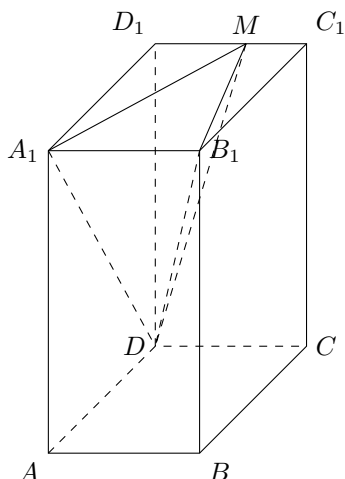
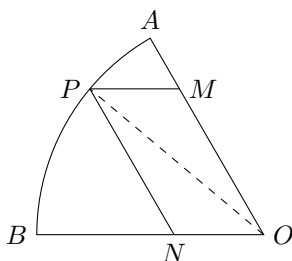


1. 已知全集  $U = \{x|x < 2\}$ , 集合  $A = \{x|x < 1\}$ , 则  $\complement_U A =$ \_\_\_\_\_.
2. 设集合  $A = \{x||x-2| < 1, x \in \mathbf{R}\}$ ,  $B = \{x|\frac{x-3}{x-1} \geq 0\}$ , 则  $A \cup B =$ \_\_\_\_\_.
3. 若函数  $f(x) = 2^x - 3$ , 则  $f^{-1}(1) =$ \_\_\_\_\_.
4. 设函数  $f(x) = \begin{cases} 2^{-x} - 1, & x \leq 0, \\ x^{\frac{1}{2}}, & x > 0, \end{cases}$  若  $f(x_0) > 1$ , 则  $x_0$  的取值范围是\_\_\_\_\_.
5. 已知  $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ , 则方程  $\begin{vmatrix} 2\sin x & 1 \\ 1 & 2\cos x \end{vmatrix} = 0$  的解集是\_\_\_\_\_.
6. 关于  $x$  的不等式  $x^2 + ax + 1 > 0$  有解, 则实数  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_.
7. 已知  $f(x) = x^2 + 2(a-2)x + 4$ , 对  $x \in [-3, 1]$ ,  $f(x) > 0$  恒成立, 则实数  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_.
8. 设正数  $a, b$ , 当  $(a+b)^2 + \frac{1}{4ab}$  取最小值时,  $a$  的值为\_\_\_\_\_.
9. 设椭圆  $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} + y^2 = 1 (a > 1)$  的左顶点为  $A$ , 过点  $A$  的直线  $l$  与  $\Gamma$  相交于另一点  $B$ , 与  $y$  轴相交于点  $C$ . 若  $|OA| = |OC|$ ,  $|AB| = |BC|$ , 则  $a =$ \_\_\_\_\_.
10. 已知常数  $b, c \in \mathbf{R}$ . 若函数  $f(x) = (x^2 + x - 2)(x^2 + bx + c)$  为偶函数, 则  $b + c =$ \_\_\_\_\_.
11. 记  $a, b, c, d, e, f$  为  $1, 2, 3, 4, 5, 6$  的任意一个排列, 则使得  $(a+b)(c+d)(e+f)$  为奇数的排列共有\_\_\_\_\_个.
12. 已知函数  $f(x) = |x + \frac{1}{x} + a|$ , 若对任意实数  $a$ , 关于  $x$  的不等式  $f(x) \geq m$  在区间  $[\frac{1}{2}, 3]$  上总有解, 则实数  $m$  的取值范围为\_\_\_\_\_.
13. 已知  $x \in \mathbf{R}$ , 则“ $x > 0$ ”是“ $x > 1$ ”的 ( ).  
 A. 充分非必要条件      B. 必要非充分条件      C. 充要条件      D. 既非充分又非必要条件
14. 已知  $a, b, c$  是互不相等的正数, 则下列不等式中正确的是 ( ).  
 A.  $|a-b| < |a-c| + |c-b|$       B.  $a^2 + \frac{1}{a^2} \leq a + \frac{1}{a}$   
 C.  $|a-b| + \frac{1}{a-b} \geq 2$       D.  $\sqrt{a+3} - \sqrt{a+1} \leq \sqrt{a+2} - \sqrt{a}$
15. 设  $a, b, c$  表示三条互不重合的直线,  $\alpha, \beta$  表示两个不重合的平面, 则使得“ $a \parallel b$ ”成立的一个充分条件为 ( ).  
 A.  $a \perp c, b \perp c$       B.  $a \parallel \alpha, b \parallel \alpha$   
 C.  $a \parallel \alpha, a \parallel \beta, \alpha \cap \beta = b$       D.  $b \perp \alpha, c \parallel \alpha, a \perp c$
16. 已知函数  $y = f(x)$  的定义域为  $(0, +\infty)$ , 满足对任意  $x \in (0, +\infty)$ , 恒有  $f[f(x) - \frac{1}{x}] = 4$ . 若函数  $y = f(x) - 4$  的零点个数为有限的  $n (n \in \mathbf{N}^*)$  个, 则  $n$  的最大值为 ( ).  
 A. 1      B. 2      C. 3      D. 4

17. 如图, 在长方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中,  $2AB = BC = AA_1$ , 点  $M$  为棱  $C_1D_1$  上的动点.



- (1) 求三棱锥  $D - A_1B_1M$  与长方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  的体积比;  
 (2) 若  $M$  为棱  $C_1D_1$  的中点, 求直线  $DB_1$  与平面  $DA_1M$  所成角的大小.
18. 已知常数  $a \in \mathbf{R}^+$ , 函数  $f(x) = 3^x + a^2 \cdot 3^{-x}$ .
- (1) 若  $a = \sqrt{3}$ , 解关于  $x$  的不等式  $f(x) < 4$ ;  
 (2) 若  $f(x)$  在  $[3, +\infty)$  上为增函数, 求  $a$  的取值范围.
19. 某居民小区为缓解业主停车难的问题, 拟对小区内一块扇形空地  $AOB$  进行改建. 如图所示, 平行四边形  $OMPN$  区域为停车场, 其余部分建成绿地, 点  $P$  在围墙  $\widehat{AB}$  上, 点  $M$  和  $N$  分别在道路  $OA$  和道路  $OB$  上, 且  $OA = 60\text{m}$ ,  $\angle AOB = \frac{\pi}{3}$ . 设  $\angle POB = \theta$ .



- (1) 求停车场面积  $S$  (单位:  $\text{m}^2$ ) 关于  $\theta$  的函数关系式, 并写出  $\theta$  的取值范围;  
 (2) 求停车场面积  $S$  的最大值以及相应  $\theta$  的值.
20. 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 抛物线  $\Gamma: y^2 = 4x$ , 点  $C(1, 0)$ .  $A, B$  为  $\Gamma$  上的两点,  $A$  在第一象限, 满足  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = -4$ .
- (1) 求证: 直线  $AB$  过定点, 并求定点坐标;  
 (2) 设  $P$  为  $\Gamma$  上的动点, 求  $\frac{|OP|}{|CP|}$  的取值范围;  
 (3) 记  $\triangle AOB$  的面积为  $S_1$ ,  $\triangle BOC$  的面积为  $S_2$ , 求  $S_1 + S_2$  的最小值.

21. 已知函数  $f(x) = x|x - a|$ , 其中  $a$  为常数.

(1) 当  $a = 1$  时, 解不等式  $f(x) < 2$ ;

(2) 已知  $g(x)$  是以 2 为周期的偶函数, 且当  $0 \leq x \leq 1$  时, 有  $g(x) = f(x)$ . 若  $a < 0$ , 且  $g(\frac{3}{2}) = \frac{5}{4}$ , 求函数  $y = g(x) (x \in [1, 2])$  的反函数;

(3) 若在  $[0, 2]$  上存在  $n$  个不同的点  $x_i (i = 1, 2, \dots, n, n \geq 3)$ ,  $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ , 使得  $|f(x_1) - f(x_2)| + |f(x_2) - f(x_3)| + \dots + |f(x_{n-1}) - f(x_n)| = 8$ , 求实数  $a$  的取值范围.

22. 设集合  $A = \{1, 2, 3\}$ ,  $B = \{x | x < 3\}$ , 则  $A \cap B =$ \_\_\_\_\_.

23. 已知常数  $a \in \mathbf{R}$ , 函数  $f(x) = x^2 (-1 \leq x \leq a)$  是偶函数, 则  $a =$ \_\_\_\_\_.

24. 设函数  $f(x) = \lg(x+1)$  的反函数为  $f^{-1}(x)$ , 则  $f^{-1}(1) =$ \_\_\_\_\_.

25. 函数  $f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{x}}$  的定义域为\_\_\_\_\_.

26. 已知常数  $a \in \mathbf{R}$ , 设  $p: 1 \leq x < 2$ ,  $q: x < a$ . 若  $p$  是  $q$  的充分条件, 则  $a$  的取值范围为\_\_\_\_\_.

27. 关于  $x$  的方程  $\log_2 x + \log_2(x-3) = 2$  的解为\_\_\_\_\_.

28. 已知函数  $f(x)$  的定义域为  $\mathbf{R}$ , 满足对任意  $x \in \mathbf{R}$ , 恒有  $f(x) + f(x+2) = 4$ . 若  $f(1) + f(2) = 1$ , 则  $f(2021) - f(2020) =$ \_\_\_\_\_.

29. 已知常数  $a \in \mathbf{R}$ , 函数  $f(x) = a \cdot 4^x + 2^x + 1$  在  $[3, +\infty)$  上单调递减, 则  $a$  的取值范围为\_\_\_\_\_.

30. 已知常数  $m, n \in \mathbf{Z}$ , 若对任意  $x \in [0, +\infty)$ , 不等式  $(mx - 2)(x^2 - 2n) \geq 0$  恒成立, 则  $m + n$  的取值集合为\_\_\_\_\_.

31. 已知常数  $a \in \mathbf{R}$ , 函数  $f(x) = x^2 - 4x + a$ ,  $g(x) = ax^2 - 8x + 4$ . 若存在  $x_0 \in (0, +\infty)$ , 使得  $f(x_0)$  与  $g(x_0)$  都不是正数, 则  $a$  的取值范围为\_\_\_\_\_.

32. 对任意的非零实数  $a, b$ , 下列不等式恒成立的是 ( ).

A.  $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \geq 2$

B.  $(a + b)(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}) \geq 4$

C.  $\frac{|a+b|}{2} \geq 2\sqrt{|ab|}$

D.  $\frac{a^2 + b^2}{2} \geq \left(\frac{a + b}{2}\right)^2$

33. 设函数  $f(x)$  的定义域为  $\mathbf{R}$ ,  $f(x)$  满足对任意  $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ , 当  $x_1 \neq x_2$  时, 恒有  $|f(x_1) - f(x_2)| > 2|x_1 - x_2|$ . 对于命题: ①  $f(x)$  的解析式可以是  $f(x) = x^3 + 2021x$ ; ②  $f(x)$  的解析式可以是  $f(x) = 2021^{-x}$ , 下列判断正确的是 ( ).

A. ①、②均为真命题

B. ①、②均为假命题

C. ①为真命题、②为假命题

D. ①为假命题、②为真命题

34. 已知常数  $a \in \mathbf{R}$ , 函数  $f(x) = ax^2 + \lg \frac{1+x}{1-x}$ .

(1) 若  $a = 0$ , 判断  $f(x)$  的单调性并证明;

(2) 问: 是否存在  $a$ , 使得  $f(x)$  为奇函数? 若存在, 求出所有  $a$  的值; 若不存在, 说明理由.

35. 设函数  $f(x)$  的定义域为  $(0, +\infty)$ , 若对任意  $x \in (0, +\infty)$ , 恒有  $f(2x) = 2f(x)$ , 则称  $f(x)$  为“2 阶缩放函数”.

(1) 已知函数  $f(x)$  为“2 阶缩放函数”, 当  $x \in (1, 2]$  时,  $f(x) = 1 - \log_2 x$ , 求  $f(2\sqrt{2})$  的值;

(2) 已知函数  $f(x)$  为“2 阶缩放函数”, 当  $x \in (1, 2]$  时,  $f(x) = \sqrt{2x - x^2}$ , 求证: 函数  $y = f(x) - x$  在  $(1, +\infty)$  上无零点.

36. 设全集  $U = \mathbf{R}$ ,  $A = (-\infty, 3)$ , 则  $\complement_U A =$ \_\_\_\_\_.

37. 函数  $f(x) = x^{-\frac{1}{2}}$  的定义域为\_\_\_\_\_.

38. 已知函数  $f(x)$  的反函数  $f^{-1}(x) = \log_2 x$ , 则  $f(-1) =$ \_\_\_\_\_.

39. 已知球的半径为 2, 则它的体积为\_\_\_\_\_.

40. 已知  $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}$ ,  $\alpha \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ , 则  $\sin(\alpha + \frac{3\pi}{2}) =$ \_\_\_\_\_.

41. 已知圆锥的底面半径为 1cm, 侧面积为  $2\pi\text{cm}^2$ , 则母线与底面所成角的大小为\_\_\_\_\_.

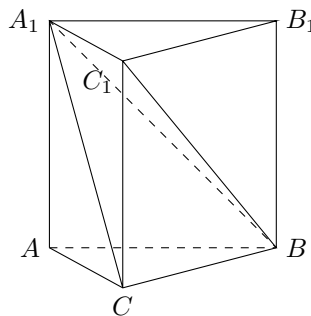
42. 已知  $(x^2 + \frac{2}{x})^n$  的二项展开式中, 所有二项式系数的和为 512, 则展开式中的常数项为\_\_\_\_\_ (结果用数值表示).

43.  $f(x)$  是偶函数, 当  $x \geq 0$  时,  $f(x) = 2^x - 1$ , 则不等式  $f(x) > 1$  的解集为\_\_\_\_\_.

44. 方程  $1 + \log_2 x = \log_2(x^2 - 3)$  的解为\_\_\_\_\_.

45. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} x^2 + (4a - 3)x + 3a, & x < 0, \\ \log_a(x + 1) + 1, & x \geq 0, \end{cases}$  ( $a > 0, a \neq 1$ ) 在  $\mathbf{R}$  上单调递减, 且关于  $x$  的方程  $|f(x)| = 2 - x$  恰好有两个不相等的实数解, 则  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

46. 我国古代数学名著《九章算术》中记载了有关特殊几何体的定义: 阳马指底面为矩形, 一侧棱垂直于底面的四棱锥, 堑堵指底面是直角三角形, 且侧棱垂直于底面的三棱柱. 某堑堵  $ABC - A_1B_1C_1$ ,  $AC \perp BC$ , 若  $A_1A = AB = 2$ , 当阳马  $B - AA_1C_1C$  的体积最大时, 二面角  $C - A_1B - C_1$  的大小为\_\_\_\_\_.



47. 对于全集  $\mathbf{R}$  的子集  $A$ , 定义函数  $f_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \in \complement_{\mathbf{R}} A \end{cases}$  为  $A$  的特征函数, 设  $A, B$  为全集  $\mathbf{R}$  的子集,

① 若  $A \subseteq B$ , 则  $f_A(x) \leq f_B(x)$ ; ②  $f_{\complement_{\mathbf{R}} A}(x) = 1 - f_A(x)$ ;

③  $f_{A \cap B}(x) = f_A(x) \cdot f_B(x)$ ; ④  $f_{A \cup B}(x) = f_A(x) + f_B(x)$ ;

⑤  $f_{A \cap \complement_{\mathbf{R}} B}(x) = f_A(x) - f_B(x)$ ; ⑥ 对于任意  $x \in \mathbf{R}$ , 若  $f_A(x) \cdot f_B(x) = 0$  恒成立, 则  $A \cap B = \emptyset$ .

其中正确的命题为\_\_\_\_\_ (填所有正确命题的序号).

48. 已知实数  $a, b$  满足  $a > b$ , 则下列不等式中恒成立的是 ( ).

- A.  $a^2 > b^2$                       B.  $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$                       C.  $|a| > |b|$                       D.  $2^a > 2^b$

49. 下列函数中, 值域为  $(0, +\infty)$  的是 ( ).

- A.  $y = x^2$                       B.  $y = \frac{2}{x}$                       C.  $y = 2^x$                       D.  $y = |\log_2 x|$

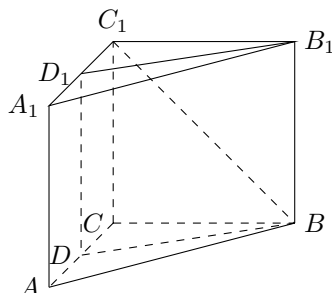
50. 从正方体的 8 个顶点中选取 4 个作为顶点, 可得到四面体的个数为 ( ).

- A.  $C_8^4 - 12$                       B.  $C_8^4 - 8$                       C.  $C_8^4 - 6$                       D.  $C_8^4 - 4$

51. 设集合  $A = \{y | y = a^x, x > 0\}$  (其中常数  $a > 0, a \neq 1$ ),  $B = \{y | y = x^k, x \in A\}$  (其中常数  $k \in \mathbf{Q}$ ), 则“ $k < 0$ ”是“ $A \cap B = \emptyset$ ”的 ( ).

- A. 充分非必要条件                      B. 必要非充分条件  
C. 充分必要条件                      D. 既非充分又非必要条件

52. 如图所示, 在直三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  中, 底面是等腰直角三角形,  $\angle ACB = 90^\circ$ ,  $CA = CB = CC_1 = 2$ . 点  $D, D_1$  分别是棱  $AC, A_1C_1$  的中点.

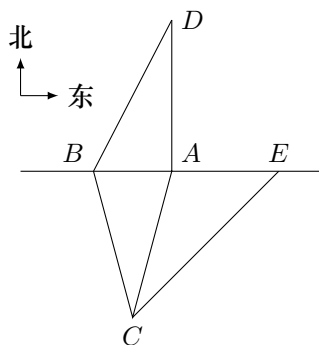


- (1) 求四棱锥  $C - AA_1B_1B$  的体积;  
(2) 求直线  $BC_1$  与平面  $DBB_1D_1$  所成角的大小.

53. 设常数  $k \in \mathbf{R}$ ,  $f(x) = k \cos^2 x + \sqrt{3} \sin x \cos x, x \in \mathbf{R}$ .

- (1) 若  $\tan \alpha = 2$  且  $f(\alpha) = \sqrt{3}$ , 求实数  $k$  的值;  
(2) 设  $k = 1$ ,  $\triangle ABC$  中, 内角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ . 若  $f(A) = 1, a = \sqrt{7}, b = 3$ , 求  $\triangle ABC$  的面积  $S$ .

54. 东西向的铁路上有两个道口  $AB$ , 铁路两侧的公路分布如图,  $C$  位于  $A$  的南偏西  $15^\circ$ , 且位于  $B$  的南偏东  $15^\circ$  方向,  $D$  位于  $A$  的正北方向,  $AC = AD = 2\text{km}$ ,  $C$  处一辆救护车欲通过道口前往  $D$  处的医院送病人, 发现北偏东  $45^\circ$  方向的  $E$  处 (火车头位置) 有一列火车自东向西驶来, 若火车通过每个道口都需要 1 分钟, 救护车和火车的速度均为  $60\text{km/h}$ .



(1) 判断救护车通过道口 A 是否会受火车影响, 并说明理由;

(2) 为了尽快将病人送到医院, 救护车应选择 AB 中的哪个道口? 通过计算说明.

55. 已知函数  $f(x) = \frac{ax^2 + 1}{bx + c}$  是奇函数,  $a, b, c$  为常数.

(1) 求实数  $c$  的值;

(2) 若  $a, b \in \mathbf{Z}$ , 且  $f(1) = 2, f(2) < 3$ , 求  $f(x)$  的解析式;

(3) 已知  $b > 0$ , 若  $f(x) \geq f(1)$  在  $(0, +\infty)$  上恒成立, 且  $\{x | f[f(x)] \geq x\} \cap [1, 2] \neq \emptyset$ , 求  $b$  的取值范围.

56. 记函数  $f(x)$  的定义域为  $D$ . 如果存在实数  $a, b$  使得  $f(a - x) + f(a + x) = b$  对任意满足  $a - x \in D$  且  $a + x \in D$  的  $x$  恒成立, 则称  $f(x)$  为  $\Psi$  函数.

(1) 设函数  $f(x) = \frac{1}{x} - 1$ , 试判断  $f(x)$  是否为  $\Psi$  函数, 若是求出  $a, b$ , 若不是请说明理由;

(2) 设函数  $g(x) = \frac{1}{2^x + t}$ , 其中常数  $t \neq 0$ , 证明:  $g(x)$  是  $\Psi$  函数;

(3) 若  $h(x)$  是定义在  $\mathbf{R}$  上的  $\Psi$  函数, 且函数  $h(x)$  的图像关于直线  $x = m$  ( $m$  为常数) 对称, 试判断  $h(x)$  是否为周期函数? 并证明你的结论.