2020 年秋考

1. 已知集合 $A=\{1,2,4\}$,$B=\{2,4,5\}$, 则 $A\cap B=$__________.

2. 计算: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{3n-1}=$__________.

3. 已知复数 $z=1-2\mathrm{i}$(i 为虚数单位), 则 $|z|=$__________.

4. 已知函数 $f(x)=x^3$, 则其反函数为__________.

5. 已知 x,y 满足 $\begin{cases}x+y-2\geq 0,\\ x+2y-3\leq 0,\\ y\geq 0,\end{cases}$ 则 $z=y-2x$ 的最大值为__________.

6. 已知行列式 $\begin{vmatrix}1 & a & b\\ 2 & c & d\\ 3 & 0 & 0\end{vmatrix}=6$, 则行列式 $\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}=$__________.

7. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1\neq 0$, 且满足 $a_1+a_{10}=a_9$, 则 $\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_9}{a_{10}}=$__________.

8. 已知有四个数 $1,2,a,b$, 这四个数的中位数为 3, 平均数为 4, 则 $ab=$__________.

9. 从 6 个人选 4 个人去值班, 每人值班一天, 第一天安排 1 个人, 第二天安排 1 个人, 第三天安排 2 个人, 则共有__________ 种安排情况.

10. 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$, 直线 l 经过椭圆右焦点 F, 交椭圆 C 于 P,Q 两点 (点 P 在第二象限), 若 Q 关于 x 轴对称的点为 Q', 且满足 $PQ\perp FQ'$, 则直线 l 的方程为__________.

11. 已知 $a\in\mathbf{R}$, 若存在定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $f(x)$ 同时满足下列两个条件, ① 对任意 $x_0\in\mathbf{R}$, $f(x_0)$ 的值为 x_0 或 x_0^2; ② 关于 x 的方程 $f(x)=a$ 无实数解; 则 a 的取值范围为__________.

12. 已知 $\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},\overrightarrow{b_1},\overrightarrow{b_2},\cdots,\overrightarrow{b_k}\ (k\in\mathbf{N}^*)$ 是平面内两两互不相等的向量, 满足 $|\overrightarrow{a_1}-\overrightarrow{a_2}|=1$, 且 $|\overrightarrow{a_i}-\overrightarrow{b_j}|\in\{1,2\}$(其中 $i=1,2$, $j=1,2,\cdots,k$), 则 k 的最大值为__________.

13. 下列不等式恒成立的是 (　　).

    A. $a^2+b^2\leq 2ab$　　B. $a^2+b^2\geq -2ab$　　C. $a+b\geq 2\sqrt{|ab|}$　　D. $a+b\geq -2\sqrt{|ab|}$

14. 已知直线方程 $3x+4y+1=0$ 的一个参数方程可以是 (　　).

    A. $\begin{cases}x=1+3t,\\ y=-1+4t\end{cases}$　　B. $\begin{cases}x=1-4t,\\ y=-1-3t\end{cases}$　　C. $\begin{cases}x=1-3t,\\ y=-1+4t\end{cases}$　　D. $\begin{cases}x=1+4t,\\ y=-1-3t\end{cases}$

15. 在棱长为 10 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,P 为左侧面 ADD_1A_1 上一点, 已知点 P 到 A_1D_1 的距离为 3, P 到 AA_1 的距离为 2, 则过点 P 且与 A_1C 平行的直线相交的面是 (　　).

    A. $ABCD$　　B. BB_1C_1C　　C. CC_1D_1D　　D. AA_1B_1B

16. 命题 p: 存在 $a \in \mathbf{R}$ 且 $a \neq 0$, 对任意的 $x \in \mathbf{R}$, 均有 $f(x+a) < f(x) + f(a)$ 恒成立. 已知命题 q_1: $f(x)$ 单调递减, 且 $f(x) > 0$ 恒成立; 命题 q_2: $f(x)$ 单调递增, 且存在 $x_0 < 0$ 使得 $f(x_0) = 0$. 则下列说法正确的是 (　　).

A. q_1、q_2 都是 p 的充分条件　　B. 只有 q_1 是 p 的充分条件

C. 只有 q_2 是 p 的充分条件　　D. q_1、q_2 都不是 p 的充分条件

2019 年秋考

1. 已知集合 $A = (-\infty, 3)$, $B = (2, +\infty)$, 则 $A \cap B =$__________.

2. 已知 $z \in \mathbf{C}$. 若 $\dfrac{1}{z-5} = \mathrm{i}$(i 为虚数单位), 则 $z =$__________.

3. 已知向量 $\overrightarrow{a} = (1, 0, 2)$, $\overrightarrow{b} = (2, 1, 0)$, 则 $\overrightarrow{a}$ 与 $\overrightarrow{b}$ 的夹角为__________.

4. 在二项式 $(2x+1)^5$ 的展开式中, x^2 的系数是__________.

5. 已知 x, y 满足 $\begin{cases} x \geq 0, \\ y \geq 0, \\ x + y \leq 2, \end{cases}$ 则 $2x - 3y$ 的最小值为__________.

6. 已知函数 $f(x)$ 的周期为 1, 当 $0 < x \leq 1$ 时, $f(x) = \log_2 x$, 则 $f\left(\dfrac{3}{2}\right)$ 的值为__________.

7. 已知 $x, y \in \mathbf{R}^*$, 且满足 $\dfrac{1}{x} + 2y = 3$, 则 $\dfrac{y}{x}$ 的最大值为__________.

8. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 且满足 $S_n + a_n = 2$, 则 $S_5 =$__________.

9. 过曲线 $y^2 = 4x$ 的焦点 F 并垂直于 x 轴的直线分别与曲线 $y^2 = 4x$ 交于 A、B, A 在 B 的上方, M 为抛物线上一点, $\overrightarrow{OM} = \lambda \overrightarrow{OA} + (\lambda - 2)\overrightarrow{OB}$, 则 $\lambda =$__________.

10. 某三位数密码, 每位数字可在 0 至 9 这 10 个数字中任选一个, 则该三位数密码中, 恰有两位数字相同的概率是__________.

11. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n < a_{n+1}$ $(n \in \mathbf{N}^*)$, 若 $P_n(n, a_n)$ $(n \geq 3)$ 均在双曲线 $\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{y^2}{6} = 1$ 上, 则 $\lim\limits_{n \to \infty} |P_n P_{n+1}| =$__________.

12. 已知 $f(x) = \left|\dfrac{2}{x-1} - a\right|$ $(x > 1,\ a > 0)$, $f(x)$ 的图像与 x 轴的交点为 A, 若对于 $f(x)$ 的图像上任意一点 P, 在其图像上总存在另一点 Q(P、Q 异于 A), 满足 $AP \perp AQ$, 且 $|AP| = |AQ|$, 则 $a =$__________.

13. 已知直线 l 的方程为 $2x - y + c = 0$, 则 l 的一个方向向量 $\overrightarrow{d}$ 可以是 (　　).

A. $(2, -1)$　　B. $(2, 1)$　　C. $(-1, 2)$　　D. $(1, 2)$

14. 一个直角三角形的两直角边长分别为 1 和 2, 将该三角形分别绕其两直角边所在直线旋转, 得到的两个圆锥的体积之比为 (　　).

A. 1　　B. 2　　C. 4　　D. 8

15. 已知 $\omega \in \mathbf{R}$, 函数 $f(x)=(x-6)^2 \cdot \sin(\omega x)$. 若存在常数 $a \in \mathbf{R}$, 使得 $f(x+a)$ 为偶函数, 则 ω 的值可能为 (　　).

A. $\dfrac{\pi}{2}$　　B. $\dfrac{\pi}{3}$　　C. $\dfrac{\pi}{4}$　　D. $\dfrac{\pi}{5}$

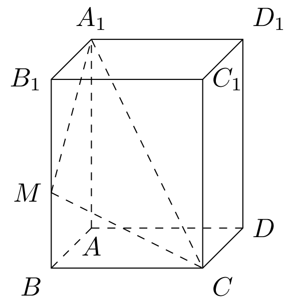
16. 已知 $\tan\alpha\tan\beta=\tan(\alpha+\beta)$, 有下列两个结论: ① 存在 α 在第一象限, β 在第三象限; ② 存在 α 在第二象限, β 在第四象限; 则 (　　).

A. ①②均正确　　B. ①②均错误　　C. ①对②错　　D. ①错②对

17. 如图, 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, M 为 BB_1 上一点, 已知 $BM=2$, $CD=3$, $AD=4$, $AA_1=5$.

(1) 求直线 A_1C 与平面 $ABCD$ 的夹角;

(2) 求点 A 到平面 A_1MC 的距离.



18. 已知 $f(x)=ax+\dfrac{1}{x+1}$, $a\in\mathbf{R}$.

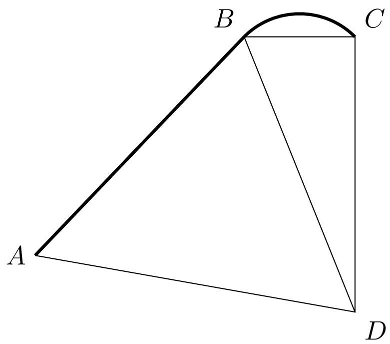
(1) 已知 $a=1$ 时, 求不等式 $f(x)+1<f(x+1)$ 的解集;

(2) 若 $f(x)$ 在 $x\in[1,2]$ 时有零点, 求 a 的取值范围.

19. 如图, $A-B-C$ 为海岸线, AB 为线段, $\overset{\frown}{BC}$ 为四分之一圆弧. $BD=39.2\text{km}$, $\angle BDC=22^\circ$, $\angle CBD=68^\circ$, $\angle BDA=58^\circ$.

(1) 求 $\overset{\frown}{BC}$ 的长度;

(2) 若 $AB=40\text{km}$, 求 D 到海岸线 $A-B-C$ 的最短距离 (精确到 0.001km).



20. 已知椭圆 $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1$, F_1、F_2 为左、右焦点, 直线 l 过 F_2, 交椭圆于 A、B 两点.

(1) 若直线 l 垂直于 x 轴, 求 $|AB|$; (2) 当 $\angle F_1AB=90^\circ$, A 在 x 轴上方时, 求 A、B 的坐标; (3) 若直线 AF_1 交 y 轴于 M, 直线 BF_1 交 y 轴于 N, 是否存在直线 l, 使得 $S_{\triangle F_1AB}=S_{\triangle F_1MN}$? 若存在, 求出直线 l 的方程; 若不存在, 说明理由.

21. 数列 $\{a_n\}$ $(n=1,2,3,\cdots,100)$ 有 100 项, $a_1=a$, 且对任意 $n=2,3,\cdots,100$, 存在 $a_n=a_i+d$, $i=1,2,\cdots,n-1$. 若 a_k 与前 $k-1$ 项中某一项相等, 则称 a_k 具有性质 P.

(1) 若 $a_1=1$, $d=2$, 求 a_4 的所有可能的值;

(2) 若 $\{a_n\}$ 不是等差数列, 求证: 数列 $\{a_n\}$ 中存在某些项具有性质 P;

(3) 若 $\{a_n\}$ 中恰有三项具有性质 P, 这三项之和为 c, 请用 a,d,c 表示 $a_1+a_2+\cdots+a_{100}$.

2018 年秋考

1. 行列式 $\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$ 的值为__________.

2. 双曲线 $\dfrac{x^2}{4} - y^2 = 1$ 的渐近线方程为__________.

3. 在 $(1+x)^7$ 的二项展开式中, x^2 项的系数为__________(结果用数值表示).

4. 设常数 $a \in \mathbf{R}$, 函数 $f(x) = \log_2(x+a)$. 若 $f(x)$ 的反函数的图像经过点 $(3,1)$, 则 $a =$__________.

5. 已知复数 z 满足 $(1+\mathrm{i})z = 1 - 7\mathrm{i}$($\mathrm{i}$ 是虚数单位), 则 $|z| =$__________.

6. 记等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n. 若 $a_3 = 0$, $a_6 + a_7 = 14$, 则 $S_7 =$__________.

7. 已知 $\alpha \in \left\{-2, -1, -\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, 1, 2, 3\right\}$. 若幂函数 $f(x) = x^\alpha$ 为奇函数, 且在 $(0, +\infty)$ 上递减, 则 $\alpha =$__________.

8. 在平面直角坐标系中, 已知点 $A(-1,0)$、$B(2,0)$, E、F 是 y 轴上的两个动点, 且 $|EF| = 2$, 则 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BF}$ 的最小值为__________.

9. 有编号互不相同的五个砝码, 其中 5 克、3 克、1 克砝码各一个, 2 克砝码两个. 从中随机选取三个, 则这三个砝码的总质量为 9 克的概率是__________(结果用最简分数表示).

10. 设等比数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = q^{n-1}$ $(n \in \mathbf{N}^*)$, 前 n 项和为 S_n. 若 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{S_n}{a_{n+1}} = \dfrac{1}{2}$, 则 $q =$__________.

11. 已知常数 $a > 0$, 函数 $f(x) = \dfrac{2^x}{2^x + ax}$ 的图像经过点 $P\left(p, \dfrac{6}{5}\right)$, $Q\left(q, -\dfrac{1}{5}\right)$. 若 $2^{p+q} = 36pq$, 则 $a =$__________.

12. 已知实数 x_1、x_2、y_1、y_2 满足: $x_1^2 + y_1^2 = 1$, $x_2^2 + y_2^2 = 1$, $x_1x_2 + y_1y_2 = \dfrac{1}{2}$, 则 $\dfrac{|x_1 + y_1 - 1|}{\sqrt{2}} + \dfrac{|x_2 + y_2 - 1|}{\sqrt{2}}$ 的最大值为__________.

13. 设 P 是椭圆 $\dfrac{x^2}{5} + \dfrac{y^2}{3} = 1$ 上的动点, 则 P 到该椭圆的两个焦点的距离之和为 (　　).

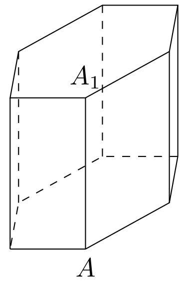
A. $2\sqrt{2}$　　B. $2\sqrt{3}$　　C. $2\sqrt{5}$　　D. $4\sqrt{2}$

14. 已知 $a \in \mathbf{R}$, 则 "$a > 1$" 是 "$\dfrac{1}{a} < 1$" 的 (　　).

A. 充分非必要条件　　B. 必要非充分条件

C. 充要条件　　D. 既非充分又非必要条件

15. 《九章算术》中, 称底面为矩形而有一侧棱垂直于底面的四棱锥为阳马. 设 AA_1 是正六棱柱的一条侧棱, 如图. 若阳马以该正六棱柱的顶点为顶点、以 AA_1 为底面矩形的一边, 则这样的阳马的个数是 (　　).



A. 4　　B. 8　　C. 12　　D. 16

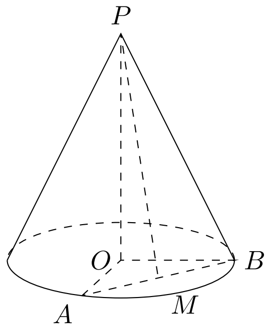
16. 设 D 是含数 1 的有限实数集, $f(x)$ 是定义在 D 上的函数. 若 $f(x)$ 的图像绕原点逆时针旋转 $\frac{\pi}{6}$ 后与原图像重合, 则在以下各项中, $f(1)$ 的可能取值只能是 (　　).

A. $\sqrt{3}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D. 0

17. 已知圆锥的顶点为 P, 底面圆心为 O, 半径为 2.

(1) 设圆锥的母线长为 4, 求圆锥的体积;

(2) 设 $PO=4$, OA、OB 是底面半径, 且 $\angle AOB=90°$, M 为线段 AB 的中点, 如图, 求异面直线 PM 与 OB 所成的角的大小.



18. 设常数 $a\in\mathbf{R}$, 函数 $f(x)=a\sin 2x+2\cos^2 x$.

(1) 若 $f(x)$ 为偶函数, 求 a 的值; (2) 若 $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{3}+1$, 求方程 $f(x)=1-\sqrt{2}$ 在区间 $[-\pi,\pi]$ 上的解.

19. 某群体的人均通勤时间, 是指单日内该群体中成员从居住地到工作地的平均用时. 某地上班族 S 中的成员仅以自驾或公交方式通勤. 分析显示: 当 S 中 $x\%$ $(0\le x\le 100)$ 的成员自驾时, 自驾群体的人均通勤时间为

$$f(x)=\begin{cases}30, & 0<x\le 30,\\ 2x+\dfrac{1800}{x}-90, & 30<x<100\end{cases}\ (\text{单位: 分钟}),$$

而公交群体的人均通勤时间不受 x 影响, 恒为 40 分钟. 试根据上述分析结果回答下列问题:

(1) 当 x 在什么范围内时, 公交群体的人均通勤时间少于自驾群体的人均通勤时间;

(2) 求该地上班族 S 的人均通勤时间 $g(x)$ 的表达式; 讨论 $g(x)$ 的单调性, 并说明其实际意义.

20. 设常数 $t>2$. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知点 $F(2,0)$, 直线 $l: x=t$, 曲线 $\Gamma: y^2=8x$ $(0\le x\le t,\ y\ge 0)$. l 与 x 轴交于点 A、与 Γ 交于点 B. P、Q 分别是曲线 Γ 与线段 AB 上的动点.

(1) 用 t 表示点 B 到点 F 的距离;

(2) 设 $t=3$, $|FQ|=2$, 线段 OQ 的中点在直线 FP 上, 求 $\triangle AQP$ 的面积;

(3) 设 $t=8$, 是否存在以 FP、FQ 为邻边的矩形 $FPEQ$, 使得点 E 在 Γ 上? 若存在, 求点 P 的坐标; 若不存在, 说明理由.

21. 给定无穷数列 $\{a_n\}$, 若无穷数列 $\{b_n\}$ 满足: 对任意 $n\in\mathbf{N}^*$, 都有 $|b_n-a_n|\le 1$, 则称 $\{b_n\}$ 与 $\{a_n\}$"接近".

(1) 设 $\{a_n\}$ 是首项为 1, 公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列, $b_n=a_{n+1}+1$, $n\in\mathbf{N}^*$. 判断数列 $\{b_n\}$ 是否与 $\{a_n\}$ 接近,

并说明理由;

(2) 设数列 $\{a_n\}$ 的前四项为: $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 4$, $a_4 = 8$, $\{b_n\}$ 是一个与 $\{a_n\}$ 接近的数列, 记集合 $M = \{x|x = b_i,\ i = 1, 2, 3, 4\}$, 求 M 中元素的个数 m;

(3) 已知 $\{a_n\}$ 是公差为 d 的等差数列. 若存在数列 $\{b_n\}$ 满足: $\{b_n\}$ 与 $\{a_n\}$ 接近, 且在 $b_2 - b_1, b_3 - b_2, \cdots, b_{201} - b_{200}$ 中至少有 100 个为正数, 求 d 的取值范围.

2017 年秋考

1. 已知集合 $A=\{1,2,3,4\}$, $B=\{3,4,5\}$, 则 $A\cap B=$__________.

2. 若排列数 $\mathrm{P}_6^m=6\times5\times4$, 则 $m=$__________.

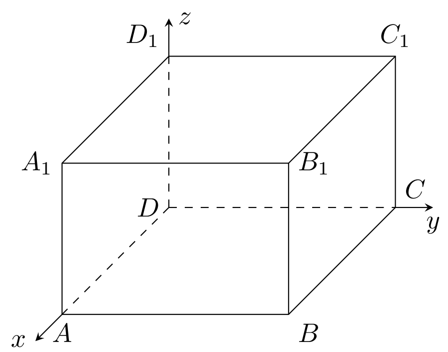
3. 不等式 $\dfrac{x-1}{x}>1$ 的解集为__________.

4. 已知球的体积为 36π, 则该球主视图的面积等于__________.

5. 已知复数 z 满足 $z+\dfrac{3}{z}=0$, 则 $|z|=$__________.

6. 设双曲线 $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (b>0)$ 的焦点为 F_1、F_2, P 为该双曲线上的一点, 若 $|PF_1|=5$, 则 $|PF_2|=$__________.

7. 如图, 以长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的顶点 D 为坐标原点, 过 D 的三条棱所在的直线为坐标轴, 建立空间直角坐标系. 若 $\overrightarrow{DB_1}$ 的坐标为 $(4,3,2)$, 则 $\overrightarrow{AC_1}$ 的坐标是__________.



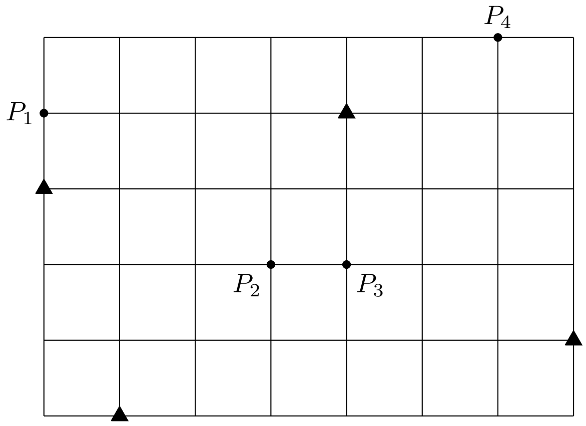
8. 定义在 $(0,+\infty)$ 上的函数 $y=f(x)$ 的反函数为 $y=f^{-1}(x)$. 若 $g(x)=\begin{cases}3^x-1, & x\le 0,\\ f(x), & x>0\end{cases}$ 为奇函数, 则 $f^{-1}(x)=2$ 的解为__________.

9. 已知四个函数: ① $y=-x$, ② $y=-\dfrac{1}{x}$, ③ $y=x^3$, ④ $y=x^{\frac{1}{2}}$. 从中任选 2 个, 则事件 "所选 2 个函数的图像有且仅有一个公共点" 的概率为__________.

10. 已知数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$, 其中 $a_n=n^2$, $n\in\mathbf{N}^*$, $\{b_n\}$ 的项是互不相等的正整数. 若对于任意 $n\in\mathbf{N}^*$, $\{b_n\}$ 的第 a_n 项等于 $\{a_n\}$ 的第 b_n 项, 则 $\dfrac{\lg(b_1b_4b_9b_{16})}{\lg(b_1b_2b_3b_4)}=$__________.

11. 设 $\alpha_1,\alpha_2\in\mathbf{R}$, 且 $\dfrac{1}{2+\sin\alpha_1}+\dfrac{1}{2+\sin(2\alpha_2)}=2$, 则 $|10\pi-\alpha_1-\alpha_2|$ 的最小值等于__________.

12. 如图, 用 35 个单位正方形拼成一个矩形, 点 P_1,P_2,P_3,P_4 以及四个标记为 "▲" 的点在正方形的顶点处, 设集合 $\Omega=\{P_1,P_2,P_3,P_4\}$, 点 $P\in\Omega$. 过 P 作直线 l_P, 使得不在 l_P 上的 "▲" 的点分布在 l_P 的两侧. 用 $D_1(l_P)$ 和 $D_2(l_P)$ 分别表示 l_P 一侧和另一侧的 "▲" 的点到 l_P 的距离之和. 若过 P 的直线 l_P 中有且只有一条满足 $D_1(l_P)=D_2(l_P)$, 则 Ω 中所有这样的 P 为__________.



13. 关于 x、y 的二元一次方程组 $\begin{cases} x+5y=0, \\ 2x+3y=4 \end{cases}$ 的系数行列式 D 为 (　　).

A. $\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$　　B. $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$　　C. $\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$　　D. $\begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$

14. 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_n=\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$, $n\in\mathbf{N}^*$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$(　　).

A. 等于 $-\dfrac{1}{2}$　　B. 等于 0　　C. 等于 $\dfrac{1}{2}$　　D. 不存在

15. 已知 a,b,c 为实常数, 数列 $\{x_n\}$ 的通项 $x_n=an^2+bn+c$, $n\in\mathbf{N}^*$, 则“存在 $k\in\mathbf{N}^*$, 使得 $x_{100+k},x_{200+k},x_{300+k}$ 成等差数列” 的一个必要条件是 (　　).

A. $a\geq 0$　　B. $b\leq 0$　　C. $c=0$　　D. $a-2b+c=0$

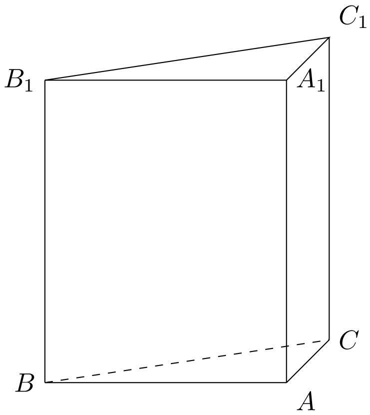
16. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知椭圆 $C_1:\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 和 $C_2:x^2+\dfrac{y^2}{9}=1$. P 为 C_1 上的动点, Q 为 C_2 上的动点, w 是 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$ 的最大值. 记 $\Omega=\{(P,Q)|P在C_1上,\ Q在C_2上,\ 且\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=w\}$, 则 Ω 中的元素有 (　　).

A. 2 个　　B. 4 个　　C. 8 个　　D. 无穷个

17. 如图, 直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的底面为直角三角形, 两直角边 AB 和 AC 的长分别为 4 和 2, 侧棱 AA_1 的长为 5.

(1) 求三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积;

(2) 设 M 是 BC 中点, 求直线 A_1M 与平面 ABC 所成角的大小.



18. 已知函数 $f(x)=\cos^2 x-\sin^2 x+\dfrac{1}{2}$, $x\in(0,\pi)$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调递增区间;

(2) 设 $\triangle ABC$ 为锐角三角形, 角 A 所对的边 $a=\sqrt{19}$, 角 B 所对的边 $b=5$, 若 $f(A)=0$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

19. 根据预测, 某地第 n $(n\in\mathbf{N}^*)$ 个月共享单车的投放量和损失量分别为 a_n 和 b_n(单位: 辆), 其中 $a_n=\begin{cases}5n^4+15, & 1\le n\le 3,\\ -10n+470, & n\ge 4,\end{cases}$ $b_n=n+5$, 第 n 个月底的共享单车的保有量是前 n 个月的累计投放量与累计损失量的差.

(1) 求该地区第 4 个月底的共享单车的保有量;

(2) 已知该地共享单车停放点第 n 个月底的单车容纳量 $S_n=-4(n-46)^2+8800$(单位: 辆). 设在某月底, 共享单车保有量达到最大, 问该保有量是否超出了此时停放点的单车容纳量?

20. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知椭圆 $\Gamma:\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$, A 为 Γ 的上顶点, P 为 Γ 上异于上、下顶点的动点. M 为 x 正半轴上的动点.

(1) 若 P 在第一象限, 且 $|OP|=\sqrt{2}$, 求 P 的坐标;

(2) 设 $P\left(\dfrac{8}{5},\dfrac{3}{5}\right)$. 若以 A,P,M 为顶点的三角形是直角三角形, 求 M 的横坐标;

(3) 若 $|MA|=|MP|$, 直线 AQ 与 Γ 交于另一点 C, 且 $\overrightarrow{AQ}=2\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{PQ}=4\overrightarrow{PM}$, 求直线 AQ 的方程.

21. 设定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足: 对于任意的 $x_1,x_2\in\mathbf{R}$, 当 $x_1<x_2$ 时, 都有 $f(x_1)\le f(x_2)$.

(1) 若 $f(x)=ax^3+1$, 求 a 的取值范围;

(2) 若 $f(x)$ 是周期函数, 证明: $f(x)$ 是常值函数;

(3) 设 $f(x)$ 恒大于零. $g(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的、恒大于零的周期函数, M 是 $g(x)$ 的最大值. 函数 $h(x)=f(x)g(x)$. 证明: “$h(x)$ 是周期函数” 的充要条件是 “$f(x)$ 是常值函数”.