3 整除 n (提示: 讨论 $n = 3k, 3k + 1, 3k + 2$, 其中 k 是整数);
- (2) 如果实数 x 满足 $x^{101} - 4x^2 + 8x - 1 = 0$, 则 $x > 0$;
- (3) $\sqrt[3]{3}$ 是无理数 (提示: 可借鉴讲义上 $\sqrt{6}$ 是无理数的证明方法);
- (4*) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ 是无理数.

81. (000984) 已知 a, b 均为实数, 求证: “关于 x 的不等式 $ax + b > 0$ 对一切实数均成立” 等价于 “ $a = 0$ 且 $b > 0$ ”.
(绝对不允许跳步骤)

82. (000985) 写出下列各命题的逆命题, 否命题, 逆否命题, 并判断真假.

(1) (已知 a, b 均为实数) 若 $a^2 + b^2 = 0$, 则 $a = 0$. 原命题的真值: _____;

逆命题: _____; 逆命题的真值: _____;

否命题: _____; 否命题的真值: _____;

逆否命题: _____; 逆否命题的真值: _____.

(2) 若 $ab = 0$, 则 $a = 0$ 或 $b = 0$. 原命题的真值: _____;

逆命题: _____; 逆命题的真值: _____;

否命题: _____; 否命题的真值: _____;

逆否命题: _____; 逆否命题的真值: _____.

(3) (已知 a, b 均为整数) 若 a, b 都是偶数, 则 $a + b$ 是偶数. 原命题的真值: _____;

逆命题: _____; 逆命题的真值: _____;

否命题: _____; 否命题的真值: _____;

逆否命题: _____; 逆否命题的真值: _____.

(4) (已知 a, b 均为整数) 若 ab 是奇数, 则 a, b 中至少有一个是奇数. 原命题的真值: _____;

逆命题: _____; 逆命题的真值: _____;

否命题: _____; 否命题的真值: _____;

逆否命题: _____; 逆否命题的真值: _____.

83. (000986) 在下列横线上填写①, ②, ③ 或 ④.

① 充分不必要条件; ② 必要不充分条件; ③ 充分必要条件; ④ 既不充分又不必要条件.

(1) “ $b = 0$ ” 是 “直线 $y = kx + b$ 过原点” 的_____;

(2) “ $x^2 - 1 = 0$ ” 是 “ $x - 1 = 0$ ” 的_____;

(3) “ m 是正整数” 是 “ m 是有理数” 的_____;

(4) “ $x < 5$ ” 是 “ $x < 3$ ” 的_____;

(5) “一个自然数的末位数是 0” 是 “这个自然数可被 5 整除” 的_____;

(6) “ $x + y + z > 0$ ” 是 “ x, y, z 均大于零” 的_____;

(7) “一个自然数的末位数是 3, 6 或 9” 是 “这个自然数可被 3 整除” 的_____;

(8) “一个三角形中存在两个角相等” 是 “这个三角形是等腰三角形” 的_____;

(9) 已知 x 是实数, “ $x = \sqrt{2}$ ” 是 “ $x^2 = 2$ ” 的_____;

(10) “ $x + y = 0$ 且 $xy = 0$ ” 是 “ $x = y = 0$ ” 的_____;

(11) 已知 a, b, c 是实数, $c \neq 0$. “ $ac > bc$ ” 是 “ $a > b$ ” 的_____;

(12) “ $x > y > 0$ ” 是 “ $x > 0$ 且 $y > 0$ ” 的_____;

(13) 已知 x, y 均为实数. “ $|x| = y$ ” 是 “ $x = \pm y$ ” 的_____.

84. (000987) 已知实数 $t \neq 0$. 证明: “ $x = t$ 是方程 $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ 的根” 的充分必要条件是 “ $x = \frac{1}{t}$ 是方程 $dx^3 + cx^2 + bx + a = 0$ 的根”.
85. (000988) 已知 a, b, c 均为实数. 证明: 这三个数中 “任意两数之和大于第三个数” 的充分必要条件是 “任意两数之差小于第三个数”.
86. (000989) 判断下列各组对象是否组成集合. (T or F)
- _____ (1) 大于 0 的偶数全体.
- _____ (2) 绝对值小于 0 的实数全体.
- _____ (3) 很小的数的全体.
87. (000990) 用描述法或列举法 (自行择其一种) 表示下列集合.
- (1) 大于 0 且小于 3 的实数的全体.
- (2) 方程 $x^3 - x = 0$ 的解的全体.
- (3) 一次函数 $y = 2x + 1$ 图像上所有点的全体.
- (4) 被 3 除余 2 的整数的全体.
88. (000992) 在直角坐标系中, 用图形表示下列集合:
- (1) $\{(x, y) \mid 2 < x < 6, 1 < y < 4, x, y \in \mathbf{R}\}$; (2) $\{(x, y) \mid 2 < x < 6, 1 < y < 4, x, y \in \mathbf{Z}\}$.
89. (000995) 已知非空集合 M 中的元素都是正整数, 且满足性质: 若 $x \in M$, 则 $4 - x \in M$. 求满足条件的集合 M .
90. (001000) 设 $A = \{n \mid n = 3k + 1, k \in \mathbf{Z}^+\}$, $B = \{n \mid n = 3k - 2, k \in \mathbf{Z}^+\}$.
- (1) 集合 A 与集合 B 是相等的还是有真包含关系还是没有任何包含关系?
- (2) 证明你的结论.
91. (001001) 证明或否定: $\{y \mid y \geq 0\} = \{y \mid y = x^2, x \in \mathbf{R}\}$.
92. (001002) 设 a 是一个实数, 集合 $A = \{x \mid x < 2\}$, $B = \{x \mid x \leq a\}$, 且 $A \subseteq B$.
- (1) 实数 a 的取值范围为_____;
- (2) 试证明 (1) 的结论.
93. (001016) 已知集合 $A = \{1, 2\}$, $B = \{x \mid mx^2 + 2mx - 1 < 0, x \in \mathbf{R}\}$. 已知 $A \cap B = \{1\}$, 求实数 m 的取值范围.
94. (001017) 设 A, B 是两个集合, 求证: “ $A \cap B = A$ ” 当且仅当 “ $A \subseteq B$ ”. (用文氏图画一下并不算证明)
95. (001029) 设 $f(x)$ 是 m 次多项式, $g(x)$ 是 n 次多项式, m, n 均为正整数. 判断下列命题的真假 (T or F).
- _____ (1) 多项式 $-2f(x)$ 的次数为 m ;
- _____ (2) 多项式 $f(x) + g(x)$ 的次数为 $\max\{m, n\}$ (\max 表示集合中较大的那个数);
- _____ (3) 多项式 $f(x) \times g(x)$ 的次数为 $m + n$;
- _____ (4) 多项式 $[f(x)]^2 + f(x) + 1$ 的次数为 $2m$;

96. (001040) 解方程: $x + \sqrt{2+x} = 0$.
97. (001041) 解方程: $\frac{3}{4x^2 + 20x + 25} = \frac{5}{4x^2 + 8x - 5} - \frac{2}{4x^2 - 4x + 1}$.
98. (001042) 设常数 $b \geq 0$, 求证: 方程 $\sqrt{f(x)} = b$ 与方程 $f(x) = b^2$ 同解.
99. (001043) 解方程: $\sqrt{1+x} = \sqrt{2x-5} + 1$.
100. (001044) (1) 求证: 方程 “ $\sqrt{f(x)}\sqrt{g(x)} = h(x)$ ” 与 “ $f(x)g(x) = (h(x))^2$ 且 $h(x) \geq 0$ 且 $f(x) \geq 0$ 且 $g(x) \geq 0$ ” 同解.
 (2) 试举一例并分析, 说明: 方程 “ $\sqrt{f(x)}\sqrt{g(x)} = h(x)$ ” 和 “ $f(x)g(x) = (h(x))^2$ 且 $h(x) \geq 0$ 且 $f(x) \geq 0$ ” 有时会不同解.
101. (001045) (1) 求证: 方程 “ $\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} = \sqrt{h(x)}$ ” 与方程 “ $f(x) + g(x) + 2\sqrt{f(x)}\sqrt{g(x)} = h(x)$ ” 同解.
 (2) 试举一例并分析, 说明: 方程 “ $\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} = \sqrt{h(x)}$ ” 与方程 “ $f(x) + g(x) + 2\sqrt{f(x)}\sqrt{g(x)} = h(x)$ ” 有时会不同解.
102. (001046) 解方程: $111x^2 + 83x - 28 = 0$.
103. (001047) 解方程: $x^2 + x = \sqrt{5} + 5$.
104. (001048) 求实数 a, b , 使得关于 x 的方程 $x^2 + 2(1+a)x + (3a^2 + 4ab + 4b^2 + 2) = 0$ 有实根.
105. (001049) 解关于 x 的方程: $ax - 1 = x + ab$.
106. (001050) 解关于 x 的方程: $m^2(x-1) + m(x+3) = 6x + 2$.
107. (001051) 已知实数 $a, b, c \neq 0$. 解关于 x 的方程: $\frac{x-b-c}{a} + \frac{x-c-a}{b} + \frac{x-a-b}{c} = 3$.
108. (001052) 若关于 x 的方程 $2ax = (a+1)x + 6$ 的解集真包含于 \mathbf{Z}^+ , 求 a .
109. (001053) [选做] 解关于 x 的方程: $\frac{(x-a)^2}{(x-b)(x-c)} + \frac{(x-b)^2}{(x-c)(x-a)} + \frac{(x-c)^2}{(x-a)(x-b)} = 3$.
110. (001054) 解方程: $x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6 = 0$.
111. (001055) 解方程: $2x^5 - x^4 - 15x^3 + 9x^2 + 16x + 4 = 0$.
112. (001056) 解方程: $(9 - 16x^2)^3 + (16 - 9x^2)^3 + (25x^2 - 25)^3 = 0$.
113. (001057) 解方程: $2(x^2 + 6x + 1)^2 + 5(x^2 + 6x + 1)(x^2 + 1) + 2(x^2 + 1)^2 = 0$
114. (001058) 解方程: $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7) = -12$.
115. (001059) 解方程: $6x^4 + 5x^3 - 38x^2 + 5x + 6 = 0$.
116. (001060) 解方程: $6x^4 - 25x^3 + 12x^2 + 25x + 6 = 0$.
117. (001061) [选做] 解方程: $x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 12 = 0$.

118. (001062) 已知关于 x 的方程 $x^2 + 2x - 1 = 0$ 的两个实根为 x_1, x_2 , 则 $x_1 + x_2 =$ _____, $x_1 x_2 =$ _____.
119. (001063) 已知关于 x 的方程 $ax^2 + bx + 1 = 0$ 有两个实根 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$, 则 $b =$ _____.
120. (001064) 已知关于 x 的方程 $x^2 + bx - 2 = 0$ 的一个实根为 2, 则另一实根为 _____.
121. (001065) 已知关于 x 的方程 $-x^2 - 3x + 3 = 0$ 的两个实根为 x_1, x_2 , 则 $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} =$ _____.
122. (001066) 已知关于 x 的二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的两实根为 x_1, x_2 , 则 $|x_1 - x_2| =$ _____.
123. (001067) 已知关于 x 的方程 $x^2 + 2mx + 6 = 0$ 的两实根的倒数之和为 1, 则实数 $m =$ _____.
124. (001068) 关于 y 的方程 $4y^2 + (b^2 - 3b - 10)y + 4b = 0$ 的两个实根互为相反数, 则实数 $b =$ _____.
125. (001069) 若关于 x 的方程 $x^2 - mx + 2m - 2 = 0$ 的两实根的平方和为 1, 则实数 $m =$ _____.
126. (001070) 方程组 $\begin{cases} x + y + xy = 5, \\ x^2 y + xy^2 = 6 \end{cases}$ 的解为 $(x, y) =$ _____.
127. (001071) 方程组 $\begin{cases} x - y = 3, \\ xy = -2 \end{cases}$ 的解为 $(x, y) =$ _____.
128. (001072) 关于 x 的方程 $x^2 + px + q = 0$ 的两个实根之比为 $1 : 2$, 判别式的值为 1, 求实数 p, q .
129. (001073) 已知 α, β 是关于 x 的二次方程 $x^2 + (p - 2)x + 1 = 0$ 的两根. 试求 $(1 + p\alpha + \alpha^2)(1 + p\beta + \beta^2)$ 的值.
130. (001074) 设 α, β 是方程 $2x^2 + x - 7 = 0$ 的两根, 试以 $\frac{1}{\alpha^2 - 1}, \frac{1}{\beta^2 - 1}$ 为根作一个新的二次方程.
131. (001075) 设常数 $k \in \mathbf{N}$, 若关于 x 的方程 $x^2 = 2(k + 1)x - (k^2 + 4k - 3)$ 的两个实根符号相反, 求 k 的值, 并解此方程.
132. (001076) 设常数 $a > 0, m > 0$, 若方程组 $\begin{cases} y^2 = 4a(x + a), \\ x + y + m = 0 \end{cases}$ 有两组不同的解 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$,
 (1) 求 a, m 所满足的条件;
 (2) 用 a, m 表示 $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.
133. (001077)[选做] 解方程组: $\begin{cases} x + y + z = 15, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 83, \\ x^3 + y^3 + z^3 = 495. \end{cases}$
134. (001078) 解方程: $1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}}} = 2$.
135. (001079) 解方程: $\frac{x^4 - (x - 1)^2}{(x^2 + 1)^2 - x^2} + \frac{x^2 - (x^2 - 1)^2}{x^2(x + 1)^2 - 1} + \frac{x^2(x - 1)^2 - 1}{x^4 - (x + 1)^2} = x^2$.
136. (001080)[选做] 解方程: $\frac{1}{(x - 5)(x - 4)} + \frac{1}{(x - 4)(x - 3)} + \cdots + \frac{1}{(x + 4)(x + 5)} = \frac{10}{11}$.

137. (001081) 解方程: $\sqrt[3]{3 - \sqrt{x+1}} + \sqrt[3]{2} = 0$.

138. (001082) 解方程: $\sqrt{3x+4} + 2 = 3\sqrt[4]{3x+4}$.

139. (001083) 已知 $a > b$, $a, b \in \mathbf{R}$. 解关于 y 的方程: $\sqrt{a-y} + \sqrt{y-b} = \sqrt{a-b}$.

140. (001084)[选做] 解方程: $\sqrt[4]{97-x} + \sqrt[4]{x} = 5$.

141. (001085) 判断题: (如果正确请在题目前面的横线上写“T”, 错误请在题目前面的横线上写“F”)

_____ (1) 若 $a > b$, $c = d$, 则 $ac > bd$;

_____ (2) 若 $\frac{a}{c^2} < \frac{b}{c^2}$, 则 $a < b$;

_____ (3) 若 $ac < bc$, 则 $a < b$;

_____ (4) 若 $a > b$, 则 $ac^2 > bc^2$;

_____ (5) 若 $a > b$, $c < d$, 则 $ac > bd$;

_____ (6) 若 $a > b > 0$, $c > d > 0$, 则 $\frac{a}{c} > \frac{b}{d}$;

_____ (7) 若 $a > b$, $c \geq d$, 则 $a + c > b + d$;

_____ (8) 若 $a > b$, $c \geq d$, 则 $a + c \geq b + d$;

_____ (9) 若 $\sqrt[3]{a} > \sqrt[3]{b}$, 则 $a > b$.

_____ (10) 若 $ab^2 \geq 0$, 则 $a \geq 0$.

142. (001086) 设 $\{a, b, m, n\} \subseteq \mathbf{R}^+$ 且 $a > b$, 将 $\frac{a}{b}, \frac{b}{a}, \frac{a+m}{b+m}, \frac{b+n}{a+n}$ 按由大到小的次序排列:

_____ > _____ > _____ > _____.

143. (001087) 证明: 若 $a > b$, $c \in \mathbf{R}$, $d < 0$, 则 $(a-c)d < (b-c)d$.

144. (001088) 证明: 若 $a_1 > b_1 > 0, a_2 > b_2 > 0, a_3 > b_3 > 0$, 则 $a_1 a_2 a_3 > b_1 b_2 b_3$.

145. (001089) 证明: 若 $a > b > 0$, $c > d > 0$, 则 $\frac{1}{ac} < \frac{1}{bd}$.

146. (001091) 证明:

(1) 若 $a > b$, 则 $a^3 > b^3$;

(2)(选做) 若 $a > b$, 则 $a^5 > b^5$.

147. (001092) 设 $a, b \in \mathbf{R}$ 且 $-1 < a < 1, 1 < b < 3$, 求证:

(1) $-4 < a - b < 0$;

(2)(选做) 任取 $x \in (-4, 0)$, 总存在满足条件的 a, b , 使得 $a - b = x$ (两小题的结论放在一起, 也就是所谓的“ $a - b$ 的取值范围为 $(-4, 0)$ ”, 前者表示不会超出这个范围, 后者表示该范围内的每个值都能取到).

148. (001093) 判断题: (如果同解请在题目前面的横线上写“T”, 否则写“F”)

_____ (1) $x^2 + 5x > 4, x^2 + 5x + 3x > 4 + 3x$;

_____ (2) $x^2 - 2x < 3, \frac{x^2 - 2x}{x - 1} < \frac{3}{x - 1}$;

_____ (3) $(x - 3)(x - 5)^2 > (2x + 1)(x - 5)^2, x - 3 > 2x + 1$;

- ____(4) $x \geq 1, x(x-5)^2 \geq (x-5)^2$;
- ____(5) $x > 5, x + \frac{1}{x^2-3x+2} > 5 + \frac{1}{x^2-3x+2}$;
- ____(6) $x < 5, x + \frac{1}{x^2-3x+2} < 5 + \frac{1}{x^2-3x+2}$;
- ____(7) $x + \frac{1}{x-3} > 1 + \frac{1}{x-3}, x > 1$;
- ____(8) $\frac{(x+3)(x+1)}{x+1} > 0, x+3 > 0$;
- ____(9) $\frac{(x-3)(x+1)}{x+1} > 0, x-3 > 0$;
- ____(10) $|x| < 3, -3 < x < 3$.

149. (001094) (1) 证明或否定: “ $|f(x)| > g(x)$ ” 和 “ $f(x) > g(x)$ 且 $-f(x) > g(x)$ ” 等价;

(2) 证明或否定: “ $|f(x)| < g(x)$ ” 和 “ $f(x) < g(x)$ 且 $-f(x) < g(x)$ ” 等价.

150. (001095) 证明或否定: “ $\sqrt{f(x)} > g(x)$ ” 和 “ $\begin{cases} f(x) > g^2(x), \\ g(x) \geq 0, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) < 0 \end{cases}$ ” 同解.

151. (001096) 利用绝对值的三角不等式 $|a+b| \leq |a| + |b|$, 证明:

(1) 对任意 $x, y \in \mathbf{R}$, $|x-y| \geq |x| - |y|$;

(2) 对任意 $x, y \in \mathbf{R}$, $|x-y| \geq ||x| - |y||$.

152. (001097) 已知 $|x-a| \leq \frac{\varepsilon}{2}$, $|y-b| < \frac{\varepsilon}{2}$. 求证:

(1) $|(x+y) - (a+b)| < \varepsilon$;

(2) $|(x-y) - (a-b)| < \varepsilon$.

153. (001098) 已知 $|x| < \frac{\varepsilon}{3}$, $|y| < \frac{\varepsilon}{6}$, $|z| < \frac{\varepsilon}{9}$. 求证: $|x-2y+3z| < \varepsilon$.

154. (001099) 已知常数 $\varepsilon > 0$, 证明存在实常数 N , 使得当正整数 $n > N$ 时, $\left| \frac{n}{2n+3} - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon$.

155. (001100) 解下列关于 x 的不等式.

(1) $ax \leq b$;

(2) $ax + b^2 > bx + a^2$;

(3) $m(mx-1) < 2(2x-1)$.

156. (001101) 求不等式 $3x-1 > 2 - \frac{x+1}{3} \geq 1 - \frac{2x-3}{2}$ 的解集.

157. (001102) 关于 x 的不等式 $6a-3x > ax-28$ 与 $x-4 > 0$ 同解, 求 a 的值.

158. (001103) 关于 x 的不等式 $6a-3x < ax+3$ 与 $2ax < a + \frac{1}{2}$ 同解. 求 a 的值.

159. (001104) 用选择合适的方法解下列不等式.

(1) $x^2 + 2x - 15 > 0$;

(2) $x^2 + 4x - 45 \geq 0$;

(3) $3x^2 - 2x + 4 \leq 0$;

(4) $x^2 + x - 1 > 0$.

160. ₍₀₀₁₁₀₅₎ 关于 x 的不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ 的解集为 $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$, 求 $a : b : c$. 在你求出的这个比值下, 不等式的解集一定如题中所说吗? 为什么?

161. ₍₀₀₁₁₀₆₎ 解不等式组: $x^2 - 2x - 3 \leq 0 < x^2 - 3x + 2$.

162. ₍₀₀₁₁₀₇₎ 设 a 是一个实常数, 解关于 x 的不等式:

(1) $x^2 - ax + 1 \leq 0$;

(2) $ax^2 - 2(a+1)x + 4 > 0$.

163. ₍₀₀₁₁₀₈₎ 对一切实数 x , $(5-m)x^2 - 6x + 5 + m > 0$ 恒成立. 求实数 m 的取值范围.

164. ₍₀₀₁₁₀₉₎ 解下列不等式.

(1) $(x+2)(x^2-1)^2 > 0$;

(2) $(2x+1)(3x-1)(2-x) \leq 0$;

(3) $(x+1)^2(x-5)(x^2+3x)(x-2)^3(2x+1)^2 \leq 0$;

165. ₍₀₀₁₁₁₀₎ 解下列不等式.

(1) $3x - 2 + \frac{1}{5-x} > 2x + 1 - \frac{1}{x-5}$;

(2) $\frac{x(x-3)}{x^2-3x+2} \leq 0$;

(3) $\frac{x+1}{(x-2)^2(x+1)} \leq 1$;

(4) $x + \frac{1}{x} > -\frac{5}{2}$.

166. ₍₀₀₁₁₁₁₎ 解关于 x 的不等式: $x + \frac{1}{x} > a$.

167. ₍₀₀₁₁₁₂₎ 解下列不等式.

(1) $4x - 3 + \sqrt{10-x} > 3x + 2 + \sqrt{10-x}$;

(2) $\sqrt{x-2} < x-2$;

(3) $\sqrt{3-x} > x-4$;

(4) $\sqrt{2x^2-6x+4} < x+2$;

(5) $\sqrt{x^2-5x+6} \geq x-1$;

(6) $\sqrt{3x-15} - \sqrt{x-4} \geq 0$;

168. ₍₀₀₁₁₁₃₎ 设 a 是常数, 且 $a > 0$, 解关于 x 的不等式 $x + \sqrt{a^2 - x^2} > 0$.

169. ₍₀₀₁₁₁₄₎ 设 a 是常数, 且 $a > 0$, 解关于 x 的不等式 $\sqrt{1-ax} < x-1$.

170. ₍₀₀₁₁₁₅₎ 设 a, m 是实常数, 且关于 x 的不等式 $\sqrt{x} > ax + \frac{3}{2}$ 的解集为 $(4, m)$, 求 a, m 的值.

171. ₍₀₀₁₁₁₆₎ 解下列不等式.

(1) $|x^2 + 2x - 1| < 2$;

(2) $\sqrt{x^2 + 2x + 1} - 2|2-x| > 5-x$;

(3) $|2x-1| \leq x+2$;

$$(4) \left| \frac{1}{x} \right| \geq \frac{1}{3};$$

$$(5) 1 < \left| \frac{1}{1+x} \right| \leq 2.$$

172. (001117) 已知关于 x 的不等式 $|ax+1| \leq b$ 的解集为 $[2, 3]$, 求实常数 a, b 的值.

173. (001118) 若关于 x 的不等式 $|x-1| - |x-2| < a$ 的解集为 \mathbf{R} , 求实数 a 的取值范围.

174. (001119) 设 a 是一个实常数, 解关于 x 的不等式 $|x-1| < x+a$.

175. (001120) 判断以下各不等式是否成立. 如果成立在前面的横线上写 “T”, 如果不成立在前面的横线上写 “F”.

- _____ (1) 当 $x < 0$ 时, $x + \frac{1}{x} \leq -2$;
- _____ (2) 当 $x > 0$ 时, $x + \frac{1}{x} \geq 2$;
- _____ (3) 当 $x > 0$ 时, $x^2 + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{x}$;
- _____ (4) 当 $a, b \geq 0$ 时, $a+b \geq 2ab$;
- _____ (5) 当 $a, b \geq 0$ 时, $2ab \geq a+b$;
- _____ (6) 当 $x, y, z \in \mathbf{R}$ 时, $x^2 + y^2 + z^2 \geq 2xy + yz$;
- _____ (7) 当 $a, b \in \mathbf{R}$ 时, $a^2 + b^2 + 4 \geq ab + 2a + 2b$;
- _____ (8) 当 $a, b \in \mathbf{R}$ 时, $a^3 + b^3 \geq 2a^2b$;
- _____ (9) 当 $a, b \in \mathbf{R}$ 时, $a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2$;
- _____ (10) 当 $a, b \in \mathbf{R}^+$ 时, $a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2$;
- _____ (11) 当 $x, y > 0$ 时, $x^2 + y^2 \geq (x+y)^2$;

176. (001121) 设 $x, y \in \mathbf{R}$, 求证: $\frac{x^2+y^2}{2} \geq (\frac{x+y}{2})^2 \geq xy$, 并分别指出两个不等式中等号成立的条件.

177. (001122) 在解不等式时, 有时我们可以用不等式的性质来求解. 例如解不等式 $x^2 + x + 1 \geq 0$, 我们可以利用不等式的基本性质, 得到 $x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} > 0$ 恒成立, 因此解集为 \mathbf{R} . 请你用基本不等式的观点解以下两个不等式:

$$(1) x + \frac{1}{x} > 1; \quad (2) x + \frac{1}{x} > 2.$$

178. (001123) 试确定实常数 k 使得 $a^2 + b^2 + c^2 \geq k(a+b+c)^2 \geq ab+bc+ca$ 对任意的 $a, b, c \in \mathbf{R}$ 成立, 并证明该不等式.

179. (001124) 设 $a, b, c, d > 0$.

- (1) 利用三元的基本不等式 “ $x, y, z > 0$ 时, $x^3 + y^3 + z^3 \geq 3xyz$ ”, 证明: $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 \geq abc + bcd + cda + dab$;
- (2) 该不等式能否加强为 $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 \geq k(abc + bcd + cda + dab)$, 其中 $k = 1.0001$? 为什么?
- (3) 利用三元的基本不等式 “ $x, y, z > 0$ 时, $x^3 + y^3 + z^3 \geq 3xyz$ ”, 证明: $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 \geq \frac{3\sqrt[3]{2}}{2}(abc + bcd)$.

180. (001125) 已知正实数 x, y 满足 $x + 2y = 1$,

- (1) 求 xy 的最大值;
- (2) 求 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ 的最小值.

181. (001126) 已知 $a, b \in \mathbf{R}^-$, $a + b = -4$, 求 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ 的最大值.
182. (001127) 已知正实数 x, y 满足 $x + \frac{4}{y} = 1$, 求 $\frac{1}{x} + y$ 的最小值.
183. (001128) 已知 $x > 2$, 求代数式 $\frac{x^2 - 3x + 3}{x - 2}$ 的最小值.
184. (001129) 求 $x(2 - x)^3$ 的最大值.
185. (001130) 已知直角三角形的面积为 8, 求斜边长的最小值.
186. (001131) 已知直角三角形的斜边长为 2, 求周长的最大值.
187. (001132) 用长为 $4L$ 的篱笆在一堵墙边上圈起一块矩形的地来 (只需要围三面), 问能圈到的地最大面积为多少? 如何圈?
188. (001133) 求体积为定值 V 的长方体的最小表面积.
189. (001134) 已知 $x, y \in \mathbf{R}$, 用比较法证明: $x^2 + y^2 \geq 4(x + y) - 8$.
190. (001135) 已知 $f(x) = x + \frac{1}{x}$, 利用比较法证明:
 (1) 若 $a > b \geq 1$, 证明: $f(a) > f(b)$;
 (2) 若 $0 < a < b \leq 1$, 证明: $f(a) > f(b)$.
191. (001136) 已知 $a < b < 0$, 用分析法证明: $\frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} < \frac{a + b}{a - b}$.
192. (001137) 已知 $a, b, c \in \mathbf{R}^+$, 证明: $a^2(b + c) + b^2(c + a) + c^2(a + b) \geq 6abc$.
193. (001138) 已知 a, b, c 是不全相等的正数. 证明: $\frac{a + b}{c} + \frac{b + c}{a} + \frac{c + a}{b} > 6$.
194. (001139) 已知 $x, y \in \mathbf{R}^+$ 且 $x + y > 2$, 用反证法证明: $\frac{1 + y}{x}$ 与 $\frac{1 + x}{y}$ 中至少有一个小于 2.
195. (001140) 已知 $a > b > 0$, 求证:
 (1) $\sqrt{a^2 - b^2} + b > a$.
 (2) $\sqrt{a^2 - b^2} + \sqrt{2ab - b^2} > a$.
196. (001141) 已知 $x, y \in \mathbf{R}$, 证明: $x^2 + 5y^2 + 4xy + 5 \geq 2x + 8y$.
197. (001142) 已知 $g(x) = x^3 - 3x$.
 (1) 若 $a > b \geq 1$, 证明: $g(a) > g(b)$;
 (2) 若 $-1 \leq a < b \leq 1$, 证明: $g(a) > g(b)$.
198. (001143) 已知 a, b, c 是不全相等的正数, 求证: $(ab + a + b + 1)(ab + bc + ca + c^2) > 16abc$.
199. (001145) 已知 $a > b > 0$, 求证: $a^2 + \frac{1}{(a - b)b} \geq 4$.
200. (001146) 求证: $\sqrt{1 \times 2} + \sqrt{2 \times 3} + \cdots + \sqrt{9 \times 10} < 54$.

201. (001147) 已知 $n \in \mathbf{Z}$, $n \geq 3$. 证明: $3^n + 4^n + 5^n \leq 6^n$, 并求出等号成立的条件.

202. (001148) 已知 $a, b, c \in \mathbf{R}^+$, $a + b + c = 3$. 证明:

(1) $a^2 + b^2 + c^2 \geq 3$;

(2) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 3$;

(3) $a^4 + b^4 + c^4 \geq 3$;

(4) (选做) 对一切 $n \in \mathbf{N}$, $a^{2^n} + b^{2^n} + c^{2^n} \geq 3$.

203. (001150)(1) 设 $a + b + c = 6$, 且 $a, b, c \in (0, 3)$, 证明: $(3 - a)(3 - b)(3 - c) \leq 1$;

(2) 已知三角形的面积可以用 Heron 公式 $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ 来计算, 其中 p 是半周长, 即 $p = \frac{a+b+c}{2}$. 据此求周长为 6 的三角形的面积的最大值.

204. (001151)(1) 已知 $f(x) = Ax^2 + Bx$, 并且 $f(1) \in [0, 1]$, $f(2) \in [0, 1]$, 求 $f(5)$ 的最大值与最小值.

(2) 已知 $f(x) = Ax^2 + Bx$, 并且 $f(1) \in [0, 1]$, $f(2) \in [0, 1]$, $f(3) \in (-\infty, 0]$, 求 $f(-1)$ 的最大值与最小值.

205. (001491) 判断下列命题的真假, 真命题用 “T” 表示, 假命题用 “F” 表示.

_____ (1) 设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , 若 1 是它的一个周期, 则 2 也是它的一个周期;

_____ (2) 设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D , 若 1 是它的一个周期, 则 2 也是它的一个周期;

_____ (3) 设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , 若 1 是它的一个周期, 则 -1 也是它的一个周期;

_____ (4) 设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D , 若 1 是它的一个周期, 则 -1 也是它的一个周期;

_____ (5) 设函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , 若 1 是它的一个周期, 则 $\sqrt{2}$ 一定不是它的周期;

_____ (6) 设函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , 且 $f(x)$ 不是常数函数, 若 1 是它的一个周期, 则 $\sqrt{2}$ 一定不是它的周期;

_____ (7) 定义在 \mathbf{R} 上的常数函数是周期函数;

_____ (8) 奇函数一定是周期函数;

_____ (9) 奇函数一定不是周期函数;

_____(10) 偶函数一定是周期函数;

_____(11) 偶函数一定不是周期函数;

_____(12) 单调函数一定不是周期函数;

_____(13) 一定不存在正实数 M , 使得周期函数 $y = f(x)$ 的定义域包含于区间 $[-M, M]$;

_____(14) 如果 1 是函数 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 的周期, 且 $f(x)$ 与 $g(x)$ 定义域的交集非空, 那么 1 也是 $y = f(x) + g(x)$ 的周期;

_____(15) 设 $f(x), g(x)$ 的定义域均为 \mathbf{R} , 若 1 是函数 $y = f(x)$ 的周期, 则 1 是函数 $y = f(g(x))$ 的周期;

_____(16) 设 $f(x), g(x)$ 的定义域均为 \mathbf{R} , 若 1 是函数 $y = g(x)$ 的周期, 则 1 是函数 $y = f(g(x))$ 的周期;

_____(17) $y = \sin x, x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 是周期函数;

_____(18) $y = \sin x, x \in (0, +\infty)$ 是周期函数;

_____(19) 周期函数一定有最大值和最小值;

_____(20) 定义域为 \mathbf{R} 的周期函数一定有最大值和最小值.

206. (001595) 判断下列命题的真假, 在横线上用 “T” 或 “F” 表示.

_____(1) 空间任意三点确定一个平面;

_____(2) 空间任意两条直线确定一个平面;

_____(3) 空间两条平行直线确定一个平面;

_____(4) 空间一条直线和不在该直线上的一个点确定一个平面;

_____ (5) 空间一个点和不通过该点的一条直线确定一个平面;

_____ (6) 空间两条没有交点的直线必平行;

_____ (7) 若空间四边形 $ABCD$ 若满足 $AB = BC = CD = DA$, 则它一定是菱形;

_____ (8) 若空间的一条直线如果和一对平行直线之一相交, 则一定与另一条也相交;

_____ (9) 若空间三点 A, B, C 若满足 $AB^2 + BC^2 = CA^2$, 则 $\triangle ABC$ 是以 B 为直角顶点的直角三角形;

_____ (10) 若空间三条直线两两相交, 则通过它们中至少两条的平面有且仅有 1 个;

_____ (11) 若空间三条直线两两相交, 则通过它们中至少两条的平面有且仅有 3 个.

207. (001598) 判断下列命题的真假, 在横线上用“T”或“F”表示.

_____ (1) 已知 α, β 是两个平面, l, m 是两条直线, 若 $l \subsetneq \alpha, m \subsetneq \beta$, 则 l, m 异面;

_____ (2) 已知平面 α, β 相交于直线 l . 若直线 $m \subsetneq \alpha, l \parallel m$, 直线 $n \subsetneq \beta, l$ 与 n 相交, 则 m 与 n 异面;

_____ (3) 已知 l, m 是异面直线, 若直线 $n \parallel l$, 则 m, n 异面;

_____ (4) 已知 l, m 是异面直线, 若直线 n 和 l 异面, 则 m, n 异面;

_____ (5) 已知 l, m 是异面直线, 若直线 n 和 l 异面, 则 m, n 共面;

_____ (6) 分别和两异面直线都相交的两直线一定是异面直线;

_____ (7) 分别和两异面直线相交的两直线不可能是平行直线;

_____ (8) 正方体的任意两条对角线 (指相对顶点, 不同时出现在六个表面的任何一个上的顶点的连线) 相交.

208. (001605) 判断下列命题的真假, 在横线上用“T”或“F”表示.

- _____(1) 平行四边形一定在一个平面上;
- _____(2) 若直线 a, b, c 满足 $a \perp b, a \perp c$, 则 b, c 重合或平行;
- _____(3) 存在一个空间四边形 $ABCD$, 它的任意两条邻边的夹角均等于 60° ;
- _____(4) 和两条异面直线都平行的直线不存在;
- _____(5) 过空间一点, 与已知直线垂直的直线有且只有一条;
- _____(6) 若 a, b 是异面直线, b, c 是异面直线, 则 a, c 也是异面直线;
- _____(7) 若 a, b 是相交直线, b, c 是相交直线, 则 a, c 也是相交直线;
- _____(8) 有三个角是直角的四边形是矩形;
- _____(9) 异面直线 a, b 和另一直线 c 分别所成的角的大小一定不相等.

209. (001610) 判断下列命题的真假, 并用“T”或“F”表示:

- _____(1) 如果两条直线和同一平面平行, 那么这两直线平行;
- _____(2) 如果两直线和同一平面平行, 那么这两直线平行或相交;
- _____(3) 同时和两异面直线平行的平面有无数个;
- _____(4) 若直线 $a \subsetneq$ 平面 α , 直线 b 不在平面 α 内, $a \cap b = \emptyset$, 则 $b \parallel \alpha$;
- _____(5) 直线 $a \parallel$ 直线 b , 直线 $b \parallel$ 平面 α . 若直线 a 不在 α 内, 则 $a \parallel \alpha$;
- _____(6) 直线 $a \parallel$ 平面 α , 直线 $a \subsetneq$ 平面 β . 若 $\alpha \cap \beta = b$, 则 $a \parallel b$;
- _____(7) 过异面直线 a, b 外一点有且仅有一个平面和 a, b 平行;

210. (001629) 判断下列命题的真假, 并用“T”或“F”表示.

_____ (1) 在正方体 $ABCD - A'B'C'D'$ 中, BC' 与对角面 $BB'D'D$ 所成的角是 $\angle C'BB'$.

_____ (2) 两条异面直线在同一个平面上的射影不可能是两个点.

_____ (3) 已知 P 是三角形 ABC 所在平面外一点, 且 $PA = PB$, 则 P 点在平面 ABC 上的射影一定在 AB 的中垂线 (在平面 ABC 内) 上.

_____ (4) 已知 P 是三角形 ABC 所在平面外一点, 且 $PA = PB = PC$, 则 P 点在平面 ABC 上的射影一定在三角形 ABC 内部.

_____ (5) 已知 P 是三角形 ABC 所在平面外一点, 且 $PA = PB = PC$, 则 P 点在平面 ABC 上的射影一定不与 A 重合.

_____ (6) 若两直线分别与一平面所成角相等, 则两直线平行.

_____ (7) 平面 α 的斜线 a 在平面 α 内的射影是直线 b , 如果直线 $c \perp b$, 那么 $c \perp a$.

_____ (8) 若平面 α 外两直线 a, b 在 α 上的射影是两相交直线, 则 a 与 b 相交.

_____ (9) 两条异面直线在同一平面上的射影是两条相交或平行直线.

_____ (10) 已知平面 α 有一条斜线 l , 过平面上一点 A , 在平面 α 内有且只有一条直线与斜线 l 垂直.

211. (001642) 判断下列命题的真假, 并用“T”或“F”表示.

_____ (1) 过平面 α 外一点, 有且仅有一个平面与平面 α 平行.

_____ (2) 已知直线 l 平行于平面 α , 过 l 有且仅有一个平面与平面 α 平行.

_____ (3) 已知直线 l 不在平面 α 内, 过 l 有且仅有一个平面与平面 α 平行.

_____ (4) 平面 α 平行于平面 β , $l \subset \alpha$, $m \subset \beta$, 则 l, m 平行.

_____ (5) 已知 l, m 是两异面直线, 存在平面 α, β , 满足 $l \subset \alpha$, $m \subset \beta$, 并且 $\alpha \parallel \beta$.

_____ (6) 已知 l, m 是两平行直线, $l \subset \alpha$, $m \subset \beta$. 若 $l \parallel \beta$, $m \parallel \alpha$, 则 $\alpha \parallel \beta$.

_____ (7) 平面 α 与平面 β 平行, 当且仅当在 α 内有无穷多条直线与 β 平行.

212. (001682) 判断下列命题的真假, 真命题用“T”表示, 假命题用“F”表示.

_____ (1) 有两个面互相平行, 其余的面都是四边形的多面体是棱柱.

_____ (2) 有两个面互相平行, 其余的面都是平行四边形的多面体 (未必是凸多面体) 是棱柱.

_____ (3) 有两个侧面是矩形的棱柱是直棱柱.

_____ (4) 棱柱被平行于侧棱的平面所截, 截面 (若存在的话) 是平行四边形.

_____ (5) 直平行六面体是长方体.

_____ (6) 正四棱柱是正方体.

_____ (7) 棱柱成为直棱柱的一个必要不充分的条件是棱柱有一个侧面与底面的一条边垂直.

_____ (8) 若直平行六面体的底面既有内切圆又有外接圆, 则它必是正四棱柱.

213. (001695) 判断下列命题的真假, 真命题用“T”, 假命题用“F”表示.

_____ (1) 有一个面是多边形, 其余各面都是三角形的多面体是棱锥.

_____ (2) 侧面都是全等等腰三角形的棱锥是正棱锥.

____(3) 相邻两条侧棱间的夹角都相等的棱锥是正棱锥.

____(4) 各条侧棱与底面的所成角都相等的棱锥是正棱锥.

____(5) 各侧棱在底面内的射影都相等的棱锥是正棱锥.

____(6) 各侧棱都相等且底面多边形的各边也都相等的棱锥是正棱锥.

____(7) 底面三角形的各边分别与相对的侧棱垂直的三棱锥是正三棱锥.

____(8) 一个三棱锥的底面是直角三角形, 则它的三个侧面至多有两个直角三角形.

214. (001832) 判断下列命题的真假, 其中假命题用“F”表示, 真命题用“T”表示.

____(1) 递增数列都有极限;

____(2) 如果数列 $\{a_n\}$ 有极限, 那么数列 $\{|a_n|\}$ 也有极限;

____(3) 如果数列 $\{|a_n|\}$ 有极限, 那么数列 $\{a_n\}$ 也有极限;

____(4) 如果数列 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$, 那么 $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = nA$;

____(5) 如果数列 $\{a_n\}$ 有极限, 那么 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1}$;

____(6) 如果数列 $\{a_n\}$ 有极限, 且其前 n 项和为 S_n , 那么 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_1 + \lim_{n \rightarrow \infty} a_2 + \cdots + \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$;

____(7) 如果 2011 个数列的极限均为零, 那么这 2011 个数列之和的极限也为零;

____(8) 如果数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 使得数列 $\{a_n \cdot b_n\}$ 的极限存在, 那么 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的极限都存在;

____(9) 如果数列 $\{a_n\}$ 的极限存在, 数列 $\{b_n\}$ 使得数列 $\{a_n \cdot b_n\}$ 的极限存在, 那么 $\{b_n\}$ 的极限存在;

____(10) 如果数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 使得数列 $\{a_n \cdot b_n\}$ 的极限为 0, 那么 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ 或 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$;

____(11) 如果数列 $\{a_n\}$ 的极限是 0, 那么对任意数列 $\{b_n\}$, 均成立 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n = 0$;

____(12) 如果数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 有极限, 且 $a_n > b_n$, 那么 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \geq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.

215. (001856) 判断下列命题的真假, 如果是假命题则在命题前的横线上写上“F”, 如果是真命题则写上“T”.

____(1) 与非零向量 \vec{a} 平行的单位向量一定是 $\frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a}$.

____(2) 若两个非零向量互相平行, 则这两个向量所在的直线平行或重合.

____(3) 若非零向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 满足 $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$, 则 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 可以依次首尾相接构成三角形.

____(4) 若 \vec{a} 与 \vec{b} 平行, 则存在实数 λ , 使得 $\vec{b} = \lambda \vec{a}$.

____(5) 若存在实数 λ , 使得 $\vec{b} = \lambda \vec{a}$, 则 \vec{a} 与 \vec{b} 平行.

____(6) 若 \vec{a} 与 \vec{b} 平行, 则存在实数 λ, μ , 使得 $\lambda \vec{a} + \mu \vec{b} = \vec{0}$.

____(7) 若 \vec{a} 与 \vec{b} 平行, 则存在不全为零的实数 λ, μ , 使得 $\lambda \vec{a} + \mu \vec{b} = \vec{0}$.

____(8) 若存在不全为零的实数 λ, μ , 使得 $\lambda \vec{a} + \mu \vec{b} = \vec{0}$, 则 \vec{a} 与 \vec{b} 平行.

216. (002694) 设全集是实数集 \mathbf{R} , $M = \{x | -2 \leq x \leq 2\}$, $N = \{x | x < 1\}$, 则 $\complement_U M \cap N =$ _____.

217. (002695) 设 $A = \{x | -4 < x < 4, x \in \mathbf{R}\}$, $B = (-\infty, 1] \cup [3, +\infty)$, 则 $\{x | x \in A, x \notin A \cap B\} =$ _____.

218. (002700) 集合 $C = \{x | x = \frac{k}{2} \pm \frac{1}{4}, k \in \mathbf{Z}\}$, $D = \{x | x = \frac{k}{4}, k \in \mathbf{Z}\}$, 试判断 C 与 D 的关系, 并证明.

219. (002703) 设全集 $U = \mathbf{R}$, 函数 $y = f(x)$, $y = g(x)$, $y = h(x)$ 的定义域均为 \mathbf{R} . 设集合 $A = \{x | f(x) = 0\}$, $B = \{x | g(x) = 0\}$, $C = \{x | h(x) = 0, x \in \mathbf{R}\}$, 则方程 $\frac{f^2(x) + g^2(x)}{h(x)} = 0$ 的解集是_____ (用 A, B, C 表示).

220. (002709) 设函数 $f(x) = \lg(\frac{2}{x+1} - 1)$ 的定义域为集合 A , 函数 $g(x) = \sqrt{1 - |x+a|}$ 的定义域为集合 B .
- (1) 当 $a = 1$ 时, 求集合 B .
- (2) 问: $a \geq 2$ 是 $A \cap B = \emptyset$ 的什么条件 (在“充分非必要条件、必要非充分条件、充要条件、既非充分也非必要条件”中选一)? 并证明你的结论.
221. (002718) 设常数 $a \in \mathbf{R}$, 集合 $A = \{x | \frac{3-2x}{x-1} + 1 \geq 0, x \in \mathbf{R}\}$, $B = \{x | 2ax < a+x, x \in \mathbf{R}\}$. 若 $A \cup B = B$, 求 a 的取值范围.
222. (002720) 设常数 $k \in \mathbf{R}$, 关于 x 的不等式组
$$\begin{cases} x^2 - x - 2 > 0, \\ 2x^2 + (2k+5)x + 5k < 0 \end{cases}$$
 整数解的集合为 $\{-2\}$, 求实数 k 的取值范围.
223. (002726) 调查某班 50 名学生, 音乐爱好者有 40 人, 体育爱好者有 24 人, 则两方面都爱好的人数最少_____人, 最多_____人.
224. (002731) 填写下列陈述句的否定形式:
- (1) $m \leq 0$ 或 $n > 0$: _____;
- (2) 空间三条直线 l, m, n 两两相交: _____;
- (3) 复数 z_1, z_2, z_3 中至多一个为纯虚数: _____.
225. (002732) 已知 a, b 是整数, 写出命题“若 ab 为偶数, 则 $a+b$ 为偶数”的逆命题、否命题、逆否命题, 并判断所写命题的真假.
- 逆命题: _____, 真假: _____;
- 否命题: _____, 真假: _____;
- 逆否命题: _____, 真假: _____.
226. (002737) “ $a > 0$ 或 $b > 0$ ”的一个必要非充分条件是 ().
- A. $a > 0$ B. $b > 0$ C. $a > 0$ 且 $b > 0$ D. $a, b \in \mathbf{R}$
227. (002739) 填空: (填“充分不必要”、“必要不充分”、“充要”、“既不充分也不必要”)
- (1) 对于实数 $x, y, p: xy > 1$ 且 $x+y > 2$ 是 $q: x > 1$ 且 $y > 1$ 的_____条件;
- (2) 对于实数 $x, y, p: x+y \neq 8$ 是 $q: x \neq 2$ 或 $y \neq 6$ 的_____条件;
- (3) 已知 $x, y \in \mathbf{R}, p: (x-1)^2 + (y-2)^2 = 0$ 是 $q: (x-1)(y-2) = 0$ 的_____条件;
- * (4) 设 $x, y \in \mathbf{R}$, 则 “ $x^2 + y^2 < 2$ ” 是 “ $|x| + |y| \leq \sqrt{2}$ ” 的_____条件; 又是 “ $|x| + |y| < 2$ ” 的_____条件; 又是 “ $|x| < \sqrt{2}$ 且 $|y| < \sqrt{2}$ ” 的_____条件.
- (5) 设 $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ 均为非零实数, 方程 $a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0$ 和方程 $a_2x^2 + b_2x + c_2 = 0$ 的实数解集分别为 M 和 N , 则 “ $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ ” 是 “ $M = N$ ” 的_____条件.
228. (002740) (1) 是否存在实数 m , 使得 $2x+m < 0$ 是 $x^2 - 2x - 3 > 0$ 的充分条件? 说明理由.
- (2) 是否存在实数 m , 使得 $2x+m < 0$ 是 $x^2 - 2x - 3 > 0$ 的必要条件? 说明理由.

229. (002741) 已知关于 x 的实系数二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a > 0$), 分别求下列命题的一个充要条件:

- (1) 方程有一正根, 一根是零;
- (2) 两根都比 2 小.

230. (002742) 设 $a, b \in \mathbf{R}$, 写出命题 “若 $a + b > 0$ 且 $ab > 0$, 则 $a > 0$ 且 $b > 0$ ” 的逆否命题.

231. (002743) 填空 (填 “充分不必要”、“必要不充分”、“充要”、“既不充分也不必要”):

- (1) 若 $x, y \in \mathbf{R}$, 则 $x^2 + y^2 \neq 0$ 是 “ x, y 不全为零” 的_____条件;
- (2) 若 $x, y \in \mathbf{R}$, 则 “ $xy > 0, x + y > 0$ ” 是 “ $x > 0, y > 0$ ” 的_____条件;
- (3) 设 $a, b \in \mathbf{R}$, 则 “ $|a| + |b| = |a + b|$ ” 是 “ $ab = 0$ ” 的_____条件;
- (4) 若 a, b, c 是常数, 则 “ $a > 0$ 且 $b^2 - 4ac < 0$ ” 是 “对任意 $x \in \mathbf{R}$, 有 $ax^2 + bx + c > 0$ ” 的_____条件;
- (5) 设 $a, b \in \mathbf{R}$, 则 $b = \tan a$ 是 $a = \arctan b$ 的_____条件.

232. (002744) 已知 $x, y \in \mathbf{R}$, 有如下四个命题: ① $x^2 + y^2 < 1$; ② $|x| + |y| < 1$; ③ $|x| < 1$ 且 $|y| < 1$; ④ $|x + y| < 1$. 则_____是_____的充分非必要条件 (答案可能不唯一).

233. (002745) 使不等式 $2x^2 - 5x - 3 \geq 0$ 成立的一个充分不必要条件是 ().

- A. $x < 0$ B. $x \geq 0$ C. $x \in \{-1, 3, 5\}$ D. $x \leq \frac{1}{2}$ 或 $x \geq 3$

234. (002747) 已知 m 是实常数. 命题甲: 关于 x 的方程 $x^2 + x + m = 0$ 有两个相异的负根; 命题乙: 关于 x 的方程 $4x^2 + x + m = 0$ 无实根, 若这两个命题有且只有一个是真命题, 求实数 m 的取值范围. *

235. (002749) 设 $f(x) = ax^2 + x + a$, 写出一个 a 的值,

- (1) 使 $f(x) > 0$ ($x \in \mathbf{R}$) 恒成立;
- (2) 使 $f(x) > 0$ ($x \in \mathbf{R}$) 恒不成立;
- (3) 使 $f(x) > 0$ ($x \in \mathbf{R}$) 不恒成立.

236. (002750) 命题 (1) $a > b \Rightarrow ac^2 > bc^2$; (2) $ac^2 > bc^2 \Rightarrow a > b$; (3) $a > b \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$; (4) $a < b < 0, c < d < 0 \Rightarrow ac > bd$; (5) $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b} \Rightarrow a > b$ ($n \in \mathbf{N}^*$); (6) $a + c < b + d \Leftrightarrow \begin{cases} a < b, \\ c < d; \end{cases}$ (7) $a < b < 0 \Rightarrow a^2 > ab > b^2$. 其中真命题的序号是_____.

237. (002751) 已知 $a, b \in \mathbf{R}$, 则 $ab(a - b) < 0$ 成立的一个充要条件是 ().

- A. $\frac{1}{a} > \frac{1}{b} > 0$ B. $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ C. $0 < \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ D. $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

238. (002752) “ $\begin{cases} 2 < x + y < 4, \\ 0 < xy < 3 \end{cases}$ ” 是 “ $\begin{cases} 2 < x < 3, \\ 0 < y < 1 \end{cases}$ ” 的_____条件.

239. (002753) 下列函数中, 最小值为 2 的函数有_____.

(1) $y = x + \frac{1}{x}$, $x \in (0, +\infty)$; (2) $y = x + \frac{1}{x}$, $x \in (1, +\infty)$; (3) $y = \frac{x^2 + 3}{\sqrt{x^2 + 2}}$; (4) $y = \log_3 x + \log_x 3$.

240. (002754) $z = (x+y)(\frac{1}{x} + \frac{1}{4y})$, $(x, y > 0)$ 的最小值是_____.

241. (002755) 若正实数 a, b 满足 $a + b = 1$, 则 ().

A. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ 的最大值是 4 B. ab 的最小值是 $\frac{1}{4}$ C. $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ 有最大值 $\sqrt{2}$ D. $a^2 + b^2$ 有最小值 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

242. (002756) 如果 $0 < a < b$, $t > 0$, 设 $M = \frac{a}{b}$, $N = \frac{a+t}{b+t}$, 那么 ().

A. $M > N$ B. $M < N$
C. $M = N$ D. M 与 N 的大小随 t 的变化而变化

243. (002758) (1) 比较 $1 + a^2$ 与 $\frac{1}{1-a}$ 的大小;

(2) 设 $a > 0$, $a \neq 1$, $t > 0$, 比较 $\frac{1}{2} \log_a t$ 和 $\log_a \frac{t+1}{2}$ 的大小, 证明你的结论.

244. (002759) 已知 $x, y \in \mathbf{R}^+$ 且 $x + y = 4$, 求 $\frac{1}{x} + \frac{2}{y}$ 的最小值. 某学生给出如下解法: 由 $x + y = 4$ 得, $4 \geq 2\sqrt{xy}$ ①, 即 $\frac{1}{\sqrt{xy}} \geq \frac{1}{2}$ ②, 又因为 $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} \geq 2\sqrt{\frac{2}{xy}}$ ③, 由②③得 $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} \geq \sqrt{2}$ ④, 即所求最小值为 $\sqrt{2}$ ⑤. 请指出这位同学错误的步骤, 并给出正确的解法.

245. (002761) 设 $a, b \in \mathbf{R}$, 若 $a - |b| > 0$, 则下列不等式中正确的是 ().

A. $b - a > 0$ B. $a^3 + b^3 < 0$ C. $b + a > 0$ D. $a^2 - b^2 < 0$

246. (002762) 已知 $0 < x < y < a < 1$, 则 ().

A. $\log_a(xy) < 0$ B. $0 < \log_a(xy) < 1$ C. $1 < \log_a(xy) < 2$ D. $\log_a(xy) > 2$

247. (002763) 设 $a > 1 > b > -1$, 则下列不等式中恒成立的是 ().

A. $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ B. $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ C. $a > b^2$ D. $a^2 > 2b$

248. (002764) 若 $1 < a < 3$, $-4 < b < 2$, 则 $\frac{1}{2}a - b$ 的取值范围是_____.

249. (002765) 已知 $x, y \in \mathbf{R}^+$, 且 $x + 4y = 1$, 则 $x \cdot y$ 的最大值为_____.

250. (002766) 函数 $y = \log_a(x+3) - 1$ ($a > 0$, $a \neq 1$) 的图像恒过定点 A , 若点 A 在直线 $mx + ny + 1 = 0$ 上, 其中 $mn > 0$, 则 $\frac{1}{m} + \frac{2}{n}$ 的最小值为_____.

251. (002768) (1) 设 $x < 2$, 则 $2x + \frac{8}{x-2}$ 有最_____值是_____, 此时 $x =$ _____;

(2) 设 $0 < x < \sqrt{2}$, 则 $x\sqrt{4-2x^2}$ 的最大值是_____, 此时 $x =$ _____.

252. (002769) 在等差数列 $\{a_n\}$ 和等比数列 $\{b_n\}$ 中, $a_1 = b_1 > 0$, $a_3 = b_3 > 0$, $a_1 \neq a_3$, 试比较 a_5 与 b_5 的大小.

253. (002770) 下列不等式中解集为 \mathbf{R} 的是 ().

A. $x^2 - 6x + 9 > 0$ B. $4x^2 + 12x + 9 < 0$ C. $3x^2 - x + 2 > 0$ D. $3x^2 - x + 2 < 0$

254. (002771) 不等式 $(x-1)^2(2-x) \leq 0$ 的解集是_____; $(x-1)^2(2-x) > 0$ 的解集是_____.
255. (002772) 已知关于 x 的不等式 $x^2 + ax + b < 0$ 的解集为 $(-1, 2)$, 则 $a + b =$ _____.
256. (002773) 不等式 $-1 < x^2 + 2x - 1 \leq 2$ 的解集是_____.
257. (002775) 已知关于 x 的不等式 $ax^2 - bx + c > 0$ 的解集是 $(-\frac{1}{2}, 2)$, 对于 a, b, c 有以下结论: ① $a > 0$; ② $b > 0$; ③ $c > 0$; ④ $a + b + c > 0$; ⑤ $a - b + c > 0$. 其中正确的序号有_____.
258. (002776) 若关于 x 的不等式 $(a-2)x^2 + 2(a-2)x - 4 < 0$ 对一切 $x \in \mathbf{R}$ 成立, 则实数 a 的取值范围是_____.
259. (002777) 已知关于 x 的不等式 $(2a-b)x + a - 5b > 0$ 的解集是 $(-\infty, \frac{10}{7})$, 则关于 x 的不等式 $ax > b$ 的解集是_____.
260. (002778) 已知关于 x 的不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ 的解集为 $\{x | 2 < x < 4\}$, 求关于 x 的不等式 $cx^2 + bx + a < 0$ 的解集.
261. (002779) 解关于 x 的不等式: $(ax+4)(x-1) > 0 (a \in \mathbf{R})$.
262. (002780) 已知 $f(x) = x^2 + 2(a-2)x + 4$.
- (1) 如果对一切 $x \in \mathbf{R}$, $f(x) > 0$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围;
- (2) 如果对 $x \in [-3, 1]$, $f(x) > 0$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.
263. (002781) 不等式 $-6x^2 - x + 2 \leq 0$ 的解集是_____.
264. (002782) 解关于 x 的不等式 $x^2 - 3(a+1)x + 2(3a+1) \leq 0 (a \in \mathbf{R})$.
265. (002783) 解关于 x 的不等式组:
$$\begin{cases} ax > -1, \\ x + a > 0 \end{cases} \quad (a \in \mathbf{R}).$$
266. (002784) 若关于 x 的不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ 的解集为 $(-1, 2)$, 求关于 x 的不等式 $a(x^2+1) + b(x-1) + c > 2ax$ 的解集.
267. (002785) 若关于 x 的不等式 $(a^2-4)x^2 + (a+2)x - 1 \geq 0$ 的解集为 \emptyset , 求实数 a 的取值范围.
268. (002786) 若关于 x 的不等式 $(a^2-4)x^2 + (a+2)x + 1 \geq 0$ 对一切 $x \in \mathbf{R}$ 均成立, 求实数 a 的取值范围.
269. (002787)* 设 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的偶函数, 在区间 $(-\infty, 0)$ 上单调递增, 且满足 $f(-a^2+2a-5) < f(2a^2+a+1)$, 求实数 a 的取值范围.
270. (002789) 下列不等式中, 与 $x^2 > 2$ 同解的不等式的序号为_____.
- (1) $x^2 + \frac{1}{x-3} > 2 + \frac{1}{x-3}$; (2) $x^2 + \sqrt{x-4} > 2 + \sqrt{x-4}$; (3) $x^2 - (x-1) > 2 - (x-1)$; (4) $x^2(x-2) > 2(x-2)$.
271. (002790) 不等式 $\frac{3x+4}{5-x} \geq 6$ 的解集是_____.
272. (002791) 若不等式 $\frac{2x+a}{x+b} \leq 1$ 的解集为 $\{x | 1 < x \leq 3\}$, 则 $a+b$ 的值是_____.

273. (002792) 不等式 $(x-1)^2(2-x)(x+1) \leq 0$ 的解集是_____.
274. (002793) 不等式 $2 < |x+1| < 3$ 的解集是_____.
275. (002794) 不等式 $|x-2| > 9x$ 的解集是_____.
276. (002795) 不等式 $4^{x-\frac{5}{x}+1} \leq 2$ 的解集是_____.
277. (002796) 不等式 $\log_{\frac{1}{4}} 4x^2 > \log_{\frac{1}{4}}(3-x)$ 的解集是_____.
278. (002797) 解下列不等式:
- (1) $|x-5| - |2x+3| < 1$;
 - (2) $\frac{2x^2+x-3}{x^2+x+1} \geq 1$;
 - (3) $4^{2x} - 2^{2x+2} + 3 < 0$;
 - (4) $\log_2(x-1) < \log_4(2-x) + 1$.
279. (002798) (1) 关于 x 的不等式 $|x-1| - |x-2| < a^2 + a - 1$ 的解集是 \mathbf{R} , 求实数 a 取值范围;
 (2) 关于 x 的不等式 $|x-1| - |x-2| < a^2 + a - 1$ 有实数解, 求实数 a 的取值范围.
280. (002799)* 设全集 $U = \mathbf{R}$, 已知关于 x 的不等式 $|x-1| + a - 1 > 0 (a \in \mathbf{R})$ 的解集为 A , 若 $\complement_U A \cap \mathbf{Z}$ 恰有 3 个元素, 求 a 的取值范围.
281. (002800) 不等式 $|\frac{x}{1+x}| > \frac{x}{1+x}$ 的解集是_____.
282. (002801) 不等式 $\frac{2x}{1-x} \leq 1$ 的解集是_____.
283. (002802) 不等式 $\frac{1+|x|}{|x|-1} \geq 3$ 的解集是_____.
284. (002803) 设函数 $f(x) = \begin{cases} 2^{-x} - 1, & x \leq 0, \\ x^{\frac{1}{2}}, & x > 0, \end{cases}$ 若 $f(x_0) > 1$, 则 x_0 的取值范围是_____.
285. (002804) 已知 $a > 0$ 且 $a \neq 1$, 关于 x 的不等式 $a^x > \frac{1}{2}$ 的解集是 $(-\infty, 1)$, 则 $a =$ _____.
286. (002805) 关于 x 的不等式 $\log_{\frac{1}{2}}(x - \frac{1}{x}) > 0$ 的解集是_____.
287. (002806) 若不等式 $|3x-b| < 4$ 的解集中的整数有且仅有 1, 2, 3, 则 b 的取值范围为_____.
288. (002807) 已知关于 x 的不等式 $\frac{ax-5}{x^2-a} < 0$ 的解集为 M .
- (1) 当 $a = 5$ 时, 求集合 M ;
 - (2) 若 $2 \in M$ 且 $5 \notin M$, 求实数 a 的取值范围.
289. (002808) (1) 对任意实数 x , $|x-1| - |x+3| > a$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围;
 (2) * 对任意实数 x , $|x-1| - |x+3| > a$ 恒不成立, 求实数 a 的取值范围.

290. (002809) (1) 若关于 x 的不等式 $x^2 - kx + 1 > 0$ 的解集为 \mathbf{R} , 求实数 k 的取值范围;
 (2) * 若关于 x 的不等式 $x^2 - kx + 1 > 0$ 在 $[1, 2]$ 上有解, 求实数 k 的取值范围.
291. (002812) 已知 $a, b \in \mathbf{R}^+$ 且 $a \neq b$, 求证: $|a^3 + b^3 - 2ab\sqrt{ab}| > |a^2b + ab^2 - 2ab\sqrt{ab}|$.
292. (002813) 已知 $0 < a < 1, 0 < b < 1, 0 < c < 1$, 求证: $(1-a)b, (1-b)c, (1-c)a$ 中至少有一个小于等于 $\frac{1}{4}$.
293. (002814) a, b, c 是互不相等的正数, 则下列不等式中不正确的序号是_____.
- (1) $|a-b| \leq |a-c| + |c-b|$; (2) $a^2 + \frac{1}{a^2} \geq a + \frac{1}{a}$; (3) $|a-b| + \frac{1}{a-b} \geq 2$; (4) $\sqrt{a+3} - \sqrt{a+1} \leq \sqrt{a+2} - \sqrt{a}$.
294. (002815) 已知 $a > b > c > 0$, 试比较 $\frac{a-c}{b}$ 与 $\frac{b-c}{a}$ 的大小.
295. (002816) 已知 $a > 0$, 试比较 a 与 $\frac{1}{a}$ 的大小.
296. (002819) 设 $f(x) = \sqrt{1+x} (x > 0)$. 若 $x_1 \neq x_2$, 求证: $|f(x_1) - f(x_2)| < |x_1 - x_2|$.
297. (002820) 若实数 x, y, m 满足 $|x-m| > |y-m|$, 则称 x 比 y 远离 m .
 (1) 若 $x^2 - 1$ 比 1 远离 0, 求 x 的取值范围;
 (2) 定义: 在 \mathbf{R} 上的函数 $f(x)$ 等于 x^2 和 $x+2$ 中远离 0 的那个值. 求证: $f(x) \geq 1$ 在 \mathbf{R} 上恒成立.
298. (003604) 已知两两不等的实数 $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3$ 同时满足: ① $x_1 < y_1, x_2 < y_2, x_3 < y_3$; ② $x_1 + y_1 = x_2 + y_2 = x_3 + y_3$; ③ $x_1y_1 + x_3y_3 = 2x_2y_2 > 0$, 则下列选项中恒成立的是 ().
- A. $2x_2 < x_1 + x_3$ B. $2x_2 > x_1 + x_3$ C. $x_2^2 < x_1x_3$ D. $x_2^2 > x_1x_3$
299. (003622) 下列不等式恒成立的是 ().
- A. $a^2 + b^2 \leq 2ab$ B. $a^2 + b^2 \geq -2ab$ C. $a + b \geq 2\sqrt{|ab|}$ D. $a + b \geq -2\sqrt{|ab|}$
300. (003637) 已知 $x, y \in \mathbf{R}^*$, 且满足 $\frac{1}{x} + 2y = 3$, 则 $\frac{y}{x}$ 的最大值为_____.
301. (003665) 已知 $a \in \mathbf{R}$, 则 “ $a > 1$ ” 是 “ $\frac{1}{a} < 1$ ” 的 ().
- A. 充分非必要条件 B. 必要非充分条件
 C. 充要条件 D. 既非充分又非必要条件
302. (003675) 不等式 $\frac{x-1}{x} > 1$ 的解集为_____.
303. (003707) 若全集 $U = \{x | x^2 - 7x + 12 \leq 0\}$, 集合 $M = \{x | 3 < x < 4\}$, $N = \left\{x \left| \frac{x-3}{4-x} \geq 0 \right.\right\}$, 则 $\complement_U M \cap \complement_U N =$ _____.
304. (003714) 若关于 x 的不等式 $|x-3| - |x+2| > a$ 恒成立, 则实数 a 的范围是_____.
305. (003716) 若函数 $f(x) = ax^2 + bx + c (a > 0)$, 不等式 $ax^2 + bx + c < 0$ 的解集为 $\{x | -2 < x < 0\}$, 当 $0 < n < m$ 时, $f(n), f(m), f(\sqrt{mn}), f\left(\frac{m+n}{2}\right)$ 这四个值中最大的一个是_____.
306. (003719) 若集合 $A = \{x | x^2 - 2x < 0\}$, $B = \{x | |x| < 1\}$, 则 $A \cup B$ 等于_____.

307. (003728)(理科) 若对于任意的实数 $x \in \mathbf{R}$, 不等式 $2x^2 - a\sqrt{1+x^2} + 3 \geq 0$ 恒成立, 则实数 a 的取值范围为_____.
308. (003741) 已知 $a > b$, 二次三项式 $ax^2 + 2x + b \geq 0$ 对于一切实数 x 恒成立. 又存在 $x_0 \in \mathbf{R}$, 使得 $ax_0^2 + 2x_0 + b = 0$ 成立, 则 $\frac{a^2 + b^2}{a - b}$ 的最小值为_____.
309. (003742) 若 $a, b, c \in \mathbf{R}$, 且 $a > b$, 则下列不等式一定成立的是_____.
- A. $a + c \geq b - c$ B. $ac > bc$ C. $\frac{c^2}{a - b} > 0$ D. $(a - b)c^2 \geq 0$
310. (003745) 已知集合 $A = \{y | y = \sin x, x \in \mathbf{R}\}$, $B = \{x | x(2 - x) > 0\}$, 则 $A \cup B =$ _____.
311. (003753) 将边长为 1 米的正三角形薄片, 沿一条平行于底边的直线剪成两块, 其中一块是梯形, 记 $S = \frac{(\text{梯形的周长})^2}{\text{梯形的面积}}$, 则 S 的最小值是_____.
312. (003754) 定义区间 $(c, d), (c, d], [c, d), [c, d]$ 的长度均为 $d - c$ ($d > c$). 若 $a \neq 0$, 关于 x 的不等式 $x^2 - \left(2a + \frac{1}{a}\right)x - 1 < 0$ 的非空解集 (用区间表示) 记为 $I(a)$, 则当区间 $I(a)$ 的长度取得最小值时, 实数 a 的值为_____.
313. (003758) 已知 $a \in \mathbf{R}$, 命题 P : “实系数一元二次方程 $x^2 + ax + 2 = 0$ 的两根都是虚数”; 命题 Q : “存在复数 z 同时满足 $|z| = 2$ 且 $|z + a| = 1$ ”. 是判断命题 P 和命题 Q 之间是否存在推出关系? 说明你的理由.
314. (003774) 已知集合 $A = \left\{x \mid \frac{2x + 1}{x + 2} < 1, x \in \mathbf{R}\right\}$, 函数 $f(x) = |mx + 1|$ ($m \in \mathbf{R}$). 函数 $g(x) = x^2 + ax + b$ ($a, b \in \mathbf{R}$) 的值域为 $[0, +\infty)$.
- (1) 若不等式 $f(x) < 3$ 的解集为 A , 求 m 的值;
- (2) 在 (1) 的条件下, 若 $\left|f(x) - 2f\left(\frac{x}{2}\right)\right| \leq k$ 恒成立, 求 k 的取值范围;
- (3) 若关于 x 的不等式 $g(x) < c$ 的解集为 $(m, m + 6)$, 求实数 c 的值.
315. (003777) 若存在实数 a , 使得关于 x 的不等式 $ax + b > x + 1$ 的解集为 $\{x | x < 1\}$, 则实数 b 的取值范围为_____.
316. (003797) 设 x, y 均为正实数, 且 $\frac{1}{2 + x} + \frac{1}{2 + y} = \frac{1}{4}$, 则 xy 的最小值为_____.
317. (003800) 下列命题中正确的是_____.
- A. 若 $ac > bc$, 则 $a > b$ B. 若 $a^2 > b^2$, 则 $a > b$
- C. 若 $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$, 则 $a < b$ D. 若 $\sqrt{a} < \sqrt{b}$, 则 $a < b$
318. (003810) 设常数 $a > 0$, 若对任意正实数 x, y , 不等式 $(x + y) \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{a}{y}\right) \geq 9$ 恒成立, 则 a 的最小值为_____.
319. (003828) 已知正数 x, y 满足 $\ln x + \ln y = \ln(x + y)$, 则 $2x + y$ 的最小值是_____.
320. (003860) 若集合 $M = \{y | y = x^2 - 1, x \in \mathbf{R}\}$, 集合 $N = \{x | y = \sqrt{3 - x}, x \in \mathbf{R}\}$, 则 $M \cap N =$ _____.
- A. $\{(-\sqrt{2}, 1), (\sqrt{2}, 1)\}$ B. $\{t | 0 \leq t \leq \sqrt{3}\}$ C. $\{t | -1 \leq t \leq 3\}$ D. $\{t | -\infty < t \leq \sqrt{3}\}$

321. (003861) 设 $A(-1, 0)$, $B(1, 0)$, 条件甲: A, B, C 是以 C 为直角顶点的三角形的三个顶点; 条件乙: C 的坐标是方程 $x^2 + y^2 = 1$ 的解, 则甲是乙的_____.
- A. 充分非必要条件 B. 必要非充分条件 C. 充要条件 D. 既不充分又不必要条件
322. (003863) 求证: (1) 在所有周长相同的长方形中, 只有正方形的面积最大;
(2) 在所有面积相同的长方形中, 只有正方形的面积最小.
323. (003900) 已知不等式 $a \leq \frac{x^2 + 2}{|x|}$ 对 x 取一切非零实数恒成立, 则 a 的取值范围是_____.
324. (003905) 已知条件 $p: |x + 1| > 2$, 条件 $q: x > a$, 且 \bar{p} 是 \bar{q} 的充分不必要条件, 则 a 的取值范围可以是_____.
- A. $a \geq 1$ B. $a \leq 1$ C. $a \geq -1$ D. $a \leq -3$
325. (003912) 已知 $x, y \in \mathbf{R}$, 且 $x + 2y = 1$, 则 $2^x + 4^y$ 的最小值是_____.
326. (003925) 已知集合 $A = \{x | x^2 - 2x \leq 0\}$, $B = \{x | -1 < x < 1\}$, 则 $A \cap B =$ _____.
327. (003948) 已知对于任意非零实数 m , 不等式 $|5m - 3| + |3 - 4m| \geq |m| \left(x - \frac{2}{x}\right)$ 恒成立, 则实数 x 的取值范围是_____.
328. (003957) 已知集合 $P = \{a, -1\}$, $Q = \{x | x^2 - 1 < 0, x \in \mathbf{Z}\}$, 如果 $P \cap Q \neq \emptyset$, 则实数 $a =$ _____.
329. (003963) 若存在 $x \in [0, 1]$, 使不等式 $x^2 + x \geq a^2 + a$ 成立, 则实数 a 的取值范围是_____.
330. (003965)(文科) 已知非零实数 a, b 满足 $a > b$. 则下列不等式中成立的是_____.
- A. $a^2 > b^2$ B. $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ C. $a^2b > ab^2$ D. $\frac{a}{b^2} > \frac{b}{a^2}$
- (理科) 对任意的实数 α, β , 下列等式恒成立的是_____.
- A. $2 \sin \alpha \cdot \cos \beta = \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)$ B. $2 \cos \alpha \cdot \sin \beta = \sin(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$
C. $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$ D. $\cos \alpha - \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$
331. (004080) 集合 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{x | (x - 1)(x - 5) < 0\}$, 则 $A \cap B =$ _____.
332. (004125) 关于 x 的不等式 $\frac{1}{x} > 1$ 的解集为_____.
333. (004164) 集合 $A = \{x | x^2 - 2x < 0\}$, $B = \{x | |x| < 1\}$, 则 $A \cup B =$ _____.
334. (004249) 不等式 $\frac{1}{x - 1} > 1$ 的解集为_____.
335. (004292) 已知集合 $P = \{x | (x + 1)(x - 3) < 0\}$, $Q = \{x | |x| > 2\}$, 则 $P \cap Q =$ _____.
336. (004312) 不等式 $|1 - x| > 1$ 的解集是_____.
337. (004323) 设 $x \in \mathbf{R}$, $y \in \mathbf{R}$. 那么 “ $x > 0$ ” 是 “ $xy > 0$ ” 的 ().
- A. 充分非必要条件 B. 必要非充分条件
C. 充要条件 D. 既非充分又非必要条件

338. (004353) 已知全集 $U = \{x|x < 2\}$, 集合 $A = \{x|x < 1\}$, 则 $\complement_U A =$ _____.
339. (004354) 设集合 $A = \{x||x-2| < 1, x \in \mathbf{R}\}$, $B = \{x|\frac{x-3}{x-1} \geq 0\}$, 则 $A \cup B =$ _____.
340. (004358) 关于 x 的不等式 $x^2 + ax + 1 > 0$ 有解, 则实数 a 的取值范围是_____.
341. (004360) 设正数 a, b , 当 $(a+b)^2 + \frac{1}{4ab}$ 取最小值时, a 的值为_____.
342. (004365) 已知 $x \in \mathbf{R}$, 则“ $x > 0$ ”是“ $x > 1$ ”的().
- A. 充分非必要条件
B. 必要非充分条件
C. 充要条件
D. 既非充分又非必要条件
343. (004374) 设集合 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{x|x < 3\}$, 则 $A \cap B =$ _____.
344. (004378) 已知常数 $a \in \mathbf{R}$, 设 $p: 1 \leq x < 2$, $q: x < a$. 若 p 是 q 的充分条件, 则 a 的取值范围为_____.
345. (004382) 已知常数 $m, n \in \mathbf{Z}$, 若对任意 $x \in [0, +\infty)$, 不等式 $(mx-2)(x^2-2n) \geq 0$ 恒成立, 则 $m+n$ 的取值集合为_____.
346. (004384) 对任意的非零实数 a, b , 下列不等式恒成立的是().
- A. $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \geq 2$
B. $(a+b)(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}) \geq 4$
C. $\frac{|a+b|}{2} \geq 2\sqrt{|ab|}$
D. $\frac{a^2+b^2}{2} \geq (\frac{a+b}{2})^2$
347. (004400) 已知实数 a, b 满足 $a > b$, 则下列不等式中恒成立的是().
- A. $a^2 > b^2$
B. $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$
C. $|a| > |b|$
D. $2^a > 2^b$
348. (004403) 设集合 $A = \{y|y = a^x, x > 0\}$ (其中常数 $a > 0, a \neq 1$), $B = \{y|y = x^k, x \in A\}$ (其中常数 $k \in \mathbf{Q}$), 则“ $k < 0$ ”是“ $A \cap B = \emptyset$ ”的().
- A. 充分非必要条件
B. 必要非充分条件
C. 充分必要条件
D. 既非充分又非必要条件
349. (004409) 不等式 $\frac{1}{x} \leq 3$ 的解集是_____.
350. (004414) 已知集合 $M = \{y|y = 3\sin x, x \in \mathbf{R}\}$, $N = \{x||x| < a\}$, 若 $M \subseteq N$, 则实数 a 的取值范围是_____.
351. (004415) 函数 $f(x) = |x^2 - 1| + |x - 2|$ 的最小值是_____.
352. (004422) 已知 a_1, a_2 与 b_1, b_2 是 4 个不同的实数, 关于 x 的方程 $|x - a_1| + |x - a_2| = |x - b_1| + |x - b_2|$ 的解集为 A , 则集合 A 中元素的个数为().
- A. 1 个
B. 0 个或 1 个或 2 个
C. 0 个或 1 个或 2 个或无限个
D. 1 个或无限个
353. (004438) 若 $a > b > 0, c < d < 0$, 则一定有().
- A. $ad > bc$
B. $ad < bc$
C. $ac < bd$
D. $ac > bd$

354. (004451) 若 $x > 0, y > 0$, 且 $2x + y = 1$, 则 xy 的最大值为_____.
355. (004469) 不等式 $\frac{1}{x-1} > 1$ 的解集为_____.
356. (004499) 已知集合 $M = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$, 集合 $A \subseteq M$, 定义 $M(A)$ 为 A 中元素的最大值, 当 A 取遍 M 的所有非空子集时, 对应的 $M(A)$ 的和记为 S_{10} , 则 $S_{10} =$ _____.
357. (004502) 已知两条直线 l_1, l_2 的方程分别为 $l_1: ax + y - 1 = 0$ 和 $l_2: x - y + 1 = 0$, 则 “ $a = 1$ ” 是 “直线 $l_1 \perp l_2$ ” 的 ().
- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
358. (004510) 已知集合 $A = \{x|x > 0\}$, $B = \{x|x^2 \leq 1\}$, 则 $A \cap B =$ _____.
359. (004522) 若 a, b 是实数, 则 $a > b$ 是 $2^a > 2^b$ 的 ().
- A. 充分非必要条件 B. 必要非充分条件 C. 充要条件 D. 既非充分又非必要条件
360. (004533) 不等式 $|2x - 1| - |x - 2| < 0$ 的解是_____.
361. (004554) 不等式 $|x + 1| < 5$ 的解集为_____.
362. (004557) 已知二元线性方程组 $\begin{cases} 2x + 2y = -1, \\ 4x + a^2y = a \end{cases}$ 有无穷多解, 则实数 $a =$ _____.
363. (004564) 已知 $a, b \in \mathbf{R}$, 则 “ $a^2 > b^2$ ” 是 “ $|a| > |b|$ ” 的 ().
- A. 充分非必要条件 B. 必要非充分条件
C. 充要条件 D. 既非充分又非必要条件
364. (004630) 已知集合 $A = \{x|x = 2n - 1, n \in \mathbf{N}^*\}$, $B = \{x|x = 2^k, k \in \mathbf{N}^*\}$. 将 $A \cup B$ 的所有元素从小到大依次排列构成一个数列 $\{a_n\}$. 记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 则使得 $a_n \in A$ 与 $S_{n-1} > 100a_n$ 同时成立的正整数 n 的最小值为_____.
365. (004636) 已知 a 是常数, 设函数 $f(x) = (a - 2)x^2 + 2(a - 2)x - 4$.
- (1) 解不等式: $f(x) > -4$;
- (2) 求实数 a 的取值范围, 使得 $f(x) < 0$ 对任意 $x \in [1, 3]$ 恒成立;
366. (004650) 已知常数 $k, b, t \in \mathbf{R}$ 直线 $f(x) = kx + b$ 与曲线 $g(x) = \frac{t^2}{x}$ 交于点 $M(m, -1)$, $N(n, 2)$, 则不等式 $f^{-1}(x) \geq g^{-1}(x)$ 的解集为_____.
367. (004673) 下列是 “ $a > b$ ” 的充分不必要条件的是 ().
- A. $a > b + 1$ B. $\frac{a}{b} > 1$ C. $a^2 > b^2$ D. $a^3 > b^3$

368. (004676) 非空集合 $A \subseteq \mathbf{R}$, 且满足如下性质: 性质一: 若 $a, b \in A$, 则 $a + b \in A$; 性质二: 若 $a \in A$, 则 $-a \in A$, 则称集合 A 为一个“群”. 以下叙述:

① 若 A 为一个“群”, 则 A 必为无限集; ② 若 A 为一个“群”, 且 $a, b \in A$, 则 $a - b \in A$; ③ 若 A, B 都是“群”, 则 $A \cap B$ 必定是“群”; ④ 若 A, B 都是“群”, 且 $A \cup B \neq A, A \cup B \neq B$, 则 $A \cup B$ 必定不是“群”.

中, 正确的个数为 ().

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

369. (004697) 已知非空集合 A, B 满足: $A \cup B = \mathbf{R}, A \cap B = \emptyset$, 函数 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in A, \\ 2x - 1, & x \in B. \end{cases}$ 对于下列两个

命题: ① 存在唯一的非空集合对 (A, B) , 使得 $f(x)$ 为偶函数; ② 存在无穷多非空集合对 (A, B) , 使得方程 $f(x) = 2$ 无解. 下面判断正确的是 ().

A. ① 正确, ② 错误

B. ① 错误, ② 正确

C. ①、② 都正确

D. ①、② 都错误

370. (004708) 已知 $A = \{x | \frac{2}{x} > 1\}, B = \{x | \log_2(x - 1) < 1\}$, 则 $A \cap B =$ _____.

371. (004715) 设 $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, 则“ $x_1 + x_2 > 6$ 且 $x_1 x_2 > 9$ ”是“ $x_1 > 3$ 且 $x_2 > 3$ ”的 ().

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

372. (004737) 下列不等式恒成立的是 ().

A. $|x + y| \geq |x - y|$

B. $\sqrt{x^2 + 1} + x > 0$

C. $x + \frac{1}{x} \geq 2$

D. $|x + y| + |x - y| \leq |x| + |y|$

373. (004767) 已知集合 $A = \{x | 1 \leq x < 3, x \in \mathbf{R}\}, B = \{x | x > 2, x \in \mathbf{R}\}$. 求 $A \cap B, A \cup B$.

374. (004772) 在“① 难解的题目, ② 方程 $x^2 + 1 = 0$ 在实数集内的解, ③ 直角坐标平面内第四象限的一些点, ④ 很多多项式”中, 能够组成集合的是 ().

A. ②

B. ①③

C. ②④

D. ①②④

375. (004775) 方程组 $\begin{cases} 2x + y = 0, \\ x - y + 3 = 0 \end{cases}$ 的解集是 ().

A. $\{-1, 2\}$

B. $(-1, 2)$

C. $\{(-1, 2)\}$

D. $\{(x, y) | x = -1, y = 2\}$

376. (004777) 用列举法表示下列各集合.

(1) 不大于 6 的非负数整数所组成的集合:_____;

(2) 方程 $x^3 - x^2 - x + 1 = 0$ 的解所组成的集合:_____;

(3) $\{y | y = x^2 - 1, |x| \leq 2, x \in \mathbf{Z}\}$:_____;

(4) $\{(x, y) | y = x^2 - 1, |x| \leq 2, x \in \mathbf{Z}\}$:_____;

(5) $\{(x, y) | x + y = 5, x \in \mathbf{N}, y \in \mathbf{Z}\}$:_____.

377. (004785) 设集合 $M = \{(x, y) | x + y > 0, xy > 0\}$, $T = \{(x, y) | x > 0, y > 0\}$, 则 M 与 T 的关系是 ().
- A. $M \supset T$ B. $M = T$ C. $M \subset T$ D. $M \not\subset T$ 且 $M \not\supset T$
378. (004787) 若集合 $A = \{x | -3 < x < 5\}$ 与 $B = \{x | x < a\}$ 满足 $A \subset B$, 则实数 a 的取值范围是_____.
379. (004788) 若集合 $A = \{x | (x+1)(2-x) < 0\}$, $B = \{x | 4x+p < 0\}$, 且 $B \subset A$, 则实数 p 的取值范围是_____.
380. (004796) 已知集合 $A = \{x | -2 \leq x \leq 5\}$, $B = \{x | m+1 \leq x \leq 2m-1\}$ 满足 $B \subseteq A$, 求实数 m 的取值范围.
26. 已知集合 $M = \{x | -3 < x < 2\}$, $P = \{x | x < -\sqrt{2} \text{ 或 } x > \sqrt{2}\}$, 那么 $M \cap P$ 是 ().
- A. $\{x | -3 < x < -\sqrt{2} \text{ 或 } \sqrt{2} < x < 2\}$ B. \mathbf{R}
- C. $\{x | -3 < x < -\sqrt{2}\}$ D. $\{x | \sqrt{2} < x < 2\}$
381. (004805) 已知集合 $A = \{x | -2 \leq x \leq 4\}$, $B = \{x | x < a\}$, 且满足 $A \cap B \neq \emptyset$, 那么实数 a 的取值范围是_____.
382. (004806) 已知集合 $P = \{x | -1 < x < 3\}$, $M = \{x | a < x < 2a\} (a > 0)$, 且 $P \cap M = \emptyset$, 则实数 a 的取值范围是_____.
383. (004818) 设集合 $M = \{x | a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0\}$, $N = \{x | a_2x^2 + b_2x + c_2 = 0\}$, 方程 $(a_1x^2 + b_1x + c_1)(a_2x^2 + b_2x + c_2) = 0$ 的解集是 ().
384. (004822) 若集合 $P = \{x | 1 < x < 4\}$, $Q = \{x | x > 3 \text{ 或 } x < 1\}$, 则 $P \cap Q =$ _____, $P \cup Q =$ _____.
385. (004825) 设集合 $A = \{x | -5 < x < 2\}$, $B = \{x | |x| = y+1, y \in A\}$, 则 $A \cap B =$ _____, $A \cup B =$ _____.
386. (004826) 已知 $a < 0 < b < |a|$, 且集合 $A = \{x | a < x \leq b, x \in \mathbf{R}\}$, 则 $A \cap B =$ _____, $A \cup B =$ _____.
387. (004830) 设方程 $x^2 + px - 12 = 0$ 的解集为 A , 方程 $x^2 + qx + r = 0$ 的解集为 B , 且 $A \neq B$, $A \cup B = \{-3, 4\}$, $A \cap B = \{-3\}$, 求 p, q, r 的值.
388. (004831) 若集合 $A = \{x | -2 < x < 1 \text{ 或 } x > 1\}$, $B = \{x | a \leq x \leq b\}$ 满足 $A \cup B = \{x | x > -2\}$, $A \cap B = \{x | 1 < x \leq 3\}$, 求 a, b 的值.
389. (004834) 若全集 $U = \{x | x \geq -3\}$, 集合 $A = \{x | x > 1\}$, 则 A 的补集 $\complement_U A =$ _____.
390. (004835) 若全集 $A = \{x | 0 \leq x \leq 3\}$, $B = \{x | 1 < x < 4\}$, 全集 $U = \mathbf{R}$, 则 $\complement_U (A \cap B) =$ _____.
391. (004843) 下列语句哪些不是命题? 哪些是命题? 如果是命题, 那么它们是真命题还是假命题? 为什么?
- (1) 你到过北京吗?
- (2) 当 $x = 4$ 时, $2x < 0$;
- (3) 若 $x \in \mathbf{R}$, 则方程 $x^2 - x + 1 = 0$ 无实数根;
- (4) $1 + 2 = 5$ 或 $3 \geq 3$;
- (5) $x < -2$ 或 $x > 2$;

417. (004900) 下列命题中, 不正确的一个是 ().

A. 若 $\sqrt[3]{a} > \sqrt[3]{b}$, 则 $a > b$

B. 若 $a > b, c > d$, 则 $a - d > b - c$

C. 若 $a > b > 0, c > d > 0$, 则 $\frac{a}{d} > \frac{b}{c}$

D. 若 $a > b > 0, ac > bd$, 则 $c > d$

418. (004901) 若 $x < y < 0$, 则有 ().

A. $0 < x^2 < xy$

B. $y^2 < xy < x^2$

C. $xy < y^2 < x^2$

D. $y^2 > x^2 > 0$

419. (004902) 若 $a = \log_{0.2} 0.3, b = \log_{0.3} 0.2, c = 1$, 则 a, b, c 的大小关系是 ().

A. $a > b > c$

B. $b > a > c$

C. $b > c > a$

D. $c > b > a$

420. (004903) 用不等号 (“>” 或 “<”) 填空:

(1) 若 $a \neq b$, 则 $a^2 + 3b^2$ _____ $2b(a + b)$;

(2) 若 $c > 1$, 则 $\sqrt{c+1} - \sqrt{c}$ _____ $\sqrt{c} - \sqrt{c-1}$;

(3) 若 $a > b, c > d$, 且 a 与 d 都是负数, 则 ac _____ bd .

421. (004904) 若 “ $a > b, a - \frac{1}{a} > b - \frac{1}{b}$ ” 同时成立, 则 ab 应满足的条件是 _____.

422. (004905) 已知 $a > 0, b > 0$, 且 $a \neq b$, 比较 $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a}$ 与 $a + b$ 的大小.

423. (004906) 已知 $0 < \frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, 比较 $\frac{b}{a+b}$ 与 $\frac{d}{c+d}$ 的大小.

424. (004907) 若 $x > y > 1, 0 < a < 1$, 则下列各式中正确的一个是 ().

A. $x^{-a} > y^{-a}$

B. $(\sin a)^x > (\sin a)^y$

C. $\log_{\frac{1}{a}} x < \log_{\frac{1}{a}} y$

D. $1 + a^{x+y} > a^x + a^y$

425. (004909) 设 $a > 0, a \neq 1, t > 0$, 比较 $\frac{1}{2} \log_a t$ 和 $\log_a \frac{t+1}{2}$ 的大小.

426. (004910) 已知 $x > y > 0$, 比较 $\sqrt{\frac{y^2+1}{x^2+1}}$ 与 $\frac{y}{x}$ 的大小.

427. (004912) 解下列不等式:

(1) $6x^2 - 5x - 1 > 0$;

(2) $6x^2 - 5x - 1 < 0$;

(3) $5x^2 - 2x + 3 > 0$;

(4) $9x^2 + 6x + 1 > 0$;

(5) $3x^2 - 4x + 5 < 0$.

428. (004913) 已知关于 x 的不等式 $ax^2 + bx + c < 0$ 的解集是 $\{x | x < -2 \text{ 或 } x > -\frac{1}{2}\}$, 求 $ax^2 - bx + c > 0$ 的解集.

429. (004914) 已知集合 $A = \{x | x^2 + (a-1)x - a > 0\}$, $B = \{x | (x+a)(x+b) > 0\}$, $a \neq b$, $M = \{x | x^2 - 2x - 3 \leq 0\}$.

(1) 若 $\complement_U B = M$, 求 a, b 的值;

(2) 若 $-1 < b < a < 1$, 求 $A \cap B$;

(3) 若 $-3 < a < -1$, 且 $a^2 - 1 \in \complement_U A$, 求实数 a 的取值范围.

430. (004916) 已知 $a < b$, 则下列各式中恒成立的是 ().

- A. $a^2 < b^2$ B. $c - a > c - b$ C. $|a| < |b|$ D. $a - 1 > b - 2$

431. (004917) 若 $|x| > 2$, 则 ().

- A. $x > 2$ B. $x > \pm 2$ C. $-2 < x < 2$ D. $x > 2$ 或 $x < -2$

432. (004918) 不等式 $|x| - 3 < 0$ 的解集是 ().

- A. $\{x|x < \pm 3\}$ B. $\{x|-3 < x < 3\}$ C. $\{x|x > 3\}$ D. $\{x|x < -3\}$

433. (004919) 已知集合 $M = \{x||x| > 2\}$, $N = \{x|x < 3\}$, 则下列结论正确的是 ().

- A. $M \cup N = M$ B. $M \cap N = \{x|2 < x < 3\}$
C. $M \cup N = R$ D. $M \cap N = \{x|x < -2\}$

434. (004921) 已知 $|1 - x| + \sqrt{x^2 - 4x + 4} = 1$, 则 x 的取值范围是 ().

- A. $1 \leq x \leq 2$ B. $x \leq 1$ C. $x < 1$ 或 $x > 2$ D. $x \geq 2$

435. (004922) 不等式 $2x + 3 - x^2 > 0$ 的解集是 ().

- A. $\{x|-\frac{3}{2} \leq x < 1\}$ B. $\{x|-1 < x < 3\}$ C. $\{x|1 \leq x < 3\}$ D. $\{x|-\frac{3}{2} \leq x < 3\}$

436. (004923) 不等式 $6x^2 + 5x < 4$ 的解集是 ().

- A. $\{x|x < -\frac{4}{3}$ 或 $x > \frac{1}{2}\}$ B. $\{x|-\frac{4}{3} < x < \frac{1}{2}\}$. C. $\{x|-\frac{1}{2} < x < \frac{4}{3}\}$. D. $\{x|x < -\frac{1}{2}$ 或 $x > \frac{4}{3}\}$

437. (004924) 当 $a < 0$ 时, 关于 x 的不等式 $x^2 - 4ax - 5a^2 > 0$ 的解集是 ().

- A. $\{x|x > 5a$ 或 $x < -a\}$ B. $\{x|x < 5a$ 或 $x > -a\}$ C. $\{x|-a < x < 5a\}$ D. $\{x|5a < x < -a\}$

438. (004925) 若 x 为实数, 则下列命题正确的是 ().

- A. $x^2 \geq 2$ 的解集是 $\{x|x \geq \pm\sqrt{2}\}$
B. $(x-1)^2 < 2$ 的解集是 $\{x|1 - \sqrt{2} < x < 1 + \sqrt{2}\}$
C. $x^2 - 9 < 0$ 的解集是 $\{x|x < 3\}$
D. 设 x_1, x_2 为 $ax^2 + bx + c = 0$ 的两个实根, 且 $x_1 > x_2$, 则 $ax^2 + bx + c > 0$ 的解集是 $\{x|x_2 < x < x_1\}$

439. (004926) 在① $x^2 - 2x - 3 < 0$ 与 $\frac{x^2 - 2x}{x-1} < \frac{3}{x-1}$; ② $x^2 + 3x - 4 > 0$ 与 $x^2 + 3x + \sqrt{x} > 4 + \sqrt{x}$; ③ $\frac{(x+2)(x^2-1)}{x+2} > 0$ 与 $x^2 - 1 > 0$ 三组不等式中, 解集相同的组数是 ().

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

440. (004927) 若 $x^2 + x < 0$, 则 $x^2, x, -x^2, -x$ 的大小关系是 ().

- A. $x^2 > x > -x^2 > -x$ B. $-x > x^2 > -x^2 > x$ C. $-x > x^2 > x > -x^2$ D. $x^2 > -x > x > -x^2$

441. (004928) 直接写出下列不等式的解集:

(1) $(x-1)^2 > 0$: _____;

(2) $(2-x)(3x+1) > 0$:_____;

(3) $1-3x^2 > 2x$:_____;

(4) $1-2x-x^2 \geq 0$:_____;

(5) $x+\sqrt{x}-6 < 0$:_____.

442. (004929) 直接写出下列不等式的解集:

(1) $\frac{3x+4}{x-2} \geq 0$:_____;

(2) $\frac{4-2x}{1+3x} > 0$:_____;

(3) $\frac{1}{x} > x$:_____;

(4) $x^2-2|x|-3 > 0$:_____;

(5) $x^2-x-5 > |2x-1|$:_____.

443. (004933) 不等式 $4 \leq x^2-3x < 18$ 的整数解集是_____.

444. (004935) 已知 $a > b$, 直接写出下列不等式的解集:

(1) $\frac{x-a}{x-b} \geq 0$:_____;

(2) $\frac{x-a}{x-b} < 0$:_____;

(3) $x^2-(a-b)x+ab > 0$:_____;

(4) $x^2-(a-b)x+ab < 0$:_____.

445. (004936) 若关于 x 的方程 $2kx^2+(8k+1)x+8k=0$ 有两个不等实根, 则实数 k 的取值范围是_____.

446. (004937) 已知 $a \neq 0$, 若关于 x 的不等式 $ax^2-2ax+2a+3 > 0$ 无实数解, 则 a 的取值范围是_____.

447. (004938) 不等式 $\frac{x-1}{2x} \leq 1$ 的解集是 ().

A. $\{x|x \geq -1\}$

B. $\{x|x \leq -1\}$

C. $\{x|-1 \leq x < 0\}$

D. $\{x|x \leq -1 \text{ 或 } x > 0\}$

448. (004939) 若关于 x 的二次不等式 $mx^2+8mx+21 < 0$ 的解集是 $\{x|-1 < x < -1\}$, 则实数 m 的值等于 ().

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

449. (004940) 若关于 x 的不等式 $(a^2-3)x^2+5x-2 > 0$ 的解集是 $\{x|\frac{1}{2} < x < 2\}$, 则实数 a 的值等于 ().

A. 1

B. -1

C. ± 1

D. 0

450. (004941) 若关于 x 的不等式 $ax^2+bx+c < 0 (a \neq 0)$ 的解集是空集, 则 ().

A. $a < 0$ 且 $b^2-4ac > 0$

B. $a < 0$ 且 $b^2-4ac \leq 0$

C. $a > 0$ 且 $b^2-4ac \leq 0$

D. $a > 0$ 且 $b^2-4ac > 0$

451. (004942) 若对任何实数 x , 二次函数 $y=ax^2-x+c$ 的值恒为负, 则 a, c 应满足 ().

A. $\begin{cases} a > 0, \\ ac \leq \frac{1}{4} \end{cases}$

B. $\begin{cases} a < 0, \\ ac < \frac{1}{4} \end{cases}$

C. $\begin{cases} a < 0, \\ ac > \frac{1}{4} \end{cases}$

D. $\begin{cases} a < 0, \\ ac < 0 \end{cases}$

452. (004943) 若对任意实数 x , 不等式 $x^2 + 2(1+k)x + 3 + k > 0$ 恒成立, 则 k 的取值范围是 ().
- A. $-1 < k < 2$ B. $-1 \leq k \leq 2$ C. $-2 < k < 1$ D. $-2 \leq k \leq 1$
453. (004944) 若关于 x 的二次方程 $2(k+1)x^2 + 4kx + 3k - 2 = 0$ 的两根同号, 则 k 的取值范围是 ().
- A. $-2 < k < 1$ B. $-2 \leq k < -1$ 或 $\frac{2}{3} < k \leq 1$
 C. $k < -1$ 或 $k > \frac{2}{3}$ D. $-2 < k < 1$ 或 $\frac{2}{3} < k < 1$
454. (004945) 已知关于 x 的方程 $(m+3)x^2 - 4mx + 2m - 1 = 0$ 的两根异号, 且负根的绝对值比正根大, 那么实数 m 的取值范围是 ().
- A. $-3 < m < 0$ B. $0 < m < 3$ C. $m < -3$ 或 $m > 0$ D. $m < 0$ 或 $m > 3$
455. (004946) 若 α, β 是关于 x 的方程 $x^2 - (k-2)x + k^2 + 3k + 5 = 0$ (k 为实数) 的两个实根, 则 $\alpha^2 + \beta^2$ 的最大值等于 ().
- A. 19 B. 18 C. $\frac{50}{9}$ D. -6
456. (004947) 不等式 $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) > 120$ 的解为 ().
- A. $x > 6$ B. $x < -1$ 或 $x > 6$ C. $x < -1$ D. $-1 < x < 6$
457. (004948) 在三个关于 x 的方程 $x^2 - ax + 4 = 0$, $x^2 + (a-1)x + 16 = 0$ 和 $x^2 + 2ax + 3a + 10 = 0$ 中, 已知至少有一个方程有实根, 则实数 a 的取值范围是 ().
- A. $-4 \leq a \leq 4$ B. $-2 < a < 4$ C. $a \leq -2$ 或 $a \geq 4$ D. $a < 0$
458. (004949) 若关于 x 的二次方程 $x^2 - 2mx + 4x + 2m^2 - 4m - 2 = 0$ 有实根, 则其两根之积的最大值等于_____.
459. (004950) 使关于 x 的方程 $x^2 - kx + 2k - 3 = 0$ 的两实根的平方和取最小值, 实数 k 的值等于_____.
460. (004951) 若关于 x 的不等式 $x^2 - mx + n \leq 0$ 的解集是 $\{x | -5 \leq x \leq 1\}$, 则实数 $m =$ _____,
 $n =$ _____.
461. (004952) 若关于 x 的不等式 $ax^2 + bx + 1 \geq 0$ 的解集是 $\{x | -5 \leq x \leq 1\}$, 则实数 $a =$ _____, $b =$ _____.
462. (004953) 若关于 x 的不等式 $ax^2 + bx + 2 > 0$ 的解集是 $\{x | -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{3}\}$, 则实数 $a =$ _____, $b =$ _____.
463. (004954) 若关于 x 的不等式 $ax^2 + bx - 6 > 0$ 的解集是 $\{x | 2 < x < 3\}$, 则实数 $a =$ _____, $b =$ _____.
464. (004955) 若关于 x 的不等式 $(a+b)x + (2a-3b) < 0$ 的解集是 $\{x | x > 3\}$, 则不等式 $(a-3b)x + b - 2a > 0$ 的解集是_____.
465. (004956) 若关于 x 的不等式 $ax^2 + bx + c < 0$ 的解集是 $\{x | x < -2 \text{ 或 } x > -\frac{1}{2}\}$, 则关于 x 的不等式 $ax^2 - bx + c > 0$ 的解集是_____.
466. (004957) 解不等式 $x^4 - 2x^2 + 1 > x^2 - 1$.

467. (004958) 已知关于 x 的不等式 $kx^2 - 2x + 6k < 0 (k \neq 0)$.
- (1) 若不等式的解集是 $\{x|x < -3 \text{ 或 } x > -2\}$, 求实数 k 的值;
 - (2) 若不等式的解集是 $\{x|x \neq \frac{1}{k}\}$, 求实数 k 的值;
 - (3) 若不等式的解集是实数集, 求实数 k 的值.
468. (004959) 已知关于 x 的方程 $m(x-1) = 3(x+2)$ 的解是正实数, 求实数 m 的取值范围.
469. (004960) 已知关于 x 的方程 $\frac{1}{4}x^2 - kx + 5k - 6 = 0$ 无实数解, 求实数 k 的取值范围.
470. (004961) 已知关于 x 的方程 $kx^2 - (3k-1)x + k = 0$ 有两个正实数根, 求实数 k 的取值范围.
471. (004963) 已知集合 $A = \{x|x^2 + 4x + p < 0\}$, $B = \{x|x^2 - x - 2 > 0\}$, 且 $A \subseteq B$, 求实数 p 的取值范围.
472. (004965) 已知集合 $A = \{x|x^2 - 2x - 3 \leq 0\}$, $B = \{x|x^2 + px + q < 0\}$, 且 $A \cap B = \{x|-1 \leq x < 2\}$, 求实数 p, q 的关系式及其取值范围.
473. (004966) 已知集合 $A = \{x|-2 < x < -1 \text{ 或 } x > \frac{1}{2}\}$, $B = \{x|x^2 + ax + b \leq 0\}$, 且 $A \cup B = \{x|x + 2 > 0\}$, $A \cap B = \{x|\frac{1}{2} < x \leq 3\}$, 求 a, b 的值.
474. (004968) 已知关于 x 的不等式 $(a^2 - 4)x^2 + (a + 2)x - 1 \geq 0$ 的解集是空集, 求实数 a 的取值范围.
475. (004969) 若关于 x 的不等式 $\frac{x^2 - 8x + 20}{mx^2 + 2(m+1)x + 9m + 4} < 0$ 的解集为 \mathbf{R} , 求实数 m 的取值范围.
476. (004970) 当 $0^\circ < \varphi < 90^\circ$ 时, 要使 $\frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 + 2} = \sin \varphi$ 恒成立, 求实数 x 的取值范围.
477. (004971) 既要使关于 x 的不等式 $x^2 + (m - \frac{1}{2})x - \frac{7}{16} \leq 0$ 有实数解, 又要使关于 x 的方程 $(2m + 3)x^2 + mx + \frac{m-2}{4} = 0$ 有实数解, 求实数 m 的取值范围.
478. (004975) 设 $a, b \in \mathbf{R}^+$, 且 $a \neq b$, 求证: $a^a b^b > a^b b^a$.
479. (004977) 已知 $a, b, c > 0$, 求证: (1) $(a+b)(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}) \geq 4$;
(2) $(a+b+c)(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}) \geq 9$.
480. (004979) 已知 $\alpha, \beta \in (0, \frac{\pi}{2})$, 且 $\alpha \neq \beta$, 求证: $\tan \alpha + \tan \beta > 2 \tan \frac{\alpha + \beta}{2}$.
481. (004984) 已知 $a > 0$, 求证: $x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x + \frac{1}{x}} \geq \frac{5}{2}$.
482. (004986) 已知 $0 < a < 1, 0 < b < 1$, 求证: $\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{(a-1)^2 + b^2} + \sqrt{a^2 + (b-1)^2} + \sqrt{(a-1)^2 + (b-1)^2} \geq 2\sqrt{2}$.
483. (004987) 已知实数 x, y, z 不全为零, 求证: $\sqrt{x^2 + xy + y^2} + \sqrt{y^2 + yz + z^2} + \sqrt{z^2 + zx + x^2} > \frac{3}{2}(x + y + z)$.
484. (004989) 求证: $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{n^2} < \frac{7}{4} (n \in \mathbf{N}^*)$.
485. (004990) 已知 $x > 0, y > 0, a, b$ 是正常数, 且满足 $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} = 1$, 求证: $x + y \geq (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$.

486. (004991) 已知正数 a, b 满足 $a^2b = 1$, 求 $a + b$ 的最小值.

487. (004992) 求 $\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \frac{1}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}$ 的最小值.

488. (004993) 已知直角三角形的周长为定值 l , 求它面积的最大值.

489. (004994) 已知圆柱的体积为定值 V , 求圆柱全面积的最小值.

490. (004995) 从半径为 R 的圆形铁片里剪去一个扇形, 然后把剩下部分卷成一个圆锥形漏斗, 要使漏斗有最大容量, 剪去扇形的圆心角 θ 应是多少弧度?

491. (004996) 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, 已知 $\angle C = 90^\circ$, $\angle A, \angle B, \angle C$ 的对边 a, b, c 满足 $a + b = cx$. 设 $\triangle ABC$ 绕直线 AB 旋转一周所得的旋转体的侧面积为 S_1 , $\triangle ABC$ 的内切圆面积为 S_2 . 求:

(1) 函数 $f(x) = \frac{S_1}{S_2}$ 的解析式和定义域;

(2) 函数 $f(x)$ 的最小值.

492. (004997) 用比较法证明以下各题:

(1) 已知 $a > 0, b > 0$, 求证: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{2}{\sqrt{ab}}$;

(2) 已知 $a > 0, b > 0$, 求证: $\frac{b}{\sqrt{a}} + \frac{a}{\sqrt{b}} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b}$;

(3) 已知 $a > 0, b > 0$, 求证: $a^2 + b^2 \geq (a + b)\sqrt{ab}$;

(4) 已知 $0 < x < 1$, 求证: $\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{1-x} \geq (a + b)^2$.

493. (005000) 已知 $a > 0, b > 0, c > 0$, 求证: $a(b^2 + c^2) + b(c^2 + a^2) + c(a^2 + b^2) \geq 6abc$.

494. (005001) 求证: $a^5 + b^5 \geq \frac{1}{2}(a^3 + b^3)(a^2 + b^2)(a > 0, b > 0)$.

495. (005003) 已知 $a > b > c$, 求证: $a^2b + b^2c + c^2a > ab^2 + bc^2 + ca^2$.

496. (005007) 下列命题中, 正确的一个是 ().

A. 若 $a, b, c \in \mathbf{R}$, 且 $a > b$, 则 $ac^2 > bc^2$

B. 若 $a, b \in \mathbf{R}$, 且 $a \cdot b \neq 0$, 则 $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$

C. 若 $a, b \in \mathbf{R}$, 且 $a > |b|$, 则 $a^n > b^n (n \in \mathbf{N})$

D. 若 $a > b, c < d$, 则 $\frac{a}{c} > \frac{b}{d}$

497. (005008) 下列各式中, 对任何实数 x 都成立的一个是 ().

A. $\lg(x^2 + 1) \geq \lg 2x$

B. $x^2 + 1 > 2x$

C. $\frac{1}{x^2 + 1} \leq 1$

D. $x + \frac{1}{x} \geq 2$

498. (005010) 若 $a > 0, b > 0, c > 0, d > 0$, 则 $\frac{b}{a} + \frac{a}{b}$ 的最小值为_____, $\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c}$ 的最小值为_____, $\frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c}$ 的最小值为_____, $(a+b)(\frac{1}{a} + \frac{1}{b})$ 的最小值为_____, $(\frac{b}{a} + \frac{d}{c})(\frac{c}{b} + \frac{a}{d})$ 的最小值为_____.

499. (005011) 若 $x > 0$, 则 $x + \frac{1}{x}$ 的最小值为_____; 若 $x < 0$, 则 $(-x) + \frac{1}{-x}$ 的最小值为_____, $x + \frac{1}{x}$ 的最大值为_____.

500. (005012) 若 $a > 1, b > 1, c > 1$, 则 $\log_a b + \log_b a$ 的最小值为_____, $\log_a b + \log_b c + \log_c a$ 的最小值为_____.

501. (005013) 若 $0 < a < 1, 0 < b < 1$, 则 $\log_a b + \log_b a$ 的最小值为_____.

502. (005014) 若 $a > 1, 0 < b < 1$, 则 $\log_a b + \log_b a$ 的最大值为_____.

503. (005017) 若 $a > 0, b > 0$, 且 $a \neq b$, 则下列各式恒成立的是 ().

A. $\frac{2ab}{a+b} < \frac{a+b}{2} < \sqrt{ab}$ B. $\sqrt{ab} < \frac{2ab}{a+b} < \frac{a+b}{2}$ C. $\frac{2ab}{a+b} < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2}$ D. $\sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < \frac{2ab}{a+b}$

504. (005018) 利用公式 $a^2 + b^2 \geq 2ab$ 或 $a + b \geq 2\sqrt{ab} (a, b \geq 0)$, 求证: 若 $x > 0, y > 0$, 则 $\sqrt{(1+x)(1+y)} \geq 1 + \sqrt{xy}$.

505. (005019) 利用公式 $a^2 + b^2 \geq 2ab$ 或 $a + b \geq 2\sqrt{ab} (a, b \geq 0)$, 求证: 若 $a > 0, b > 0, c > 0$, 则 $ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a) \geq 6abc$.

506. (005020) 利用公式 $a^2 + b^2 \geq 2ab$ 或 $a + b \geq 2\sqrt{ab} (a, b \geq 0)$, 求证: 若 $a > 0, b > 0$, 则 $a + b + \frac{1}{\sqrt{ab}} \geq 2\sqrt{2}$.

507. (005024) 已知 $x > 0, y > 0, x + y = 1$, 求证:

(1) $(1 + \frac{1}{x})(1 + \frac{1}{y}) \geq 9$;

(2) $(\frac{1}{x^2} - 1)(\frac{1}{y^2} - 1) \geq 9$.

508. (005025) 已知 $a > 0, b > 0, c > 0, a + b + c = 1$, 求证: $(1-a)(1-b)(1-c) \geq 8abc$.

509. (005026) 已知 $a > 0, b > 0, c > 0, a + b + c = 1$, 求证: $(\frac{1}{a} - 1)(\frac{1}{b} - 1)(\frac{1}{c} - 1) \geq 8$.

510. (005027) 已知 $a > 0, b > 0, c > 0, a + b + c = 1$, 求证: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 9$.

511. (005028) 已知 $a > 0, b > 0, c > 0, a + b + c = 1$, 求证: $\frac{1}{abc} \geq 27$.

512. (005029) 已知 $a > 0, b > 0, c > 0, a + b + c = 1$, 求证: $(1 + \frac{1}{a})(1 + \frac{1}{b})(1 + \frac{1}{c}) \geq 64$.

513. (005034) 利用 $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca (a, b, c \in \mathbf{R})$, 证明: 若 $a > 0, b > 0, c > 0$, 则 $\frac{a^2}{b^2} + b^2 c^2 + c^2 a^2 a + b + c \geq abc$.

514. (005035) 利用 $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca (a, b, c \in \mathbf{R})$, 证明: 若半径为 1 的圆内接 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{1}{4}$, 二边长分别为 a, b, c , 则

(1) $abc = 1$;

(2) $\sqrt{b} + \sqrt{c} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.

515. (005036) 利用 $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca (a, b, c \in \mathbf{R})$, 证明: 若 $a, b, c > 0, n \in \mathbf{N}, f(n) = \lg \frac{a^n + b^n + c^n}{3}$, 则 $2f(n) \leq f(2n)$.

516. (005037) 利用放缩法并结合公式 $ab \leq (\frac{a+b}{2})^2$, 证明: $\lg 9 \cdot \lg 11 < 1$.

517. (005038) 利用放缩法并结合公式 $ab \leq (\frac{a+b}{2})^2$, 证明: $\log_a(a-1) \cdot \log_a(a+1) < 1 (a > 1)$.

518. (005039) 利用放缩法并结合公式 $ab \leq (\frac{a+b}{2})^2$, 证明: 若 $a > b > c$, 则 $\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{4}{c-a} \geq 0$.

519. (005040) 利用放缩法证明: $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \frac{1}{n+4} + \cdots + \frac{1}{n^2} > 1 (n \in \mathbf{N}, n \geq 2)$.
520. (005041) 利用放缩法证明: $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} < 1 (n \in \mathbf{N})$.
521. (005042) 利用放缩法证明: 已知 $a > 0, b > 0, c > 0$, 且 $a^2 + b^2 = c^2$, 求证: $a^n + b^n < c^n (n \geq 3, n \in \mathbf{N})$.
522. (005043) 利用拆项法证明: 若 $x > y, xy = 1$, 则 $\frac{x^2 + y^2}{x - y} \geq 2\sqrt{2}$.
523. (005044) 利用拆项法证明: $\frac{1}{2}(a^2 + b^2) + 1 \geq \sqrt{a^2 + 1} \cdot \sqrt{b^2 + 1}$.
524. (005045) 利用拆项法证明: 若 $a > 0, b > 0, c > 0$, 则 $2(\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab}) \leq 3(\frac{a+b+c}{3} - \sqrt[3]{abc})$.
525. (005046) 利用拆项法证明: $2(\sqrt{n+1} - 1) < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} (n \in \mathbf{N})$.
526. (005047) 利用迭代法证明: 若正数 x, y 满足 $x + 2y = 1$, 则 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq 3 + 2\sqrt{2}$.
527. (005048) 利用迭代法证明: $\frac{1}{\sin^2 \alpha} + \frac{3}{\cos^2 \alpha} \geq 4 + 2\sqrt{3}$.
528. (005049) 利用迭代法证明: 若 $x, y > 0, a, b$ 为正常数, 且 $\frac{a}{x} + \frac{a}{y} = 1$, 则 $x + y \geq (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$.
529. (005050) 利用判别式法证明: $\frac{1}{3} \leq \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1} \leq 3$.
530. (005051) 利用判别式法证明: 若关于 x 的不等式 $(a^2 - 1)x^2 - (a - 1)x - 1 < 0 (a \in \mathbf{R})$ 对任意实数 x 恒成立, 则 $-\frac{3}{5} < a \leq 1$.
531. (005052) 利用函数的单调性证明: 若 $x > 0, y > 0, x + y = 1$, 则 $(x + \frac{1}{x})(y + \frac{1}{y}) \geq \frac{25}{4}$.
532. (005053) 利用函数的单调性证明: 若 $0 < a < \frac{1}{k} (k \geq 2, k \in \mathbf{N})$, 且 $a^2 < a - b$, 则 $b < \frac{1}{k+1}$.
533. (005054) 利用三角换元法证明: 若 $a^2 + b^2 = 1$, 则 $a \sin x + b \cos x \leq 1$.
534. (005055) 利用三角换元法证明: 若 $|a| < 1, |b| < 1$, 则 $|ab \pm \sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}| \leq 1$.
535. (005056) 利用三角换元法证明: 若 $x^2 + y^2 \leq 1$, 则 $-\sqrt{2} \leq x^2 + 2xy - y^2 \leq \sqrt{2}$.
536. (005057) 利用三角换元法证明: 若 $|x| \leq 1$, 则 $(1+x)^n + (1-x)^n \leq 2^n$.
537. (005058) 利用三角换元法证明: 若 $a > 0, b > 0$, 且 $a - b = 1$, 则 $0 < \frac{1}{a}(\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}})(\sqrt{b} + \frac{1}{\sqrt{b}}) < 1$.
538. (005059) 利用三角换元法证明: $0 < \sqrt{1+x} - \sqrt{x} \leq 1$.
539. (005060) 试构造几何图形证明: 若 $f(x) = \sqrt{1+x^2}, x > b > 0$, 则 $|f(a) - f(b)| < |a - b|$.
540. (005061) 试构造几何图形证明: 若 $x, y, z > 0$, 则 $\sqrt{x^2 + y^2 + xy} + \sqrt{y^2 + z^2 + yz} > \sqrt{z^2 + x^2 + zx}$.
541. (005062) 利用均值换元证明: 若 $a > 0, b > 0$, 且 $a + b = 1$, 则 $\frac{4}{3} \leq \frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} < \frac{3}{2}$.
542. (005063) 利用均值换元证明: 若 $a + b + c = 1$, 则 $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{3}$.

562. (005108) 若 $x > 1$, 则 $\frac{x^2 - 2x + 2}{2x - 2}$ 有 ().

A. 最小值 1

B. 最大值 1

C. 最小值 -1

D. 最大值 -1

563. (005109) 若 $x, y \in \mathbf{R}^+$, 且 $x^2 + y^2 = 1$, 则 $x + y$ 的最大值是_____.

564. (005110) 若 $x + 2y = 2\sqrt{2}a (x > 0, y > 0, a > 1)$, 则 $\log_a x + \log_a y$ 的最大值是_____.

565. (005111) 若 $x > 1$, 则 $2 + 3x + \frac{4}{x-1}$ 的最小值_____, 此时 $x =$ _____.

566. (005112) 若 $x > 0$, 则 $x + \frac{1}{x} + \frac{16x}{x^2 + 1}$ 的最小值是_____, 此时 $x =$ _____.

567. (005113) 若正数 a, b 满足 $a^2 + \frac{b^2}{2} = 1$, 则 $a\sqrt{1+b^2}$ 的最大值为_____, 此时 $a =$ _____, $b =$ _____.

568. (005114) 若 $x > 0$, 则 $3x + \frac{12}{x^2}$ 的最小值是_____, 此时 $x =$ _____.

569. (005115) 若 $0 < x < \frac{1}{3}$, 则 $x^2(1-3x)$ 的最大值是_____, 此时 $x =$ _____.

570. (005116) 若 $xy > 0$, 且 $x^2y = 2$, 则 $xy + x^2$ 的最小值是_____.

571. (005118) 若正数 x, y, z 满足 $5x + 2y + z = 100$, 则 $\lg x + \lg y + \lg z$ 的最大值是_____.

572. (005119) 若 $\frac{x^2}{4} + y^2 = x$, 则 $x^2 + y^2$ 有 ().

A. 最小值 0, 最大值 16

B. 最小值 $-\frac{1}{3}$, 最大值 0

C. 最小值 0, 最大值 1

D. 最小值 1, 最大值 2

573. (005121) 若 $x > 0$, 则 $\frac{x}{x^3 + 2}$ 的最大值是 ().

A. 5

B. 3

C. 1

D. $\frac{1}{3}$

574. (005122) 若正数 a, b 满足 $ab - (a+b) = 1$, 则 $a+b$ 的最小值是 ().

A. $2 + 2\sqrt{2}$

B. $2\sqrt{2} - 2$

C. $\sqrt{5} + 2$

D. $\sqrt{5} - 2$

575. (005127) 若 $x, y > 0$, 求 $\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x+y}}$ 的最大值.

576. (005128) 已知正常数 a, b 和正变数 x, y 满足 $a + b = 10, \frac{a}{x} + \frac{b}{y} = 1$, $x + y$ 的最小值为 18, 求 a, b 的值.

577. (005129) 已知 $x^2 + y^2 = 1$, 求 $(1+xy)(1-xy)$ 的最大值和最小值.

578. (005130) 已知 $x^2 + y^2 = 3, a^2 + b^2 = 4$, 求 $ax + by$ 的最大值和最小值.

579. (005131) 已知 $\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} = 1$, 求 $x + y$ 的最大值和最小值.

580. (005132) 已知函数 $f(x) = \frac{2^{x+3}}{4^x + 8}$.

(1) 求 $f(x)$ 的最大值;

(2) 对于任意实数 a, b , 求证: $f(a) < b^2 - 4b + \frac{11}{2}$.

581. (005133) 若直角三角形的周长为 1, 求它的面积的最大值.

582. (005134) 若直角三角形的内切圆半径为 1, 求它的面积的最小值.

583. (005135) 若球半径为 R , 试求它的内接圆柱的最大体积. 请指出下向解法的错误, 并给出正确的解答.

解: 设圆柱底面半径为 r , 则 $4r^2 = 4R^2 - h^2$, 而 $V = \pi r^2 h = \frac{\pi}{4}(4R^2 - h^2)h = \frac{\pi}{4}(2R + h)(2R - h) = \frac{\pi}{8}(2R + h)(4R - 2h)h \leq \frac{\pi}{8}(\frac{2R + h + 4R - 2h + h}{3})^3 = \frac{\pi}{8}(2R)^3 = \pi R^3$. 所以所求最大体积为 πR^3 .

584. (005136) 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, $\angle ACB = \theta$. 现将 $\triangle ABC$ 分别以 BC, CA, AB 所在直线为轴旋转一周, 设所得三个旋转体的体积依次为 V_1, V_2, V_3 .

(1) 设 $T = \frac{V_3}{V_1 + V_2}$, 试用 a, b, c 表示 T ;

(2) 若 θ 为定值, 并令 $\frac{a+b}{c} = x$, 将 $T = \frac{V_3}{V_1 + V_2}$ 表示为 x 的函数, 写出这个函数的定义域, 并求这个函数的最大值 M ;

(3) 若 $\theta \in [\frac{\pi}{3}, \pi)$, 求 (2) 中 M 的最大值.

585. (005137) 已知 $A(0, \sqrt{3}a)$, $B(-a, 0)$, $C(a, 0)$ 是等边 $\triangle ABC$ 的顶点, 点 M, N 分别在边 AB, BC 上, 且将 $\triangle ABC$ 的面积两等分, 记 N 的横坐标为 x , $|MN| = y$.

(1) 写出 $y = f(x)$ 的表达式;

(2) 求 $y = f(x)$ 的最小值.

586. (005139) 已知关于 x 的不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ 的解集是 $\{x | \alpha < x < \beta\}$, 其中 $0 < \alpha < \beta$, 求 $cx^2 + bx + a < 0$ 的解集.

587. (005140) 解不等式 $(x+1)^2(x-1)(x-4)^3 > 0$.

588. (005141) 解不等式 $\frac{3x^2 - 14x + 14}{x^2 - 6x + 8} \geq 1$.

589. (005142) 解不等式 $\sqrt{x^2 - 3x + 2} > x - 3$.

590. (005143) 解不等式 $\sqrt{2x-1} < x-2$.

591. (005144) 解不等式 $|x^2 - 4| \leq x + 2$.

592. (005145) 解不等式 $|x^2 - \frac{1}{2}| > 2x$.

593. (005146) 解关于 x 的不等式 $|\log_a x| < |\log_a(ax^2)| - 2 (0 < a < 1)$.

594. (005147) 若关于 x 的不等式 $2x - 1 > a(x - 2)$ 的解集是 \mathbf{R} , 则实数 a 的取值范围是 ().

A. $a > 2$

B. $a = 2$

C. $a < 2$

D. a 不存在

595. (005148) 若关于 x 的不等式 $ax^2 + bx - 2 > 0$ 的解集是 $(-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{3}, +\infty)$, 则 ab 等于 ().

A. -24

B. 24

C. 14

D. -14

596. (005149) 若关于 x 的不等式 $(a-2)x^2 + 2(a-2)x - 4 < 0$ 对一切实数 x 恒成立, 则实数 a 的取值范围是 ().

A. $(-\infty, 2]$

B. $(-\infty, -2)$

C. $(-2, 2]$

D. $(-2, 2)$

597. (005150) 若 $q < 0 < p$, 则不等式 $q < \frac{1}{x} < p$ 的解集为 ().
- A. $\{x | \frac{1}{q} < x < \frac{1}{p}, x \neq 0\}$ B. $\{x | x < \frac{1}{q} \text{ 或 } x > \frac{1}{p}\}$
 C. $\{x | -\frac{1}{p} < x < -\frac{1}{q}, x \neq 0\}$ D. $\{x | \frac{1}{p} < x < -\frac{1}{q}\}$
598. (005151) 若关于 x 的不等式 $(a+b)x + 2a - 3b < 0$ 的解集是 $\{x | x < -\frac{1}{3}\}$, 则 $(a-3b)x + b - 2a > 0$ 的解集是_____.
599. (005152) 若不等式 $\frac{2x^2 + 2kx + k}{4x^2 + 6x + 3} < 1$ 对一切 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立, 则实数 k 的取值范围是_____.
600. (005153) 若关于 x 的不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ 的解集是 $\{x | 3 < x < 5\}$, 则不等式 $cx^2 + bx + a < 0$ 的解集是_____.
601. (005154) 若关于 x 的不等式 $\frac{x-a}{x^2-3x+2} \geq 0$ 的解集是 $\{x | 1 < x \leq a \text{ 或 } x > 2\}$, 则实数 a 的取值范围是_____.
602. (005155) 不等式 $(x+2)(x+1)^2(x-1)^3(x-3) > 0$ 的解集为:_____.
603. (005156) 不等式 $\frac{(x-1)^2(x+2)}{(x-3)(x-4)} \leq 0$ 的解集为:_____.
604. (005157) 不等式 $x+1 \leq \frac{4}{x+1}$ 的解集为:_____.
605. (005158) 若不等式 $f(x) \geq 0$ 的解集为 $[1, 2]$, 不等式 $g(x) \geq 0$ 的解集为 \emptyset , 则不等式 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 的解集是 ().
- A. \emptyset B. $(-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$ C. $[1, 2]$ D. \mathbf{R}
606. (005159) 若关于 x 的不等式 $ax^2 - bx + c < 0$ 的解集为 $(-\infty, \alpha) \cup (\beta, +\infty)$, 其中 $\alpha < \beta < 0$, 则不等式 $cx^2 + bx + a > 0$ 的解集为 ().
- A. $(\frac{1}{\beta}, \frac{1}{\alpha})$ B. $(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta})$ C. $(-\frac{1}{\beta}, -\frac{1}{\alpha})$ D. $(-\frac{1}{\alpha}, -\frac{1}{\beta})$
607. (005160) 解关于 x 的不等式: $m^2x - 1 < x + m$.
608. (005161) 解关于 x 的不等式: $x^2 - ax - 2a^2 < 0$.
609. (005162) 已知关于 x 的不等式 $\sqrt{x} > ax + \frac{3}{2}$ 的解集是 $\{x | 4 < x < b\}$, 求 a, b 的值.
610. (005163) 已知 $x = 3$ 是不等式 $ax > b$ 解集中的元素, 求实数 a, b 应满足的条件.
611. (005164) 已知集合 $\{x | x < -2 \text{ 或 } x > 3\}$ 是集合 $\{x | 2ax^2 + (2-ab)x - b > 0\}$ 的子集, 求实数 a, b 的取值范围.
612. (005165) 已知集合 $A = \{x | \frac{2x-1}{x^2+3x+2} > 0\}$, $B = \{x | x^2 + ax + b \leq 0\}$, 且 $A \cap B = \{x | \frac{1}{2} < x \leq 3\}$, 求实数 a, b 的取值范围.
613. (005166) 已知集合 $A = \{x | (x+2)(x+1)(2x-1) > 0\}$, $B = \{x | x^2 + ax + b \leq 0\}$, 且 $A \cup B = \{x | x+2 > 0\}$, $A \cap B = \{x | \frac{1}{2} < x \leq 3\}$, 求实数 a, b 的值.
614. (005167) 已知关于 x 的不等式 $x^2 - ax - 6a \leq 0$ 有解, 且解 x_1, x_2 满足 $|x_1 - x_2| \leq 5$, 求实数 a 的取值范围.

615. (005168) 已知关于 x 的方程 $3x^2 + x \log_{\frac{1}{2}} a + 2 \log_{\frac{1}{2}} a = 0$ 的两根 x_1, x_2 满足条件 $-1 < x_1 < 0 < x_2 < 1$, 求实数 a 的取值范围.

616. (005169) 已知关于 x 的方程 $x^2 + (m^2 - 1)x + m - 2 = 0$ 的一个根比 -1 小, 另一个根比 1 大, 求参数 m 的取值范围.

617. (005170) 已知集合 $A = \{x | x - a > 0\}$, $B = \{x | x^2 - 2ax - 3a^2 < 0\}$, 求 $A \cap B$ 与 $A \cup B$.

618. (005171) 不等式 $\sqrt{x+3} > -1$ 的解集是 ().

- A. $\{x | x > -2\}$ B. $\{x | x \geq -3\}$ C. \emptyset D. \mathbf{R}

619. (005172) 不等式 $(x-1)\sqrt{x+2} \geq 0$ 的解集是 ().

- A. $\{x | x > 1\}$ B. $\{x | x \geq 1\}$ C. $\{x | x \geq 1 \text{ 或 } x = -2\}$ D. $\{x | x > 1 \text{ 或 } x = -2\}$

620. (005173) 与不等式 $\sqrt{(x-4)(x+3)} \leq 1$ 的解完全相同的不等式是 ().

- A. $|(x-4)(x+3)| \leq 1$ B. $(x-4)(x+3) \leq 1$ C. $\lg[(x-4)(x+3)] \leq 0$ D. $0 \leq (x-4)(x+3) \leq 1$

621. (005174) 解不等式: $\sqrt{x-5} + 4x - 3 > 3x + 1 + \sqrt{x-5}$.

622. (005175) 解不等式: $\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2-x+3}$.

623. (005176) 解不等式: $(x-4)\sqrt{x^2-3x-4} \geq 0$.

624. (005177) 解不等式: $\frac{x+1}{x+4} \sqrt{\frac{x+3}{1-x}} < 0$.

625. (005178) 解不等式: $\sqrt{x+2} + \sqrt{x-5} \geq \sqrt{5-x}$.

626. (005179) 解不等式: $\sqrt{x-6} + \sqrt{x-3} \geq \sqrt{3-x}$.

627. (005180) 解不等式: $\sqrt{2-x} < x$.

628. (005181) 解不等式: $\sqrt{4-x^2} < x+1$.

629. (005182) 解不等式: $\sqrt{3-2x} > x$.

630. (005183) 解不等式: $\sqrt{(x-1)(2-x)} > 4-3x$.

631. (005184) 不等式 $\sqrt{4-x^2} + \frac{|x|}{x} \geq 0$ 的解集是 ().

- A. $[-2, 2]$ B. $[-\sqrt{3}, 0) \cup (0, 2]$ C. $[-2, 0] \cup (0, 2]$ D. $[-\sqrt{3}, 0) \cup (0, \sqrt{3}]$

632. (005185) 已知关于 x 的不等式 $\sqrt{2x-x^2} > kx$ 的解集是 $\{x | 0 < x \leq 2\}$, 则实数 k 的取值范围是 ().

- A. $k < 0$ B. $k \geq 0$ C. $0 < k < 2$ D. $-\frac{1}{2} < k < 0$

633. (005186) 解不等式: $\sqrt{2x-4} - \sqrt{x+5} < 1$.

634. (005187) 解不等式: $\sqrt{x^2-5x-6} < |x-3|$.

635. (005188) 解不等式: $|2\sqrt{x+3} - x + 1| < 1$.
636. (005189) 解关于 x 的不等式: $\sqrt{a(a-x)} > a - 2x (a > 0)$.
637. (005190) 解关于 x 的不等式: $\sqrt{4x - x^2} > ax (a < 0)$.
638. (005191) 解关于 x 的不等式: $\sqrt{1 - ax} < x - 1 (a > 0)$.
639. (005192) 解关于 x 的不等式: $\sqrt{a^2 - x^2} > 2x - a$.
640. (005220) 设 $x \in \mathbf{R}$, 则 $(1 - |x|)(1 + x) > 0$ 成立的充要条件是 ().
- A. $|x| < 1$ B. $x < 1$ C. $|x| > 1$ D. $x < 1$ 且 $x \neq 1$
641. (005221) 若函数 $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 8}$ 的定义域为 M , $g(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - |x - a|}}$ 的定义域为 N , 则使 $M \cap N = \emptyset$ 的实数 a 的取值范围为 ().
- A. $-1 < a < 3$ B. $-1 \leq a \leq 3$ C. $-2 < a < 4$ D. $-2 \leq a \leq 4$
642. (005222) 设 a, b 是满足 $ab < 0$ 的实数, 则下列不等式中正确的一个是 ().
- A. $|a + b| > |a - b|$ B. $|a + b| < |a - b|$ C. $|a - b| < ||a| - |b||$ D. $|a - b| < |a| + |b|$
643. (005223) 不等式 $|x| < \frac{1}{x}$ 的解集为 ().
- A. \emptyset B. $\{x|x < 0\}$ C. $\{x|0 < x < 1\}$ D. $\{x|x < 0 \text{ 或 } x \geq 1\}$
644. (005224) 若 $|a + b| < -c$, 则在① $a < -b - c$; ② $a + b > c$; ③ $a + c < b$; ④ $|a| + c < |b|$; ⑤ $|a| + |b| < -c$ 这五个式子中, 一定成立的个数是 ().
- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4
645. (005225) 若实数 a, b 满足 $ab > 0$, 则在① $|a + b| > |a|$; ② $|a + b| < |b|$; ③ $|a + b| < |a - b|$; ④ $|a + b| > |a - b|$ 这四个式子中, 正确的是 ().
- A. ①② B. ①③ C. ①④ D. ②④
646. (005226) 不等式 $|\frac{x}{1+x}| > \frac{x}{1+x}$ 的解集是 ().
- A. $\{x|x \neq -1\}$ B. $\{x|x > -1\}$ C. $\{x|x < 0 \text{ 且 } x \neq -1\}$ D. $\{x|-1 < x < 0\}$
647. (005227) 解不等式: $x^2 + |x| - 6 < 0$.
648. (005228) 解不等式: $x^2 - 2|x| - 15 > 0$.
649. (005229) 解不等式: $4 < |1 - 3x| \leq 7$.
650. (005230) 解不等式: $|x - 3| < x - 1$
651. (005233) 解不等式: $|x^2 - 5x + 10| > x^2 - 8$.

652. (005234) 解不等式: $|x^2 - 4| \leq x + 2$.
653. (005235) 解不等式: $|x + 1| < \frac{1}{x - 1}$.
654. (005236) 解不等式: $|x + 2| - |x - 3| < 4$.
655. (005237) 解不等式: $|x + 3| - |2x - 1| < \frac{x}{2} + 1$.
656. (005238) 已知当 $|x - 2| < a$ 成立时, $|x^2 - 4| < 1$ 必定成立, 求正数 a 的取值范围.
657. (005239) 已知关于 x 的不等式 $|x - 4| + |x - 3| < a$ 在实数集 \mathbf{R} 上的解集不是空集, 求正数 a 的取值范围.
658. (005251) $\triangle ABC$ 三内角 A, B, C 对边长分别为 a, b, c . 求证: $\frac{1}{2}(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}) \leq \frac{\cos A}{a} + \frac{\cos B}{b} + \frac{\cos C}{c} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.
659. (005254) 若正数 a, b, c 满足 $a + b > c$, 求证: $\frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} > \frac{c}{1+c}$.
660. (005255) 求证: $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \cdots \frac{99}{100} < \frac{1}{10}$.
661. (005256) 求证: $(1 + \frac{1}{3})(1 + \frac{1}{5}) \cdots (1 + \frac{1}{2n-1}) > \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{2n+1} (n \in \mathbf{N}, n > 1)$.
662. (005261) 已知 $a + b + c > 0, ab + bc + ca > 0, abc > 0$ 求证: $a > 0, b > 0, c > 0$.
663. (005264) 解关于 x 的不等式: $\frac{a(x-1)}{x-2} > 1$.
664. (005265) 解关于 x 的不等式: $x^2 + (a-4)x + 4 - 2a > 0$, 其中 $-1 \leq a \leq 1$.
665. (005266) 解不等式: $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1-x^2}{1+x^2} > 0$.
666. (005267) 解关于 x 的不等式: $\frac{cx}{a \cdot c^2 + b} - \frac{x}{2\sqrt{ab}} > x^2$, 其中 $a, b, c \in \mathbf{R}$, 且 $a > 0, b > 0$.
667. (005269) 已知关于 x 的方程 $a \sin^2 x + \frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{2} - a = 0$ 在 $0 \leq x < 2\pi$ 内有两个相异的实根, 求实数 a 的取值范围.
668. (005270) 已知 $|a| < 1, |b| < 1, |c| < 1$, 求证: $|1 - abc| > |ab - c|$.
669. (005271) 已知 $|a| < 1, |b| < 1, |c| < 1$, 求证: $a + b + c < abc + 2$.
670. (007680) 用列举法表示下列集合:
- (1) 十二生肖名称的集合;
 - (2) 10 以内的素数组成的集合;
 - (3) $\{y | y = x^2 - 1, -1 < x < 3, x \in \mathbf{Z}\}$.
671. (007684) 用适当的方法表示下列集合:
- (1) 方程 $x^2 - 2 = 0$ 的实数解组成的集合;
 - (2) 两直线 $y = 2x + 1$ 和 $y = x - 2$ 的交点组成的集合.
672. (007694) 已知集合 $A = \{x | x \leq 7\}$, 集合 $B = \{x | x < 2\}$, 集合 $C = \{x | x > 5\}$, 求 $A \cap B, A \cap C, A \cap (B \cap C)$.

673. (007700) 设 $U = \mathbf{R}$, 集合 $A = \{x | 4 - x > 2x + 1\}$, 求 $\complement_U A$.
674. (007701) 已知集合 $U = \{x | 0 < x \leq 10, x \in \mathbf{N}\}$, 集合 $A = \{1, 2, 4, 5, 9\}$, 集合 $B = \{4, 6, 7, 8, 10\}$, 求 $\complement_U A$, $\complement_U B$, $\complement_U A \cup \complement_U B$, $\complement_U A \cap \complement_U B$, $\complement_U (A \cap B)$, $\complement_U (A \cup B)$, 并指出其中相等的集合.
675. (007704) 已知集合 $A = \{x | -2 \leq x \leq 4\}$, 集合 $B = \{x | -3 < x < 2\}$, 集合 $C = \{x | -3 \leq x < 0\}$, 求 $A \cup B$, $(A \cap B) \cup C$, $(A \cup C) \cap (B \cup C)$.
676. (007705) 已知集合 $U = \{x | x \geq 2\}$, 集合 $A = \{y | 3 \leq y < 4\}$, 集合 $B = \{z | 2 \leq z < 5\}$, 求 $\complement_U A \cap B$, $\complement_U B \cup A$.
677. (007707) 判断下列语句是否为命题, 并在相应的括号内填入“是”或“否”.
- (1) 正方形是四边形; ____
 - (2) 0 是自然数吗; ____
 - (3) 交集和并集; ____
 - (4) $3 < \pi$. ____
678. (007708) 判断下列命题的真假, 并在相应的括号内填入“真命题”或“假命题”.
- (1) 如果 a 、 b 都是奇数, 那么 $a + b$ 是偶数; ____
 - (2) 一组对边平行且两对角线相等的四边形是平行四边形; ____
 - (3) 如果 $|a| < 2$, 那么 $a < 2$; ____
 - (4) 如果 $A \cap B = A$, 那么 $A \cup B = B$. ____
679. (007710) 已知命题 A : 如果 $x < 3$, 那么 $x < 5$; 命题 B : 如果 $x \geq 3$, 那么 $x \geq 5$; 命题 C : 如果 $x \geq 5$, 那么 $x \geq 3$. 填写各命题之间的关系: A 与 B 互为____命题, B 与 C 互为____命题, C 与 A 互为____命题.
680. (007711) 写出命题“在 $\triangle ABC$ 中, 如果 $\angle C > \angle B$, 那么 $AB > AC$ ”的逆命题、否命题和逆否命题, 并判断其真假.
681. (007713) 写出命题“已知 a 、 b 、 c 是实数, 如果 $ac < 0$, 那么 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 有实数根”的逆命题、否命题和逆否命题, 并判断其真假.
682. (007716) 试判断命题 A : “在 $\triangle ABC$ 中, $BC^2 = AC^2 + AB^2$ ”与命题 B : “ $\triangle ABC$ 是直角三角形”是否为等价命题, 并说明理由.
683. (007717) 试判断命题 A : “三角形任意两边之和大于第三边”与命题 B : “三角形任意两边之差小于第三边”是否为等价命题, 并说明理由.
684. (007719) 判断下列命题的真假, 并在相应的横线上填入“真命题”或“假命题”.
- (1) 若 $A \cap B \neq \emptyset$, $B \subset C$, 则 $A \cap C \neq \emptyset$ ____;
 - (2) 方程 $(a+1)x + b = 0 (a, b \in \mathbf{R})$ 的解为 $x = -\frac{b}{a+1}$ ____;
 - (3) 若命题 α 、 β 、 γ 满足 $\alpha \Rightarrow \beta$, $\beta \Rightarrow \gamma$, $\gamma \Rightarrow \alpha$, 则 $\alpha \Leftrightarrow \gamma$ ____.

685. (007721) 已知一个命题的否命题是“两组对边分别相等的四边形是平行四边形”，试写出原命题的逆命题，并判断原命题的真假.
686. (007722) 已知一个命题的逆命题是“若实数 a 、 b 满足 $a = 1$ 且 $b = 2$, 则 $a + b < 4$ ”，试写出原命题的否命题，并判断原命题的真假.
687. (007728) 若 x 、 y 都是实数, 则 “ $|x| > |y|$ ” 是 “ $x > y > 0$ ” 的_____条件.
688. (007732) 求证: 实数 a 、 b 均大于 0 的充要条件是
$$\begin{cases} a + b > 0, \\ ab > 0. \end{cases}$$
689. (007734) 写出命题 “ $x > 3$ ” 的一个充分条件和一个必要条件.
690. (007737) 填空: 已知集合 $A = \{a | a \text{ 具有性质 } p\}$, $B = \{b | b \text{ 具有性质 } q\}$.
- (1) 若 $A \subseteq B$, 则 p 是 q 的_____条件;
 - (2) 若 $A \supseteq B$, 则 p 是 q 的_____条件;
 - (3) 若 $A = B$, 则 p 是 q 的_____条件.
691. (007738) 试用子集与推出关系来判断命题 A 是命题 B 的什么条件.
- (1) A : 该平面图形是四边形, B : 该平面图形是梯形;
 - (2) $A: x = 2$, $B: (x - 5)(x - 2) = 0$;
 - (3) $A: x^2 = y^2$, $B: x = y$;
 - (4) $A: a = 2$, $B: a \leq 2$.
692. (007739) 如果命题 $p: m < -3$, 命题 q : 方程 $x^2 - x - m = 0$ 无实数根, 那么 p 是 q 的什么条件?
693. (007740) 已知命题 $\alpha: 2 \leq x < 4$, 命题 $\beta: 3m - 1 \leq x \leq -m$, 且 α 是 β 的充分条件, 求实数 m 的取值范围.
694. (007742) 已知 a 为实数, 写出关于 x 的方程 $ax^2 + 2x + 1 = 0$ 至少有一个实数根的一个充要条件、一个充分条件、一个必要条件.
695. (007743) 下列命题中正确的是 ().
- A. 自然数集 \mathbf{N} 中最小的数是 1
 - B. 空集是任何集合的真子集
 - C. 如果 $A \subseteq B$, 且 $A \neq B$, 那么 A 是 B 的真子集
 - D. $\{y | y = x + 3, x \in \mathbf{N}\}$ 中的最小值是 4
696. (007749) 若 $p: a > b$, $q: a^2 > b^2$, 则 p 是 q 的_____条件.
697. (007750) 若方程 $x^2 + px + 4 = 0$ 的解集为 A , 方程 $x^2 + x + q = 0$ 的解集为 B , 且 $A \cap B = \{4\}$, 则集合 $A \cup B$ 的所有子集是_____.
698. (007752) 已知集合 $A = \{x | -2 < x \leq 1\}$, 集合 $B = \{x | x \geq 1 \text{ 或 } x < -2\}$, 求 $A \cup B$, $A \cap B$.
699. (007753) 已知集合 $A = \{x | -1 < x < 1 \text{ 或 } x \geq 3\}$, 集合 $U = \{x | x \geq 2 \text{ 或 } x < 1\}$, 求 $\complement_U A$.
700. (007754) 写出命题: 若 $x > 1$, 则 $x > 0$ 的逆命题、否命题、逆否命题, 并指出哪些是真命题.

701. (007756) 已知全集 $U = \mathbf{R}$, 集合 $A = \{x|x \leq a-1\}$, 集合 $B = \{x|x > a+2\}$, 集合 $C = \{x|x < 0 \text{ 或 } x \geq 4\}$. 若 $\complement_U(A \cup B) \subseteq C$, 求实数 a 的取值范围.

702. (007762) 解不等式: $2(x+1) - 3(x-2) > 8$.

703. (007763) 解不等式组:
$$\begin{cases} 3x - 2(5 - 3x) > 8, \\ 2x \leq 2(2x + 3). \end{cases}$$

704. (007764) 判断下列语句是否正确, 并在相应的横线内填入“√”或“×”.

(1) 若 $ax > b$, 则 $x > \frac{b}{a}$ ($a \neq 0$)._____;

(2) 若 $a^2x > a^2y$, 则 $x > y$._____;

(3) 若 $a > b > 0$, $c > d > 0$, 则 $\frac{a}{c} > \frac{b}{d}$._____;

(4) 若 $a > b$, 则 $a^2 > ab$._____.

705. (007765) 如果 $a^2 > b^2$, 那么下列不等式中正确的是 ().

A. $a > 0 > b$

B. $a > b > 0$

C. $|a| > |b|$

D. $a > |b|$

706. (007766) 如果 $a < b < 0$, 那么下列不等式中正确的是 ().

A. $\frac{-a}{-b} < 1$

B. $a^2 > ab$

C. $\frac{1}{b^2} < \frac{1}{a^2}$

D. $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

707. (007767) 如果 $a < 0 < b$, 那么下列不等式中正确的是 ().

A. $\sqrt{-a} < \sqrt{b}$

B. $a^2 < b^2$

C. $a^3 < b^3$

D. $ab > b^2$

708. (007768) 证明: 如果 $a > b$, $c < 0$, 那么 $(a-b)c < 0$.

709. (007769) 证明: 如果 $a < b < 0$, 那么 $0 > \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

710. (007770) 用“>”或“<”号填空: 如果 $a < b < 0$, 那么

(1) $\sqrt[n]{-a}$ _____ $\sqrt[n]{-b}$ ($n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*$);

(2) $\frac{1}{a^{2n}}$ _____ $\frac{1}{b^{2n}}$ ($n \in \mathbf{N}^*$).

711. (007774) 已知 $a > 2$, 解关于 x 的方程 $ax + 4 < 2x + a^2$.

712. (007775) 已知 $m < 1$, 解关于 x 的方程 $mx + 1 < x + m^3$.

713. (007776) 已知 $p \neq q$, 解关于 x 的方程 $(p-q)x < p^2 - q^2$.

714. (007777) 解关于 x 的方程 $mx + 4 < m^2 + 2x$.

715. (007779) 如果 $a > b$, 那么 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ 成立的充要条件是_____.

716. (007780) 解关于 x 的不等式: $a^2(x-1) > b^2(1+x) + 2ab$, 其中 $a, b \in \mathbf{R}^+$.

717. (007782) 解不等式: $2x^2 - 3x + 1 < 0$.

718. (007783) 解不等式: $(x+1)^2 - 6 > 0$.

719. (007784) 解不等式: $x(x-1) < x(2x-3) + 1$.

720. (007785) 解不等式: $-x^2 + 2x + 35 > 0$.

721. (007786) 解不等式: $(x-2)(3-x) \leq 0$.

722. (007787) 解不等式: $2x - 1 \geq x^2$.

723. (007788) 解关于 x 的不等式: $(x-a)(x-1) < 0 (a > 1)$.

724. (007789) 解关于 x 的不等式: $(x-a)(x-2a) < 0 (a > 0)$.

725. (007790) 写出一个解集只含一个元素的一元二次不等式.

726. (007791) 解不等式组:
$$\begin{cases} 6 - x - x^2 \leq 0, \\ x^2 + 3x - 4 < 0. \end{cases}$$

727. (007792) 解不等式组:
$$\begin{cases} 4x^2 - 27x + 18 > 0, \\ x^2 - 6x + 4 < 0. \end{cases}$$

728. (007793) 已知集合 $U = \mathbf{R}$, 且集合 $A = \{x | x^2 - 16 < 0\}$, 集合 $B = \{x | x^2 - 4x + 3 \geq 0\}$, 求:

(1) $A \cap B$;

(2) $A \cup B$;

(3) $\complement_U(A \cap B)$;

(4) $\complement_U A \cup \complement_U B$.

729. (007794) 已知不等式 $x^2 + ax + b < 0$ 的解集为 $(-3, -1)$, 求实数 a 、 b 的值.

730. (007795) 已知关于 x 的二次方程 $2x^2 + ax + 1 = 0$ 无实数解, 求实数 a 的取值范围.

731. (007798) 解不等式组:
$$\begin{cases} 3x^2 + x - 2 \geq 0, \\ 4x^2 - 15x + 9 > 0. \end{cases}$$

732. (007799) 已知关于 x 的不等式组
$$\begin{cases} (2x-3)(3x+2) \leq 0, \\ x-a > 0 \end{cases}$$
 无实数解, 求实数 a 的取值范围.

733. (007800) 当 k 取何值时, 关于 x 的不等式 $2kx^2 + kx - \frac{3}{8} < 0$ 对于一切实数 x 都成立?

734. (007801) 已知关于 x 的不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ 的解集是 $\{x | x > 2 \text{ 或 } x < \frac{1}{2}\}$, 求关于 x 的不等式 $ax^2 - bx + c \leq 0$ 的解集.

735. (007803) 解不等式: $\frac{1}{x} < 1$.

736. (007804) 解不等式: $\frac{4x+3}{x-1} > 5$.

737. (007805) 解不等式: $\frac{2}{x} < \frac{2}{x-3}$.

738. (007806) 解不等式: $\frac{1}{x-4} \leq 1 - \frac{x}{4-x}$.

739. (007807) 求当 k 为何值时, 关于 x 的方程 $\frac{4k-3x}{k+2} = 2x$ 的解分别是:

(1) 正数;

(2) 负数.

740. (007808) 解不等式: $|x^2 - 3| < 2$.

741. (007809) 解不等式: $|\frac{1}{2-x}| \geq 2$.

742. (007810) 解不等式: $|x^2 - 3x + 2| \leq 0$.

743. (007811) 解不等式: $|\frac{x}{x+1}| > \frac{x}{x+1}$.

744. (007812) 解不等式: $|x-3| < x-1$.

745. (007813) 若 $a < b < 0$, 则不等式 $\frac{x+a}{x+b} > 0$ 的解集是_____.

746. (007814) 解不等式: $4 \leq |x^2 - 4x| < 5$.

747. (007815) 解不等式: $\frac{1}{|x|} > x$.

748. (007816) 已知不等式 $|ax+1| \leq b$ 的解集是 $[-1, 3]$, 求 a 、 b 的值.

749. (007817) 如果 a 、 $b \in \mathbf{R}$, 且 $ab > 0$, 那么下列不等式中正确的是 ().

A. $a^2 + b^2 > 2ab$

B. $a + b \geq 2\sqrt{ab}$

C. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} > \frac{2}{\sqrt{ab}}$

D. $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \geq 2$

750. (007818) 设 $ab \neq 0$, 利用基本不等式有如下证明: $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} = \frac{b^2 + a^2}{ab} \geq \frac{2ab}{ab} = 2$. 试判断这个证明过程是否正确. 若正确, 请说明每一步的依据; 若不正确, 请说明理由.

751. (007820) 已知 $0 < x < \frac{1}{2}$, 求当 x 取何值时, $x(1-2x)$ 的值最大.

752. (007821) 已知 $a > 0$, 求证: $a + a^3 \geq 2a^2$.

753. (007822) 用一根长为 l 的铁丝制成一个矩形框架. 当长、宽分别为多少时, 框架的面积最大?

754. (007823) 已知 x 、 $y \in \mathbf{R}^+$, 且 $x + y = 1$, 求当 x 、 y 分别取何值时, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ 的值最小.

755. (007824) 已知 $x > -1$, 求当 x 取何值时, $x + \frac{4}{x+1}$ 的值最小.

756. (007826) 建造一个容积为 8 立方米、深为 2 米的长方形无盖水池. 如果池底和池壁的造价每平方米分别为 120 元和 80 元, 那么水池的最低造价是多少元?

757. (007828) 已知 $x > y$, 求证: $x^3 - y^3 > x^2y - xy^2$.

758. (007829) 已知实数 $a \geq 3$, 求证: $\sqrt{a} - \sqrt{a-1} < \sqrt{a-2} - \sqrt{a-3}$.

759. (007830) 已知 a 、 b 、 c 是不全相等的整数, 求证: $(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1) > 8abc$.

760. (007832) 已知 $a > 0$, $b > 0$, 求证: $\frac{a}{\sqrt{b}} + \frac{b}{\sqrt{a}} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

761. (007834) 如果 $a \in \mathbf{R}$, 且 $a^2 + a < 0$, 那么 a 、 a^2 、 $-a$ 、 $-a^2$ 的大小关系是 ().

A. $-a < -a^2 < a < a^2$ B. $a < -a^2 < a^2 < -a$ C. $-a^2 < a < a^2 < -a$ D. $-a^2 < a < -a < a^2$

762. (007835) 不等式 $\frac{x^2}{x-1} \geq 0$ 的解是 ().

A. $(1, +\infty)$ B. $[1, +\infty)$ C. $(1, +\infty) \cup \{0\}$ D. $[1, +\infty) \cup \{0\}$

763. (007836) 不等式 $1 + |x+1| < 0$ 的解集是 ().

A. $(-\infty, -2)$ B. $(-2, 0)$ C. \mathbf{R} D. \emptyset

764. (007837) 证明: 如果 $a > b > 0$, $c > d > 0$, 那么 $a^2c > b^2d$.

765. (007838) 证明: $a^2 + b^2 + 2 \geq 2(a+b)$.

766. (007839) 证明: 如果 a 、 b 、 c 都是正数, 那么 $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$.

767. (007840) 解不等式: $2(x+1)(x+2) > (x+3)(x+4)$.

768. (007841) 解不等式: $-3x^2 - 5x - 4 < 0$.

769. (007842) 解不等式: $4x^2 - 20x + 25 \leq 0$.

770. (007843) 解不等式: $x^2 - 16x + 64 > 0$.

771. (007844) 解不等式组:
$$\begin{cases} x^2 - 16 < 0, \\ x^2 - 4x + 3 \geq 0. \end{cases}$$

772. (007845) 解不等式组: $4 < x^2 - x - 2 < 10$.

773. (007846) 解不等式: $|\frac{3x-9}{2}| \leq 6$.

774. (007847) 解不等式: $3 < |x-2| < 5$.

775. (007848) 解不等式: $|\frac{1}{x}| < \frac{4}{5}$.

776. (007849) 下列四对不等式 (组) 中, 哪几对具有相同的解集?

(1) $-\frac{1}{2}x^2 + 3x + \frac{27}{2} > 0$ 与 $x^2 - 6x - 27 > 0$;

(2) $4 < x^2 - x + 2 < 10$ 与 $\begin{cases} x^2 - x + 2 < 10, \\ x^2 - x + 2 > 4; \end{cases}$

(3) $|2x+1| < 5$ 与 $2x+1 < 5$ 或 $2x+1 > -5$;

(4) $\frac{x-1}{x+1} < 2$ 与 $x-1 < 2(x+1)$.

777. (007850) 已知关于 x 的不等式 $2x^2 - 2(a-1)x + (a+3) > 0$ 的解集是 \mathbf{R} , 求实数 a 的取值范围.

778. (007852) 当 k 是什么实数时, 关于 x 的方程 $2x + k(x+3) = 4$ 的解是正数?

779. (007853) 已知直角三角形的周长为 4, 求这个直角三角形面积的最大值, 并求此时各边的长.

780. (007855) 求不等式 $5 \leq x^2 - 2x + 2 < 26$ 的正整数解.

781. (007856) 已知 $x, y \in [a, b]$.

(1) 求 $x+y$ 的范围;

(2) 若 $x < y$, 求 $x-y$ 的范围.

782. (007857) 当 k 为什么实数时, 方程组
$$\begin{cases} 3x - 6y = 1, \\ 5x - ky = 2 \end{cases}$$
 的解满足 $x < 0$ 且 $y < 0$ 的条件?

783. (007858) 当 k 为什么实数时, 方程组
$$\begin{cases} 4x + 3y = 60, \\ kx + (k+2)y = 60 \end{cases}$$
 的解满足 $x > y > 0$ 的条件?

784. (007859) 已知 $m < n$, 试写出一个形如 $ax^2 + bx + c > 0$ 的一元二次不等式, 使它的解集分别为:

(1) $(-\infty, m) \cup (n, +\infty)$;

(2) (m, n) .

785. (007985) 若集合 $A = \{x | 0.1 < \frac{1}{x} < 0.3, x \in \mathbf{N}\}$, 集合 $B = \{x | |x| \leq 5, x \in \mathbf{Z}\}$, 则 $A \cup B$ 中的元素个数是 ().

A. 11

B. 13

C. 15

D. 17

786. (007988) 已知集合 $A = \{x | 3x^2 + x - 2 \geq 0, x \in \mathbf{R}\}$, 集合 $B = \{x | \frac{4x-3}{x-3} > 0, x \in \mathbf{R}\}$, 求 $A \cap B$.

787. (007991) 已知关于 x 的不等式 $ax^2 + 3ax - 2 < 0$ 的解集为 \mathbf{R} , 求实数 a 的取值范围.

788. (007995) 已知集合 $A = \{x | |x-a| < 2\}$, 集合 $B = \{x | \frac{2x-1}{x-2} < 1\}$, 且 $A \subseteq B$, 求实数 a 的取值范围.

789. (009426) 判断下列各组对象能否组成集合. 若能组成集合, 指出是有限集还是无限集; 若不能组成集合, 请说明理由.

(1) 上海市现有各区的名称;

(2) 末位是 3 的自然数;

(3) 比较大的苹果.

790. (009430) 用区间表示下列集合:

(1) $\{x | -1 < x \leq 5\}$;

(2) 不等式 $-2x > 6$ 的所有解组成的集合.

791. (009431) 判断下列说法是否正确, 并简要说明理由:

- (1) 若 $a \in A$ 且 $A \subseteq B$, 则 $a \in B$;
- (2) 若 $A \subseteq B$ 且 $A \subseteq C$, 则 $B = C$;
- (3) 若 $A \subset B$ 且 $B \subseteq C$, 则 $A \subset C$.

792. (009435) 已知全集为 \mathbf{R} , 集合 $A = \{x | -2 < x \leq 1\}$. 求 A .

793. (009437) 举几个生活中的命题的例子, 并判断其真假.

794. (009438) 判断下列命题的真假, 并说明理由:

- (1) 所有偶数都不是素数;
- (2) $\{1\}$ 是 $\{0, 1, 2\}$ 的真子集;
- (3) 0 是 $\{0, 1, 2\}$ 的真子集;
- (4) 如果集合 A 是集合 B 的子集, 那么 B 不是 A 的子集.

795. (009441) 设 $\alpha: 1 \leq x < 4$, $\beta: x < m$, α 是 β 的充分条件. 求实数 m 的取值范围.

796. (009442) 设 $n \in \mathbf{Z}$. 证明: 若 n^3 是奇数, 则 n 是奇数.

797. (009443) 证明: 对于三个实数 a 、 b 、 c , 若 $a \neq c$, 则 $a \neq b$ 或 $b \neq c$.

798. (009444) 设 a 、 b 、 c 、 d 是实数, 判断下列命题的真假, 并说明理由:

- (1) 若 $a^2 = b^2$, 则 $a = b$;
- (2) 若 $a(c^2 + 1) = b(c^2 + 1)$, 则 $a = b$;
- (3) 若 $ab = 0$, 则 $a = 0$ 或 $b = 0$;
- (4) 若 $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$, 且 $c + d \neq 0$, 则 $\frac{a+b}{c+d} = \frac{a}{c}$.

799. (009445) 设 $a \in \mathbf{R}$, 求关于 x 的方程 $ax = a^2 + x - 1$ 的解集.

800. (009446) 设 $k \in \mathbf{R}$, 求关于 x 与 y 的二元一次方程组
$$\begin{cases} y = kx + 1, \\ y = 2kx + 3 \end{cases}$$
 的解集.

801. (009447) 求一元二次方程 $ax^2 - 4x + 2 = 0 (a \neq 0)$ 的解集.

802. (009448) 已知方程 $2x^2 + 4x - 3 = 0$ 的两个根为 x_1 、 x_2 , 求下列各式的值:

- (1) $x_1^2 x_2 + x_2^2 x_1$;
- (2) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$;
- (3) $x_1^2 + x_2^2$;
- (4) $x_1^3 + x_2^3$.

803. (009449) 设 a 、 b 、 c 、 d 为实数, 判断下列命题的真假, 并说明理由:

- (1) 如果 $a > b$, $c > d$, 那么 $a + d > b + c$;
- (2) 如果 $ab > ac$, 那么 $b > c$;

(3) 如果 $a \geq b$ 且 $a \leq b$, 那么 $a = b$;

(4) 如果 $a > b$, $\frac{1}{c} > \frac{1}{d}$, 那么 $ac > bd$;

(5) 如果 $\frac{b}{a} > \frac{d}{c}$, 那么 $bc > ad$.

804. (009450) 设 $ab > 0$, 求证: $a > b$ 是 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ 的充要条件.

805. (009451) 设 a 、 b 、 c 是实数, 判断下列命题的真假, 并说明理由.

(1) 如果 $ac^2 > bc^2$, 那么 $a > b$;

(2) 如果 $ab > c$, 那么 $a > \frac{c}{b}$;

(3) 如果 $a > b \geq 0$, 那么 $\sqrt{a} > \sqrt{b}$.

806. (009453) 设 $a \neq 1$, 解关于 x 的不等式: $ax < a^2 + x - 1$.

807. (009454) 填空题:

(1) $(x-2)(x+3) < 0$ 的解集是_____;

(2) $(2-x)(x+3) < 0$ 的解集是_____;

(3) $(x-2)(x+3) \geq 0$ 的解集是_____.

808. (009455) 求下列不等式的解集:

(1) $-8x \leq 3x^2 + 4$;

(2) $-x^2 < 2x - 4$.

809. (009456) 解下列不等式:

(1) $x + 2 > -x^2$;

(2) $-x^2 + 3x - 4 > 0$;

(3) $9x^2 - 6x + 1 > 0$;

(4) $4x - x^2 > 4$;

(5) $2x^2 + 1 \geq x$;

(6) $x^2 + \frac{1}{9} \geq \frac{2}{3}x$.

810. (009457) 写出一个一元二次不等式, 使它的解集分别为:

(1) $(3 - \sqrt{2}, 3 + \sqrt{2})$;

(2) $(-\infty, 3 - \sqrt{2}] \cup [3 + \sqrt{2}, +\infty)$;

(3) \mathbf{R} ;

(4) \emptyset .

811. (009458) 求下列不等式组的解集:

$$(1) \begin{cases} x^2 - 2x - 3 > 0, \\ x - 1 > 0; \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x^2 - 2x - 15 \geq 0, \\ x^2 - 4x - 12 < 0. \end{cases}$$

812. (009459) 若关于 x 的不等式 $x^2 - x + m < 0$ 的解集为 \varnothing , 求实数 m 的取值范围.

813. (009460) 已知一元二次不等式 $x^2 - ax - b < 0$ 的解集为 $(2, 3)$, 求实数 a 、 b 的值及不等式 $bx^2 - ax - 1 > 0$ 的解集.

814. (009461) 解下列不等式:

- (1) $\frac{3-2x}{x-1} < 0$;
- (2) $\frac{2x-1}{x+2} \leq 0$;
- (3) $\frac{2x-1}{x-1} > 2$;
- (4) $\frac{4+x}{2+x} \geq 2$;
- (5) $\frac{x-1}{x^2-4x+5} > 1$;
- (6) $\frac{4-x}{x^2+x+1} \leq -1$.

815. (009462) 解下列不等式:

- (1) $|x+3| < 4$;
- (2) $|1-2x| > 3$;
- (3) $|2x-3| < 3x-2$;
- (4) $|x+1| + |x-4| > 7$.

816. (009464) 证明: 若 $x < 0$, 则 $x + \frac{1}{x} \leq -2$, 并指出等号成立的条件.

817. (009465) 用一根长为 l 的铁丝制成一个矩形框架. 当长和宽分别为多少时, 该框架的面积最大?

818. (009466) 在面积为 π 的圆中作一个内接矩形, 使它的面积最大. 求此矩形面积的最大值及此时矩形的各边长.

819. (009468) 已知实数 a 、 b 满足 $|a| < \frac{1}{2}$, $|b| < \frac{1}{2}$. 证明下列各式:

- (1) $|a+b| < 1$;
- (2) $|a-b| < 1$.

820. (009997) 若实数 a, b 满足 $a > b > 0$, 下列不等式中恒成立的是 ().

- A. $a+b > 2\sqrt{ab}$ B. $a+b < 2\sqrt{ab}$ C. $\frac{a}{2} + 2b > 2\sqrt{ab}$ D. $\frac{a}{2} + 2b < 2\sqrt{ab}$

821. (010019) 集合 $\{(x, y) | xy > 0, x, y \text{ 为实数}\}$ 是指 ().

- A. 第一象限内的所有点组成的集合 B. 第三象限内的所有点组成的集合
C. 第一象限和第三象限内的所有点组成的集合 D. 不在第二象限也不在第四象限内的所有点组成的集合

822. (010023) 已知集合 $A = \{x | x \leq 7\}$, $B = \{x | x < 2\}$, $C = \{x | x > 5\}$. 求: $A \cap B$, $A \cap C$, $A \cap (B \cap C)$.

823. (010025) 已知全集 $U = \mathbf{R}$, 集合 $A = \{x|4 - x > 2x + 1\}$. 求 \overline{A} .

824. (010027) 已知集合 $A = \{x|x = 2n + 1, n \in \mathbf{Z}\}$, $B = \{x|x = 4n - 1, n \in \mathbf{Z}\}$. 判断集合 A 与 B 的包含关系, 并证明你的结论.

825. (010030) 判断下列语句是否为命题:

- (1) 有的正方形是三角形;
- (2) 任意一个三角形的内角和都为 180° ;
- (3) 1 是自然数吗?
- (4) $3 > \pi$;
- (5) $2 \in (0, 5)$, 且 $2 \in \mathbf{Z}$.

826. (010031) 判断下列命题的真假, 并说明理由:

- (1) 如果 a, b 都是奇数, 那么 $a + b$ 是偶数;
- (2) 一组对边平行且两对角线等长的四边形是平行四边形;
- (3) 如果 $A \cap B = A$, 那么 $A \cup B = B$.

827. (010034) 已知 l, m 都是自然数, 试判断 “ $l + m$ 是偶数” 与 “ l, m 都是偶数” 是否等价, 并说明理由.

828. (010035) 证明: “四边形 $ABCD$ 是平行四边形” 是 “四边形 $ABCD$ 的对角线互相平分” 的充要条件.

829. (010036) 判断下列命题的真假, 并说明理由:

- (1) 若 $A \cap B = \emptyset, C \subset B$, 则 $A \cap C = \emptyset$;
- (2) 若 $a, b \in \mathbf{R}$, 则关于 x 的方程 $(a + 1)x + b = 0$ 的解为 $x = -\frac{b}{a + 1}$.

830. (010037) 已知 a 为实数. 写出关于 x 的方程 $ax^2 + 2x + 1 = 0$ 至少有一个实根的一个充要条件、一个充分非必要条件和一个必要非充分条件.

831. (010039) 已知 $\alpha: x < 3m - 1$ 或 $x > -m, \beta: x < 2$ 或 $x \geq 4$.

- (1) 若 α 是 β 的充分条件, 求实数 m 的取值范围;
- (2) 若 α 是 β 的必要条件, 求实数 m 的取值范围.

832. (010040) 设 $a \in \mathbf{R}$, 求关于 x 的方程 $ax = 2$ 的解集.

833. (010041) 设 $k \in \mathbf{R}$, 求关于 x 与 y 的二元一次方程组
$$\begin{cases} y = -2x + 1, \\ y = kx - 3 \end{cases}$$
 的解集.

834. (010042) 设 $a \in \mathbf{R}$, 求一元二次方程 $x^2 - 2ax + a^2 - 4 = 0$ 的解集.

835. (010044) 已知一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的两实根为 x_1, x_2 , 求证: $|x_2 - x_1| = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{|a|}$.

836. (010045) 已知一元二次方程 $x^2 + 3x - 3 = 0$ 的两个实根分别为 x_1, x_2 , 求作二次项系数是 1, 且分别以下列数值为根的一元二次方程:

(1) $-x_1, -x_2$;

(2) $2x_1 + 1, 2x_2 + 1$;

(3) $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}$;

(4) x_1^2, x_2^2 .

837. (010046) 设 a, b, c, d 为实数, 判断下列命题的真假:

(1) 若 $a > b \geq 0$, 则 $a^2 > b^2$;

(2) 若 $\sqrt{a} > \sqrt{b}$, 则 $a > b$;

(3) 若 $a > b > 0, c > d > 0$, 则 $ac > bd$;

(4) 若 $\frac{b}{a} > 0$, 则 $ab > 0$;

(5) 若 $a > b > 0$, 则 $a^2 > ab > b^2$;

(6) 若 $\sqrt{a} > b$, 则 $a > b^2$.

838. (010047) 如果 $a^2 > b^2$, 那么下列不等式中成立的是 ().

A. $a > 0 > b$

B. $a > b > 0$

C. $|a| > |b|$

D. $a > |b|$

839. (010048) 如果 $a < b < 0$, 那么下列不等式中成立的是 ().

A. $\frac{a}{b} < 1$

B. $a^2 > ab$

C. $\frac{1}{b^2} < \frac{1}{a^2}$

D. $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

840. (010049) 如果 $a < 0 < b$, 那么下列不等式中成立的是 ().

A. $\sqrt{-a} < \sqrt{b}$

B. $a^2 < b^2$

C. $a^3 < b^3$

D. $ab > b^2$

841. (010050) 证明: “ $a > 0$ 且 $b > 0$ ” 是 “ $a + b > 0$ 且 $ab > 0$ ” 的充要条件.

842. (010054) 已知 $a > b, c > d$. 求证: $ac + bd > ad + bc$.

843. (010057) 设 a 为实数, 求关于 x 的方程 $2x + a^2 = ax + 4$ 的解集.

844. (010058) 设 m 为实数, 求关于 x 的方程 $(m + 1)x^2 + 6mx + 9m = 1$ 的解集.

845. (010060) 对一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$, 证明: $ac < 0$ 是该方程有两个异号实根的充要条件.

846. (010061) 已知一元二次方程 $2x^2 + x - 3 = 0$ 的两个实根分别为 x_1, x_2 , 求作二次项系数是 1, 且分别以下列数值为根的一元二次方程:

(1) $x_1 + x_2, x_1 x_2$;

(2) $2x_1^2 + 1, 2x_2^2 + 1$;

(3) $\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_1}{x_2}$;

(4) x_1^4, x_2^4 .

847. (010062) 已知一元二次方程 $x^2 - 2mx + m - 1 = 0$ 的两实根为 x_1 、 x_2 , 且 $x_1^2 + x_2^2 = 4$. 求实数 m 的值.

848. (010063) 已知实数 a 、 b 、 c 满足 $a + b + c = 0$, 且 $a > b > c$. 求证: $a > 0$ 且 $c < 0$.

849. (010064) 设 $s = a + b$, $p = ab$ ($a, b \in \mathbf{R}$), 写出 “ $a > 1$ 且 $b > 1$ ” 用 s 、 p 表示的一个充要条件, 并证明.

850. (010065) 原有酒精溶液 a (单位: g), 其中含有酒精 b (单位: g), 其酒精浓度为 $\frac{b}{a}$. 为增加酒精浓度, 在原溶液中加入酒精 x (单位: g), 新溶液的浓度变为 $\frac{b+x}{a+x}$. 根据这一事实, 可提炼出如下关于不等式的命题: 若 $a > b > 0$, $x > 0$, 则 $\frac{b}{a} < \frac{b+x}{a+x} < 1$. 试加以证明.

851. (010066) 解下列不等式 (组):

(1) $2(x+1) - 3(x-2) > 8$;

(2)
$$\begin{cases} 3x - 2(5 - 3x) > 8, \\ 2x \leq 2(2x + 3). \end{cases}$$

852. (010067) 解下列关于 x 的不等式:

(1) $ax + 4 < 2x + a^2$, 其中 $a > 2$;

(2) $mx + 1 > x + m^3$, 其中 $m < 1$;

(3) $(p - q)x < p^2 - q^2$, 其中 $p \neq q$.

853. (010068) 解下列不等式:

(1) $(x - 2)(3 - x) \leq 0$;

(2) $x(x + 2) \leq 3(x + 2)$;

(3) $(1 - x)(2 - x) < 0$;

(4) $2(x + 1)(x + 3) > (x + 3)(x + 4)$.

854. (010069) 设全集为 \mathbf{R} , 集合 $A = \{x | x^2 - 2x - 3 \geq 0\}$, $B = \{x | x^2 + x - 2 < 0\}$. 求:

(1) $A \cup B$;

(2) $A \cap B$;

(3) $\overline{A \cap B}$;

(4) $\overline{A} \cup \overline{B}$.

855. (010070) 已知下列关于 x 的方程有两个不同实根, 求实数 k 的取值范围:

(1) $x^2 + (k + 3)x + k^2 = 0$;

(2) $3x^2 + 2kx + k = 0$.

856. (010071) 若下列关于 x 的方程有实数解, 求实数 k 的取值范围:

(1) $x^2 + kx - k + 3 = 0$;

(2) $x^2 + 2\sqrt{2}x + k(k - 1) = 0$.

857. (010072) 解下列不等式:

(1) $\frac{1}{3}x^2 \leq 2x - 3$;

- (2) $4x^2 \geq 12x - 9$;
 (3) $x^2 - x + \frac{1}{4} < 0$;
 (4) $x^2 + \frac{4}{9} > \frac{2}{3}x$.

858. (010073) 解下列不等式:

- (1) $x^2 + x + 1 > 0$;
 (2) $3 - 2\sqrt{2}x \geq -x^2$;
 (3) $2x^2 + 3x + 4 < 0$;
 (4) $x^2 \leq 3x - 4$.

859. (010074) 已知关于 x 的一元二次方程 $2x^2 + ax + 1 = 0$ 无实数解, 求实数 a 的取值范围.

860. (010075) 已知关于 x 的一元二次不等式 $x^2 + ax + b < 0$ 的解集为 $(-3, -1)$, 求实数 a 及 b 的值.

861. (010076) 解下列不等式组:

- (1) $\begin{cases} 6 - x - x^2 \leq 0, \\ x^2 + 3x - 4 < 0; \end{cases}$
 (2) $\begin{cases} 4x^2 - 27x + 18 > 0, \\ x^2 - 6x + 4 < 0; \end{cases}$
 (3) $\begin{cases} 3x^2 + x - 2 \geq 0, \\ 4x^2 - 15x + 9 > 0. \end{cases}$

862. (010077) 解下列不等式:

- (1) $\frac{x+1}{x-2} > 0$;
 (2) $\frac{1}{x} < 1$;
 (3) $\frac{2}{3-4x} \geq 1$;
 (4) $\frac{5}{x+2} \leq 2$;
 (5) $\frac{4x+3}{x-1} > 5$.

863. (010078) 当关于 x 的方程 $4k - 3x = 2(k+2)x$ 的解分别满足以下条件时, 求实数 k 的取值范围.

- (1) 正数;
 (2) 负数.

864. (010079) 解下列不等式:

- (1) $|1 - 4x| < 5$;
 (2) $|x - 4| < 2x$;
 (3) $|3x - 4| \geq x + 2$;
 (4) $|x + 2| + |x - 3| < 7$.

865. (010081) 设 $a, b \in \mathbf{R}$, 解关于 x 的不等式 $ax > b$.

866. (010082) 设 $a \in \mathbf{R}$, 解下列关于 x 的不等式:

(1) $(x-a)(x+3) \geq 0$;

(2) $(x-a)(x-2a) > 0$;

(3) $x(x-a) \geq (a+1)(x-a)$.

867. (010083) 已知关于 x 的不等式 $x^2 + bx + c > 0$ 的解集是 $(-\infty, \frac{1}{2}) \cup (2, +\infty)$, 求实数 b 及 c 的值, 并求 $x^2 - bx + c \leq 0$ 的解集.

868. (010084) 解下列不等式:

(1) $2 < \frac{1}{3x-1} \leq 3$;

(2) $\frac{1}{x} > x$;

(3) $\frac{1}{x-4} \leq 1 - \frac{x}{4-x}$.

869. (010085) 解下列不等式:

(1) $\frac{3x^2 + 2x + 1}{x^2 + x + 2} \leq 1$;

(2) $\frac{x-1}{x^2 - 4x + 4} \geq 0$.

870. (010086) 解下列不等式:

(1) $1 < |1 - 2x| \leq 7$;

(2) $3 < |x - 2| < 6$;

(3) $|x + 2| - |3 - 2x| < 1$;

(4) $|\frac{x}{x+1}| > \frac{x}{x+1}$.

871. (010087) 若关于 x 的不等式组 $\begin{cases} (2x-3)(3x+2) \leq 0, \\ x-a > 0 \end{cases}$ 没有实数解, 求实数 a 的取值范围.

872. (010088) 若关于 x 的不等式 $2kx^2 + kx + \frac{1}{8} > 0$ 对于一切实数 x 都成立, 求实数 k 的取值范围.

873. (010089) 如果实数 a, b 同号, 那么下列命题中正确的是 ().

A. $a^2 + b^2 > 2ab$

B. $a + b \geq 2\sqrt{ab}$

C. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} > \frac{2}{\sqrt{ab}}$

D. $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \geq 2$

874. (010090) 设 $a > b > 0$, 将四个正数 $a, b, \sqrt{ab}, \frac{a+b}{2}$ 按从小到大的顺序排列, 并说明理由.

875. (010093) 设 $x \in \mathbf{R}$, 求二次函数 $y = (x-1)(5-x)$ 的最大值.

876. (010094) 已知直角三角形斜边长等于 10cm, 求直角三角形面积的最大值.

877. (010096) 设 $x \in \mathbf{R}$, 求方程 $|x-2| + |2x-3| = |3x-5|$ 的解集.

878. (010097) 设 $0 < a < b$, 且 $a + b = 1$, 请将 $a, b, \frac{1}{2}, 2ab, a^2 + b^2$ 从小到大排列, 并说明理由.

879. (010100) 已知 a 、 b 是互不相等的正数, 求证: $(a^2 + 1)(b^2 + 1) > 4ab$.
880. (010101) 证明: 对于正数 h , 如果 $|x - a| < \frac{h}{2}$, $|y - a| < \frac{h}{2}$, 那么 $|x - y| < h$.
881. (010104) 证明: $|x + 2| - |x - 1| \geq -3$, 对所有实数 x 均成立, 并求等号成立时 x 的取值范围.
882. (020001) 判断下列各组对象能否组成集合, 若能组成集合, 指出是有限集还是无限集.
- (1) 上海市控江中学 2022 年入学的全体高一年级新生;
 - (2) 中国现有各省的名称;
 - (3) 太阳、2、上海市;
 - (4) 大于 10 且小于 15 的有理数;
 - (5) 末位是 3 的自然数;
 - (6) 影响力比较大的中国数学家;
 - (7) 方程 $x^2 + x + 3 = 0$ 的所有实数解;
 - (8) 函数 $y = \frac{1}{x}$ 图像上所有的点;
 - (9) 在平面直角坐标系中, 到定点 $(0, 0)$ 的距离等于 1 的所有点;
 - (10) 不等式 $3x - 10 < 0$ 的所有正整数解;
 - (11) 所有的平面四边形.
883. (020003) 对于一个确定的实数 x , 由 $x, -x, |x|, -\sqrt{x^2}$ 中的一个值或几个值组成的所有集合中, 元素的个数最多有多少个?
884. (020004) 已知关于 x 的方程 $\sqrt{x^2 + 4x + a} = x + 2$, 若以该方程的所有解为元素组成的集合是无限集, 求实数 a 满足的条件.
885. (020007) 用区间表示下列集合:
- (1) $\{x | -2 < x < 7\}$;
 - (2) $\{x | -2 \leq x \leq 7\}$;
 - (3) $\{x | -2 \leq x < 7\}$;
 - (4) 不等式 $2x < 5$ 的解集;
 - (5) 不等式 $-x < 5$ 的解集;
 - (6) 非负实数集.
886. (020008) 用适当的方法表示下列集合:
- (1) 能被 10 整除的所有正整数组成的集合;
 - (2) 能整除 10 的所有正整数组成的集合;
 - (3) 方程 $x^2 + 2 = 0$ 的实数解组成的集合;
 - (4) 方程组 $\begin{cases} 2x + y = 0, \\ x - y + 3 = 0 \end{cases}$ 的所有解组成的集合;
 - (5) 两直线 $y = 2x + 1$ 和 $y = x - 2$ 的交点组成的集合.

887. (020014) 已知集合 $A = \{x|x = a + \sqrt{2}b, a, b \in \mathbf{Z}\}$, 若 $x_1, x_2 \in A$, 证明: $x_1x_2 \in A$.

888. (020016) 用符号 “ \subset ”、“ $=$ ” 或 “ \supset ” 填空:

(1) $\{a\}$ _____ $\{a, b, c\}$;

(2) $\{a, b, c\}$ _____ $\{a, c\}$;

(3) $\{1, 2\}$ _____ $\{x|x^2 - 3x + 2 = 0\}$;

(4) $A = \{x|x^2 - 2x + 1 = 0\}$ _____ $B = \{x|x^2 + 2x - 3 = 0\}$;

(5) $A = \{1, 2\}$ _____ $B = \{x|x \text{ 是 } 2 \text{ 的正约数}\}$;

(6) $A = \{(x, y)|xy > 0\}$ _____ $B = \{(x, y)|x > 0, y > 0\}$.

889. (020024) 证明: 集合 $A = \{1, 2, 3\}$ 是集合 $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 的子集.

890. (020025) 判断集合 $A = \{n|n = 2k - 1, k \in \mathbf{Z}\}$, $B = \{n|n = 2m + 1, m \in \mathbf{Z}\}$ 的关系, 并说明理由.

891. (020026) 证明集合 $A = \{n|n = 2k - 1, k \in \mathbf{N}\}$ 不是集合 $B = \{n|n = 2m + 1, m \in \mathbf{N}\}$ 的子集, 且集合 A 真包含集合 B .

892. (020030) 设常数 $a \in \mathbf{R}$. 若集合 $A = (-\infty, 5)$ 与 $B = (-\infty, a]$ 满足 $A \subseteq B$, 则 a 的取值范围是_____.

证明: 1° 当 a _____ 时, 任取 $x \in A$, 则 _____, 所以 $x \in B$, 即 $A \subseteq B$.

2° 当 a _____ 时, 取 $x_1 =$ _____, 则 _____, 所以 $x_1 \in A$ 且 $x_1 \notin B$.

由 1°、2° 可得结论.

893. (020031) 设常数 $p \in \mathbf{R}$, 已知 $A = \{x|x < -1 \text{ 或 } x > 2\}$, $B = \{x|4x + p = 0\}$, 若 $B \subset A$, 则 p 的取值范围是_____.

894. (020035) 证明: 集合 $A = \{x|x = 6n - 1, n \in \mathbf{Z}\}$ 是 $B = \{x|x = 3n + 2, n \in \mathbf{Z}\}$ 的真子集.

895. (020037) 已知集合 $A = \{x|0 < x < a\}$, $B = \{x|1 < x < 2\}$, 若 $B \subseteq A$, 则实数 a 的取值范围为_____.

896. (020041) 已知 $A = \{x|x = a + \sqrt{2}b, a, b \in \mathbf{N}\}$, 若集合 $B = \{x|x = \sqrt{2}x_1, x_1 \in A\}$, 证明 $B \subset A$.

897. (020048) 已知 $A = \{x|x \leq 6\}$, $B = \{x|x < 1\}$, $C = \{x|x > 5\}$, 则 $A \cap B =$ _____, $B \cap C =$ _____, $A \cap (B \cap C) =$ _____, $(A \cap B) \cap C =$ _____, $A \cap (B \cup C) =$ _____, $(A \cap B) \cup (A \cap C) =$ _____, $A \cup (B \cap C) =$ _____, $(A \cup B) \cap (A \cup C) =$ _____.

898. (020053) 已知集合 $P = \{x | -2 \leq x \leq 5\}$, $Q = \{x | x > k+1 \text{ 且 } x < 2k-1\}$, 若 $P \cap Q = \emptyset$, 求实数 k 的取值范围.
899. (020056) 设常数 $a \in \mathbf{R}$. 已知集合 $A = \{x | x \leq 1\}$, 集合 $B = \{x | x > a\}$, 且 $A \cap B = \emptyset$, 则 a 的取值范围为_____.
900. (020058) 已知 $A = \{x | x < 2\}$. ① 若 $U = \mathbf{R}$, 则 $\bar{A} =$ _____;
 ② 若 $U = \{x | x \geq 0\}$, 则 $\bar{A} =$ _____;
 ③ 若 $U = \mathbf{N}$, 则 $\bar{A} =$ _____.
901. (020059) 已知全集 $U = \mathbf{R}$, $A = \{x | -1 < x < 2\}$, 则 $\bar{A} =$ _____; $\overline{\bar{A}} =$ _____; $\bar{A} \cap U =$ _____;
 $\bar{A} \cup U =$ _____; $\bar{A} \cap A =$ _____; $\bar{A} \cup A =$ _____.
902. (020060) 已知集合 $U = \{x | x \geq 2\}$, 集合 $A = \{y | 3 \leq y < 4\}$, 集合 $B = \{z | 2 \leq z < 5\}$, 则 $\bar{A} \cap B =$ _____;
 $\bar{B} \cup A =$ _____.
903. (020063) 设常数 $a \in \mathbf{R}$, 已知全集 $U = \mathbf{R}$, 集合 $A = \{x | -2 < x < 2\}$, 集合 $B = \{x | x > a\}$. 若 $A \cap \bar{B} = A$, 则 a 的取值范围为_____.
904. (020064) 设常数 $a \in \mathbf{R}$, 全集 $U = \mathbf{R}$. 集合 $A = \{x | x < 2\}$, $B = \{x | x > a\}$. 若 $\bar{A} \subseteq B$, 则 a 的取值范围为_____.
905. (020070) 判断下列语句是否为命题, 并在相应的横线上填入“是”或“否”.
- (1) 正方形和四边形;_____;
 - (2) 正方形是四边形吗?_____;
 - (3) $\pi > 3$;_____;
 - (4) 正方形好美!_____;
 - (5) $2x > 4$;_____;
 - (6) 968 能被 11 整除;_____.
906. (020071) 判断下列命题的真假, 并在相应的括号内填入“真”或“假”.
- (1) $2\sqrt{3} > 3\sqrt{2}$ 或 $1 \leq 1$;_____;
 - (2) $2\sqrt{3} > 3\sqrt{2}$ 且 $1 \leq 1$;_____;
 - (3) 如果 a, b 都是奇数, 那么 ab 也是奇数;_____;
 - (4) $\{1\}$ 是 $\{0, 1, 2\}$ 的真子集;_____;
 - (5) 1 是 $\{0, 1, 2\}$ 的真子集;_____;
 - (6) 若 $x < -2$ 或 $x > 2$, 则 $x^2 > 1$;_____;
 - (7) 如果 $|a| < 2$, 那么 $a < 2$;_____;
 - (8) 对任意实数 a, b , 方程 $(a+1)x + b = 0$ 的解为 $x = -\frac{b}{a+1}$;_____;
 - (9) 若命题 α, β, γ 满足 $\alpha \Rightarrow \beta, \beta \Rightarrow \gamma, \gamma \Rightarrow \alpha$, 则 $\alpha \Leftrightarrow \gamma$;_____;

- (10) 若关于 x 的方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的两实数根之积是正数, 则 $ac > 0$; _____;
- (11) 若某个整数不是偶数, 则这个数不能被 4 整除; _____;
- (12) 合数一定是偶数; _____;
- (13) 所有的偶数都是素数或合数; _____;
- (14) 所有的偶数都是素数或所有的偶数都是合数; _____;
- (15) 如果 $A \subset B, B \supset C$, 那么 $A = C$; _____;
- (16) 空集是任何集合的真子集; _____;
- (17) 若 $x \in \mathbf{R}$, 则方程 $x^2 - x + 1 = 0$ 不成立; _____;
- (18) 若 $A \cap B \neq \emptyset, B \subset C$, 则 $A \cap C \neq \emptyset$; _____;
- (19) 存在一个三角形, 它的任意两边的平方和小于第三边的平方; _____;
- (20) 对于任意一个三角形, 存在一组两边的平方和不等第三边的平方; _____.

907. (020072) 在下列各题中, 用符号 “ \Rightarrow ” “ \Leftarrow ” “ \Leftrightarrow ” 把 α 和 β 联系起来:

- (1) $\alpha: a = 0, \beta: ab = 0; \alpha$ _____ β ;
- (2) $\alpha: x^2 = 4, \beta: x = 2; \alpha$ _____ β ;
- (3) $\alpha: \text{实数 } x \text{ 适合 } x^2 - 5x + 6 = 0, \beta: x = 2; \alpha$ _____ β ;
- (4) $\alpha: \sqrt{x^2} = x, \beta: x > 0; \alpha$ _____ β ;
- (5) $\alpha: \text{实数 } x \text{ 适合 } \frac{x-3}{x+1} = -1, \beta: x = 1; \alpha$ _____ β ;
- (6) $\alpha: k \text{ 除以 } 4 \text{ 余 } 1, \beta: k \text{ 除以 } 2 \text{ 余 } 1; \alpha$ _____ β ;
- (7) $\alpha: \{2\} \subset B \subseteq \{2, 3, 5\}, \beta: B = \{2, 5\}; \alpha$ _____ β .

908. (020074) 已知 $\alpha: 2 \leq x < 4, \beta: 3m - 1 \leq x \leq -m$, 且 $\alpha \Rightarrow \beta$, 求实数 m 的取值范围.

909. (020075) 已知 a 是常数, 命题 $\alpha: -1 < a < 3, \beta: \text{关于 } x \text{ 的方程 } x + a = 0 (x \in \mathbf{R}) \text{ 没有正根}$, 若命题 α, β 有且只有一个是真命题, 求实数 a 的取值范围.

910. (020078) 写出使得 “ $x > 3$ ” 成立的一个充分条件: _____ 和一个必要条件: _____.

911. (020080) 关于 x 的方程 $ax^2 = 0$ 至少有一个实数根的一个充要条件是 _____.

912. (020081) 已知 $x, y \in \mathbf{R}$, “ $x^2 + y^2 > 0$ ” 是 “ $x \neq 0$ 或 $y \neq 0$ ” 的 ().

- A. 充分而不必要条件
B. 必要而不充分条件
C. 充要条件
D. 既不充分又不必要条件

913. (020082) 三个数 a, b, c 不全为零的充要条件是 ().

- A. a, b, c 都不是零
B. a, b, c 中最多一个零
C. a, b, c 中只有一个是零
D. a, b, c 中至少有一个不是零

914. (020083) 证明: $x_1 > 2$ 且 $x_2 > 2$ 是 $x_1 + x_2 > 4$ 且 $x_1 \cdot x_2 > 4$ 的充分非必要条件.

915. (020084) 有限集合 S 中元素的个数记作 $\text{card}(S)$, 设 A, B 都是有限集合, 给出下列命题:

- ① $A \cap B = \emptyset$ 的一个充要条件是 $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B)$;

② $A \subseteq B$ 的一个必要不充分条件是 $\text{card}(A) \leq \text{card}(B)$;

③ A 不是 B 的子集的一个充分不必要条件是 $\text{card}(A) > \text{card}(B)$;

④ $A = B$ 的一个充要条件是 $\text{card}(A) = \text{card}(B)$.

其中真命题的个数是 ().

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

916. (020085) 设 α, β 是方程 $x^2 - ax + b = 0$ 的两个实数根. 试分析 $a > 2$ 且 $b > 1$ 是“两个实数根 α, β 均大于 1”的什么条件? 并证明你的结论.

917. (020087) 已知下列字母均为常实数, 写出下列陈述句的否定形式; (1) $x > 0$; _____;

(2) $1 > x > 0$; _____;

(3) $x > 0$ 且 $y \leq 1$; _____;

(4) $x > 0$ 或 $x \leq -2$; _____;

(5) $x \neq y$ 或 $y \neq z$; _____;

(6) a, b, c, d 中至多有 2 个 0; _____;

(7) a, b, c, d 中至少有 2 个 1; _____;

(8) a, b, c, d 都大于 1; _____;

(9) a, b, c, d 不都大于 1; _____;

(10) a, b, c, d 都不大于 1; _____.

918. (020088) 在横线上写出下列命题的否定形式, 并判断命题真假, 在相应的位置中填入“真”或“假”.

(1) π 是无理数; _____; _____; _____;

(2) $2 + 1 = 4$; _____; _____; _____;

(3) 任何实数是正数或负数; _____; _____; _____;

(4) 任何实数是正数或任何实数是负数; _____; _____; _____;

(5) 对一切实数 $x, x^3 + 1 = 0$; _____; _____; _____;

(6) 存在实数 $x, x^3 + 1 = 0$; _____; _____; _____;

(7) 对于任意实数 k , 关于 x 的方程 $x^2 + x + k = 0$ 都有实数根; _____; _____; _____;

(8) 任何三角形中至多有一个钝角; _____; _____; _____;

(9) 若 $a > 1, b > 1$, 则 $ab > 1$; _____; _____; _____;

(10) 能被 2 整除的整数是质数; _____; _____; _____.

919. (020089) 写出下列命题的否定形式.

(1) 在平面上, 过定点 P 有且只有一条直线垂直于给定直线 l ;

(2) 任意两个有理数之间存在一个无理数;

(3) 存在实数 a , 使得关于 x 的不等式 $x^2 + (a - 2)x + a - 1 \geq 0$ 至少有一个正数解;

(4) 存在实数 a , 使得关于 x 的不等式 $x^2 + (a - 2)x + a - 1 \geq 0$ 恒成立;

(5) 存在实数 a , 使得关于 x 的不等式 $x^2 + (a - 2)x + a - 1 \geq 0$ 有解.

920. (020092) 证明: 若 $x + 2y + z > 0$, 则 x, y, z 中至少有一个大于 0.

921. (020093) 证明: 对于三个实数 a, b, c , 若 $a \neq c$, 则 $a \neq b$ 或 $b \neq c$.

922. (020095) 证明: 若 $x^2 \neq y^2$, 则 $x \neq y$ 或 $x \neq -y$.

923. (020096) 若 $a^3 + b^3 = 2$, 证明: $a + b \leq 2$.