1. 按定义证明一个数列是等差数列或等比数列. 根据定义, 要证明数列 $\{a_n\}$ 是等差数列, 只需证明 $a_{n+1}-a_n=$ 常数 $(n\in\mathbf{N})$; 要证明数列 $\{a_n\}$ 是等比数列, 只需证明 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=$ 非零常数 $(n\in\mathbf{N})$.

2. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n=pn+q(p,q$ 为常数, $n\in\mathbf{N})$, 求证: $\{a_n\}$ 是等差数列. 证明 $a_{n+1}-a_n=[p(n+1)+q]-(pn+q)=p(n\in\mathbf{N})$, $\{a_n\}$ 是等差数列, 显然, 常数 p 是它的公差.

3. 一般数列 $\{a_n\}$ 的通项公式. 记 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$, 则恒有 $\begin{cases}a_1=S_1\\ a_n=S_n-S_{n-1}(n\geq 2,n\in\mathbf{N}).\end{cases}$

4. 已知数列前 n 项和 $S_n=An^2+Bn+C$, 试证明此数列从第二项起, 构成一个等差数列. 证明由已知, $\begin{cases}a_1=A+B+C,\\ a_n=S_n-S_{n-1}\\ =An^2+Bn+C-[A(n-1)^2+B(n-1)+C]\\ =A(2n-1)+B=2An+(B-A)\quad(n\geq 2,n\in\mathbf{N}),\end{cases}$ 于是 $a_{n+1}-a_n=[2A(n+1)+(B-A)]-[2An+(B-A)]=2A(n\geq 2,n\in\mathbf{N})$, 故 $\{a_n\}$ 从第二项起, 构成一个等差数列.

5. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$, $S_n=\frac{(n+1)a_n}{2}(n\in\mathbf{N})$, 求通项 a_n 的表达式. 解由已知, 得 $2S_n=(n+1)a_n(n\in\mathbf{N})$, $2S_{n-1}=na_{n-1}(n\geq 2,\ n\in\mathbf{N})$, 两式相减, 得 $2a_n=(n+1)a_n-na_{n-1}$, 即 $(n-1)a_n=na_{n-1}$, $\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{n}{n-1}(n\geq 2,\ n\in\mathbf{N})$, 于是有 $\frac{a_2}{a_1}=\frac{2}{1}$, $\frac{a_3}{a_2}=\frac{3}{2}$, $\frac{a_4}{a_3}=\frac{4}{3}$, $\cdots$, $\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{n}{n-1}(n\geq 2,\ n\in\mathbf{N})$. 以上诸式相乘, 得 $a_n=na_1=n(n\geq 2,\ n\in\mathbf{N})$. 又 $a_1=1$, $a_n=n(n\in\mathbf{N})$. 注意 (1) 在利用数列的前 n 项和 S_n 求通项 a_n 时, 结论有两种可能, 一种是 "一分为二", 即 a_1 与 $a_n(n\geq 2,\ n\in\mathbf{N})$ 各有一个表达式, 如例 2; 一种是 "合二为一", 即 a_1 和 $a_n(n\geq 2,\ n\in\mathbf{N})$ 合为一个表达式, 如例 3. (2) 若数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和 $S_n=An^2+Bn+C$, 则当 $C=0$ 时, $\{a_n\}$ 是一个等差数列; 当 $C\neq 0$ 时, 数列 $\{a_n\}$ 不是等差数列, 但从第二项起, 构成一个等差数列.

6. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, (1) 已知 $a_2+a_7+a_8+a_{13}=6$, 求 a_6+a_9. (2) 已知 $S_{11}=66$, 求 a_6. 解 (1) $a_2+a_{13}=a_7+a_8=a_6+a_9$, $a_6+a_9=3$. (2) $S_{11}=\frac{11(a_1+a_{11})}{2}=\frac{11\times 2a_6}{2}=11a_6=66$, $a_6=6$.

7. 项数为奇数的等差数列 $\{a_n\}$ 中, 已知奇数项之和为 12, 偶数项之和为 10, 求它的项数和中间项. 解设有 $2n-1$ 项, 则由题意, 得 $\frac{S_{奇}}{S_{偶}}=\frac{\frac{(a_1+a_{2n-1})n}{2}}{\frac{(a_2+a_{2n-2})(n-1)}{2}}=\frac{n}{n-1}=\frac{12}{10}=\frac{6}{5}$, $n=6$, 故此数列共有 11 项. 又 $S_{奇}-S_{偶}=(a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{11})-(a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{10})$ __________ $=a_1+(a_3-a_2)+(a_5-a_4)+\cdots+(a_{11}-a_{10})=a_1+5d=a_6=12-10=2$ 中间项 $a_6=2$.

8. 等比数列 $\{a_n\}$ 的一些性质. (1) 若 $m+n=p+q$, 则 $a_ma_n=a_pa_q$. (2) 记 $A=a_1+a_2+\cdots+a_n$, $B=a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{2n}$, $C=a_{2n+1}+a_{2n+2}+\cdots+a_{3n}$, 则 A,B,C 成等比数列, 公比为 $q^n(q$ 为 $\{a_n\}$ 的公比).

9. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, 已知前 10 项和为 5, 前 20 项和为 15, 求前 30 项和. 解记 $A=a_1+a_2+\cdots+a_{10}$, $B=a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{20}$, $C=a_{21}+a_{22}+\cdots+a_{30}$, 则 $A=5$, $B=S_{20}-S_{10}=10$. A,B,C 成等比,

$C=\dfrac{B^2}{A}=\dfrac{100}{5}=20$, 故 $S_{30}=A+B+C=35$.

10. 数列的求和方法. 除了直接利用等差、等比数列求和公式之外, 数列的求和还有以下 5 种方法. (1) 通项化归法. 有些数列的求和, 需先将通项变形后, 再利用等差或等比数列的求和公式.

11. 求数列 $1,\ 1+a,\ 1+a+a^2,\ 1+a+a^2+a^3,\ \cdots,\ 1+a+a^2+\cdots+a^{n-1},\ \cdots$的前 n 项和 S_n. 解 (1) 若 $a=1$, 则 $a_n=n$, 于是 $S_n=1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$. (2) 若 $a\neq 1$, 则 $a_n=\dfrac{1-a^n}{1-a}$, 于是 $\begin{cases}S_n=\dfrac{1-a}{1-a}+\dfrac{1-a^2}{1-a}+\dfrac{1-a^2}{1-a}+\cdots+\dfrac{1-a^n}{1-a}=\dfrac{1}{1-a}[n-(a+a^2+a^3+\cdots+a^n)]\\ =\dfrac{1}{1-a}[n-\dfrac{a(1-a^n)}{1-a}].\end{cases}$ (2) 拆项法. 所谓拆项法. 就是将数列的每一项"一拆为二", 即每一项拆成两项之差, 以达到隔项相消之目的.

12. 求和: $1+\dfrac{1}{1+2}+\dfrac{1}{1+2+3}+\cdots+\dfrac{1}{1+2+\cdots+n}(n\in\mathbf{N})$. 解 $a_k=\dfrac{1}{1+2+\cdots+k}=\dfrac{2}{k(k+1)}$. $S_n=2[\dfrac{1}{1\times 2}+\dfrac{1}{2\times 3}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}]=2[(1-\dfrac{1}{2})+(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3})+\cdots+(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1})]=2(1-\dfrac{1}{n+1})=\dfrac{2n}{n+1}$. (3) 错项法. 若在数列 $\{a_n\cdot b_n\}$ 中成等差数列, $\{b_n\}$ 成等比数列, 则可采用错项法求和.

13. 求和: $a+2a^2+3a^3+\cdots+na^n(n\in\mathbf{N})$. 解记 $S_n=a+2a^2+3a^3+\cdots+(n-1)a^{n-1}+na^{n+1}$, 则 $aS_n=2a^2+3a^3+\cdots+(n-2)a^{n-1}+(n-1)a^n+na^{n+1}$, 两式相减, 得 $(1-a)S_n=(a+2a^2+3a^3+\cdots+a^n)-na^{n+1}$. 若 $a=1$, 则 $S_n=1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$; 若 $a\neq 1$, 则 $S_n=\dfrac{a(1-a^n)}{(1-a)^2}-\dfrac{na^{n+1}}{1-a}$. 注意在求等比数列前 n 项和 S_n 时, 若公比 q 是字母, 为避免疏忽, 宜先求 $q=1$ 时的 S_n, 然后求 $q\neq 1$ 时的 S_n. (4) 累差迭加法. 若数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}=a_n+f(n)$, 其中 $f(n)$ 是等差数列或等比数列, 则可用"累差迭加法"求和.

14. 已知数列 6, 9, 14, 21, 30, $\cdots$, 其中相邻两项之差成等差数列, 求它的通项. 解 $a_2-a_1=3$, $a_3-a_2=5$, $a_4-a_3=7$, $\cdots$, $a_n-a_{n-1}=2n-1$, 各项相加得 $a_n-a_1=3+5+7+\cdots+(2n+1)$, $a_n=6+3+5+7+\cdots+(2n+1)=n^2+5(n\in\mathbf{N})$. (5)$\sum$ 求和法. 用 $\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$ 表示 $a_1+a_2+\cdots+a_n$, 有如下性质: $\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k\pm b_k)=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\pm\sum\limits_{k=1}^{n}b_k$, $\sum\limits_{k=1}^{n}ca_k=c\sum\limits_{k+1}^{n}a_k$($c$ 是常数); $\sum\limits_{k=1}^{n}c=nc$($c$ 是常数). 并可利用以下公式: $\sum\limits_{k=1}^{n}k=\dfrac{n(n+1)}{2}$, $\sum\limits_{k=1}^{n}(2k-1)=n^2$, $\sum\limits_{k=1}^{n}(2k)=n^2+n$, $\sum\limits_{k=1}^{n}k^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $\sum\limits_{k=1}^{n}k^3=[\dfrac{n(n+1)}{2}]^2$.

15. 若 $1\times 2^2+2\times 3^2+3\times 4^2+\cdots+n(n+1)^2=\dfrac{n(n+1)}{12}(an^2+bn+c)$ 对 $n\in\mathbf{N}$ 恒成立, 求 a,b,c 的值. 解左边 $=\sum\limits_{k=1}^{n}k(k+1)^2=\sum\limits_{k=1}^{n}k^3+2\sum\limits_{k=1}^{n}k^2+\sum\limits_{k=1}^{n}k=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}+\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{3}+\dfrac{n(n+1)}{2}$ $=\dfrac{n(n+1)}{12}[3n(n+1)+4(2n+1)+6]=\dfrac{n(n+1)}{12}(3n^2+11n+10)$, $a=3$, $b=11$, $c=10$. 【训练题】(一) 等差数列

16. 若数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=2$, $a_{n+1}-a_n+1=0(n\in\mathbf{N})$, 则此数列的通项 a_n 等于 ()

A. n^2+1 B. $n+1$ C. $1-n$ D. $3-n$

17. 若数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是 $a_n=2(n+1)+3$, 则此数列 ()

A. 是公差为 2 的等差数列 B. 是公差为 3 的等差数列 C. 是公差为 5 的等差数列 D. 不是等差数列

18. 若 m, a_1, a_2, n 和 $m, b_1, b_2, n(m \neq n)$ 分别是两个等差数列, 则 $\dfrac{a_2 - a_1}{b_2 - b_1}$ 的值为 ()

A. $\dfrac{2}{3}$　　B. $\dfrac{3}{4}$　　C. $\dfrac{3}{2}$　　D. $\dfrac{4}{3}$

19. 若等差数列 $\{a_n\}$ 的前三项依次为 $a-1$, $a+1$, $2a+3$, 则此数列的通项 a_n 等于 ()

A. $2n-5$　　B. $2n-3$　　C. $2n-1$　　D. $2n+1$

20. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 = 450$, 则 $a_2 + a_8$ 等于 ()

A. 45　　B. 75　　C. 180　　D. 320

21. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_1 + a_4 + a_7 = 39$, $a_2 + a_5 + a_8 = 33$, 则 $a_3 + a_6 + a_9$ 的值是 ()

A. 30　　B. 27　　C. 24　　D. 21

22. 在递增的等差数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_3 + a_6 + a_9 = 12$, $a_3a_6a_9 = 28$, 则通项 a_n 等于 ()

A. $n-2$　　B. $16-n$　　C. $n-2$ 或 $16-n$　　D. $2-n$

23. 若等差数列 $\{a_n\}$ 的公差 d 不为零, 且 $a_1 \neq d$, 前 20 项之和 $S_{20} = 10M$, 则 M 等于 ()

A. $a_6 + a_5$　　B. $a_2 + 2a_{10}$　　C. $2a_{10} + d$　　D. $10a_2 + d$

24. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 已知前 4 项和是 1, 前 8 项和是 4, 则 $a_{17} + a_{18} + a_{19} + a_{20}$ 的值等于 ()

A. 7　　B. 8　　C. 9　　D. 10

25. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 若前 15 项的和 $S_{15} = 90$, 则 a_8 等于 ()

A. 6　　B. $\dfrac{45}{4}$　　C. 12　　D. $\dfrac{45}{2}$

26. (1) 若数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} = \dfrac{3a_n + 2}{3}$, 且 $a_1 = 0$, 则 $a_7 =$__________. (2) 若等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_7 = p$, $a_{14} = q(p \neq q)$, 则 $a_{21} =$__________. (3) 首项为-24 的等差数列从第 10 项开始为正数, 则公差 d 的取值范围是__________. (4) 若等差数列 $\{a_n\}$ 的公差 $d \neq 0$, 且 a_1, a_2 为关于 x 的方程 $x^2 - a_3x + a_4 = 0$ 的两根, 则 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n =$__________.

27. (1) 若 $a, x, b, 2x$ 依次成等差数列, 则 $a : b =$__________. (2) 若 $a, b, \lg 6, 2\lg 2 + \lg 3$ 依次成等差数列, 则 $a =$__________, $b =$__________.

28. 等差数列 $\{a_n\}$ 中, (1) 若 $a_1 + a_3 + a_5 = -1$, 则 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 =$__________. (2) 若 $a_3 + a_{11} = 10$, 则 $a_2 + a_4 + a_{15} =$__________. (3) 若 $a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 34$, $a_2a_5 = 52$, 且 $a_4 > a_2$, 则 a_5__________. (4) 若 $a_1 - a_4 - a_8 - a_{12} + a_{15} = 2$, 则 $a_3 + a_{13} =$__________.

29. 等差数列 $\{a_n\}$ 中. (1) 若 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 30$, $a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} = 80$, 则 $a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} + a_{15} =$__________ (2) 若 $a_2 + a_7 + a_{12} = 21$, 则前 13 项和 $S_{13} =$__________. (3) 若前 10 项和 $S_{10} = 100$, 前 20 项和 $S_{20} = 400$, 则前 30 项和 $S_{30} =$__________. (4) 若 $a_{11} = 20$, 则前 21 项和 $S_{21} =$__________.

30. (1) 若一个等差数列的前 10 项和是前 5 项和的 4 倍, 则其首项与公差之比等于__________. (2) 等差数列 $\{a_n\}$ 中, 若前 100 项之和等于前 10 项和的 100 倍, 则 $\frac{a_{100}}{a_{10}}=$__________. (3) 若 100 个连续整数之和在 13400 与 13500 之间, 则此连续整数中最小的一个等于__________.

31. (1) 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_m=p$, $a_n=q(m\neq n)$, 求 a_{m+n}. (2) 若 $\{a_n\}$ 是等差数列, 数列 $\{b_n\}$ 满足: $b_n=(\frac{1}{2})^{a_n}$, $b_1+b_2+b_3=\frac{21}{8}$, $b_1b_2b_3=\frac{1}{8}$, 求通项公式 a_n.

32. (1) 已知等差数列的第 1 项和第 4 项之和为 10, 且第 2 项减去第 3 项的差为 2, 求此数列的前 n 项之和. (2) 求所有能被 7 整除且被 11 除余 2 的三位数之和. (3) 首项 $a_1\neq 0$ 的等差数列 $\{a_n\}$ 中, 已知前 9 项和与前 4 项和之比 $S_9:S_4=81:16$, 求 $a_9:a_4$ 的值. (4) 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 已知公差 $d=1$, 前 98 项和 $S_{98}=137$, 求 $a_2+a_4+a_6+a_8+\cdots+a_{94}+a_{96}+a_{98}$. (5) 若等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1+a_3+a_5+a_7+a_9=\frac{25}{2}$, $a_2+a_4+a_6+a_8+a_{10}=15$, 求前 20 项之和 S_{20}.

33. 若三角形三边长成等差数列, 周长为 36, 内切圆周长为 6π, 则此三角形是 ()

A. 正三角形 B. 等腰三角形, 但不是直角三角形 C. 直角三角形, 但不是等腰三角形 D. 等腰直角三角形

34. 若 a,b,c 的倒数依次成等差数列, 且 a,b,c 互不相等, 则 $\frac{a-b}{b-c}$ 等于 ()

A. $\frac{c}{a}$ B. $\frac{a}{b}$ C. $\frac{a}{c}$ D. $\frac{b}{c}$

35. 若等差数列 $\{a_n\}$ 的公差 $d=\frac{1}{2}$, $a_1+a_3+a_5+a_7+a_9+\cdots+a_{95}+a_{97}+a_{99}=60$, 则前 100 项之和 S_{100} 等于 ()

A. 120 B. 145 C. 150 D. 170

36. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $S_m=S_n=l(m\neq n)$, 则 a_1+a_{m+n} 等于 ()

A. mnl B. $(m+n)l$ C. 0 D. $(m+n-1)l$

37. 若等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $3a_8=5a_{13}$, 且 $a_1>0$, 则前 n 项之和 S_n 的最大值是 ()

A. S_{10} B. S_{11} C. S_{20} D. S_{21}

38. 若一个等差数列共有 $2n+1$ 项, 其中奇数项之和为 290, 偶数项之和为 261, 则第 $n+1$ 项为 ()

A. 30 B. 29 C. 28 D. 27

39. 记两个等差数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的前 n 项和分别为 S_n 和 T_n, 且 $\frac{S_n}{T_n}=\frac{7n+1}{4n+27}(n\in\mathbf{N})$, 则 $\frac{a_{11}}{b_{11}}$ 等于 ()

A. $\frac{7}{4}$ B. $\frac{3}{2}$ C. $\frac{4}{3}$ D. $\frac{78}{71}$

40. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, (1) 若前三项之和为 12, 最后三项之和为 75, 各项之和为 145, 则 $n=$__________, $a_1=$__________, 公差 $d=$__________. (2) 若前四项之和为 21, 末四项之和为 67, 前 n 项之和为 286, 则该数列的项数为__________.. (3) 若 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{15}=a$, $a_{n-11}+a_{n-13}+\cdots+a_n=b$, 则 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=$__________. (4) 若前 9 项和为 18, 前 n 项和为 240, 且 $a_{n-4}=30$, $=30(n>9)$, 则 $n=$__________.

41. (1) 若等差数列 18, 15, 12, ⋯的前 n 项和最大, 则 $n =$__________. (2) 若等差数列-21, -19, -17, ⋯的前 n 项和最小. 则 $n =$__________.

42. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 弱 $a_9 + a_{10} = a$, $a_{29} + a_{30} = b$, 则 $a_{99} + a_{100} =$__________.

43. 两个等差数列: 2, 5, 8, ⋯, 197 和 2, 7, 12, ⋯, 197 中, (1) 有多少相同的项. (2) 求这些相同项之和.

44. (1) 求和: $100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + \cdots + 4^2 - 3^2 + 2^2 - 1^2$. (2) 若 $\{a_n\}$ 是等差数列, 求证: $a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 - a_4^2 + \cdots + a_{2n-1}^2 - a_{2n}^2 = \dfrac{n}{2n-1}(a_1^2 - a_{2n}^2)$.

45. 若四个数依次成等差数列, 且四个数的平方和为 94, 首尾两数之积比中间两数之积少 18, 求此四数.

46. (1) 已知 $\lg a, \lg b, \lg c$ 与 $\lg a - \lg 2b$, $\lg 2b - \lg 3c$, $\lg 3c - \lg a$ 都是等差数列, 试求 a, b, c 之比. (2) 已知 $\triangle ABC$ 的三边成等差数列, 且最大角与最小角之差为 $90°$, 求证: 其三边之比为 $(\sqrt{7}+1) : \sqrt{7} : (\sqrt{7}-1)$. (3) 在 $\triangle ABC$ 中. 已知 $\lg\tan A$, $\lg\tan B$, $\lg\tan C$ 依次成等差数列, 求 $\angle B$ 的取值范围.

47. (1) 若等差数列的第 p 项是 q, 第 q 项是 $p(p \neq q)$, 求它的第 $p+q$ 项及前 $p+q$ 项的和. (2) 在等差数列中, 若前 p 项的和与前 q 项的和相等求前 $p+q$ 项的和.

48. (1)—等差数列共有奇数项, 且奇数项之和为 80, 偶数项之和为 75, 求此数列的中间项与项数. (2) 已知一个等差数列的项数 n 为奇数, 求其奇数项之和与偶数项之和的比.

49. (1) 已知等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = -60$, $a_{17} = -12$, 记 $b_n = |a_n|$, 求数列 $\{b_n\}$ 前 30 项之和. (2) 若等差数列 $\{a_n\}$ 的通项为 $a_n = 10 - 3n$, 求 $|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$.

50. 求关于 x 的方程 $x^2 - (3n+2)x + 3n^2 - 74 = 0(n \in \mathbf{Z})$ 的所有实数根之和.

51. (1) 若一等差数列 $\{a_n\}$ 的前 m 项、前 n 项之和分别为 S_m 和 S_n, 且 $S_m : S_n = m^2 : n^2(m \neq n)$, 求证: $a_m : a_n = (2m-1) : (2n-1)$. (2) 已知等差数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 的前 $2n-1$ 项之和分别为 S_{2n-1} 和 S'_{2n-1}. ① 求证: $a_n : b_n = S_{2n-1} : S'_{2n-1}$; ② 如果 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 的前 n 项之和的比为 $\dfrac{5n+1}{3n-1}$, 求 $a_{15} : b_{15}$.

52. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 首项是 a, 公差为 d, $a_4 = 84$, 且前 10 项之和 S_{10} 与前 11 项之和 S_{11} 分别满足 $S_{10} > 0$, $S_{11} < 0$. (1) 求公差 d 的取值范围. (2) 求使 $a_n < 0$ 的最小的 n 值. (3) 记 $\{S_1, S_2, S_3, \cdots, S_n, \cdots\}$ 中的最大值为 M, 求 M 的取值范围.

53. (1) 已知一个数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = 2n(n+1)$, 求此数列的第 100 项. (2) 已知数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和 $S_n = na_n - n^2 + n$, 求 $a_{100} - a_{99}$. (3) 已知数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和 $S_n = 2n^2 - 3n - 1$, 求此数列的通项公式. (4) 已知 $\{a_n\}$ 是首项为 a 的等差数列, 记 $b_n = \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$, 求证: 数列 $\{b_n\}$ 是等差数列. (5) 已知等差数列 $\{a_n\}$ 及关于 x 的方程 $a_i x^2 + 2a_{i+1}x + a_{i+2} = 0(i = 1, 2, \cdots, n, n \in \mathbf{N})$, 其中 a_1 及公差 d 均为非零实数. ① 求证: 这些方程有公共根; ② 若方程的另一根为 a_i, 求证: $\dfrac{1}{a_1+1}$, $\dfrac{1}{a_2+1}$, ⋯, $\dfrac{1}{a_n+1}$ 依次成等差数列.

54. 已知 $a_{n+1} = \dfrac{2a_n}{a_n+2}$, $a_1 = 2$. (1) 求证: 数列 $\{\dfrac{1}{a_n}\}$ 是等差数列. (2) 求 a_5. (3) 求 $\{a_n\}$.

55. 若一个首项为 1 的等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和与其后的 $2n$ 项和之比是与 n 无关的定值, 试求此数列的通项公式. (二) 等比数列

56. 若公差不为零的等差数列的第 2, 3, 6 项依次是一等比数列的连续三项, 则这个等比数列的公比等于 ()

A. $\frac{3}{4}$　　B. $-\frac{1}{3}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. 3

57. 若自然数 m, n, p, r 满足 $m+n=p+r$, 则等比数列 $\{a_n\}$ 必定满足 ()

A. $\frac{a_m}{a_p}=\frac{a_r}{a_n}$　　B. $\frac{a_m}{a_n}=\frac{a_r}{a_p}$　　C. $a_m+a_n=a_p+a_r$　　D. $a_m-a_n=a_p-a_r$

58. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_9=-2$, 则此数列前 17 项之积等于 ()

A. 2^{16}　　B. -2^{16}　　C. 2^{17}　　D. -2^{17}

59. 已知数列 $\{a_n\}$ 是公比 $q \neq 1$ 的等比数列, 则在 "① $\{a_n a_{n+1}\}$, ② $\{a_{n+1}-a_n\}$, ③ $\{a_n^3\}$, ④ $\{na_n\}$" 这四个数列中, 成等比数列的个数是 ()

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

60. 某商品欲分两次提价, 提价方案有三种: 方案甲是先提价 $a\%$, 再提价 $b\%$; 方案乙是先提价 $b\%$, 再提价 $a\%$; 方案丙是两次均提价 $\frac{a+b}{2}\%(a>b>0)$, 则提价最多的方案是 ()

A. 甲　　B. 乙　　C. 丙　　D. 三种方案一样

61. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, (1) 若公比为 q, $a_n=a_m \cdot x$, 则 $x=$__________. (2) 若 $a_5=2$, $a_{10}=10$, 则 $a_{15}=$__________. (3) 若 $a_4=5$, $a_8=6$, 则 $a_2a_{10}=$__________. (4) 若 $a_1a_2\cdots a_9=512$, 则 $a_5=$__________.

62. (1) 若 $\{a_n\}$ 是等比数列, 且 $a_n>0$, $a_2 \cdot a_4+2a_3 \cdot a_5+a_4 \cdot a_6=25$, 则 $a_3+a_5=$__________. (2) 已知数列 $\{a_n\}$ 成等差数列, 且公差 $d \neq 0$, 又 a_1, a_3, a_9 依次成等比数列, 则 $\frac{a_1+a_3+a_9}{a_2+a_4+a_{10}}=$__________. (3) 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $a_1+a_2+a_3=-3$, $a_1a_2a_3=8$, 则 $a_4=$__________. (4) 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, 若连续四项之积为 16, 中间两项之和为 5, 则公比 $q=$__________. (5) 若数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$, $\frac{a_n}{a_n+a_{n+1}}=2(n \in \mathbf{N})$, 则它的通项 $a_n=$__________.

63. (1) 若依次成等差数列的三实数 a, b, c 之和为 12, 而 $a, b, c+2$ 又依次成等比数列, 则 a 的值等于__________. (2) 在 2 和 30 之间插入两个正数, 使三个数成等比数列, 后三个数成等差数列, 则这插入的两数是__________. (3) 若 a, b, c 依次成等差数列 (公差不为零), c, a, b 又依次成等比数列, 则 $a:b:c=$__________. (4) 一等比数列 $\{a_n\}$ 的前三项依次为 a, $2a+2$, $3a+3$, 且 $a_n=-13\frac{1}{2}$, 则 $n=$__________. (5) 已知各项都为正数的等比数列的任何一项都等于它后面两项的和, 则公比 $=$__________.

64. 某工厂在 1997 年底制订计划要使 2010 年的总产值在 1997 年总产值基础上翻三番, 则年总产值的平均增长率为 ()

A. $3^{\frac{1}{12}}-1$　　B. $3^{\frac{1}{13}}-1$　　C. $8^{\frac{1}{12}}-1$　　D. $8^{\frac{1}{13}}-1$

65. 若 $\{a_n\}$ 是各项都大于零的等比数列, 且公比 $q \neq 1$, 则 (a_1+a_4) 与 (a_2+a_3) 的大小关系是 ()

A. $a_1+a_4<a_2+a_3$　　B. $a_1+a_4>a_2+a_3$　　C. $a_1+a_4=a_2+a_3$　　D. 不能确定的

66. 若正数 a, b, c 依次成公比大于 1 的等比数列, 则当 $x>1$ 时, $\log_a x, \log_b x, \log_c x()$

A. 依次成等差数列　B. 依次成等比数列　C. 各项的倒数依次成等差数列　D. 各项的倒数依次成等比数列

67. 若 $2^a=3$, $2^b=6$, $2^c=12$, 则依次 ()

A. 成等差数列, 但不成等比数列　B. 成等比数列, 但不成等差数列　C. 成等差数列, 又成等比数列　D. 不成等差数列, 也不成等比数列

68. 在三棱台 $EFG-E_1F_1G_1$ 中, 分别过点 E, F_1, G 和点 G, E_1, F_1 作两个截面, 将此棱台截成三个棱锥, 则这三个棱锥的体积 ()

A. 成等差数列, 但不成等比数列　B. 成等比数列, 但不成等差数列. (O 成等差数列, 也成等比数列. (D) 不成等差数列, 也不成等比数列.

69. 某厂去年产值为 a, 计划在今后五年内每年比上年产值增长 10(A)1.1^4a. (B)1.1^5a

C. $11(1.1^5-1)a$　D. $10(1.1^6-1)a$

70. 某人从 2006 年起, 每年 1 月 1 日到银行新存人 a 元 (一年定期), 若年利率为 r 保持不变, 且每平到期存款均自动转为新的一年定期, 到 2010 年 1 月 1 日将所有存款及利息全部取回, 他可取回的钱数 (单位为元) 为 ()

A. $a(1+r)^5$　B. $\frac{a}{r}[(1+r)^5-(1+r)]$　C. $a(1+r)^6$　D. $\frac{a}{r}[(1+r)^6-(1+r)]$

71. 若数列前 n 项的和 $S_n=2^n-1$, 则此数列舒数项的前 n 项的和是 ()

A. $\frac{1}{3}(2^{n+1}-1)$　B. $\frac{1}{3}(2^{n+1}-2)$　C. $\frac{1}{3}(2^{2n}-1)$　D. $\frac{1}{3}(2^{2n}-2)$

72. 若等比数列的前 n 项和 $S_n=4^n+a$, 则 a 的值等于 ()

A. -4　B. -1　C. 0　D. 1

73. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_1+a_2+a_3=6$, $a_2+a_3+a_4=-3$, 则 $a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8$ 等于 ()

A. $\frac{21}{16}$　B. $\frac{19}{16}$　C. $\frac{9}{8}$　D. $\frac{3}{4}$

74. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, 已知对任意自然数 n, $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=2^n-1$, 则 $a_1^2+a_2^2+a_3^2+\cdots+a_n^2$ 等于 ()

A. $(2^n-1)^2$　B. $\frac{1}{3}(2^n-1)$　C. 4^n-1　D. $\frac{1}{3}(4^n-1)$

75. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, (1) 若前 n 项和为 S_n, 且 $a_3=3S_2+2$, $a_4=3S_3+2$, 则公比等于__________. (2) 若公比等于 2, 且前 4 项之和等于 1, 那么前 8 项之和等于__________. (3) 若第一、二、三这三项之和为 168, 第四、五、六这三项之和为 21, 则公比 $q=$__________, 首项 $a_1=$__________. (4) 若 $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=31$, $a_2+a_3+a_4+a_5+a_6=62$, 则其通项公式 $a_n=$__________.

76. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 各项均为正数, 数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n=\log_2 a_n$, 且 $b_1+b_2+b_3=3$, $b_1b_2b_3=-3$, 求通项 a_n.

77. 已知 a,b 为两个不等的正数, 且 a,x,y,b 依次成等差数列, a,m,n,b 依次成等比数列, 试比较 $x+y$ 与 $m+n$ 的大小.

78. (1) 若 $\sin 2x$ 与 $\sin x$ 分别是 $\sin\theta$ 与 $\cos\theta$ 的等差中项和等比中项, 求 $\cos 2x$ 的值. (2) 已知 a,b,c 依次成等比数列, 且 x,y 分别是 a,b 与 b,c 的等差中项, 求 $\dfrac{a}{x}+\dfrac{c}{y}$ 的值.

79. (1) 某工厂产量第-年比上一年增加 $a\%$, 第二年又增加 $b\%$, 为使连续二年的平均增产率为 $c\%$, 问: 第三年比第二年应再增加百分之几? (2) 从盛满 a 升纯酒精的容器里倒出 b 升, 然后用水加满, 再倒出 b 升, 再用水加满, 这样连续倒了 n 次, 问: 此时容器里还有多少纯酒精? (3) 某市人口 1997 年底预计为 20 万, 人均住房面积 8m2, 在 2001 年底达到人均住房面积 10m2. 如果该市计划将每年人口平均增长率控制在 1%, 那么要实现上述计划, 这个城市平均每年至少要新增住房面积多少万平方米? (以万平方米为单位, 保留两位小数)

80. (1) 有四个数, 其中前三个数成等差数列, 后三个数成等比数列, 且第一个数与第四个数的和是 16, 第二个数与第三个数的和是 12, 求这四个数. (2) 有四个数, 其中前三个成等比数列, 其积为 216, 后三个成等差数列, 其和为 12, 求这四个数. (3) 七个实数排成-排, 奇数项成等差数列, 偶数项成等比数列, 且奇数项的和减去偶数项的积, 其差为 42, 首项、尾项与中间项之和为 27, 求中间项.

81. 已知公差不为零的等差数列 $\{a_n\}$ 与递增的等比数列 $\{b_n\}$ 有如下关系: $a_1=b_1=1$, $a_3=b_3$, $a_7=b_5$. 求: (1)$\{a_n\}$ 前 n 项之和 S_n. (2)$\{b_n\}$ 的通项公式.

82. 已知数列 $\{a_n\}$ 是等比数列, 其首项为 10, 又 $b_n=\lg a_n$, 且数列 $\{b_n\}$ 的前 7 项之和 S_7 最大, $S_7\neq S_8$, 求 $\{a_n\}$ 的公比 q 的取值范围.

83. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 与等差数列 $\{b_n\}$ 满足 $a_1>0$, $\dfrac{a_2}{a_1}>0$, $b_2-b_1>0$, 求证: 一定存在实数 a, 使 $\log_a a_n-b_n$ 与 n 无关.

84. (1) 求数列 $1,\ 1-2,\ 1-2+4,\ 1-2+4-8,\ 1-2+4-8+16,\ \cdots$的一个通项公式. (2) 求数列 $\dfrac{1}{2}$, $2\dfrac{3}{4}$, $4\dfrac{7}{8}$, $6\dfrac{15}{16}$, $\cdots$前 n 项的和 S_n. (3) 求和: $4^n+3\times 4^{n-1}+3^2\times 4^{n-2}+\cdots+3^{n-1}\times 4+3^n(n\in\mathbf{N})$. (4) 求和: $S=a^n+a^{n-1}b+a^{n-2}b^2+\cdots+a^{n-r}b^r+\cdots+ab^{n-1}+b^n(a\neq 0,\ b\neq 0,\ n\in\mathbf{N})$. (5) 若 $\lg x+\lg x^2+\cdots+\lg x^{10}=110$, 求 $\lg x+\lg^2 x+\cdots+\lg^{10} x$ 的值.

85. 已知一个等比数列的前项和为 10, 前 20 项和为 30, 求其前 50 项的和.

86. (1) 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_1=1$, 且有偶数项. 若其奇数项之和为 85, 偶数项之和为 170, 求公比 q 及项数. (2) 各项为正的等比数列 $\{a_n\}$ 中, 已知其项数为偶数, 且它的所有项之和等于它的偶数项之和的 4 倍, 又第二项与第四项之积等于第三项与第四项之和的 9 倍. 求: ① a_1 及 q; ② 使 $\{\lg a_n\}$ 的前 n 项之和最大时的 n 值. (3) 已知等比数列各项均为正数, 前 n 项和为 80, 其中数值最大的项为 54, 前 $2n$ 项和为 6560, 求此数列的公比.

87. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的公比 $q>1$, 其第 17 项的平方等于第 24 项, 求使 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n>\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}$ 成立的自然数 n 的取值范围.

88. (1) 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=4-4\times 2^{-n}(n\in\mathbf{N})$, 求证: $\{a_n\}$ 成等比数列. (2) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=2$, $a_{n+1}=2(a_1+a_2+\cdots+a_n)(n\in\mathbf{N})$, 求证: a_2, a_3, $\cdots$成等比数列.

89. (1) 已知数列 $\{a_n\}$ 的首项为 1, 从第二项起每项都是它前面各项之和, 求 $\{a_n\}$ 的通项公式及其前 n 项之和. (2) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=3$, $a_na_{n+1}=(\dfrac{1}{2})^n(n\in\mathbf{N})$, 求此数列前 $2n$ 项之和.

90. (1) 在数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_1=b(b\neq 0)$, 且前 n 项和 S_1, S_2, $\cdots$, $S_n\cdots$成公比为 q 的等比数列 $(q\neq 1)$, 求证: 数列 $a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,\cdots$, 也是一个等比数列, 并求其公比. (2) 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项之和 $S_n=p^n+q(p,q$ 为常数且 $p\neq 0)$, 求证: 当 $q=-1$ 且 $p\neq 1$ 时, $\{a_n\}$ 成等比数列, 反之亦真.

91. 已知关于 x 的二次方程 $a_nx^2-a_{n+1}x+1=0(n\in\mathbf{N})$ 的两根 α,β 满足 $6\alpha-2\alpha\beta+6\beta=3$, 且 $a_1=\dfrac{2}{3}$. (1) 试 a_n 用表示 a_{n+1}. (2) 求证: $\{a_n-\dfrac{2}{3}\}$ 是等比数列. (3) 当 $a_1=\dfrac{7}{6}$ 时, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式. (三) 数列求和

92. 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是 $a_n=a^n+\lg b^n(a\neq 0,\, b>0)$, 求此数列的前 n 项之和 S_n.

93. (1) 求数列 1, $(1+2)$, $(1+2+3)$, $(1+2+3+4)$, $(1+2+3+4+5)$, $\cdots$的前 n 项之和. (2) 求数列 1, $(1+2)$, $(1+2+2^2)$, $\cdots$, $(1+2+2^2+\cdots+2^{n-1})$, $\cdots$的前 n 项之和. (3) 已知数列 1, $1+a$, $1+a+a^2$, $1+a+a^2+a^3$, $\cdots$. 求: ① 其通项 a_n; ② 前 n 项之和 S_n. (4) 已知数列 2, 2^2+2^3, $2^4+2^5+2^6$, $2^7+2^8+2^9+2^{10}$, $\cdots$. 求: ① 前 n 项和 S_n; ② 通项公式 a_n.

94. 给出数表 1, 2, 3, $\cdots$, n, 2, 4, 6, $\cdots$, $2n$, 3, 6, 9, $\cdots$, $3n$, $\cdots\cdots n$, $2n$, $3n$, $\cdots$, n^2. 已知表中所有数之和为 36100, 求 n.

95. 给出数表 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, $\cdots\cdots$(1) 前 n 行共有几个数? (2)n 行的第一个数和最后一个数各是多少? (3) 求第 n 行各数之和. (4) 求前 n 行各数之和. (5) 数 100 是第几行的第几个数?

96. 用拆项法解下列各题: (1) 求和: $\dfrac{1}{2^2-1}+\dfrac{1}{4^2-1}+\dfrac{1}{6^2-1}+\cdots+\dfrac{1}{(2n)^2-1}$. (2) 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$, 它的前 n 项之和 $S_n=9$, 求项数 n. (3) 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数, 求证: $\dfrac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\dfrac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}}=\dfrac{n-1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}}$. (4) 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的各项均不为零, 求证: $\dfrac{1}{a_1a_2}+\dfrac{1}{a_2a_3}+\cdots+\dfrac{1}{a_{n-1}a_n}=\dfrac{n-1}{a_1a_n}$. (5) 求数列 $\dfrac{2^2+1}{2^2-1}$, $\dfrac{3^2+1}{3^2-1}$, $\dfrac{4^2+1}{4^2-1}$, $\cdots$的前 n 项之和. (6) 求和: $\dfrac{1}{1\times 2\times 3}+\dfrac{1}{2\times 3\times 4}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}(n\in\mathbf{N})$.

97. 用“错项法”解下列各题: (1) 求和: $1\times 2+4\times 2^2+7\times 2^3+\cdots+(3n-2)\times 2^n$. (2) 求数列 $\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{3}{4}$, $\dfrac{5}{8}$, $\dfrac{7}{16}$, $\dfrac{9}{32}$, $\cdots$的前 n 项之和 S_n. (3) 求证: $\sqrt{2}\times\sqrt[4]{4}\times\sqrt[8]{8}\cdot\cdots\cdot\sqrt[2^n]{2^n}<4(n\in\mathbf{N})$.

98. 已知 $a>0$, $a\neq 1$, 数列 $\{a_n\}$ 是首项为 a, 公比也为 a 的等比数列, 令 $b_n=a_n\lg a_n(n\in\mathbf{N})$. (1) 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项之和 S_n. (2) 若数列 $\{b_n\}$ 中的每一项总小于它后面的项, 求 a 的取值范围.

99. 利用记号“$\sum$”计算下列各题: (1)$1\times 2+2\times 3+3\times 4+\cdots+n(n+1)$. (2)$1\times 2+3\times 4+5\times 6+\cdots+(2n-1)(2n)$. (3)$1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2$. (4)$1\times 2\times 3+2\times 3\times 4+4\times 5\times 6+\cdots+n(n+1)(n+2)$.

100. 若 $1\times 2^2+2\times 3^2+3\times 4^2+\cdots+n(n+1)^2=\dfrac{n(n+1)}{12}(an^2+bn+c)$ 对任何自然数 n 恒成立, 求 a,b,c 的值.

101. 已知数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 满足 $b_n=\dfrac{a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n}{1+2+\cdots+n}$, 求证: 若 $\{a_n\}$ 为等差数列, 则 $\{b_n\}$ 也为等差数列, 反之亦真.

102. 已知 $f(x)=\sqrt{x^2-4}(x\le -2)$. (1) 求 $f(x)$ 的反函数 $f^{-1}(x)$). (2) 记 $a_1=1$, $a_n=-f^{-1}(a_{n-1})$, 求 a_n. (3) 如果 $b_1=\dfrac{1}{a_1+a_2}$, $b_2=\dfrac{1}{a_2+a_3}$, $b_3=\dfrac{1}{a_3+a_4}$, $\cdots$, $b_n=\dfrac{1}{a_n+a_{n+1}}$, $\cdots$, 求数列 $\{b_n\}$ 前 n 项的和 S_n.

103. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$, $a_{n+1}=S_n+(n+1)(n\in\mathbf{N})$. (1) 用 a_n 表示 a_{n+1}. (2) 求证: 数列 $\{a_n+1\}$ 是等比数列. (3) 求和 S_n. 二、数列的极限【典型题型和解题技巧】

104. 数列极限的主要类型. (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(n)}{\varphi(n)}$ 型, 其中 $f(n)$ 和 $\varphi(n)$ 都是关于 n 的多项式. ① 方法. 分子、分母同时除以 n 的最高次. ② 结论. 若分子的最高次数 $<$ 分母的最高次数, 则极限为零; 若分子的最高次数 $=$ 分母的最高次数, 则极限为常数 (分子、分母最高次项系数之比); 若分子的最高次数 $>$ 分母的最高次数, 则极限不存在.

105. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{n^2+2n+2}{n+1}-an+b)$, 其中 a,b 为常数. 解　原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1-a)n^2+(2-a+b)n+b+2}{n+1}$, 若 $a\ne 1$, 则极限不存在; 若 $a=1$, 则原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(b+1)n+b+2}{n+1}=b+1$.

106. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1}{n^2+1}+\dfrac{2}{n^2+1}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+1})$. 错解原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2+1}+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{n^2+2}+\cdots+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n^2+1}=0+0+\cdots+0=0$. 分析在 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n$ 存在的前提下, 有 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n+\lim\limits_{n\to\infty}b_n$, 并可推广到有限项, 这里特别重要的是有限项, 即确定了的, 不随 n 的变化而变化的有限项. 本例括号内共有 n 项, 随着 $n\to\infty$, 项数也趋向于 ∞, 因此上述公式此处不适用. 实际上, 按上面的解法, 应得到 $\infty\cdot 0$, 这是一个不定型, 不能认为 $\infty\cdot 0=0$. 正确的解法: 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(n+1)}{2(n^2+1)}=\dfrac{1}{2}$. (2) 可有理化型.

107. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})$. 解原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}$ ——————— $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{2}{\sqrt{n}}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}=\dfrac{0}{1+1}=0$. 注意有时候, 分子和分母需要同时有理化才能求解. 如 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$, 读者不妨试解之 (极限为 1).

108. 若 $a\ne -1$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-a^n}{1+a^n}$. 解若 $|a|<1$, 则原式 $=\dfrac{1-\lim\limits_{n\to\infty}a^n}{1+\lim\limits_{n\to\infty}a^n}=1$; 若 $a=1$, 则原式 $=0$; 若 $|a|>1$, 则原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\frac{1}{a})^n-1}{(\frac{1}{a})^n+1}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{a})^n-1}{\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{a})^n+1}=-1$. 2 无穷等比数列 (公比 q 满足 $|q|<1$) 的所有项之和. 对无穷等比数列 $a_1,a_1q,a_1q^2,a_1q^3,\cdots(|q|<1)$ 的所有项之和 (或谓之各项之和) 可用公式 $\dfrac{a_1}{1-q}$; 而对于以 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n(S_n$ 为 $|q|<1$ 的无穷等比数列的前 n 项之和) 的形式出现的问题, 大可不必先求 S_n, 再求极限, 也可直接用上述公式.

109. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1+a_2+a_3=18$, $a_2+a_3+a_4=-9$, 记 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$. 解设分比为 q, 则由已知, $a_1(1+q+q^2)=18$, $a_2(1+q+q^2)=-9$, 故 $\dfrac{a_2}{a_1}=-\dfrac{1}{2}$, 于是 $q=-\dfrac{1}{2}$, $a_1=24$,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \lim_{n\to\infty} \frac{24\times[1-(-\frac{1}{2})^n]}{1-(-\frac{1}{2})} = \frac{24}{1-(-\frac{1}{2})} = 16.$$

110. 数列极限的证明.

111. 用定义证明数列 $\{\frac{n^2-1}{n^2+1}\}$ 的极限为 1. 证明设 ε 是任意小的正数, 要使 $|\frac{n^2-1}{n^2+1}-1|<\varepsilon$, 只要 $|\frac{2}{n^2+1}|<\varepsilon$, 即 $\frac{2}{n^2+1}<\varepsilon$, 即 $n^2>\frac{2}{\varepsilon}-1$, $n>\sqrt{\frac{2-\varepsilon}{\varepsilon}}$. 取 $N=[\sqrt{\frac{2-\varepsilon}{\varepsilon}}]$, 则当 $n>N$ 时, 必有 $|\frac{n^2-1}{n^2+1}-1|<\varepsilon$, 故 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2-1}{n^2+1}=1$.

112. 用极限的定义证明: $\lim\limits_{n\to\infty} q^n=0(|q|<1)$. 证明设 ε 是任意小的正数, 要使 $|q^n-0|<\varepsilon$, 即 $|q|^n<\varepsilon$, 即 $n\lg|q|<\lg\varepsilon$. $\lg|q|<0$, $n>\frac{\lg\varepsilon}{\lg|q|}$. 取 $N=[\frac{\lg\varepsilon}{\lg|q|}]$, 则当 $n>N$ 时, 必有 $|q^n-0|<\varepsilon$, 故 $\lim\limits_{n\to\infty} q^n=0$. 【训练题】(一) 数列极限的概念和运算法则

113. 若非常数的数列 $\{a_n\}$, 当 $n\to\infty$ 时的极限是 M, 则在区间 $(M-\varepsilon,M+\varepsilon)$($\varepsilon$ 为任意小的正数) 内, 这个数列的项数为 ()

A. 无限多项 B. 有限项 C. 零项 D. 有限项与无限多项都有可能

114. 无穷数列 $\{a_n\}$ 的极限为 A, 指的是: 对任意的 $\varepsilon>0$, 总能在 $\{a_n\}$ 中找到一项 a_N, 使 ()

A. a_N 以后至少有一项满足 $|a_n-A|<\varepsilon$ B. a_N 以后有有限项满足 $|a_n-A|<\varepsilon$ C. a_N 以后有无限项满足 $|a_n-A|<\varepsilon$ D. a_N 以后的所有项都满足 $|a_n-A|<\varepsilon$

115. 记 $a_1+a_2+\cdots+a_n=S_n$, 则数列 $\{a_n\}$ 有极限是数列 $\{S_n\}$ 有极限的 ()

A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件 C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

116. 观察下面叫个数列: $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \cdots(-1)^{n-1}\frac{1}{n}, \cdots$; $\frac{1}{a}, \frac{1}{a+d}, \frac{1}{a+2d}, \frac{1}{a+3d}, \cdots, \frac{1}{a+(n-1)d}$(分母不为零), $\cdots$; $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \cdots, \frac{n+1}{n}, \cdots$; -2, $\frac{3}{2}, -\frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \cdots, (-1)^n\frac{n+1}{n}, \cdots$. 其中存在极限的数列的个数为 ()

A. 4 B. 3 C. 2 D. 1

117. (1) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n-3}{a_n+2}=\frac{4}{9}$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=$__________. (2) 若数列 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$ 均存在极限, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}(3a_n+4b_n)=8$, $\lim\limits_{n\to\infty}(6a_n-b_n)=1$. 则 $\lim\limits_{n\to\infty}(3a_n+b_n)=$__________.

118. 在数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $a_n=\frac{n+2}{2n}$, 则 $|a_n-\frac{1}{2}|=$__________; 要使 $n>N$ 时, 有 $|a_n-\frac{1}{2}|<0.001$, 则 N 的最小值是__________.

119. 若数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=\sqrt{6}$, $a_{n+1}=\sqrt{a_n+6}(n\in\mathbf{N})$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在, 求 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

120. 用极限定义证明: (1) 数列 $\{\frac{n}{2n+1}\}$ 的极限为 $\frac{1}{2}$. (2)$\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{2^n})=1$. (3)$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=0$. (二)$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^m}(m\in\mathbf{N})$

121. $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{n^2+1}{n^3}+\dfrac{n^2+2}{n^3}+\cdots+\dfrac{n^2+n}{n^3})$ 的值为 ()

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 不存在

122. 若 $f(n)=1+2+\cdots+n(n\in\mathbf{N})$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(n^2)}{[f(n)]^2}$ 值是 ()

A. 2　　B. 0　　C. 1　　D. $\dfrac{1}{2}$

123. 若 S_n 是无穷等差数列 1, 3, 5, $\cdots$的前 n 项之和, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{S_n}{S_{2n}}$ 的值等于 ()

A. $\dfrac{1}{4}$　　B. 1　　C. 2　　D. 4

124. 若数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n=(1+\dfrac{1}{2})(1+\dfrac{1}{3})(1+\dfrac{1}{4})\cdots(1+\dfrac{1}{n+1})$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n}$ 的值等于 ()

A. 0　　B. $\dfrac{1}{2}$　　C. 1　　D. 不存在

125. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(k-2)n^2+4n}{2(n^2+7)}=2$, 则实数 k 的值等于 ()

A. 4　　B. 6　　C. 8　　D. 0

126. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{an^2+cn}{bn^2+c}=2$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{bn+c}{cn+a}=3$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{an^2+bn+c}{cn^2+an+b}=$()

A. $\dfrac{1}{6}$　　B. $\dfrac{2}{3}$　　C. $\dfrac{3}{2}$　　D. 6

127. 数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(n+1-\sqrt{n^2+n})$ 是 ()

A. 不存在　　B. $\dfrac{1}{2}$　　C. 1　　D. $\dfrac{3}{2}$

128. 以下各式中, 当 $n\to\infty$ 时, 极限值为 $\dfrac{1}{2}$ 的是 ()

A. $\dfrac{n-2}{2n(n+1)}$　　B. $\dfrac{2n+1}{3n+2}$　　C. $(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\sqrt{n}$　　D. $\dfrac{1+4+7+\cdots+(3n-2)}{2n^2}$

129. (1) $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{2n^2+5n-1}{3n^3-2n^2}+\dfrac{3+5n}{3n-1})=$__________. (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+3+5+7+\cdots+(2n-1)}{1+4+7+11+\cdots+(3n-2)}=$__________. (3) 若 $\{a_n\}$ 是公差不为零的等差数列, S_n 是它的前 n 项之和, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{na_n}{S_n}=$__________. (4) $\lim\limits_{n\to\infty}[\dfrac{1}{(3n+1)(2n-1)}+\dfrac{5}{(3n+1)(2n-1)}+\dfrac{9}{(3n+1)(2n-1)}+\cdots+\dfrac{4n-3}{(3n+1)(2n-1)}]=$__________. (5) $\lim\limits_{n\to\infty}(1-\dfrac{1}{2})(1-\dfrac{1}{3})(1-\dfrac{1}{4})\cdots(1-\dfrac{1}{n})=$__________. (4) $\lim\limits_{n\to\infty}(1-\dfrac{1}{2^2})(1-\dfrac{1}{3^2})(1-\dfrac{1}{4^2})\cdots(1-\dfrac{1}{n^2})=$__________.

130. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}(2n-\sqrt{4n^2+an+3})=1$, 则 a 等于 ()

A. -7　　B. -4　　C. 0　　D. 4

131. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}[1^2+(1+\dfrac{1}{n})^2+(1+\dfrac{2}{n})^2+(1+\dfrac{3}{n})^2+\cdots.(1+\dfrac{n+1}{n})^2]$ 的值为 ()

A. 2　　B. $\dfrac{7}{3}$　　C. $\dfrac{9}{5}$　　D. $\dfrac{3}{7}$

132. (1) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{n^2+1}{n+1}-an-b)=0$, 则 $a=$__________, $b=$__________. (2) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3a^n+pb^n+c}{7a^n-3b^n+c^2}=-5(1<a<b$, c, p 为常数), 则 p__________. (3) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{4n^2+p}-pn)=q$, 则 $p=$__________, $q=$__________.

133. (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2+1}}=$__________. (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2-n\sqrt{n^2+1}}=$__________. (3) $\lim\limits_{n\to\infty}[\sqrt{1+2+3+\cdots+n}-\sqrt{1+2+3+\cdots+(n-1)}]=$__________.

134. (1) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{1+2}+\dfrac{1}{1+2+3}+\cdots+\dfrac{1}{1+2+3+\cdots+n})=$__________. (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k^2+3k+2}=$__________.

135. 已知 $y=f(x)$ 是一次函数, $f(8)=15$, 又 $f(2)$, $f(5))$, $f(4)$ 依次成等比数列, 记 $S_n=f(1)+f(2)+\cdots+f(n)$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{S_n}{n^2}$.

136. (1) 已知数列 $\{a_n\}$ 前 n 项的和 $S_n=n^2$, 记 $p_n=\dfrac{1}{a_1a_2}+\dfrac{1}{a_2a_3}+\cdots+\dfrac{1}{a_na_{n+1}}$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}p_n$. (2) 已知二次函数 $f(x)=n(n+1)x^2-(2n+1)x+1$, 当 n 取所有自然数时, 求它的图象在 x 轴上截得的所有线段长度的总和. (三) $\lim\limits_{n\to\infty}q^n$

137. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}(1-2x)^n$ 存在, 则 x 的取值范围是 ()

A. $0<x<1$　　B. $0\le x\le 1$　　C. $0\le x<1$　　D. $x\ge 1$ 或 $x\le 0$

138. 已知四个无穷数列 $\{(-1)^n\dfrac{1}{n}\}$, $\{(-1)^n(\dfrac{1}{2})^n\}$, $\{\dfrac{3^{n-1}}{2^n}\}$, $\{\dfrac{10^{10}}{n^2+2n}\}$, 当 $n\to\infty$ 时, 这四个数列中极限为零的个数是 ()

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

139. 已知四个数列的通项公式分别是 $a_n=1+(-1)^n$, $b_n=2+(-\dfrac{\sqrt{2}}{2})^n$, $c_n=(-1)^n\tan(\dfrac{n\pi}{2}-\dfrac{\pi}{4})$, $d_n=(-1)^n\dfrac{n+1}{n}$, 当 $n\to\infty$ 时, 这四个数列中极限为-1 的是数列 ()

A. $\{a_n\}$　　B. $\{b_n\}$　　C. $\{c_n\}$　　D. $\{d_n\}$

140. 首项为 1、公比为 $q(|q|>1)$ 的等比数列前 n 项之和为 S_n, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{S_n}{S_{n+1}}$ 的值为 ()

A. 1　　B. q　　C. $\dfrac{1}{q}$　　D. 不存在

141. (1) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1-a}{2a})^n=0$, 则 a 的取值范围是__________. (2) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}[2-(\dfrac{q}{1-q})^n]=2$, 则 q 的取值范围是__________. (3) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n+1}}{1+x^{2n}}=x(x\ne 0)$, 则 x 的取值范围是__________. (4) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n+a^n}{3^{n+1}+a^{n+1}}=\dfrac{1}{3}$, 则 a 的取值范围是__________.

142. (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{2n-1}+1}{4^n-3^n}=$__________. (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5^{n+1}-10^{n-1}}{10^{n+1}-5^{n-1}}=$__________. (3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-2)^{n+1}}{1-2+4-\cdots+(-2)^{n-1}}=$__________. (4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}}{1-2^{n-1}}=$__________. (5) 若 $|p|<3$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{p^n+3^n}{1+3+3^2+\cdots+3^n}=$__________.. (6) 若 $|a|<1$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}[(1+a)(1+a^2)(1+a^4)\cdots(1+a^{2^n})]=$__________.

143. 在正数数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_1=2$, a_{n-1} 与 a_n 满足关系式 $\lg a_n=\lg a_{n-1}+\lg t$, 其中 t 为大于零的常数. 求: (1) 数列 $\{a_n\}$ 的通项公式. (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n+1}{a_n-1}$ 的值.

144. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项之和 S_n 满足 $S_n=1+ra_n(r\ne 1)$, (1) 求证: $\{s_n-1\}$ 是公比为 $\dfrac{r}{r-1}$ 的等比数列. (2) 求适合 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=1$ 的 r 的取值范围.

145. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的首项为 1, 公差为 d, 前 n 项和为 A_n; 等比数列 $\{b_n\}$ 的首项为 1, 公比为 $q(|q|<1)$, 前 n 项和为 B_n. 记 $S_n=B_1+B_2+\cdots+B_n$, 若 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{A_n}{n}-S_n)=1$, 求 d 和 q. (四) 无穷等比数列

146. 无穷数列 $\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}$, $\frac{1}{2^2}\sin\frac{2\pi}{2}$, $\frac{1}{2^3}\sin\frac{3\pi}{2}$, $\cdots$, $\frac{1}{2^n}\sin\frac{n\pi}{2}$, $\cdots$的各项之和为 ()

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{2}{7}$　　C. $\frac{2}{5}$　　D. 不存在

147. 将循环小数 $0.\dot{3}\dot{6}$ 化成最简分数后, 分子与分母的和等于 ()

A. 15　　B. 45　　C. 126　　D. 135

148. 记 $b=\cos 30^\circ$, 又无穷数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=2$, $\log_b a_{n+1}=\log_b a_n+2$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_2+a_3+\cdots+a_n)$ 等于 ()

A. 8　　B. 6　　C. $\frac{8}{3}$　　D. 2

149. 无穷等比数列 (公比 q 满足 $|q|<1$) 中, 若任何一项都等于该项后所有项的和, 则等比数列的公比是 ()

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $-\frac{1}{2}$　　D. $-\frac{1}{4}$

150. 一个公比的绝对值小于 1 的无穷等比数列中, 已知各项的和为 15, 各项的平方和为 45, 则此数列的首项为 ()

A. 6　　B. 5　　C. 3　　D. 2

151. 连接三角形三边中点得第二个三角形, 再连接第二个三角形三边中点得第三个二角形, 如此不断地作下去, 则所得的一切三角形 (不包括第一个三角形) 的而积之和与第一个三角形面积之比为 ()

A. 1　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{1}{4}$

152. (1) 设 a 是方程 $\log_2 x+\log_2(x+\frac{3}{4})+\log_2 4=0$ 的根, 则无穷数列 $a,a^2,a^3,\cdots$ 的各项之和等于__________. (2) 已知 $S_n=\frac{1}{5}+\frac{2}{5^2}+\frac{1}{5^3}+\frac{2}{5^4}+\cdots+\frac{1}{5^{2n-1}}+\frac{2}{5^{2n}}$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=$__________.

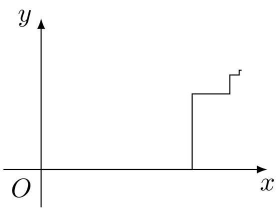
153. (1) 无穷数列 $0.\dot{1}\dot{5}$, $0.0\dot{1}\dot{5}$, $0.00\dot{1}\dot{5}$, $\cdots$所有项的和等于__________. (2) 若 θ 是一个定锐角, θ_1 是 $\frac{\theta}{2}$ 的余角, θ_2 是 $\frac{\theta_1}{2}$ 的余角, θ_3 是 $\frac{\theta_2}{2}$ 的余角, $\cdots$, θ_n 是 $\frac{\theta_{n-1}}{2}$ 的余角, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\theta_n=$__________. (3)$\frac{1}{3}+\frac{3}{3^2}+\frac{7}{3^3}+\cdots+\frac{2^n-1}{3^n}+\cdots=$__________. (4) 记 $S_n=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}-\frac{1}{32}+\frac{1}{64}-\frac{1}{128}-\frac{1}{256}+\cdots+\frac{1}{2^{3n-3}}-\frac{1}{2^{3n-2}}-\frac{1}{2^{3n-1}}$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=$__________.

154. (1) 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_1+a_2+\cdots+a_n)=\frac{1}{2}$, 求 a_1 的取值范围. (2) 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_1+a_2+a_3=18$, $a_2+a_3+a_4=-9$, 且 $S_n=a_1+2a_2+3(a_3+a_4+\cdots+a_n)(n\geq 3)$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$. (3) 已知 $\{a_n\}$ 是公比为正数的等比数列, 且 $\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_4}=117$, $a_1\cdot a_2\cdot a_3=\frac{1}{3^6}$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_1+a_2+\cdots a_n)$.

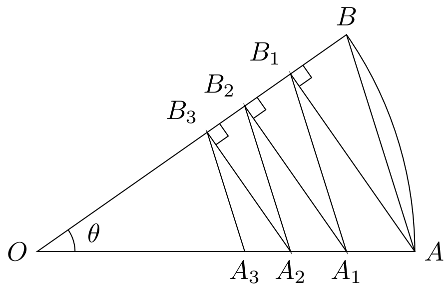
155. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项之和 S_n 满足 $S_n=1-\frac{2}{3}a_n(n\in\mathbf{N})$. (1) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$. (2) 若记数列 $\{a_nS_n\}$ 的前 n 项之和为 U_n, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}U_n$.

156. 已知数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1=b(b\neq 0)$, 它的前 n 项和 S_n 组成的数列 $\{S_n\}(n\in\mathbf{N})$ 是一个公比为 $q(q\neq 0,|q|<1)$ 的等比数列. (1) 求证: $a_2,a_3,a_4,\cdots,a_n,\cdots$ 是一个等比数列. (2) 设 $W_n=a_1S_1+a_2S_2+\cdots+a_nS_n$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}W_n$(用 b,q 表示).

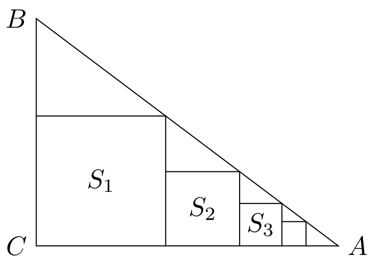
157. (1) 在 45° 角的一边上, 取距离顶点为 a 的一点, 由这点向另一边作垂线, 然后再由这个垂线的垂足向另一边作垂线, $\cdots$, 如此无限地继续下去, 求所有这些垂线长的和. (2) 如图, 在直角坐标平面上, 点 P 从原点出发沿 x 轴的正方向前进 a 后向左转 90°, 前进 $\dfrac{a}{2}$ 后又向右转 90, 前进 $\dfrac{1}{2^2}a$ 后再左转 90°, 无限地继续下去, 点 P 最后到达哪一点.



(3) 设扇形 AOB 的半径为 R, 中心角为 $\theta(0<\theta<\dfrac{\pi}{2})$, 由 A 向半径 OB 作垂线 AB_1, 由垂足 B_1 引弦 AB 的平行线交 OA 于点 A_1, 再由 A_1 向 OB 作垂线 A_1B_2, 由垂足 B_2 引弦 AB 的平行线交 OA 于点 A_2(如图), 这样无限地继续下去, 在 OA, OB 上得到的点列 $\{A_n\}$、$\{B_n\}$, 设 $\triangle ABB_1$, $\triangle A_1B_1B_2$, $\cdots$, $\triangle A_nB_nB_{n+1}$, $\cdots$ 的面积为 S_1, S_2, $\cdots$, S_{n+1}, $\cdots$, 求 $S=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}S_k$.



(4) 如图, 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中排列着无限个正方形 S_1, S_2, S_3, S_4, $\cdots$, 且已知直角边 $BC=a$, 这无限个正方形的面积之和正好是这个直角三角形面积的一半, 求另一直角边 AC 的长.



158. 在半径为 r 的球内作正方体, 然后在正方体内再作内切球, 在内切球内再作内接正方体, 然后再作它的内切球, 如此无限地作下去, 求所有这些球的表面积之和 (包括半径为 r 的球). 三、数学归纳法【典型题型和解题技巧】

159. 运用数学归纳法时易犯的错误. (1) 对项数估算的错误.

160. 用数学归纳法证明: $1+2+\cdots+2n=n(2n+1)(n\in\mathbf{N})$. 错误之一当 $n=1$ 时, 左边 $=1$, 右边 $=1$, 等式成立. 分析初学者往往认为对 $n=1$ 的验证, 只是一个形式而已, 误认为左边肯定只有一项. 事实上, 此处 $n=1$ 时,

左边有两项, 即 $1+2$, 而右边则是 $1\times(2+1)$. 错误之二设 $n=k$ 时结论成立, 即 $1+2+\cdots+2k=k(2k+1)$. 当 $n=k+1$ 时, 左边 $=1+2+\cdots+2k+2(k+1)=\cdots$. 分析从 $n=k$ 到 $k+1$, 项数的变化是比较复杂的. 此处 $n=k+1$ 时, 左边增加了两项: $2k+1$ 和 $2(k+1)$, 又如, 对 $S_n=\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{3n}$, 当 $n=k$ 时, $S_k=\dfrac{1}{k+1}+\dfrac{1}{k+2}+\cdots+\dfrac{1}{3k}$, 当 $n=k+1$ 时, $S_{k+1}=\dfrac{1}{k+2}+\dfrac{1}{k+3}+\cdots+\dfrac{1}{3k}+\dfrac{1}{3k+1}+\dfrac{1}{3k+2}+\dfrac{1}{3(k+1)}$, S_{k+1} 比 S_k 增加了两项 (减少了一项, 又增加了三项). (2) 没有利用归纳假设.

161. 用数学归纳法证明: $\sqrt{1\times2}+\sqrt{2\times3}+\cdots+\sqrt{n(n+1)}>\dfrac{n(n+1)}{2}(n\in\mathbf{N})$. 错误设 $n=k$ 时结论成立, 即 $\sqrt{1\times2}+\sqrt{2\times3}+\cdots+\sqrt{k(k+1)}>\dfrac{k(k+1)}{2}$. 当 $n=k+1$ 时, $\sqrt{1\times2}+\sqrt{2\times3}+\cdots+\sqrt{(k+1)(k+2)}>1+2+\cdots+(k+1)=\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$. 分析数学归纳法的第二步是: 假设 $n=k$ 时结论正确, 再利用这个假设, 证明 $n=k+1$ 时结论正确. 以上证明的错误在于: 没有利用 $n=k$ 的假设, 而直接证明了 $n=k+1$ 时的结论. 因此, 这种证法不是数学归纳法. (3) 关键步骤含糊不清.

162. 用数学归纳法证明 $1\times n+2(n-1)+\cdots+n\times1=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}(n\in\mathbf{N})$. 简证设 $n=k$ 时, 等式成立, 即 $1\times k+2(k-1)+\cdots+k\times1=\dfrac{k(k+1)(k+2)}{6}$. 当 $n=k+1$ 时, $1\times(k+1)+2k+\cdots+(k+1)\times1=1\times k+2(k-1)+3(k-2)+\cdots+k\times1+(1+2+3+\cdots+k+1)=\cdots$. 分析 “假设 $n=k$ 时结论成立, 再利用这个假设证明 $n=k+1$ 时结论也成立”, 这是数学归纳法关键的一步, 也是证明问题的最重要的环节, 对推导的过程必须加以证明. 上面的证明, 如何由第一式到第二式步骤不明, 虽然不能算是错误, 但证明问题不够严密. 正确的推导过程应尚是: 当 $n=k+1$ 时, $\begin{cases}1\times(k+1)+2\times k+3(k-1)+\cdots+k\times2+(k+1)\times1\\=1\times(k+1)+2[(k-1)+1]+3[(k-2)+1]+\cdots+k(1+1)+(k+1)\\=[1\times k+2(k-1)+3(k-2)+\cdots+k\times1]+[1+2+3+\cdots+k+(k+1)]\\=\dfrac{k(k+1)(k+2)}{6}+\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}=\dfrac{(k+1)(k+2)(k+3)}{6},\cdots.\end{cases}$

163. 数学归纳法的应用. (1) 证明恒等式 (略). (2) 证明不等式.

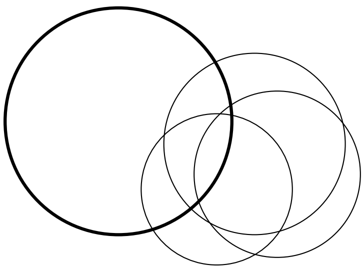
164. 记 $S_n=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}(n>1,\ n\in\mathbf{N})$, 求证: $S_{2^n}>1+\dfrac{n}{2}(n\geq2,\ n\in\mathbf{N})$. 证明 (1) 当 $n=2$ 时, $S_{2^2}=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{25}{12}>1+\dfrac{2}{2}$, 当 $n=2$ 时, 命题成立. (2) 设 $n=k$ 时, 命题成立, 即 $S_{2^k}=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{2^k}>1+\dfrac{k}{2}$, 则 $n=k+1$ 时, $S_{2^{k+1}}=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{2^k}+\dfrac{1}{2^k+1}+\dfrac{1}{2^k+2}+\cdots+\dfrac{1}{2^{k+1}}$ $>1+\dfrac{k}{2}+\underbrace{\dfrac{1}{2^k+1}+\dfrac{1}{2^k+2}+\cdots+\dfrac{1}{2^k+2^k}}_{2^k\text{项}}>1+\dfrac{k}{2}+\dfrac{2^k}{2^k+2^k}=1+\dfrac{k}{2}+\dfrac{1}{2}=1+\dfrac{k+1}{2}$. 故当 $n=k+1$ 时, 命题也成立. 由 (1), (2) 可知, 对 $n\in\mathbf{N}$, $n\geq2$, $S_{2^n}>1+\dfrac{n}{2}$. 注意利用数学归纳法证不等式, 经常要用到 “放缩” 的技巧. (3) 证明数或式的整除性.

165. 求证: $a^{n+1}+(a+1)^{2n-1}(n\in\mathbf{N})$ 能被 a^2+a+1 整除. 证明 (1) 当 $n=1$ 时, $a^{1+1}+(a+1)^{2\times1-1}=a^2+a+1$, 命题显然成立. (2) 设 $n=k$ 时, , $a^{k-1}+(a+1)^{2k-1}$ 能被 a^2+a+1 整除, 则当 $n=k+1$ 时, $\begin{cases}a^{k+2}+(a+1)^{2k+1}=a\cdot a^{k+1}+(a+1)^2(a+1)^{2k-1}\\=a[a^{k+1}+(a+1)^{2k-1}]+(a+1)^2(a+1)^{2k-1}-a(a+1)^{2k-1}\\=a[a^{k+1}+(a+1)^{2k-1}]+(a^2+a+1)(a+1)^{2k-1},\end{cases}$ 由归纳假设, 以上两项均能被 a^2+a+1

整除, 故 $n=k+1$ 时, 命题也成立. 由 (1), (2) 可知, 对 $n\in\mathbf{N}$ 命题成立. 注意利用数学归纳法证明整除性, 经常要用到“凑”的技巧. (4) 证明数列的通项公式.

166. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=a$, $a_{n+1}=\dfrac{1}{2-a_n}$. (1) 求 a_2,a_3,a_4. (2) 推测通项 a_n 的表达式, 并用数学归纳法加以证明. 解 (1) 由 $a_{n+1}=\dfrac{1}{2-a_n}$, 可得 $a_2=\dfrac{1}{2-a}$, $a_3=\dfrac{1}{2-\dfrac{1}{2-a}}=\dfrac{2-a}{3-2a}$, $a_4=\dfrac{1}{2-\dfrac{2-a}{3-2a}}=\dfrac{3-2a}{4-3a}$. (2) 推测 $a_n=\dfrac{(n-1)-(n-2)a}{n-(n-1)a}$, 证明如下: ① 当 $n=1$ 时, 左边 $=a_1=a$, 右边 $=\dfrac{(1-1)-(1-2)a}{1-(1-1)a}=a$, 结论成立. ② 设 $n=k$ 时, 有 $a_k=\dfrac{(k-1)-(k-2)a}{k-(k-1)a}$, 则当 $n=k+1$ 时, $\begin{cases} a_{k+1}=\dfrac{1}{2-a_k}=\dfrac{1}{2-\dfrac{(k-1)-(k-2)a}{k-(k-1)a}}=\dfrac{k-(k-1)a}{2[k-(k-1)a]-[(k-1)-(k-2)a]} \\ =\dfrac{k-(k-1)a}{(k+1)-ka}. \end{cases}$ 故当 $n=k+1$ 时, 结论成立. 由① , ② 可知, 对 $n\in\mathbf{N}$, 都有 $a_n=\dfrac{(n-1)-(n-2)a}{n-(n-1)a}$. (5) 证明几何命题.

167. 平面内有 n 个圆, 其中每两个圆都交于两点, 且无任何三个圆交于一点, 求证: 这 n 个圆将平面分成 n^2-n+2 个部分. 略证设 $n=k$ 时, k 个圆将平面分成 k^2-k+2 个部分 (如图), 则当 $n=k+1$ 时, 第 $k+1$ 个圆 C_{k+1} 交前面 k 个圆于 $2k$ 个点, 这 $2k$ 个点将圆 C_{k+1} 分成 $2k$ 段, 每段将各自所在区域一分为二, 因此增加了 $2k$ 个区域, 于是这 $k+1$ 个圆将平面分成 $k^2-k+2+2k$ 个部分, 即 $(k+1)^2-(k+1)+2$ 个部分.



168. 利用数学归纳法证明“$1+a+a^2+\cdots+a^{n+1}=\dfrac{1-a^{n+2}}{1-a}(a\neq 1,\, n\in\mathbf{N})$”时, 在验证 $n=1$ 成立时, 左边应该是 ()

A. 1　　B. $1+a$　　C. $1+a+a^2$　　D. $1+a+a^2+a^3$

169. 欲用数学归纳法证明“对于足够大的自然数 n, 总有 $2^n>n^3$”, 则验证不等式成立所取的第一个 n 值, 最小应当是 ()

A. 1　　B. 大于 1 且小于 6 的某个自然数　　C. 10　　D. 大于 5 且小于 10 的某个自然数

170. 利用数学归纳法证明“对任意偶数 n, a^n-b^n 能被 $a+b$ 整除”时, 其第二步论证, 应该是 ()

A. 假设 $n=k$ 时命题成立, 再证 $n=k+1$ 时命题也成立　　B. 假设 $n=2k$ 时命题成立, 再证 $n=2k+1$ 时命题也成立　　C. 假设 $n=k$ 时命题成立, 再证 $n=k+2$ 时命题也成立　　D. 假设 $n=2k$ 时命题成立, 再证 $n=2(k+1)$ 时命题也成立

171. 利用数学归纳法证明“$(n+1)(n+2)(n+3)\cdots(n+n)=2^n\times1\times3\times\cdots\times(2n-1)(n\in\mathbf{N})$”时, 从“$n=k$”变到“$n=k+1$”时, 左边应增添的因式是 ()

A. $2k+1$ B. $\dfrac{2k+1}{k+1}$ C. $\dfrac{(2k+1)(2k+2)}{k+1}$ D. $\dfrac{2k+3}{k+1}$

172. 利用数学归纳法证明“$\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{2n}>\dfrac{13}{24}(n\geq2,n\in\mathbf{N})$”的过程中, 由“$n=k$”变到“$n=k+1$”时, 不等式左边的变化是 ()

A. 增加 $\dfrac{1}{2(k+1)}$ B. 增加 $\dfrac{1}{2k+1}$ 和 $\dfrac{1}{2k+2}$ C. 增加 $\dfrac{1}{2k+2}$ 并减少 $\dfrac{1}{k+1}$ D. 增加 $\dfrac{1}{2k+1}$ 和 $\dfrac{1}{2k+2}$, 并减少 $\dfrac{1}{k+1}$.

173. 利用数学归纳法证明不等式“$\sqrt{n^2+n}<n+1$”时, 由“假设 $n=k$ 时命题成立”到“当 $n=k+1$ 时”, 正确的步骤是 ()

A. $\sqrt{(k+1)^2+(k+1)}=\sqrt{k^2+3k+2}<\sqrt{k^2+4k+4}=k+2$

B. $\sqrt{(k+1)^2+(k+1)}=\sqrt{k^2+3k+2}=\sqrt{(k+2)^2-(k+2)}<k+2$

C. $\sqrt{(k+1)^2+(k+1)}=\sqrt{k^2+3k+2}<\sqrt{(k+2)^2}=k+2$

D. $\begin{cases}\sqrt{(k+1)^2+(k+1)}=\sqrt{k^2+\\=\sqrt{(k+2)^2-1}<\sqrt{(k+2)^2}\end{cases}$

174. 利用数学归纳证明不等式“$1+\dfrac12+\dfrac13+\cdots+\dfrac{1}{2^n-1}<n(n\geq2,\ n\in\mathbf{N})$”的过程中, 由“$n=k$”变到“$n=k+1$”时, 左边增加了 ()

A. 1 项 B. k 项 C. 2^{k-1} 项 D. 2^k 项

175. 利用数学归纳法求证 $(n\in\mathbf{N})$: (1)$1+2+3+\cdots+2n=n(2n+1)$. (2)$1^2-2^2+3^2-4^2+\cdots+(-1)^{n-1}n^2=(-1)^{n-1}\cdot\dfrac{n(n+1)}{2}$. (3)$1-\dfrac12+\dfrac13-\dfrac14+\cdots+\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n}=\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{2n}$. (4)$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\dfrac14[n(n+1)]^2$. (5)$\begin{cases}(1\times2^2-2\times3^2)+(3\times4^2-4\times5^2)+\cdots+[(2n-1)(2n)^2-2n(2n+1)^2]\\=-n(n+1)(4n+3).\end{cases}$

176. 对于 $n\in\mathbf{N}$, 求证: (1)$\dfrac12\tan\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{2^2}\tan\dfrac{x}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}\tan\dfrac{x}{2^n}=\dfrac{1}{2^n}\cot\dfrac{x}{2^n}-\cot x(x\neq k\pi,\ n\in\mathbf{Z})$. (2)$\begin{cases}\dfrac{1}{\cos\alpha\cos(\alpha+\beta)}+\dfrac{1}{\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha+2\beta)}+\cdots+\dfrac{1}{\cos[\alpha+(n-1)\beta]\cos(\alpha+n\beta)}\\=\dfrac{\sin n\beta}{\sin\beta\cos\alpha(\alpha+n\beta)}.\end{cases}$ (3)$(2\cos\theta-1)(2\cos2\theta-1)(2\cos2^2\theta-1)\cdots(2\cos2^{n-1}\theta-1)=\dfrac{2\cos2^n\theta+1}{2\cos\theta+1}$(其中 $\theta\neq2k\pi\pm\dfrac{2\pi}{3},k\in\mathbf{Z}$) (4)$\dfrac{1}{\sin2x}+\dfrac{1}{\sin4x}+\cdots+\dfrac{1}{\sin2^nx}=\cot x-\cot2^nx(x\neq\dfrac{m\pi}{2^p},m\in\mathbf{Z},p\in\{0\}\cup N)$.

177. (1) 在数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_1=1,a_{n+1}=6(1+2+\cdots+n)+1(n\in\mathbf{N})$, 求证: $a_1+a_2+\cdots+a_n=n^3$. (2) 设 x_1,x_2 是关于 x 的方程 $2x^2+2nx-n=0(n\in\mathbf{N})$ 的两个根, 数列 $\{a_n\}$ 的通项 $a_n=x_1^2+x_2^2$, 试用数学归纳法证明: 对任何自然数 n, 都有 $\dfrac{1}{1+a_1}+\dfrac{1}{2+a_2}+\dfrac{1}{3+a_3}+\cdots+\dfrac{1}{n+a_n}=\dfrac{n(3n+5)}{4(n+1)(n+2)}$.

178. 利用数学归纳法证明: (1)$\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\dfrac{1}{n+3}+\cdots+\dfrac{1}{2n}>\dfrac{13}{24}(n\geq2,n\in\mathbf{N})$. (2)$\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{3n+2}>1(n\in\mathbf{N})$. (3)$\dfrac1n+\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2}>1(n\geq2,n\in\mathbf{N})$. (4)$1+\dfrac12+\dfrac13+\cdots+\dfrac{1}{2^n-1}<n(n\geq2,$

$n \in \mathbf{N}$).

179. 已知 $n \in \mathbf{N}$, 求证: (1)$|\sin\theta| \le n|\sin\theta|$. (2)$\cot\dfrac{\theta}{2^n} - \cot\theta \ge n(0 < \theta < \pi)$.

180. 利用数学归纳法证明: (1)$(1+\dfrac{1}{n})^n < n(n \ge 3,\ n \in \mathbf{N})$. (2)$\dfrac{2^n-1}{2^n+1} > \dfrac{n}{n+1}(n \ge 3,\ n \in \mathbf{N})$. (3)$\dfrac{2^n+4^n}{2} \ge 3^n(n \in \mathbf{N})$. (4)$\dfrac{a^n+b^n}{2} \ge (\dfrac{a+b}{2})^n(a, b \in \mathbf{R}^+,\ n \in \mathbf{N})$. (5)$(2n+1)(1-x)x^n < 1-x^{2n+1}(0 < x < 1,\ n \in \mathbf{N})$.

181. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 2,\ a_{n+1} = \dfrac{a_n}{2} + \dfrac{1}{a_n}$, 求证: $\sqrt{2} < a_n < \sqrt{2} + \dfrac{1}{n}$.

182. 求证: (1)$49^n + 16n - 1$ 能被 64 整除 ($n \in \mathbf{N}$). (2)$6^{2n} + 3^{n+2} + 3^n$ 是 11 的倍数 ($n \in \mathbf{N}$). (3)$7^n + 1$ 能被 8 整除, 其中 n 为正奇数. (4)$(3n+1) \times 7^n - 1$ 是 9 的倍数 ($n \in \mathbf{N}$). (5)$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{5n-1}$ 能被 31 整除 ($n \in \mathbf{N}$).

183. 求证: (1)$(x+3)^n - 1$ 能被 $x+2$ 整除 ($n \in \mathbf{N}$). (2)$x^n - na^{n-1}x + (n-1)a^n$ 能被 $(x-a)^2$ 整除 ($n \ge 2$, $n \in \mathbf{N}$).

184. 当 $n \in \mathbf{N}$ 时, 试用数学归纳法证明 $f(n) = n^3 + \dfrac{3}{2}n^2 + \dfrac{1}{2}n - 1$ 一定是整数.

185. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \dfrac{a_n}{1+a_n}$. (1) 计算 a_2, a_3, a_4. (2) 猜测 a_n 的表达式, 并用数学归纳法加以证明.

186. 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是 $a_n = \dfrac{1}{(n+1)^2}(n \in \mathbf{N})$, 记 $b_n = (1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_n)$. (1) 写出数列 $\{b_n\}$ 的前三项. (2) 猜想数列 $\{b_n\}$ 的通项公式, 并用数学归纳法加以证明. (3) 令 $p_n = b_n - b_{n+1}$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}(p_1 + p_2 + \cdots + p_n)$ 的值.

187. 已知 $a > 0, b > 0$, 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = \dfrac{1}{2}(a + \dfrac{b}{a})$, $a_2 = \dfrac{1}{2}(a_1 + \dfrac{b}{a_1})$, $a_3 = \dfrac{1}{2}(a_2 + \dfrac{b}{a_2})$, $\cdots$, $a_n = \dfrac{1}{2}(a_{n-1} + \dfrac{b}{a_{n-1}})$. (1) 求证: $\dfrac{a_n - \sqrt{b}}{a_n + \sqrt{b}} = (\dfrac{a-\sqrt{b}}{a+\sqrt{b}})^{2n}$. (2) 求 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

188. 已知正数数列 $\{a_n\}$ 满足 $2\sqrt{S_n} = a_n + 1(n \in \mathbf{N})$. (1) 求 a_1, a_2, a_3. (2) 猜测 a_n 的表达式, 并证明你的结论. I56.(1) 已知正数数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足 $S_n = \dfrac{1}{2}(a_n + \dfrac{1}{a_n})$, 求 a_n. (2) 已知正数数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = \dfrac{1}{2}(a_n + \dfrac{1}{a_n})$. ① 求 S_1, S_2, S_3. ② 写出 S_n 的表达式, 并证明你的结论; ③ 求 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

189. 已知正数数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 且对任何自然数 n, a_n 与 2 的等差中项等于 S_n 与 2 的正的等比中项. (1) 写出数列 $\{a_n\}$ 的前三项.- (2) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 (写出证明过程).

190. 比较大小 ($n \in \mathbf{N}$): (1)$\dfrac{1}{2} \times \dfrac{3}{4} \times \dfrac{5}{6} \times \cdots \times \dfrac{2n-1}{2n}$ 与 $\dfrac{1}{2\sqrt{n}}$. (2)$(n+1)^2$ 与 3^n.

191. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 2,\ a_{n+1} = \dfrac{{a_n}^2+3}{2a_n}$, 数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n = 3 - a_n^2$. 求证: (1)$b_n < 0$. (2)$|\dfrac{b_{n+1}}{b_n}| < \dfrac{1}{2}$. (3)$|b_n| < (\dfrac{1}{2})^{n-1}(n \ge 2)$.

192. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足条件 $a_1 = 1,\ a_2 = r(r > 0)$, 且 $\{a_na_{n+1}\}$ 是公比为 $q(q > 0)$ 的等比数列, 记 $b_n = a_{2n-1} + a_{2n}(n \in \mathbf{N})$. (1) 求出使不等式 $a_na_{n+1} + a_{n+1}a_{n+2} > a_{n+2}a_{n+3}$ 成立的 q 的取值范围. (2) 求 b_n 和 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{S_n}$, 其中 $S_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$.

193. 平面上有 n 条直线, 其中任何两条都不平行, 任何三条不共点, 求证这 n 条直线: (1) 被分割成 n^2 段. (2) 把平面分成 $\frac{1}{2}(n^2+n+2)$ 个部分.

194. 已知一个圆内有 n 条弦, 这 n 条弦中每两条都相交于圆内的一点, 且任何三条不共点, 求证: 这 n 条弦将圆面分割成 $f(n)=\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n+1$ 个区域.

195. 数列 2, 0, 4, 0, 6, 0, ⋯的一个通项公式是 ()

A. $a_n=\frac{n[1+(-1)^n]}{2}$　B. $a_n=\frac{(n+1)[1+(-1)^n]}{2}$　C. $a_n=\frac{n[1+(-1)^{n+1}]}{2}$　D. $a_n=\frac{(n+1)[1+(-1)^{n+1}]}{2}$

196. 在数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_1=2$, $a_{n+1}=a_n+2n$, 则 a_{100} 等于 ()

A. 9900　B. 9902　C. 9904　D. 10100

197. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=4$, $a_2=2$, $a_3=1$, 又数列 $\{a_{n+1}-a_n\}$ 成等差数列, 则 a_n 等于 ()

A. $n-3$　B. $\frac{1}{2}(n^3-8n^2+13n+2)$　C. $\frac{1}{2}(2n^3-17n^2+33n-10)$　D. $\frac{1}{2}(n^2-7n+14)$

198. (1) 求数列 23, 2323, 232323, ⋯的通项公式 a_n. (2) 求数列 $\sqrt{11-2}$, $\sqrt{1111-22}$, ⋯, $\sqrt{\underbrace{1}1\cdots11_{2n}-\underbrace{2}2\cdots22_{n}}$, ⋯的前 n 项和 S_n. (3) 求证: 12, 1122, 111222, ⋯的每一项都是两个相邻整数之积.

199. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}=2a_n+3$, 且 $a_1\neq-3$. (1) 求证: 数列 $\{a_n+3\}$ 成等比数列. (2) 若 $a_1=5$, 求 a_n.

200. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$, $a_{n+1}=S_n+(n+1)$. (1) 用 a_n 表示 a_{n+1}. (2) 求证: 数列 $\{a_n+1\}$ 成等比数列. (3) 求 a_n 和 S_n.

201. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=\frac{5}{6}$, 且关于 x 的二次方程 $a_{k-1}x^2-a_kx+1=0$ 的两根 α,β 满足 $3\alpha-\alpha\beta+3\beta=1(k\geq 2,\,k\in\mathbf{N})$, 求证: 数列 $\{a_n-\frac{1}{2}\}$ 是等比数列, 并求出通项 a_n.

202. 求和: $\frac{1}{2}+(\frac{1}{3}+\frac{2}{3})+(\frac{1}{4}+\frac{2}{4}+\frac{3}{4})+\cdots+(\frac{1}{100}+\frac{2}{100}+\frac{3}{100}+\cdots+\frac{99}{100})$.

203. 将自然数按下表排列: 1 2 5 10 17 ⋯4 3 6 11 18 ⋯9 8 7 12 19 ⋯16 15 14 13 20 ⋯25 24 23 22 21 ⋯⋯⋯(1) 第 1 列中第 m 个数是多少? 第 1 行中第 n 个数是多少? (2) 若 $m\geq n$, 则第 m 行 (自上而下)、第 n 列 (自左而右) 的数是多少? 若 $m<n$ 呢? (3)99 在上起第几行、左起第几列?

204. 已知数列 $1,\frac{1}{2},\frac{2}{1},\frac{1}{3},\frac{2}{2},\frac{3}{1},\frac{1}{4},\frac{2}{3},\frac{3}{2},\frac{4}{1},\cdots$. (1) 试按照规律, 将此数列分组. (2) 分数 $\frac{n}{m}(m,n\in\mathbf{N},\,m,n$ 互质) 属于第几组第几项? (3)$\frac{17}{30}$ 是此数列的第几项? (4) 数列的第 50 项是多少?

205. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项之和 S_n 与 a_n 之间满足 $2S_n^2=2a_nS_n-a_n(n\geq 2)$, 且 $a_1=2$. (1) 求证: 数列 $\{\frac{1}{S_n}\}$ 是以 2 为公差的等差数列. (2) 求 S_n 和 a_n.

206. 在数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_1=1$, $a_n=\frac{2S_n^2}{2S_n-1}(n\geq 2)$. (1) 求证: $\{\frac{1}{S_n}\}$ 成等差数列. (2) 求通项 a_n 的表达式.

207. 已知数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 的通项公式分别是 $a_n=2^n$, $b_n=3n+2$, 将它们的公共项由小到大排成数列 $\{c_n\}$, 求数列 $\{c_n\}$ 的通项公式.

208. (1) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}=3^n a_n$, 且 $a_1=1$, 求 a_n. (2) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=\dfrac{1}{2}$, $S_n=n^2a_n$(S_n 是前 n 项之和), 求 a_n. (3) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$, $a_n+a_{n+1}=-2n$. ① 求证: 数列 $\{a_{2n}\}$ 与 $\{a_{2n-1}\}$ 均是以-2 为公差的等差数列; ② 试用 n 表示和式 $M=a_1a_2-a_2a_3+\cdots+(-1)^{k+1}\cdot a_ka_{k+1}+\cdots+a_{2n-1}a_{2n}-a_{2n}a_{2n+1}$.

209. (1) 是否可找到 $2n+1$ 个连续自然数 ($n\in\mathbf{N}$), 使得前 $n+1$ 个数的平方和等于末 n 个数的平方和? 此时中间数可取什么? (2) 是否存在常数 k 和等差数列 $\{a_n\}$, 使得 $ka_n^2-1=S_{2n}-S_{n+1}$ 对任何 $n\in\mathbf{N}$ 都成立 (S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 前 n 项之和)?

210. 在直角 $\triangle ABC$ 中, 已知 $\angle C=90^\circ$, $AC=b$, $AB=c$, 将斜边 AB 分成 $n+1$ 等份, 记分点为 P_1, P_2, ⋯, P_n, 连接 CP_1, CP_2, ⋯, CP_n, , 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}[(CP_1)^2+(CP_2)^2+\cdots+(CP_n)^2]$.

211. (1) 已知各项为正数的数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n^2\le a_n-a_{n+1}$, 求证 $a_n<\dfrac{1}{n}$. (2) 已知各项为正数的数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1+a_2+\cdots+a_n=1$, 求证: $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2\ge\dfrac{1}{n}(n\ge 2)$. (3) 已知 $\dfrac{1}{2}\le a_k\le 1(k\in\mathbf{N})$, 求证: $a_1a_2\cdots a_n+(1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_n)\ge\dfrac{1}{2^{n-1}}$.

212. 已知 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 是满足 $(1+\sqrt{2})^n=a_n+b_n\sqrt{2}$ 的两个无穷数列. (1) 推测用 a_n, b_n 表示 $(1-\sqrt{2})^n$ 的表达方式, 并加以证明. (2) 求: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_n}{a_n}$.