

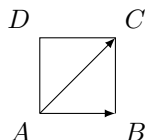
2021 年秋考

1. 已知  $z_1 = 1 + i$ ,  $z_2 = 2 + 3i$  ( $i$  是虚数单位), 则  $z_1 + z_2 =$ \_\_\_\_\_.

2. 已知  $A = \{x | 2x \leq 1\}$ ,  $B = \{-1, 0, 1\}$ , 则  $A \cap B =$ \_\_\_\_\_.

3. 已知圆  $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$ , 则该圆的圆心坐标为\_\_\_\_\_.

4. 如图, 正方形  $ABCD$  的边长为 3, 则  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} =$ \_\_\_\_\_.



5. 已知  $f(x) = \frac{3}{x} + 2$ , 则  $f^{-1}(1) =$ \_\_\_\_\_.

6. 已知二项式  $(x + a)^5$  展开式中,  $x^2$  项的系数为 80, 则  $a =$ \_\_\_\_\_.

7. 已知实数  $x, y$  满足  $\begin{cases} x \leq 3, \\ 2x - y - 2 \geq 0, \\ 3x + y - 8 \geq 0, \end{cases}$  则  $z = x - y$  的最大值为\_\_\_\_\_.

8. 已知无穷等比数列  $\{a_n\}$  和  $\{b_n\}$ , 满足  $a_1 = 3$ ,  $b_n = a_{2n}$ ,  $a_n$  的各项和为 9, 则数列  $\{b_n\}$  的各项和为\_\_\_\_\_.

9. 已知圆柱的底面半径为 1, 高为 2,  $AB$  为上底面圆的一条直径,  $C$  为下底面圆周上的一个动点, 则  $\triangle ABC$  的面积取值范围为\_\_\_\_\_.

10. 已知花博会有四个不同的场馆 A、B、C、D, 甲、乙两人每人选 2 个去参观, 则他们的选择中, 恰有一个场馆相同的概率为\_\_\_\_\_.

11. 已知抛物线:  $y^2 = 2px$  ( $p > 0$ ), 若第一象限的  $A, B$  两点在抛物线上, 焦点为  $F$ ,  $|AF| = 2$ ,  $|BF| = 4$ ,  $|AB| = 3$ , 则直线  $AB$  的斜率为\_\_\_\_\_.

12. 已知  $a_i \in \mathbb{N}^*$  ( $i = 1, 2, \dots, 9$ ), 若对任意的  $k \in \mathbb{N}^*$  ( $2 \leq k \leq 8$ ),  $a_k = a_{k-1} + 1$  或  $a_k = a_{k+1} - 1$  中有且仅有一个成立, 且  $a_1 = 6$ ,  $a_9 = 9$ , 则  $a_1 + a_2 + \dots + a_9$  的最小值为\_\_\_\_\_.

13. 下列函数中, 既是奇函数又是减函数的是 ( ).

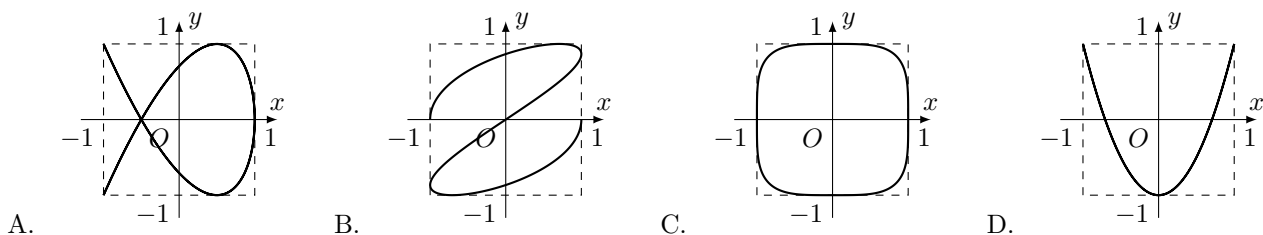
A.  $y = -3x$

B.  $y = x^3$

C.  $y = \log_3 x$

D.  $y = 3^x$

14. 已知参数方程  $\begin{cases} x = 3t - 4t^3, \\ y = 2t\sqrt{1-t^2}, \end{cases}$  ( $t \in [-1, 1]$ ), 下列选项的图中, 该参数方程对应的曲线为 ( ).



15. 已知  $f(x) = 3\sin x + 2$ , 对任意的  $x_1 \in [0, \frac{\pi}{2}]$ , 都存在  $x_2 \in [0, \frac{\pi}{2}]$ , 使得  $f(x_1) + 2f(x_2 + \theta) = 3$  成立, 则在下列选项中  $\theta$  可能的值为 ( ).

A.  $\frac{3\pi}{5}$       B.  $\frac{4\pi}{5}$       C.  $\frac{6\pi}{5}$       D.  $\frac{7\pi}{5}$

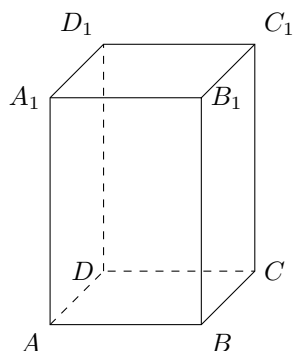
16. 已知两两不等的实数  $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3$  同时满足: ①  $x_1 < y_1, x_2 < y_2, x_3 < y_3$ ; ②  $x_1 + y_1 = x_2 + y_2 = x_3 + y_3$ ; ③  $x_1y_1 + x_3y_3 = 2x_2y_2 > 0$ , 则下列选项中恒成立的是 ( ).

A.  $2x_2 < x_1 + x_3$       B.  $2x_2 > x_1 + x_3$       C.  $x_2^2 < x_1x_3$       D.  $x_2^2 > x_1x_3$

17. 如图, 在长方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中, 已知  $AB = BC = 2, AA_1 = 3$ .

(1) 若点  $P$  是棱  $A_1D_1$  上的动点, 求三棱锥  $C - PAD$  的体积;

(2) 求直线  $AB_1$  与平面  $ACC_1A_1$  的夹角大小.



18. 已知在  $\triangle ABC$  中,  $A, B, C$  所对边分别为  $a, b, c$ , 且  $a = 3, b = 2c$ .

(1) 若  $A = \frac{2\pi}{3}$ , 求  $\triangle ABC$  的面积;

(2) 若  $2\sin B - \sin C = 1$ , 求  $\triangle ABC$  的周长.

19. 已知某企业今年 (2021 年) 第一季度的营业额为 1.1 亿元, 以后每个季度的营业额比上个季度增加 0.05 亿元, 该企业第一季度的利润为 0.16 亿元, 以后每季度比前一季度增长 4%.

(1) 求 2021 年起前 20 季度营业额的总和;

(2) 请问哪一季度的利润首次超过该季度营业额的 18%?

20. 已知椭圆  $\Gamma: \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ ,  $F_1, F_2$  是其左右焦点, 直线  $l$  过点  $P(m, 0)$  ( $m < -\sqrt{2}$ ), 交椭圆  $\Gamma$  于  $A, B$  两点, 且  $A, B$  都在  $x$  轴上方, 点  $A$  在线段  $BP$  上.

(1) 若  $B$  是上顶点,  $|\overrightarrow{BF_1}| = |\overrightarrow{PF_1}|$ , 求  $m$  的值;

(2) 若  $\overrightarrow{F_1A} \cdot \overrightarrow{F_2A} = \frac{1}{3}$ , 且原点  $O$  到直线  $l$  的距离为  $\frac{4\sqrt{15}}{15}$ , 求直线  $l$  的方程;

(3) 对于任意点  $P$ , 是否存在唯一直线  $l$ , 使得  $\overrightarrow{F_1A} \parallel \overrightarrow{F_2B}$  成立? 若存在, 求出直线  $l$  的斜率; 若不存在, 请说明理由.

21. 已知  $f(x)$  是定义在  $\mathbf{R}$  上的函数, 若对任意的  $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ ,  $x_1 - x_2 \in S$ , 均有  $f(x_1) - f(x_2) \in S$ , 则称  $f(x)$  是 “ $S$ - 关联” 的.

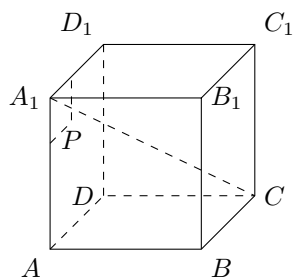
(1) 判断和证明  $f(x) = 2x + 1$  是否是 “[ $0, +\infty$ )- 关联” 的? 是否是 “[ $0, 1$ )- 关联” 的?

(2) 若  $f(x)$  是 “ $\{3\}$ - 关联” 的, 且当  $x \in [0, 3)$  时,  $f(x) = x^2 - 2x$ , 解不等式  $2 \leq f(x) \leq 3$ ;

(3) 证明: “ $f(x)$  是 ‘ $\{1\}$ - 关联’ 的, 且是 ‘ $[0, +\infty)$ - 关联’ 的” 当且仅当 “ $f(x)$  是 ‘ $[1, 2]$ - 关联’ 的”.

2020 年秋考

- 已知集合  $A = \{1, 2, 4\}, B = \{2, 4, 5\}$ , 则  $A \cap B =$ \_\_\_\_\_.
- 计算:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{3n-1} =$ \_\_\_\_\_.
- 已知复数  $z = 1 - 2i$  ( $i$  为虚数单位), 则  $|z| =$ \_\_\_\_\_.
- 已知函数  $f(x) = x^3$ , 则其反函数为\_\_\_\_\_.
- 已知  $x, y$  满足  $\begin{cases} x+y-2 \geq 0, \\ x+2y-3 \leq 0, \\ y \geq 0, \end{cases}$  则  $z = y - 2x$  的最大值为\_\_\_\_\_.
- 已知行列式  $\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 2 & c & d \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 6$ , 则行列式  $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} =$ \_\_\_\_\_.
- 已知等差数列  $\{a_n\}$  的首项  $a_1 \neq 0$ , 且满足  $a_1 + a_{10} = a_9$ , 则  $\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_9}{a_{10}} =$ \_\_\_\_\_.
- 已知有四个数  $1, 2, a, b$ , 这四个数的中位数为 3, 平均数为 4, 则  $ab =$ \_\_\_\_\_.
- 从 6 个人选 4 个人去值班, 每人值班一天, 第一天安排 1 个人, 第二天安排 1 个人, 第三天安排 2 个人, 则共有\_\_\_\_\_种安排情况.
- 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ , 直线  $l$  经过椭圆右焦点  $F$ , 交椭圆  $C$  于  $P, Q$  两点 (点  $P$  在第二象限), 若  $Q$  关于  $x$  轴对称的点为  $Q'$ , 且满足  $PQ \perp FQ'$ , 则直线  $l$  的方程为\_\_\_\_\_.
- 已知  $a \in \mathbf{R}$ , 若存在定义域为  $\mathbf{R}$  的函数  $f(x)$  同时满足下列两个条件, ① 对任意  $x_0 \in \mathbf{R}$ ,  $f(x_0)$  的值为  $x_0$  或  $x_0^2$ ; ② 关于  $x$  的方程  $f(x) = a$  无实数解; 则  $a$  的取值范围为\_\_\_\_\_.
- 已知  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_k$  ( $k \in \mathbf{N}^*$ ) 是平面内两两互不相等的向量, 满足  $|\vec{a}_1 - \vec{a}_2| = 1$ , 且  $|\vec{a}_i - \vec{b}_j| \in \{1, 2\}$  (其中  $i = 1, 2, j = 1, 2, \dots, k$ ), 则  $k$  的最大值为\_\_\_\_\_.
- 下列不等式恒成立的是 ( ).  
 A.  $a^2 + b^2 \leq 2ab$       B.  $a^2 + b^2 \geq -2ab$       C.  $a + b \geq 2\sqrt{|ab|}$       D.  $a + b \geq -2\sqrt{|ab|}$
- 已知直线方程  $3x + 4y + 1 = 0$  的一个参数方程可以是 ( ).  
 A.  $\begin{cases} x = 1 + 3t, \\ y = -1 + 4t \end{cases}$       B.  $\begin{cases} x = 1 - 4t, \\ y = -1 - 3t \end{cases}$       C.  $\begin{cases} x = 1 - 3t, \\ y = -1 + 4t \end{cases}$       D.  $\begin{cases} x = 1 + 4t, \\ y = -1 - 3t \end{cases}$
- 在棱长为 10 的正方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中,  $P$  为左侧面  $ADD_1A_1$  上一点, 已知点  $P$  到  $A_1D_1$  的距离为 3,  $P$  到  $AA_1$  的距离为 2, 则过点  $P$  且与  $A_1C$  平行的直线相交的正方体的面是 ( ).



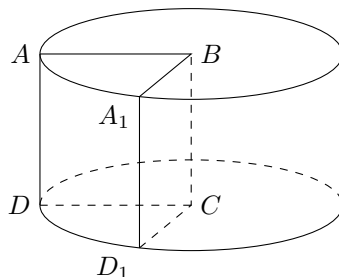
- A.  $ABCD$                       B.  $BB_1C_1C$                       C.  $CC_1D_1D$                       D.  $AA_1B_1B$

16. 命题  $p$ : 存在  $a \in \mathbf{R}$  且  $a \neq 0$ , 对任意的  $x \in \mathbf{R}$ , 均有  $f(x+a) < f(x) + f(a)$  恒成立. 已知命题  $q_1$ :  $f(x)$  单调递减, 且  $f(x) > 0$  恒成立; 命题  $q_2$ :  $f(x)$  单调递增, 且存在  $x_0 < 0$  使得  $f(x_0) = 0$ . 则下列说法正确的是 ( ).

- A.  $q_1, q_2$  都是  $p$  的充分条件                      B. 只有  $q_1$  是  $p$  的充分条件  
C. 只有  $q_2$  是  $p$  的充分条件                      D.  $q_1, q_2$  都不是  $p$  的充分条件

17. 已知边长为 1 的正方形  $ABCD$ , 正方形  $ABCD$  绕  $BC$  旋转形成一个圆柱.

- (1) 求圆柱的表面积;  
(2) 正方形  $ABCD$  绕  $BC$  逆时针旋转  $\frac{\pi}{2}$  到  $A_1BCD_1$ , 求  $AD_1$  与平面  $ABCD$  所成的角.



18. 已知  $f(x) = \sin \omega x (\omega > 0)$ .

- (1)  $f(x)$  的周期是  $4\pi$ , 求  $\omega$ , 并求此时  $f(x) = \frac{1}{2}$  的解集;  
(2) 已知  $\omega = 1$ ,  $g(x) = f^2(x) + \sqrt{3}f(-x)f(\frac{\pi}{2} - x)$ ,  $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$ , 求  $g(x)$  的值域.

19. 在研究某市交通情况时, 道路密度是指该路段上一定时间内通过的车辆数除以时间, 车辆密度是该路段一定时间内通过的车辆数除以该路段的长度, 现定义交通流量为  $v = \frac{q}{x}$ ,  $x$  为道路密度,  $q$  为车辆密度,  $v = f(x) =$

$$\begin{cases} 100 - 135(\frac{1}{3})^{\frac{80}{x}}, & 0 < x < 40, \\ -k(x - 40) + 85, & 40 \leq x \leq 80, \end{cases} \quad k > 0. \quad (1) \text{ 若交通流量 } v > 95, \text{ 求道路密度 } x \text{ 的取值范围;} \\ (2) \text{ 若道路密度 } x = 80 \text{ 时, 测得交通流量 } v = 50, \text{ 求车辆密度 } q \text{ 的最大值.}$$

20. 双曲线  $C_1: \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  与圆  $C_2: x^2 + y^2 = 4 + b^2$  ( $b > 0$ ) 交于点  $A(x_A, y_A)$  (第一象限), 曲线  $\Gamma$  由所有在  $C_1$  或  $C_2$  上, 且满足  $|x| > x_A$  的点组成,  $C_2$  与  $x$  轴的左、右交点分别记作  $F_1, F_2$ .

- (1) 若  $x_A = \sqrt{6}$ , 求  $b$  的值;  
(2) 若  $b = \sqrt{5}$ , 点  $P$  在曲线  $\Gamma$  上, 且在第一象限,  $|PF_1| = 8$ , 求  $\angle F_1PF_2$ ;

(3) 点  $D(0, \frac{b^2}{2} + 2)$ , 过该点的直线斜率为  $-\frac{b}{2}$  的  $l$  和  $\Gamma$  有且只有两个交点, 记作  $M, N$ , 用  $b$  表示  $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON}$ , 并求  $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON}$  的取值范围.

21. 已知有限数列  $\{a_n\}$ , 若满足  $|a_1 - a_2| \leq |a_1 - a_3| \leq \cdots \leq |a_1 - a_m|$ ,  $m$  是项数, 则称  $\{a_n\}$  满足性质  $P$ .

(1) 判断数列  $3, 2, 5, 1$  和  $4, 3, 2, 5, 1$  是否具有性质  $P$ , 请说明理由;

(2) 若首项  $a_1 = 1$ , 公比为  $q$  的等比数列, 项数为  $10$ , 具有性质  $P$ , 求  $q$  的取值范围;

(3) 若  $\{a_n\}$  是  $1, 2, \cdots, m$  的一个排列 ( $m \geq 4$ ),  $\{b_n\}$  符合  $b_k = a_{k+1} (k = 1, 2, \cdots, m-1)$ ,  $\{a_n\}, \{b_n\}$  都具有性质  $P$ , 求所有满足条件的  $\{a_n\}$ .

2019 年秋考

1. 已知集合  $A = (-\infty, 3)$ ,  $B = (2, +\infty)$ , 则  $A \cap B =$ \_\_\_\_\_.
2. 已知  $z \in \mathbf{C}$ . 若  $\frac{1}{z-5} = i$  ( $i$  为虚数单位), 则  $z =$ \_\_\_\_\_.
3. 已知向量  $\vec{a} = (1, 0, 2)$ ,  $\vec{b} = (2, 1, 0)$ , 则  $\vec{a}$  与  $\vec{b}$  的夹角为\_\_\_\_\_.
4. 在二项式  $(2x+1)^5$  的展开式中,  $x^2$  的系数是\_\_\_\_\_.
5. 已知  $x, y$  满足  $\begin{cases} x \geq 0, \\ y \geq 0, \\ x+y \leq 2, \end{cases}$  则  $2x-3y$  的最小值为\_\_\_\_\_.
6. 已知函数  $f(x)$  的周期为 1, 当  $0 < x \leq 1$  时,  $f(x) = \log_2 x$ , 则  $f\left(\frac{3}{2}\right)$  的值为\_\_\_\_\_.
7. 已知  $x, y \in \mathbf{R}^*$ , 且满足  $\frac{1}{x} + 2y = 3$ , 则  $\frac{y}{x}$  的最大值为\_\_\_\_\_.
8. 已知数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 且满足  $S_n + a_n = 2$ , 则  $S_5 =$ \_\_\_\_\_.
9. 过曲线  $y^2 = 4x$  的焦点  $F$  并垂直于  $x$  轴的直线分别与曲线  $y^2 = 4x$  交于  $A, B$ ,  $A$  在  $B$  的上方,  $M$  为抛物线上一点,  $\vec{OM} = \lambda \vec{OA} + (\lambda - 2) \vec{OB}$ , 则  $\lambda =$ \_\_\_\_\_.
10. 某三位数密码, 每位数字可在 0 至 9 这 10 个数字中任选一个, 则该三位数密码中, 恰有两位数字相同的概率是\_\_\_\_\_.
11. 已知数列  $\{a_n\}$  满足  $a_n < a_{n+1}$  ( $n \in \mathbf{N}^*$ ), 若  $P_n(n, a_n)$  ( $n \geq 3$ ) 均在双曲线  $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{6} = 1$  上, 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} |P_n P_{n+1}| =$ \_\_\_\_\_.
12. 已知  $f(x) = \left| \frac{2}{x-1} - a \right|$  ( $x > 1, a > 0$ ),  $f(x)$  的图像与  $x$  轴的交点为  $A$ , 若对于  $f(x)$  的图像上任意一点  $P$ , 在其图像上总存在另一点  $Q$  ( $P, Q$  异于  $A$ ), 满足  $AP \perp AQ$ , 且  $|AP| = |AQ|$ , 则  $a =$ \_\_\_\_\_.
13. 已知直线  $l$  的方程为  $2x - y + c = 0$ , 则  $l$  的一个方向向量  $\vec{d}$  可以是 ( ).  
 A.  $(2, -1)$                       B.  $(2, 1)$                       C.  $(-1, 2)$                       D.  $(1, 2)$
14. 一个直角三角形的两直角边长分别为 1 和 2, 将该三角形分别绕其两直角边所在直线旋转, 得到的两个圆锥的体积之比为 ( ).  
 A. 1                                  B. 2                                  C. 4                                  D. 8
15. 已知  $\omega \in \mathbf{R}$ , 函数  $f(x) = (x-6)^2 \cdot \sin(\omega x)$ . 若存在常数  $a \in \mathbf{R}$ , 使得  $f(x+a)$  为偶函数, 则  $\omega$  的值可能为 ( ).  
 A.  $\frac{\pi}{2}$                                   B.  $\frac{\pi}{3}$                                   C.  $\frac{\pi}{4}$                                   D.  $\frac{\pi}{5}$

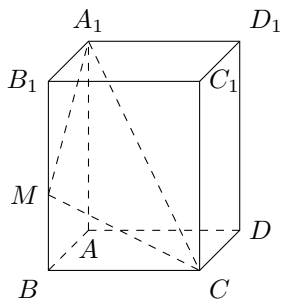
16. 已知  $\tan \alpha \tan \beta = \tan(\alpha + \beta)$ , 有下列两个结论: ① 存在  $\alpha$  在第一象限,  $\beta$  在第三象限; ② 存在  $\alpha$  在第二象限,  $\beta$  在第四象限; 则 ( ).

A. ①②均正确      B. ①②均错误      C. ①对②错      D. ①错②对

17. 如图, 在长方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中,  $M$  为  $BB_1$  上一点, 已知  $BM = 2$ ,  $CD = 3$ ,  $AD = 4$ ,  $AA_1 = 5$ .

(1) 求直线  $A_1C$  与平面  $ABCD$  的夹角;

(2) 求点  $A$  到平面  $A_1MC$  的距离.



18. 已知  $f(x) = ax + \frac{1}{x+1}$ ,  $a \in \mathbf{R}$ .

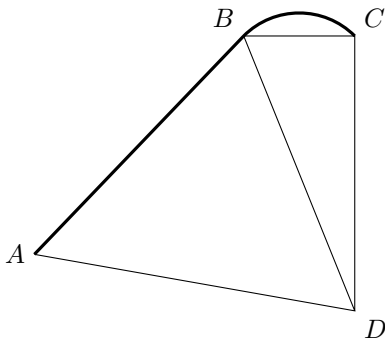
(1) 已知  $a = 1$  时, 求不等式  $f(x) + 1 < f(x+1)$  的解集;

(2) 若  $f(x)$  在  $x \in [1, 2]$  时有零点, 求  $a$  的取值范围.

19. 如图,  $A - B - C$  为海岸线,  $AB$  为线段,  $\widehat{BC}$  为四分之一圆弧.  $BD = 39.2\text{km}$ ,  $\angle BDC = 22^\circ$ ,  $\angle CBD = 68^\circ$ ,  $\angle BDA = 58^\circ$ .

(1) 求  $\widehat{BC}$  的长度;

(2) 若  $AB = 40\text{km}$ , 求  $D$  到海岸线  $A - B - C$  的最短距离 (精确到  $0.001\text{km}$ ).



20. 已知椭圆  $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$ ,  $F_1$ 、 $F_2$  为左、右焦点, 直线  $l$  过  $F_2$ , 交椭圆于  $A$ 、 $B$  两点.

(1) 若直线  $l$  垂直于  $x$  轴, 求  $|AB|$ ; (2) 当  $\angle F_1AB = 90^\circ$ ,  $A$  在  $x$  轴上方时, 求  $A$ 、 $B$  的坐标; (3) 若直线  $AF_1$  交  $y$  轴于  $M$ , 直线  $BF_1$  交  $y$  轴于  $N$ , 是否存在直线  $l$ , 使得  $S_{\triangle F_1AB} = S_{\triangle F_1MN}$ ? 若存在, 求出直线  $l$  的方程; 若不存在, 说明理由.

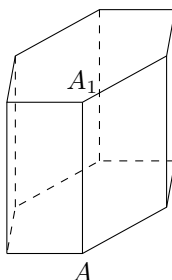
21. 数列  $\{a_n\}$  ( $n = 1, 2, 3, \dots, 100$ ) 有 100 项,  $a_1 = a$ , 且对任意  $n = 2, 3, \dots, 100$ , 存在  $a_n = a_i + d$ ,  $i = 1, 2, \dots, n-1$ . 若  $a_k$  与前  $k-1$  项中某一项相等, 则称  $a_k$  具有性质  $P$ .



- (1) 若  $a_1 = 1$ ,  $d = 2$ , 求  $a_4$  的所有可能的值;
- (2) 若  $\{a_n\}$  不是等差数列, 求证: 数列  $\{a_n\}$  中存在某些项具有性质  $P$ ;
- (3) 若  $\{a_n\}$  中恰有三项具有性质  $P$ , 这三项之和为  $c$ , 请用  $a, d, c$  表示  $a_1 + a_2 + \cdots + a_{100}$ .

2018 年秋考

- 行列式  $\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$  的值为\_\_\_\_\_.
- 双曲线  $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$  的渐近线方程为\_\_\_\_\_.
- 在  $(1+x)^7$  的二项展开式中,  $x^2$  项的系数为\_\_\_\_\_ (结果用数值表示).
- 设常数  $a \in \mathbf{R}$ , 函数  $f(x) = \log_2(x+a)$ . 若  $f(x)$  的反函数的图像经过点  $(3, 1)$ , 则  $a =$ \_\_\_\_\_.
- 已知复数  $z$  满足  $(1+i)z = 1 - 7i$  ( $i$  是虚数单位), 则  $|z| =$ \_\_\_\_\_.
- 记等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ . 若  $a_3 = 0$ ,  $a_6 + a_7 = 14$ , 则  $S_7 =$ \_\_\_\_\_.
- 已知  $\alpha \in \left\{-2, -1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 2, 3\right\}$ . 若幂函数  $f(x) = x^\alpha$  为奇函数, 且在  $(0, +\infty)$  上递减, 则  $\alpha =$ \_\_\_\_\_.
- 在平面直角坐标系中, 已知点  $A(-1, 0)$ 、 $B(2, 0)$ ,  $E$ 、 $F$  是  $y$  轴上的两个动点, 且  $|EF| = 2$ , 则  $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BF}$  的最小值为\_\_\_\_\_.
- 有编号互不相同的五个砝码, 其中 5 克、3 克、1 克砝码各一个, 2 克砝码两个. 从中随机选取三个, 则这三个砝码的总质量为 9 克的概率是\_\_\_\_\_ (结果用最简分数表示).
- 设等比数列  $\{a_n\}$  的通项公式为  $a_n = q^{n-1}$  ( $n \in \mathbf{N}^*$ ), 前  $n$  项和为  $S_n$ . 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{a_{n+1}} = \frac{1}{2}$ , 则  $q =$ \_\_\_\_\_.
- 已知常数  $a > 0$ , 函数  $f(x) = \frac{2^x}{2^x + ax}$  的图像经过点  $P\left(p, \frac{6}{5}\right)$ ,  $Q\left(q, -\frac{1}{5}\right)$ . 若  $2^{p+q} = 36pq$ , 则  $a =$ \_\_\_\_\_.
- 已知实数  $x_1$ 、 $x_2$ 、 $y_1$ 、 $y_2$  满足:  $x_1^2 + y_1^2 = 1$ ,  $x_2^2 + y_2^2 = 1$ ,  $x_1x_2 + y_1y_2 = \frac{1}{2}$ , 则  $\frac{|x_1 + y_1 - 1|}{\sqrt{2}} + \frac{|x_2 + y_2 - 1|}{\sqrt{2}}$  的最大值为\_\_\_\_\_.
- 设  $P$  是椭圆  $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{3} = 1$  上的动点, 则  $P$  到该椭圆的两个焦点的距离之和为 ( ).  
 A.  $2\sqrt{2}$                       B.  $2\sqrt{3}$                       C.  $2\sqrt{5}$                       D.  $4\sqrt{2}$
- 已知  $a \in \mathbf{R}$ , 则 “ $a > 1$ ” 是 “ $\frac{1}{a} < 1$ ” 的 ( ).  
 A. 充分非必要条件                      B. 必要非充分条件  
 C. 充要条件                      D. 既非充分又非必要条件
- 《九章算术》中, 称底面为矩形而有一侧棱垂直于底面的四棱锥为阳马. 设  $AA_1$  是正六棱柱的一条侧棱, 如图. 若阳马以该正六棱柱的顶点为顶点、以  $AA_1$  为底面矩形的一边, 则这样的阳马的个数是 ( ).



A. 4

B. 8

C. 12

D. 16

16. 设  $D$  是含数 1 的有限实数集,  $f(x)$  是定义在  $D$  上的函数. 若  $f(x)$  的图像绕原点逆时针旋转  $\frac{\pi}{6}$  后与原图像重合, 则在以下各项中,  $f(1)$  的可能取值只能是 ( ).

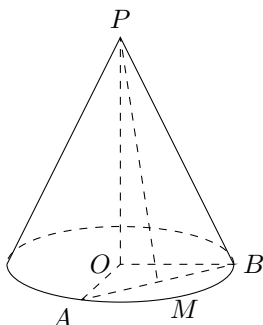
A.  $\sqrt{3}$ B.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C.  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 

D. 0

17. 已知圆锥的顶点为  $P$ , 底面圆心为  $O$ , 半径为 2.

(1) 设圆锥的母线长为 4, 求圆锥的体积;

(2) 设  $PO = 4$ ,  $OA$ 、 $OB$  是底面半径, 且  $\angle AOB = 90^\circ$ ,  $M$  为线段  $AB$  的中点, 如图, 求异面直线  $PM$  与  $OB$  所成的角的大小.



18. 设常数  $a \in \mathbf{R}$ , 函数  $f(x) = a \sin 2x + 2 \cos^2 x$ .

(1) 若  $f(x)$  为偶函数, 求  $a$  的值; (2) 若  $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3} + 1$ , 求方程  $f(x) = 1 - \sqrt{2}$  在区间  $[-\pi, \pi]$  上的解.

19. 某群体的人均通勤时间, 是指单日内该群体中成员从居住地到工作地的平均用时. 某地上班族  $S$  中的成员仅以自驾或公交方式通勤. 分析显示: 当  $S$  中  $x\%$  ( $0 \leq x \leq 100$ ) 的成员自驾时, 自驾群体的人均通勤时间为

$$f(x) = \begin{cases} 30, & 0 < x \leq 30, \\ 2x + \frac{1800}{x} - 90, & 30 < x < 100 \end{cases} \quad (\text{单位: 分钟}),$$

而公交群体的人均通勤时间不受  $x$  影响, 恒为 40 分钟. 试根据上述分析结果回答下列问题:

(1) 当  $x$  在什么范围内时, 公交群体的人均通勤时间少于自驾群体的人均通勤时间;

(2) 求该地上班族  $S$  的人均通勤时间  $g(x)$  的表达式; 讨论  $g(x)$  的单调性, 并说明其实际意义.

20. 设常数  $t > 2$ . 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 已知点  $F(2, 0)$ , 直线  $l: x = t$ , 曲线  $\Gamma: y^2 = 8x$  ( $0 \leq x \leq t, y \geq 0$ ).  $l$  与  $x$  轴交于点  $A$ 、与  $\Gamma$  交于点  $B$ .  $P$ 、 $Q$  分别是曲线  $\Gamma$  与线段  $AB$  上的动点.

(1) 用  $t$  表示点  $B$  到点  $F$  的距离;

(2) 设  $t = 3$ ,  $|FQ| = 2$ , 线段  $OQ$  的中点在直线  $FP$  上, 求  $\triangle AQP$  的面积;

(3) 设  $t = 8$ , 是否存在以  $FP$ 、 $FQ$  为邻边的矩形  $FPEQ$ , 使得点  $E$  在  $\Gamma$  上? 若存在, 求点  $P$  的坐标; 若不存在, 说明理由.

21. 给定无穷数列  $\{a_n\}$ , 若无穷数列  $\{b_n\}$  满足: 对任意  $n \in \mathbf{N}^*$ , 都有  $|b_n - a_n| \leq 1$ , 则称  $\{b_n\}$  与  $\{a_n\}$  “接近”.

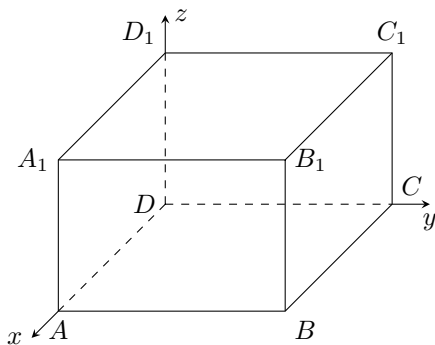
(1) 设  $\{a_n\}$  是首项为 1, 公比为  $\frac{1}{2}$  的等比数列,  $b_n = a_{n+1} + 1$ ,  $n \in \mathbf{N}^*$ . 判断数列  $\{b_n\}$  是否与  $\{a_n\}$  接近,

并说明理由;

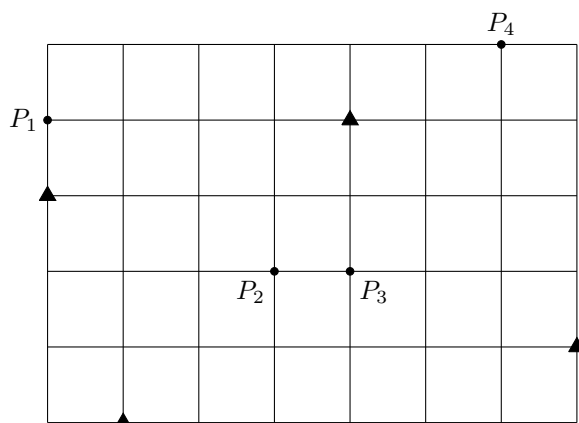
(2) 设数列  $\{a_n\}$  的前四项为:  $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 4, a_4 = 8$ ,  $\{b_n\}$  是一个与  $\{a_n\}$  接近的数列, 记集合  $M = \{x | x = b_i, i = 1, 2, 3, 4\}$ , 求  $M$  中元素的个数  $m$ ;

(3) 已知  $\{a_n\}$  是公差为  $d$  的等差数列. 若存在数列  $\{b_n\}$  满足:  $\{b_n\}$  与  $\{a_n\}$  接近, 且在  $b_2 - b_1, b_3 - b_2, \dots, b_{201} - b_{200}$  中至少有 100 个为正数, 求  $d$  的取值范围.

1. 已知集合  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $B = \{3, 4, 5\}$ , 则  $A \cap B =$ \_\_\_\_\_.
2. 若排列数  $P_6^m = 6 \times 5 \times 4$ , 则  $m =$ \_\_\_\_\_.
3. 不等式  $\frac{x-1}{x} > 1$  的解集为\_\_\_\_\_.
4. 已知球的体积为  $36\pi$ , 则该球主视图的面积等于\_\_\_\_\_.
5. 已知复数  $z$  满足  $z + \frac{3}{z} = 0$ , 则  $|z| =$ \_\_\_\_\_.
6. 设双曲线  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $b > 0$ ) 的焦点为  $F_1, F_2$ ,  $P$  为该双曲线上的一点, 若  $|PF_1| = 5$ , 则  $|PF_2| =$ \_\_\_\_\_.
7. 如图, 以长方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  的顶点  $D$  为坐标原点, 过  $D$  的三条棱所在的直线为坐标轴, 建立空间直角坐标系. 若  $\overrightarrow{DB_1}$  的坐标为  $(4, 3, 2)$ , 则  $\overrightarrow{AC_1}$  的坐标是\_\_\_\_\_.



8. 定义在  $(0, +\infty)$  上的函数  $y = f(x)$  的反函数为  $y = f^{-1}(x)$ . 若  $g(x) = \begin{cases} 3^x - 1, & x \leq 0, \\ f(x), & x > 0 \end{cases}$  为奇函数, 则  $f^{-1}(x) = 2$  的解为\_\_\_\_\_.
9. 已知四个函数: ①  $y = -x$ , ②  $y = -\frac{1}{x}$ , ③  $y = x^3$ , ④  $y = x^{\frac{1}{2}}$ . 从中任选 2 个, 则事件“所选 2 个函数的图像有且仅有一个公共点”的概率为\_\_\_\_\_.
10. 已知数列  $\{a_n\}$  和  $\{b_n\}$ , 其中  $a_n = n^2$ ,  $n \in \mathbf{N}^*$ ,  $\{b_n\}$  的项是互不相等的正整数. 若对于任意  $n \in \mathbf{N}^*$ ,  $\{b_n\}$  的第  $a_n$  项等于  $\{a_n\}$  的第  $b_n$  项, 则  $\frac{\lg(b_1 b_4 b_9 b_{16})}{\lg(b_1 b_2 b_3 b_4)} =$ \_\_\_\_\_.
11. 设  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{R}$ , 且  $\frac{1}{2 + \sin \alpha_1} + \frac{1}{2 + \sin(2\alpha_2)} = 2$ , 则  $|10\pi - \alpha_1 - \alpha_2|$  的最小值等于\_\_\_\_\_.
12. 如图, 用 35 个单位正方形拼成一个矩形, 点  $P_1, P_2, P_3, P_4$  以及四个标记为“▲”的点在正方形的顶点处, 设集合  $\Omega = \{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ , 点  $P \in \Omega$ . 过  $P$  作直线  $l_P$ , 使得不在  $l_P$  上的“▲”的点分布在  $l_P$  的两侧. 用  $D_1(l_P)$  和  $D_2(l_P)$  分别表示  $l_P$  一侧和另一侧的“▲”的点到  $l_P$  的距离之和. 若过  $P$  的直线  $l_P$  中有且只有一条满足  $D_1(l_P) = D_2(l_P)$ , 则  $\Omega$  中所有这样的  $P$  为\_\_\_\_\_.



13. 关于  $x, y$  的二元一次方程组  $\begin{cases} x + 5y = 0, \\ 2x + 3y = 4 \end{cases}$  的系数行列式  $D$  为 ( ).

A.  $\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$

B.  $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$

C.  $\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$

D.  $\begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$

14. 在数列  $\{a_n\}$  中,  $a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ ,  $n \in \mathbf{N}^*$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  ( ).

A. 等于  $-\frac{1}{2}$

B. 等于 0

C. 等于  $\frac{1}{2}$

D. 不存在

15. 已知  $a, b, c$  为实常数, 数列  $\{x_n\}$  的通项  $x_n = an^2 + bn + c$ ,  $n \in \mathbf{N}^*$ , 则“存在  $k \in \mathbf{N}^*$ , 使得  $x_{100+k}, x_{200+k}, x_{300+k}$  成等差数列”的一个必要条件是 ( ).

A.  $a \geq 0$

B.  $b \leq 0$

C.  $c = 0$

D.  $a - 2b + c = 0$

16. 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 已知椭圆  $C_1: \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{4} = 1$  和  $C_2: x^2 + \frac{y^2}{9} = 1$ .  $P$  为  $C_1$  上的动点,  $Q$  为  $C_2$  上的动点,  $w$  是  $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}$  的最大值. 记  $\Omega = \{(P, Q) | P \text{ 在 } C_1 \text{ 上, } Q \text{ 在 } C_2 \text{ 上, 且 } \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = w\}$ , 则  $\Omega$  中的元素有 ( ).

A. 2 个

B. 4 个

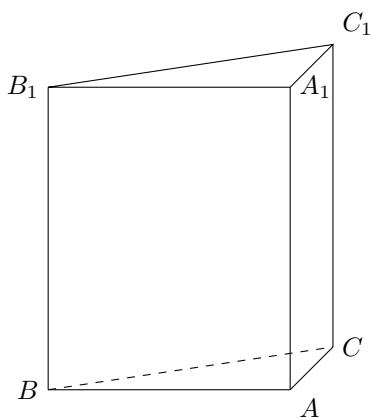
C. 8 个

D. 无穷个

17. 如图, 直三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  的底面为直角三角形, 两直角边  $AB$  和  $AC$  的长分别为 4 和 2, 侧棱  $AA_1$  的长为 5.

(1) 求三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  的体积;

(2) 设  $M$  是  $BC$  中点, 求直线  $A_1M$  与平面  $ABC$  所成角的大小.



18. 已知函数  $f(x) = \cos^2 x - \sin^2 x + \frac{1}{2}$ ,  $x \in (0, \pi)$ .
- (1) 求  $f(x)$  的单调递增区间;
  - (2) 设  $\triangle ABC$  为锐角三角形, 角  $A$  所对的边  $a = \sqrt{19}$ , 角  $B$  所对的边  $b = 5$ , 若  $f(A) = 0$ , 求  $\triangle ABC$  的面积.
19. 根据预测, 某地第  $n$  ( $n \in \mathbf{N}^*$ ) 个月共享单车的投放量和损失量分别为  $a_n$  和  $b_n$  (单位: 辆), 其中  $a_n = \begin{cases} 5n^4 + 15, & 1 \leq n \leq 3, \\ -10n + 470, & n \geq 4, \end{cases}$   $b_n = n + 5$ , 第  $n$  个月底的共享单车的保有量是前  $n$  个月的累计投放量与累计损失量的差.
- (1) 求该地区第 4 个月底的共享单车的保有量;
  - (2) 已知该地共享单车停放点第  $n$  个月底的单车容纳量  $S_n = -4(n - 46)^2 + 8800$  (单位: 辆). 设在某月底, 共享单车保有量达到最大, 问该保有量是否超出了此时停放点的单车容纳量?
20. 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 已知椭圆  $\Gamma: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ ,  $A$  为  $\Gamma$  的上顶点,  $P$  为  $\Gamma$  上异于上、下顶点的动点.  $M$  为  $x$  正半轴上的动点.
- (1) 若  $P$  在第一象限, 且  $|OP| = \sqrt{2}$ , 求  $P$  的坐标;
  - (2) 设  $P\left(\frac{8}{5}, \frac{3}{5}\right)$ . 若以  $A, P, M$  为顶点的三角形是直角三角形, 求  $M$  的横坐标;
  - (3) 若  $|MA| = |MP|$ , 直线  $AQ$  与  $\Gamma$  交于另一点  $C$ , 且  $\overrightarrow{AQ} = 2\overrightarrow{AC}$ ,  $\overrightarrow{PQ} = 4\overrightarrow{PM}$ , 求直线  $AQ$  的方程.
21. 设定义在  $\mathbf{R}$  上的函数  $f(x)$  满足: 对于任意的  $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ , 当  $x_1 < x_2$  时, 都有  $f(x_1) \leq f(x_2)$ .
- (1) 若  $f(x) = ax^3 + 1$ , 求  $a$  的取值范围;
  - (2) 若  $f(x)$  是周期函数, 证明:  $f(x)$  是常值函数;
  - (3) 设  $f(x)$  恒大于零.  $g(x)$  是定义在  $\mathbf{R}$  上的、恒大于零的周期函数,  $M$  是  $g(x)$  的最大值. 函数  $h(x) = f(x)g(x)$ . 证明: “ $h(x)$  是周期函数” 的充要条件是 “ $f(x)$  是常值函数”.