1. 判断下列各组对象能否组成集合. 若能组成集合, 指出是有限集还是无限集; 若不能组成集合, 请说明理由.

(1) 上海市现有各区的名称;

(2) 末位是 3 的自然数;

(3) 比较大的苹果.

2. 用符号 "$\in$" 或 "$\notin$" 填空:

(1) $\frac{1}{2}$__________$\mathbf{N}$;

(2) 5__________$\mathbf{Z}$;

(3) -2__________$\mathbf{Q}$;

(4) π__________$\mathbf{R}$.

3. 用列举法表示下列集合:

(1) 能整除 10 的所有正整数组成的集合;

(2) 绝对值小于 4 的所有整数组成的集合.

4. 用描述法表示下列集合:

(1) 全体偶数组成的集合;

(2) 平面直角坐标系中 x 轴上所有点组成的集合.

5. 用区间表示下列集合:

(1) $\{x| -1 < x \leq 5\}$;

(2) 不等式 $-2x > 6$ 的所有解组成的集合.

6. 判断下列说法是否正确, 并简要说明理由:

(1) 若 $a \in A$ 且 $A \subseteq B$, 则 $a \in B$;

(2) 若 $A \subseteq B$ 且 $A \subseteq C$, 则 $B = C$;

(3) 若 $A \subset B$ 且 $B \subseteq C$, 则 $A \subset C$.

7. 用符号 "$\supset$""$=$" 或 "$\subset$" 填空:

(1) $\{a\}$__________$\{a, b, c\}$;

(2) $\{a, b, c\}$__________$\{a, c\}$;

(3) $\{1, 2\}$__________$\{x|x^2 - 3x + 2 = 0\}$.

8. 写出所有满足 $\{a\} \subset M \subset \{a, b, c, d\}$ 的集合 M.

9. 设 A 为全集 U 的任一子集, 则 (1) $\overline{\overline{A}} =$__________; (A 表示 A 的补集 A 的补集)

(2) $A \cap \overline{A} =$__________;

(3) $A \cup \overline{A} =$__________.

10. 已知全集为 $\mathbf{R}$, 集合 $A = \{x| -2 < x \leq 1\}$. 求 A.

11. 已知集合 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$, $C = \{3, 4, 5, 6\}$. 求:

(1) $(A \cap B) \cup C$, $(A \cup C) \cap (B \cup C)$;

(2) $(A \cup B) \cap C$, $(A \cap C) \cup (B \cap C)$.

12. 举几个生活中的命题的例子, 并判断其真假.

13. 判断下列命题的真假, 并说明理由:

(1) 所有偶数都不是素数;

(2) $\{1\}$ 是 $\{0, 1, 2\}$ 的真子集;

(3) 0 是 $\{0, 1, 2\}$ 的真子集;

(4) 如果集合 A 是集合 B 的子集, 那么 B 不是 A 的子集.

14. 用 "$\Rightarrow$" 表示下列陈述句 α 与 β 之间的推出关系:

(1) $\alpha: \triangle ABC$ 是等边三角形, $\beta: \triangle ABC$ 是轴对称图形;

(2) $\alpha: x^2 = 4$, $\beta: x = 2$.

15. 已知 α: 四边形 $ABCD$ 的两组对边分别平行, β: 四边形 $ABCD$ 为矩形, γ: 四边形 $ABCD$ 的两组对边分别相等. 用 "充分非必要""必要非充分""充要" 或 "既非充分又非必要" 填空:

(1) α 是 β 的__________ 条件;

(2) β 是 γ 的__________ 条件;

(3) α 是 γ 的__________ 条件.

16. 设 $\alpha: 1 \le x < 4$, $\beta: x < m$, α 是 β 的充分条件. 求实数 m 的取值范围.

17. 设 $n \in \mathbf{Z}$. 证明: 若 n^3 是奇数, 则 n 是奇数.

18. 证明: 对于三个实数 a、b、c, 若 $a \neq c$, 则 $a \neq b$ 或 $b \neq c$.

19. 设 a、b、c、d 是实数, 判断下列命题的真假, 并说明理由:

(1) 若 $a^2 = b^2$, 则 $a = b$;

(2) 若 $a(c^2 + 1) = b(c^2 + 1)$, 则 $a = b$;

(3) 若 $ab = 0$, 则 $a = 0$ 或 $b = 0$;

(4) 若 $\dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{d}$, 且 $c + d \neq 0$, 则 $\dfrac{a + b}{c + d} = \dfrac{a}{c}$.

20. 设 $a \in \mathbf{R}$, 求关于 x 的方程 $ax = a^2 + x - 1$ 的解集.

21. 设 $k \in \mathbf{R}$, 求关于 x 与 y 的二元一次方程组 $\begin{cases} y = kx + 1, \\ y = 2kx + 3 \end{cases}$ 的解集.

22. 求一元二次方程 $ax^2 - 4x + 2 = 0 (a \neq 0)$ 的解集.

23. 已知方程 $2x^2 + 4x - 3 = 0$ 的两个根为 x_1、x_2, 求下列各式的值:

(1) $x_1^2 x_2 + x_2^2 x_1$;

(2) $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}$;

(3) $x_1^2+x_2^2$;

(4) $x_1^3+x_2^3$.

24. 设 a、b、c、d 为实数, 判断下列命题的真假, 并说明理由:

(1) 如果 $a>b$, $c>d$, 那么 $a+d>b+c$;

(2) 如果 $ab>ac$, 那么 $b>c$;

(3) 如果 $a\ge b$ 且 $a\le b$, 那么 $a=b$;

(4) 如果 $a>b$, $\dfrac{1}{c}>\dfrac{1}{d}$, 那么 $ac>bd$;

(5) 如果 $\dfrac{b}{a}>\dfrac{d}{c}$, 那么 $bc>ad$.

25. 设 $ab>0$, 求证: $a>b$ 是 $\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}$ 的充要条件.

26. 设 a、b、c 是实数, 判断下列命题的真假, 并说明理由.

(1) 如果 $ac^2>bc^2$, 那么 $a>b$;

(2) 如果 $ab>c$, 那么 $a>\dfrac{c}{b}$;

(3) 如果 $a>b\ge 0$, 那么 $\sqrt{a}>\sqrt{b}$.

27. 设 x 是实数, 比较 x^2+4 与 $4x$ 的值的大小.

28. 设 $a\ne 1$, 解关于 x 的不等式: $ax<a^2+x-1$.

29. 填空题:

(1) $(x-2)(x+3)<0$ 的解集是__________;

(2) $(2-x)(x+3)<0$ 的解集是__________;

(3) $(x-2)(x+3)\ge 0$ 的解集是__________.

30. 求下列不等式的解集:

(1) $-8x\le 3x^2+4$;

(2) $-x^2<2x-4$.

31. 解下列不等式:

(1) $x+2>-x^2$;

(2) $-x^2+3x-4>0$;

(3) $9x^2-6x+1>0$;

(4) $4x-x^2>4$;

(5) $2x^2+1\ge x$;

(6) $x^2+\dfrac{1}{9}\ge\dfrac{2}{3}x$.

32. 写出一个一元二次不等式, 使它的解集分别为:

(1) $(3-\sqrt{2},3+\sqrt{2})$;

(2) $(-\infty, 3-\sqrt{2}] \cup [3+\sqrt{2}, +\infty)$;

(3) $\mathbf{R}$;

(4) $\varnothing$.

33. 求下列不等式组的解集:

(1) $\begin{cases} x^2-2x-3>0, \\ x-1>0; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x^2-2x-15 \geq 0, \\ x^2-4x-12<0. \end{cases}$

34. 若关于 x 的不等式 $x^2-x+m<0$ 的解集为 $\varnothing$, 求实数 m 的取值范围.

35. 已知一元二次不等式 $x^2-ax-b<0$ 的解集为 $(2,3)$, 求实数 a、b 的值及不等式 $bx^2-ax-1>0$ 的解集.

36. 解下列不等式:

(1) $\dfrac{3-2x}{x-1}<0$;

(2) $\dfrac{2x-1}{x+2} \leq 0$;

(3) $\dfrac{2x-1}{x-1}>2$;

(4) $\dfrac{4+x}{2+x} \geq 2$;

(5) $\dfrac{x-1}{x^2-4x+5}>1$;

(6) $\dfrac{4-x}{x^2+x+1} \leq -1$.

37. 解下列不等式:

(1) $|x+3|<4$;

(2) $|1-2x|>3$;

(3) $|2x-3|<3x-2$;

(4) $|x+1|+|x-4|>7$.

38. 设 a 是正数, 求证: $a+1 \geq 2\sqrt{a}$.

39. 证明: 若 $x<0$, 则 $x+\dfrac{1}{x} \leq -2$, 并指出等号成立的条件.

40. 用一根长为 l 的铁丝制成一个矩形框架. 当长和宽分别为多少时, 该框架的面积最大?

41. 在面积为 π 的圆中作一个内接矩形, 使它的面积最大. 求此矩形面积的最大值及此时矩形的各边长.

42. 已知 a、$b \in \mathbf{R}$. 求证: $|a+b|+|a-b| \geq 2|b|$.

43. 已知实数 a、b 满足 $|a|<\dfrac{1}{2}$, $|b|<\dfrac{1}{2}$. 证明下列各式:

(1) $|a+b|<1$;

(2) $|a-b|<1$.

44. 求 $-\dfrac{32}{243}$ 的 5 次方根.

45. 求 9 的 4 次方根.

46. 求下列各根式的值:

(1) $\sqrt[5]{(-4)^5}$;

(2) $\sqrt[6]{(a-b)^6}$(其中 $a<b$).

47. 求下列各式的值:

(1) $100^{\frac{1}{2}}$;

(2) $8^{-\frac{2}{3}}$.

48. 用有理数指数幂的形式表示下列各式 (其中 $a>0$):

(1) $a^{\frac{10}{3}}\cdot\sqrt[5]{a^3}$;

(2) $\sqrt[3]{a\sqrt[3]{a}}$.

49. 化简下列各式:

(1) $(a^{3+\sqrt{3}})^{3-\sqrt{3}}$(其中 $a>0$);

(2) $\dfrac{4a^{\frac{2}{3}}b^2}{(a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{5}{6}})(-\dfrac{2}{3}a^{\frac{1}{2}}b)}$(其中 $a>0$, $b>0$).

50. 已知 $0<a<1$, $s>0$. 求证: $0<a^s<1$.

51. 以下对数式中, 与指数式 $5^x=6$ 等价的是 (　　).

A. $\log_5 6=x$　　B. $\log_5 x=6$　　C. $\log_6 x=5$　　D. $\log_x 6=5$

52. 求下列各式的值:

(1) $\log_5 25$;

(2) $\log_{\frac{1}{3}} 27$;

(3) $\log_4\sqrt{2}$;

(4) $2^{\log_2 3}$.

53. 求下列各式中 x 的值:

(1) $\log_4 x=2$;

(2) $\log_x 4=2$.

54. 已知 $A=\log_a x$, $B=\log_a y(a>0$ 且 $a\neq 1)$. 用 A 及 B 表示下列各式:

(1) $\log_a xy$;

(2) $\log_a x^2\sqrt{y}$.

55. 求下列各式的值:

(1) $\log_{15} 3+\log_{15} 5$;

(2) $\log_2 \sqrt[3]{4}$;

(3) $\log_5 \sqrt{10} - \dfrac{1}{2} \log_5 250$.

56. 已知 $\log_7 3 = a$, $7^b = 2$. 用 a 及 b 表示 $\log_7 72$.

57. 求下列各式的值:

(1) $\log_8 \dfrac{1}{4}$;

(2) $\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a$($a$、$b$、$c$ 均为不等于 1 的正数);

(3) $3^{2+\log_9 4}$;

(4) $\dfrac{\log_5 2 \times \log_7 9}{\log_5 \dfrac{1}{3} \times \log_7 2}$.

58. 已知 $\log_3 2 = a$, 用 a 表示 $\log_2 96$.

59. 设 a、b 是两个不等于 1 的正数, 求证: $\log_b a = \dfrac{1}{\log_a b}$.

60. 若幂函数 $y = x^a$ 的图像经过点 $(3, \sqrt{3})$, 求此幂函数的表达式.

61. 求下列函数的定义域, 并作出它们的大致图像:

(1) $y = x^{\frac{1}{3}}$;

(2) $y = x^{-\frac{1}{2}}$;

(3) $y = x^{\frac{4}{3}}$.

62. 若幂函数 $y = x^{-m^2+2m+3}$(m 为整数) 的定义域为 $\mathbf{R}$, 求 m 的值.

63. (1) 已知函数 $y = x^{\frac{2}{3}}$ 和 $y = (x-1)^{\frac{2}{3}}$, 说明这两个函数图像之间的关系, 并在同一平面直角坐标系中作出它们的大致图像;

(2) 已知函数 $y = x^{\frac{2}{3}}$ 和 $y = x^{\frac{2}{3}} + 1$, 说明这两个函数图像之间的关系, 并在同一平面直角坐标系中作出它们的大致图像.

64. 比较下列各题中两个数的大小:

(1) 2.5^{-3} 与 3.1^{-3};

(2) $1.7^{\frac{3}{2}}$ 与 $1.6^{\frac{3}{2}}$.

65. 作出函数 $y = \dfrac{-x-1}{x+2}$ 的大致图像.

66. 判断下列函数哪些是指数函数, 哪些是幂函数:

(1) $y = x$;

(2) $y = x^3$;

(3) $y = \mathrm{e}^x$;

(4) $y = \sqrt[3]{x}$;

(5) $y = 2^{-x}$;

(6) $y = 2^x$.

67. 求下列函数的定义域:

(1) $y=3^{x}$;

(2) $y=3^{\frac{1}{x-2}}$.

68. 在同一平面直角坐标系中分别作出下列函数的大致图像:

(1) $y=4^{x}$;

(2) $y=(\dfrac{1}{4})^{x}$.

69. 比较下列各题中两个数的大小:

(1) $1.4^{0.3}$ 与 $1.4^{0.4}$;

(2) $0.3^{1.4}$ 与 $0.3^{1.5}$;

(3) $a^{-3.14}$ 与 $(\dfrac{1}{a})^{\pi}(a>0$ 且 $a\neq 1)$.

70. 已知 $a>0$ 且 $a\neq 1$. 若 $m>n$, 且 $a^{m}<a^{n}$, 求实数 a 的取值范围.

71. 求下列不等式的解集:

(1) $3^{x}>3^{0.5}$;

(2) $0.2^{x}<25$.

72. 已知指数函数 $y=a^{x}(0<a<1)$ 在区间 $[1,2]$ 上的最大值比最小值大 $\dfrac{a}{3}$, 求实数 a 的值.

73. 某服装店对原价分别为 175 元和 200 元的甲乙两种服装搞促销活动, 规定甲服装每天降价 5%, 直到其售完为止; 乙服装每天降价 7%, 直到其售完为止. 假设两种服装在 10 天内均没有售完, 几天后甲服装的售价将高于乙服装的售价?

74. 若对数函数 $y=\log a_{x}(a>0$ 且 $a\neq 1)$ 的图像经过点 $(4,2)$, 求此对数函数的表达式.

75. 求下列函数的定义域:

(1) $y=\log_{2}\dfrac{2+x}{1-x}$;

(2) $y=\log_{a}(4-x^{2})$(常数 $a>0$ 且 $a\neq 1$).

76. 在同一平面直角坐标系中作出 $y=\lg x$ 及 $y=\log_{0.1}x$ 的大致图像.

77. 已知常数 $a>0$ 且 $a\neq 1$, 假设无论 a 取何值, 函数 $y=\log_{a}(x-1)$ 的图像恒经过一个定点, 求此点的坐标.

78. 利用对数函数的性质, 比较下列各题中两个对数的大小:

(1) $\log_{0.2}3$ 和 $\log_{0.2}6$;

(2) $\log_{0.2}3$ 和 $\log_{0.3}3$.

79. 设 $0<a<1$, 求证: 对数函数 $y=\log_{a}x$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上是严格减函数.

80. 动物死亡后, 体内碳的放射同位素 ^{14}C 的含量每年衰减 0.012%, 设在动物死亡的时刻 $t=0$ 时, ^{14}C 的含量为 a.

(1) 写出 $^{14}\mathrm{C}$ 的含量 y 随时间 t 变化的函数表达式;

(2) 问至少经过多少年, $^{14}\mathrm{C}$ 的含量才能低于原来的 90%.

81. 利用对数函数的单调性来估算对数 $\log_2 5$ 的第一位小数的值.

82. 求下列函数的定义域:

(1) $y=\sqrt{(x-2)(x+3)}$;

(2) $y=\dfrac{1}{1-\sqrt{x-1}}$.

83. 下列四组函数中, 同组的两个函数是相同函数的是 (　　).

A. $y=|x|$ 与 $y=(\sqrt{x})^2$　　B. $y=x$ 与 $y=\mathrm{e}^{\ln x}$

C. $y=x$ 与 $y=\sqrt[5]{x^5}$　　D. $y=x$ 与 $y=(\dfrac{1}{x})^{-1}$

84. 求下列函数的值域:

(1) $y=(\lg x)^2+1$, $x\in(0,+\infty)$;

(2) $y=3x^2-4x+1$, $x\in[0,1]$.

85. 作下列函数的大致图像:

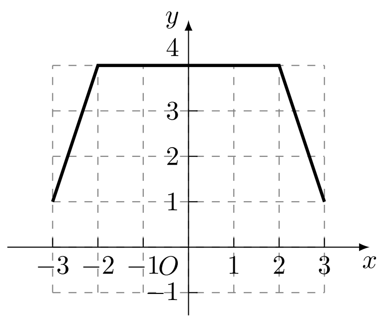
(1) $y=-|x|$;

(2) $y=\sqrt{x+2}$;

(3) $y=\dfrac{1}{x^2+1}$;

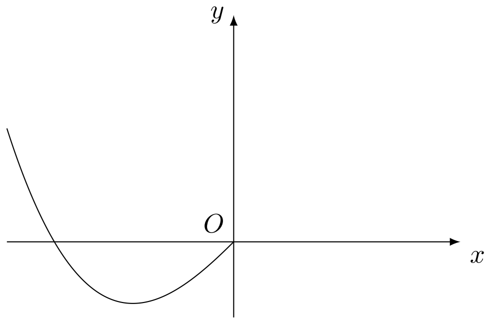
(4) $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$.

86. 根据下图的函数图像, 用解析法表示 y 关于 x 的函数.

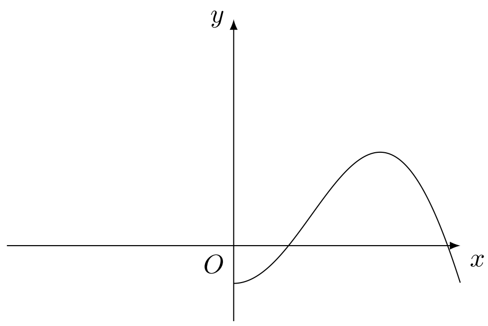


87. 奇函数的图像是不是一定通过原点? 偶函数的图像是不是一定与 y 轴相交? 请说明理由.

88. 如图, 已知偶函数 $y=f(x)$ 在 y 轴及 y 轴一侧的部分图像, 作出 $y=f(x)$ 的大致图像.



(1)



(2)

89. 证明下列函数是奇函数:

(1) $y=2^x-2^{-x}$;

(2) $y=\log_2(1+x)-\log_2(1-x)$.

90. 判断下列函数的奇偶性, 并说明理由:

(1) $y=|x|$;

(2) $y=\dfrac{1}{1+x}-\dfrac{1}{1-x}$;

(3) $y=x^3-x$, $x\in[-3,3)$;

(4) $y=0$, $x\in[-1,1]$.

91. 已知 a 是实数, 而定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $y=f(x)$ 的表达式为 $f(x)=|x-a|$.

(1) 是否存在实数 a, 使得 $y=f(x)$ 是奇函数? 说明理由;

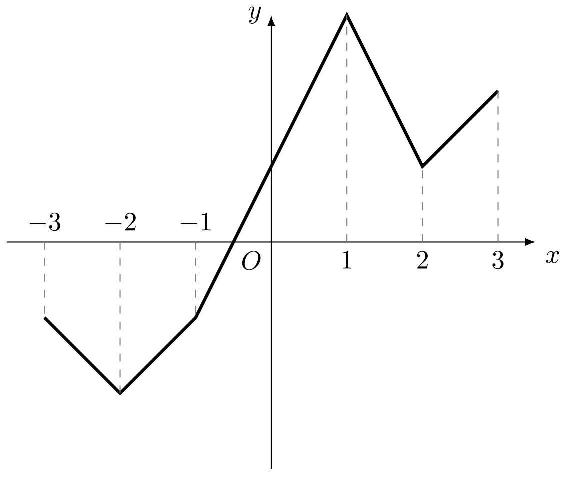
(2) 是否存在实数 a, 使得 $y=f(x)$ 是偶函数? 说明理由.

92. 小明说: "如果当 $x>0$ 时, 总有 $f(x)>f(0)$, 那么函数 $y=f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上是严格增函数." 他的说法是否正确? 说明理由.

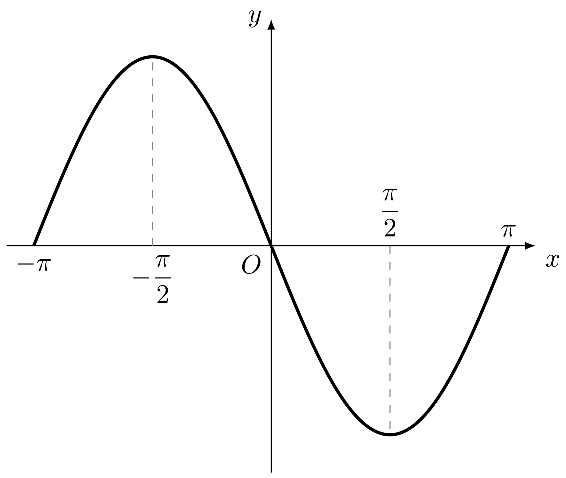
93. 证明: 函数 $y=\dfrac{2}{x^3}$ 在区间 $(-\infty,0)$ 上是严格减函数.

94. 构造一个二次函数, 使得它在区间 $[-1,1]$ 上是严格减函数, 并说明理由.

95. 根据下列函数 $y=f(x)$ 的图像 (包括端点), 分别指出这两个函数的单调区间, 以及在每一个单调区间上函数的单调性.



(1)



(2)

96. 判断函数 $y=|x+1|$, $x\in[-2,2]$ 的单调性, 并求出其单调区间.

97. 设 $y=f(x)$ 是奇函数, 且它在区间 $(-3,0]$ 上是严格增函数.

    (1) 求证: 它在区间 $[0,3)$ 上是严格增函数;

    (2) $y=f(x)$ 是否在区间 $(-3,3)$ 上是严格增函数? 说明理由.

98. 求函数 $y=(\frac{1}{2})^x$, $x\in[1,3]$ 的最大值与最小值.

99. 求下列函数的最大值与最小值:

    (1) $y=1-x^2$;

    (2) $y=1-x^2$, $x\in[-1,2]$;

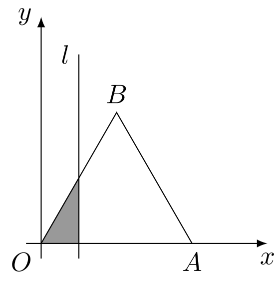
    (3) $y=2x^2-8x$;

    (4) $y=2x^2-8x$, $x\in[0,1]$.

100. 已知 $a>-2$, 求函数 $y=x^2+1$, $x\in[-2,a]$ 的最大值.

101. 已知一等腰三角形的周长为 12cm, 试将该三角形的腰长 y(单位: cm) 表示为底边长 x(单位: cm) 的函数.

102. 如图, 在平面直角坐标系的第一象限内, $\triangle OAB$ 是边长为 2 的等边三角形. 用直线 $l: x=t(0<t<2)$ 截这个三角形, 记截得的靠近 y 轴的部分的面积为 S. 试将 S 表示为 t 的函数.



103. 某商场购物优惠活动如下: 一次购物总额不超过 500 元的不予优惠; 一次购物总额超过 500 元但不超过 1000 元的, 按标价给予 9 折优惠; 一次购物总额超过 1000 元的, 其中的 1000 元按上述标准给予优惠, 而超过 1000

元的部分给予 7 折优惠. 设某位顾客一次购物总额为 x 元, 而优惠后实际付款额为 y 元. 试写出 y 关于 x 的函数关系.

104. 利用函数与不等式的关系, 在 $a<0$ 时, 求解实系数一元二次不等式 $ax^2+bx+c\leq 0$.

105. 用函数的观点解不等式: $2^x+\log_2 x>2$.

106. 对于在区间 $[a,b]$ 上的图像是一段连续曲线的函数 $y=f(x)$, 如果 $f(a)\cdot f(b)>0$, 那么是否该函数在区间 (a,b) 上一定无零点? 说明理由.

107. 已知函数 $y=2x^3-3x^2-18x+28$ 在区间 $(1,2)$ 上有且仅有一个零点. 试用二分法求出该零点的近似值. (结果精确到 0.1)

108. 求函数 $y=x^2+2x$, $x\in[0,+\infty)$ 的反函数的定义域.

109. 求下列函数的反函数:

(1) $y=3x+2$;

(2) $y=-\dfrac{3}{x}$;

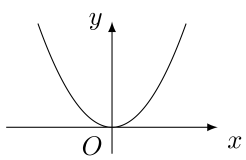
(3) $y=x^2$, $x\in(-\infty,0]$;

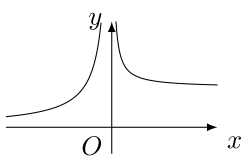
(4) $y=\sqrt{x}+1$.

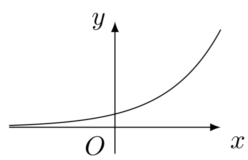
110. 判断函数 $y=\begin{cases}x, & -1\leq x\leq 0,\\ 1-x, & 0<x<1\end{cases}$ 是否存在反函数. 若存在反函数, 求出它的反函数; 若不存在反函数, 说明理由.

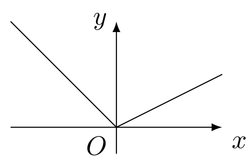
111. 定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数存在反函数吗? 说明理由.

112. 下列各图中, 存在反函数的函数 $y=f(x)$ 的图像只可能是 (　　).

A. 

B. 

C. 

D. 

113. 已知函数 $y=f(x)$, $x\in D$ 存在反函数 $y=f^{-1}(x)$, $x\in f(D)$. 函数 $y=f(x+1)$ 与 $y=f^{-1}(x+1)$ 是否一定互为反函数? 说明理由.