1. 某油库的设计容量为 30 万吨, 年初储量为 10 万吨, 从年初起计划每月先购进石油 m 万吨, 以满足区域内和区域外的需求, 若区域内每月用石油 1 万吨, 区域外前 x 个月的需求量 y(万吨) 与 x 的函数关系为 $y=\sqrt{2px}(p>0,\,1\le x\le 16,\,x\in\mathbf{N})$, 并且前 4 个月, 区域外的需求量为 20 万吨.

(1) 试写出第 x 个月石油调出后, 油库内储油量 M(万吨) 与 x 的函数关系式;

(2) 要使 16 个月内每月按计划购进石油之后, 油库总能满足区域内和区域外的需求, 且每月石油调出后, 油库的石油剩余量不超过油库的容量, 求 m 的取值范围.

2. 在不考虑空气阻力的情况下, 某型号火箭的最大速度 v(单位: m/s) 和燃料的质量 M(单位: kg), 火箭 (除燃料外) 的质量 m(单位: kg) 满足 $\mathrm{e}^v=(1+\dfrac{M}{m})^{2000}$(e 为自然对数的底).

(1) 当燃料质量 M 为火箭 (除燃料外) 质量 m 的两倍时, 求火箭的最大速度 (单位: m/s, 结果精确到 0.1);

(2) 当燃料质量 M 为火箭 (除燃料外) 质量 m 的多少倍时, 火箭的最大速度可以达到 8000m/s(结果精确到 0.1).

3. 某网店有 3 万件商品, 计划在元旦旺季售出商品 x 万件. 经市场调查测算, 花费 t 万元进行促销后, 商品的剩余量 $3-x$(万件) 与促销费 t(万元) 之间的关系为 $3-x=\dfrac{k}{t+1}$(其中 k 为常数), 如果不搞促销活动, 只能售出 1 万件商品.

(1) 要使促销后商品的剩余量不大于 0.1 万件, 促销费至少为多少万元?

(2) 已知商品的进价为 32 元/件, 另有固定成本 3 万元. 定义每件售出商品的平均成本为 $32+\dfrac{3}{x}$ 元. 若将商品售价定为: “每件售出商品平均成本的 1.5 倍” 与 “每件售出商品平均促销费的一半” 之和, 则当促销费 t 为多少时, 该网店售出商品的总利润最大? 此时商品的剩余量为多少?

4. 勤俭节约是中华民族的传统美德. 为避免舌尖上的浪费, 各地各部门采取了精准供应的措施. 某学校食堂经调查分析预测, 从年初开始的前 $n(n=1,2,3,\cdots,12)$ 个月对某种食材的需求总量 S_n(公斤) 近似地满足 $S_n=\begin{cases}635n, & 1\le n\le 6,\\ -6n^2+774n-618, & 7\le n\le 12.\end{cases}$ 为保证全年每一个月该食材都够用, 食堂前 n 个月的进货总量须不低于前 n 个月的需求总量.

(1) 如果每月初进货 646 公斤, 那么前 7 个月每月该食材是否都够用?

(2) 若每月初等量进货 p 公斤, 为保证全年每一个月该食材都够用, 求 p 的最小值.

5. 提高隧道的车辆通行能力可改善附近路段高峰期间的交通状况. 在一般情况下, 隧道内的车流速度 v(单位: 千米/小时) 和车流密度 x(单位: 辆/千米) 满足关系式: $v=\begin{cases}50, & 0<x\le 20,\\ 60-\dfrac{k}{140-x}, & 20<x\le 120\end{cases}$ $(k\in\mathbf{R})$.
研究表明: 当隧道内的车流密度达到 120 辆/千米时造成堵塞, 此时车流速度是 0 千米/小时.

(1) 若车流速度 v 不小于 40 千米/小时, 求车流密度 x 的取值范围;

(2) 隧道内的车流量 y(单位时间内通过隧道的车辆数, 单位: 辆/小时) 满足 $y=x\cdot v$, 求隧道内车流量的最大值 (精确到 1 辆/小时), 并指出当车流量最大时的车流密度 (精确到 1 辆/千米).