

- 用列举法表示下列集合:
  - 10 以内的所有素数组成的集合;
  - $\{y|y = x - 1, 0 \leq x \leq 3, x \in \mathbf{Z}\}$ .
- 用描述法表示下列集合:
  - 被 3 除余 1 的所有自然数组成的集合;
  - 比 1 大又比 10 小的所有实数组成的集合;
  - 平面直角坐标系中坐标轴上所有点组成的集合.
- 集合  $\{(x, y)|xy > 0, x, y \text{ 为实数}\}$  是指 ( ).
 

A. 第一象限内的所有点组成的集合	B. 第三象限内的所有点组成的集合
C. 第一象限和第三象限内的所有点组成的集合	D. 不在第二象限也不在第四象限内的所有点组成的集合
- 用符号 “ $\subset$ ” “ $=$ ” 或 “ $\supset$ ” 连接集合  $A$  与  $B$ :
  - $A = \{x|x^2 - 2x + 1 = 0\}, B = \{x|x^2 - 1 = 0\}$ ;
  - $A = \{1, 2, 4, 8\}, B = \{x|x \text{ 是 } 8 \text{ 的正约数}\}$ .
- 已知集合  $A = \{1\}, B = \{x|x^2 - 3x + a = 0\}$ . 是否存在实数  $a$ , 使得  $A \subset B$ ? 若存在, 求  $a$  的值; 若不存在, 说明理由.
- 已知集合  $A = \{x, y\}, B = \{2x, 2x^2\}$ , 且  $A = B$ . 求集合  $A$ .
- 已知集合  $A = \{x|x \leq 7\}, B = \{x|x < 2\}, C = \{x|x > 5\}$ . 求:  $A \cap B, A \cap C, A \cap (B \cap C)$ .
- 已知集合  $A = \{(x, y)|y = -x + 1\}, B = \{(x, y)|y = x^2 - 1\}$ . 求  $A \cap B$ .
- 已知全集  $U = \mathbf{R}$ , 集合  $A = \{x|4 - x > 2x + 1\}$ . 求  $\bar{A}$ .
- 已知集合  $A = \{2, (a + 1)^2, a^2 + 3a + 3\}$ , 且  $1 \in A$ . 求实数  $a$  的值.
- 已知集合  $A = \{x|x = 2n + 1, n \in \mathbf{Z}\}, B = \{x|x = 4n - 1, n \in \mathbf{Z}\}$ . 判断集合  $A$  与  $B$  的包含关系, 并证明你的结论.
- 设  $a$  是实数, 集合  $M = \{x|x^2 + x - 6 = 0\}, N = \{y|ay + 2 = 0\}$ . 是否存在  $a$ , 使得  $N \subset M$ ? 若存在, 求这些  $a$  的值; 若不存在, 说明理由.
- 已知集合  $A = \{1, 4, x\}, B = \{1, x^2\}$ , 且  $A \cup B = A$ . 求  $x$  的值及集合  $A, B$ .
- 判断下列语句是否为命题:
  - 有的正方形是三角形;
  - 任意一个三角形的内角和都为  $180^\circ$ ;
  - 1 是自然数吗?

(4)  $3 > \pi$ ;

(5)  $2 \in (0, 5)$ , 且  $2 \in \mathbf{Z}$ .

15. 判断下列命题的真假, 并说明理由:

(1) 如果  $a, b$  都是奇数, 那么  $a + b$  是偶数;

(2) 一组对边平行且两对角线等长的四边形是平行四边形;

(3) 如果  $A \cap B = A$ , 那么  $A \cup B = B$ .

16. 如果  $a, b, c$  为实数, 设  $\alpha: a = b = c = 0$ ;  $\beta: a, b, c$  中至少有一个为 0;  $\gamma: a^2 + \sqrt{b} + |c| = 0$ . 那么  $\alpha$  \_\_\_\_\_  $\beta$ ;  
 $\alpha$  \_\_\_\_\_  $\gamma$ ;  $\beta$  \_\_\_\_\_  $\gamma$ . (用符号 “ $\Leftarrow$ ” “ $\Rightarrow$ ” 或 “ $\Leftrightarrow$ ” 填空)

17. 下列各组中,  $\alpha$  是  $\beta$  的什么条件?

(1)  $\alpha$ : 四边形  $ABCD$  的四条边等长,  $\beta$ : 四边形  $ABCD$  是正方形;

(2)  $\alpha$ :  $\triangle ABC$  与  $\triangle DEF$  全等,  $\beta$ :  $\triangle ABC$  与  $\triangle DEF$  的周长相等;

(3)  $\alpha$ :  $x$  是 2 的倍数,  $\beta$ :  $x$  是 6 的倍数;

(4)  $\alpha$ : 集合  $A \subseteq B, B \subseteq C, C \subseteq A$ ,  $\beta$ : 集合  $A = B = C$ ;

(5)  $\alpha$ :  $A \cap B = A \cap C$ ,  $\beta$ :  $B = C$ .

18. 已知  $l, m$  都是自然数, 试判断 “ $l + m$  是偶数” 与 “ $l, m$  都是偶数” 是否等价, 并说明理由.

19. 证明: “四边形  $ABCD$  是平行四边形” 是 “四边形  $ABCD$  的对角线互相平分” 的充要条件.

20. 判断下列命题的真假, 并说明理由:

(1) 若  $A \cap B = \emptyset, C \subset B$ , 则  $A \cap C = \emptyset$ ;

(2) 若  $a, b \in \mathbf{R}$ , 则关于  $x$  的方程  $(a + 1)x + b = 0$  的解为  $x = -\frac{b}{a + 1}$ .

21. 已知  $a$  为实数. 写出关于  $x$  的方程  $ax^2 + 2x + 1 = 0$  至少有一个实根的一个充要条件、一个充分非必要条件和必要非充分条件.

22. 若  $\alpha: \{2\} \subset B \subseteq \{2, 3, 4\}$ ,  $\beta: B = \{2, 4\}$ , 则  $\alpha$  是  $\beta$  的 ( ).

A. 充分非必要条件

B. 必要非充分条件

C. 充要条件

D. 既非充分又非必要条件

23. 已知  $\alpha: x < 3m - 1$  或  $x > -m$ ,  $\beta: x < 2$  或  $x \geq 4$ .

(1) 若  $\alpha$  是  $\beta$  的充分条件, 求实数  $m$  的取值范围;

(2) 若  $\alpha$  是  $\beta$  的必要条件, 求实数  $m$  的取值范围.

24. 设  $a \in \mathbf{R}$ , 求关于  $x$  的方程  $ax = 2$  的解集.

25. 设  $k \in \mathbf{R}$ , 求关于  $x$  与  $y$  的二元一次方程组  $\begin{cases} y = -2x + 1, \\ y = kx - 3 \end{cases}$  的解集.

26. 设  $a \in \mathbf{R}$ , 求一元二次方程  $x^2 - 2ax + a^2 - 4 = 0$  的解集.

27. 已知等式  $2x^2 + 3x + 5 = a(2x + 1)(x + 1) + c$  恒成立, 求常数  $a$ 、 $c$  的值.

28. 已知一元二次方程  $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$  的两实根为  $x_1$ 、 $x_2$ , 求证:  $|x_2 - x_1| = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{|a|}$ .

29. 已知一元二次方程  $x^2 + 3x - 3 = 0$  的两个实根分别为  $x_1$ 、 $x_2$ , 求作二次项系数是 1, 且分别以下列数值为根的一元二次方程:

(1)  $-x_1, -x_2$ ;

(2)  $2x_1 + 1, 2x_2 + 1$ ;

(3)  $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}$ ;

(4)  $x_1^2, x_2^2$ .

30. 设  $a$ 、 $b$ 、 $c$ 、 $d$  为实数, 判断下列命题的真假:

(1) 若  $a > b \geq 0$ , 则  $a^2 > b^2$ ;

(2) 若  $\sqrt{a} > \sqrt{b}$ , 则  $a > b$ ;

(3) 若  $a > b > 0, c > d > 0$ , 则  $ac > bd$ ;

(4) 若  $\frac{b}{a} > 0$ , 则  $ab > 0$ ;

(5) 若  $a > b > 0$ , 则  $a^2 > ab > b^2$ ;

(6) 若  $\sqrt{a} > b$ , 则  $a > b^2$ .

31. 如果  $a^2 > b^2$ , 那么下列不等式中成立的是 ( ).

A.  $a > 0 > b$

B.  $a > b > 0$

C.  $|a| > |b|$

D.  $a > |b|$

32. 如果  $a < b < 0$ , 那么下列不等式中成立的是 ( ).

A.  $\frac{a}{b} < 1$

B.  $a^2 > ab$

C.  $\frac{1}{b^2} < \frac{1}{a^2}$

D.  $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

33. 如果  $a < 0 < b$ , 那么下列不等式中成立的是 ( ).

A.  $\sqrt{-a} < \sqrt{-b}$

B.  $a^2 < b^2$

C.  $a^3 < b^3$

D.  $ab > b^2$

34. 证明: “ $a > 0$  且  $b > 0$ ” 是 “ $a + b > 0$  且  $ab > 0$ ” 的充要条件.

35. 设  $x$  是实数, 比较  $(x + 1)(x^2 - x + 1)$  与  $(x - 1)(x^2 + x + 1)$  的值的大小.

36. 试比较下列各数的大小, 并说明理由:

(1)  $3 + \sqrt{3}$  与  $2 + \sqrt{5}$ ;

(2)  $\sqrt{3} + \sqrt{5}$  与  $\sqrt{2} + \sqrt{6}$ .

37. 设  $a$ 、 $b$  为实数, 比较  $a^2 + b^2$  与  $2a - 2b - 2$  的值的大小.

38. 已知  $a > b, c > d$ . 求证:  $ac + bd > ad + bc$ .

39. 已知  $a \geq -1$ , 求证:  $a^3 + 1 \geq a^2 + a$ .

40. 已知  $a$ 、 $b$  为任意给定的正数, 求证:  $a^3 + b^3 \geq ab^2 + ba^2$ , 并指出等号成立的条件.

41. 设  $a$  为实数, 求关于  $x$  的方程  $2x + a^2 = ax + 4$  的解集.
42. 设  $m$  为实数, 求关于  $x$  的方程  $(m+1)x^2 + 6mx + 9m = 1$  的解集.
43. 已知等式  $2x^2 - 3x - 1 = a(x-1)^2 + b(x-1) + c$  恒成立, 其中  $a$ 、 $b$ 、 $c$  为常数. 求  $a - b + c$  的值.
44. 对一元二次方程  $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ , 证明:  $ac < 0$  是该方程有两个异号实根的充要条件.
45. 已知一元二次方程  $2x^2 + x - 3 = 0$  的两个实根分别为  $x_1$ 、 $x_2$ , 求作二次项系数是 1, 且分别以下列数值为根的一元二次方程:
- (1)  $x_1 + x_2, x_1x_2$ ;
  - (2)  $2x_1^2 + 1, 2x_2^2 + 1$ ;
  - (3)  $\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_1}{x_2}$ ;
  - (4)  $x_1^4, x_2^4$ .
46. 已知一元二次方程  $x^2 - 2mx + m - 1 = 0$  的两实根为  $x_1$ 、 $x_2$ , 且  $x_1^2 + x_2^2 = 4$ . 求实数  $m$  的值.
47. 已知实数  $a$ 、 $b$ 、 $c$  满足  $a + b + c = 0$ , 且  $a > b > c$ . 求证:  $a > 0$  且  $c < 0$ .
48. 设  $s = a + b, p = ab (a, b \in \mathbf{R})$ , 写出 “ $a > 1$  且  $b > 1$ ” 用  $s$ 、 $p$  表示的一个充要条件, 并证明.
49. 原有酒精溶液  $a$  (单位: g), 其中含有酒精  $b$  (单位: g), 其酒精浓度为  $\frac{b}{a}$ . 为增加酒精浓度, 在原溶液中加入酒精  $x$  (单位: g), 新溶液的浓度变为  $\frac{b+x}{a+x}$ . 根据这一事实, 可提炼出如下关于不等式的命题: 若  $a > b > 0, x > 0$ , 则  $\frac{b}{a} < \frac{b+x}{a+x} < 1$ . 试加以证明.
50. 解下列不等式 (组):
- (1)  $2(x+1) - 3(x-2) > 8$ ;
  - (2) 
$$\begin{cases} 3x - 2(5-3x) > 8, \\ 2x \leq 2(2x+3). \end{cases}$$
51. 解下列关于  $x$  的不等式:
- (1)  $ax + 4 < 2x + a^2$ , 其中  $a > 2$ ;
  - (2)  $mx + 1 > x + m^3$ , 其中  $m < 1$ ;
  - (3)  $(p-q)x < p^2 - q^2$ , 其中  $p \neq q$ .
52. 解下列不等式:
- (1)  $(x-2)(3-x) \leq 0$ ;
  - (2)  $x(x+2) \leq 3(x+2)$ ;
  - (3)  $(1-x)(2-x) < 0$ ;
  - (4)  $2(x+1)(x+3) > (x+3)(x+4)$ .
53. 设全集为  $\mathbf{R}$ , 集合  $A = \{x | x^2 - 2x - 3 \geq 0\}$ ,  $B = \{x | x^2 + x - 2 < 0\}$ . 求:
- (1)  $A \cup B$ ;

(2)  $A \cap B$ ;

(3)  $\overline{A \cap B}$ ;

(4)  $\overline{A} \cup \overline{B}$ .

54. 已知下列关于  $x$  的方程有两个不同实根, 求实数  $k$  的取值范围:

(1)  $x^2 + (k+3)x + k^2 = 0$ ;

(2)  $3x^2 + 2kx + k = 0$ .

55. 若下列关于  $x$  的方程有实数解, 求实数  $k$  的取值范围:

(1)  $x^2 + kx - k + 3 = 0$ ;

(2)  $x^2 + 2\sqrt{2}x + k(k-1) = 0$ .

56. 解下列不等式:

(1)  $\frac{1}{3}x^2 \leq 2x - 3$ ;

(2)  $4x^2 \geq 12x - 9$ ;

(3)  $x^2 - x + \frac{1}{4} < 0$ ;

(4)  $x^2 + \frac{4}{9} > \frac{2}{3}x$ .

57. 解下列不等式:

(1)  $x^2 + x + 1 > 0$ ;

(2)  $3 - 2\sqrt{2}x \geq -x^2$ ;

(3)  $2x^2 + 3x + 4 < 0$ ;

(4)  $x^2 \leq 3x - 4$ .

58. 已知关于  $x$  的一元二次方程  $2x^2 + ax + 1 = 0$  无实数解, 求实数  $a$  的取值范围.

59. 已知关于  $x$  的一元二次不等式  $x^2 + ax + b < 0$  的解集为  $(-3, -1)$ , 求实数  $a$  及  $b$  的值.

60. 解下列不等式组:

(1) 
$$\begin{cases} 6 - x - x^2 \leq 0, \\ x^2 + 3x - 4 < 0; \end{cases}$$

(2) 
$$\begin{cases} 4x^2 - 27x + 18 > 0, \\ x^2 - 6x + 4 < 0; \end{cases}$$

(3) 
$$\begin{cases} 3x^2 + x - 2 \geq 0, \\ 4x^2 - 15x + 9 > 0. \end{cases}$$

61. 解下列不等式:

(1)  $\frac{x+1}{x-2} > 0$ ;

(2)  $\frac{1}{x} < 1$ ;

$$(3) \frac{2}{3-4x} \geq 1;$$

$$(4) \frac{5}{x+2} \leq 2;$$

$$(5) \frac{4x+3}{x-1} > 5.$$

62. 当关于  $x$  的方程  $4k - 3x = 2(k+2)x$  的解分别满足以下条件时, 求实数  $k$  的取值范围.

(1) 正数;

(2) 负数.

63. 解下列不等式:

$$(1) |1 - 4x| < 5;$$

$$(2) |x - 4| < 2x;$$

$$(3) |3x - 4| \geq x + 2;$$

$$(4) |x + 2| + |x - 3| < 7.$$

64. 某船从甲码头顺流航行 75km 到达乙码头, 停留 30min 后再逆流航行 126km 到达丙码头. 如果水流速度为 4km/h, 该船要在 5h 内 (包含 5h) 完成整个航行任务, 那么船的速度至少要达到多少?

65. 设  $a, b \in \mathbf{R}$ , 解关于  $x$  的不等式  $ax > b$ .

66. 设  $a \in \mathbf{R}$ , 解下列关于  $x$  的不等式:

$$(1) (x - a)(x + 3) \geq 0;$$

$$(2) (x - a)(x - 2a) > 0;$$

$$(3) x(x - a) \geq (a + 1)(x - a).$$

67. 已知关于  $x$  的不等式  $x^2 + bx + c > 0$  的解集是  $(-\infty, \frac{1}{2}) \cup (2, +\infty)$ , 求实数  $b$  及  $c$  的值, 并求  $x^2 - bx + c \leq 0$  的解集.

68. 解下列不等式:

$$(1) 2 < \frac{1}{3x-1} \leq 3;$$

$$(2) \frac{1}{x} > x;$$

$$(3) \frac{1}{x-4} \leq 1 - \frac{x}{4-x}.$$

69. 解下列不等式:

$$(1) \frac{3x^2 + 2x + 1}{x^2 + x + 2} \leq 1;$$

$$(2) \frac{x-1}{x^2 - 4x + 4} \geq 0.$$

70. 解下列不等式:

$$(1) 1 < |1 - 2x| \leq 7;$$

$$(2) 3 < |x - 2| < 6;$$

$$(3) |x + 2| - |3 - 2x| < 1;$$

$$(4) \left| \frac{x}{x+1} \right| > \frac{x}{x+1}.$$

71. 若关于  $x$  的不等式组  $\begin{cases} (2x-3)(3x+2) \leq 0, \\ x-a > 0 \end{cases}$  没有实数解, 求实数  $a$  的取值范围.
72. 若关于  $x$  的不等式  $2kx^2 + kx + \frac{1}{8} > 0$  对于一切实数  $x$  都成立, 求实数  $k$  的取值范围.
73. 如果实数  $a$ 、 $b$  同号, 那么下列命题中正确的是 ( ).
- A.  $a^2 + b^2 > 2ab$       B.  $a + b \geq 2\sqrt{ab}$       C.  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} > \frac{2}{\sqrt{ab}}$       D.  $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \geq 2$
74. 设  $a > b > 0$ , 将四个正数  $a$ 、 $b$ 、 $\sqrt{ab}$ 、 $\frac{a+b}{2}$  按从小到大的顺序排列, 并说明理由.
75. 已知  $a$ 、 $b$  为正数, 求证:  $\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab}$ , 并指出等号的成立条件.
76. 设  $a$ 、 $b \in \mathbf{R}$ , 求证:  $a^2 + 2b^2 + 1 \geq 2b(a+1)$ .
77. 设  $x \in \mathbf{R}$ , 求二次函数  $y = (x-1)(5-x)$  的最大值.
78. 已知直角三角形斜边长等于 10cm, 求直角三角形面积的最大值.
79. 已知  $a$ 、 $b$ 、 $c$  为实数, 求证:  $|a-b| \leq |a-c| + |c-b|$ .
80. 设  $x \in \mathbf{R}$ , 求方程  $|x-2| + |2x-3| = |3x-5|$  的解集.
81. 设  $0 < a < b$ , 且  $a+b=1$ , 请将  $a$ 、 $b$ 、 $\frac{1}{2}$ 、 $2ab$ 、 $a^2+b^2$  从小到大排列, 并说明理由.
82. 已知  $a$  为正数, 比较  $\frac{a^2+2a+1}{a}$  的值与 4 的大小.
83. 已知  $a$ 、 $b$  为正数, 求证:  $(a+b)(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}) \geq 4$ .
84. 已知  $a$ 、 $b$  是互不相等的正数, 求证:  $(a^2+1)(b^2+1) > 4ab$ .
85. 证明: 对于正数  $h$ , 如果  $|x-a| < \frac{h}{2}$ ,  $|y-a| < \frac{h}{2}$ , 那么  $|x-y| < h$ .
86. 已知直角坐标平面上的三点  $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ 、 $C(x_3, y_3)$ , 记  $d(A, B) = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|$ ,  $d(B, C) = |x_3 - x_2| + |y_3 - y_2|$ ,  $d(C, A) = |x_1 - x_3| + |y_1 - y_3|$ . 求证:  $d(A, B) \leq d(B, C) + d(C, A)$ .
87. 已知  $a$ 、 $b$ 、 $c$  是实数, 求证:  $|a+b+c| \leq |a| + |b| + |c|$ .
88. 证明:  $|x+2| - |x-1| \geq -3$ , 对所有实数  $x$  均成立, 并求等号成立时  $x$  的取值范围.
89. (1) 求  $-64$  的立方根;  
(2) 求  $256$  的 4 次方根.
90. 求下列各根式的值:
- (1)  $\sqrt[5]{\frac{243}{32}}$ ;  
(2)  $-\sqrt[3]{0.125}$ ;  
(3)  $\sqrt[7]{(-2)^7}$ ;  
(4)  $\sqrt[6]{(-27)^2}$ .

91. 用有理数指数幂的形式表示下列各式 (其中  $x > 0, y > 0$ ):

(1)  $\sqrt[3]{5}$ ;

(2)  $(\sqrt[5]{x})^3$ ;

(3)  $\sqrt[7]{x^3y^4}$ ;

(4)  $\sqrt[7]{\frac{x^3}{y^4}}$ .

92. 用根式的形式表示下列各式 (其中  $a > 0$ ):

(1)  $a^{\frac{2}{3}}$ ;

(2)  $a^{\frac{3}{4}}$ ;

(3)  $a^{-\frac{2}{5}}$ ;

(4)  $a^{-\frac{5}{2}}$ .

93. 求下列各式中  $x$  的值 (其中  $x > 0$ ): (1)  $x^3 = 27$ ;

(2)  $x^4 = 121$ ;

(3)  $x^{\frac{3}{2}} = 1000$ ;

(4)  $x^{-\frac{4}{3}} = \frac{16}{625}$ .

94. 用有理数指数幂的形式表示下列各式 (其中  $a > 0, b > 0$ ):

(1)  $a^{\frac{1}{3}}a^{\frac{1}{4}}$ ;

(2)  $\sqrt[3]{a\sqrt{a}}$ ;

(3)  $(a^{\frac{1}{4}}b^{-\frac{3}{8}})^8$ ;

(4)  $(\frac{a^{-3}b^4}{\sqrt{b}})^{-\frac{1}{3}}$ .

95. 化简下列各式 (其中  $a > 0, b > 0$ ):

(1)  $\frac{(2a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{2}})(-6a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}})}{3a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{5}{6}}}$ ;

(2)  $(a^{2-\sqrt{3}}b)^{2+\sqrt{3}} \cdot b^{2-\sqrt{3}}$ .

96. 当  $x < 0$  时, 求  $|x| + \sqrt[6]{x^6} + 2\sqrt[3]{x^3}$  的值.

97. 设  $a^{2x} = 2$ , 且  $a > 0$ . 求  $\frac{a^{3x} + a^{-3x}}{a^x + a^{-x}}$  的值.

98. 设  $a > b > 0$ , 求证:  $a^ab^b > (ab)^{\frac{a+b}{2}}$ .

99. 把下列指数式写成对数式:

(1)  $3^4 = 81$ ;

(2)  $5^{-\frac{1}{2}} = x$ .

100. 将下列对数式写成指数式:

(1)  $\log_{\frac{1}{3}} 27 = -3$ ;

(2)  $\log_2 \frac{1}{8} = -3$ .



101. 求下列各式的值:

- (1)  $\log_3 27$ ;
- (2)  $\log_{\frac{1}{2}} 8$ ;
- (3)  $\ln \frac{1}{e} + \lg \sqrt{10}$ .

102. 求下列各式中  $x$  的值:

- (1)  $\log_2 x = 5$ ;
- (2)  $\log_{\sqrt{5}} \frac{1}{125} = x$ ;
- (3)  $\log_x 4 = \frac{1}{2}$ .

103. 求下列各式的值:

- (1)  $\log_2 (2 \times 3\sqrt{2})$ ;
- (2)  $\log_{21} 3 + \log_{21} 7$ ;
- (3)  $\log_5 \sqrt{6} - \frac{1}{2} \log_5 150$ ;
- (4)  $3^{\log_3 1} + \log_2 48 - \log_2 3$ ;
- (5)  $3 \log_3 \frac{3}{2} - \log_3 \frac{7}{4} + \frac{1}{2} \log_3 4 + \log_3 7$ .

104. 已知  $A = \log_a x$ ,  $B = \log_a y$ ,  $C = \log_a z$  ( $a > 0$  且  $a \neq 1$ ). 用  $A$ 、 $B$  及  $C$  表示下列各式:

- (1)  $\log_a (xy^2)$ ;
- (2)  $\log_a \frac{xy}{\sqrt{z}}$ ;
- (3)  $\log_a (x^2 y^2) + \log_a (y\sqrt{x})$ .

105. 求下列各式的值:

- (1)  $\log_4 2\sqrt{2}$ ;
- (2)  $\log_2 3 \times \log_9 2$ ;
- (3)  $\frac{3}{\log_2 6} + \frac{3}{\log_3 6}$ ;
- (4)  $(\log_4 3 + \log_8 3)(\log_3 2 + \log_9 2) + \log_{\frac{1}{2}} \sqrt[4]{32}$ .

106. 已知  $a = \lg 5$ , 用  $a$  表示  $\lg 2$  和  $\lg 20$ .

107. 求下列各式中  $x$  的取值范围:

- (1)  $\log_2 (1 - 3x)$ ;
- (2)  $\log_a (x^2 + x)$  ( $a > 0$  且  $a \neq 1$ ).

108. 求下列各式的值:

- (1)  $\log_4 8 - \log_{\frac{1}{3}} 3 - \log_{\sqrt{2}} 4$ ;
- (2)  $2^{\log_6 5} \times 3^{\log_6 5}$ ;
- (3)  $(\lg 50)^2 + \lg 2 \times \lg 50^2 + (\lg 2)^2$ .

109. 科学家以里氏震级来度量地震的强度, 若设  $I$  为地震时所散发出来的相对能量程度, 则里氏震级度量  $r$  可定义为  $r = \frac{2}{3} \lg I + 2$ . 求 7.8 级地震和 6.9 级地震的相对能量比值. (结果精确到个位)

110. 已知  $\lg 2 = a$ ,  $\lg 3 = b$ . 用  $a$  及  $b$  表示  $\log_2 3$  及  $\log_{12} 25$ .
111. 已知  $5.4^x = 3$ ,  $0.6^y = 3$ . 求  $\frac{1}{x} - \frac{1}{y}$  的值.
112. 设  $a$ 、 $b$ 、 $c$ 、 $d$  均为正数, 且  $a$ 、 $c$  均不为 1. 求证:  $\log_a b \cdot \log_c d = \log_a d \cdot \log_c b$ .
113. 若幂函数  $y = x^a$  的图像经过点  $(\sqrt[4]{3}, 3)$ , 求此幂函数的表达式.
114. 求下列函数的定义域, 并作出它们的大致图像:
- (1)  $y = x^{\frac{1}{5}}$ ;
  - (2)  $y = x^{-2}$ ;
  - (3)  $y = x^{-\frac{4}{3}}$ .
115. 在固定压力差 (压力差为常数) 的前提下, 当气体通过圆形管道时, 其速率  $v$  (单位:  $\text{cm}^3/\text{s}$ ) 与管道半径  $r$  (单位:  $\text{cm}$ ) 的四次方成正比. 若在半径为  $3\text{cm}$  的管道中, 某气体的速率为  $400\text{cm}^3/\text{s}$ , 求该气体通过半径为  $5\text{cm}$  的管道时的速率. (结果精确到  $1\text{cm}^3/\text{s}$ )
116. 比较下列各题中两个数的大小:
- (1)  $3.1^{-\frac{1}{2}}$  与  $3.2^{-\frac{1}{2}}$ ;
  - (2)  $(a+2)^{\frac{1}{3}}$  与  $a^{\frac{1}{3}}$ .
117. 下列幂函数在区间  $(0, +\infty)$  上是严格增函数, 且图像关于原点成中心对称的是\_\_\_\_\_ (请填入全部正确的序号).
- ①  $y = x^{\frac{1}{2}}$ ; ②  $y = x^{\frac{1}{3}}$ ; ③  $y = x^{\frac{2}{3}}$ ; ④  $y = x^{-\frac{1}{3}}$ .
118. 作出函数  $y = \frac{x-1}{x+2}$  的大致图像.
119. 幂函数  $y = x^{n(n+1)}$  ( $n$  为正整数) 的图像一定经过\_\_\_\_\_ 象限.
120. 若幂函数  $y = x^s$  在  $0 < x < 1$  时的图像位于直线  $y = x$  的上方, 则  $s$  的取值范围是\_\_\_\_\_.
121. 下列命题中, 正确的是 ( ).
- A. 当  $n = 0$  时, 函数  $y = x^n$  的图像是一条直线
  - B. 幂函数  $y = x^n$  的图像都经过  $(0, 0)$  和  $(1, 1)$  两个点
  - C. 若幂函数  $y = x^n$  的图像关于原点成中心对称, 则  $y = x^n$  在区间  $(-\infty, 0)$  上是严格增函数
  - D. 幂函数的图像不可能在第四象限
122. 写出一个图像经过第一、第二象限但不经过原点的幂函数的表达式.
123. 已知函数  $y = \frac{ax+1}{x+2}$  (常数  $a \in \mathbf{Z}$ ). 问: 是否存在整数  $a$ , 使该函数在区间  $[1, +\infty)$  上是严格减函数, 并且函数值不恒为负? 若存在, 求出所有符合条件的  $a$ ; 若不存在, 请说明理由.
124. 下列函数是指数函数的序号为\_\_\_\_\_ (请填入全部正确的序号).
- ①  $y = (-4)^x$ ; ②  $y = (\frac{1}{4})^x$ ; ③  $y = 4^x$ ; ④  $y = x^{-4}$ ; ⑤  $y = (\sqrt{4})^x$ .

125. 求下列函数的定义域:

(1)  $y = 2^{\sqrt{3-x}}$ ;

(2)  $y = 0.1^{\frac{1}{x}}$ .

126. 在同一直角坐标系中作出下列函数的大致图像, 并指出这些函数图像间的关系:

(1)  $y = (\frac{3}{2})^x$ ;

(2)  $y = (\frac{2}{3})^x$ ;

(3)  $y = (\frac{2}{3})^x - 1$ .

127. 已知指数函数  $y = (m-2)^x$  在  $\mathbf{R}$  上是严格减函数, 求实数  $m$  的取值范围.

128. 已知常数  $a > 0$  且  $a \neq 1$ . 假设无论  $a$  取何值, 函数  $y = a^{2-x}$  的图像恒经过一个定点, 求此定点的坐标.

129. 比较下列各题中两个数的大小:

(1)  $1.2^{2.6}$  和  $1.2^{2.61}$ ;

(2)  $(\sqrt{3})^{-\frac{1}{3}}$  和  $(\frac{\sqrt{3}}{3})^{\frac{1}{2}}$ .

130. 求下列不等式的解集:

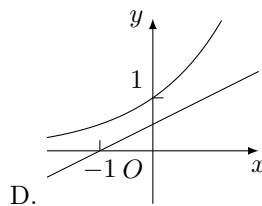
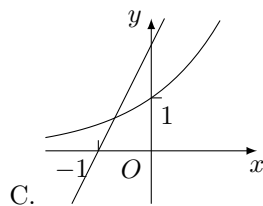
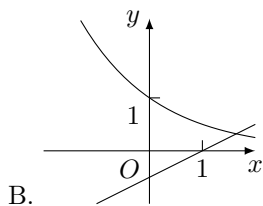
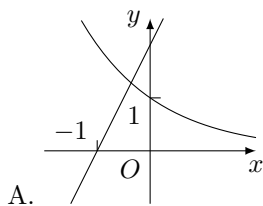
(1)  $3^{x^2-2x+3} < 3^{2x}$ ;

(2)  $(\frac{1}{3})^{\sqrt{x}} \leq \frac{1}{81}$ .

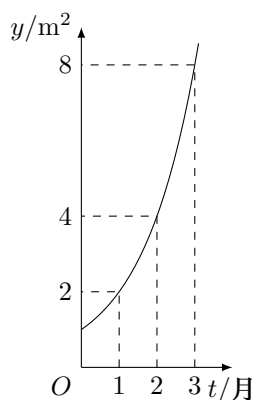
131. 已知指数函数  $y = a^x (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$  在区间  $[1, 2]$  上的最大值与最小值之和等于 6, 求实数  $a$  的值.

132. 某公司去年购置平板电脑 50 台, 并计划从今年起, 新购置的平板电脑数将按每年 5% 的比例增长. 求从今起的第 10 年新购置的平板电脑数. (结果精确到 1 台)

133. 在同一平面直角坐标系中, 指数函数  $y = a^x (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$  和一次函数  $y = a(x+1)$  的图像关系可能是 ( ).



134. 如图所示的是某池塘中的浮萍蔓延的面积  $y$  (单位:  $\text{m}^2$ ) 与时间  $t$  (单位: 月) 的关系:  $y = a^t (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$ .



以下结论: ① 这个指数函数的底数是 2; ② 第 5 个月时, 浮萍的面积就会超过  $30\text{m}^2$ ; ③ 浮萍面积从  $4\text{m}^2$  到  $12\text{m}^2$  需要经过 1.5 个月; ④ 浮萍每个月增加的面积都相等. 其中, 正确结论的序号是 ( ).

A. ①②③

B. ①②③④

C. ②③④

D. ①②

135. 若  $x > 0$  时, 指数函数  $y = (a^2 - 1)^x$  的值总大于 1, 求实数  $a$  的取值范围.

136. 若  $-1 < x < 0$ , 比较  $3^x$ ,  $3^{-x}$  及  $3^{2x}$  的大小.

137. 设  $a > 1$ , 若  $a^{x^2+2x+1} < a^{2x^2-3x+1}$ , 求实数  $x$  的取值范围.

138. 若函数  $y = 5^{x+1} + m$  的图像不经过第二象限, 求实数  $m$  的取值范围.

139. 求下列函数的定义域:

(1)  $y = \log_a(x+12)$  (常数  $a > 0$  且  $a \neq 1$ );

(2)  $y = \log_2 \frac{1}{x^2 - 2x + 5}$ .

140. 已知对数函数  $y = \log_a x$  ( $a > 0$  且  $a \neq 1$ ) 的图像经过点  $(3, 2)$ . 若点  $P(b, 4)$  为此函数图像上的点, 求实数  $b$  的值.

141. 在同一平面直角坐标系中画出下列函数的图像, 并指出这些函数图像之间的关系.

(1)  $y = \log_3 x$ ;

(2)  $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ ;

(3)  $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ .

142. 已知常数  $a > 0$  且  $a \neq 1$ , 假设无论  $a$  取何值, 函数  $y = \log_a x - 1$  的图像恒经过一个定点. 求此点的坐标.

143. 根据下列不等式, 确定底数  $a$  的取值范围:

(1)  $\log_a 0.2 < \log_a 0.1$ ;

(2)  $\log_a \pi > \log_a e$ .

144. 已知  $y = \log_{a^2-1} x$  在区间  $(0, +\infty)$  上是严格减函数, 求实数  $a$  的取值范围.

145. 已知对数函数  $y = \log_a x$  ( $a > 1$ ) 在区间  $[1, 2]$  上的最大值比最小值大 1, 求  $a$  的值.

146. 若  $a > b > c > 1$ , 则下列不等式不成立的是\_\_\_\_\_. (填写所有不成立的不等式的序号)

①  $\log_a b > \log_a c$ ; ②  $\log_a \frac{1}{b} > \log_a \frac{1}{c}$ ; ③  $\log_{\frac{1}{a}} b > \log_{\frac{1}{a}} c$ ; ④  $\log_{\frac{1}{a}} \frac{1}{b} > \log_{\frac{1}{a}} \frac{1}{c}$ .

147. 设常数  $a > 0$  且  $a \neq 1$ , 求函数  $y = \log_a(a - a^x)$  的定义域.

148. 根据下列不等式, 比较正数  $m$  及  $n$  的大小:

(1)  $\log_3 m < \log_3 n$ ;

(2)  $\log_a m < \log_a n (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$ ;

(3)  $\log_m N < \log_n N (0 < m < 1, 0 < n < 1, 0 < N < 1)$ .

149. 设  $0 < a < 1$ , 若  $\log_a(4x^2 - 1) < \log_a(-2x^2 + x + 1)$ , 求实数  $x$  的取值范围.

150. 比较  $22^{23}$  与  $23^{22}$  的大小.

151. 如果  $^{237}\text{U}$  在不断的裂变中, 每天所剩留质量与前一天剩留质量相比, 按同一比例减少, 且经过 7 天裂变, 剩余的质量是原来的 50%. 计算至少要经过多少天裂变, 其剩留质量才小于原来的 10%.

152. 求下列函数的定义域:

(1)  $y = \frac{1}{x^2 + 2x - 3}$ ;

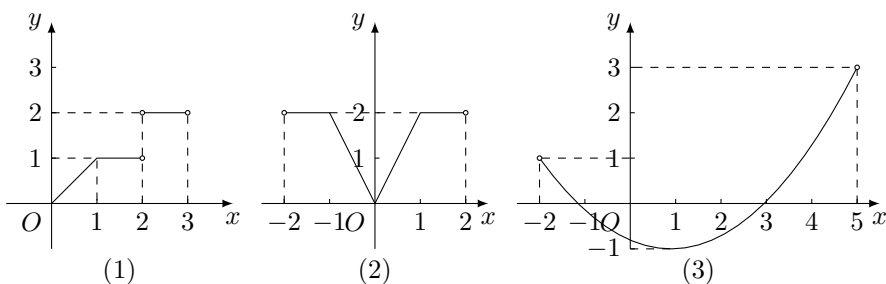
(2)  $y = \sqrt{4 - 3x - x^2}$ ;

(3)  $y = \sqrt{x - 2} + \sqrt{x + 3}$ ;

(4)  $y = \frac{1}{\lg(x + 2)} + \frac{1}{\sqrt{5 - x}}$ .

153. 设  $p, q$  是常数, 函数  $y = f(x)$  的表达式为  $f(x) = x^2 + px + q$ . 若  $f(1) = f(2) = 0$ , 求  $f(-1)$ .

154. 观察下列函数的图像, 并写出它们的值域:



155. 设  $a$  是常数, 求下列函数的定义域

(1)  $y = \frac{1}{|x| - a}$ ;

(2)  $y = \sqrt{x(x - a)}$ .

156. 已知函数  $y = f(x)$  的表达式为  $f(x) = \begin{cases} 2x(3 + x), & x \geq 0, \\ 2x(3 - x), & x < 0. \end{cases}$  求  $f(2)$ ,  $f(-4)$  及  $f(-a)$ , 其中  $a$  为实数.

157. 若函数  $y = f(x)$  的定义域为  $\mathbf{R}$ , 则  $y = f(x)$  为奇函数的一个充要条件为 ( ).

A.  $f(0) = 0$

B. 对任意  $x \in \mathbf{R}$ ,  $f(x) = 0$  都成立

C. 存在某个  $x_0 \in \mathbf{R}$ , 使得  $f(x_0) + f(-x_0) = 0$

D. 对任意给定的  $x \in \mathbf{R}$ ,  $f(x) + f(-x) = 0$  都成立

158. 证明下列函数  $y = f(x)$  为偶函数:

(1)  $f(x) = x^2 + x^{-2}$ ;

(2)  $f(x) = \frac{x(2^x - 1)}{2^x + 1}$ .

159. 证明下列函数  $y = f(x)$  为奇函数:

(1)  $f(x) = x^{-3}$ ;

(2)  $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

160. 判断下列函数  $y = f(x)$  的奇偶性, 并说明理由:

(1)  $f(x) = 2x + \sqrt[3]{x}$ ;

(2)  $f(x) = 2x^4 - x^2$ ;

(3)  $f(x) = x^2 - x$ ;

(4)  $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ ;

(5)  $f(x) = \lg \frac{1-x}{1+x}$ .

161. 证明: 函数  $y = x - \frac{1}{x}$ ,  $x \in (-\infty, 0)$  是严格增函数.

162. 证明: 函数  $y = \lg(1-x)$  在其定义域上是严格减函数.

163. 求下列函数的最大值与最小值, 并写出取最值时相应自变量的值:

(1)  $y = x^2 - 4x - 2$ ;

(2)  $y = 6x - 3x^2$ ;

(3)  $y = -x^2 - 4x - 3$ ,  $x \in [-3, 1]$ ;

(4)  $y = x^2 - 2x - 3$ ,  $x \in [-2, 0]$ .

164. 求函数  $y = \log_{\frac{1}{2}}(x+2)$ ,  $x \in [2, 6]$  的最大值与最小值.

165. 已知  $y = x^2 + px + q$  和  $y = x + \frac{4}{x}$  都是定义在  $[1, 4]$  上的函数, 且在  $x_0$  处同时取到相同的最小值. 求  $y = x^2 + px + q$  的最大值.

166. 已知实数  $b < 2$ , 而函数  $y = x^2 + ax + 1$ ,  $x \in [b, 2]$  是偶函数. 求实数  $a$ 、 $b$  的值.

167. 判断下列函数  $y = f(x)$  的奇偶性, 并说明理由:

(1)  $f(x) = \frac{10^x - 10^{-x}}{10^x + 10^{-x}}$ ;

(2)  $f(x) = x\left(\frac{1}{2^x - 1} + \frac{1}{2}\right)$ .

168. 当表达式  $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$  时, 函数  $y = f(x)$  同时满足以下条件:

① 不是偶函数;

② 在区间  $(-\infty, -1)$  上是严格减函数;

③ 在区间  $(0, 1)$  上是严格增函数.

169. 作出函数  $y = x^2 - 2|x|$  的大致图像, 并分别写出它的定义域、奇偶性、单调区间及最小值.

170. 研究函数  $y = \frac{1}{1+x^2}$  的定义域、奇偶性、单调性及最大值.

171. 如果函数  $y = x^2 - 2mx + 1$  在区间  $(-\infty, 2]$  上是严格减函数, 那么实数  $m$  的取值范围为\_\_\_\_\_.

172. 设  $t$  是实数, 且  $t < 4$ . 求函数  $y = |2^{x+1} - 8|$ ,  $x \in [t, 4]$  的最小值.

173. 某企业去年四个季度生产某种型号机器的数量  $y$ (单位: 万台) 与季度  $x$  的函数关系如下表所示:

$x/\text{季度}$	1	2	3	4
$y/\text{万台}$	10	12	14	16

试写出该函数的定义域, 并作出其大致图像.

174. 某地区住宅电话费收取标准为: 接通后 3 分钟内 (含 3 分钟) 收费 0.20 元, 以后每分钟 (不足 1 分钟按 1 分钟计) 收费 0.10 元. 如果一次通话时间为  $t$ (单位: min), 写出通话费  $y$ (单位: 元) 关于通话时间  $t$  的函数关系.

175. 求函数  $y = \sqrt{2x+1} - x + 1$  的零点.

176. 已知函数  $y = x^3 + x^2 + x - 1$  在区间  $(0, 1)$  上有且仅有一个零点, 用二分法求该零点的近似值. (结果精确到 0.1)

177. 已知某气垫船的最大船速是 48 海里/时, 船每小时使用的燃料费用和船速的平方成正比. 当船速为 30 海里/时时, 船每小时的燃料费用为 600 元, 而其余费用 (不论船速为多少) 都是每小时 864 元. 船从甲地行驶到乙地, 甲乙两地相距 100 海里.

(1) 试把船每小时使用的燃料费用  $P$ (单位: 元) 表示成船速  $v$ (单位: 海里/时) 的函数;

(2) 试把船从甲地到乙地所需的总费用  $y$ (单位: 元) 表示成船速  $v$ (单位: 海里/时) 的函数;

(3) 当船速为多少时, 船从甲地到乙地所需的总费用最少?

178. 为分流短途乘客, 减缓轨道交通高峰压力, 某地地铁实行新的计费标准, 其分段计费规则如下: 0 至 6km(含 6km) 票价 3 元; 6 至 16km(含 16km) 票价 4 元; 16km 以上每 6km(不足 6km 时按 6km 计) 票价递增 1 元, 但总票价不超过 8 元.

(1) 试作出票价  $y$ (单位: 元) 关于路程  $x$ (单位: km) 的函数的大致图像;

(2) 某人买了 5 元的车票, 他乘车的路程不能超过多少?

179. 某物流公司在上海及杭州的仓库分别有某机器 12 台和 6 台, 现决定销售给  $A$  市 10 台、 $B$  市 8 台. 已知上海调运一台机器到  $A$ 、 $B$  市的运费分别为 400 元和 800 元; 杭州调运一台机器到  $A$ 、 $B$  市的运费分别为 300 元和 500 元. 设从上海调运  $x$  台机器往  $A$  市, 求总运费  $y$ (单位: 元) 关于  $x$ (单位: 台) 的函数关系.

180. 证明: 方程  $\lg x + 2x = 16$  没有整数解.

181. 解不等式:  $\frac{2}{x^2} \geq 3x - 1$ .

182. 已知函数  $y = x^2 - 4x - 5$ ,  $x \in [1, 3]$ , 判断其是否存在反函数. 若存在, 求出反函数; 若不存在, 说明理由.

183. 求下列函数的反函数:

(1)  $y = -x^3$ ;

(2)  $y = \frac{x}{x+2}$ ;

(3)  $y = x^2 + 1, x \in (-\infty, 0)$ .

184. 求下列函数的反函数:

(1)  $y = 10^x + 1$ ;

(2)  $y = \log_2(x+1)$ ;

(3)  $y = \log_2(2x)$ .

185. 已知  $f(x) = 1 - \log_2 x$ , 设  $y = f^{-1}(x)$  是  $y = f(x)$  的反函数. 求  $f^{-1}(-3)$  的值.

186. 已知函数  $y = \frac{a}{x+1}$  的反函数的图像经过点  $(\frac{1}{2}, 1)$ , 求实数  $a$  的值.