

1. (000061) 填空题:

(1) 若点  $(2, \sqrt{2})$  在幂函数  $y = x^a$  的图像上, 则该幂函数的表达式为\_\_\_\_\_; 若点  $(2, \sqrt{2})$  在指数函数  $y = a^x (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$  的图像上, 则该指数函数的表达式为\_\_\_\_\_; 若点  $(\sqrt{2}, 2)$  在对数函数  $y = \log_a x (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$  的图像上, 则该对数函数的表达式为\_\_\_\_\_.

(2) 若幂函数  $y = x^k$  在区间  $(0, +\infty)$  上是严格减函数, 则实数  $k$  的取值范围为\_\_\_\_\_.

(3) 已知常数  $a > 0$  且  $a \neq 1$ , 假设无论  $a$  为何值, 函数  $y = a^{x-2} + 1$  的图像恒经过一个定点. 则这个点的坐标为\_\_\_\_\_.

2. (000062) 选择题:

(1) 若指数函数  $y = a^x (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$  在  $\mathbf{R}$  上是严格减函数, 则下列不等式中, 一定能成立的是 ( ).

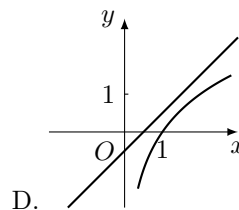
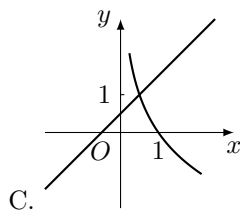
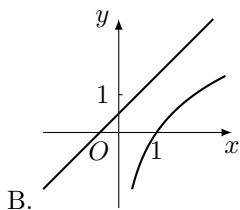
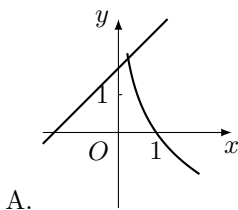
A.  $a > 1$

B.  $a < 0$

C.  $a(a-1) < 0$

D.  $a(a-1) > 0$

(2) 在同一平面直角坐标系中, 一次函数  $y = x + a$  与对数函数  $y = \log_a x (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$  的图像关系可能是 ( ).



3. (000063) 求下列函数的定义域:

(1)  $y = (x-1)^{\frac{5}{2}};$

(2)  $y = 3^{\sqrt{x-1}};$

(3)  $y = \lg \frac{1+x}{1-x}.$

4. (000065) 设点  $(\sqrt{2}, 2)$  在幂函数  $y_1 = x^a$  的图像上, 点  $(-2, \frac{1}{4})$  在幂函数  $y_2 = x^b$  的图像上. 当  $x$  取何值时,  $y_1 = y_2$ ?

5. (000069) 填空题:

(1) 已知  $m \in \mathbf{Z}$ , 设幂函数  $y = x^{m^2-4m}$  的图像关于原点成中心对称, 且与  $x$  轴及  $y$  轴均无交点, 则  $m$  的值为\_\_\_\_\_.

(2) 设  $a, b$  为常数, 若  $0 < a < 1, b < -1$ , 则函数  $y = a^x + b$  的图像必定不经过第\_\_\_\_\_象限.

6. (000070) 选择题:

(1) 若  $m > n > 1$ , 而  $0 < x < 1$ , 则下列不等式正确的是 ( ).

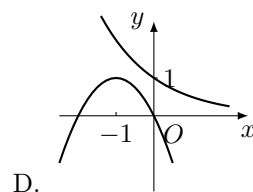
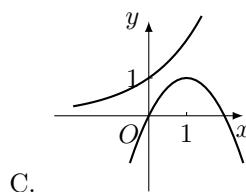
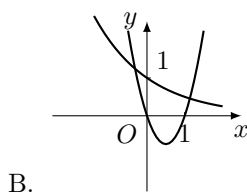
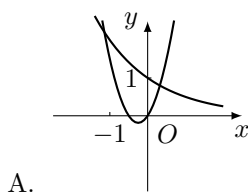
A.  $m^x < n^x$

B.  $x^m < x^n$

C.  $\log_x m > \log_x n$

D.  $\log_m x < \log_n x$

(2) 在同一平面直角坐标系中, 二次函数  $y = ax^2 + bx$  与指数函数  $y = (\frac{b}{a})^x$  的图像关系可能为 ( ).



7. (000072) 在同一平面直角坐标系中, 作出函数  $y = (\frac{1}{2})^x$  及  $y = x^{\frac{1}{2}}$  的大致图像, 并求方程  $(\frac{1}{2})^x = x^{\frac{1}{2}}$  的解的个数.

8. (000076) 求函数  $y = \frac{1}{2-x} + \sqrt{x^2-1}$  的定义域.

9. (000080) 分别作出下列函数的大致图像, 并指出它们的单调区间:

(1)  $y = |x^2 - 4x|$ ;

(2)  $y = 2|x| - 3$ .

10. (000083) 邮局规定: 当邮件质量不超过 100g 时, 每 20g 邮费 0.8 元, 且不足 20g 时按 20g 计算; 超过 100g 时, 超过 100g 的部分按每 100g 邮费 2 元计算, 且不足 100g 按 100g 计算; 同时规定邮件总质量不得超过 2000g. 请写出邮费关于邮件质量的函数表达式, 并计算 50g 和 500g 的邮件分别收多少邮费.

11. (000084) 若函数  $y = (a^2 + 4a - 5)x^2 - 4(a - 1)x + 3$  的图像都在  $x$  轴上方 (不含  $x$  轴), 求实数  $a$  的取值范围.

12. (000085) 已知  $y = f(x)$  是奇函数, 其定义域为  $\mathbf{R}$ ; 而  $y = g(x)$  是偶函数, 其定义域为  $D$ . 判断函数  $y = f(x)g(x)$  的奇偶性, 并说明理由.

13. (000092) 作出函数  $y = (x^2 - 1)^2 - 1$  的大致图像, 写出它的单调区间, 并证明你的结论.

14. (000094) 设函数  $y = f(x)$ ,  $x \in \mathbf{R}$  的反函数是  $y = f^{-1}(x)$ .

(1) 如果  $y = f(x)$  是奇函数, 那么  $y = f^{-1}(x)$  的奇偶性如何?

(2) 如果  $y = f(x)$  在定义域上是严格增函数, 那么  $y = f^{-1}(x)$  的单调性如何?

15. (000330) 若函数  $f(x) = \log_2 \frac{x-a}{x+1}$  的反函数的图像过点  $(-2, 3)$ , 则  $a =$ \_\_\_\_\_.

16. (000342) 若函数  $f(x) = \begin{cases} 2^x, & x \leq 0, \\ -x^2 + m, & x > 0 \end{cases}$  的值域为  $(-\infty, 1]$ , 则实数  $m$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

17. (000349) 若函数  $f(x) = \log_2(x+1) + a$  的反函数的图像经过点  $(4, 1)$ , 则实数  $a =$ \_\_\_\_\_.

18. (000355) 有以下命题:

① 若函数  $f(x)$  既是奇函数又是偶函数, 则  $f(x)$  的值域为  $\{0\}$ ;

② 若函数  $f(x)$  是偶函数, 则  $f(|x|) = f(x)$ ;

③ 若函数  $f(x)$  在其定义域内不是单调函数, 则  $f(x)$  不存在反函数;

④ 若函数  $f(x)$  存在反函数  $f^{-1}(x)$ , 且  $f^{-1}(x)$  与  $f(x)$  不完全相同, 则  $f(x)$  与  $f^{-1}(x)$  图像的公共点必在直线  $y = x$  上;

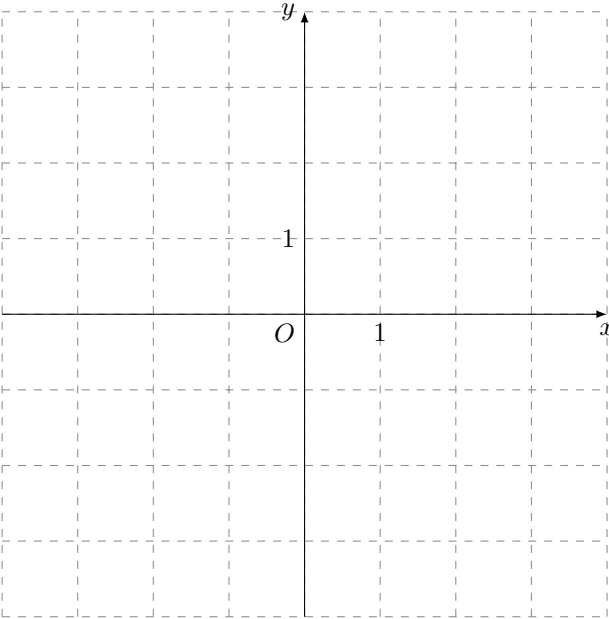
其中真命题的序号是\_\_\_\_\_ (写出所有真命题的序号).

19. (000381) 若点  $(8, 4)$  在函数  $f(x) = 1 + \log_a x$  图像上, 则  $f(x)$  的反函数为\_\_\_\_\_.
20. (000388) 已知函数  $f(x) = a^x - 1$  的图像经过  $(1, 1)$  点, 则  $f^{-1}(3) =$ \_\_\_\_\_.
21. (000450) 函数  $f(x) = 2^x + m$  的反函数为  $y = f^{-1}(x)$ , 且  $y = f^{-1}(x)$  的图像过点  $Q(5, 2)$ , 那么  $m =$ \_\_\_\_\_.
22. (000472) 若函数  $f(x) = x^a$  的反函数的图像经过点  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ , 则  $a =$ \_\_\_\_\_.
23. (000486) 函数  $f(x) = \lg(2 - x)$  的定义域是\_\_\_\_\_.
24. (000498) 已知幂函数的图像过点  $(2, \frac{1}{4})$ , 则该幂函数的单调递增区间是\_\_\_\_\_.
25. (000520) 已知函数  $f(x) = a \cdot 2^x + 3 - a$  ( $a \in \mathbf{R}$ ) 的反函数为  $y = f^{-1}(x)$ , 则函数  $y = f^{-1}(x)$  的图像经过的定点的坐标为\_\_\_\_\_.
26. (000567) 函数  $f(x) = \sqrt{1 - \lg x}$  的定义域为\_\_\_\_\_.
27. (000582) 数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 若点  $(n, S_n)$  ( $n \in \mathbf{N}^*$ ) 在函数  $y = \log_2(x + 1)$  的反函数的图像上, 则  $a_n =$ \_\_\_\_\_.
28. (000590) 已知函数  $f(x) = 1 + \log_a x$ ,  $y = f^{-1}(x)$  是函数  $y = f(x)$  的反函数, 若  $y = f^{-1}(x)$  的图像过点  $(2, 4)$ , 则  $a$  的值为\_\_\_\_\_.
29. (000607) 函数  $y = \log_2(1 - \frac{1}{x})$  的定义域为\_\_\_\_\_.
30. (000634) 若函数  $f(x) = 4^x + 2^{x+1}$  的图像与函数  $y = g(x)$  的图像关于直线  $y = x$  对称, 则  $g(3) =$ \_\_\_\_\_.
31. (000646) 函数  $y = \sqrt{2x - x^2}$  的定义域是\_\_\_\_\_.
32. (000655) 若将函数  $f(x) = |\sin(\omega x - \frac{\pi}{8})|$  ( $\omega > 0$ ) 的图像向左平移  $\frac{\pi}{12}$  个单位后, 所得图像对应的函数为偶函数, 则  $\omega$  的最小值是\_\_\_\_\_.
33. (000675) 已知定义在  $\mathbf{R}$  上的函数  $f(x)$  满足: ①  $f(x) + f(2 - x) = 0$ ; ②  $f(x) - f(-2 - x) = 0$ ; ③ 在  $[-1, 1]$  上的表达式为  $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1 - x^2}, & x \in [-1, 0], \\ 1 - x, & x \in (0, 1] \end{cases}$ , 则函数  $f(x)$  与函数  $g(x) = \begin{cases} 2^x, & x \leq 0, \\ \log_{\frac{1}{2}} x, & x > 0 \end{cases}$  的图像在区间  $[-3, 3]$  上的交点的个数为\_\_\_\_\_.
34. (000715) 设奇函数  $f(x)$  的定义域为  $\mathbf{R}$ , 当  $x > 0$  时,  $f(x) = x + \frac{m^2}{x} - 1$  (这里  $m$  为正常数). 若  $f(x) \leq m - 2$  对一切  $x \leq 0$  成立, 则  $m$  的取值范围为\_\_\_\_\_.
35. (000738) 函数  $f(x) = \lg(3^x - 2^x)$  的定义域为\_\_\_\_\_.
36. (000758) 若函数  $f(x) = \sqrt{8 - ax - 2x^2}$  是偶函数, 则该函数的定义域是\_\_\_\_\_.
37. (000778) 函数  $y = \sqrt{\lg(x + 2)}$  的定义域为\_\_\_\_\_.
38. (000845) 已知函数  $f(x) = \lg(\sqrt{x^2 + 1} + ax)$  的定义域为  $\mathbf{R}$ , 则实数  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

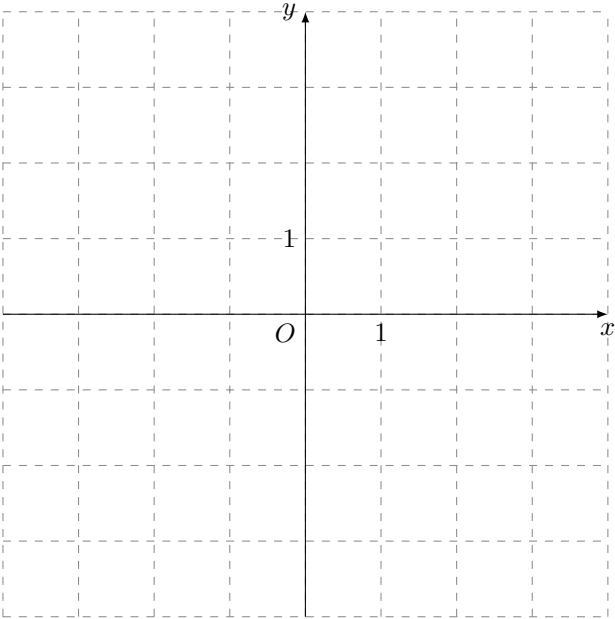
39. (000851) 已知函数  $f(x) = \frac{3x+1}{x+a}$  ( $a \neq \frac{1}{3}$ ) 的图像与它的反函数的图像重合, 则实数  $a$  的值为\_\_\_\_\_.
40. (000859) 设  $a > 0$  且  $a \neq 1$ , 若函数  $f(x) = a^{x-1} + 2$  的反函数的图像经过定点  $P$ , 则点  $P$  的坐标是\_\_\_\_\_.
41. (000868) 函数  $f(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{x-1}$  的定义域为\_\_\_\_\_.
42. (000931) 函数  $y = \log_3(x-1)$  的定义域是\_\_\_\_\_.
43. (000949) 已知函数  $f(x) = x^3 + \lg(\sqrt{x^2+1} + x)$ , 若  $f(x)$  的定义域中的  $a$ 、 $b$  满足  $f(-a) + f(-b) - 3 = f(a) + f(b) + 3$ , 则  $f(a) + f(b) =$ \_\_\_\_\_.
44. (000954) 函数  $y = \sqrt{2x-1}$  的定义域是\_\_\_\_\_ (用区间表示).
45. (000961) 已知函数  $f(x) = 2^x - a \cdot 2^{-x}$  的反函数是  $f^{-1}(x)$ ,  $f^{-1}(x)$  在定义域上是奇函数, 则正实数  $a =$ \_\_\_\_\_.
46. (001160) 已知函数  $f(x) = 3x + 5$ ,  $x \in \mathbf{R}$ , 求  $f(-1)$ ,  $f(10)$ ,  $f(a)$ ,  $f(a^2 + 1)$ . 并写出函数  $y = f(f(x))$  的定义域, 对应法则以及值域.
47. (001161) 下列两个函数是同一个函数的有\_\_\_\_\_.
- (1)  $y = \frac{x^2-1}{x-1}$  与  $y = x+1$ ;
  - (2)  $y = \frac{x^3}{x}$  与  $y = x^2$ ;
  - (3)  $y = \sqrt{x^2-1}$  与  $y = \sqrt[3]{x^3-1}$ ;
  - (4)  $f(x) = x^2 - 2x - 1$  与  $g(t) = t^2 - 2t - 1$ ;
  - (5)  $f(x) = 2^x$ ,  $x \in \{0, 1, 2, 3\}$  与  $g(x) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{5}{6}x + 1$ ,  $x \in \{0, 1, 2, 3\}$ .
48. (001164) 写出下列函数的定义域 (写在对应关系的右边):
- (1)  $f(x) = \frac{6}{x^2 - 3x + 2}$ ;
  - (2)  $f(x) = \frac{3x-1}{2x^3 + 4x^2 + x - 7}$ ;
  - (3)  $f(x) = \frac{\sqrt[3]{4x+8}}{\sqrt{3x-2}}$ ;
  - (4)  $f(x) = \sqrt{2x-1} + \sqrt{1-2x} + 4$ ;
  - (5)  $f(x) = \sqrt{x^2-4}$ ;
  - (6)  $f(x) = \frac{\sqrt{2x+1}}{x-3}$ .
49. (001165) (1) 函数  $f(x) = x^2$ ,  $x \in [0, 1]$  的值域为\_\_\_\_\_;
- (2) 函数  $f(x) = -x$ ,  $x \in [-1, 0)$  的值域为\_\_\_\_\_;
- (3) 函数  $f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x \leq 1, \\ -x, & -1 \leq x < 0. \end{cases}$  的值域为\_\_\_\_\_.
50. (001166) 函数  $f(x) = \sqrt{kx^2 + 4kx + 3}$  的定义域为  $\mathbf{R}$ , 求实数  $k$  的取值范围.
51. (001167) 求函数  $y = x^3 + 1$  的值域 (要详细过程).

52. (001173) 在以下坐标系中分别作出下列函数的图像 (用铅笔, 要求清晰, 交代关键信息):

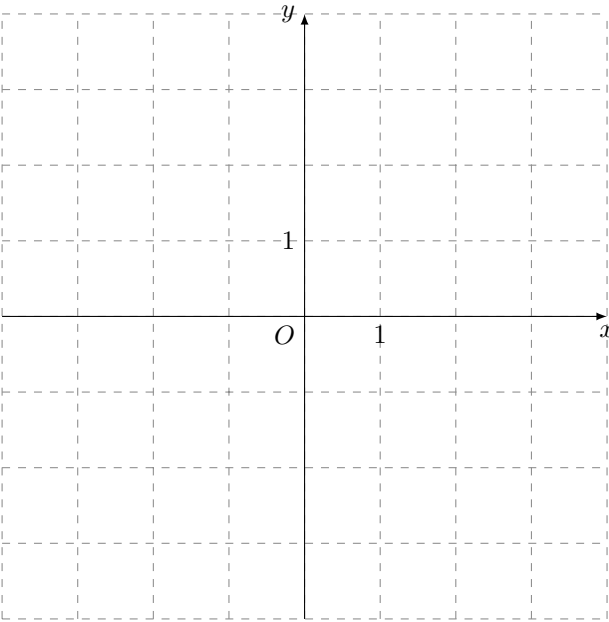
(1)  $y = \sqrt{|x|}$ ;



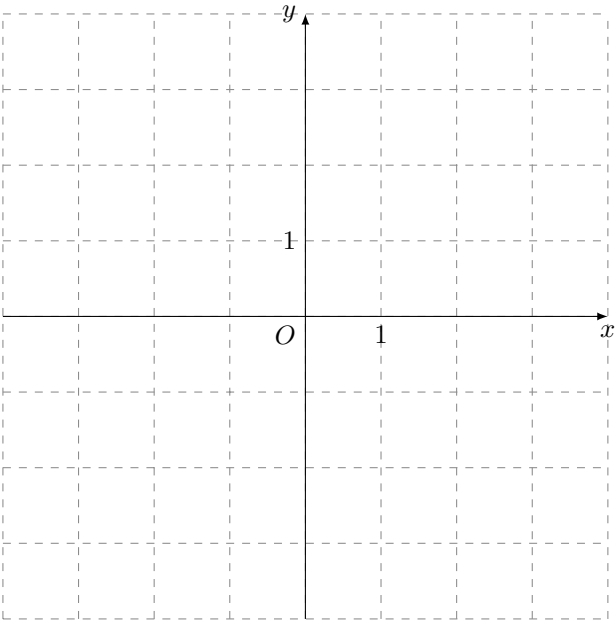
(2)  $y = |x - 1| - |x + 1|$ ;



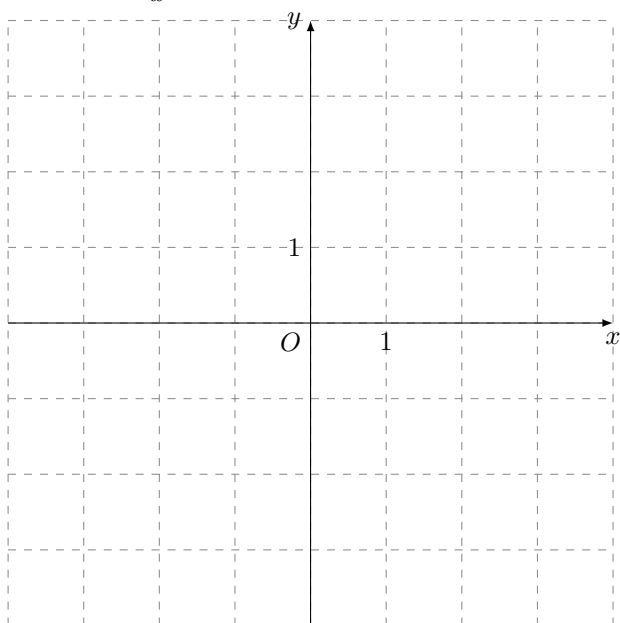
(3)  $y = x - [x]$ ;



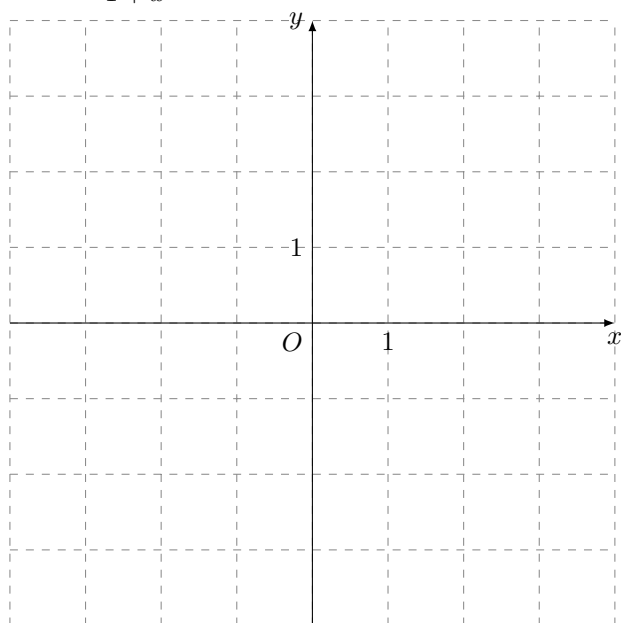
(4)  $y = x + \frac{1}{x}$ ;



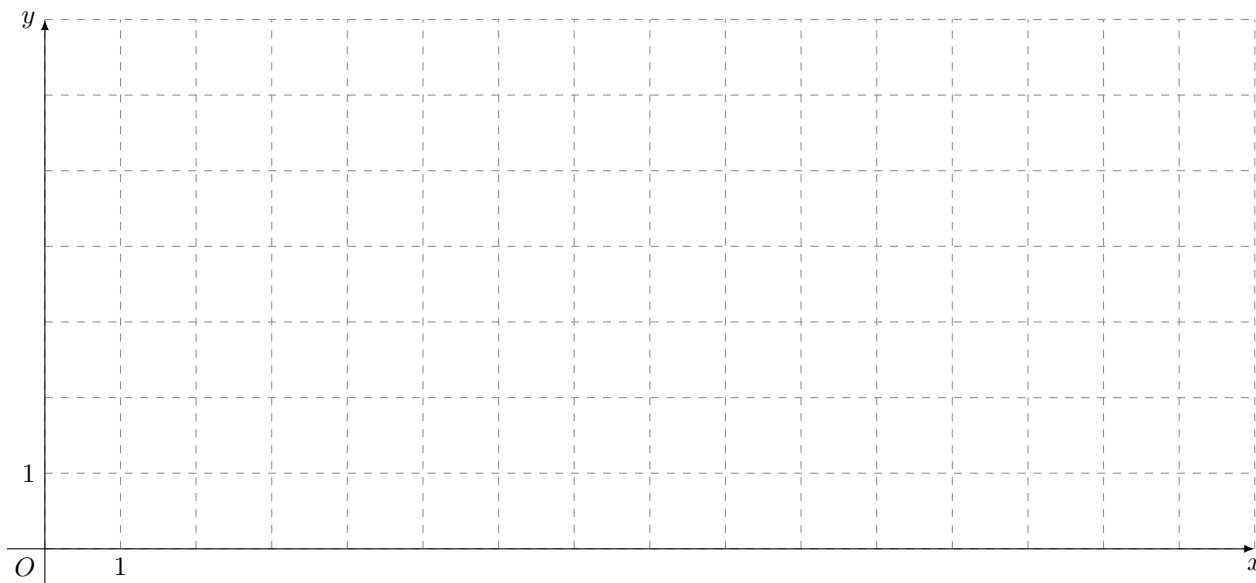
(5)  $y = x - \frac{1}{x}$ ;



(6)  $y = \frac{6x}{1+x^2}$ .



53. (001174) 某种茶杯每个 0.5 元, 买  $x$  个茶杯的钱数为  $y$  元. 画出  $y$  关于  $x$  的函数的图像.



54. (001175) 证明: 函数  $y = \frac{1}{x}$  的图像关于原点对称 (一个图形关于原点对称是指任取该图形上的一点, 它关于原点对称所得的点也在该图形上).

55. (001176) 求证: 函数  $y = x^3$  的图像不是一条直线 (本题不能使用斜率的概念).

56. (001177) 试求出函数  $y = x^2$  的图像分别进行如下变换后, 所得的各个图像对应的函数.

- (1) 向右平移 2 个单位;
- (2) 向上平移 1 个单位;
- (3) 先向右平移 2 个单位, 再向上平移 1 个单位;
- (4) 先向上平移 1 个单位, 再向右平移 2 个单位

57. (001178) 试求出函数  $y = \sqrt{x}$  的图像分别进行如下变换后所得的各个图像对应的函数.

(1) 图像上的每一点的横坐标变为原来的 2 倍;

(2) 图像上的每一点的纵坐标变为原来的  $\frac{1}{2}$ ;

(3) 图像上的每一点的横坐标变为原来的 2 倍, 然后向上平移 3 个单位, 所得图像上每一点的纵坐标变为原来的 3 倍, 再向左平移 2 个单位;

(4) 向左平移 3 个单位, 然后将所得图像上的每一点的横坐标变为原来的  $\frac{1}{2}$ , 最后向下平移 2 个单位

58. (001179) 欲将函数  $y = 3x$  的图像通过一次平移变为函数  $y = 3x - 5$  的图像, 可向\_\_\_\_\_ 平移\_\_\_\_\_ 个单位; 也可向\_\_\_\_\_ 平移\_\_\_\_\_ 个单位.

59. (001180) 欲将函数  $y = x^2$  的图像通过平移和放缩变为函数  $y = 2x^2 - 4x - 1$  的图像, 所需的步骤依次为: (同时写出每步变换后所得图像对应的函数)

60. (001181) 证明: 在平面直角坐标系中, 将函数  $y = f(x), x \in \mathbf{R}$  的图像绕原点旋转  $180^\circ$ , 得到的是函数  $y = -f(-x), x \in \mathbf{R}$  的图像.

61. (001182) 在平面直角坐标系中, 将函数  $y = f(x), x \in \mathbf{R}$  的图像沿直线  $x = 1$  翻折, 将会得到哪个函数的图像? 试写出这个函数, 并证明.

62. (001185) 已知  $f(x) = x^2, g(x) = \frac{1}{x}$ .

(1) 求  $f(x) + g(x), f(x)g(x)$  和  $\frac{f(x)}{g(x)}$ ;

(2) 求  $f \circ g$  和  $g \circ f$ ;

(3) 求  $f \circ g - g \circ f$ , 判断它是否在其定义域上恒等于零.

63. (001186) 已知  $f(x) = x^2, g(x) = \frac{1}{x+1}$ .

(1) 求  $f(x) + g(x), f(x)g(x)$  和  $\frac{f(x)}{g(x)}$ ;

(2) 求  $f \circ g$  和  $g \circ f$ ;

(3) 求  $f \circ g - g \circ f$ , 判断它是否在其定义域上恒等于零.

64. (001190) 下列各映射中, 是单射的有\_\_\_\_\_, 是满射的有\_\_\_\_\_, 存在逆映射的有\_\_\_\_\_.

①  $f: \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 4, 9\}; x \mapsto x^2$ ;

②  $f: \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^+; x \mapsto x^2$ ;

③  $f: \mathbf{R} \rightarrow [0, +\infty); x \mapsto x^2$ ;

④  $f: \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^+; x \mapsto \frac{1}{x}$ ;

⑤  $f: \mathbf{R}^+ \cup \mathbf{R}^- \rightarrow \mathbf{R}^+ \cup \mathbf{R}^-; x \mapsto \frac{1}{x}$ ;

⑥  $f: \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}; x \mapsto x + \frac{1}{x}$ ;

⑦  $f: \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}; x \mapsto x - \frac{1}{x}$ ;

⑧  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{Z}; x \mapsto [x]$ ;

⑨  $f: \{(x, y) | x, y \in \mathbf{R}\} \rightarrow \{(x, y) | x, y \in \mathbf{R}\}; (x, y) \mapsto (x + y, x - y)$ ;

⑩  $f: \{(x, y) | x, y \in \mathbf{R}\} \rightarrow \{(x, y) | x, y \in \mathbf{R}\}; (x, y) \mapsto (x + y, 2x + 2y)$ .

65. (001192) 写出下列函数的反函数 (注意定义域).

(1)  $y = -\frac{1}{x} + 3$ ;

(2)  $y = \sqrt{2x-1}$ ;

(3)  $y = \frac{2x+1}{x+2}$ ;

(4)  $y = x^2 + 2, x \in [2, +\infty)$ ;

(5)  $y = 2^x, x \in \{1, 2, 3, 4\}$  (本小题不能使用对数);

(6)  $y = \sqrt{9-x^2}, x \in [-3, 0]$ ;

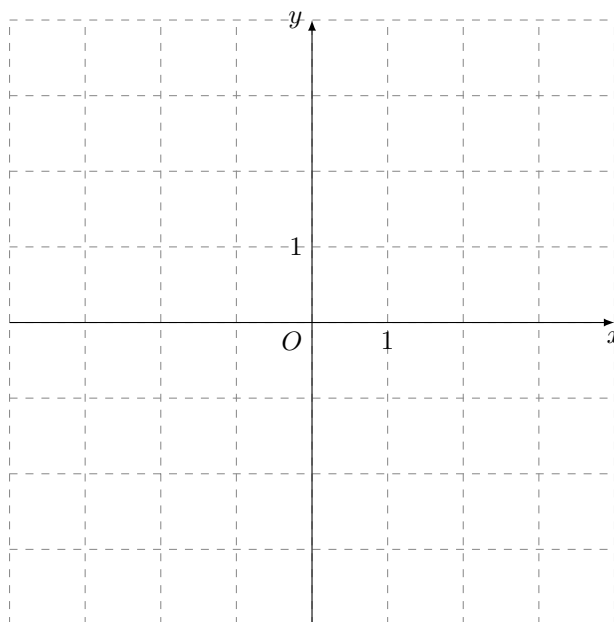
(7)  $y = x^2 - 4x, x \in [3, 7]$ .

66. (001193) 已知函数  $y = f(x)$  的图像经过  $(1, 2)$ , 它有反函数  $y = f^{-1}(x)$ . 那么函数  $y = f^{-1}(x+3)$  的图像一定经过点\_\_\_\_\_.

67. (001194) 已知函数  $y = f(x)$  有反函数, 且  $y = f^{-1}(3x+1)$  的图像经过点  $(0, -1)$ . 试确定函数  $y = 5f(x+2)+3$  的图像一定经过的点, 并说明理由.

68. (001196) 已知函数  $y = f(x)$  的图像经过第一, 第二象限, 且它有反函数  $y = f^{-1}(x)$ . 那么  $y = f^{-1}(x)$  的图像一定经过\_\_\_\_\_象限.

69. (001198) 在同一坐标系中通过平移和放缩作出以下函数的图像, 并写出变换的方法.  $y = |x|$ ;  $y = |x-1|$ ;  
 $y = \frac{|x-1|}{2}$ ;  $y = \frac{|x-1|}{2} - 3$ ;  $y = \frac{|2x-1|}{2} - 3$ .



70. (001199)(1) 欲将函数  $y = x^2$  的图像通过先平移后放缩的方式变为函数  $y = \frac{1}{2}x^2 + x$  的图像, 所需的步骤依次为: (同时写出每步变换后所得图像对应的函数)

(2) 欲将函数  $y = x^2$  的图像通过先放缩后平移的方式变为函数  $y = \frac{1}{2}x^2 + x$  的图像, 所需的步骤依次为: (同时写出每步变换后所得图像对应的函数)



71. (001200) (1) 欲将函数  $y = \sqrt{x}$  的图像通过先平移后放缩的方式变为函数  $y = \sqrt{2x-4}$  的图像, 所需的步骤依次为: (同时写出每步变换后所得图像对应的函数)
- (2) 欲将函数  $y = \sqrt{x}$  的图像通过先放缩后平移的方式变为函数  $y = \sqrt{2x-4}$  的图像, 所需的步骤依次为: (同时写出每步变换后所得图像对应的函数)
72. (001201) 将函数  $y = \sqrt{x}$  的图像上的每一点的横坐标变为原来的 3 倍, 然后向右平移 3 个单位, 再沿直线  $y = x$  翻折, 则所得图像对应的函数为\_\_\_\_\_.
73. (001202) [选做] 欲将函数  $y = |x-1| + |x+1|$  的图像通过平移和放缩变为函数  $y = |x-2| + |x-6|$  的图像, 所需的步骤依次为: (同时写出每步变换后所得图像对应的函数, 提示: 先把两个函数的图像画在一张草稿纸上找一下感觉)
74. (001203) [选做] 欲将函数  $y = x + \frac{1}{x}$  的图像通过放缩变为函数  $y = x + \frac{4}{x}$  的图像, 所需的步骤依次为: (同时写出每步变换后所得图像对应的函数, 提示: 先把两个函数的图像画在一张草稿纸上找一下感觉)
75. (001204) 奇函数的图像是否都过原点? 偶函数的图像是否一定和  $y$  轴相交? 为什么?
76. (001207) 已知  $y = f(x)$ ,  $y = g(x)$  的定义域均关于原点对称且交集非空, 且  $f$  与  $g$  一奇一偶, 证明:  $y = f(x)g(x)$  是奇函数.
77. (001213) 已知函数  $y = f(x)$  与  $y = g(x)$  的定义域均为  $\mathbf{R}$ .
- \_\_\_\_(1) 如果  $y = f(x)$  是奇函数, 那么  $y = |f(x)|$  是偶函数;
- \_\_\_\_(2) 如果  $y = f(x)$  是奇函数, 那么  $y = \sqrt[3]{f(x)}$  是奇函数;
- \_\_\_\_(3) 如果  $y = f(x)$  是奇函数, 那么  $y = f(|x|)$  是奇函数;
- \_\_\_\_(4) 如果  $y = f(x)$  是奇函数, 那么  $y = f(|x|)$  是偶函数;
- \_\_\_\_(5) 如果  $y = f(x)$  是奇函数,  $y = g(x)$  是偶函数, 那么  $y = f(x)g(x)$  是奇函数;
- \_\_\_\_(6) 如果  $y = f(x)$  是奇函数,  $y = g(x)$  不是偶函数, 那么  $y = f(x) + 2g(x)$  既非奇函数又非偶函数;
- \_\_\_\_(7) 如果  $y = f(x)$  不是奇函数,  $y = g(x)$  也不是奇函数, 那么  $y = f(x) - g(x)$  也不是奇函数;
- \_\_\_\_(8) 如果  $y = f(x)$  是奇函数,  $y = g(x)$  不是偶函数, 那么  $y = f(x) + g(x)$  不是偶函数;
- \_\_\_\_(9) 如果  $y = f(x) - g(x)$  是奇函数,  $y = g(x)$  是奇函数, 那么  $y = f(x)$  也是奇函数;
- \_\_\_\_(10) 如果  $y = (f(x))^2$  是偶函数, 那么  $y = f(x)$  是偶函数或者是奇函数;
- \_\_\_\_(11) 如果  $y = (f(x))^2$  是奇函数, 那么  $y = f(x)$  恒等于零, 因此是奇函数也是偶函数;
- \_\_\_\_(12) 如果  $y = (f(x))^3$  是奇函数, 那么  $y = f(x)$  是奇函数.
78. (001214) 已知函数  $y = f(x)$ ,  $x \in D_f$  与  $y = g(x)$ ,  $x \in D_g$  的定义域交集非空.
- \_\_\_\_(1) 如果  $y = f(x)$  是奇函数,  $y = g(x)$  是奇函数, 那么  $y = f(x) + x^2g(x)$  是奇函数;
- \_\_\_\_(2) 如果  $y = f(x)$  是奇函数,  $y = g(x)$  是偶函数, 而且它们都不恒等于零, 那么  $y = f(x) + g(x)$  既不是奇函数又不是偶函数;
- \_\_\_\_(3) 如果  $y = f(x)$  是奇函数,  $y = g(x)$  是偶函数, 而且它们在  $D_f \cap D_g$  上都不恒等于零, 那么  $y = f(x) + g(x)$  既不是奇函数又不是偶函数;

\_\_\_\_(4) 如果  $y = f(x)$  不是奇函数,  $y = g(x)$  也不是奇函数, 那么  $y = f(x) - g(x)$  也不是奇函数;

\_\_\_\_(5) 如果  $y = |f(x)|$  是奇函数, 那么  $f(x)$  恒等于零;

\_\_\_\_(6) 如果  $y = f(x)$  不是奇函数, 那么  $y = |f(x)|$  不是偶函数;

\_\_\_\_(7) 如果  $y = f(x)$  是偶函数, 且  $y = f(x) + g(x)$  也是偶函数, 那么  $y = g(x)$  也是偶函数.

79. (001215) 已知  $y = f(x)$ ,  $x \in D$  是偶函数.

\_\_\_\_(1)  $y = (f(x))^3 + f(x)$  是偶函数;

\_\_\_\_(2)  $y = f(2x)$  是偶函数;

\_\_\_\_(3)  $y = f(x-1)$  的图像关于直线  $x = -1$  对称;

\_\_\_\_(4)  $y = f(x-1)$  的图像关于直线  $x = 1$  对称;

\_\_\_\_(5)  $y = f(3x+1)$  的图像关于直线  $x = -\frac{1}{3}$  对称;

\_\_\_\_(6)  $y = f(3x+1)$  的图像关于直线  $x = -1$  对称;

\_\_\_\_(7)  $y = f(x^3+1)$  是偶函数;

\_\_\_\_(8)  $y = f(x^3+x)$  是偶函数.

80. (001216) 已知  $y = f(x)$  是奇函数.

\_\_\_\_(1)  $y = f(3x)$  是奇函数;

\_\_\_\_(2)  $y = f(x-1) + 2$  的图像关于点  $(1, 2)$  对称;

\_\_\_\_(3)  $y = 3f(2x-1) + 6$  的图像关于点  $(1, 6)$  对称;

\_\_\_\_(4)  $y = 3f(2x-1) + 6$  的图像关于点  $(\frac{1}{2}, 6)$  对称;

\_\_\_\_(5)  $y = 3f(2x-1) + 6$  的图像关于点  $(\frac{1}{2}, 2)$  对称;

\_\_\_\_(6)  $y = f(x^2)$  是偶函数;

\_\_\_\_(7)  $y = f^{-1}(x)$  一定存在;

\_\_\_\_(8)  $y = f^{-1}(x)$  如果存在, 则必定是奇函数.

81. (001231) 已知函数  $y = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2}$  的定义域为  $[1, b]$ , 最大值为  $b$ , 最小值为  $1$ . 求  $b$ .

82. (001232) 已知函数  $f(x) = \frac{x^2 + 2x + a}{x}$ ,  $x \in [1, +\infty)$ .

(1) 当  $a = 4$  时, 求函数的最小值;

(2) 如果对一切定义域中的  $x$ ,  $f(x)$  均为正数, 求实数  $a$  的取值范围.

83. (001237) 证明: 函数  $y = x^3 + x$ ,  $x \in [1, 2]$  的值域为  $[2, 10]$

84. (001238) 函数  $y = x^2 - 3x + 1$ ,  $x \in [1, 4]$  的值域为\_\_\_\_\_.

85. (001239) 函数  $y = \frac{2x+3}{x-1}$  的值域为\_\_\_\_\_.

86. (001240) 函数  $y = \frac{6x}{x^2+1}$  的值域为\_\_\_\_\_.

87. (001241) 函数  $y = x^5 + 3x + 1$ ,  $x \in [1, 3]$  的值域为\_\_\_\_\_.

88. (001242) 函数  $y = \sqrt{1+x} + 2x$  的值域为\_\_\_\_\_.

89. (001243) 函数  $y = |x - 3| - |x - 10|$  的值域为\_\_\_\_\_.
90. (001244) 函数  $y = |x - 3| + |x - 10| + |x + 1| + |x + 2|$  的值域为\_\_\_\_\_.
91. (001245) 函数  $y = ||x - 3| + x|$  的值域为\_\_\_\_\_.
92. (001246) 求函数  $y = \frac{x^2 - 4x + 5}{x^2 - x - 1}$  的值域.
93. (001247) 已知函数  $y = \sqrt{x} + \sqrt{x + a}$  的值域为  $[\frac{\sqrt{3}}{2}, +\infty)$ , 求实数  $a$ .
94. (001248) 求函数  $y = |x - 1| + |x - 2| + |x - 3| + \cdots + |x - 20|$  的值域.
95. (001249) 求函数  $y = |x - 1| + |x - 2| + |x - 3| + \cdots + |x - 50| + |100x - 400|$  的值域 (提示: 某种程度上来说这题目反而比上一题简单).
96. (001250) 函数  $y = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{x^2 + 64}}}}$  的值域为\_\_\_\_\_.
97. (001251) 函数  $y = \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}$  的值域为\_\_\_\_\_.
98. (001252) 函数  $y = \frac{1}{x^2 + x + 1}$  的值域为\_\_\_\_\_.
99. (001253) 函数  $y = \frac{x^2}{x^2 + x + 1}$  的值域为\_\_\_\_\_.
100. (001254) 函数  $y = 4 - \sqrt{4 - x^2}$  的值域为\_\_\_\_\_.
101. (001255) 函数  $y = \frac{\sqrt{x}}{1 + x}$  的值域为\_\_\_\_\_.
102. (001256) 函数  $y = \sqrt{6 - x} + \sqrt{x - 3}$  的值域为\_\_\_\_\_.
103. (001257) 函数  $y = \frac{6x}{x^2 + 1}, x \in [-\frac{1}{2}, 5]$  的值域为\_\_\_\_\_.
104. (001258) 求函数  $y = \frac{2x^2 + 3x + 1}{x - 1} (x \in (1, +\infty))$  的值域.
105. (001259) 求函数  $y = \frac{2x^2 + 2x + 3}{x^2 + x + 1} (x \in (-1, +\infty))$  的值域.
106. (001260) 求函数  $y = \frac{2x^2 + 3x + 3}{x^2 + x + 1} (x \in (-1, +\infty))$  的值域.
107. (001261) 设  $a$  为实常数, 求函数  $y = |x - |x + |x + 1| + 2| + a| + |10x - 10|$  的值域. (提示: 不觉得  $10x$  的系数有点突兀吗?)
108. (001262) 已知函数  $y = f(2x - 1)$  的定义域为  $[0, 3]$ , 则函数  $y = f(3x + 1)$  的定义域为\_\_\_\_\_.
109. (001264) 已知函数  $f(x) = \frac{a - x}{x - a - 1}$  的反函数  $f^{-1}(x)$  的图像关于点  $(-1, 3)$  对称, 则  $a =$ \_\_\_\_\_.
110. (001266) 写出下列函数的值域.
- (1)  $y = 3x + 1, x \in [-2, 5]$ ; \_\_\_\_\_
- (2)  $y = |2x + 1|, x \in [-1, 3]$ ; \_\_\_\_\_

$$(3) y = \frac{x-1}{2x+3}; \underline{\hspace{2cm}}$$

$$(4) y = \frac{|x|+1}{|x|-1}; \underline{\hspace{2cm}}$$

$$(5) y = \frac{|x+3|}{x-4}, x \in [-4, 0]; \underline{\hspace{2cm}}$$

$$(6) y = \frac{2x+1}{|x+1|-|x|}; \underline{\hspace{2cm}}$$

111. (001267) (1) 求函数  $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$  的值域;  
 (2) 已知  $a$  是实数, 求函数  $f(x) = \frac{2x-a}{x+1}$  的值域.

112. (001271) 写出下列函数的值域:

$$(1) y = x^2 + 2x + 2; \underline{\hspace{2cm}}$$

$$(2) y = -x^2 + 3x + 4; \underline{\hspace{2cm}}$$

$$(3) y = 4x^2 + x + 1, x \in [-3, 0]; \underline{\hspace{2cm}}$$

$$(4) \text{ 已知 } a > 0, y = ax^2 + ax + 2a, x \in [-1, 1]; \underline{\hspace{2cm}}$$

$$(5) y = \frac{1}{x^2 + 2x + 2}; \underline{\hspace{2cm}}$$

$$(6) y = 4 - \sqrt{4x - 4x^2}; \underline{\hspace{2cm}}$$

$$(7) y = \frac{x^2 - x - 2}{x^2 + 3x + 2}; \underline{\hspace{2cm}}$$

$$(8) y = |x^2 - 2x - 3|, x \in (\frac{1}{2}, 2]; \underline{\hspace{2cm}}$$

113. (001274) 已知  $k$  是实数, 函数  $y = \sqrt{kx^2 + 2(k+2)x + 3(4k-1)}$  的定义域为  $\mathbf{R}$ , 则  $k$  的取值范围为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

114. (001275) 已知  $k$  是实数, 函数  $y = \sqrt{kx^2 + 2(k+2)x + 3(4k-1)}$  的值域为  $[0, +\infty)$ , 则  $k$  的取值范围为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

115. (001281) 已知  $a$  是实数, 就关于  $x$  的方程  $x^2 + (a-5)x + (a-2) = 0$  的两个根 (重根算两个根) 的不同分布情况, 利用函数  $y = \frac{-x^2 + 5x + 2}{x+1}$  的图像与性质确定  $a$  的范围.

- (1) 两个根分别在  $(-\infty, 2)$  和  $(2, +\infty)$  中; (4) 有两个不同的根, 有且仅有一根在  $[0, +\infty)$  中.  
 (3) 有根在  $[0, 2)$  内;  
 (2) 两个根都在  $(-\infty, -2)$  中;

116. (001283) 求函数  $y = 2x + \sqrt{1-x^2}$  的值域.

117. (001318) 函数  $y = \sqrt{3^{2x-1} - 27}$  的定义域为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

118. (001320) 已知  $f_1(x) = 3^x - 1$ ,  $f_2(x) = 3^{x-1}$ ,  $f_3(x) = -3^x$ ,  $f_4(x) = -3^{-x}$ ,  $f_5(x) = (1/3)^x$ ,  $f_6(x) = (1/3)^{-x}$ .  
 则将函数  $y = 3^x$  的图像右移 1 单位得  $\underline{\hspace{2cm}}$  的图像, 下移 1 单位得  $\underline{\hspace{2cm}}$  的图像.  
 $y = 3^x$  的图像与  $\underline{\hspace{2cm}}$  的图像关于  $x$  轴对称, 与  $\underline{\hspace{2cm}}$  的图像关于  $y$  轴对称, 与  $\underline{\hspace{2cm}}$  的图像关于原点对称, 与  $\underline{\hspace{2cm}}$  的图像完全相同.

119. (001322) 写出下列函数的单调区间和值域 (不用证明).

(1)  $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+2x+3}$ ;

(2)  $y = \frac{1}{3^x - 1}$ ;

(3)  $y = 4^x - 2^{x+1}$ .

120. (001324) 函数  $y = \log_{x^2+x-1} 2$  的定义域是\_\_\_\_\_.

121. (001326) 函数  $y = \log_2(x^2 + x - 1)$  的定义域是\_\_\_\_\_, 值域是\_\_\_\_\_.

122. (001327) 函数  $y = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}}\left(\left(\frac{1}{3}\right)^x - 27\right)}$  的定义域为\_\_\_\_\_.

123. (001329) 已知函数  $f(x) = \lg(kx^2 - 6x + k + 3)$  的定义域为  $\mathbf{R}$ , 则  $k$  的取值范围为\_\_\_\_\_.

124. (001330) 已知函数  $f(x) = \lg(kx^2 - 6x + k + 3)$  的值域为  $\mathbf{R}$ , 则  $k$  的取值范围为\_\_\_\_\_.

125. (001333) 一个函数和它的反函数的图像的公共点是否一定在直线  $y = x$  上? 为什么?

126. (001334) 求证: 若递增函数与其反函数的图像有公共点, 则公共点一定在直线  $y = x$  上.

127. (001335) 已知幂函数的图像过点  $(9, \frac{\sqrt{3}}{3})$ , 则该幂函数为  $y =$ \_\_\_\_\_.

128. (001336)(1) 写出函数  $y = x^{-\frac{4}{3}}$  的定义域, 奇偶性, 单调区间;

(2) 写出函数  $y = x^{-\frac{3}{4}}$  的定义域, 奇偶性, 单调区间.

129. (001337) 作出下列函数的大致图像 (只要能够表明定义域和单调性, 凹凸性方面的信息):

(1)  $y = x^{\frac{2}{3}}$ ;

(2)  $y = x^{-\frac{3}{2}}$ ;

(3)  $y = \frac{|x| + 1}{|x + 1|}$ ;

(4)  $y = \frac{1}{(x-2)^2} - 1$ .

130. (001340) 在下列幂函数 (1)  $y = x^{-\frac{3}{2}}$ , (2)  $y = x^{\frac{5}{4}}$ , (3)  $y = x^{-\frac{4}{3}}$ , (4)  $y = x^4$ , (5)  $y = x^{\frac{3}{7}}$ , (6)  $y = x^{-6}$  中, 定义域关于原点对称的有\_\_\_\_\_, 值域为  $\mathbf{R}$  的有\_\_\_\_\_, 奇函数有\_\_\_\_\_, 在定义域上单调递增的有\_\_\_\_\_, 图像有一部分在第二象限的有\_\_\_\_\_.

131. (001513) 已知 2 是函数  $y = f(x), x \in \mathbf{R}$  的周期, 且当  $x \in (-1, 1]$  时,  $f(x) = 1 - x^2$ .

(1) 写出该函数的值域以及所有单调增区间;

(2) 写出方程  $f(x) = \frac{1}{2}$  的解集;

(3) 当  $x \in (99, 101]$  时, 求  $f(x)$  的解析式.

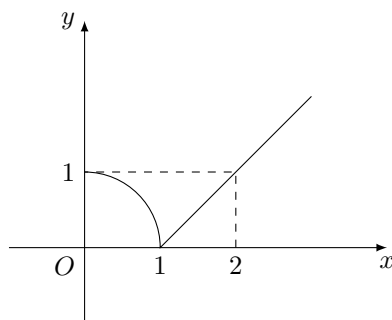
132. (002821) 函数  $y = \frac{\sqrt{2x+1}}{x-3} + (x-1)^0$  的定义域为\_\_\_\_\_.

133. (002822) 若函数  $y = f(x)$  的定义域是  $[-2, 4]$ , 则函数  $g(x) = f(x) + f(-x)$  的定义域是\_\_\_\_\_.

134. (002823) 下列各组中, 两个函数是同一个函数的组的序号是\_\_\_\_\_.

- (1)  $y = \lg x$  与  $y = \frac{1}{2} \lg x^2$ ; (2)  $f(x) = 2^x, D = \{0, 1, 2, 3\}$  与  $g(x) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{5}{6}x + 1, D = \{0, 1, 2, 3\}$ ;  
 (3)  $f(x) = x^2 - 2x - 1, g(t) = t^2 - 2t - 1$ ; (4)  $y = \sqrt{x^2} - 1, y = \sqrt[3]{x^3} - 1$ .

135. (002827) 已知  $y = f(x)$  为偶函数, 且  $y = f(x)$  的图像在  $x \in [0, 1]$  时的部分是半径为 1 的圆弧, 在  $x \in [1, +\infty)$  时的部分是过点  $(2, 1)$  的射线, 如图.



(1) 写出函数  $y = f(x)$  在  $x < 0$  时的单调性:\_\_\_\_\_;

(2) 写出  $f(f(-2))$  的值:\_\_\_\_\_;

(3) 写出方程  $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$  的解集:\_\_\_\_\_.

136. (002829) 设常数  $a, b$  满足  $1 < a < b$ , 函数  $f(x) = \lg(a^x - b^x)$ , 求函数  $y = f(x)$  的定义域.

137. (002831) 已知函数  $f(x) = \sqrt{ax^2 + x + 1}$ .

(1) 若函数  $y = f(x)$  的定义域为  $(-\infty, +\infty)$ , 求实数  $a$  的取值范围;

(2) 若函数  $y = f(x)$  的值域为  $[0, +\infty)$ , 求实数  $a$  的取值范围.

138. (002832) 已知函数  $f(x) = \sqrt{x}$ , 函数  $g(x) = \sqrt{1-x} - \sqrt{x}$ , 则函数  $y = f(x) + g(x)$  的定义域为\_\_\_\_\_.

139. (002833) 已知函数  $y = f(x)$  的定义域为  $[1, 4]$ , 则函数  $y = \frac{f(2x)}{x-2}$  的定义域是\_\_\_\_\_.

140. (002837) 已知函数  $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x > 1, \\ x, & x \leq 1, \end{cases}$  函数  $g(x) = 1 - \sqrt{x}$ . 求函数  $y = f(x) + g(x)$  的解析式及定义域.

141. (002838)\* 设  $D$  是含数 1 的有限实数集,  $f(x)$  是定义在  $D$  上的函数, 若  $f(x)$  的图像绕原点逆时针旋转  $\frac{\pi}{6}$  后与原图像重合, 则在以下各项中,  $f(1)$  的可能取值只能是 ( )

- A.  $\sqrt{3}$                       B.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$                       C.  $\frac{\sqrt{3}}{3}$                       D. 0

142. (002839) 设常数  $p \in \mathbf{R}$ , 设函数  $f(x) = \log_2 \frac{x+1}{x-1} + \log_2(x-1) + \log_2(p-x)$ .

(1) 求  $p$  的取值范围以及函数  $y = f(x)$  的定义域;

(2) 若  $y = f(x)$  存在最大值, 求  $p$  的取值范围, 并求出最大值.

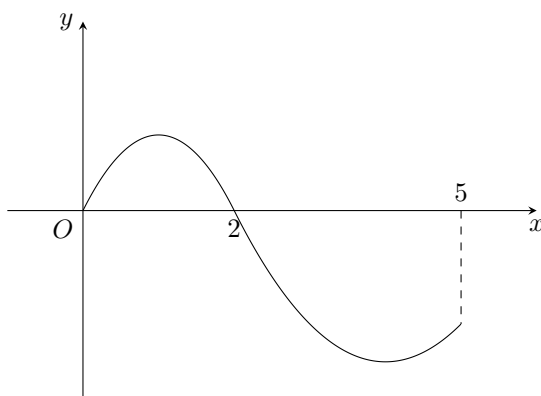
143. (002841) 已知常数  $a \in \mathbf{R}$ , 函数  $g(x) = \frac{x}{x+2}$ , 函数  $h(x) = \frac{1}{x+a}$ . 设函数  $F(x) = g(x) \cdot h(x)$ ,  $D_F$  是其定义域;  $f(x) = g(x) - h(x)$ ,  $D_f$  是其定义域.

(1) 设  $a = 2$ , 求函数  $F(x)$  的值域;

(2) 对于给定的常数  $a$ , 是否存在实数  $t$ , 使得  $f(t) = 0$  成立? 若存在, 求出这样的所有  $t$  的值; 若不存在, 说明理由;

(3) \* 是否存在常数  $a$  的值, 使得对于任意  $x \in D_f \cap \mathbf{R}^+$ , 有  $f(x) \geq 0$  恒成立? 若存在, 求出所有这样的  $a$  的值; 若不存在, 说明理由.

144. (002848) 设奇函数  $y = f(x)$  的定义域为  $[-5, 5]$ . 若当  $x \in [0, 5]$  时,  $y = f(x)$  的图像如图, 则不等式  $xf(x) < 0$  的解是\_\_\_\_\_.



145. (002863) 函数  $y = \frac{1}{x^2 - 4x + 5}$  的图像关于 ( ).

A.  $y$  轴对称

B. 原点对称

C. 直线  $x = 2$  对称

D. 点  $(2, 1)$  对称

146. (002864) 函数  $y = x + \frac{1}{x-1}$  的图像关于 ( ).

A. 点  $(1, 1)$  对称

B. 点  $(-1, 1)$  对称

C. 点  $(1, -1)$  对称

D. 点  $(-1, -1)$  对称

147. (002865) 若函数  $y = f(x)$  的定义域为  $\mathbf{R}$ , 且  $f(x-1) = -f(3-x)$ , 则  $y = f(x)$  的图像关于 ( ).

A. 原点中心对称

B. 点  $(1, 0)$  中心对称

C. 点  $(2, 0)$  中心对称

D. 点  $(4, 0)$  中心对称

148. (002866) 设常数  $a, b \in \mathbf{R}$ . 若函数  $y = x^2 + ax$  在区间  $[a, b]$  上的图像关于直线  $x = 1$  对称, 则  $b =$ \_\_\_\_\_.

149. (002868) 已知函数  $y = f(x)$  图像关于  $(1, 0)$  对称. 若  $x \leq 1$  时,  $f(x) = x^2 - 1$ , 则  $f(x) =$ \_\_\_\_\_.

150. (002870) 设常数  $a \in \mathbf{R}$ . 已知函数  $y = f(x)$  满足: 对于任意  $x \in \mathbf{R}$ , 都有  $f(x-1) = f(1-x)$ . 若函数  $y = f(x)$  图像总是关于直线  $x = a$  对称, 则  $a =$ \_\_\_\_\_.

151. (002871) 设常数  $a \in \mathbf{R}$ . 若直线  $x = 2$  是函数  $f(x) = \log_3 |2x + a|$  的图像的一条对称轴, 则  $a =$ \_\_\_\_\_.

152. (002873) 常数  $a, b \in \mathbf{R}$ . 函数  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{1}{x+a} + b$  的图像关于点  $(1, 2)$  对称.

(1) 求  $y = f(x)$  的解析式;

(2) \* 若  $y = f(x)$  的图像关于某一条直线对称, 写出这样的一条对称轴直线的方程 (无需证明).

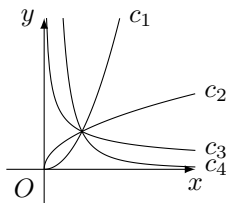
153. (002874) 函数  $y = \log_2 \frac{2-x}{2+x}$  的图像关于 ( ).
- A. 原点对称                      B.  $y$  轴对称                      C. 直线  $y = x$  对称                      D. 直线  $y = -x$  对称
154. (002875) 函数  $y = \log_2(2 - 2^x)$  的图像关于 ( ).
- A. 原点对称                      B.  $y$  轴对称                      C. 直线  $y = x$  对称                      D. 直线  $y = -x$  对称
155. (002877) 设定义在  $\mathbf{R}$  上的函数  $y = f(x)$  的图像关于直线  $x = 1$  对称. 若  $x \geq 1$  时,  $f(x) = 1 - 3^{x-1}$ , 则  $x < 1$  时,  $f(x) =$ \_\_\_\_\_.
156. (002878) 设函数  $y = \log_2(x + 3)$  的图像与函数  $y = f(x)$  的图像关于直线  $x = 1$  对称. ①  $f(1) =$ \_\_\_\_\_; ② 若  $f(a)$  有意义, 则  $f(a) =$ \_\_\_\_\_ (结果用  $a$  的表达式表示).
157. (002879) 已知定义域为  $\mathbf{R}$  的函数  $y = f(x)$  是偶函数, 并且其图像关于直线  $x = 1$  对称.
- (1) 若  $f(0) = 1, f(1) = 2$ , 求  $f(15) + 2f(20)$  的值;
- (2) 设  $x \in [0, 1]$  时,  $f(x) = x^3$ .
- ①  $1 < x \leq 2$  时, 求  $y = f(x)$  的解析式;
- ②  $-2 \leq x < 0$  时, 求  $y = f(x)$  的解析式;
- ③ 求函数  $y = f(x) - \frac{1}{8}$  在  $[-2, 2]$  上的所有零点;
- ④ 求  $y = f(x)$  在  $\mathbf{R}$  上的解析式.
158. (002880) 已知  $f(x)$  是定义域为  $(-\infty, +\infty)$  的奇函数, 满足  $f(1-x) = f(1+x)$ . 若  $f(1) = 2$ , 则  $f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(50) =$  ( ).
- A. -50                      B. 0                      C. 2                      D. 50
159. (002883)\* 设定义在  $\mathbf{R}$  上的函数  $y = f(x)$  的满足: 对于任意  $x \in \mathbf{R}$ , 恒有  $f(-x+1) = -f(x+1)$  且  $f(-x-1) = -f(x-1)$ . 则下面命题中, 正确的命题的序号是\_\_\_\_\_.
- ① 函数  $y = f(x)$  是偶函数; ② 2 是  $y = f(x)$  的周期; ③ 函数  $y = f(x)$  图像关于  $(1, 0)$  对称; ④ 函数  $y = f(x)$  图像关于  $(3, 0)$  对称.
160. (002884) 下列函数中, 在其定义域上是单调函数的序号为\_\_\_\_\_.
- ①  $y = \frac{2-x}{x}$ ; ②  $y = x - \frac{1}{x}$ ; ③  $y = 3^{x-1}$ ; ④  $y = \ln \frac{1}{x}$ ; ⑤  $y = \tan x$ .
161. (002902)\* 设  $f(x)$ 、 $g(x)$ 、 $h(x)$  是定义域为  $R$  的三个函数, 对于下列命题:
- ① 若  $f(x) + g(x)$ 、 $f(x) + h(x)$ 、 $g(x) + h(x)$  均为增函数, 则  $f(x)$ 、 $g(x)$ 、 $h(x)$  中至少有一个是增函数;
- ② 若  $f(x) + g(x)$ 、 $f(x) + h(x)$ 、 $g(x) + h(x)$  均是以  $T$  为周期的函数, 则  $f(x)$ 、 $g(x)$ 、 $h(x)$  均是以  $T$  为周期的函数, 下列判断正确的是 ( ).
- A. ①和②均为真命题                      B. ①和②均为假命题
- C. ①为真命题, ②为假命题                      D. ①为假命题, ②为真命题
162. (002907) 函数  $y = x^{-\frac{3}{2}}$  的定义域为\_\_\_\_\_.



163. (002908) 下列命题中, 正确的命题的序号是\_\_\_\_\_.

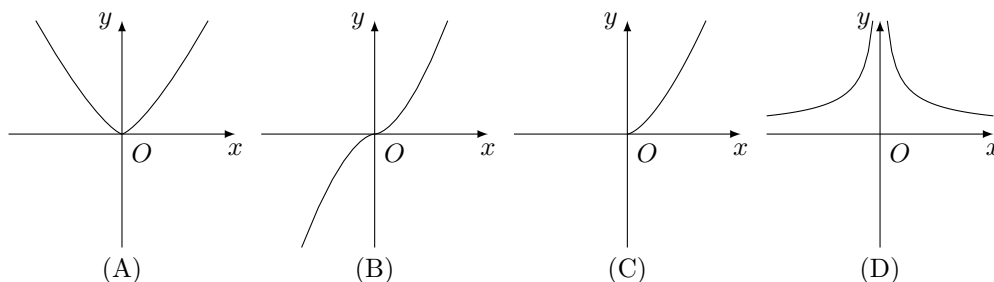
- ① 当  $\alpha = 0$  时, 函数  $y = x^\alpha$  的图像是一条直线;
- ② 幂函数的图像都经过  $(0, 0)$  和  $(1, 1)$  点;
- ③ 当  $\alpha < 0$  且  $y = x^\alpha$  是奇函数时, 它也是减函数;
- ④ 第四象限不可能有幂函数的图像.

164. (002909) 图中曲线是幂函数  $y = x^n$  在第一象限的图像, 已知  $n$  取  $\pm 2, \pm \frac{1}{2}$  四个值, 则相应于曲线  $c_1, c_2, c_3, c_4$  的  $n$  依次为 ( ).



- A.  $-2, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2$       B.  $2, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -2$       C.  $-\frac{1}{2}, -2, 2, \frac{1}{2}$       D.  $2, \frac{1}{2}, -2, -\frac{1}{2}$

165. (002910) 下列函数的图像为 (A)、(B)、(C)、(D) 之一, 试将正确的字母标号填在相应函数后面的横线上.



(1)  $y = x^{\frac{3}{2}}$  \_\_\_\_\_; (2)  $y = x^{\frac{4}{3}}$  \_\_\_\_\_; (3)  $y = x^{\frac{5}{3}}$  \_\_\_\_\_; (4)  $y = x^{-\frac{2}{3}}$  \_\_\_\_\_.

166. (002915) 设常数  $n \in \mathbf{Z}$ . 若函数  $y = x^{n^2-2n-3}$  的图像与两条坐标轴都无公共点, 且图像关于  $y$  轴对称, 则  $n$  的值为\_\_\_\_\_.

167. (002916) 函数  $y = 1 - (x+2)^{-2}$  可以先将幂函数  $y = x^{-2}$  的图像向\_\_\_\_\_ 平移 2 个单位, 再以\_\_\_\_\_ 轴为对称轴作对称变换, 最后向\_\_\_\_\_ 平移 1 个单位.

168. (002917) 在  $f(x) = (2m^2 - 7m - 9)x^{m^2-9m+19}$  中, 当实数  $m$  为何值时,

- (1)  $y = f(x)$  是正比例函数, 且它的图像的倾斜角为钝角?
- (2)  $y = f(x)$  是反比例函数, 且它的图像在第一, 三象限?

169. (002918) 设常数  $t \in \mathbf{Z}$ . 已知幂函数  $y = (t^3 - t + 1)x^{\frac{1}{3}(1+2t-t^2)}$  是偶函数, 且在区间  $(0, +\infty)$  上是增函数, 求整数  $t$  的值, 并作出相应的幂函数的大致图像.

170. (002920) 已知函数: ①  $y = \frac{1}{x}$ ; ②  $y = x^{\frac{1}{2}}$ ; ③  $y = x^{-\frac{1}{2}}$ ; ④  $y = x^{\frac{2}{3}}$ ; ⑤  $y = x^{-\frac{2}{3}}$ , 填写分别具有下列性质的函数序号:

(1) 图像与  $x$  轴有公共点的:\_\_\_\_\_;

(2) 图像关于原点对称的:\_\_\_\_\_;

(3) 定义域内递减的:\_\_\_\_\_;

(4) 在定义域内有反函数的:\_\_\_\_\_.

171. (002921) 函数  $y = -(x+1)^{-3}$  的图像可以先将幂函数  $y = x^{-3}$  的图像向\_\_\_\_\_ 平移 1 个单位, 再以\_\_\_\_\_ 轴为对称轴作对称变换.

172. (002923) 下列关于幂函数图像及性质的叙述中, 正确的叙述的序号是\_\_\_\_\_.

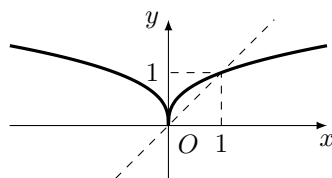
① 对于一个确定的幂函数, 第二、三象限不可能同时有该幂函数的图像上的点;

② 若某个幂函数图像过  $(-1, -1)$ , 则该幂函数是奇函数;

③ 若某个幂函数在定义域上递增, 则该幂函数图像必经过原点;

④ 幂函数图像不会经过点  $(-\frac{1}{2}, 8)$  以及  $(-8, -4)$ .

173. (002925) 已知幂函数  $y = x^{\frac{q}{p}}$  ( $p \in \mathbf{N}^*$ ,  $q \in \mathbf{N}^*$ ,  $p, q$  互质) 的图像如图所示, 则 ( ).



A.  $p, q$  均为奇数

B.  $p$  是奇数,  $q$  是偶数, 且  $0 < \frac{q}{p} < 1$

C.  $p$  是偶数,  $q$  是奇数

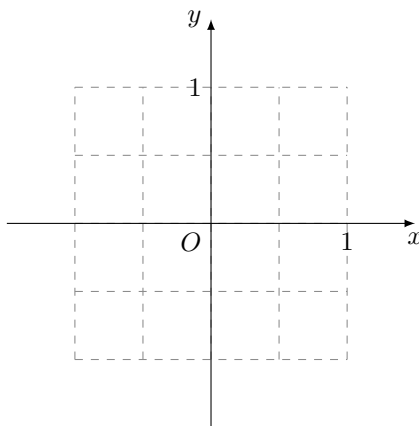
D.  $p$  是奇数,  $q$  是偶数, 且  $\frac{q}{p} > 1$

174. (002927) 设常数  $a, b$  满足  $a > b > 0$ . 已知函数  $f(x) = \frac{x+a}{x+b}$ . (1) 写出函数  $y = f(x)$  的单调性;

(2) 写出函数  $y = f(x)$  图像的一个对称中心的坐标.

175. (002929)\* 设常数  $a, b$  满足  $a > b > 0$ . 已知函数  $f(x) = \frac{x+a}{x+b}$ . 证明: 该函数图像的对称中心是唯一的.

176. (002936) 若函数  $f(x) = 1 - \sqrt{1-x^2}$  ( $-1 \leq x \leq 0$ ), 请画出函数  $y = f^{-1}(x)$  的大致图像.



177. (002937) 已知定义在  $\mathbf{R}$  上的函数  $y = f(x)$  是奇函数, 且有反函数  $y = f^{-1}(x)$ . 若  $a, b$  是两个实数, 则下列点中, 必在  $y = f^{-1}(x)$  的图像上的点的序号是\_\_\_\_\_.
- ①  $(-f(a), a)$ ; ②  $(-f(a), -a)$ ; ③  $(-b, -f(b))$ ; ④  $(b, -f^{-1}(-b))$ .
178. (002938) 已知定义在  $\mathbf{R}$  上的函数  $y = f(x)$  的反函数为  $y = f^{-1}(x)$ . 若  $y = f(x+1)$  的图像过点  $(-\frac{1}{2}, 1)$ , 则  $y = f^{-1}(x+1)$  的图像必过 ( ).
- A.  $(1, -\frac{1}{2})$                       B.  $(1, \frac{1}{2})$                       C.  $(0, -\frac{1}{2})$                       D.  $(0, \frac{1}{2})$
179. (002939) 设常数  $a \neq 0$ . 若函数  $f(x) = \frac{1-ax}{1+ax}$  的图像关于直线  $y = x$  对称, 求实数  $a$  的值以及  $y = f(x)$  的反函数  $y = f^{-1}(x)$ .
180. (002940) 记  $y = f^{-1}(x)$  是  $y = f(x)$  的反函数.
- (1) 若函数  $f(x+1) = \frac{x}{x+1}$ , 求函数  $y = f^{-1}(x+1)$  的解析式;
- (2) 设函数  $f(x) = \frac{1-2x}{1+x}$ . 若  $y = g(x)$  的图像与  $y = f^{-1}(x+1)$  的图像关于直线  $y = x$  对称, 求  $y = g(x)$  的解析式.
181. (002946) 已知函数  $y = f(x)$  的图像经过点  $(0, -1)$ . 若函数  $y = f(x+4)$  存在反函数  $y = g(x)$ , 则  $y = g(x)$  的图像总经过的定点的坐标为\_\_\_\_\_.
182. (002947) 设  $y = f^{-1}(x)$ ,  $y = g^{-1}(x)$  分别是定义在  $\mathbf{R}$  上的函数  $y = f(x)$ ,  $y = g(x)$  的反函数. 若函数  $y = f(x-1)$  和  $y = g^{-1}(x-3)$  的图像关于直线  $y = x$  对称, 且  $g(5) = 2018$ , 则  $f(4)$  的值为\_\_\_\_\_.
183. (002953) 函数  $f(x) = \frac{\sqrt{4-x^2}}{\lg|x-1|}$  的定义域为\_\_\_\_\_.
184. (002954) 为了得到函数  $y = \lg \frac{x+3}{10}$  的图像, 只需把函数  $y = \lg x$  的图像上所有的点 ( ).
- A. 向左平移 3 个单位长度, 再向上平移 1 个单位长度
- B. 向右平移 3 个单位长度, 再向上平移 1 个单位长度
- C. 向左平移 3 个单位长度, 再向下平移 1 个单位长度
- D. 向右平移 3 个单位长度, 再向下平移 1 个单位长度
185. (002958) 已知函数  $f(x) = \frac{3^x - 3^{-x}}{3^x + 3^{-x}}$ .
- (1) 证明  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上是增函数;
- (2) 求  $f(x)$  的值域.
186. (002964) 对于函数  $y = f(x)$  的定义域中的任意的  $x_1, x_2 (x_1 \neq x_2)$ , 有如下结论:
- ①  $f(x_1 + x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)$ ; ②  $f(x_1 \cdot x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ ;
- ③  $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$ ; ④  $f(\frac{x_1 + x_2}{2}) < \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$ .
- 当  $y = \ln x$  时, 上述结论中, 正确结论的序号是\_\_\_\_\_.
187. (002966)\* 已知常数  $a > 1$ , 函数  $y = |\log_a x|$  的定义域为区间  $[m, n]$ , 值域为区间  $[0, 1]$ . 若  $n - m$  的最小值为  $\frac{5}{6}$ , 则  $a =$ \_\_\_\_\_.

188. (002968)\* 已知函数  $f(x) = 2 + \log_3 x$  ( $3 \leq x \leq 27$ ).
- (1) 求函数  $y = f(x^2)$  的定义域;
  - (2) 求函数  $g(x) = [f(x)]^2 + f(x^2)$  的值域.
189. (002969) 已知定义域为  $\mathbf{R}$  的函数  $y = f(x)$  为奇函数, 且满足  $f(x+2) = -f(x)$ . 当  $x \in [0, 1]$  时,  $f(x) = 2^x - 1$ .
- (1) 求  $y = f(x)$  在区间  $[-1, 0)$  上的解析式;
  - (2) 求  $f(\log_{\frac{1}{2}} 24)$  的值.
190. (002970)\* 已知函数  $f(x) = 1 + a \cdot (\frac{1}{2})^x + (\frac{1}{4})^x$ .
- (1) 当  $a = 1$  时, 求函数  $y = f(x)$  在  $(-\infty, 0)$  上的值域;
  - (2) 对于定义在集合  $D$  上的函数  $y = f(x)$ , 如果存在常数  $M > 0$ , 满足: 对任意  $x \in D$ , 都有  $|f(x)| \leq M$  成立, 则称  $f(x)$  是  $D$  上的有界函数, 其中  $M$  称为函数  $f(x)$  的一个上界. 若函数  $y = f(x)$  在  $[0, +\infty)$  上是以 3 为一个上界的有界函数, 求实数  $a$  的取值范围.
191. (002971) 二次函数图像的顶点是  $(-1, 2)$ , 且图像经过点  $(1, 6)$ , 则此二次函数的解析式为\_\_\_\_\_.
192. (002972) 二次函数  $y = f(x)$  满足  $f(2-x) = f(2+x)$ , 且  $y = f(x)$  的图像在  $y$  轴的截距为 3, 被  $x$  轴截得的线段长为 2, 则  $y = f(x)$  的解析式为\_\_\_\_\_.
193. (002985) 函数  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2}$  的定义域、值域都是区间  $[1, b]$ , 则实数  $b =$ \_\_\_\_\_.
194. (002986) 设常数  $m \in \mathbf{R}$ . 若函数  $f(x) = x^2 - (m-2)x + m-4$  的图像与  $x$  轴交于  $A, B$  两点, 且  $|AB| = 2$ , 则函数  $y = f(x)$  的最小值为\_\_\_\_\_.
195. (002987) 函数  $f(x) = ax^2 + bx + c$  与函数  $g(x) = cx^2 + bx + a$  ( $ac \neq 0, a \neq c$ ) 的值域分别为  $M, N$ , 则下列结论正确的是\_\_\_\_\_.
- A.  $M = N$                       B.  $M \subseteq N$                       C.  $M \supseteq N$                       D.  $M \cap N \neq \emptyset$
196. (002988) 函数  $f(x) = x^2 - 2a|x-a| - 2ax + 1$  的图像与  $x$  轴有且只有三个不同的公共点, 则  $a =$ \_\_\_\_\_.
197. (002990) 设常数  $a, m \in \mathbf{R}$ . 已知函数  $f(x) = \frac{x^2 + 2x + a}{x}$  ( $x \geq m$ ).
- (1) 设  $a = \frac{1}{2}$ , 求函数  $y = f(x)$  的值域;
  - (2) 设  $m = 1$ , 求函数  $y = f(x)$  的值域.
198. (002993) 函数  $y = \frac{3^x - 1}{3^x - 2}$  的值域是\_\_\_\_\_.
199. (002994) 函数  $y = \log_{\frac{1}{2}}(-x^2 + 2x + 3)$  的值域是\_\_\_\_\_.
200. (002995) 函数  $y = |x-1| + |x-3|$  的值域是\_\_\_\_\_.
201. (002996)(1) 函数  $y = x^2 + \frac{8}{x^2 + 1}$  ( $1 \leq x \leq 7$ ) 的最小值是\_\_\_\_\_, 此时  $x =$ \_\_\_\_\_;
- (2) 函数  $y = \frac{3x}{x^2 + 4}$  的值域是\_\_\_\_\_;
  - (3) 函数  $y = x + \frac{m}{x+3}$ ,  $x \in [0, +\infty)$  的最小值为\_\_\_\_\_;
  - (4) 设常数  $m \in \mathbf{R}$ . 若函数  $y = \frac{mx}{x^2 + 1}$  的最大值为 1, 则  $m$  的值为\_\_\_\_\_.

202. (002997) (1) 函数  $y = x - \sqrt{1 - 2x}$  的最大值为\_\_\_\_\_, 此时  $x =$ \_\_\_\_\_;
- (2) 函数  $y = 2x + \sqrt{1 - 2x}$  的值域是\_\_\_\_\_.
203. (002998) 函数  $y = \frac{2x - 3}{x^2 - 2x + 3}$  的值域是\_\_\_\_\_.
204. (003000) 已知函数  $f(x) = \log_a(x + \sqrt{x^2 + 1})$ ,  $a > 1$ .
- (1) 求  $f(x)$  的定义域和值域;
- (2) 求  $f^{-1}(x)$ ;
- (3) 判断  $f^{-1}(x)$  的奇偶性、单调性;
- (4) 若实数  $m$  满足  $f^{-1}(1 - m) + f^{-1}(1 - m^2) < 0$ , 求  $m$  的范围.
205. (003001)\* 设常数  $m, n \in \mathbf{R}$ . 若函数  $y = \frac{mx^2 + 4x + n}{x^2 + 1}$  的值域为  $[1, 6]$ , 求  $m, n$  的值.
206. (003002) 设常数  $a \in \mathbf{R}$ , 区间  $E \subseteq (0, +\infty)$ . 已知函数  $f(x) = \frac{1}{a} - \frac{1}{x}$ ,  $x \in E$ .
- (1) 求证:  $y = f(x)$  在区间  $E$  上递增;
- (2) 是否存在  $a$ , 使得对于这样的  $a$ , 总是存在  $E = [m, n] (m < n)$ , 使得  $y = f(x)$  在区间  $E$  上的值域也是  $E$ ?  
若存在, 求出  $a$  的取值范围; 若不存在, 说明理由.
207. (003003) 函数  $y = 2x + \frac{4}{x} (\frac{1}{2} < x \leq 2)$  的值域是\_\_\_\_\_.
208. (003004) 函数  $y = |x - 3| - |x + 2|$  的值域是\_\_\_\_\_.
209. (003005) 函数  $y = (\frac{1}{2})^{x^2 - x}$  的值域是\_\_\_\_\_.
210. (003006) 函数  $y = \frac{\sqrt{x}}{x + 1}$  的值域是\_\_\_\_\_.
211. (003009) 求函数  $y = \frac{2x^2 - 4x - 1}{x^2 - 2x - 1}$  的值域.
212. (003010) 求函数  $y = \frac{x^2 + 4x - 1}{x^2 - 2x + 1} (2 \leq x \leq 3)$  的值域.
213. (003011) 记  $\max\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  为  $a_1, \dots, a_n$  中的最大值. 已知  $f(x) = \max\{x, x^2\} (-1 \leq x \leq 3)$ .
- (1) 求函数  $y = f(x)$  的值域;
- (2) 设  $PAB$  三点的坐标分别为  $(x, f(x)), (0, -1), (2, 0)$ , 且  $PAB$  三点可以构成三角形, 求  $\triangle PAB$  的面积  
取值范围.
214. (003012) 是否存在实数  $m, n (m < n)$ , 使得函数  $f(x) = -x^2 + 2$  的定义域、值域分别是区间  $[m, n], [2m, 2n]$ .  
若存在, 求出  $m, n$  的值; 若不存在, 说明理由.
215. (003620) 已知  $a \in \mathbf{R}$ , 若存在定义域为  $\mathbf{R}$  的函数  $f(x)$  同时满足下列两个条件, ① 对任意  $x_0 \in \mathbf{R}$ ,  $f(x_0)$  的值为  $x_0$  或  $x_0^2$ ; ② 关于  $x$  的方程  $f(x) = a$  无实数解; 则  $a$  的取值范围为\_\_\_\_\_.
216. (003642) 已知  $f(x) = \left| \frac{2}{x - 1} - a \right| (x > 1, a > 0)$ ,  $f(x)$  的图像与  $x$  轴的交点为  $A$ , 若对于  $f(x)$  的图像上任意一点  $P$ , 在其图像上总存在另一点  $Q (P, Q$  异于  $A)$ , 满足  $AP \perp AQ$ , 且  $|AP| = |AQ|$ , 则  $a =$ \_\_\_\_\_.

217. (003655) 设常数  $a \in \mathbf{R}$ , 函数  $f(x) = \log_2(x+a)$ . 若  $f(x)$  的反函数的图像经过点  $(3, 1)$ , 则  $a =$ \_\_\_\_\_.

218. (003662) 已知常数  $a > 0$ , 函数  $f(x) = \frac{2^x}{2^x + ax}$  的图像经过点  $P\left(p, \frac{6}{5}\right)$ ,  $Q\left(q, -\frac{1}{5}\right)$ . 若  $2^{p+q} = 36pq$ , 则  $a =$ \_\_\_\_\_.

219. (003667) 设  $D$  是含数 1 的有限实数集,  $f(x)$  是定义在  $D$  上的函数. 若  $f(x)$  的图像绕原点逆时针旋转  $\frac{\pi}{6}$  后与原图像重合, 则在以下各项中,  $f(1)$  的可能取值只能是 ( ).

- A.  $\sqrt{3}$                       B.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$                       C.  $\frac{\sqrt{3}}{3}$                       D. 0

220. (003681) 已知四个函数: ①  $y = -x$ , ②  $y = -\frac{1}{x}$ , ③  $y = x^3$ , ④  $y = x^{\frac{1}{2}}$ . 从中任选 2 个, 则事件“所选 2 个函数的图像有且仅有一个公共点”的概率为\_\_\_\_\_.

221. (003709) 若函数  $y = a^x + b$  ( $a > 0$  且  $a \neq 1$ ) 的图像经过点  $(1, 7)$ , 其反函数的图像经过点  $(4, 0)$ , 则  $a - b =$ \_\_\_\_\_.

222. (003720) 函数  $y = \sqrt{2016^{1-x}}$  的定义域是\_\_\_\_\_.

223. (003726) 若函数  $f(x) = \frac{k - 2^x}{1 + k \cdot 2^x}$ , ( $k \neq 1$ ,  $k \in \mathbf{R}$ ) 在定义域内为奇函数, 则  $k =$ \_\_\_\_\_.

224. (003730) 下列函数中, 与函数  $y = x^{2n+1}$  ( $n \in \mathbf{N}^*$ ) 的值域相同的函数为\_\_\_\_\_.

- A.  $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}$                       B.  $y = \ln(x+1)$                       C.  $y = \frac{x+1}{x}$                       D.  $y = x + \frac{1}{x}$

225. (003732) 函数  $f(x) = \sqrt{27 - 3^{2x+1}}$  的定义域是\_\_\_\_\_.(用区间表示)

226. (003746) 幂函数  $f(x)$  的图像经过点  $(2, \sqrt{2})$ , 且  $f^{-1}(x)$  为  $f(x)$  的反函数, 则  $f^{-1}(4) =$ \_\_\_\_\_.

227. (003783)(理科) 已知  $f(x)$  是  $\mathbf{R}$  上的奇函数,  $g(x)$  是  $\mathbf{R}$  上的偶函数, 若函数  $f(x) + g(x)$  的值域为  $[1, 3]$ , 则  $f(x) - g(x)$  的值域为\_\_\_\_\_.

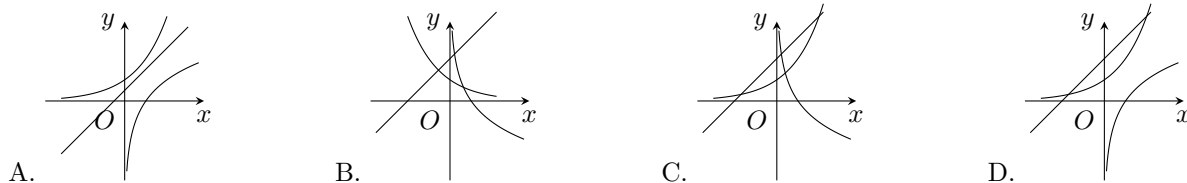
(文科) 已知  $f(x)$  是  $\mathbf{R}$  上的奇函数,  $g(x)$  是  $\mathbf{R}$  上的偶函数, 若函数  $f(x) + g(x)$  的值域为  $[1, 3]$ , 则  $f(-x) + g(x)$  的值域为\_\_\_\_\_.

228. (003789) 设函数  $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ ,  $g(x) = f^{-1}(|x|)$ .

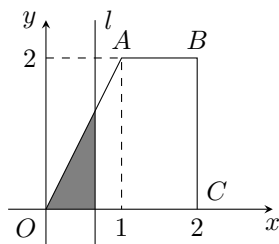
(1) 求函数  $g(x)$  的解析式, 并画出大致图像;

(2) 若不等式  $g(x) + g(2x) \leq k$  对任意  $x \in \mathbf{R}$  恒成立, 求实数  $k$  的取值范围.

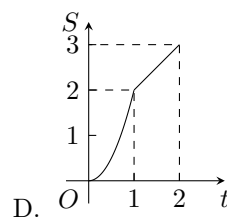
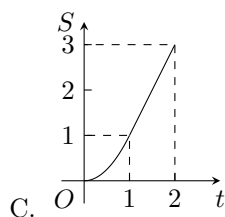
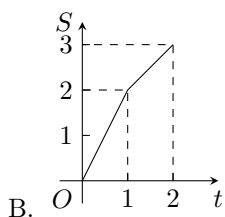
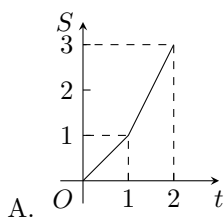
229. (003815) 在同一坐标系中画出函数  $y = \log_a x$ ,  $y = a^x$ ,  $y = x + a$  的图像, 可能正确的是\_\_\_\_\_.



230. (003862) 如图, 直角梯形  $OABC$  中,  $AB \parallel OC$ ,  $AB = 1$ ,  $OC = BC = 2$ , 直线  $l: x = t$  截此梯形所得位于  $l$  左方图形面积为  $S$ ,



则函数  $S = f(t)$  的图像大致为\_\_\_\_\_.



231. (003869) 函数  $f(x) = a^x + b$  ( $a > 1, b < -1$ ), 则  $y = f^{-1}(x)$  的图像一定不经过第\_\_\_\_\_象限.

232. (003884) 已知函数  $y = f(x)$  的定义域为  $\{x | -3 \leq x \leq 8, x \neq 5\}$ , 值域为  $\{y | -1 \leq y \leq 2, y \neq 0\}$ . 下列关于函数  $y = f(x)$  的说法: ① 当  $x = -3$  时,  $y = -1$ ; ② 将  $y = f(x)$  的图像补上  $(5, 0)$ , 得到的图像必定是一条连续的曲线; ③  $y = f(x)$  是  $[-3, 5)$  上的单调函数; ④  $y = f(x)$  的图像与坐标轴只有一个交点. 其中正确的命题是\_\_\_\_\_.

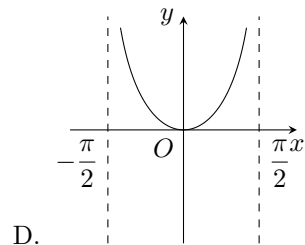
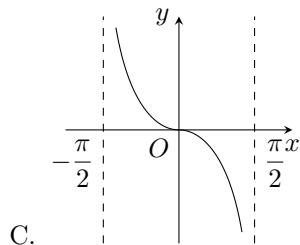
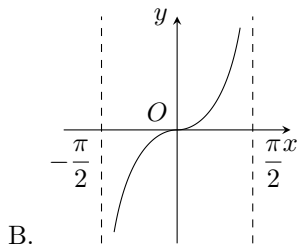
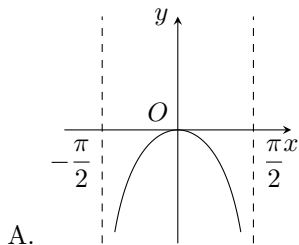
233. (003889) 已知函数  $f(x) = \begin{cases} ax^2 - 2x - 1, & x \geq 0, \\ x^2 + bx + c, & x < 0 \end{cases}$  是偶函数, 直线  $y = t$  与函数  $y = f(x)$  的图像自左向右依次交于四个不同点  $A, B, C, D$ . 若  $AB = BC$ , 则实数  $t$  的值为\_\_\_\_\_.

234. (003894) 对于函数  $f(x) = ax^2 + (b+1)x + b - 2$  ( $a \neq 0$ ), 若存在实数  $x_0$ , 使  $f(x_0) = x_0$  成立, 则称  $x_0$  为  $f(x)$  的不动点.

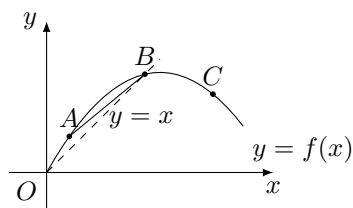
(1) 若对于任何实数  $b$ , 函数  $f(x)$  恒有两个相异的不动点, 求实数  $a$  的取值范围;

(2) 在 (1) 的条件下, 若函数  $y = f(x)$  的图像上  $A, B$  两点的横坐标是函数  $f(x)$  的不动点, 且直线  $y = kx + \frac{1}{2a^2 + 1}$  是线段  $AB$  的垂直平分线, 求实数  $b$  的取值范围.

235. (003936) 函数  $y = \ln(\cos x)$  ( $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ ) 的大致图像是\_\_\_\_\_.

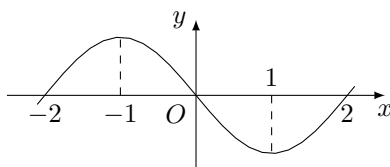


236. (004000) 请根据图中的函数图像, 将下列数值按从小到大的顺序排列:\_\_\_\_\_.



- ① 曲线在点  $A$  处切线的斜率;
- ② 曲线在点  $B$  处切线的斜率;
- ③ 曲线在点  $C$  处切线的斜率;
- ④ 割线  $AB$  的斜率;
- ⑤ 数值 0;
- ⑥ 数值 1.

237. (004007) 已知  $y = f'(x)$  的图像如图所示, 求函数  $y = f(x)$  在  $(-2, 2)$  上的单调区间和极值点.



238. (004009) 设函数  $y = x^3 + ax^2 + bx + c$  的图像与  $y = 0$  在原点相切, 若函数的极小值为  $-4$ , 求函数的表达式与单调减区间.

239. (004067) 已知定义在  $\mathbf{R}$  上的函数  $f(x)$  满足: ①  $f(x) + f(2-x) = 0$ ; ②  $f(x) - f(-2-x) = 0$ ; ③ 在  $[-1, 1]$  上表达式为  $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2}, & x \in [-1, 0], \\ 1-x, & x \in (0, 1], \end{cases}$  则函数  $f(x)$  与  $g(x) = \begin{cases} 2^x, & x \leq 0 \\ \log_{\frac{1}{2}} x, & x > 0 \end{cases}$  的图像在区间  $[-3, 3]$  上的交点的个数为\_\_\_\_\_.

240. (004070) 已知  $f(x) = 2x^2 + 2x + b$  是定义在  $[-1, 0]$  上的函数, 若  $f[f(x)] \leq 0$  在定义域上恒成立, 而且存在实数  $x_0$  满足:  $f[f(x_0)] = x_0$  且  $f(x_0) \neq x_0$ , 则实数  $b$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

241. (004089)  $[x]$  是不超过  $x$  的最大整数, 则方程  $(2^x)^2 - \frac{7}{4} \cdot [2^x] - \frac{1}{4} = 0$  满足  $x < 1$  的所有实数解是\_\_\_\_\_.

242. (004097) 已知函数  $f(x) = 1 - \frac{6}{a^{x+1} + a}$  ( $a > 0, a \neq 1$ ) 是定义在  $\mathbf{R}$  上的奇函数.

(1) 求实数  $a$  的值及函数  $f(x)$  的值域;

(2) 若不等式  $t \cdot f(x) \geq 3^x - 3$  在  $x \in [1, 2]$  上恒成立, 求实数  $t$  的取值范围.

243. (004151) 设不等式组  $\begin{cases} x + y - 6 \geq 0, \\ x - y + 2 \geq 0, \\ x - 3y + 6 \leq 0 \end{cases}$  表示的可行域为  $\Omega$ , 若指数函数  $y = a^x$  的图像与  $\Omega$  有公共点, 则  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_.



244. (004184) 设  $m$  为给定的实常数, 若函数  $y = f(x)$  在其定义域内存在实数  $x_0$ , 使得  $f(x_0 + m) = f(x_0) + f(m)$  成立, 则称函数  $f(x)$  为 “ $G(m)$  函数”.

(1) 若函数  $f(x) = 2^x$  为 “ $G(2)$  函数”, 求实数  $x_0$  的值;

(2) 若函数  $f(x) = \lg \frac{a}{x^2 + 1}$  为 “ $G(1)$  函数”, 求实数  $a$  的取值范围;

(3) 已知  $f(x) = x + b (b \in \mathbf{R})$  为 “ $G(0)$  函数”, 设  $g(x) = x|x - 4|$ . 若对任意的  $x_1, x_2 \in [0, t]$ , 当  $x_1 \neq x_2$  时, 都有  $\frac{g(x_1) - g(x_2)}{f(x_1) - f(x_2)} > 2$  成立, 求实数  $t$  的最大值.

245. (004214) 设定义域为  $\mathbf{R}$  的函数  $f(x)$ 、 $g(x)$  都有反函数, 且函数  $f(x - 1)$  和  $g^{-1}(x - 3)$  图像关于直线  $y = x$  对称, 若  $g(5) = 2015$ , 则  $f(4) =$ \_\_\_\_\_.

246. (004220) 已知函数①  $f(x) = 3 \ln x$ ; ②  $f(x) = 3e^{\cos x}$ ; ③  $f(x) = 3e^x$ ; ④  $f(x) = 3 \cos x$ ; 其中对于  $f(x)$  定义域内的任意一个自变量  $x_1$  都存在唯一一个自变量  $x_2$ , 使  $\sqrt{f(x_1)f(x_2)} = 3$  成立的函数是 ( ).

A. ③

B. ②③

C. ①②④

D. ④

247. (004224) 对于两个定义域相同的函数  $f(x)$ 、 $g(x)$ , 若存在实数  $m$ 、 $n$ , 使  $h(x) = mf(x) + ng(x)$ , 则称函数  $h(x)$  是由 “基函数  $f(x)$ 、 $g(x)$ ” 生成的.

(1)  $f(x) = x^2 + 3x$  和  $g(x) = 3x + 4$  生成一个偶函数  $h(x)$ , 求  $h(2)$  的值;

(2) 若  $h(x) = 2x^2 + 3x - 1$  由  $f(x) = x^2 + ax$ ,  $g(x) = x + b (a, b \in \mathbf{R} \text{ 且 } ab \neq 0)$  生成, 求  $a + 2b$  的取值范围.

248. (004228) 函数  $f(x) = \sqrt{1 - \frac{2}{x}}$  的定义域是\_\_\_\_\_.

249. (004270) 函数  $f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{3+x}}$  的定义域为\_\_\_\_\_.

250. (004272) 已知函数  $g(x)$  的图像与函数  $f(x) = \log_2(3^x - 1)$  的图像关于直线  $y = x$  对称, 则  $g(3) =$ \_\_\_\_\_.

251. (004289) 已知函数  $f(x)$  的定义域为  $D$ , 若存在实常数  $\lambda$  及  $a (a \neq 0)$ , 对任意  $x \in D$ , 当  $x + a \in D$  且  $x - a \in D$  时, 都有  $f(x + a) + f(x - a) = \lambda f(x)$  成立, 则称函数  $f(x)$  具有性质  $M(\lambda, a)$ .

(1) 判断函数  $f(x) = x^2$  是否具有性质  $M(\lambda, a)$ , 并说明理由;

(2) 若函数  $g(x) = \sin 2x + \sin x$  具有性质  $M(\lambda, a)$ , 求  $\lambda$  及  $a$  应满足的条件;

(3) 已知定义域为  $\mathbf{R}$  的函数  $y = h(x)$  不存在零点, 且具有性质  $M(t + \frac{1}{t}, t)$  (其中  $t > 0, t \neq 1$ ), 记  $a_n = h(n) (n \in \mathbf{N}^*)$ , 求证: 数列  $\{a_n\}$  为等比数列的充要条件是  $\frac{a_2}{a_1} = t$  或  $\frac{a_2}{a_1} = \frac{1}{t}$ .

252. (004305) 定义  $F(a, b) = \begin{cases} a, & a \leq b, \\ b, & a > b, \end{cases}$  已知函数  $f(x)$ 、 $g(x)$  定义域都是  $\mathbf{R}$ , 给出下列命题:

(1) 若  $f(x)$ 、 $g(x)$  都是奇函数, 则函数  $F(f(x), g(x))$  为奇函数;

(2) 若  $f(x)$ 、 $g(x)$  都是减函数, 则函数  $F(f(x), g(x))$  为减函数;

(3) 若  $f_{\min}(x) = m$ ,  $g_{\min}(x) = n$ , 则  $F_{\min}(f(x), g(x)) = F(m, n)$ ;

(4) 若  $f(x)$ 、 $g(x)$  都是周期函数, 则函数  $F(f(x), g(x))$  是周期函数.

其中正确命题的个数为 ( ).

A. 1 个

B. 2 个

C. 3 个

D. 4 个

253. (004313) 设  $a \in \mathbf{R}$ . 若  $a$  使得函数  $f(x) = \sqrt{8 - ax - 2x^2}$  是偶函数, 则函数  $y = f(x)$  的定义域是\_\_\_\_\_.

254. (004332) 函数  $y = \log_2(x - 2)$  的定义域为\_\_\_\_\_.

255. (004335) 幂函数  $y = x^k$  的图像经过点  $(4, \frac{1}{2})$ , 则它的单调减区间为\_\_\_\_\_.

256. (004339) 已知偶函数  $y = f(x)$  的定义域为  $\mathbf{R}$ , 且当  $x \geq 0$  时,  $f(x) = x - 4$ , 则不等式  $xf(x) \leq 5$  的解为\_\_\_\_\_.

257. (004347) 已知  $y = f(x)$  与  $y = g(x)$  皆是定义域、值域均为  $\mathbf{R}$  的函数. 若对任意  $x \in \mathbf{R}$ ,  $f(x) > g(x)$  恒成立, 且  $y = f(x)$  与  $y = g(x)$  的反函数  $y = f^{-1}(x)$ 、 $y = g^{-1}(x)$  均存在. 命题  $P$ : “对任意  $x \in \mathbf{R}$ ,  $f^{-1}(x) < g^{-1}(x)$  恒成立”; 命题  $Q$ : “函数  $y = f(x) + g(x)$  的反函数一定存在”. 以下关于这两个命题的真假判断, 正确的是 ( ).

A. 命题  $P$  真, 命题  $Q$  真

B. 命题  $P$  真, 命题  $Q$  假

C. 命题  $P$  假, 命题  $Q$  真

D. 命题  $P$  假, 命题  $Q$  假

258. (004368) 已知函数  $y = f(x)$  的定义域为  $(0, +\infty)$ , 满足对任意  $x \in (0, +\infty)$ , 恒有  $f[f(x) - \frac{1}{x}] = 4$ . 若函数  $y = f(x) - 4$  的零点个数为有限的  $n(n \in \mathbf{N}^*)$  个, 则  $n$  的最大值为 ( ).

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

259. (004377) 函数  $f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{x}}$  的定义域为\_\_\_\_\_.

260. (004380) 已知函数  $f(x)$  的定义域为  $\mathbf{R}$ , 满足对任意  $x \in \mathbf{R}$ , 恒有  $f(x) + f(x+2) = 4$ . 若  $f(1) + f(2) = 1$ , 则  $f(2021) - f(2020) =$ \_\_\_\_\_.

261. (004385) 设函数  $f(x)$  的定义域为  $\mathbf{R}$ ,  $f(x)$  满足对任意  $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ , 当  $x_1 \neq x_2$  时, 恒有  $|f(x_1) - f(x_2)| > 2|x_1 - x_2|$ . 对于命题: ①  $f(x)$  的解析式可以是  $f(x) = x^3 + 2021x$ ; ②  $f(x)$  的解析式可以是  $f(x) = 2021^{-x}$ , 下列判断正确的是 ( ).

A. ①、②均为真命题

B. ①、②均为假命题

C. ①为真命题、②为假命题

D. ①为假命题、②为真命题

262. (004387) 设函数  $f(x)$  的定义域为  $(0, +\infty)$ , 若对任意  $x \in (0, +\infty)$ , 恒有  $f(2x) = 2f(x)$ , 则称  $f(x)$  为“2 阶缩放函数”.

(1) 已知函数  $f(x)$  为“2 阶缩放函数”, 当  $x \in (1, 2]$  时,  $f(x) = 1 - \log_2 x$ , 求  $f(2\sqrt{2})$  的值;

(2) 已知函数  $f(x)$  为“2 阶缩放函数”, 当  $x \in (1, 2]$  时,  $f(x) = \sqrt{2x - x^2}$ , 求证: 函数  $y = f(x) - x$  在  $(1, +\infty)$  上无零点.

263. (004389) 函数  $f(x) = x^{-\frac{1}{2}}$  的定义域为\_\_\_\_\_.

264. (004401) 下列函数中, 值域为  $(0, +\infty)$  的是 ( ).

A.  $y = x^2$

B.  $y = \frac{2}{x}$

C.  $y = 2^x$

D.  $y = |\log_2 x|$

265. (004403) 设集合  $A = \{y|y = a^x, x > 0\}$  (其中常数  $a > 0, a \neq 1$ ),  $B = \{y|y = x^k, x \in A\}$  (其中常数  $k \in \mathbf{Q}$ ), 则“ $k < 0$ ”是“ $A \cap B = \varnothing$ ”的 ( ).

A. 充分非必要条件

B. 必要非充分条件

C. 充分必要条件

D. 既非充分又非必要条件

266. (004408) 记函数  $f(x)$  的定义域为  $D$ . 如果存在实数  $a, b$  使得  $f(a-x) + f(a+x) = b$  对任意满足  $a-x \in D$  且  $a+x \in D$  的  $x$  恒成立, 则称  $f(x)$  为  $\Psi$  函数.

(1) 设函数  $f(x) = \frac{1}{x} - 1$ , 试判断  $f(x)$  是否为  $\Psi$  函数, 若是求出  $a, b$ , 若不是请说明理由;

(2) 设函数  $g(x) = \frac{1}{2^x + t}$ , 其中常数  $t \neq 0$ , 证明:  $g(x)$  是  $\Psi$  函数;

(3) 若  $h(x)$  是定义在  $\mathbf{R}$  上的  $\Psi$  函数, 且函数  $h(x)$  的图像关于直线  $x = m$  ( $m$  为常数) 对称, 试判断  $h(x)$  是否为周期函数? 并证明你的结论.

267. (004411) 若函数  $y = \log_2(x-m) + 1$  的反函数的图像经过点  $(1, 3)$ , 则实数  $m =$ \_\_\_\_\_.

268. (004412) 函数  $f(x) = x + \frac{1}{x-2}$  的值域是\_\_\_\_\_.

269. (004417) 函数  $f(x) = \frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x+2} + \frac{x+2}{x+3}$  图像的对称中心的坐标是\_\_\_\_\_.

270. (004424) 设  $\mu(x)$  表示不小于  $x$  的最小整数, 例如  $\mu(0.3) = 1, \mu(-2.5) = 2$ .

(1) 解方程  $\mu(x-1) = 3$ ;

(2) 设  $f(x) = \mu(x \cdot \mu(x))$ ,  $n \in \mathbf{N}^*$ , 试分别求出  $f(x)$  在区间  $(0, 1]$ 、 $(1, 2]$  以及  $(2, 3]$  上的值域; 若  $f(x)$  在区间  $(0, n]$  上的值域为  $M_n$ , 求集合  $M_n$  中的元素的个数;

(3) 设实数  $a > 0$ ,  $g(x) = x + a \cdot \frac{\mu(x)}{x} - 2$ ,  $h(x) = \frac{\sin(\pi x) + 2}{x^2 - 5x + 7}$ , 若对于任意  $x_1, x_2 \in (2, 4]$  都有  $g(x_1) > h(x_2)$ , 求实数  $a$  的取值范围.

271. (004425) 函数  $y = \log_2(4-x^2)$  的定义域是\_\_\_\_\_.

272. (004429) 已知函数  $f(x) = a \cdot 2^x + 3 - a$  ( $a \in \mathbf{R}$  且  $a \neq 0$ ) 的反函数为  $y = f^{-1}(x)$ , 则函数  $y = f^{-1}(x)$  的图像经过的定点的坐标为\_\_\_\_\_.

273. (004435) 集合  $A = \{y|y = \log_{\frac{1}{3}} x - x, 1 \leq x \leq 2\}$ ,  $B = \{x|x^2 - 5tx + 1 \leq 0\}$ , 若  $A \cap B = A$ , 则实数  $t$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

274. (004436) 若定义在实数集  $\mathbf{R}$  上的奇函数  $y = f(x)$  的图像关于直线  $x = 1$  对称, 且当  $0 \leq x \leq 1$  时,  $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ , 则方程  $f(x) = \frac{1}{3}$  在区间  $(-4, 10)$  内的所有实根之和为\_\_\_\_\_.

275. (004440) 已知函数  $f(x) = \begin{cases} \log_{\frac{1}{2}}(1-x), & -1 \leq x \leq n, \\ 2^{2-|x-1|} - 3, & n < x \leq m, \end{cases}$  ( $n < m$ ) 的值域是  $[-1, 1]$ , 有下列结论: ① 当  $n = 0$

时,  $m$  的取值范围为  $(0, 2]$ ; ② 当  $n = \frac{1}{2}$  时,  $m$  的取值范围为  $(\frac{1}{2}, 2]$ ; ③ 当  $n \in [0, \frac{1}{2})$  时,  $m$  的取值范围为  $[1, 2]$ ; ④ 当  $n \in [0, \frac{1}{2})$  时,  $m$  的取值范围为  $(n, 2]$ ; 其中结论正确的所有的序号是 ( ).

A. ①②

B. ③④

C. ②③

D. ②④

276. (004444) 定义区间  $(m, n)$ 、 $[m, n]$ 、 $(m, n]$ 、 $[m, n)$  的长度均为  $n - m$ , 已知不等式  $\frac{7}{6-x} \geq 1$  的解集为  $A$ .
- (1) 求  $A$  的长度;
  - (2) 函数  $f(x) = \frac{(a^2+a)x-1}{a^2x}$  ( $a \in \mathbf{R}, a \neq 0$ ) 的定义域与值域都是  $[m, n]$  ( $n > m$ ), 求区间  $[m, n]$  的最大长度;
  - (3) 关于  $x$  的不等式  $\log_2 x + \log_2(tx + 3t) < 2$  的解集为  $B$ , 若  $A \cap B$  的长度为 6, 求实数  $t$  的取值范围.
277. (004445) 对于函数  $y = f(x)$  ( $x \in D$ ), 如果存在实数  $a, b$  ( $a \neq 0$ , 且  $a = 1, b = 0$  不同时成立), 使得  $f(x) = f(ax + b)$  对  $x \in D$  恒成立, 则称函数  $f(x)$  为 “ $(a, b)$  映像函数”.
- (1) 判断函数  $f(x) = x^2 - 2$  是否是 “ $(a, b)$  映像函数”, 如果是, 请求出相应的  $a, b$  的值, 若不是, 请说明理由;
  - (2) 已知函数  $y = f(x)$  是定义在  $[0, +\infty)$  上的 “ $(2, 1)$  映像函数”, 且当  $x \in [0, 1)$  时,  $f(x) = 2^x$ , 求函数  $y = f(x)$  ( $x \in [3, 7)$ ) 的反函数;
  - (3) 在 (2) 的条件下, 试构造一个数列  $\{a_n\}$ , 使得当  $x \in [a_n, a_{n+1})$  ( $n \in \mathbf{N}^*$ ) 时,  $2x + 1$  的取值范围为  $[a_{n+1}, a_{n+2})$ , 并求  $x \in [a_n, a_{n+1})$  ( $n \in \mathbf{N}^*$ ) 时, 函数  $y = f(x)$  的解析式, 及  $y = f(x)$  ( $x \in [0, +\infty)$ ) 的值域.
278. (004446) 函数  $y = \sqrt{2+x}$  的定义域为\_\_\_\_\_.
279. (004452) 已知幂函数  $y = f(x)$  的图像经过点  $P(4, 2)$ , 则它的反函数为  $f^{-1}(x) =$ \_\_\_\_\_.
280. (004496) 已知函数  $y = f(x)$  存在反函数  $y = f^{-1}(x)$ , 若函数  $y = f(x) + 2^x$  的图像经过点  $(1, 4)$ , 则函数  $y = f^{-1}(x) + \log_2 x$  的图像必过点\_\_\_\_\_.
281. (004500) 对于定义域为  $D$  的函数  $f(x)$ , 若存在  $x_1, x_2 \in D$  且  $x_1 \neq x_2$ , 使得  $f(x_1^2) = f(x_2^2) = 2f(x_1 + x_2)$ , 则称函数  $f(x)$  具有性质  $M$ . 若函数  $g(x) = |\log_2 x - 1|$ ,  $x \in (0, a]$  具有性质  $M$ , 则实数  $a$  的最小值为\_\_\_\_\_.
282. (004509) 若存在常数  $k$  ( $k > 0$ ), 使得对定义域  $D$  内的任意  $x_1, x_2$  ( $x_1 \neq x_2$ ), 都有  $|f(x_1) - f(x_2)| \leq k|x_1 - x_2|$  成立, 则称函数  $f(x)$  在其定义域  $D$  是 “ $k$ - 利普希兹条件函数”.
- (1) 若函数  $f(x) = \sqrt{x}$  ( $1 \leq x \leq 4$ ) 是 “ $k$ - 利普希兹条件函数”, 求常数  $k$  的取值范围;
  - (2) 判断函数  $f(x) = \log_2 x$  是否是 “2- 利普希兹条件函数”, 若是, 请证明, 若不是, 请说明理由;
  - (3) 若  $y = f(x)$  ( $x \in \mathbf{R}$ ) 是周期为 2 的 “1- 利普希兹条件函数”, 证明: 对任意的实数  $x_1, x_2$ , 都有  $|f(x_1) - f(x_2)| \leq 1$ .
283. (004516) 函数  $f(x) = 1 + \log_2 x$  ( $x \geq 4$ ) 的反函数的定义域为\_\_\_\_\_.
284. (004523) 已知函数  $f^{-1}(x)$  为函数  $f(x)$  的反函数, 且函数  $f(x-1)$  的图像经过点  $(1, 1)$ , 则函数  $f^{-1}(x)$  的图像一定经过点 ( )
- A.  $(0, 1)$                       B.  $(1, 0)$                       C.  $(1, 2)$                       D.  $(2, 1)$
285. (004525) 已知函数  $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \text{ 为无理数,} \\ x, & x \text{ 为有理数,} \end{cases}$  则以下 4 个命题: ①  $f(x)$  是偶函数; ②  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  上是增函数; ③  $f(x)$  的值域为  $\mathbf{R}$ ; ④ 对于任意的正有理数  $a$ ,  $g(x) = f(x) - a$  存在奇数个零点. 其中正确命题的个数为 ( ).

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

286. (004530) 已知函数  $f(x)$  的定义域是  $D$ , 若对于任意的  $x_1, x_2 \in D$ , 当  $x_1 < x_2$  时, 都有  $f(x_1) \leq f(x_2)$ , 则称函数  $f(x)$  在  $D$  上为“非减函数”.

(1) 判断  $f_1(x) = x^2 - 4x$ ,  $x \in [1, 4]$  与  $f_2(x) = |x - 1| + |x - 2|$ ,  $x \in [1, 4]$  是否是“非减函数”?

(2) 已知函数  $g(x) = 2^x + \frac{a}{2^{x-1}}$  在  $[2, 4]$  上为“非减函数”, 求实数  $a$  的取值范围;

(3) 已知函数  $h(x)$  在  $[0, 1]$  上为“非减函数”, 且满足条件: ①  $h(0) = 0$ ; ②  $h(\frac{x}{3}) = \frac{1}{2}h(x)$ ; ③  $h(1-x) = 1 - h(x)$ , 求  $h(\frac{1}{2020})$  的值.

287. (004540) 已知  $y = f(x)$  是定义在  $\mathbf{R}$  上的奇函数, 且当  $x \geq 0$  时,  $f(x) = -\frac{1}{4^x} + \frac{1}{2^x}$ , 则此函数的值域为\_\_\_\_\_.

288. (004563) 下列函数中, 值域为  $[0, +\infty)$  的是 ( ).

A.  $y = 2^x$ B.  $y = x^{\frac{1}{2}}$ C.  $y = \tan x$ D.  $y = \cos x$ 

289. (004661) 函数  $f(x) = x^{-\frac{1}{2}}$  的定义域是\_\_\_\_\_.

290. (004760) 已知以下三个陈述句:

$p$ : 存在  $a \in \mathbf{R}$  且  $a \neq 0$ , 对任意的  $x \in \mathbf{R}$ , 均有  $f(2^{x+a}) < f(2^x) + f(a)$  恒成立;

$q_1$ : 函数  $y = f(x)$  是定义域为  $\mathbf{R}$  的减函数, 且对任意的  $x \in \mathbf{R}$ , 都有  $f(x) > 0$ ;

$q_2$ : 函数  $y = f(x)$  是定义域为  $\mathbf{R}$  的增函数, 存在  $x_0 < 0$ , 使得  $f(x_0) = 0$ ;

用这三个陈述句组成两个命题, 命题  $S$ : “若  $q_1$ , 则  $p$ ”; 命题  $T$ : “若  $q_2$ , 则  $p$ ”. 关于  $S, T$  以下说法正确的是 ( ).

A. 只有命题  $S$  是真命题B. 只有命题  $T$  是真命题C. 两个命题  $S, T$  都是真命题D. 两个命题  $S, T$  都不是真命题

291. (005136) 在  $\triangle ABC$  中, 已知  $BC = a$ ,  $CA = b$ ,  $AB = c$ ,  $\angle ACB = \theta$ . 现将  $\triangle ABC$  分别以  $BC, CA, AB$  所在直线为轴旋转一周, 设所得三个旋转体的体积依次为  $V_1, V_2, V_3$ .

(1) 设  $T = \frac{V_3}{V_1 + V_2}$ , 试用  $a, b, c$  表示  $T$ ;

(2) 若  $\theta$  为定值, 并令  $\frac{a+b}{c} = x$ , 将  $T = \frac{V_3}{V_1 + V_2}$  表示为  $x$  的函数, 写出这个函数的定义域, 并求这个函数的最大值  $M$ ;

(3) 若  $\theta \in [\frac{\pi}{3}, \pi)$ , 求 (2) 中  $M$  的最大值.

292. (005272) 求函数  $y = \frac{3x-1}{x+1}$  的值域.

293. (005273) 求函数  $y = \frac{4x+3}{2x-1}$  的值域.

294. (005274) 求函数  $y = \frac{x^2-1}{x^2+2}$  的值域.

295. (005275) 求函数  $y = \frac{x^2-x+1}{2x^2-2x+3}$  的值域.

296. (005276) 求函数  $y = \frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 + x - 6}$  的值域.

297. (005277) 若实数  $x, y$  满足  $x^2 + 4y^2 = 4x$ , 求  $S = x^2 + y^2$  的值域.

298. (005279) 求函数  $y = 3x^2 - 12x + 18\sqrt{4x - x^2} - 23$  的值域.

299. (005280) 求函数  $y = |x - 2| - |x + 1|$  的值域.

300. (005282) 已知定义域为  $\mathbf{R}$  的函数  $f(x)$  满足: ①  $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$  对任何实数  $x, y$  都成立; ② 存在实数  $x_1, x_2$ , 使  $f(x_1) \neq f(x_2)$ . 求证:

(1)  $f(0) = 1$ ;

(2)  $f(x) > 0$ .

301. (005298) 函数  $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 5x + 6}}{x - 2}$  的定义域是 ( ).

A.  $\{x | 2 < x < 3\}$

B.  $\{x | x < 2 \text{ 或 } x > 3\}$

C.  $\{x | x \leq 2 \text{ 或 } x \geq 3\}$

D.  $\{x | x < 2 \text{ 或 } x \geq 3\}$

302. (005299) 若函数  $f(x)$  的定义域是  $[-1, 1]$ , 则函数  $f(x + 1)$  的定义域是 ( ).

A.  $[-1, 1]$

B.  $[0, 2]$

C.  $[-2, 0]$

D.  $[0, 1]$

303. (005300) 在①  $y = x$  与  $y = \sqrt{x^2}$ ; ②  $y = \sqrt{x^2}$  与  $y = (\sqrt{x})^2$ ; ③  $y = |x|$  与  $y = \frac{x^2}{x}$ ; ④  $y = |x|$  与  $y = \sqrt{x^2}$ ; ⑤  $y = x^0$  与  $y = 1$  这五组函数中, 表示同一函数的组数是 ( ).

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

304. (005301) 函数  $y = -x^2 - 2x + 3 (-5 \leq x \leq 0)$  的值域是 ( ).

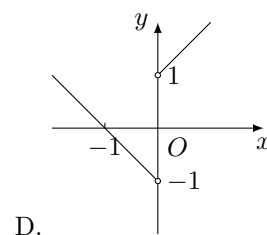
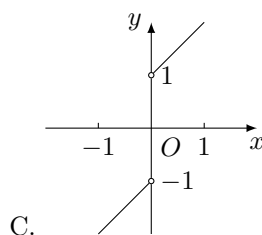
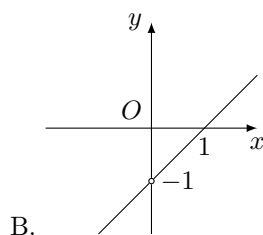
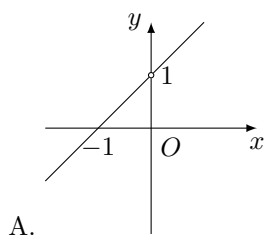
A.  $(-\infty, 4]$

B.  $[3, 12]$

C.  $[-12, 4]$

D.  $[4, 12]$

305. (005303) 函数  $y = x + \frac{|x|}{x}$  的图像是 ( ).



306. (005304) 函数  $y = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{x + 1}$  的定义域为\_\_\_\_\_.

307. (005305) 函数  $y = \frac{1}{\sqrt{2x^2 + 3}}$  的定义域为\_\_\_\_\_.

308. (005306) 函数  $y = \frac{x + 5}{3x^2 - 2x - 1}$  的定义域为\_\_\_\_\_.

309. (005307) 函数  $y = \sqrt{6x - x^2 - 9}$  的定义域为\_\_\_\_\_.

310. (005308) 函数  $y = \sqrt{4 - x^2} + \frac{1}{|x| - 1}$  的定义域为\_\_\_\_\_.

311. (005309) 函数  $y = \frac{x^3 - 1}{x + |x|}$  的定义域为\_\_\_\_\_.
312. (005310) 函数  $y = \frac{1}{|x| - x^2}$  的定义域为\_\_\_\_\_.
313. (005311) 函数  $y = \sqrt{1 - (\frac{x-1}{x+1})^2}$  的定义域为\_\_\_\_\_.
314. (005312) 函数  $y = \frac{\sqrt{x^2 - 2x - 15}}{|x+3| - 8}$  的定义域为\_\_\_\_\_.
315. (005313) 函数  $y = 1 - \frac{1}{x+2}$  的值域为\_\_\_\_\_.
316. (005314) 函数  $y = \frac{3}{2x}$  的值域为\_\_\_\_\_.
317. (005315) 函数  $y = \frac{x+3}{x-3}$  的值域为\_\_\_\_\_.
318. (005316) 函数  $y = \frac{5x+3}{x-3}$  的值域为\_\_\_\_\_.
319. (005317) 函数  $y = 4 + \sqrt{2x+1}$  的值域为\_\_\_\_\_.
320. (005318) 函数  $y = \sqrt{x - \frac{1}{2}x^2}$  的值域为\_\_\_\_\_.
321. (005319) 函数  $y = \sqrt{-x^2 + x + 2}$  的值域为\_\_\_\_\_.
322. (005320) 函数  $y = \frac{2x^2 + 2x + 3}{x^2 + x + 1}$  的值域为\_\_\_\_\_.
323. (005329) 若  $-b < a < 0$ , 且函数  $d(x)$  的定义域是  $[a, b]$ , 则函数  $F(x) = f(x) + f(-x)$  的定义域是 ( ).
- A.  $[a, b]$                       B.  $[-b, -a]$                       C.  $[-b, b]$                       D.  $[a, -a]$
324. (005330) 若  $f(x)$  的定义域是  $[0, 1]$ , 且  $f(x+m) + f(x-m)$  的定义域是  $\emptyset$ , 则正数  $m$  的取值范围是 ( ).
- A.  $0 < m < 1$                       B.  $0 < m \leq \frac{1}{2}$                       C.  $0 < m < \frac{1}{2}$                       D.  $m > \frac{1}{2}$
325. (005331) 函数  $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$  的值域是 ( ).
- A.  $(-1, 1)$                       B.  $[-1, 1]$                       C.  $[-1, 1)$                       D.  $(-1, 1]$
326. (005333) 函数  $f(x) = |1-x| - |x-3| (x \in \mathbf{R})$  的值域是 ( ).
- A.  $[-2, 2]$                       B.  $[-1, 3]$                       C.  $[-3, 1]$                       D.  $[0, 4]$
327. (005334) 若函数  $f(x)$  的定义域是  $[0, 1]$ , 分别求函数  $f(1-2x)$  和  $f(x+a) (a > 0)$  的定义域.
328. (005335) 若函数  $f(x+1)$  的定义域是  $[-2, 3]$ , 求函数  $f(\frac{1}{x} + 2)$  的定义域.
329. (005336) 求函数  $y = \frac{2x}{x^2 + x + 1}$  的值域.
330. (005337) 求函数  $y = \frac{x^2 + x - 1}{x^2 + x + 1}$  的值域.
331. (005338) 求函数  $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 5x + 4}$  的值域.

332. (005341) 求函数  $y = 3x - 2 + \sqrt{3 - 2x}$  的值域.

333. (005342) 求函数  $y = 2x + \sqrt{2x - 1}$  的值域.

334. (005343) 求函数  $y = (x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4) + 15$  的值域.

335. (005349) 已知函数  $f(x)$  的定义域是一切非零实数, 且满足  $3f(x) + 2f(\frac{1}{x}) = 4x$ , 求  $f(x)$  的表达式.

336. (005350) 作出函数  $y = 1 + \frac{|x|}{x}$  的图像.

337. (005351) 作出函数  $y = x - |1 - x|$  的图像.

338. (005352) 作出函数  $y = |x^2 - 4x + 3|$  的图像.

339. (005353) 作出函数  $y = \frac{x^3 + x}{|x|}$  的图像.

340. (005354) 作出函数  $y = \frac{(x + \frac{1}{2})^0}{|x| - x}$  的图像.

341. (005355) 已知  $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ , 画出函数  $y = \frac{1}{2}[f(x) + |f(x)|]$  的图像.

342. (005356) 已知  $f(x) = |x|$ ,  $x \in [-1, 1]$ , 作出函数  $y = f(x + 1) + 1$  的图像.

343. (005363) 画出函数  $y = x^2 - 2|x| - 1$  的图像.

344. (005364) 求函数  $y = \frac{x - 2}{2x + 1}$  的值域.

345. (005365) 已知函数  $f(x) = (x - 1)^2 (x \leq 1)$ , 又  $f(x)$  和  $\varphi(x)$  的图像关于直线  $y = x$  对称, 求  $\varphi(x)$  的表达式.

346. (005445) 已知幂函数  $f(x)$  的图像经过点  $(2, \frac{\sqrt{2}}{2})$ , 则  $f(4)$  的值等于 ( ).

- A. 16                                  B.  $\frac{1}{16}$                                   C.  $\frac{1}{2}$                                   D. 2

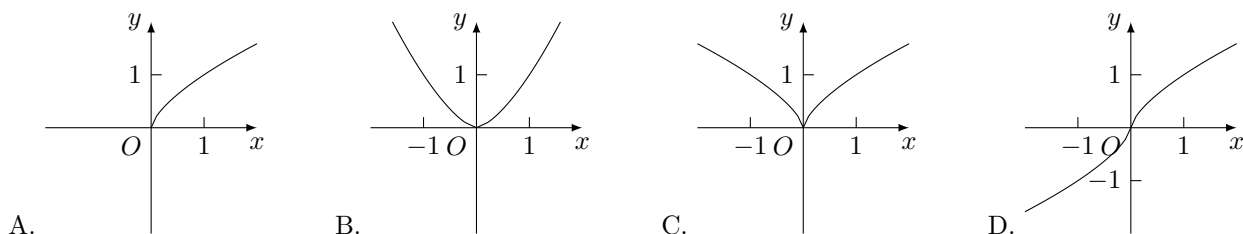
347. (005446) 下列幂函数中, 定义域为  $\{x | x > 0\}$  的是 ( ).

- A.  $y = x^{\frac{2}{3}}$                                   B.  $y = x^{\frac{3}{2}}$                                   C.  $y = x^{-\frac{2}{3}}$                                   D.  $y = x^{-\frac{3}{2}}$

348. (005447) 幂函数  $y = x^n (n \in \mathbf{Z})$  的图像一定不经过 ( ).

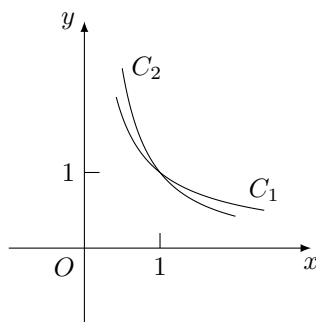
- A. 第一象限                                  B. 第二象限                                  C. 第三象限                                  D. 第四象限

349. (005448) 函数  $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$  的图像是 ( ).



350. (005449) 幂函数  $y = x^m$  和  $y = x^n$  在第一象限内的图像  $C_1$  和  $C_2$  图像所示, 则  $m, n$  之间的关系是 ( ).





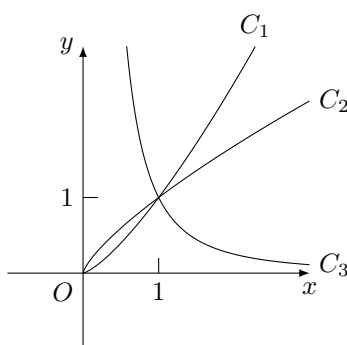
A.  $n < m < 0$

B.  $m < n < 0$

C.  $n > m > 0$

D.  $m > n > 0$

351. (005450) 图中,  $C_1, C_2, C_3$  为幂函数  $y = x^a$  在第一象限的图像, 则解析式中的指数  $\alpha$  依次可以取 ( ).



A.  $\frac{4}{3}, -2, \frac{3}{4}$

B.  $-2, \frac{3}{4}, \frac{4}{3}$

C.  $-2, \frac{4}{3}, \frac{3}{4}$

D.  $\frac{3}{4}, \frac{4}{3}, -2$

352. (005451) 函数  $y = x^{\frac{5}{6}}$  的定义域为\_\_\_\_\_, 值域为\_\_\_\_\_.

353. (005452) 函数  $y = x^{\frac{3}{5}}$  的定义域为\_\_\_\_\_, 值域为\_\_\_\_\_.

354. (005453) 函数  $y = x^{\frac{8}{5}}$  的定义域为\_\_\_\_\_, 值域为\_\_\_\_\_.

355. (005454) 函数  $y = x^{-\frac{5}{4}}$  的定义域为\_\_\_\_\_, 值域为\_\_\_\_\_.

356. (005455) 函数  $y = x^{-\frac{5}{3}}$  的定义域为\_\_\_\_\_, 值域为\_\_\_\_\_.

357. (005456) 函数  $y = x^{-\frac{2}{3}}$  的定义域为\_\_\_\_\_, 值域为\_\_\_\_\_.

358. (005457) 函数  $y = -2(x+5)^{-\frac{1}{4}}$  的定义域为\_\_\_\_\_, 值域为\_\_\_\_\_.

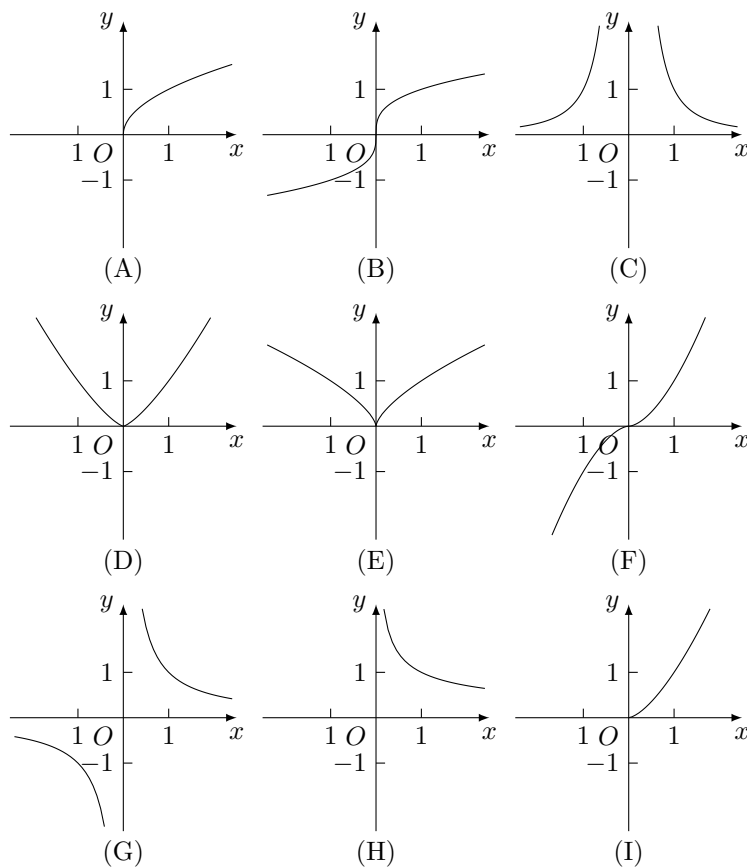
359. (005458) 函数  $y = 5(2x-1)^{\frac{3}{4}}$  的定义域为\_\_\_\_\_, 值域为\_\_\_\_\_.

360. (005459) 将下列函数图像的标号, 填在相应函数后面的横线上:

(1)  $y = x^{\frac{2}{3}}$ : \_\_\_\_\_; (2)  $y = x^{-2}$ : \_\_\_\_\_; (3)  $y = x^{\frac{1}{2}}$ : \_\_\_\_\_;

(4)  $y = x^{-1}$ : \_\_\_\_\_; (5)  $y = x^{\frac{1}{3}}$ : \_\_\_\_\_; (6)  $y = x^{\frac{3}{2}}$ : \_\_\_\_\_;

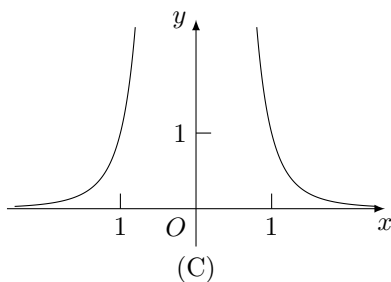
(7)  $y = x^{\frac{4}{3}}$ : \_\_\_\_\_; (8)  $y = x^{-\frac{1}{2}}$ : \_\_\_\_\_; (9)  $y = x^{\frac{5}{3}}$ : \_\_\_\_\_.



361. (005460) 若幂函数  $y = x^n$  的图像在  $0 < x < 1$  时位于直线  $y = x$  的下方, 则  $n$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

362. (005461) 若幂函数  $y = x^n$  的图像在  $0 < x < 1$  时位于直线  $y = x$  的上方, 则  $n$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

363. (005462) 函数  $f(x) = x^{k^2-2k-3}$  ( $k \in \mathbf{Z}$ ) 的图像如图所示, 则  $k =$ \_\_\_\_\_.



364. (005463) 幂函数  $y = x^p$  与  $y = x^q$  的图像都通过定点\_\_\_\_\_, 它们在第一象限部分关于直线  $y = x$  对称, 则  $p, q$  应满足的条件是\_\_\_\_\_.

365. (005471) 已知函数  $y = x^{n^2-2n-3}$  ( $n \in \mathbf{Z}$ ) 的图像与两坐标轴都无公共点, 且其图像关于  $y$  轴对称, 求  $n$  的值, 并画出相应的函数图像.

366. (005477) 若函数  $f(x)$  在定义域  $\mathbf{R}$  上为增函数, 且  $f(x) < 0$ , 则下列函数在  $\mathbf{R}$  上为增函数的是 ( ).

A.  $y = |f(x)|$

B.  $y = \frac{1}{f(x)}$

C.  $y = [f(x)]^2$

D.  $y = [f(x)]^3$

367. (005484) 已知  $f(x) = -x^3 - x + 1 (x \in \mathbf{R})$ , 求证  $y = f(x)$  在定义域上为减函数.
368. (005486) 求证:  $f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{x}$  在定义域上是增函数.
369. (005493) 下列函数中既是奇函数, 又在定义域上为增函数的是 ( ).
- A.  $f(x) = 3x + 1$       B.  $f(x) = \frac{1}{x}$       C.  $f(x) = 1 - \frac{1}{x}$       D.  $f(x) = x^3$
370. (005496) 已知  $f(x)$  是奇函数, 则下列各点中在函数  $y = f(x)$  的图像上的点的是 ( ).
- A.  $(a, f(-a))$       B.  $(-a, -f(a))$       C.  $(\frac{1}{a}, -f(\frac{1}{a}))$       D.  $(-\sin a, -f(-\sin a))$
371. (005498) 若奇函数  $f(x)$  的定义域是  $\mathbf{R}$ , 则  $f(0) =$ \_\_\_\_\_.
372. (005505) 若函数  $y = f(x)$  是偶函数, 其图像与  $x$  轴有四个交点, 则方程  $f(x) = 0$  的所有实数根之和为 ( ).
- A. 4      B. 2      C. 1      D. 0
373. (005508)  $f(x) + f(2-x) + 2 = 0$  对任何实数  $x$  都成立, 则  $f(x)$  的图像 ( ).
- A. 关于直线  $x = 1$  成轴对称图形      B. 关于直线  $x = 2$  成轴对称图形  
C. 关于点  $(1, -1)$  成中心对称图形      D. 关于点  $(-1, 1)$  成中心对称图形
374. (005519) 已知奇函数  $f(x)$  在定义域  $(-l, l)$  上是减函数, 求满足  $f(1-m) + f(1-m^2) < 0$  的实数  $m$  的取值范围.
375. (005522) 求证: 定义域为  $(-l, l)$  的任何函数都能表示成一个奇函数与一个偶函数之和.
376. (005524) 函数  $y = \sqrt{x^2 - 2x + 3} (x \leq 1)$  的反函数的定义域是 ( ).
- A.  $[0, +\infty)$       B.  $(2, +\infty)$       C.  $(-\infty, 1]$       D.  $[\sqrt{2}, +\infty)$
377. (005527) 若函数  $y = g(x)$  的图像与函数  $f(x) = (x-1)^2 (x \leq 1)$  的图像关于直线  $y = x$  对称. 则  $g(x)$  的表达式是 ( ).
- A.  $g(x) = 1 - \sqrt{x} (x \geq 0)$       B.  $g(x) = 1 + \sqrt{x} (x \geq 0)$   
C.  $g(x) = \sqrt{1-x} (x \leq 1)$       D.  $g(x) = \sqrt{1+x} (x \geq -1)$
378. (005530) 若函数  $f(x)$  的图像经过点  $(0, -1)$ , 则函数  $f(x+4)$  的反函数的图像必经过点 ( ).
- A.  $(-1, 4)$       B.  $(-4, -1)$       C.  $(-1, -4)$       D.  $(1, -4)$
379. (005531) 已知函数  $y = -\sqrt{1-x^2}$  的反函数是  $y = -\sqrt{1-x^2}$ , 则原函数的定义域“最大”可以是\_\_\_\_\_.
380. (005533) 若点  $(1, 2)$  既在函数  $y = \sqrt{ax+b}$  的图像上. 又在其反函数的图像上, 则  $a =$ \_\_\_\_\_,  $b =$ \_\_\_\_\_.
381. (005542) 若函数  $y = \sqrt{x-m}$  与其反函数的图像有公共点, 则  $m$  的取值范围是 ( ).
- A.  $m \geq \frac{1}{4}$       B.  $m \leq \frac{1}{4}$       C.  $m \geq 0$       D.  $m \leq 0$

382. (005543) 已知  $y = g(x)$  是函数  $y = f(x)$  的反函数, 又  $y = h(x)$  与  $y = g(x)$  的图像关于原点  $O(0, 0)$  对称, 则  $h(x)$  的表达式是 ( ).

- A.  $y = f^{-1}(x)$                       B.  $y = -f^{-1}(x)$                       C.  $y = f^{-1}(-x)$                       D.  $y = -f^{-1}(-x)$

383. (005547) 已知定义域为  $(-\infty, 0]$  的函数  $f(x)$  满足  $f(x-1) = x^2 - 2x$ , 则  $f^{-1}(-\frac{1}{2}) =$ \_\_\_\_\_.

384. (005548) 求函数  $f(x) = \begin{cases} x+1, & x > 0, \\ x-1, & x < 0 \end{cases}$  的反函数, 并作出其反函数的图像.

385. (005549) 已知函数  $f(x) = x^2 + 2x + 1$ .

(1) 若函数的定义域是  $(-\infty, +\infty)$ , 这个函数有没有反函数?

(2) 若函数的定义域是  $[0, +\infty)$ , 求其反函数;

(3) 若函数的定义域是  $(-\infty, -1]$ , 求其反函数.

386. (005562) 已知函数  $f(x) = 2x + 1$ ,  $g(x) = 1.5^x$ ,  $h(x) = x^{1.5}$ , 试用数值计算比较三个函数在  $[0, +\infty)$  上的函数值的大小、图像递增的快慢. 并说明在函数图像上的表现. 解列表并计算得:

$x$	$f(x) = 2x + 1$	$f(x) - f(x-1)$	$g(x) = 1.5^x$	$g(x) - g(x-1)$	$h(x) = x^{1.5}$	$h(x) - h(x-1)$
0	1		1		0	
1	3	2	1.5	0.5	1	1
2	5	2	2.25	0.75	2.82842712	1.82842712
3	7	2	3.375	1.125	5.19615242	2.3677253
4	9	2	5.0625	1.6875	8	2.80384758
5	11	2	7.59375	2.53125	11.1803399	3.18033989
6	13	2	11.390625	3.796875	14.6969385	3.51659857
7	15	2	17.085938	5.6953125	18.5202592	3.82332072
8	17	2	25.628906	8.5429688	22.627417	4.10715782
9	19	2	38.443359	12.814453	27	4.372583
10	21	2	57.665039	19.22168	31.6227766	4.6227766
11	23	2	86.497559	28.83252	36.4828727	4.86009609
12	25	2	129.74634	43.248779	41.5692194	5.08634669
13	27	2	194.61951	64.873169	46.8721666	5.3029472
14	29	2	291.92926	97.309753	52.3832034	5.51103683
15	31	2	437.89389	145.96463	58.0947502	5.71154678
16	33	2	656.84084	218.94695	64	5.90524981
17	35	2	985.26125	328.42042	70.0927956	6.09279564
18	37	2	1477.8919	492.63063	76.3675324	6.27473673

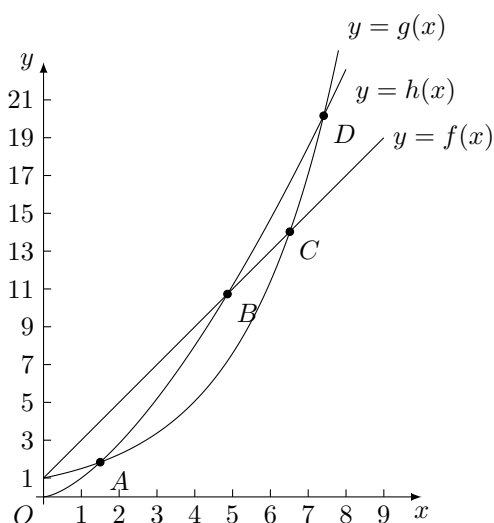
$x$	$f(x) = 2x + 1$	$f(x) - f(x - 1)$	$g(x) = 1.5^x$	$g(x) - g(x - 1)$	$h(x) = x^{1.5}$	$h(x) - h(x - 1)$
19	39	2	2216.8378	738.94594	82.8190799	6.45154756
20	41	2	3325.2567	1108.4189	89.4427191	6.62363917
21	43	2	4987.8851	1662.6284	96.2340896	6.79137049
22	45	2	7481.8276	2493.9425	103.189147	6.95505712
23	47	2	11222.741	3740.9138	110.304125	7.11497832
24	49	2	16834.112	5611.3707	117.575508	7.27138262
25	51	2	25251.168	8417.0561	125	7.42449235
26	53	2	37876.752	12625.584	132.574507	7.57450735
27	55	2	56815.129	18938.376	140.296115	7.72160806
28	57	2	85222.693	28407.564	148.162073	7.86595801
29	59	2	127834.04	42611.346	156.169779	8.00770599
30	61	2	191751.06	63917.02	164.316767	8.14698784
...	...	...	...	...	...	...

得点  $A, B, C, D$  的横坐标分别约为 1.5, 4.8, 6.5, 7.4, 记作  $x_A, x_B, x_C, x_D$ .

(1) 三个函数的函数值的大小情况如下:

- ① 当  $0 < x < x_A$  时,  $f(x) > g(x) > h(x)$ ; ② 当  $x_A < x < x_B$  时,  $f(x) > h(x) > g(x)$ ; ③ 由  $x_B < x < x_C$  时,  $h(x) > f(x) > g(x)$ ; ④ 当  $x_C < x < x_D$  时,  $h(x) > g(x) > f(x)$ ; ⑤ 当  $x_D < x$  时,  $g(x) > h(x) > f(x)$ ; ⑥ 当  $x = x_A$  时,  $f(x) > g(x) = h(x)$ ; ⑦ 当  $x = x_B$  时,  $f(x) = h(x) > g(x)$ ; ⑧ 当  $x = x_C$  时,  $f(x) = g(x) < h(x)$ ; ⑨ 当  $x = x_D$  时,  $f(x) < g(x) = h(x)$ .

(2) 它们在同一个平面直角坐标系下的图像如图 14 所示.



由表格及图像可看出, 三个函数的函数值变化及相应增量规律为: 随着  $x$  的增大, 直线型均匀上升, 增量恒定; 指数型急剧上升, 在区间  $[0, +\infty)$  上递增增量快速增大; 幂函数型虽上升较快, 但随着  $x$  的不断增大上升趋势远不如指数型, 几乎微不足道, 其增量缓慢递增.

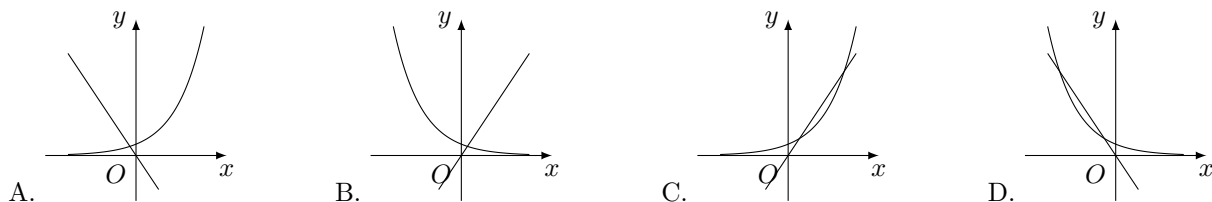
387. (005563) 已知函数  $f(x) = 4 + a^{x-1}$  的图像恒过记点  $P$ , 则点  $P$  的坐标是 ( ).

- A. (1, 5)                      B. (1, 4)                      C. (0, 4)                      D. (4, 0)

388. (005564) 下列函数中, 值域为  $(0, +\infty)$  的函数是 ( ).

- A.  $y = (\frac{1}{8})^{2-x}$                       B.  $y = \sqrt{1-3^x}$                       C.  $y = \sqrt{(\frac{1}{3})^x - 1}$                       D.  $y = 2^{\frac{1}{3-x}}$

389. (005569) 在同一平面直角坐标系中, 函数  $f(x) = ax$  与  $g(x) = a^x$  的图像可能是 ( ).



390. (005574) 若函数  $f(x) = a^x - (b+1)$  ( $a > 0$  且  $a \neq 1$ ) 的图像在第一、三、四象限, 则必有 ( ).

- A.  $0 < a < 1$  且  $b > 0$                       B.  $0 < a < 1$  且  $b < 0$                       C.  $a > 1$  且  $b < 1$                       D.  $a > 1$  且  $b > 0$

391. (005578) 函数  $f(x) = \sqrt{1-6x^2+x-2}$  的定义域是\_\_\_\_\_.

392. (005579) 若函数  $f(x)$  的定义域是  $(0, 1)$ , 则函数  $f(2^{-x})$  的定义域是\_\_\_\_\_,  $f(3 \times 9^x + 2 \times 3^x)$  的定义域是\_\_\_\_\_.

393. (005588) 函数  $f(x) = \frac{1}{3^x - 1}$  的值域是\_\_\_\_\_.

394. (005589) 函数  $f(x) = \frac{3^x}{3^x + 1}$  的值域是\_\_\_\_\_.

395. (005596) 已知函数  $f(x) = (\frac{1}{2^x - 1} + \frac{1}{2})x^3$ .

- (1) 求函数的定义域;
- (2) 讨论  $f(x)$  的奇偶性;
- (3) 求证:  $f(x) > 0$ .

396. (005597) 已知  $f(x) = \frac{a^x - 1}{a^x + 1}$  ( $a > 1$ ).

- (1) 判断函数  $f(x)$  的奇偶性;
- (2) 求函数  $f(x)$  的值域;
- (3) 求证:  $f(x)$  在区间  $(-\infty, +\infty)$  上是增函数.

397. (005605) 在同一个平面直角坐标系中, 作出  $t(x) = 0.5x$  与  $g(x) = 0.2 \times 2^x$  的图像, 并比较它们的增长情况.

398. (005680) 求函数  $y = \frac{\sqrt{\log_{0.8} x - 1}}{2x - 1}$  的定义域.

399. (005685) 求函数  $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 6x + 17)$  的值域.

400. (005687) 与函数  $y = x$  为同一个函数的是 ( ).

A.  $y = \sqrt{x^2}$

B.  $y = \frac{x^2}{x}$

C.  $y = a^{\log_a x} (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$

D.  $y = \log_a a^x (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$

401. (005689) 若函数  $f(x) = \log_2 x + 3 (x \geq 1)$ , 则其反函数  $f^{-1}(x)$  的定义域是 ( ).

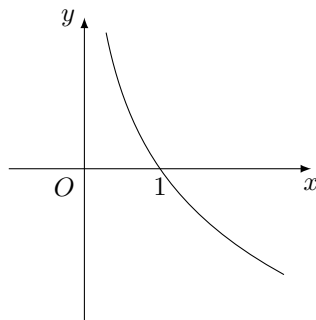
A.  $\mathbf{R}$

B.  $\{x|x \geq 1\}$

C.  $\{x|0 < x < 1\}$

D.  $\{x|x \geq 3\}$

402. (005690) 图中图像所对应的函数可能是 ( ).



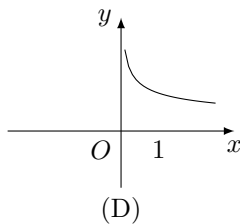
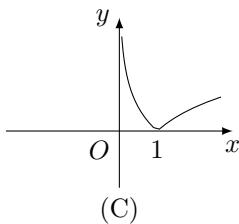
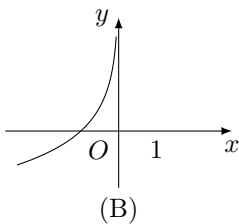
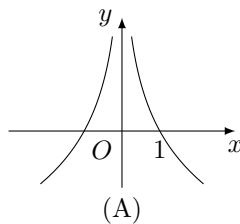
A.  $y = 2^x$

B.  $y = 2^x$  的反函数

C.  $y = 2^{-x}$

D.  $y = 2^{-x}$  的反函数

403. (005692) 下列函数图像中, 不正确的是 ( ).



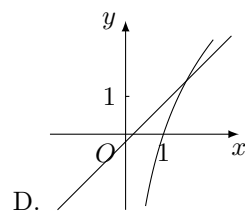
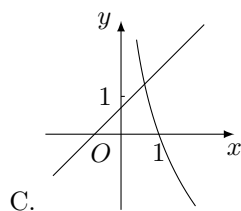
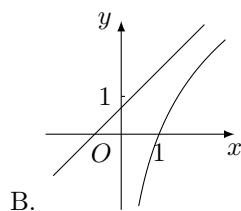
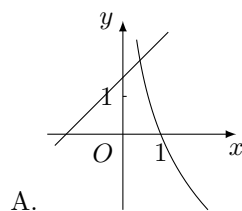
A.  $y = \log_{\frac{1}{3}} x^2$

B.  $y = \log_{\frac{1}{3}}(-x)$

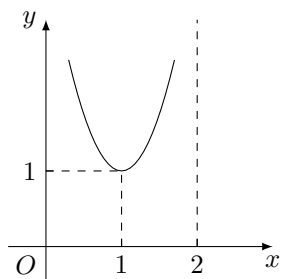
C.  $y = |\log_3 x|$

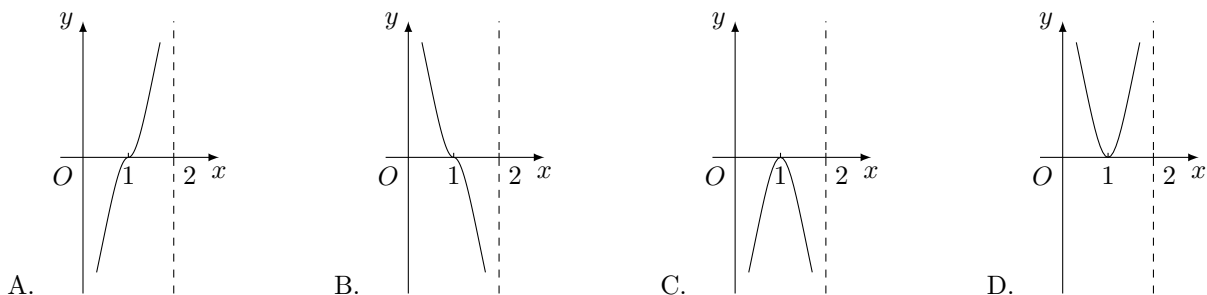
D.  $y = |x^{-\frac{1}{3}}|$

404. (005693) 在同一平面直角坐标系中画出函数  $y = x + a$  与  $y = \log_a x$  的图像, 可能是 ( ).

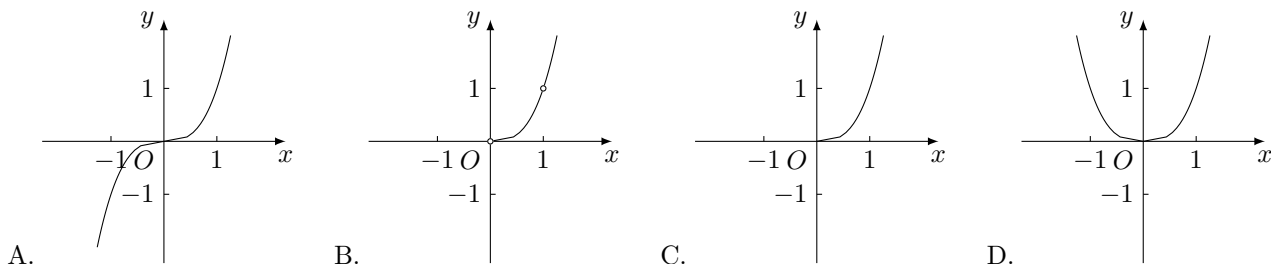


405. (005694) 函数  $y = f(x)$  的图像如图所示, 则  $y = \log_{0.7} f(x)$  的示意图是 ( ).





406. (005695) 由关系式  $\log_x y = 3$  所确定的函数  $y = f(x)$  的图像是 ( ).



407. (005697) 函数  $y = \log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 3x + 4)$  的定义域为\_\_\_\_\_.

408. (005698) 函数  $y = \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{\lg(x^2 + 2x - 3)}$  的定义域为\_\_\_\_\_.

409. (005699) 函数  $y = \log_{(2x-1)}(32 - 4^x)$  的定义域为\_\_\_\_\_.

410. (005700) 函数  $y = \log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 4x + 7)$  的值域为\_\_\_\_\_.

411. (005701) 函数  $y = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{x^2 - 2x + 5}$  的值域为\_\_\_\_\_.

412. (005702) 函数  $y = \log_{\frac{1}{2}} \sqrt{3 - 2x - x^2}$  的值域为\_\_\_\_\_.

413. (005712) 若函数  $f(x) = a^x - k$  的图像过点  $(1, 3)$ , 其反函数  $f^{-1}(x)$  的图像过点  $(2, 0)$ , 则  $f(x)$  的表达式是\_\_\_\_\_.

414. (005716) 已知  $f(x) = \frac{a^x - 1}{a^x + 1} (a > 1)$ .

(1) 求  $f(x)$  的值域;

(2) 求证:  $f(x)$  在  $R$  上是增函数;

(3) 求  $f(x)$  的反函数.

415. (005732) 求函数  $y = (\log_{\frac{1}{4}} x)^2 - \log_{\frac{1}{4}} x^2 + 5 (2 \leq x \leq 4)$  的值域.

416. (005737) 已知函数  $f(x) = (\log_a b)x^2 + 2(\log_b a)x + 8$  的图像在  $x$  轴的上方, 求  $a, b$  的取值范围.

417. (005743) 已知函数  $f(x) = \sqrt{\log_a x - 1} (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$ .

(1) 求  $f(x)$  的定义域;

(2) 当  $a > 1$  时, 求证:  $f(x)$  在  $[a, +\infty)$  上是增函数.

418. (005750) 已知函数  $f(x) = \log_a \frac{x+b}{x-b} (a > 0, b > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$ .

(1) 求  $f(x)$  的定义域;



(2) 讨论  $f(x)$  的奇偶性;

(3) 讨论  $f(x)$  的单调性;

(4) 求  $f(x)$  的反函数  $f^{-1}(x)$ .

419. (005751) 已知函数  $f(x) = \lg \frac{x+1}{x-1} + \lg(x-1) + \lg(a-x) (a > 1)$ .

(1) 是否存在一个实数  $a$  使得函数  $y = f(x)$  的图像关于某一条垂直于  $x$  轴的直线对称? 若存在, 求出这个实数  $a$ ; 若不存在, 说明理由;

(2) 当  $f(x)$  的最大值为 2 时, 求实数  $a$  的值.

420. (005763) 若对于任意实数  $p$ , 函数  $y = (p-1)2^x - \frac{p}{2}$  的图像恒过一定点, 则这个点的坐标是 ( ).

A.  $(1, -\frac{1}{2})$

B.  $(0, -1)$

C.  $(-1, -\frac{1}{2})$

D.  $(-2, -\frac{1}{4})$

421. (005776) 解方程:  $\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{6} = \sqrt[3]{4}$ .

422. (005828) 若函数  $f(x)$  的定义域为  $\mathbf{R}^+$ , 且满足  $f(xy) = f(x) + f(y)$ ,  $f(8) = 3$ , 求  $f(\sqrt{2})$  的值.

423. (005829) 若函数  $f(x)$  的定义域为  $\mathbf{R}$ , 且满足  $f(x) + 2f(-x) = -x^3 + 6x^2 - 3x + 3$ , 求  $f(0)$  的值, 并求  $f(x)$  的表达式.

424. (005834) (1) 求函数  $y = 2x + \sqrt{1-2x}$  的最大值. (2) 求函数  $y = 2x + \sqrt{1-x^2}$  的值域. (3) 求函数  $y = \frac{\sqrt{x+1}}{x+2}$  的值域.

425. (005835) 求函数  $g(t) = (t+3)(1+|t-1|)$  的值域, 其中实数  $t$  的取值范围是使函数  $f(x) = x^2 - 4tx + 2t + 30$  对任一  $x \in \mathbf{R}$  都取非负值.

426. (005836) 已知函数  $f(x)$  的定义域是  $[0, 1]$ , 求函数  $f(x+m) + f(x-m)$  的定义域 (其中  $m > 0$ ).

427. (005841) 已知  $y = f(x)$  在其定义域上是增函数, 求证:  $y = f(x)$  的反函数  $y = f^{-1}(x)$  在其定义域上也是增函数.

428. (005843) 已知函数  $f(x) = \frac{x}{1+x^2} (x \in \mathbf{R})$ .

(1) 求  $f(x)$  的值域;

(2) 讨论  $f(x)$  的单调性.

429. (005844) 若二次函数  $f(x) = ax^2 + bx + c$  满足  $f(x_1) = f(x_2)$ ,  $(x_1 \neq x_2)$  求证: 直线  $x = \frac{x_1+x_2}{2}$  是该二次函数图像的对称轴.

430. (005845) 若对于任何实数  $x$ , 函数  $y = f(x)$  始终满足  $f(a+x) = f(a-x)$ , 求证: 函数  $y = f(x)$  的图像关于直线  $x = a$  对称.

431. (005846) 已知函数  $f(x)$  满足  $f(x+2) = f(2-x) (x \in \mathbf{R})$ , 且  $f(x)$  的图像与  $x$  轴有 15 个不同的交点, 求方程  $f(x) = 0$  的所有解的和.

432. (005847) 已知函数  $f(2x+1)$  是偶函数, 求函数  $f(2x)$  的图像的对称轴.

433. (005848) 求函数  $y = \frac{3x-1}{x+2} (x \neq -2)$  的图像的对称点.

434. (005849) 已知函数  $f(x)$  满足  $f(x) + f(2-x) + 2 = 0 (x \in \mathbf{R})$ , 求  $f(x)$  的图像的对称中心.

435. (005850) 已知函数  $f(x) = \log_3(x^2 - 4mx + 4m^2 + m + \frac{1}{m-1})$ , 集合  $M = \{m | m > 1, m \in \mathbf{R}\}$ .

(1) 求证: 当  $m \in M$  时,  $f(x)$  的定义域为  $x \in \mathbf{R}$ ; 反之, 若  $f(x)$  对一切实数  $x$  都有意义, 则  $m \in M$ ;

(2) 当  $m \in M$  时, 求  $f(x)$  的最小值;

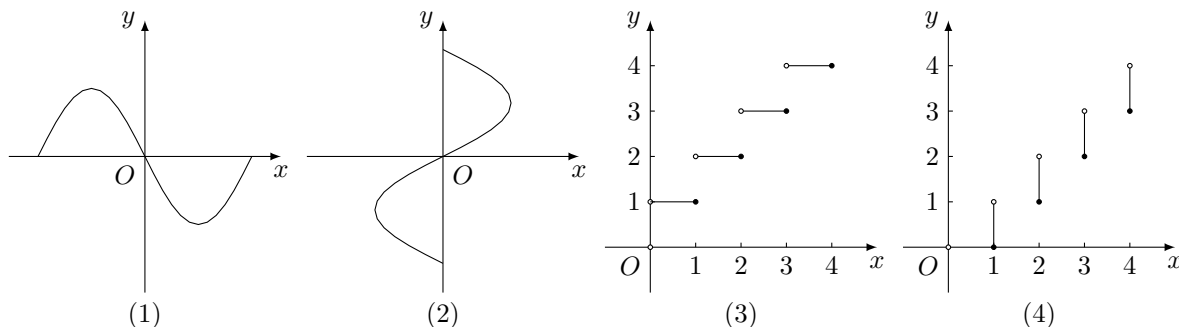
(3) 求证: 对每一个  $m \in M$ ,  $f(x)$  的最小值都不小于 1.

436. (005856) 已知函数  $f(x)$  在定义域  $x \in \mathbf{R}^+$  上是增函数, 且满足  $f(x \cdot y) = f(x) + f(y) (x, y \in \mathbf{R}^+)$ .

(1) 求  $f(x)$  在  $(1, +\infty)$  上的值域;

(2) 若  $f(2) = 1$ ,  $f(x)$  图像上三点  $A, B, C$  的横坐标分别为  $a, a+2, a+4 (a > 0)$ , 且  $\triangle ABC$  的面积小于 1, 求实数  $a$  的取值范围.

437. (007860) 下列各图像中, 哪些是函数的图像, 哪些不是函数的图像? 为什么?



438. (007861) 选择题: 下列各组函数  $f(x)$  与  $g(x)$  表示同一个函数的是 ( ).

A.  $f(x) = \frac{x^2-1}{x+1}, g(x) = x-1$

B.  $f(x) = |x|, g(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0 \end{cases}$

C.  $f(x) = x^0, g(x) = 1$

D.  $f(x) = (\sqrt{x})^2, g(x) = \sqrt{x^2}$

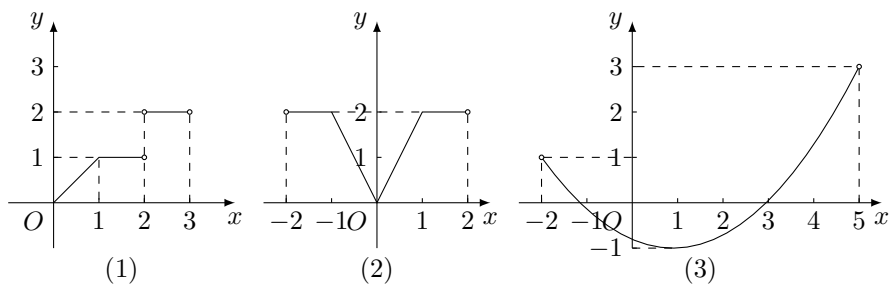
439. (007862) 求函数  $y = \frac{1}{x^2 + 2x - 3}$  的定义域.

440. (007863) 求函数  $y = \sqrt{4-3x-x^2}$  的定义域.

441. (007864) 求函数  $y = \sqrt{x-2} + \sqrt{x+3}$  的定义域.

442. (007865) 求函数  $y = \frac{1}{x+2} + \frac{1}{\sqrt{5-x}}$  的定义域.

443. (007867) 观察下列各函数, 并写出他们的值域:



444. (007868) 某企业去年四个季度生产某种型号机器的数量  $y$ (万台) 与季度的函数关系是:

$x$ (季度)	1	2	3	4
$y$ (万台)	10	12	14	16

试写出函数的定义域, 并作出函数的图像.

445. (007869) 求函数  $y = \frac{1}{|x+3|-1}$  的定义域.

446. (007870) 求函数  $y = \sqrt{(a-x)(x-1)}$  ( $x$  为自变量) 的定义域.

447. (007872) 试举出一个定义域为  $[-2, 2]$  的函数例子.

448. (007873) 为分流短途乘客, 减缓轨道交通高峰压力, 上海地铁实行新的计费标准. 新标准的分段计程制度如下:  
 $0-6$  千米 (含 6 千米) 3 元;  $6-16$  千米 (含 16 千米) 4 元; 16 千米以上每 6 千米递增 1 元, 但总票价不超过 8 元.

(1) 试作出票价  $y$ (元) 关于路程  $x$ (千米) 的函数图像;

(2) 某人买了 5 元的车票, 他途经路程不能超过多少千米?

449. (007886) 已知函数  $f(x) = 2x - \frac{1}{x^2 - 1}$ , 函数  $g(x) = \frac{1}{x^2 - 1} - 1$ .

(1) 求函数  $y = f(x) + g(x)$ ;

(2) 画出函数  $y = f(x) + g(x)$  的图像.

450. (007887) 已知函数  $f(x) = x\sqrt{x-1}$ , 函数  $g(x) = \sqrt{x-1}$ , 设  $F(x) = f(x) \cdot g(x)$ .

(1) 写出  $F(x)$  的解析式;

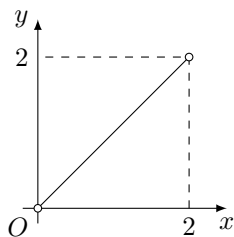
(2) 画出  $F(x)$  的图像.

451. (007890) 已知函数  $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}$ , 函数  $g(x) = \sqrt{4-x^2}$ .

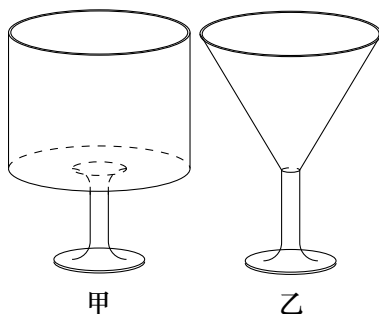
(1) 求函数  $y = f(x) \cdot g(x)$ ;

(2) 作出函数  $F(x) = \begin{cases} f(x) \cdot g(x), & x \leq 0, \\ x, & 0 < x \leq 2 \end{cases}$  的图像.

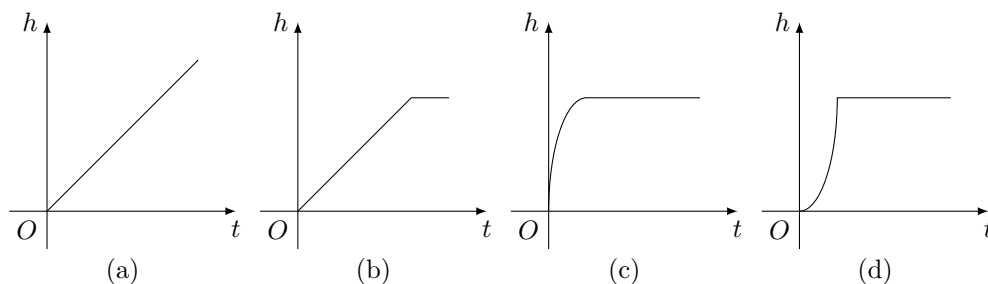
452. (007891) 已知函数  $f(x) = x^2, x \in (0, 2)$ , 函数  $y = f(x) + g(x)$  的图像如图所示, 写出函数  $y = g(x)$  的一个解析式.



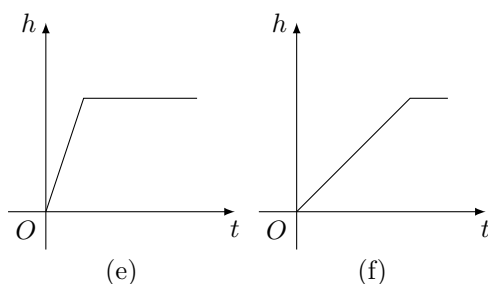
453. (007892) 若函数  $y = f(x)$  的定义域为  $\mathbf{R}$ , 则  $y = f(x)$  为奇函数的充要条件为 ( ).
- A.  $f(0) = 0$  B. 对任意  $x \in \mathbf{R}, f(x) = 0$
- C. 存在某个  $x_0 \in \mathbf{R}$ , 使得  $f(x_0) + f(-x_0) = 0$  D. 对任意的  $x \in \mathbf{R}, f(x) + f(-x) = 0$  都成立
454. (007899) 已知函数  $y = f(x)$  的定义域为  $[0, +\infty)$ . 如果对任意的  $x > 0$ , 都有  $f(x) < f(0)$ , 那么函数  $y = f(x)$  有  $[0, +\infty)$  上是否一定是减函数?
455. (007911) 画出函数  $y = x^2 - 2|x|$  的图像, 并写出它的定义域、奇偶性、单调区间、最小值.
456. (007912) 研究函数  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$  的定义域、奇偶性、单调性、最大值.
457. (007923) 研究函数  $f(x) = x + \frac{a}{x} (a > 0)$  的定义域、奇偶性、单调性.
458. (007924) 求函数  $y = \frac{1}{2-x} + \sqrt{x^2-1}$  的定义域.
459. (007928) 已知  $y = f(x)$  是奇函数, 定义域为  $\mathbf{R}$ ,  $y = g(x)$  是偶函数, 定义域为  $D$ . 设  $F(x) = f(x) \cdot g(x)$ , 判断  $y = F(x)$  奇偶性.
460. (007931) 作出函数  $y = |x^2 - 4x|$  的图像, 并指出其单调区间.
461. (007932) 作出函数  $y = 2|x| - 3$  的图像, 并指出其单调区间.
462. (007933) 设函数  $f(x) = (a^2 + 4a - 5)x^2 - 4(a-1)x + 3$  的图像都在  $x$  轴的上方, 求实数  $a$  的取值范围.
463. (007942) 打开水龙头, 让水匀速地注入一个杯子内, 随着时间的增加, 杯中水面的高度不断增加, 直至水满溢出. 在这个过程中, 杯中水面的高度  $h$  关于注水时间  $t$  的函数为  $h = f(t)$ .



- (1) 如果甲杯、乙杯的形状分别如图所示, 那么下列草图中, 甲杯相应函数  $h = f(t)$  的图像是\_\_\_\_\_, 乙杯相应函数  $h = f(t)$  的图像是\_\_\_\_\_. (只有杯子的圆柱和圆锥形部分可以盛水)



(2) 下列是两个杯子相应函数  $h = f(t)$  的图像, 试说明这两个杯子形状有何差别.



464. (007943) 已知幂函数  $f(x)$  的图像经过  $(2, \frac{\sqrt{2}}{2})$ , 试求出这个函数的解析式.

465. (007944) 幂函数  $y = x^s$  与  $y = x^t$  的图像在第一象限都通过定点\_\_\_\_\_, 若它们在第一象限的部分关于直线  $y = x$  对称, 则  $s, t$  应满足的条件是\_\_\_\_\_.

466. (007945) 研究幂函数  $f(x) = x^{\frac{2}{5}}$  的定义域、奇偶性、单调性、值域.

467. (007946) 作函数  $y = \frac{|x| + 1}{|x + 1|}$  的大致图像.

468. (007949) 已知幂函数  $f(x)$  的定义域是  $(+\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ , 且它的图像关于  $y$  轴对称, 写出一个满足要求的幂函数  $f(x)$ .

469. (007959) 若函数  $y = 2^x - m$  的图像不经过第二象限, 则  $m$  的取值范围是 ( ).

- A.  $m \geq 1$                       B.  $m < 1$                       C.  $m > -1$                       D.  $m \leq -1$

470. (007962) 作函数  $y = 2^{|x|}$  的大致图像.

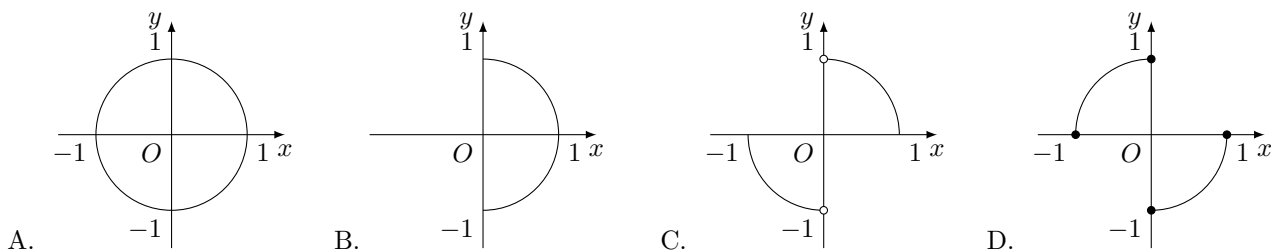
471. (007963) 作函数  $y = 2^{-|x|}$  的大致图像.

472. (007966) 函数  $y = 4^x - 2^{x+1} + 1 (x < 0)$  的值域是 ( ).

- A.  $[0, +\infty)$                       B.  $(1, +\infty)$                       C.  $(0, 1)$                       D.  $(0, 1]$

473. (007982) 若函数  $f(x) = 3x + 1$  的定义域为  $\{1, 3, k\}$ . 值域为  $\{4, a^4, a^2 + 3a\}$ , 且  $a, k$  为自然数, 则  $a + k =$ \_\_\_\_\_.

474. (007984) 下列图形中, 能作为某个函数的图像的只能是 ( ).



475. (007987) 点  $(\sqrt{2}, 2)$  在幂函数  $y = f(x)$  的图像上, 点  $(-2, \frac{1}{4})$  在幂函数  $y = g(x)$  的图像上. 当  $x$  为何值时,  $f(x) = g(x)$ ?

476. (007998) 甲乙两地的高速公路全长 166 千米, 在高速公路上最高行驶时速不得高于 120 千米/时, 假设汽车从甲地进入该高速公路以不低于 70 千米/时的速度匀速行驶到乙地, 已知汽车每小时的运输成本 (以元为单位) 由可变部分和固定部分组成: 可变部分与速度  $v$  (千米/时) 的平方成正比, 比例系数为 0.02; 固定部分为 220 元.

(1) 把全程运输成本  $y$  (元) 表示为速度  $v$  (千米/时) 的函数, 并指出这个函数的定义域;

(2) 汽车应以多大速度行驶才能使全程运输成本最小? 最小运输成本约为多少元?

477. (008032) 已知函数  $y = \frac{a}{x+1}$  的反函数的图像经过点  $(\frac{1}{2}, 1)$ , 求实数  $a$  的值.

478. (008033) 已知函数  $y = f(x)$  的图像与函数  $y = \frac{x-1}{x+1}$  的图像关于直线  $y = x$  对称, 求函数  $y = f(x)$  的解析式.

479. (008035) 一次函数  $y = -x$  的图像与它的反函数的图像重合. 试写出一个非一次函数的函数, 使它的图像与其反函数的图像重合.

480. (008036) 如果函数  $y = f(x)$  的图像过点  $(0, 1)$ , 那么函数  $y = f^{-1}(x) + 2$  的反函数的图像过点 ( ).

- A.  $(3, 0)$                       B.  $(0, 3)$                       C.  $(1, 2)$                       D.  $(2, 1)$

481. (008037) 如果  $y = -\sqrt{1-x^2}$  的反函数是  $y = -\sqrt{1-x^2}$ , 那么原来的函数的定义域可以是 ( ).

- A.  $(0, +\infty)$                       B.  $[-1, 1]$                       C.  $[-1, 0]$                       D.  $[0, 1]$

482. (008039) 求函数  $y = \lg(x^2 - 3x + 2)$  的定义域.

483. (008040) 求函数  $y = \frac{\sqrt{2x-1}}{\lg x}$  的定义域.

484. (008041) 求函数  $y = \sqrt{\lg x} + \lg(5-2x)$  的定义域.

485. (008045) 已知函数  $f(x) = a^x + b$  的图像经过点  $(1, 7)$ , 反函数  $f^{-1}(x)$  的图像经过点  $(4, 0)$ , 求函数  $f(x)$  的表达式.

486. (008053) 求证:  $y = \lg(1-x)$  在定义域上单调递减.

487. (008080) 若点  $(1, 7)$  既在函数  $y = \sqrt{ax+b}$  的图像上, 又在其反函数的图像上, 则数对  $(a, b)$  为\_\_\_\_\_.

488. (008081) 若  $f(x) = 3^x + 5$ , 则  $f^{-1}(x)$  的定义域是 ( ).

- A.  $(0, +\infty)$                       B.  $(5, +\infty)$                       C.  $(8, +\infty)$                       D.  $(-\infty, +\infty)$

489. (008084) 作出函数  $y = \log_2(x-1)$  的图像.

490. (008085) 作出函数  $y = |\log_2(x-1)|$  的图像.

491. (008089) 已知函数  $f(x) = \log_a \frac{1+x}{1-x}$  ( $a > 0, a \neq 1$ ). (1) 求  $f(x)$  的定义域;

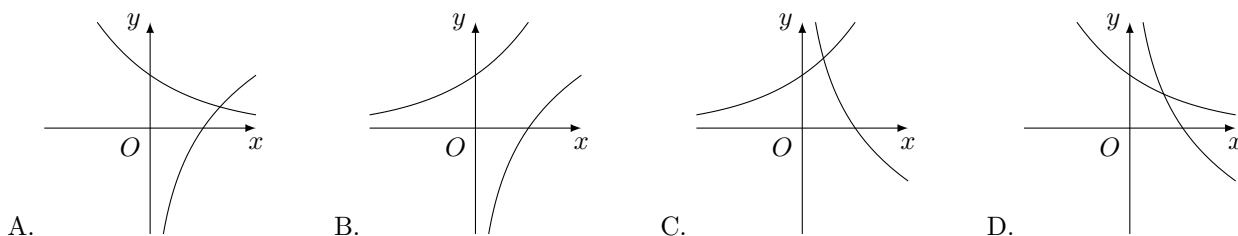
(2) 判断  $f(x)$  的奇偶性, 并加以证明;

(3) 当  $a > 1$  时, 求使  $f(x) > 0$  的  $x$  的取值范围.

492. (008091) 如果函数  $f(x) = \log_a(-x^2 + ax)$  的定义域为  $(0, \frac{1}{2})$ , 那么实数  $a =$ \_\_\_\_\_.

493. (008093) 若函数  $y = f(x)$  的图像与函数  $y = 2^x - 1$  的图像关于直线  $y = x$  成轴对称图形, 则函数  $y = f(x)$  的解析式为\_\_\_\_\_.

494. (008094) 当  $a > 1$  时, 在同一坐标系中, 函数  $y = a^{-x}$  与  $y = \log_a x$  的图像是 ( ).



495. (008095) 函数  $f(x) = 4 + \log_a(x-1)$  ( $a > 0, a \neq 1$ ) 的图像恒经过定点  $P$ , 则点  $P$  的坐标是 ( ).

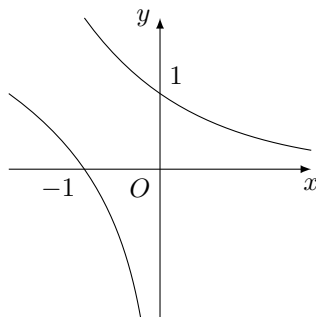
- A. (1, 4)                      B. (4, 1)                      C. (2, 4)                      D. (4, 2)

496. (008098) 判断命题“若函数  $y = f(x)$  与  $y = f^{-1}(x)$  的图像有公共点, 则公共点必在直线  $y = x$  上”的真假, 并说明理由.

497. (008364) 如果函数  $y = f(x)$  的图像经过第三、四象限, 那么函数  $y = f^{-1}(x)$  的图像经过第\_\_\_\_\_象限.

498. (008366) 函数  $y = \frac{1}{\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(2-x)}}$  的定义域是\_\_\_\_\_.

499. (008371) 在同一坐标系内作出的两个函数图像如图所示, 这两个函数为 ( ).



- A.  $y = a^x$  和  $y = \log_a(-x)$                       B.  $y = a^x$  和  $y = \log_a x^{-1}$   
C.  $y = a^{-x}$  和  $y = \log_a x^{-1}$                       D.  $y = a^{-x}$  和  $y = \log_a(-x)$

500. (008378) 已知函数  $f(x) = \log_2(2^x - 1)$ .

- (1) 求  $f(x)$  的定义域;
- (2) 判断  $f(x)$  的增减性, 说明理由;
- (3) 求  $f^{-1}(x)$ .

501. (008387) 已知函数  $y = f(x)$  的图像过点  $A(1, 2)$ , 函数  $y = g(x)$  的图像与  $y = f(x)$  的图像关于直线  $y = x$  对称, 则  $y = g(x)$  的图像必过点 ( ).

- A. (2, 1)                      B. (1, 2)                      C. (-2, 1)                      D. (-1, 2)

502. (008394) 已知函数  $f(x) = \log_a \frac{x+b}{x-b} (a > 0, b > 0, a \neq 1)$ .

- (1) 求  $f(x)$  的定义域;
- (2) 判断  $f(x)$  的奇偶性;
- (3) 求函数  $y = f^{-1}(x)$  的解析式.

503. (009485) 若幂函数  $y = x^a$  的图像经过点  $(3, \sqrt{3})$ , 求此幂函数的表达式.

504. (009486) 求下列函数的定义域, 并作出它们的大致图像:

- (1)  $y = x^{\frac{1}{3}}$ ;
- (2)  $y = x^{-\frac{1}{2}}$ ;
- (3)  $y = x^{\frac{4}{3}}$ .

505. (009487) 若幂函数  $y = x^{-m^2+2m+3} (m \text{ 为整数})$  的定义域为  $\mathbf{R}$ , 求  $m$  的值.

506. (009488) (1) 已知函数  $y = x^{\frac{2}{3}}$  和  $y = (x-1)^{\frac{2}{3}}$ , 说明这两个函数图像之间的关系, 并在同一平面直角坐标系中作出它们的大致图像;

(2) 已知函数  $y = x^{\frac{2}{3}}$  和  $y = x^{\frac{2}{3}} + 1$ , 说明这两个函数图像之间的关系, 并在同一平面直角坐标系中作出它们的大致图像.

507. (009490) 作出函数  $y = \frac{-x-1}{x+2}$  的大致图像.

508. (009492) 求下列函数的定义域:

- (1)  $y = 3^x$ ;
- (2)  $y = 3^{\frac{1}{x-2}}$ .

509. (009493) 在同一平面直角坐标系中分别作出下列函数的大致图像:

- (1)  $y = 4^x$ ;
- (2)  $y = (\frac{1}{4})^x$ .

510. (009499) 若对数函数  $y = \log_a x (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$  的图像经过点  $(4, 2)$ , 求此对数函数的表达式.

511. (009500) 求下列函数的定义域:

- (1)  $y = \log_2 \frac{2+x}{1-x}$ ;
- (2)  $y = \log_a(4-x^2) (\text{常数 } a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$ .



512. (009501) 在同一平面直角坐标系中作出  $y = \lg x$  及  $y = \log_{0.1} x$  的大致图像.

513. (009502) 已知常数  $a > 0$  且  $a \neq 1$ , 假设无论  $a$  取何值, 函数  $y = \log_a(x-1)$  的图像恒经过一个定点, 求此点的坐标.

514. (009507) 求下列函数的定义域:

(1)  $y = \sqrt{(x-2)(x+3)}$ ;

(2)  $y = \frac{1}{1 - \sqrt{x-1}}$ .

515. (009509) 求下列函数的值域:

(1)  $y = (\lg x)^2 + 1, x \in (0, +\infty)$ ;

(2)  $y = 3x^2 - 4x + 1, x \in [0, 1]$ .

516. (009510) 作下列函数的大致图像:

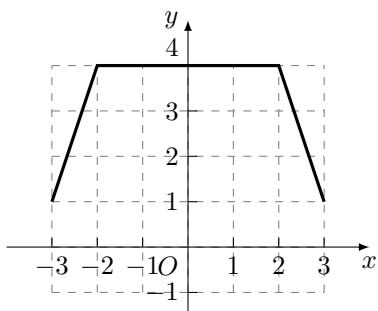
(1)  $y = -|x|$ ;

(2)  $y = \sqrt{x+2}$ ;

(3)  $y = \frac{1}{x^2 + 1}$ ;

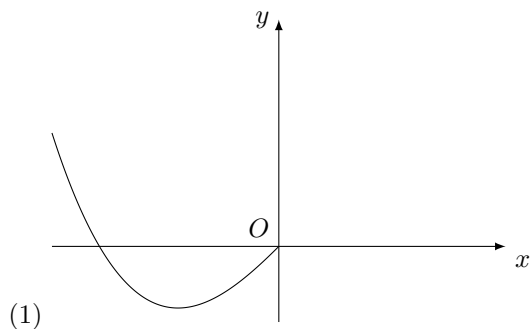
(4)  $y = \frac{2x-1}{x-1}$ .

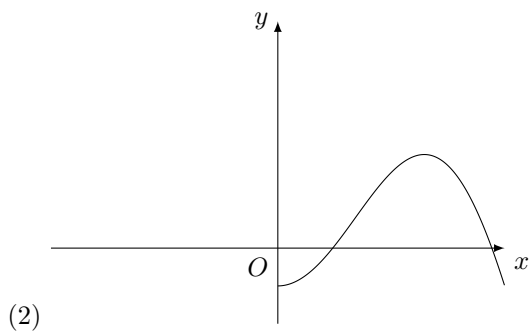
517. (009511) 根据下图的函数图像, 用解析法表示  $y$  关于  $x$  的函数.



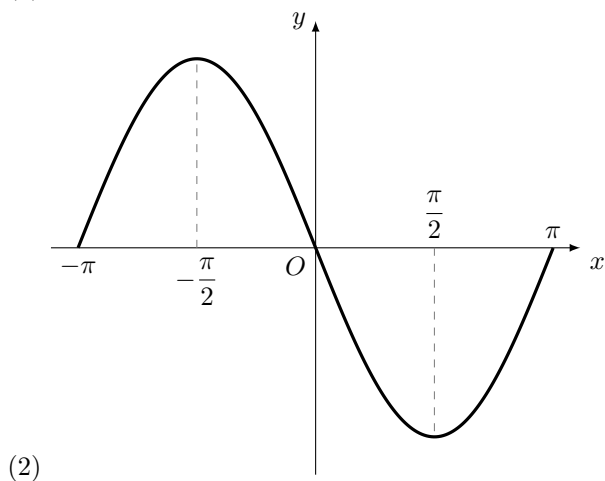
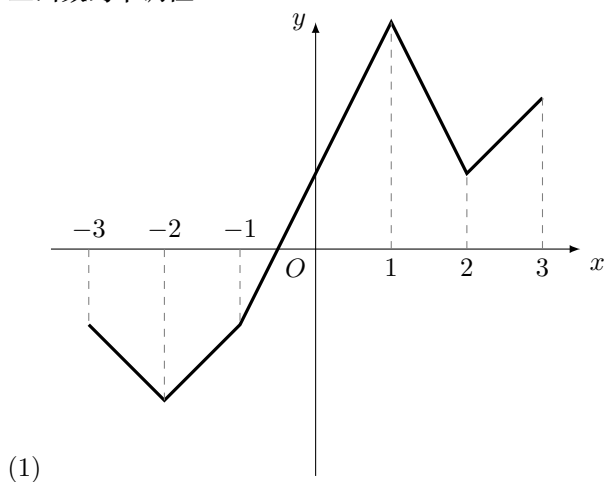
518. (009512) 奇函数的图像是不是一定通过原点? 偶函数的图像是不是一定与  $y$  轴相交? 请说明理由.

519. (009513) 如图, 已知偶函数  $y = f(x)$  在  $y$  轴及  $y$  轴一侧的部分图像, 作出  $y = f(x)$  的大致图像.





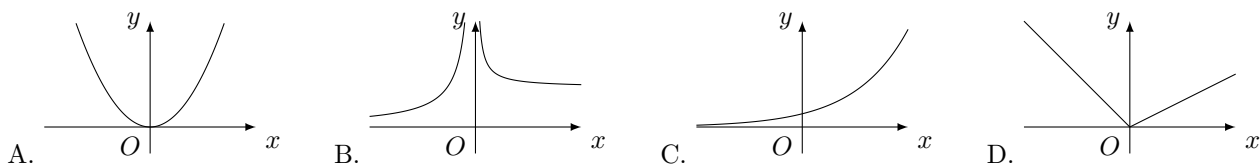
520. (009520) 根据下列函数  $y = f(x)$  的图像 (包括端点), 分别指出这两个函数的单调区间, 以及在每一个单调区间上函数的单调性.



521. (009531) 对于在区间  $[a, b]$  上的图像是一段连续曲线的函数  $y = f(x)$ , 如果  $f(a) \cdot f(b) > 0$ , 那么是否该函数在区间  $(a, b)$  上一定无零点? 说明理由.

522. (009533) 求函数  $y = x^2 + 2x, x \in [0, +\infty)$  的反函数的定义域.

523. (009537) 下列各图中, 存在反函数的函数  $y = f(x)$  的图像只可能是 ( ).



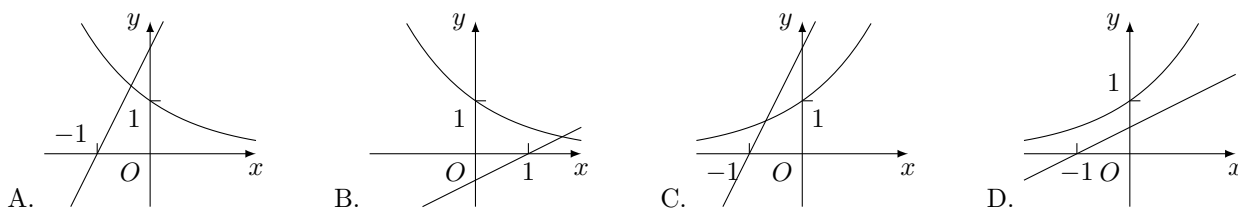
524. (009908) 借助函数图像, 判断下列导数的正负 (可利用信息技术工具):
- (1)  $f'(\frac{\pi}{4})$ , 其中  $f(x) = \sin x$ ;
  - (2)  $f'(0)$ , 其中  $f(x) = (\frac{1}{2})^x$ .
525. (009923) 求函数  $y = x^2 - 6x + 5, x \in [1, 4]$  的值域.
526. (009995) 设定义在  $[0, +\infty)$  上的函数  $f(x)$  的值域为  $A_f$ . 若对任意满足  $f(x) = f(\frac{1}{x+1})$  的函数  $f(x)$ , 集合  $\{y|y = f(x), x \in [0, a]\}$  总可以取得  $A_f$  中的所有值, 则实数  $a$  的取值范围为\_\_\_\_\_.
527. (010001) 已知  $f(x) = \log_3(x+a) + \log_3(6-x)$ .
- (1) 若将函数  $y = f(x)$  的图像向下平移  $m(m > 0)$  个单位后, 所得的图像经过点  $(3, 0)$  与点  $(5, 0)$ , 求  $a$  与  $m$  的值;
  - (2) 若  $a > -3$  且  $a \neq 0$ , 解关于  $x$  的不等式  $f(x) \leq f(6-x)$ .
528. (010129) 若幂函数  $y = x^a$  的图像经过点  $(\sqrt[4]{3}, 3)$ , 求此幂函数的表达式.
529. (010130) 求下列函数的定义域, 并作出它们的大致图像:
- (1)  $y = x^{\frac{1}{5}}$ ;
  - (2)  $y = x^{-2}$ ;
  - (3)  $y = x^{-\frac{3}{4}}$ .
530. (010133) 下列幂函数在区间  $(0, +\infty)$  上是严格增函数, 且图像关于原点成中心对称的是\_\_\_\_\_ (请填入全部正确的序号).
- ①  $y = x^{\frac{1}{2}}$ ; ②  $y = x^{\frac{1}{3}}$ ; ③  $y = x^{\frac{2}{3}}$ ; ④  $y = x^{-\frac{1}{3}}$ .
531. (010134) 作出函数  $y = \frac{x-1}{x+2}$  的大致图像.
532. (010135) 幂函数  $y = x^{n(n+1)}$  ( $n$  为正整数) 的图像一定经过\_\_\_\_\_ 象限.
533. (010136) 若幂函数  $y = x^s$  在  $0 < x < 1$  时的图像位于直线  $y = x$  的上方, 则  $s$  的取值范围是\_\_\_\_\_.
534. (010137) 下列命题中, 正确的是 ( ).
- A. 当  $n = 0$  时, 函数  $y = x^n$  的图像是一条直线
  - B. 幂函数  $y = x^n$  的图像都经过  $(0, 0)$  和  $(1, 1)$  两个点
  - C. 若幂函数  $y = x^n$  的图像关于原点成中心对称, 则  $y = x^n$  在区间  $(-\infty, 0)$  上是严格增函数
  - D. 幂函数的图像不可能在第四象限
535. (010138) 写出一个图像经过第一、第二象限但不经过原点的幂函数的表达式.
536. (010141) 求下列函数的定义域:
- (1)  $y = 2^{\sqrt{3-x}}$ ;
  - (2)  $y = 0.1^{\frac{1}{x}}$ .

537. (010142) 在同一直角坐标系中作出下列函数的大致图像, 并指出这些函数图像间的关系:

- (1)  $y = (\frac{3}{2})^x$ ;
- (2)  $y = (\frac{2}{3})^x$ ;
- (3)  $y = (\frac{2}{3})^x - 1$ .

538. (010144) 已知常数  $a > 0$  且  $a \neq 1$ . 假设无论  $a$  取何值, 函数  $y = a^{2-x}$  的图像恒经过一个定点, 求此定点的坐标.

539. (010149) 在同一平面直角坐标系中, 指数函数  $y = a^x (a > 0$  且  $a \neq 1)$  和一次函数  $y = a(x+1)$  的图像关系可能是 ( ).



540. (010154) 若函数  $y = 5^{x+1} + m$  的图像不经过第二象限, 求实数  $m$  的取值范围.

541. (010155) 求下列函数的定义域:

- (1)  $y = \log_a(x+12)$  (常数  $a > 0$  且  $a \neq 1$ );
- (2)  $y = \log_2 \frac{1}{x^2 - 2x + 5}$ .

542. (010156) 已知对数函数  $y = \log_a x (a > 0$  且  $a \neq 1)$  的图像经过点  $(3, 2)$ . 若点  $P(b, 4)$  为此函数图像上的点, 求实数  $b$  的值.

543. (010157) 在同一平面直角坐标系中画出下列函数的图像, 并指出这些函数图像之间的关系.

- (1)  $y = \log_3 x$ ;
- (2)  $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ ;
- (3)  $y = (\frac{1}{3})^x$ .

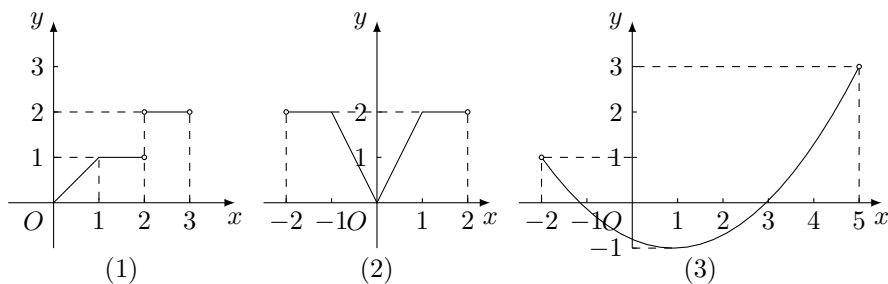
544. (010158) 已知常数  $a > 0$  且  $a \neq 1$ , 假设无论  $a$  取何值, 函数  $y = \log_a x - 1$  的图像恒经过一个定点. 求此点的坐标.

545. (010163) 设常数  $a > 0$  且  $a \neq 1$ , 求函数  $y = \log_a(a - a^x)$  的定义域.

546. (010168) 求下列函数的定义域:

- (1)  $y = \frac{1}{x^2 + 2x - 3}$ ;
- (2)  $y = \sqrt{4 - 3x - x^2}$ ;
- (3)  $y = \sqrt{x-2} + \sqrt{x+3}$ ;
- (4)  $y = \frac{1}{\lg(x+2)} + \frac{1}{\sqrt{5-x}}$ .

547. (010170) 观察下列函数的图像, 并写出它们的值域:



548. (010171) 设  $a$  是常数, 求下列函数的定义域

(1)  $y = \frac{1}{|x| - a}$ ;

(2)  $y = \sqrt{x(x-a)}$ .

549. (010173) 若函数  $y = f(x)$  的定义域为  $\mathbf{R}$ , 则  $y = f(x)$  为奇函数的一个充要条件为 ( ).

A.  $f(0) = 0$

B. 对任意  $x \in \mathbf{R}$ ,  $f(x) = 0$  都成立

C. 存在某个  $x_0 \in \mathbf{R}$ , 使得  $f(x_0) + f(-x_0) = 0$

D. 对任意给定的  $x \in \mathbf{R}$ ,  $f(x) + f(-x) = 0$  都成立

550. (010178) 证明: 函数  $y = \lg(1-x)$  在其定义域上是严格减函数.

551. (010185) 作出函数  $y = x^2 - 2|x|$  的大致图像, 并分别写出它的定义域、奇偶性、单调区间及最小值.

552. (010186) 研究函数  $y = \frac{1}{1+x^2}$  的定义域、奇偶性、单调性及最大值.

553. (010189) 某企业去年四个季度生产某种型号机器的数量  $y$  (单位: 万台) 与季度  $x$  的函数关系如下表所示:

$x/\text{季度}$	1	2	3	4
$y/\text{万台}$	10	12	14	16

试写出该函数的定义域, 并作出其大致图像.

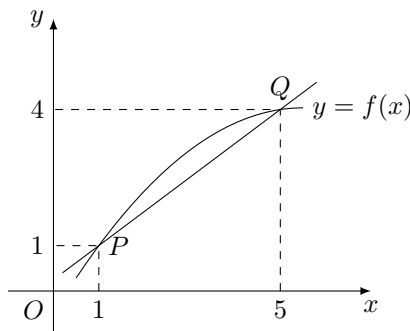
554. (010194) 为分流短途乘客, 减缓轨道交通高峰压力, 某地地铁实行新的计费标准, 其分段计费规则如下: 0 至 6km (含 6km) 票价 3 元; 6 至 16km (含 16km) 票价 4 元; 16km 以上每 6km (不足 6km 时按 6km 计) 票价递增 1 元, 但总票价不超过 8 元.

(1) 试作出票价  $y$  (单位: 元) 关于路程  $x$  (单位: km) 的函数的大致图像;

(2) 某人买了 5 元的车票, 他乘车的路程不能超过多少?

555. (010202) 已知函数  $y = \frac{a}{x+1}$  的反函数的图像经过点  $(\frac{1}{2}, 1)$ , 求实数  $a$  的值.

556. (010793) 函数  $y = f(x)$  的图像如图所示.



(1) 求割线  $PQ$  的斜率;

(2) 当点  $Q$  沿曲线向点  $P$  运动时, 割线  $PQ$  的斜率会变大还是变小?

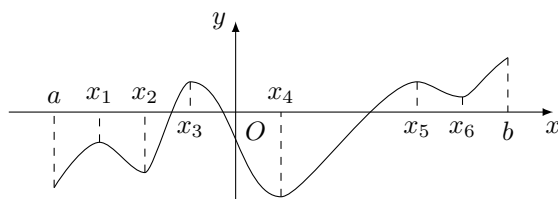
557. (010795) 借助函数图像, 判断下列导数的正负:

(1)  $f'(-\frac{\pi}{4})$ , 其中  $f(x) = \cos x$ ;

(2)  $f'(3)$ , 其中  $f(x) = \ln x$ .

558. (010821) 某函数图像如图所示, 它在  $[a, b]$  上哪一点处取得最大值? 它是极大值点吗? 在哪一点处取得最小值?

它是极小值点吗?



559. (010826) 求函数  $y = -x^3 + 12x - 1$ ,  $x \in [0, 3]$  的值域.