



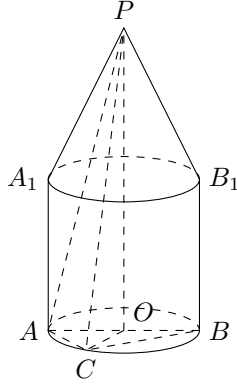
A. 命题  $P$  真, 命题  $Q$  真

B. 命题  $P$  真, 命题  $Q$  假

C. 命题  $P$  假, 命题  $Q$  真

D. 命题  $P$  假, 命题  $Q$  假

17. 如图, 空间几何体由两部分构成, 上部是一个底面半径为 1, 高为 2 的圆锥, 下部是一个底面半径为 1, 高为 2 的圆柱. 圆锥和圆柱的轴在同一直线上, 圆锥的下底面与圆柱的上底面重合. 点  $P$  是圆锥的顶点,  $AB$  是圆柱下底面的一条直径,  $AA_1$ 、 $BB_1$  是圆柱的两条母线.  $C$  是弧  $AB$  的中点.



(1) 求异面直线  $PA_1$  与  $BC$  所成的角的大小;

(2) 求点  $B_1$  到平面  $PAC$  的距离.

18. 已知  $\alpha, \lambda$  是实常数,  $f(x) = \begin{vmatrix} \lambda \cos x \sin(x - \alpha) \\ \sin(x + \alpha) \cos x \end{vmatrix}$ .

(1) 当  $\lambda = 1, \alpha = \frac{\pi}{3}$  时, 求函数  $y = f(x)$  的最小正周期、单调增区间与最大值;

(2) 是否存在  $\lambda$ , 使得  $f(x)$  是与  $\alpha$  有关的常数函数 (即  $f(x)$  的值与  $x$  的取值无关)? 若存在, 求出所有满足条件的  $\lambda$ ; 若不存在, 说明理由.

19. 已知  $a$  是实常数,  $a > 0, f(x) = ax - 1 + \frac{1}{x^2}$ .

(1) 当  $a = 2$  时, 判断函数  $y = f(x)$  在区间  $[1, +\infty)$  上的单调性, 并说明理由;

(2) 写出一个  $a$  的值, 使得  $f(x) = 0$  在区间  $(0, +\infty)$  上有至少两个不同的解, 并严格证明你的结论.

20. 设抛物线  $\Gamma$  的方程为  $y^2 = 2px$ , 其中常数  $p > 0$ .  $F$  是抛物线  $\Gamma$  的焦点.

(1) 若直线  $x = 3$  被抛物线  $\Gamma$  所截得的弦长为 6, 求  $p$  的值;

(2) 设  $A$  是点  $F$  关于顶点  $O$  的对称点.  $P$  是抛物线  $\Gamma$  上的动点, 求  $\frac{|PA|}{|PF|}$  的最大值;

(3) 设  $p = 2, l_1, l_2$  是两条互相垂直, 且均经过点  $F$  的直线.  $l_1$  与抛物线  $\Gamma$  交于点  $A, B, l_2$  与抛物线交于点  $C, D$ . 若点  $G$  满足  $4\vec{FG} = \vec{FA} + \vec{FB} + \vec{FC} + \vec{FD}$ , 求点  $G$  的轨迹方程.

21. 设各项均为整数的无穷数列  $\{a_n\}$  满足:  $a_1 = 1$ , 且对所有  $n \in \mathbb{N}^*$ , 均成立  $|a_{n+1} - a_n| = n$ .

(1) 写出  $a_4$  的所有可能值 (不需要写计算过程);

(2) 若  $\{a_{2n-1}\}$  是公差为 1 的等差数列, 求  $\{a_n\}$  的通项公式;

(3) 证明: 存在满足条件的数列  $\{a_n\}$ , 使得在该数列中, 有无穷多项为 2019.

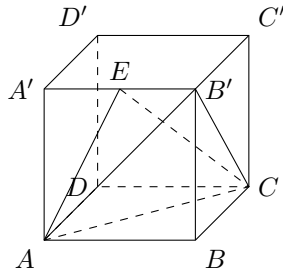
22. 设  $m \in \mathbb{R}$ . 已知集合  $A = \{2, 3\}, B = \{1, m\}$ . 若  $4 - m \in A$ , 则  $m =$ \_\_\_\_\_.



37. 在  $\triangle ABC$  中,  $BC = a$ ,  $CA = b$ ,  $AB = c$ , 对于下面两个说法: ① 对于任意  $\triangle ABC$ , 以  $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}$  为三边的三角形存在, 且总是一个锐角三角形; ② 存在一个  $\triangle ABC$ , 以  $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$  为三边的三角形是一个钝角三角形. 下面判断正确的是 ( ).

- A. ①正确, ②错误  
B. ①错误, ②正确  
C. ①正确, ②正确  
D. ①错误, ②错误

38. 如图, 在棱长为 2 的正方体  $ABCD - A'B'C'D'$  中,  $E$  为  $AB$  的中点.



- (1) 求证: 直线  $AE$  平行于平面  $CC'D'D$ ;  
(2) 求点  $E$  到平面  $AB'C$  的距离.

39. 经济订货批量模型, 是目前大多数工厂、企业等最常采用的订货方式, 即某种物资在单位时间的需求量为某常数, 经过某段时间后, 存储量消耗下降到零, 此时开始订货并随即到货, 然后开始下一个存储周期. 该模型适用于整批间隔进货、不允许缺货的存储问题. 具体如下:

年存储成本费  $T$ (元) 关于每次订货  $x$ (单位: 吨) 的函数关系为  $T(x) = \frac{Bx}{2} + \frac{AC}{x}$ , 其中  $A$  为年需求量,  $B$  为每单位物资的年存储费,  $C$  为每次订货费.

某化工厂需用甲醇作为原料, 年需求量为 6000 吨, 每吨存储费为 120 元/年, 每次订货费为 2500 元. (1) 若该化工厂每次订购 300 吨甲醇, 求年存储成本费;

(2) 每次需订购多少吨甲醇, 可使该化工厂年存储成本费最少? 最少费用为多少?

40. 已知函数  $f(x) = \sin x$ .

- (1) 设  $a \in \mathbf{R}$ , 判断函数  $g(x) = a \cdot f(x) + f(x + \frac{\pi}{2})$  的奇偶性, 并说明理由;  
(2) 设函数  $F(x) = 2f(x) - \sqrt{3}$ . 对任意  $b \in \mathbf{R}$ , 求  $y = F(x)$  在区间  $[b, b + 100\pi]$  上零点个数的所有可能值.

41. 双曲线  $\Gamma: x^2 - \frac{y^2}{b^2} = 1 (b > 0)$ .

- (1) 若  $\Gamma$  的一条渐近线方程为  $y = 2x$ , 求  $\Gamma$  的方程;  
(2) 设  $F_1, F_2$  是  $\Gamma$  的两个焦点,  $P$  为  $\Gamma$  上一点, 且  $PF_1 \perp PF_2$ ,  $\triangle PF_1F_2$  的面积为 9, 求  $b$  的值;  
(3) 已知斜率为 2 的直线与  $\Gamma$  交于  $A, B$  两点, 点  $M$  是线段  $AB$  的中点, 设点  $M$  的横坐标的集合为  $\Omega$ . 若  $\{x | x = 2n, n \in \mathbf{N}^*\} \subseteq \Omega$ , 求正数  $b$  的取值范围.

42. 已知以  $a_1$  为首项的数列  $\{a_n\}$  满足:  $|a_{n+1}| = |a_n + 1| (n \in \mathbf{N}^*)$ .

- (1) 当  $a_1 = -\frac{1}{3}$  时, 且  $-1 < a_n < 0$ , 写出  $a_2, a_3$ ;  
(2) 若数列  $\{|a_n|\} (1 \leq n \leq 10, n \in \mathbf{N}^*)$  是公差为  $-1$  的等差数列, 求  $a_1$  的取值范围;

(3) 设  $a_1 = 0$ . 记  $S_n$  为  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和, 给定正整数  $m \geq 4$ , 求  $S_{m-1}$  的最小值, 并证明取到最小值的数列  $\{a_n\}$  不唯一.

43. 函数  $y = 3 \sin(2x + \frac{\pi}{3})$  的最小正周期  $T =$ \_\_\_\_\_.

44. 函数  $y = \lg x$  的反函数是\_\_\_\_\_.

45. 已知集合  $P = \{x | (x+1)(x-3) < 0\}$ ,  $Q = \{x | |x| > 2\}$ , 则  $P \cap Q =$ \_\_\_\_\_.

46. 函数  $y = x + \frac{9}{x}$ ,  $x \in (0, +\infty)$  的最小值是\_\_\_\_\_.

47. 计算:  $\lim_{n \rightarrow \infty} [\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + (\frac{1}{2})^n] =$ \_\_\_\_\_.

48. 记球  $O_1$  和  $O_2$  的半径、体积分别为  $r_1$ 、 $V_1$  和  $r_2$ 、 $V_2$ , 若  $\frac{V_1}{V_2} = \frac{8}{27}$ , 则  $\frac{r_1}{r_2} =$ \_\_\_\_\_.

49. 若某线性方程组对应的增广矩阵是  $\begin{pmatrix} m & 4 & 2 \\ 1 & m & m \end{pmatrix}$ , 且此方程组有唯一的一组解, 则实数  $m$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

50. 若一个布袋中有大小、质地相同的三个黑球和两个白球, 从中任取两个球, 则取出的两球中恰是一个白球和一个黑球的概率是\_\_\_\_\_.

51.  $(1+2x)^n$  的二项展开式中, 含  $x^3$  项的系数等于含  $x$  项的系数的 8 倍, 则正整数  $n =$ \_\_\_\_\_.

52. 平面上三条直线  $x - 2y + 1 = 0$ ,  $x - 1 = 0$ ,  $x + ky = 0$ , 如果这三条直线将平面划分为六个部分, 则实数  $k$  的取值组成的集合  $A =$ \_\_\_\_\_.

53. 已知双曲线  $C: \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{8} = 1$ , 左、右焦点分别为  $F_1$ 、 $F_2$ , 过点  $F_2$  作一直线与双曲线  $C$  的右支交于  $P$ 、 $Q$  两点, 使得  $\angle F_1 P Q = 90^\circ$ , 则  $\triangle F_1 P Q$  的内切圆的半径  $r =$ \_\_\_\_\_.

54. 已知点  $B(4, 0)$ ,  $C(2, 2)$ , 平面直角坐标系上的动点  $P$  满足  $\overrightarrow{OP} = \lambda \cdot \overrightarrow{OB} + \mu \cdot \overrightarrow{OC}$  (其中  $O$  是坐标原点, 且  $1 < \lambda \leq a$ ,  $1 < \mu \leq b$ ), 若动点  $P$  组成的区域的面积为 8, 则  $a + b$  的最小值是\_\_\_\_\_.

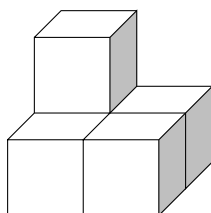
55. 若向量  $\vec{a} = (2, 0)$ ,  $\vec{b} = (1, 1)$ , 则下列结论中正确的是 ( ).

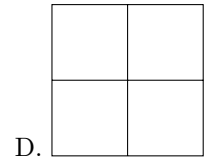
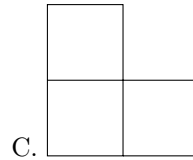
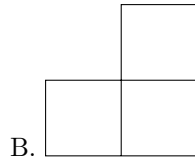
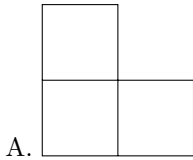
- A.  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1$                       B.  $|\vec{a}| = |\vec{b}|$                       C.  $(\vec{a} - \vec{b}) \perp \vec{b}$                       D.  $\vec{a} \parallel \vec{b}$

56. 椭圆的参数方程为  $\begin{cases} x = 5 \cos \theta, \\ y = 3 \sin \theta \end{cases}$  ( $\theta$  为参数), 则它的两个焦点坐标是 ( ).

- A.  $(\pm 4, 0)$                       B.  $(0, \pm 4)$                       C.  $(\pm 5, 0)$                       D.  $(0, \pm 3)$

57. 如图几何体是由五个相同正方体叠成的, 其三视图中的左视图序号是 ( ).





58. 定义  $F(a, b) = \begin{cases} a, & a \leq b, \\ b, & a > b, \end{cases}$  已知函数  $f(x)$ 、 $g(x)$  定义域都是  $\mathbf{R}$ , 给出下列命题:

- (1) 若  $f(x)$ 、 $g(x)$  都是奇函数, 则函数  $F(f(x), g(x))$  为奇函数;
- (2) 若  $f(x)$ 、 $g(x)$  都是减函数, 则函数  $F(f(x), g(x))$  为减函数;
- (3) 若  $f_{\min}(x) = m$ ,  $g_{\min}(x) = n$ , 则  $F_{\min}(f(x), g(x)) = F(m, n)$ ;
- (4) 若  $f(x)$ 、 $g(x)$  都是周期函数, 则函数  $F(f(x), g(x))$  是周期函数.

其中正确命题的个数为 ( ).

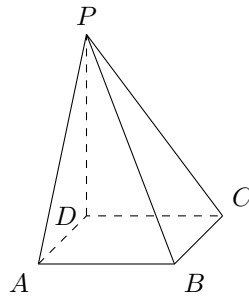
A. 1 个

B. 2 个

C. 3 个

D. 4 个

59. 在四棱锥  $P-ABCD$  中, 底面  $ABCD$  是边长为 6 的正方形,  $PD \perp$  平面  $ABCD$ ,  $PD = 8$ .

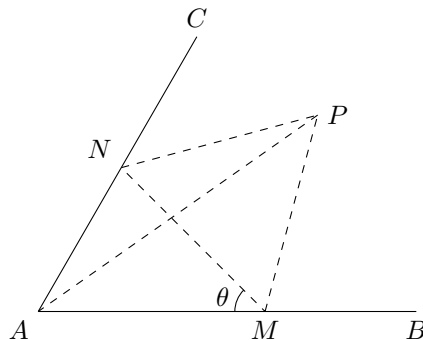


- (1) 求  $PB$  与平面  $ABCD$  所成角的大小;
- (2) 求异面直线  $PB$  与  $DC$  所成角的大小.

60. 复数  $z = (\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i)^2$  是一元二次方程  $mx^2 + nx + 1 = 0 (m, n \in \mathbf{R})$  的一个根.

- (1) 求  $m$  和  $n$  的值;
- (2) 若  $(m + ni)\bar{u} + u = z (u \in \mathbf{C})$ , 求  $u$ .

61. 如图, 经过村庄  $A$  有两条夹角为  $60^\circ$  的公路  $AB$ 、 $AC$ , 根据规划拟在两条公路之间的区域内建一工厂  $P$ , 分别在两条公路边上建两个仓库  $M$ 、 $N$  (异于村庄  $A$ ), 要求  $PM = PN = MN = 2$  (单位: 千米). 记  $\angle MN = \theta$ .



(1) 将  $AN$ 、 $AM$  用含  $\theta$  的关系式表示出来;

(2) 如何设计 (即  $AN$ 、 $AM$  为多长时), 使得工厂产生的噪声对居民的影响最小 (即工厂与村庄的距离  $AP$  最大)?

62. 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$  的左、右焦点分别为  $F_1$ 、 $F_2$ .

(1) 点  $P$  在椭圆  $C$  上运动 (点  $P$  不在  $x$  轴上), 设  $F_2$  关于  $\angle F_1PF_2$  的外角平分线所在直线的对称点为  $Q$ , 求  $Q$  的轨迹方程;

(2) 设  $M$ 、 $N$  分别是曲线  $C$  上的两个不同点, 且点  $M$  在第一象限, 点  $N$  在第三象限, 若  $\overrightarrow{OM} + 2\overrightarrow{ON} = 2\overrightarrow{OF_1}$ ,  $O$  为坐标原点, 求直线  $MN$  的斜率;

(3) 过点  $S(0, -\frac{1}{3})$  的动直线  $l$  交曲线  $C$  于  $A$ 、 $B$  两点, 在  $y$  轴上是否存在定点  $T$ , 使以  $AB$  为直径的圆恒过这个点? 若存在, 求出点  $T$  的坐标; 若不存在, 请说明理由.

63. 已知无穷数列  $\{a_n\} (a_n \in \mathbf{Z})$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 记  $S_1$ 、 $S_2$ 、 $\dots$ 、 $S_n$  中奇数的个数为  $b_n$ .

(1) 若  $a_n = n$ , 请写出数列  $\{b_n\}$  的前 5 项;

(2) 求证: “ $a_1$  为奇数,  $a_i (i = 2, 3, 4, \dots)$  均为偶数” 是 “数列  $\{b_n\}$  是单调递增数列” 的充分不必要条件;

(3) 若  $a_i = b_i, i = 1, 2, 3, \dots$ , 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式.

64. 函数  $f(x) = 3 \cos 2x + 1$  的最小值为\_\_\_\_\_.

65. 函数  $f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{3+x}}$  的定义域为\_\_\_\_\_.

66. 若集合  $A = \{2, 4, 6, 8\}$ ,  $B = \{x | x^2 - 4x \leq 0\}$ , 则  $A \cap B =$ \_\_\_\_\_.

67. 已知函数  $g(x)$  的图像与函数  $f(x) = \log_2(3^x - 1)$  的图像关于直线  $y = x$  对称, 则  $g(3) =$ \_\_\_\_\_.

68. 设复数  $z = \begin{vmatrix} \cos \alpha & i \\ \sin \alpha & \sqrt{2} + i \end{vmatrix}$  ( $i$  为虚数单位), 若  $|z| = \sqrt{2}$ , 则  $\tan 2\alpha =$ \_\_\_\_\_.

69. 设  $\triangle ABC$  的内角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ , 若  $b = 2\sqrt{3}$ ,  $c = 8$ ,  $A = 30^\circ$ , 则  $\sin C =$ \_\_\_\_\_.

70. 已知点  $A(3, -2)$ , 点  $P$  满足线性约束条件  $\begin{cases} x + 2 \geq 0, \\ y - 1 \leq 0, \\ x - 2y \leq 4, \end{cases}$  设  $O$  为坐标原点, 则  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP}$  的最大值为\_\_\_\_\_.

71. 若函数  $f(x) = \log_2(2^x + 1) + kx$  是偶函数, 则  $k =$ \_\_\_\_\_.

72. 已知等边  $\triangle ABC$  的边长为  $2\sqrt{3}$ , 点  $P$  是其外接圆上的一个动点, 则  $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

73. 已知函数  $f(x) = \cos(2x - \frac{\pi}{6})$ , 若对于任意的  $x_1 \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ , 总存在  $x_2 \in [m, n]$ , 使得  $f(x_1) + f(x_2) = 0$ , 则  $|m - n|$  的最小值为\_\_\_\_\_.

74. 已知  $AB$  为单位圆  $O$  的一条弦,  $P$  为单位圆  $O$  上的点, 若  $f(\lambda) = |\overrightarrow{AP} - \lambda \overrightarrow{AB}| (\lambda \in \mathbf{R})$  的最小值为  $m$ , 当点  $P$  在单位圆上运动时,  $m$  的最大值为  $\frac{4}{3}$ , 则线段  $AB$  长度为\_\_\_\_\_.

75. 在数列  $\{a_n\}$  中,  $a_1 = 3$ ,  $a_{n+1} = 1 + a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_n$ , 记  $T_n$  为数列  $\{\frac{1}{a_n}\}$  的前  $n$  项和, 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n =$ \_\_\_\_\_.

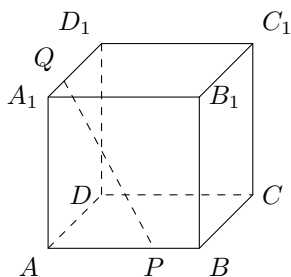
76. 若  $O$  为坐标原点,  $P$  是直线  $x - y + 2 = 0$  上的动点, 则  $|OP|$  的最小值为 ( ).

- A.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$                       B.  $\sqrt{2}$                       C.  $\sqrt{3}$                       D. 2

77. 若  $|x - a| \leq 1$  成立的一个充分不必要条件是  $1 \leq x \leq 2$ , 则实数  $a$  的取值范围是 ( ).

- A.  $1 \leq a \leq 2$                       B.  $a \geq 1$                       C.  $a \leq 2$                       D.  $a \geq 1$  或  $a \leq 2$

78. 在正方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中,  $P$ 、 $Q$  两点分别从点  $B$  和点  $A_1$  出发, 以相同的速度在棱  $BA$  和  $A_1D_1$  上运动至点  $A$  和点  $D_1$ , 在运动过程中, 直线  $PQ$  与平面  $ABCD$  所成角  $\theta$  的变化范围为 ( ).



- A.  $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}]$                       B.  $[\arctan \frac{\sqrt{2}}{2}, \arctan \sqrt{2}]$   
C.  $[\frac{\pi}{4}, \arctan \sqrt{2}]$                       D.  $[\arctan \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{2}]$

79. 已知函数  $f(x) = m \cdot 2^x + x^2 + nx$ , 记集合  $A = \{x | f(x) = 0, x \in \mathbf{R}\}$ , 集合  $B = \{x | f(f(x)) = 0, x \in \mathbf{R}\}$ . 若  $A = B$ , 且  $A$ 、 $B$  都不是空集, 则  $m + n$  的取值范围是 ( ).

- A.  $[0, 4)$                       B.  $[-1, 4)$                       C.  $[-3, 5]$                       D.  $[0, 7)$

80. 已知函数  $f(x) = 2 \cos^2 x + 2\sqrt{3} \sin x \cos x$ .

(1) 求  $f(x)$  的最大值和最小正周期  $T$ ;

(2) 在  $\triangle ABC$  中, 内角  $A$ 、 $B$ 、 $C$  所对的边分别为  $a$ 、 $b$ 、 $c$ , 已知  $f(\frac{A}{2}) = 3$ , 且  $a = 1$ , 求  $\triangle ABC$  面积的最大值.

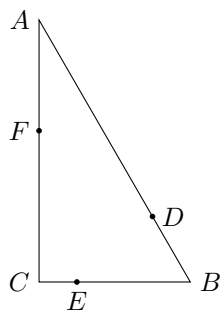
81. 已知函数  $f(x) = a - \frac{4}{3^x + 1}$  ( $a$  为实常数).

(1) 讨论函数  $f(x)$  的奇偶性, 并说明理由;

(2) 当  $f(x)$  为奇函数时, 对任意的  $x \in [1, 5]$ , 不等式  $f(x) \geq \frac{u}{3^x}$  恒成立, 求实数  $u$  的最大值.

82. 如图, 某公园有三条观光大道  $AB$ 、 $BC$ 、 $CA$  围成直角三角形, 其中直角边  $BC = 200\text{m}$ , 斜边  $AB = 400\text{m}$ , 现有甲、乙、丙三位小朋友分别在  $AB$ 、 $BC$ 、 $AC$  大道上嬉戏, 所在位置分别记为点  $D$ 、 $E$ 、 $F$ .

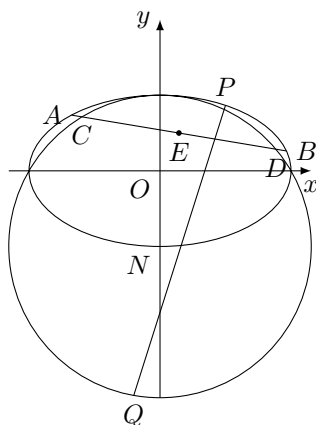




(1) 若甲乙都以每分钟 100m 的速度从点  $B$  出发在各自的大道上奔走, 到大道的另一端时即停, 乙比甲迟 2 分钟出发, 当乙出发 1 分钟后, 求此时甲乙两人之间的距离;

(2) 设  $\angle CEF = \theta$ , 乙丙之间的距离是甲乙之间距离的 2 倍, 且  $\angle DEF = \frac{\pi}{3}$ , 请将甲乙之间的距离  $y$  表示为  $\theta$  的函数, 并求甲乙之间的最小距离.

83. 如图, 已知椭圆  $M: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  经过圆  $N: x^2 + (y+1)^2 = 4$  与  $x$  轴的两个交点和与  $y$  轴正半轴的交点.



(1) 求椭圆  $M$  的方程;

(2) 若点  $P$  为椭圆  $M$  上的动点, 点  $Q$  为圆  $N$  上的动点, 求线段  $PQ$  长的最大值;

(3) 若不平行于坐标轴的直线  $L$  交椭圆  $M$  于  $A$ 、 $B$  两点, 交圆  $N$  于  $C$ 、 $D$  两点, 且满足  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DB}$ , 求证: 线段  $AB$  的中点  $E$  在定直线上.

84. 已知函数  $f(x)$  的定义域为  $D$ , 若存在实常数  $\lambda$  及  $a (a \neq 0)$ , 对任意  $x \in D$ , 当  $x+a \in D$  且  $x-a \in D$  时, 都有  $f(x+a) + f(x-a) = \lambda f(x)$  成立, 则称函数  $f(x)$  具有性质  $M(\lambda, a)$ .

(1) 判断函数  $f(x) = x^2$  是否具有性质  $M(\lambda, a)$ , 并说明理由;

(2) 若函数  $g(x) = \sin 2x + \sin x$  具有性质  $M(\lambda, a)$ , 求  $\lambda$  及  $a$  应满足的条件;

(3) 已知定义域为  $\mathbf{R}$  的函数  $y = h(x)$  不存在零点, 且具有性质  $M(t + \frac{1}{t}, t)$  (其中  $t > 0, t \neq 1$ ), 记  $a_n = h(n) (n \in \mathbf{N}^*)$ , 求证: 数列  $\{a_n\}$  为等比数列的充要条件是  $\frac{a_2}{a_1} = t$  或  $\frac{a_2}{a_1} = \frac{1}{t}$ .

85. 已知  $\tan \alpha = \frac{1}{2}$ , 则  $\tan 2\alpha =$ \_\_\_\_\_.

86. 不等式  $\frac{1}{x-1} > 1$  的解集为\_\_\_\_\_.
87. 在  $(x - \frac{1}{\sqrt[3]{x}})^6$  的二项展开式中,  $x^2$  项的系数为\_\_\_\_\_.
88. 已知球的体积为  $\frac{4}{3}\pi$ , 则该球的左视图所表示图形的面积为\_\_\_\_\_.
89. 已知圆的方程为  $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0$ , 则圆心到直线  $l: 3x + 4y + 4 = 0$  的距离  $d =$ \_\_\_\_\_.
90. 若关于  $x$  的实系数一元二次方程  $x^2 - bx + c = 0$  的一根为  $1 - i$  ( $i$  为虚数单位), 则  $b + c =$ \_\_\_\_\_.
91. 已知  $m \in \mathbf{R}$ , 若直线  $l_1: mx + y + 1 = 0$  与直线  $l_2: 9x + my + 2m + 3 = 0$  平行, 则  $m =$ \_\_\_\_\_.
92. 已知实数  $x, y$  满足约束条件  $\begin{cases} x + 2y \geq 3, \\ 2x + y \geq 3, \\ x \geq 0, y \geq 0, \end{cases}$  则  $z = x + y$  的最小值是\_\_\_\_\_.
93. 设  $f(x)$  是定义在  $\mathbf{R}$  上的奇函数, 当  $x > 0$  时,  $f(x) = a^x + b$  ( $0 < a < 1, b \in \mathbf{R}$ ), 若  $f(x)$  存在反函数, 则  $b$  的取值范围是\_\_\_\_\_.
94. 上海某高校哲学专业的 4 名研究生到指定的 4 所高级中学宣讲习近平新时代中国特色社会主义思想. 若他们每人都随机地从 4 所学校选择一所, 则 4 人中至少有 2 人选择到同一所学校的概率是\_\_\_\_\_ (结果用最简分数表示).
95. 在  $\triangle ABC$  中, 已知  $AB = 1, AC = 2, \angle A = 120^\circ$ , 若点  $P$  是  $\triangle ABC$  所在平面上一点, 且满足  $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \lambda \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{CP} = -1$ , 则实数  $\lambda$  的值为\_\_\_\_\_.
96. 已知定义在  $\mathbf{R}$  上的函数  $f(x)$  满足  $f(x+1) = 2f(x) + 1$ , 当  $x \in [0, 1)$  时,  $f(x) = x^3$ . 设  $f(x)$  在区间  $[n, n+1)$  ( $n \in \mathbf{N}^*$ ) 上的最小值为  $a_n$ , 若存在  $n \in \mathbf{N}^*$ , 使得  $\lambda(a_n + 1) < 2n - 7$  成立, 则实数  $\lambda$  的取值范围是\_\_\_\_\_.
97. 下列以  $t$  为参数的参数方程中, 其表示的曲线与方程  $xy = 1$  表示的曲线完全一致的是 ( ).
- A.  $\begin{cases} x = t^{\frac{1}{2}}, \\ y = t^{-\frac{1}{2}} \end{cases}$       B.  $\begin{cases} x = |t|, \\ y = \frac{1}{|t|} \end{cases}$       C.  $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sec t \end{cases}$       D.  $\begin{cases} x = \tan t, \\ y = \cot t \end{cases}$
98. 已知函数  $f(x) = \sin 2x, x \in [a, b]$ , 则 “ $b - a \geq \frac{\pi}{2}$ ” 是 “ $f(x)$  的值域为  $[-1, 1]$ ” 的 ( ) 条件
- A. 充分不必要      B. 必要不充分      C. 充要      D. 既不充分也不必要
99. 某高校举行科普知识竞赛, 所有参赛的 500 名选手成绩的平均数为 82, 方差为 0.82, 则下列四个数据中不可能是参赛选手成绩的是 ( ).
- A. 60      B. 70      C. 80      D. 100

100. 设数列  $\{a_n\}$ , 若存在常数  $t$ , 对任意小的正数  $s$ , 总存在正整数  $n_0$ , 当  $n \geq n_0$  时,  $|a_n - t| < s$ , 则数列  $\{a_n\}$  为收敛数列. 下列关于收敛数列说法正确的是 ( ).

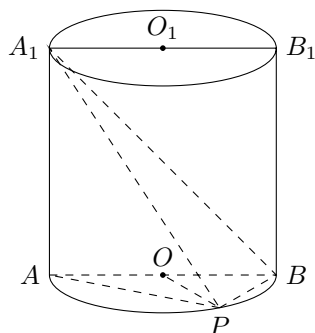
A. 若等比数列  $\{a_n\}$  是收敛数列, 则公比  $q \in (0, 1)$

B. 等差数列不可能是收敛数列

C. 设公差为  $d$  的等差数列  $\{a_n\}$  前  $n$  项和为  $S_n (S_n \neq 0)$ , 则数列  $\{\frac{1}{S_n}\}$  一定是收敛数列

D. 设数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 满足  $a_1 = 1, S_{n+1} = a_n + 1$ , 则数列  $\{a_n\}$  是收敛数列

101. 如图, 已知  $AB$  为圆柱  $OO_1$  的底面圆  $O$  的一条直径,  $P$  为圆周上的一点,  $OA = 2, \angle BOP = 60^\circ$ , 圆柱  $OO_1$  的表面积为  $24\pi$ .



(1) 求三棱锥  $A_1 - APB$  的体积;

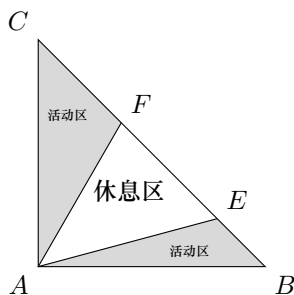
(2) 求直线  $AP$  与平面  $A_1PB$  所成的角的大小.

102. 已知  $a$  为实数, 函数  $f(x) = x|x - a| - a, x \in \mathbf{R}$ .

(1) 当  $a = 2$  时, 求函数  $f(x)$  的单调递增区间;

(2) 若对任意  $x \in (0, 1), f(x) < 0$  恒成立, 求  $a$  的取值范围.

103. 某动物园喜迎虎年的到来, 拟用一块形如直角三角形  $ABC$  的地块建造小老虎的休息区和活动区. 如图,  $\angle BAC = 90^\circ, AB = AC = 20$ (单位: 米),  $E, F$  为  $BC$  上的两点, 且  $\angle EAF = 45^\circ, \triangle AEF$  区域为休息区,  $\triangle ABE$  和  $\triangle ACF$  区域均为活动区. 设  $\angle EAB = \alpha (0 < \alpha < 45^\circ)$ .



(1) 求  $AE, AF$  的长; (用  $\alpha$  的代数式表示) (2) 为了使小老虎能健康成长, 要求所建造的活动区面积尽可能大 (即休息区尽可能小). 当  $\alpha$  为多少时, 活动区的面积最大? 最大面积活动区为多少?

104. 在平面直角坐标系中, 已知点  $A(0, \sqrt{2}), B(0, -\sqrt{2})$ , 动点  $C(x, y)$  关于直线  $y = x$  的对称点为  $D$ , 且  $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}x^2$ , 动点  $C$  的轨迹为曲线  $E$ .

- (1) 求曲线  $E$  的方程;
- (2) 已知动点  $P$  在曲线  $E$  上, 点  $Q$  在直线  $y = 2\sqrt{2}$  上, 且  $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = 0$ , 求线段  $PQ$  长的最小值;
- (3) 过点  $(-\sqrt{2}, 0)$  且不垂直于  $x$  轴的直线交曲线  $E$  于  $M$ 、 $N$  两点, 点  $M$  关于  $x$  轴的对称点为  $M'$ , 试问: 在  $x$  轴上是否存在一定点  $T$ , 使得  $M'$ 、 $N$ 、 $T$  三点共线? 若存在, 求出定点  $T$  的坐标; 若不存在, 说明理由.
105. 对于数列  $\{a_n\}$ , 记  $V(n) = |a_2 - a_1| + |a_3 - a_2| + \cdots + |a_n - a_{n-1}| (n > 1, n \in \mathbf{N}^*)$ .
- (1) 若数列  $\{a_n\}$  通项公式为:  $a_n = \frac{1 + (-1)^n}{2} (n \in \mathbf{N}^*)$ , 求  $V(5)$ ;
- (2) 若数列  $\{a_n\}$  满足:  $a_1 = a$ ,  $a_n = b$ , 且  $a > b$ , 求证:  $V(n) = a - b$  的充分必要条件是  $a_{i+1} \leq a_i (i = 1, 2, \cdots, n-1)$ ;
- (3) 已知  $V(2022) = 2022$ , 若  $y_t = \frac{1}{t}(a_1 + a_2 + \cdots + a_t)$ ,  $t = 1, 2, \cdots, 2022$ , 求  $|y_2 - y_1| + |y_3 - y_2| + \cdots + |y_{2022} - y_{2021}|$  的最大值.
106. 已知集合  $A = \{1, 3, m\}$ ,  $B = \{3, 5\}$ , 且  $B \subseteq A$ , 则实数  $m$  的值是\_\_\_\_\_.
107. 函数  $f(x) = \sqrt{1 - \frac{2}{x}}$  的定义域是\_\_\_\_\_.
108. 函数  $y = 2^x (x \geq 2)$  的反函数是\_\_\_\_\_.
109. 如果圆锥的底面积为  $\pi$ , 母线长为 2, 那么该圆锥的高为\_\_\_\_\_.
110. 二项式  $(\sqrt[3]{x} - \frac{2}{x})^8$  的展开式中的常数项为\_\_\_\_\_.
111. 某班从 4 位男生和 3 位女生志愿者选出 4 人参加校运会的点名签到工作, 则选出的志愿者中既有男生又有女生的概率是\_\_\_\_\_ (结果用最简分数表示).
112. 在复平面内, 三点  $A$ 、 $B$ 、 $C$  分别对应复数  $z_A$ 、 $z_B$ 、 $z_C$ , 若  $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = 1 + \frac{4}{3}i$ , 则  $\triangle ABC$  的三边长之比为\_\_\_\_\_.
113. 已知函数  $f(x) = \sin(\omega x + \frac{\pi}{6})$ ,  $\omega > 0$ , 若函数  $f(x)$  满足  $f(x) = f(x + 12)$ ,  $x \in \mathbf{R}$  恒成立, 且在“任意两个相邻奇数所形成的闭区间”内总存在至少两个零点, 则  $\omega$  的最小值为\_\_\_\_\_.
114. 在  $\triangle ABC$  中, 角  $A$ 、 $B$ 、 $C$  所对的边分别为  $a$ 、 $b$ 、 $c$ , 如果对任意的实数  $\lambda$ ,  $|\overrightarrow{BA} - \lambda \overrightarrow{BC}| \geq |\overrightarrow{BC}|$  恒成立, 则  $\frac{c}{b} + \frac{b}{c}$  的最大值是\_\_\_\_\_.
115. 在边长为 1 的正方形  $ABCD$  中,  $P$ 、 $Q$  分别为边  $BC$ 、 $CD$  上的动点, 如果  $\triangle PCQ$  的周长为定值 2, 那么  $\triangle PAQ$  的外接圆直径的最小值为\_\_\_\_\_.
116. 已知平面直角坐标系中两点  $A(a_1, a_2)$ 、 $B(b_1, b_2)$ , 有  $S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2}|a_1 b_2 - a_2 b_1|$ . 设  $(x_1, y_1)$ 、 $(x_2, y_2)$ 、 $(x_3, y_3)$  是平面曲线  $x^2 + y^2 = 2x - 4y$  上任意三点, 则  $T = x_1 y_2 - x_2 y_1 + x_2 y_3 - x_3 y_2$  的最大值为\_\_\_\_\_.
117. 对实数  $x \in \mathbf{R}$ , 函数  $f(x)$  满足:  $f(x+1) = \sqrt{f(x) - f^2(x)} + \frac{1}{2}$ ,  $a_n = f^2(n) - f(n)$ , 数列  $\{a_n\}$  的前 15 项和为  $-\frac{31}{16}$ , 数列  $\{c_n\}$  满足  $c_n + c_{n+1} = [f(2019)]^n$ , 若数列  $\{c_n\}$  的前  $n$  项和  $S_n$  的极限存在, 则  $c_1 =$ \_\_\_\_\_.

118. 关于  $x$ 、 $y$  的二元一次方程组  $\begin{cases} 3x + 4y = 1, \\ x - 3y = 10 \end{cases}$  的增广矩阵为 ( ).

- A.  $\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & -3 & 10 \end{pmatrix}$  B.  $\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & -3 & -10 \end{pmatrix}$  C.  $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & -3 & 10 \end{pmatrix}$  D.  $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 10 \end{pmatrix}$

119. 已知函数  $f(x) = \cos(3x + \varphi)$  满足  $f(x) \leq f(1)$  恒成立, 则 ( ).

- A. 函数  $f(x-1)$  一定是奇函数 B. 函数  $f(x+1)$  一定是奇函数  
C. 函数  $f(x-1)$  一定是偶函数 D. 函数  $f(x+1)$  一定是偶函数

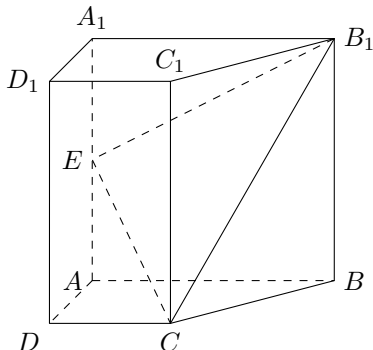
120. 如果一个几何体绕着一条直线旋转  $\theta$  角与原几何体重合, 其中  $0^\circ < \theta \leq 180^\circ$ , 称该直线为该几何体的一条旋转轴. 正四面体的不同旋转轴有 ( ) 条.

- A. 3 B. 4 C. 6 D. 7

121. 已知点  $P$  为椭圆  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$  上的任意一点, 点  $F_1$ 、 $F_2$  分别为该椭圆的上下焦点, 设  $\alpha = \angle PF_1F_2$ ,  $\beta = \angle PF_2F_1$ , 则  $\sin \alpha + \sin \beta$  的最大值为 ( ).

- A.  $\frac{3\sqrt{7}}{7}$  B.  $\frac{4\sqrt{7}}{7}$  C.  $\frac{8}{9}$  D.  $\frac{3}{2}$

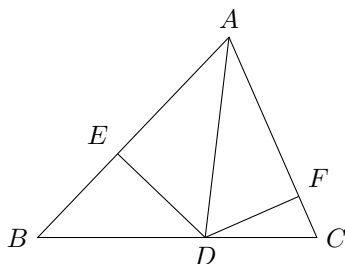
122. 如图, 四棱柱  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中, 侧棱  $AA_1 \perp$  底面  $ABCD$ ,  $AB \parallel CD$ ,  $AB \perp AD$ ,  $AD = DC = 1$ ,  $AA_1 = AB = 2$ ,  $E$  为棱  $AA_1$  的中点.



(1) 求二面角  $B_1 - CE - C_1$  的正弦值;

(2) 设点  $M$  为线段  $C_1E$  上, 且直线  $AM$  与平面  $ADD_1A_1$  所成角正弦值为  $\frac{\sqrt{2}}{6}$ , 求线段  $AM$  的长.

123. 在锐角  $\triangle ABC$  中, 已知  $\cos A = \frac{5}{13}$ ,  $S_{\triangle ABC} = 6$ , 若点  $D$  是线段  $BC$  上一点 (不含端点), 过  $D$  作  $DE \perp AB$  于  $E$ ,  $DF \perp AC$  于  $F$ .



(1) 求  $BC$  的取值范围;

(2) 问点  $D$  在何处时,  $\triangle DEF$  的面积最大, 最大值为多少?

124. 已知各项都不为零的无穷数列  $\{a_n\}$  满足:  $a_{n+1}a_n + a_{n+1} - a_n = 0, n \in \mathbf{N}^*$ .

(1) 证明  $\{\frac{1}{a_n}\}$  为等差数列, 并求  $a_1 = 1$  时数列  $\{a_n\}$  中的最大项;

(2) 若  $a_{2018}$  为数列  $\{a_n\}$  中的最小项, 求  $a_1$  的取值范围.

125. 已知曲线  $\Gamma: F(x, y) = 0$ , 对坐标平面上任意一点  $P(x, y)$ , 定义  $F[P] = F(x, y)$ . 若两点  $P, Q$ , 满足  $F[P] \cdot F[Q] > 0$ , 称点  $P, Q$  在曲线  $\Gamma$  同侧; 若  $F[P] \cdot F[Q] < 0$ , 称点  $P, Q$  在曲线  $\Gamma$  两侧.

(1) 直线  $l: kx - y = 0$  过原点, 线段  $AB$  上所有点都在直线  $l$  同侧, 其中  $A(-1, 1), B(2, 3)$ , 求直线  $l$  的倾斜角的取值范围;

(2) 已知曲线  $F(x, y) = (3x + 4y - 5) \cdot \sqrt{4 - x^2 - y^2} = 0$ ,  $O$  为坐标原点, 求点集  $S = \{P | F[P] \cdot F[O] > 0\}$  的面积;

(3) 记到点  $(0, 1)$  与到  $x$  轴距离和为 5 的点的轨迹为曲线  $C$ , 曲线  $\Gamma: F(x, y) = x^2 + y^2 - y - a = 0$ , 若曲线  $C$  上总存在两点  $M, N$  在曲线  $\Gamma$  两侧, 求曲线  $C$  的方程与实数  $a$  的取值范围.

126. 设函数  $f(x)$  在  $[1, +\infty)$  上有定义, 实数  $a$  和  $b$  满足  $1 \leq a < b$ , 若  $f(x)$  在区间  $(a, b]$  上不存在最小值, 则称  $f(x)$  在区间  $(a, b]$  上具有性质  $P$ .

(1) 当  $f(x) = x^2 + cx$ , 且  $f(x)$  在区间  $(1, 2]$  上具有性质  $P$ , 求实数  $c$  的取值范围;

(2) 已知  $f(x+1) = f(x) + 1 (x \geq 1)$ , 且当  $1 \leq x < 2$  时,  $f(x) = 1 - x$ , 判别  $f(x)$  在区间  $(1, 4]$  上是否具有性质  $P$ ;

(3) 若对于满足  $1 \leq a < b$  的任意实数  $a$  和  $b$ ,  $f(x)$  在区间  $(a, b]$  上具有性质  $P$ , 且对于任意  $n \in \mathbf{N}^*$ , 当  $x \in (n, n+1)$  时, 有  $|f(n) - f(x)| + |f(x) - f(n+1)| = |f(n) - f(n+1)|$ , 证明: 当  $x \geq 1$  时,  $f(2x) > f(x)$ .

127. 在复平面内, 复数  $\frac{2}{1+i}$  对应的点与原点的距离是\_\_\_\_\_.

128. 将参数方程  $\begin{cases} x = \cos \theta, \\ y = 2 \sin \theta \end{cases} (\theta \in [0, \pi])$  化为普通方程, 所得方程是\_\_\_\_\_.

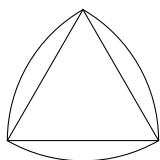
129. 已知向量  $\vec{a} = (1, 4, -5)$ ,  $\vec{b} = (1, 1, 4)$ , 则  $\vec{a}$  在  $\vec{b}$  方向上的投影是\_\_\_\_\_.

130. 若函数  $y = \tan 2x \cdot (2 \cos^2 x - 1)$  的定义域是\_\_\_\_\_.

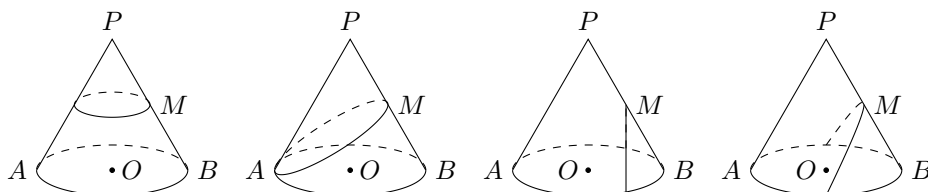
131. 在等差数列  $\{a_n\}$  中, 已知  $a_4 + a_8 = 16$ , 则该数列前 11 项和  $S_{11} =$ \_\_\_\_\_.

132. 在  $(\sqrt[3]{x} + \frac{2}{x})^n$  的二项展开式中, 所有项的系数之和为 81, 则其常数项为\_\_\_\_\_.

133. 在均匀分布的条件下, 某些概率问题可转化为几何图形的面积比来计算, 勒洛三角形是由德国机械工程专家勒洛首先发现, 作法为: 以等边三角形的每个顶点为圆心, 以边长为半径, 在另两个顶点间作一段弧, 三段弧围成的曲边三角形就是勒洛三角形, 在勒洛三角形中随机取一点, 此点取自正三角形的概率为\_\_\_\_\_.



134. 平面上整点 (横、纵坐标都为整数的点) 到直线  $y = \frac{5}{3}x + \frac{4}{5}$  的距离的最小值是\_\_\_\_\_.
135. 设定义域为  $\mathbf{R}$  的函数  $f(x)$ 、 $g(x)$  都有反函数, 且函数  $f(x-1)$  和  $g^{-1}(x-3)$  图像关于直线  $y=x$  对称, 若  $g(5) = 2015$ , 则  $f(4) =$ \_\_\_\_\_.
136. 在  $\triangle ABC$  中,  $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sqrt{3} \cos B}{b}$ , 如果  $b = 2$ , 则  $\triangle ABC$  面积的最大值为\_\_\_\_\_.
137. 数列  $\{a_n\}$  中,  $a_1 = 2$ ,  $a_2 = 7$ ,  $a_{n+2}$  等于  $a_n \cdot a_{n+1}$  的个位数, 则  $a_{2019} =$ \_\_\_\_\_.
138. 已知函数  $f(x)$  满足: ① 对任意  $x \in (0, +\infty)$  恒有  $f(2x) = 2f(x)$  成立; ②  $x \in (1, 2]$  时,  $f(x) = 2 - x$ ; 若  $f(a) = f(2020)$ , 则满足条件的最小的正实数  $a$  是\_\_\_\_\_.
139. 给出下列命题, 其中正确的命题为 ( ).
- A. 若直线  $a$  和  $b$  共面, 直线  $b$  和  $c$  共面, 则  $a$  和  $c$  共面
  - B. 直线  $a$  与平面  $\alpha$  不垂直, 则  $a$  与平面  $\alpha$  内的所有直线都不垂直
  - C. 直线  $a$  与平面  $\alpha$  不平行, 则  $a$  与平面  $\alpha$  内的所有直线都不平行
  - D. 异面直线  $a$ 、 $b$  不垂直, 则过  $a$  的任何平面与  $b$  都不垂直
140. 已知平面向量  $\vec{OA}$ 、 $\vec{OB}$ 、 $\vec{OC}$  为三个单位向量, 且  $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 0$ , 若  $\vec{OC} = x\vec{OA} + y\vec{OB} (x, y \in \mathbf{R})$ , 则  $x + y$  的最大值为 ( ).
- A. 1                                      B.  $\sqrt{2}$                                       C.  $\sqrt{3}$                                       D. 2
141. 已知函数①  $f(x) = 3 \ln x$ ; ②  $f(x) = 3e^{\cos x}$ ; ③  $f(x) = 3e^x$ ; ④  $f(x) = 3 \cos x$ ; 其中对于  $f(x)$  定义域内的任意一个自变量  $x_1$  都存在唯一一个自变量  $x_2$ , 使  $\sqrt{f(x_1)f(x_2)} = 3$  成立的函数是 ( ).
- A. ③                                      B. ②③                                      C. ①②④                                      D. ④
142. 在圆锥  $PO$  中, 已知高  $PO = 2$ , 底面圆的直径  $AB = 8$ ,  $M$  为母线  $PB$  的中点. 根据圆锥曲线的定义, 下列四个图中的截面边界曲线分别为圆 (截面平行于底面)、椭圆 (椭圆长轴为线段  $AM$ )、双曲线的一部分 (双曲线所在平面垂直于  $AB$ ) 及抛物线的一部分 (抛物线对称轴为  $MO$  所在直线), 下面四个命题:
- ① 圆的面积为  $4\pi$ ; ② 椭圆的长轴为  $\sqrt{37}$ ; ③ 双曲线两渐近线的夹角为  $\arcsin \frac{3}{5}$ ; ④ 抛物线中焦点到准线的距离为  $\frac{8\sqrt{5}}{5}$  中, 正确的个数为 ( ).



A. 1 个

B. 2 个

C. 3 个

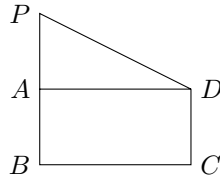
D. 4 个

143. 已知复数  $z_1 = \sin 2x + \lambda i$ ,  $z_2 = m + (m - \sqrt{3} \cos 2x)i$  ( $\lambda, m, x \in \mathbf{R}$ ), 且  $z_1 = z_2$ .

(1) 若  $\lambda = 0$  且  $0 < x < \pi$ , 求  $x$  的值;

(2) 设  $\lambda = f(x)$ , 求  $f(x)$  的最小正周期和单调递减区间.

144. 如图, 在直角梯形  $PBCD$  中,  $PB \parallel DC$ ,  $DC \perp BC$ ,  $PB = BC = 2CD = 2$ , 点  $A$  是  $PB$  的中点, 现沿  $AD$  将平面  $PAD$  折起, 设  $\angle PAB = \theta$ .



(1) 当  $\theta$  为直角时, 求异面直线  $PC$  与  $BD$  所成角的大小;

(2) 当  $\theta$  为多少时, 三棱锥  $P-ABD$  的体积为  $\frac{\sqrt{2}}{6}$ .

145. 对于两个定义域相同的函数  $f(x)$ 、 $g(x)$ , 若存在实数  $m$ 、 $n$ , 使  $h(x) = mf(x) + ng(x)$ , 则称函数  $h(x)$  是由“基函数  $f(x)$ 、 $g(x)$ ”生成的.

(1)  $f(x) = x^2 + 3x$  和  $g(x) = 3x + 4$  生成一个偶函数  $h(x)$ , 求  $h(2)$  的值;

(2) 若  $h(x) = 2x^2 + 3x - 1$  由  $f(x) = x^2 + ax$ ,  $g(x) = x + b$  ( $a, b \in \mathbf{R}$  且  $ab \neq 0$ ) 生成, 求  $a + 2b$  的取值范围.

146. 设抛物线  $y^2 = 4px$  ( $p > 0$ ) 的准线与  $x$  轴的交点为  $M$ , 过  $M$  作直线  $l$  交抛物线于  $A$ 、 $B$  两点.

(1) 求线段  $AB$  中点的轨迹方程;

(2) 若线段  $AB$  的垂直平分线交对称轴于  $N(x_0, 0)$ , 求  $x_0$  的取值范围;

(3) 若直线  $l$  的斜率依次取  $p, p^2, p^3, \dots, p^n, \dots$  时, 线段  $AB$  的垂直平分线与对称轴的交点依次为  $N_1, N_2, N_3, \dots, N_n, \dots$ , 当  $0 < p < 1$  时, 求:  $S = \frac{1}{|N_1 N_2|} + \frac{1}{|N_2 N_3|} + \frac{1}{|N_3 N_4|} + \dots + \frac{1}{|N_n N_{n+1}|} + \dots$  的值.

147. 给定无穷数列  $\{a_n\}$ , 若无穷数列  $\{b_n\}$  满足: 对任意  $n \in \mathbf{N}^*$ , 都有  $|b_n - a_n| \leq 1$ , 则称  $\{a_n\}$  与  $\{b_n\}$  “接近”.

(1) 设  $\{a_n\}$  是首项为 1, 公比为  $\frac{1}{2}$  的等比数列,  $b_n = a_{n+1} + 1$ ,  $n \in \mathbf{N}^*$ , 判断数列  $\{b_n\}$  是否与  $\{a_n\}$  接近, 并说明理由;

(2) 设数列  $\{a_n\}$  的前四项为:  $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 4, a_4 = 8$ ,  $\{b_n\}$  是一个与  $\{a_n\}$  接近的数列, 记集合  $M = \{x | x = b_i, i = 1, 2, 3, 4\}$ , 求  $M$  中元素的个数  $m$  的所有可能值;

(3) 已知  $\{a_n\}$  是公差为  $d$  的等差数列, 若存在数列  $\{b_n\}$  满足:  $\{b_n\}$  与  $\{a_n\}$  接近, 且在  $b_2 - b_1, b_3 - b_2, \dots, b_{201} - b_{200}$  中至少有 100 个为正数, 求  $d$  的取值范围.

148. 已知复数  $z$  满足  $z(1 + i^{2020}) = 2 - 4i$  (其中,  $i$  为虚数单位), 则  $z =$ \_\_\_\_\_.

149. 函数  $y = \arcsin(x + 1)$  的定义域是\_\_\_\_\_.

150. 计算行列式的值,  $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} =$ \_\_\_\_\_.



151. 已知双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的实轴与虚轴长度相等, 则  $C$  的渐近线方程是\_\_\_\_\_.

152. 已知无穷数列  $a_n = \frac{2}{(-3)^n}, n \in \mathbf{N}^*$ , 则数列  $\{a_n\}$  的各项和为\_\_\_\_\_.

153. 一个圆锥的表面积为  $\pi$ , 母线长为  $\frac{5}{6}$ , 则其底面半径为\_\_\_\_\_.

154. 某种微生物的日增长率为  $r$ , 经过  $n$  天后其数量由  $p_0$  变化为  $p$ , 并且满足方程  $p = p_0 e^{rn}$ . 实验检测, 这种微生物经过一周数量由 2.58 个单位增长到 14.86 个单位, 则增长率  $r =$ \_\_\_\_\_ (精确到 1%).

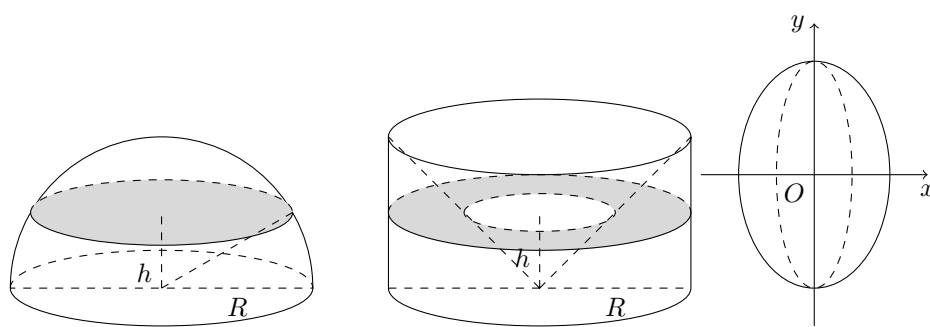
155. 已知  $(x - \frac{1}{2x})^n$  的展开式的常数项为第 6 项, 则常数项为\_\_\_\_\_.

156. 某医院 ICU 从 3 名男医生和 2 名女医生中任选 2 位赴武汉抗疫, 则选出的 2 位医生中至少有 1 位女医生的概率是\_\_\_\_\_.

157. 已知方程  $x^2 + tx + 1 = 0 (t \in \mathbf{R})$  的两个根是  $x_1, x_2$ , 若  $|x_1 - x_2| = 2\sqrt{2}$ , 则  $t =$ \_\_\_\_\_.

158. 已知  $O$  是坐标原点, 点  $A(-1, 1)$ , 若点  $M(x, y)$  为平面区域  $\begin{cases} x + y \geq 2, \\ x \leq 1, \\ y \leq 2, \end{cases}$  上的一个动点, 则  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OM}$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

159. 课本中介绍了应用祖暅原理推导棱锥体积公式的做法. 祖暅原理也可用来求旋转体的体积. 现介绍用祖暅原理求球体体积公式的做法: 可构造一个底面半径和高都与球半径相等的圆柱, 然后在圆柱内挖去一个以圆柱下底面圆心为顶点, 圆柱上底面为底面的圆锥, 用这样一个几何体与半球应用祖暅原理 (左图), 即可求得球的体积公式. 请研究和理解球的体积公式求法的基础上, 解答以下问题: 已知椭圆的标准方程为  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 1$ , 将此椭圆绕  $y$  轴旋转一周后, 得一橄榄状的几何体 (右图), 其体积等于\_\_\_\_\_.



160. 抛物线  $y = 4x^2$  的准线方程是 ( ).

A.  $x = -2$

B.  $x = -1$

C.  $y = -\frac{1}{8}$

D.  $y = -\frac{1}{16}$

161. 若函数  $f(x) = \sin x + a \cos x$  的图像关于直线  $x = \frac{\pi}{4}$  对称, 则  $a$  的值为 ( ).

A. 1

B. -1

C.  $\sqrt{3}$

D.  $-\sqrt{3}$

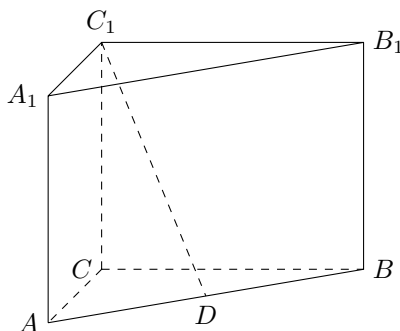
162. 已知  $\vec{a}, \vec{b}$  是平面内两个互相垂直的单位向量, 若向量  $\vec{c}$  满足  $(\vec{c} - \vec{a}) \cdot (\vec{c} - \vec{b}) = 0$ , 则  $|\vec{c}|$  的最大值是 ( ).

- A. 1                                      B. 2                                      C.  $\sqrt{2}$                                       D.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$

163. 已知命题: “若  $a, b$  为异面直线, 平面  $\alpha$  过直线  $a$  且与直线  $b$  平行, 则直线  $b$  与平面  $\alpha$  的距离等于异面直线  $a, b$  之间的距离” 为真命题. 根据上述命题, 若  $a, b$  为异面直线, 且它们之间的距离为  $d$ , 则空间中与  $a, b$  均异面且距离也均为  $d$  的直线  $c$  的条数为 ( ).

- A. 0 条                                      B. 1 条  
C. 多于 1 条, 但为有限条                                      D. 无数多条

164. 如图, 在直三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  中,  $\angle ACB = 90^\circ$ ,  $AB = 2AC = 2$ ,  $D$  是  $AB$  的中点.



(1) 若三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  的体积为  $3\sqrt{3}$ , 求三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  的高;

(2) 若  $C_1C = 2$ , 求二面角  $D - B_1C_1 - A_1$  的大小.

165. 已知函数  $f(x) = \sqrt{2}\sin(\omega x + \varphi)$ ,  $g(x) = \sqrt{2}\cos \omega x$ ,  $\omega > 0$ ,  $\varphi \in [0, \pi)$ , 它们的最小正周期为  $\pi$ .

(1) 若  $y = f(x)$  是奇函数, 求  $f(x)$  和  $g(x)$  在  $[0, \pi]$  上的公共递减区间  $D$ ;

(2) 若  $h(x) = f(x) + g(x)$  的一个零点为  $x = -\frac{\pi}{6}$ , 求  $h(x)$  的最大值.

166. 已知函数  $f(x) = ax + \log_2(2^x + 1)$ , 其中  $a \in \mathbf{R}$ .

(1) 根据  $a$  的不同取值, 讨论  $f(x)$  的奇偶性, 并说明理由;

(2) 已知  $a > 0$ , 函数  $f(x)$  的反函数为  $f^{-1}(x)$ , 若函数  $y = f(x) + f^{-1}(x)$  在区间  $[1, 2]$  上的最小值为  $1 + \log_2 3$ , 求函数  $f(x)$  在区间  $[1, 2]$  上的最大值.

167. 设椭圆  $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的右焦点为  $F(1, 0)$ , 短轴的一个端点  $B$  到  $F$  的距离等于焦距. (1) 求椭圆  $\Gamma$  的标准方程;

(2) 设  $C, D$  是四条直线  $x = \pm a, y = \pm b$  所围成的矩形在第一、第二象限的两个顶点,  $P$  是椭圆  $\Gamma$  上任意一点, 若  $\overrightarrow{OP} = m\overrightarrow{OC} + n\overrightarrow{OD}$ , 求证:  $m^2 + n^2$  为定值;

(3) 过点  $F$  的直线  $l$  与椭圆  $\Gamma$  交于不同的两点  $M, N$ , 且满足  $\triangle BFM$  与  $\triangle BFN$  的面积的比值为 2, 求直线  $l$  的方程.

168. 定义: 设  $\{a_n\}$  是无穷数列, 若存在正整数  $k$  使得对任意  $n \in \mathbf{N}^*$ , 均有  $a_{n+k} > a_n$  ( $a_{n+k} < a_n$ ), 则称  $\{a_n\}$  是近似递增 (减) 数列, 其中  $k$  叫近似递增 (减) 数列  $\{a_n\}$  的间隔数.

(1) 若  $a_n = n + (-1)^n$ ,  $\{a_n\}$  是不是近似递增数列? 并说明理由;

(2) 已知数列  $\{a_n\}$  的通项公式为  $a_n = \frac{1}{(-2)^{n-1}} + a$ , 其前  $n$  项的和为  $S_n$ , 若 2 是近似递增数列  $\{S_n\}$  的间隔数, 求  $a$  的取值范围;

(3) 已知  $a_n = -\frac{n}{2} + \sin n$ , 证明  $\{a_n\}$  是近似递减数列, 并且 4 是它的最小间隔数.

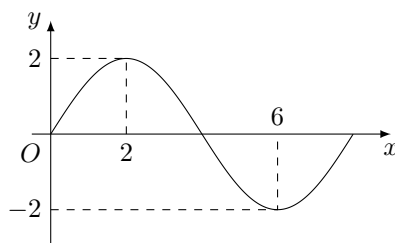
169. 集合  $A = \{x | x^2 - 2x < 0\}$ ,  $B = \{x | |x| < 1\}$ , 则  $A \cup B =$ \_\_\_\_\_.

170. 已知函数  $f(x) = \log_3(\frac{4}{x+2})$ , 则方程  $f^{-1}(x) = 4$  的解  $x =$ \_\_\_\_\_.

171. 等比数列  $\{a_n\}(n \in \mathbb{N}^*)$  中, 若  $a_2 = \frac{1}{16}$ ,  $a_5 = \frac{1}{2}$ , 则  $a_8 =$ \_\_\_\_\_.

172. 若方程  $x^2 - 2x + 3 = 0$  的两个根为  $\alpha$  和  $\beta$ , 则  $|\alpha| + |\beta| =$ \_\_\_\_\_.

173. 函数  $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)(A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2})$  的部分图像如图所示, 则  $f(x) =$ \_\_\_\_\_.



174. 双曲线  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$  的焦点到渐近线的距离等于\_\_\_\_\_.

175. 在二项式  $(1+ax)^7(a \in \mathbb{R})$  的展开式中,  $x$  的系数为  $\frac{7}{3}$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a + a^2 + a^3 + \cdots + a^n)$  的值是\_\_\_\_\_.

176. 已知正四棱柱  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  的八个顶点都在同一球面上, 若  $AB = 1$ ,  $AA_1 = \sqrt{2}$ , 则  $A, C$  两点间的球面距离是\_\_\_\_\_.

177. 在  $\triangle ABC$  中, 已知  $AB = 1$ ,  $BC = 2$ , 若  $y = \begin{vmatrix} \cos C & \sin C \\ \sin C & \cos C \end{vmatrix}$ , 则  $y$  的最小值是\_\_\_\_\_.

178. 已知双曲线  $C: \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{8} = 1$ , 左、右焦点分别为  $F_1, F_2$ , 过点  $F_2$  作一直线与双曲线  $C$  的右支交于  $P, Q$  两点, 使得  $\angle F_1PQ = 90^\circ$ , 则  $\triangle F_1PQ$  的内切圆的半径  $r =$ \_\_\_\_\_.

179. 若函数  $f(x) = (1 + \sin x)^{2021} + (1 - \sin x)^{2021}$ , 其中  $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{2\pi}{3}$ , 则  $f(x)$  的最大值为\_\_\_\_\_.

180. 已知实数  $a, b$  使得不等式  $|ax^2 + bx + a| \leq x$  对任意  $x \in [1, 2]$  都成立, 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 点  $(a, b)$  形成的区域记为  $\Omega$ , 若圆  $x^2 + y^2 = r^2$  上的任一点都在  $\Omega$  中, 则  $r$  的最大值为\_\_\_\_\_.

181. 设  $z_1, z_2$  为复数, 下列命题一定成立的是 ( ).

A. 如果  $z_1^2 + z_2^2 = 0$ , 那么  $z_1 = z_2 = 0$

B. 如果  $|z_1| = |z_2|$ , 那么  $z_1 = \pm z_2$

C. 如果  $|z_1| \leq a$ ,  $a$  是正实数, 那么  $-a \leq z_1 \leq a$

D. 如果  $|z_1| = a$ ,  $a$  是正实数, 那么  $z_1 \cdot \overline{z_1} = a^2$

182. 下列命题为真命题的是 ( ).

- A. 若直线  $l$  与平面  $\alpha$  上的两条直线垂直, 则直线  $l$  与平面  $\alpha$  垂直
- B. 若两条直线同时垂直于一个平面, 则这两条直线平行
- C. 若两个平面同时垂直于第三个平面, 则这两个平面垂直
- D. 若直线  $l$  上的不同两点到平面  $\alpha$  的距离相等, 则直线  $l$  与平面  $\alpha$  平行

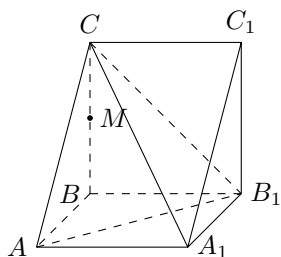
183. 若数列  $\{a_n\}$ 、 $\{b_n\}$  的通项公式分别为  $a_n = (-1)^{n+2020}a$ ,  $b_n = 2 + \frac{(-1)^{n+2019}}{n}$ , 且  $a_n < b_n$  对任意  $n \in \mathbb{N}^*$  恒成立, 则实数  $a$  的取值范围为 ( ).

- A.  $[-2, 1)$
- B.  $[-2, \frac{3}{2})$
- C.  $[-1, \frac{1}{2})$
- D.  $[-1, 1)$

184. 已知定义在实数集  $\mathbb{R}$  上的函数  $f(x)$  满足  $f(x+1) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - f^2(x)}$ , 则  $f(0) + f(2021)$  的最小值与最大值的和为 ( ).

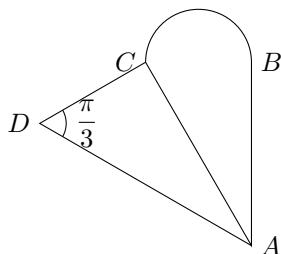
- A. 2
- B. 3
- C.  $\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}$
- D.  $\frac{5}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}$

185. 如图, 在直三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  中,  $BA \perp BC$ ,  $BA = BC = BB_1 = 2$ .



- (1) 求异面直线  $AB_1$  与  $A_1C_1$  所成角的大小;
- (2) 若  $M$  是棱  $BC$  的中点. 求点  $M$  到平面  $A_1B_1C$  的距离.

186. 随着生活水平的不断提高, 人们更加关注健康, 重视锻炼, 通过“小步道”, 走出“大健康”, 健康步道成为引领健康生活的一道亮丽风景线. 如图,  $A - B - C - A$  为某区的一条健康步道,  $AB$ 、 $AC$  为线段,  $\widehat{BC}$  是以  $BC$  为直径的半圆,  $AB = 2\sqrt{3}\text{km}$ ,  $AC = 4\text{km}$ ,  $\angle BAC = \frac{\pi}{6}$ .



- (1) 求  $\widehat{BC}$  的长度;
- (2) 为满足市民健康生活需要, 提升城市品位, 改善人居环境, 现计划新建健康步道  $A - D - C$  ( $B, D$  在  $AC$  两侧), 其中  $AD, CD$  为线段. 若  $\angle ADC = \frac{\pi}{3}$ , 求新建的健康步道  $A - D - C$  的路程最多可比原有健康步道  $A - B - C$  的路程增加多少长度 (精确到 0.01km)?

187. 已知椭圆  $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1$  上有两点  $P(-2, 1)$  及  $Q(2, -1)$ , 直线  $l: y = kx + b$  与椭圆交于  $A, B$  两点, 与线段  $PQ$  交于点  $C$  (异于  $P, Q$ ).

(1) 当  $k = 1$  且  $\overrightarrow{PC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CQ}$  时, 求直线  $l$  的方程;

(2) 当  $k = 2$  时, 求四边形  $PAQB$  面积的取值范围.

188. 在数列  $\{a_n\}$  中, 已知  $a_1 = 2, a_{n+1}a_n = 2a_n - a_{n+1} (n \in \mathbf{N}^*)$ .

(1) 证明: 数列  $\{\frac{1}{a_n} - 1\}$  为等比数列;

(2) 记  $b_n = \frac{a_n a_{n+1}}{2^n}$ , 数列  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ . 求使得  $S_n > 1.999$  的整数  $n$  的最小值;

(3) 是否存在正整数  $m, n, k$ , 且  $m < n < k$ , 使得  $a_m, a_n, a_k$  成等差数列? 若存在, 求出  $m, n, k$  的值; 若不存在, 请说明理由.

189. 设  $m$  为给定的实常数, 若函数  $y = f(x)$  在其定义域内存在实数  $x_0$ , 使得  $f(x_0 + m) = f(x_0) + f(m)$  成立, 则称函数  $f(x)$  为 “ $G(m)$  函数”.

(1) 若函数  $f(x) = 2^x$  为 “ $G(2)$  函数”, 求实数  $x_0$  的值;

(2) 若函数  $f(x) = \lg \frac{a}{x^2 + 1}$  为 “ $G(1)$  函数”, 求实数  $a$  的取值范围;

(3) 已知  $f(x) = x + b (b \in \mathbf{R})$  为 “ $G(0)$  函数”, 设  $g(x) = x|x - 4|$ . 若对任意的  $x_1, x_2 \in [0, t]$ , 当  $x_1 \neq x_2$  时, 都有  $\frac{g(x_1) - g(x_2)}{f(x_1) - f(x_2)} > 2$  成立, 求实数  $t$  的最大值.

190. 方程  $\log_3(2x + 1) = 2$  的解是\_\_\_\_\_.

191. 已知集合  $M = \{x | |x + 1| \leq 1\}$ ,  $N = \{-1, 0, 1\}$ , 则  $M \cap N =$ \_\_\_\_\_.

192. 若复数  $z_1 = a + 2i, z_2 = 2 + i (i \text{ 是虚数单位})$ , 且  $z_1 z_2$  为纯虚数, 则实数  $a =$ \_\_\_\_\_.

193. 直线  $\begin{cases} x = -2 - \sqrt{2}t, \\ y = 3 + \sqrt{2}t \end{cases} (t \text{ 为参数})$  对应的普通方程是\_\_\_\_\_.

194. 函数  $y = \begin{vmatrix} \sin x & 1 \\ 0 & \cos x \end{vmatrix}$  的最小正周期为\_\_\_\_\_.

195. 若  $(x + 2)^n = x^n + ax^{n-1} + \cdots + bx + c (n \in \mathbf{N}^*, n \geq 3)$ , 且  $b = 4c$ , 则  $a$  的值为\_\_\_\_\_.

196. 若函数  $f(x) = 2^x(x + a) - 1$  在区间  $[0, 1]$  上有零点, 则实数  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

197. 某学生在上学路上要经过 2 个路口, 假设在各路口是否遇到红灯是相互独立的, 遇到红灯概率都是  $\frac{1}{3}$ , 则这名学生在上学路上到第二个路口时第一次遇到红灯的概率是\_\_\_\_\_.

198. 设不等式组  $\begin{cases} x + y - 6 \geq 0, \\ x - y + 2 \geq 0, \\ x - 3y + 6 \leq 0 \end{cases}$  表示的可行域为  $\Omega$ , 若指数函数  $y = a^x$  的图像与  $\Omega$  有公共点, 则  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

199. 已知椭圆  $x^2 + \frac{y^2}{b^2} = 1 (0 < b < 1)$ , 其左、右焦点分别为  $F_1, F_2$ ,  $|F_1F_2| = 2c$ , 若椭圆上存在点  $P$ , 使  $P$  到直线  $x = \frac{1}{c}$  距离是  $|PF_1|$  与  $|PF_2|$  的等差中项, 则  $b$  的最大值为\_\_\_\_\_.

200. 已知  $f(x) = 1 + ax - \sqrt{1 + ax^2}$ , 若对任意  $x \in [0, \sqrt{2}]$ ,  $f(x) \leq 0$  恒成立, 则实数  $a$  的取值范围为\_\_\_\_\_.

201. 已知函数  $f(x) = |\sin x| + |\cos x| - 4 \sin x \cos x - k$ , 若函数  $f(x)$  在区间  $(0, \pi)$  内恰好有奇数个零点, 则实数  $k$  的所有取值之和为\_\_\_\_\_.

202. 函数  $y = x^2 (x \leq 0)$  的反函数为 ( ).

A.  $y = \sqrt{x}, x \geq 0$

B.  $y = -\sqrt{x}, x \geq 0$

C.  $y = \sqrt{x}, x \leq 0$

D.  $y = -\sqrt{x}, x \leq 0$

203. 某高科技公司所有雇员的工资情况如下表所示.

年薪 (万元)	135	95	80	70	60	52	40	31
人数	1	1	2	1	3	4	1	12

该公司雇员年薪的标准差约为 ( ).

A. 24.5(万元)

B. 25.5(万元)

C. 26.5(万元)

D. 27.5(万元)

204. 已知函数  $f(x) = x + \frac{a}{x} (a > 0)$ ,  $0 < x_1 < x_2$ , 且  $f(x_1) = f(x_2)$ , 给出以下结论:

①  $\frac{x_1 + x_2}{2} > \sqrt{a}$  恒成立; ②  $f(2\sqrt{a} - x_1) < f(x_2)$  恒成立. 则 ( ).

A. ①正确, ②正确

B. ①正确, ②错误

C. ①错误, ②正确

D. ①错误, ②错误

205. 在直角坐标平面上, 到两条直线  $y = 0$  与  $y = x$  的距离和为 3 的点的轨迹所围成的图形的面积是 ( ).

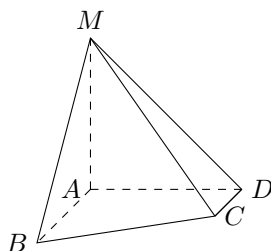
A. 18

B.  $18\sqrt{2}$

C. 36

D.  $36\sqrt{2}$

206. 如图, 在四棱锥  $M - ABCD$  中, 已知  $AM \perp$  平面  $ABCD$ ,  $AB \perp AD$ ,  $AB \parallel CD$ ,  $AB = 2CD$ , 且  $AB = AM = AD = 2$ .



(1) 求四棱锥  $M - ABCD$  的体积;

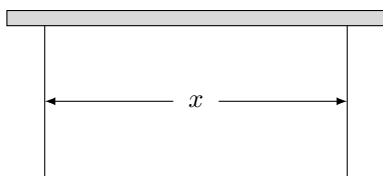
(2) 求直线  $MC$  与平面  $ADM$  所成的角.

207. 已知  $x \in \mathbf{R}$ ,  $\vec{m} = (2 \cos x, 2\sqrt{3} \sin x)$ ,  $\vec{n} = (\cos x, \cos x)$ .

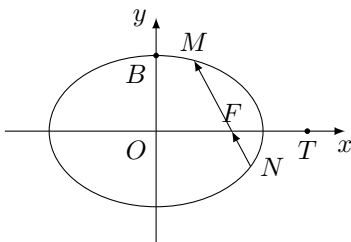
(1) 设  $f(x) = \vec{m} \cdot \vec{n}$ , 求函数  $y = f(x)$  的解析式及最大值;

(2) 设  $\triangle ABC$  的三个内角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ , 当  $x = A$  时,  $\vec{m} = a\vec{n}$ , 且  $c = 2\sqrt{3}$ , 求  $\triangle ABC$  的面积.

208. 某学校对面有一块空地要围建成一个面积为  $360\text{m}^2$  的矩形场地, 要求矩形场地的一面利用旧墙 (旧墙需要整修), 其它三面围墙要新建, 在旧墙对面的新墙上要留一个宽度为  $2\text{m}$  的进出口, 如图所示. 已知旧墙的整修费用为  $45\text{元/m}$ , 新建墙的造价为  $180\text{元/m}$ , 建  $2\text{m}$  宽的进出口需  $2360$  元的单独费用, 设利用的旧墙的长度为  $x$  (单位:  $\text{m}$ ), 设修建此矩形场地围墙的总费用 (含建进出口的费用) 为  $y$  (单位: 元).



- (1) 将  $y$  表示为  $x$  的函数;
  - (2) 试确定  $x$ , 使修建此矩形场地围墙的总费用 (含建进出口的费用) 最少, 并求出最少总费用.
209. 已知椭圆  $\Gamma$  的中心是坐标原点  $O$ , 焦点在  $x$  轴上, 点  $B$  是椭圆  $\Gamma$  的上顶点, 椭圆  $\Gamma$  上一点  $A(1, \frac{\sqrt{2}}{2})$  到两焦点距离之和为  $2\sqrt{2}$ .



- (1) 求椭圆  $\Gamma$  的标准方程;
  - (2) 若点  $P, Q$  是椭圆  $\Gamma$  上异于点  $B$  的两点,  $BP \perp BQ$ , 且满足  $3\overrightarrow{PC} = 2\overrightarrow{CQ}$  的点  $C$  在  $y$  轴上, 求直线  $BP$  的方程;
  - (3) 设  $x$  轴上点  $T$  坐标为  $(2, 0)$ , 过椭圆  $\Gamma$  的右焦点  $F$  作直线  $l$  (不与  $x$  轴重合) 与椭圆  $\Gamma$  交于  $M, N$  两点, 如图, 点  $M$  在  $x$  轴上方, 点  $N$  在  $x$  轴下方, 且  $\overrightarrow{FM} = 2\overrightarrow{FN}$ , 求  $|\overrightarrow{TM} + \overrightarrow{TN}|$  的值.
210. 已知数列  $\{x_n\}$ , 若对任意  $n \in \mathbf{N}^*$ , 都有  $\frac{x_n + x_{n+2}}{2} > x_{n+1}$ , 则称数列  $\{x_n\}$  为 “差增数列”.
- (1) 试判断数列  $a_n = n^2 (n \in \mathbf{N}^*)$  是否为 “差增数列”, 并说明理由;
  - (2) 对于所有各项均为正整数的 “差增数列”  $\{a_n\}$ , 其中  $a_1 = a_2 = 1$ , 若使得  $a_k = m$  成立的序数  $k$  的最大值为  $20$ , 求正整数  $m$  的所有可能取值的集合;
  - (3) 若数列  $\{\lg x_n\}$  为 “差增数列” ( $n \in \mathbf{N}^*, n \leq 2020$ ) 且  $\lg x_1 + \lg x_2 + \cdots + \lg x_{2020} = 0$ , 证明:  $x_{1010} \cdot x_{1011} < 1$ .
211. 若  $\sin \alpha = \frac{1}{4}$ , 则  $\sin(\pi + \alpha) =$ \_\_\_\_\_.
212. 设集合  $A = \{1, 2, 3\}$ ,  $B = \{y | y = \sin x, x \in \mathbf{R}\}$ , 则  $A \cap B =$ \_\_\_\_\_.
213. 已知圆锥的底面半径为  $1$ , 母线长为  $2$ , 则该圆锥的体积为\_\_\_\_\_.
214. 关于  $x$  的不等式  $\frac{1}{x} > 1$  的解集为\_\_\_\_\_.

215. 已知常数  $a \in \mathbf{R}$ , 若复数  $z = (a + i)(2 + i)$  ( $i$  为虚数单位) 的实部与虚部相等, 则  $|z| =$ \_\_\_\_\_.
216. 在  $(x^2 + \frac{2}{x})^7$  的二项展开式中,  $x^2$  的系数为\_\_\_\_\_.
217. 各项都不为零的等差数列  $\{a_n\}$  满足  $a_2 - 2a_8^2 + 3a_{10} = 0$ , 则  $a_8 =$ \_\_\_\_\_.
218. 设椭圆  $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} + y^2 = 1 (a > 1)$  的左顶点为  $A$ , 过点  $A$  的直线  $l$  与  $\Gamma$  相交于另一点  $B$ , 与  $y$  轴相交于点  $C$ .  
若  $|OA| = |OC|$ ,  $|AB| = |AC|$ , 则  $a =$ \_\_\_\_\_.