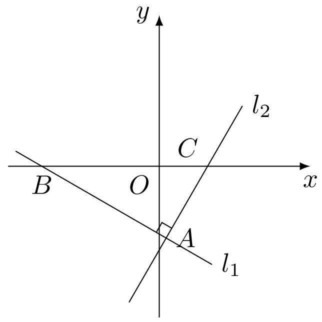
1. 如图, 在平面直角坐标系中, 直线 l_1 与 l_2 垂直, 垂足为 A, l_1、l_2 与 x 轴的交点分别为 B、C, $\angle ABC = \frac{\pi}{6}$. 试分别求直线 l_1、l_2 的倾斜角和斜率.



2. 求经过下列两点的直线的斜率与倾斜角:

(1) $P(1,2)$、$Q(2,-1)$;

(2) $M(2,1)$、$N(a,-2)$, 其中实数 a 是常数.

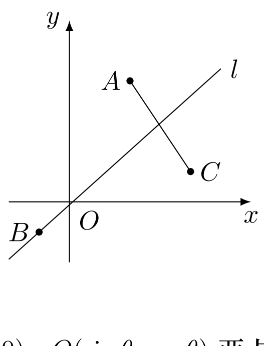
3. 根据下列直线 l 的倾斜角 θ 的取值范围, 计算斜率 k 的取值范围:

(1) $\theta \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}]$;

(2) $\theta \in (\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3})$.

4. 已知三个不同的点 $A(2,a)$、$B(a+1,2a+1)$、$C(-4,1+a)$ 在同一条直线上, 求实数 a 的值及该直线的斜率.

5. 如图, 已知点 $A(2,4)$、$B(-1,-1)$、$C(4,1)$, 过点 B 的直线 l 与线段 AC 相交. 求直线 l 的斜率 k 的取值范围.



6. 已知常数 $\theta \in [0,\pi)$, 试用 θ 表示经过 $P(0,0)$、$Q(\sin\theta,\cos\theta)$ 两点的直线 l 的倾斜角.

7. 设直线 l_1、l_2 的倾斜角分别为 θ_1、θ_2, 求证: $l_1 \perp l_2$ 的充要条件是 $|\theta_1 - \theta_2| = \frac{\pi}{2}$.

8. 已知直线 l 在平面直角坐标系中的斜率是 k, 向量 $\overrightarrow{a}$ 在直线 l 上. 求向量 $\overrightarrow{a}$ 在 x 轴上的投影向量.

9. 已知直线 l 经过点 $P(3,5)$, 倾斜角为 α 且 $\cos\alpha = \frac{3}{5}$. 求直线 l 的点斜式方程.

10. 已知直线 l 在 y 轴上的截距为 4, 倾斜角为 α 且 $\sin\alpha = \frac{3}{5}$. 求直线 l 的斜截式方程.

11. 求下列直线的斜率与在 x、y 两坐标轴上的截距:

(1) $l_1: y+1=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}(x+1)$;

(2) $l_2: y=-3x+\sqrt{3}$.

12. 已知直线 $l: y=kx+2$ 经过点 $(1,-3)$.

(1) 求 l 的倾斜角的大小;

(2) 求 l 在 x 轴上的截距.

13. 直线 l 经过点 $P(-2,1)$, 在 x 轴、y 轴上的截距分别为 a、b. 已知 $a+b=4$, 求直线 l 的方程.

14. 根据给定条件, 求下列直线的两点式方程:

(1) 直线 l_1 经过点 $A(2,0)$、$B(3,7)$;

(2) 直线 l_2 与坐标轴的交点分别为 $(3,0)$、$(0,-1)$.

15. 已知 $\triangle ABC$ 的三个顶点的坐标分别为 $A(3,8)$、$B(3,-2)$、$C(-3,0)$.

(1) 求边 BC 所在直线的方程;

(2) 求边 BC 上的中线所在直线的方程.

16. 设直线 l 在 x 轴与 y 轴上的截距分别是 a 与 b, 且 a 与 b 均不为零. 求证: 直线 l 的方程可以写成 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$.

17. 一个弹簧在弹性限度内挂 4kg 的物体时弹簧长度为 20cm, 挂 5kg 物体时弹簧长度为 21.5cm. 已知在弹性限度内所挂物体的质量 x(单位: kg) 与弹簧长度 y(单位: cm) 的关系可以用直线的方程表示, 求该直线的方程, 并求弹簧自身的长度.

18. 在平面直角坐标系中, 作出下列直线, 并求它们的斜率与倾斜角.

(1) $l_1: 3x-y-2=0$;

(2) $l_2: 3x+2y-1=0$.

19. 设直线 l 的方程是 $ax+by+c=0$, 在下列条件下, 求实数 a、b、c 满足的条件:

(1) l 与 x 轴、y 轴均相交;

(2) l 经过第二、第三、第四象限.

20. 已知直线 $l: ax+(4-2a)y-3=0$, 根据下列条件, 求实数 a 的值:

(1) l 经过点 $(1,1)$;

(2) l 在两个坐标轴上的截距相等.

21. 已知 $A(7,-4)$、$B(-5,6)$ 两点, 求线段 AB 的垂直平分线的点法式方程.

22. 已知直线 $l_1: 3kx+(k+2)y+6=0$, 直线 $l_2: kx+(2k-3)y+2=0$. 若这两条直线的法向量互相垂直, 求 k 的值.

23. 已知平行四边形 $ABCD$ 中, 三个顶点的坐标分别为 $A(1,2)$、$B(3,4)$、$C(2,6)$. 分别求边 AD、CD 所在直线的方程.

24. 已知直线 l 经过点 $P(2,-1)$, 与 x 轴、y 轴分别交于 A、B 两点. 若 $2\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{0}$, 求直线 l 的方程.

25. 直线 $l: y=kx+b(k$、$b\in\mathbf{R})$ 与线段 AB 相交, 其中点 A 为 $(4,2)$, 点 B 为 $(1,5)$.

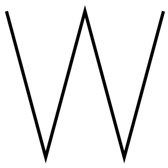
(1) 当 $b=-1$ 时, 求 k 的取值范围;

(2) 当 $k=1$ 时, 求 b 的取值范围.

26. 已知 $\triangle ABC$ 中, 两个顶点的坐标分别为 $A(-2,1)$、$B(4,-3)$, 点 $G(0,2)$ 是此三角形的重心. 求边 BC、AC 所在直线的方程.

27. 若 $2x_1+3y_1=1, 2x_2+3y_2=1$, 且 $x_1\neq x_2$. 求经过两点 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$ 的直线 l 的方程.

28. 如图是一个 W 形的霓虹灯 (灯管宽度忽略不计), 每边长都是 2m, 每相邻两边相交所成的锐角都是 $30°$. 试建立适当的平面直角坐标系, 写出此霓虹灯的每条边所在直线在这个坐标系中的方程.



29. 证明: 直线 $2x+(1-\cos 2\theta)y-\sin\theta=0(\theta\in\mathbf{R}$ 且不是 π 的整数倍) 和两坐标轴围成图形的面积是定值.

30. 已知直线 $l:(a-1)x+(3-2a)y+a+1=0$.

(1) 若直线的斜率 $k\in[-1,2]$, 求实数 a 的取值范围;

(2) 求证: 对任意实数 a, 直线 l 都经过一个定点.

31. 根据下列方程, 判定直线 l_1 与 l_2 的位置关系:

(1)$l_1: 2x-3y-1=0$, $l_2: 4x-6y-2=0$;

(2)$l_1: y=\dfrac{1}{3}x+1$, $l_2: x-6y-2=0$;

(3)$l_1: (\sqrt{5}-1)x-2y+1=0$, $l_2: 2x-(\sqrt{5}-1)y-2=0$.

32. 已知直线 $l_1:6x+(t-1)y-8=0$, 直线 $l_2:(t+4)\mathrm{x}+(t+6)y-16=0$. 根据下列条件, 求实数 t 的取值范围:

(1) l_1 与 l_2 相交;

(2) $l_1 \parallel l_2$;

(3) l_1 与 l_2 重合.

33. 已知两条直线 $l_1:(t-1)x+2y-t=0$ 和 $l_2:x+ty+t-2=0$, 且 $l_1 \parallel l_2$. 求实数 t 的值.

34. 已知平行四边形 $ABCD$ 中, 一组对边 AB、CD 所在直线的方程分别为 $ax+4y=a+2$, $x+ay=a$. 求实数 a 的值.

35. 已知四边形 $ABCD$ 的四个顶点的坐标分别为 $A(-1,2)$、$B(3,4)$、$C(3,2)$、$D(1,1)$, 求证: 四边形 $ABCD$ 是梯形.

36. 已知直线 $l_1:(k-3)x+(5-k)y+1=0$ 与直线 $l_2:2(k-3)x-2y+(2-k)=0$ 互相垂直, 求实数 k 的值.

37. 已知直线 l 垂直于直线 $l':2x+3y-4=0$, 根据下列条件求 l 的方程:

(1) l 经过点 $(1,1)$;

(2) l 与坐标轴围成的三角形的面积是 3.

38. 已知等腰直角三角形 ABC 的斜边 AB 所在直线的方程为 $3x-y-5=0$, 直角顶点为 $C(4,-1)$. 求两条直角边所在直线的方程.

39. 根据下列方程, 求直线 l_1 与 l_2 的夹角的大小:

(1) $l_1:x+3y+2=0$, $l_2:4x+2y-1=0$;

(2) $l_1:x+2y-3=0$, $l_2:x-y-5=0$;

(3) $l_1:2x-3y+6=0$, $l_2:x-5=0$.

40. 若直线 $x+my+5=0$ 与直线 $x+y+1=0$ 的夹角为 $\pi 4$, 求实数 m 的值.

41. 已知等腰直角三角形 ABC 的直角边 BC 所在直线的方程为 $x-2y-6=0$, 顶点 A 的坐标为 $(0,6)$. 分别求直角边 AC、斜边 AB 所在直线的方程.

42. 给定直线 $l_1:y=ax+b$, 直线 $l_2:y=bx-a$. 已知直线 l_1 的倾斜角为 $\dfrac{3\pi}{4}$, 且它与直线 l_2 的交点落在直线 $l_3:2x+y-2=0$ 上. 求实数 b 的值.

43. 求证: 不论实数 λ 取何值, 直线 $l:2x+y-4+\lambda(x-y+2)=0$ 经过同一个点, 并求所有这些直线的公共点.

44. 已知集合 $A=\{(x,y)|2x-(a+1)y-1=0\}$, $B=\{(x,y)|ax-y+1=0\}$, 且 $A\cap B=\varnothing$. 求实数 a 的值.

45. 分别求经过直线 $l_1: 5x+2y-3=0$ 和 $l_2 :3x-5y-8=0$ 的交点, 且与直线 $x+4y-7=0$ 垂直、平行的直线的方程.

46. 已知 $\triangle ABC$ 的一个顶点为 $A(3,-4)$, 有两条高所在直线的方程分别是 $7x-2y-1=0$ 与 $2x-7y-6=0$. 求 $\triangle ABC$ 三条边所在直线的方程.

47. 求直线 $l_1: x+y-3=0$ 与直线 $l_2: 7x-y-5=0$ 夹角平分线的方程.

48. 一束光线经过点 $(-2,1)$, 由直线 $l: y=x$ 反射后, 经过点 $(3,5)$ 射出. 求反射光线所在直线的方程.

49. 求点 $P(2,3)$ 到直线 l 的距离:

(1) $l: 3x-2y=13$;

(2) $l: y=-2x+3$.

50. 已知点 $A(a,6)$ 到直线 $3x-4y-4=0$ 的距离等于 4, 求实数 a 的值.

51. 求下列两条平行线之间的距离:

(1) $l_1: 2x-3y+1=0$, $l_2: 4x-6y+1=0$;

(2) $l_1: y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}x+1$, $l_2: \sqrt{3}x-2y+1=0$.

52. 已知直线 $l_1: 2x-y+a=0$ 与直线 $l_2: -4x+2y+1=0$ 的距离为 $\dfrac{7\sqrt{5}}{10}$, 求实数 a 的值.

53. 已知点 $A(1,0)$、$B(4,-4)$. 若点 A 与点 B 到直线 l 的距离都为 2, 求直线 l 的方程.

54. 已知点 P 是直线 $3x-4y+2=0$ 上任意一点, 求点 P 与点 $A(3,-1)$ 之间距离的最小值.

55. 已知直线 l 经过点 $P(1,1)$ 且与直线 $l_1: y=\sqrt{3}x+1$ 和 $l_2: y=\sqrt{3}x+3$ 分别交于点 A 和点 B. 若 $|AB|=\sqrt{2}$, 求直线 l 的方程.

56. 根据下列条件, 分别求圆的方程:

(1) 圆心为 $C(-\dfrac{3}{2},3)$, 半径 $r=\sqrt{3}$;

(2) 圆心为 $C(\sqrt{2},1)$, 过点 $A(-1,\sqrt{2})$;

(3) 与 x 轴相交于 $A(1,0)$、$B(5,0)$ 两点, 且半径等于 $\sqrt{5}$.

57. 已知圆 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2(r>0)$, 求在下列情况下, 实数 a、b、r 应分别满足什么条件:

(1) 圆过原点;

(2) 圆心在 x 轴上;

(3) 圆与 x 轴相切;

(4) 圆与两坐标轴均相切.

58. 求过点 $M(5,2)$、$N(3,2)$, 且圆心在直线 $y=2x-3$ 上的圆的方程.

59. 已知 $a^2x^2+(a+2)y^2+2ax+a=0$ 表示圆, 求实数 a 的值.

60. 直线 l 与圆 $x^2+y^2+2x-4y+a=0(a<3)$ 相交于 A、B 两点, 且弦 AB 的中点为 $(0,1)$. 求直线 l 的方程.

61. 已知圆过原点, 且与 x 轴、y 轴的交点的坐标分别为 $(a,0)$、$(0,b)$, 其中 $ab\neq 0$. 求这个圆的方程.

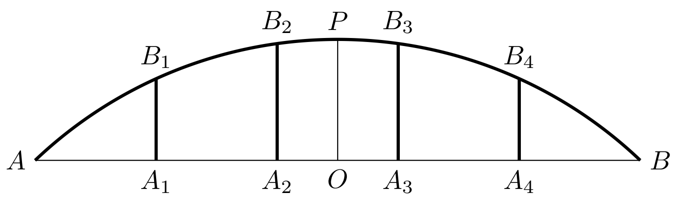
62. 判断直线 $x\cos\theta+y\sin\theta=r$ 与圆 $x^2+y^2=r^2$ 的位置关系.

63. 已知直线 $2x+3y+1=0$ 和圆 $x^2+y^2-2x-3=0$ 相交于 A、B 两点, 求弦 AB 的垂直平分线的方程.

64. 求与圆 $x^2+y^2=25$ 内切于点 $P(3,-4)$ 且半径为 1 的圆的方程.

65. 已知圆 C 过点 $(-4,0)$ 且与圆 $x^2+y^2-4x-6y=0$ 相切于原点, 求圆 C 的方程.

66. 圆拱桥的一个圆拱如图所示, 该圆拱的跨度 AB 为 20m, 拱高 OP 为 4m, 在建造过程中每隔 4m 需用一个支柱支撑. 求支柱 A_2B_2 的高度. (结果精确到 0.01m)



67. 给定点 $A(2,3)$ 与圆 $C:x^2+y^2=25$, 求圆 C 的过点 A 最短弦所在直线的方程.

68. 一个圆过点 $(2,-1)$, 圆心在直线 $2x+y=0$ 上, 且与直线 $x-y-1=0$ 相切. 求这个圆的方程.

69. 已知圆 $x^2+y^2+6x-8y+25=r^2$ 与 x 轴相切, 求这个圆截 y 轴所得的弦长.

70. 求圆 $C:x^2+y^2+4x+2y-3=0$ 关于点 $M(1,1)$ 对称的圆的方程.

71. 已知动直线 $kx-y+1=0$(其中 $k\in\mathbf{R}$) 和圆 $x^2+y^2=4$ 相交于 A、B 两点, 求弦 AB 的中点的轨迹方程.

72. 求经过点 $(5,-5)$ 且与圆 $x^2+y^2=25$ 相切的直线的方程.

73. 已知直线 $y=x+m$ 和曲线 $y=\sqrt{1-x^2}$ 有两个不同的交点, 求实数 m 的取值范围.

74. 已知直线 $l:x-y+4=0$ 与圆 $C:(x-1)^2+(y-1)^2=2$, 求圆 C 上各点到直线 l 的距离的最大值.

75. 已知实数 x、y 满足 $(x-2)^2+y^2=3$, 求 $\dfrac{y}{x}$ 的取值范围.

76. 400m 标准跑道的内圈如图所示 (400m 标准跑道最内圈的长度为 400m), 其中左右两端均是半径为 36m 的半圆弧.

(1) 求每条直道的长度; (π 取 3.14, 结果精确到 1m)

(2) 建立适当的平面直角坐标系, 写出上半部分跑道所对应的函数表达式.

77. 若方程 $16x^2+ky^2=16k$ 表示焦点在 y 轴上的椭圆, 求实数 k 的取值范围.

78. 设 F 是椭圆的一个焦点, B_1B_2 是椭圆的短轴, $\angle B_1FB_2=60^\circ$. 求椭圆的离心率.

79. 已知椭圆的一个焦点是 $F_1(-3,0)$, 且经过点 $P(2,\sqrt{2})$. 求这个椭圆的标准方程.

80. 直线 $y=2x+b$ 被椭圆 $4x^2+y^2=16$ 所截得的弦长为 $\sqrt{35}$, 求实数 b 的值.

81. 若对于任意实数 k, 直线 $y=kx+1$ 与椭圆 $\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{m}=1$ 恒有公共点. 求实数 m 的取值范围.

82. 已知 P 是椭圆 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 上的点, F_1、F_2 是椭圆的两个焦点.

(1) 若 $\angle F_1PF_2=60^\circ$, 求 $\triangle PF_1F_2$ 的面积;

(2) 若 $\triangle PF_1F_2$ 的面积为 9, 求 $\angle F_1PF_2$ 的大小.

83. 水星的运行轨道是以太阳的中心为一个焦点的椭圆, 轨道上离太阳中心最近的距离约为 4.7×10^8km, 最远的距离约为 7.05×10^8km. 以这个轨道的中心为原点, 以太阳中心及轨道中心所在直线为 x 轴, 建立平面直角坐标系. 求水星运行轨道的方程. (长半轴的长和短半轴的长精确到 0.1×10^8km)

84. 双曲线 $\dfrac{x^2}{64}-\dfrac{y^2}{36}=1$ 上一点 P 到焦点 F_1 的距离等于 6, 求点 P 到另一焦点 F_2 的距离.

85. 已知双曲线以坐标轴为对称轴, 两个顶点间的距离为 2, 焦点到渐近线的距离为 $\sqrt{2}$. 求该双曲线的方程.

86. 如果双曲线关于原点对称, 它的焦点在坐标轴上, 实轴的长为 8, 焦距为 10. 写出此双曲线的方程.

87. 如果方程 $\dfrac{x^2}{m+2}-\dfrac{y^2}{m+1}=1$ 表示焦点在 y 轴上的双曲线, 求实数 m 的取值范围.

88. 已知双曲线经过点 $(1,1)$, 其渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{2}x$. 求此双曲线的方程.

89. 已知双曲线的中心在原点, 焦点在 y 轴上, 并且双曲线上两点 P_1、P_2 的坐标分别为 $(3,-4\sqrt{2})$、$(\frac{9}{4},5)$. 求该双曲线的方程.

90. 已知离心率为 $\frac{5}{3}$ 的双曲线与椭圆 $\frac{x^2}{40}+\frac{y^2}{15}=1$ 有公共焦点, 求此双曲线的方程.

91. A、B、C 是我方三个炮兵阵地. A 地在 B 地的正东, 相距 6km; C 地在 B 地的北偏西 $30°$, 相距 4km. P 为敌方炮兵阵地. 某时刻 A 地发现 P 地某种信号, 12s 后 B、C 两地才同时发现这种信号 (该信号的传播速度为 0.333km/s). 若从 A 地炮击 P 地, 求准确炮击的方位角. (结果精确到 $1°$)

92. 求抛物线 $y^2=ax(a\neq 0)$ 的焦点坐标和准线方程.

93. 若抛物线 $y^2=2x$ 上的 A、B 两点到焦点 F 的距离之和是 5, 求线段 AB 的中点的横坐标.

94. 求以坐标原点为顶点, 以 y 轴为对称轴, 并经过点 $P(-6,-3)$ 的抛物线的标准方程.

95. 已知直线 $y=kx-4$ 与抛物线 $y^2=8x$ 有且只有一个公共点, 求实数 k 的值.

96. 已知一隧道的顶部是抛物拱形, 拱高是 5m, 跨度为 10m. 建立适当的平面直角坐标系, 求此拱形所在的抛物线方程.

97. 已知动点 P 与定点 $(1,0)$ 的距离比点 P 到 y 轴的距离大 1, 求动点 P 的轨迹方程.

98. 过抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 焦点的一条直线与抛物线相交于两个不同的点, 求证: 这两个点的纵坐标 y_1、y_2 满足 $y_1y_2=-p^2$.

99. 过抛物线 $y^2=2px$ 的焦点且倾斜角为 α 的直线 l 与抛物线交于 A、B 两点, 求证:$|AB|=\frac{2p}{\sin^2\alpha}$.

100. 写出椭圆方程推导过程中的 “反过来推演”, 即验证: 若点 M 以方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的解 (x,y) 为坐标, 则点 M 一定在以 $F_1(-c,0)$ 与 $F_2(c,0)$ 为焦点的椭圆上, 这里 $c=\sqrt{a^2-b^2}$.

101. 给定 $A(-3,2)$、$B(3,-2)$ 两点, 求证: 与这两点距离相等的点 P 的轨迹方程是 $3x-2y=0$.

102. 已知点 $P(2,1)$ 在方程 $x^2+k^2y^2-3x-ky-4=0$ 所表示的曲线上, 求实数 k 的值.

103. 定长为 4 的线段 AB 的两端点分别在 x 轴、y 轴上滑动, 求 AB 中点的轨迹方程.

104. 已知动点 C 到点 $A(2,0)$ 的距离是它到点 $B(8,0)$ 的距离的一半, 求点 C 的轨迹方程.

105. 证明: 到两坐标轴距离相等的点的轨迹方程是 $x^2-y^2=0$.

106. 已知曲线 $C: y^2=x+1$ 和定点 $A(3,1)$, 点 B 在曲线 C 上运动. 求满足 $\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{PB}$ 的点 P 的轨迹方程.

107. 求过点 $M(2, \frac{\pi}{2})$ 且平行于极轴的直线的极坐标方程.

108. 求极坐标方程分别是 $\rho = 2\cos\theta$ 和 $\rho = 2\sin\theta$ 的两个圆的圆心距.

109. 作出下列方程的曲线:

(1) $x^2 - y^2 = 0$;

(2) $x^2 + 2xy - 3y^2 = 0$.

110. 已知圆 $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 3 = 0$ 和圆 $x^2 + y^2 + 4x - 1 = 0$ 关于直线 l 对称, 求直线 l 的方程.

111. 证明: 椭圆 $C_1 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 与椭圆 $C_2 : \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1$ 的四个交点共圆.

112. 点 P 在椭圆 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 上运动, 求它到直线 $l : x + 2y - 2 = 0$ 的距离的最大值.

113. 点 P 到定点 $F(2, 0)$ 的距离与它到直线 $x = 8$ 的距离之比为 k, 请分别给出 k 的某个值, 使得轨迹是椭圆、双曲线和抛物线.

114. 已知椭圆 $C : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$, 试确定 m 的取值范围, 使该椭圆上有两个不同的点关于直线 $l : y = 4x + m$ 对称.

115. 在极坐标系中, 求曲线 $\rho = \cos\theta + 1$ 与 $\rho\cos\theta = 1$ 的公共点到极点的距离.

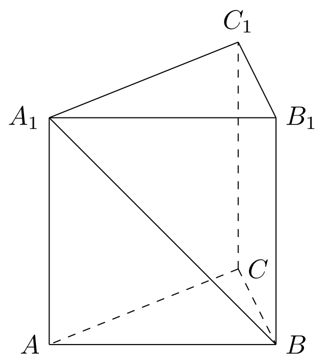
116. 在长方体 $ABCD - A'B'C'D'$ 中, $|AB| = 4$, $|BC| = 3$, $|AA'| = 5$. 写出:

(1) 与 $\overrightarrow{AC'}$ 有相等模的向量;

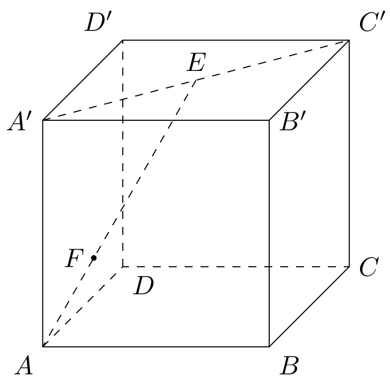
(2) $\overrightarrow{AB}$ 的相等向量;

(3) 与 $\overrightarrow{AA'}$ 垂直的向量.

117. 如图, 在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{CC_1} = \vec{c}$. 将向量 $\overrightarrow{A_1B}$ 表示为 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 的线性组合.



118. 如图, 在正方体 $ABCD - A'B'C'D'$ 中, E 是 $A'C'$ 的中点, 点 F 在 AE 上, 且 $|AF| = \frac{1}{2}|EF|$. 试用向量 $\overrightarrow{AA'}$、$\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AD}$ 的线性组合表示 $\overrightarrow{AF}$.



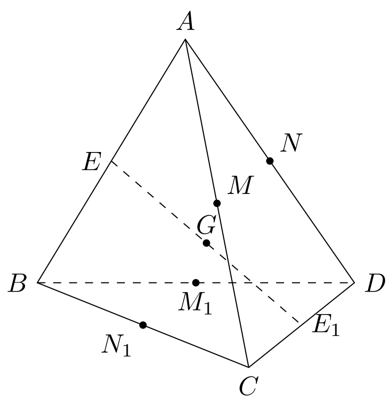
119. 已知 $\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ 与 $\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$ 的夹角都是 60°, 且 $|\overrightarrow{a}| = 1$, $|\overrightarrow{b}| = 2$, $|\overrightarrow{c}| = 3$. 计算:

(1) $(3\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b}) \cdot (\overrightarrow{b} - 3\overrightarrow{c})$;

(2) $|\overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b} - \overrightarrow{c}|$.

120. 已知空间四边形 $ABCD$ 中, $AB \perp CD, AC \perp BD$. 求证: $AD \perp BC$.

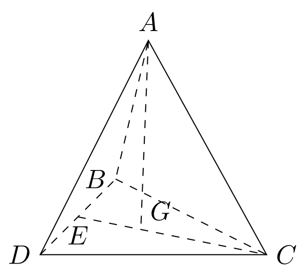
121. 如图, 在四面体 $ABCD$ 中, E、M、N 分别是棱 AB、AC、AD 的中点, E_1、M_1、N_1 分别是棱 CD、BD、BC 的中点, G 是线段 EE_1 的中点. 试判断下列各组中的三点是否共线:



(1) G、M、M_1;

(2) G、N、N_1.

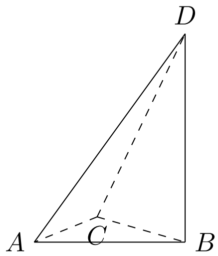
122. 如图, A 是 $\triangle BCD$ 所在平面外一点, G 是 $\triangle BCD$ 的重心. 求证: $\overrightarrow{AG} = \dfrac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$.



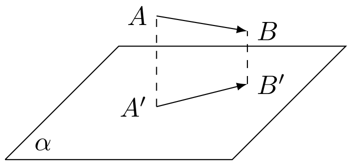
123. 如图, 在三棱锥 $D-ABC$ 中, $\angle DAC=\angle BAC=60^\circ$, $AC=1$, $AB=2$, $AD=3$.

(1) 求 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}$, 并说明异面直线 AC 与 BD 所成的角 θ 的大小在棱 BD 长度增大时是怎样变化的;

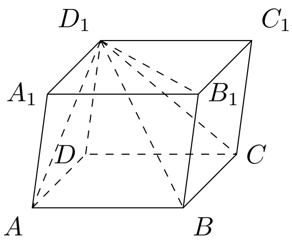
(2) 若 $AC\perp BC$, 判断点 D 在平面 ABC 上的射影是否可能在直线 BC 上, 给出你的结论并加以证明.



124. 在空间中还可以讨论一个向量 $\overrightarrow{AB}$ 在一个平面 α 上的投影. 如图, 若 $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{AB}$, 点 A 与点 B 在平面 α 上的投影分别是点 A' 与点 B', 则 $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{AB}$ 在平面 α 上的投影就是向量 $\overrightarrow{A'B'}$. 现在给定向量 $\overrightarrow{a}$、平面 α 以及平面 α 上的非零向量 $\overrightarrow{b}$. 设向量 $\overrightarrow{a}$ 在平面 α 上的投影是向量 $\overrightarrow{a'}$, 向量 $\overrightarrow{a'}$ 在向量 $\overrightarrow{b}$ 方向上的投影是向量 $\overrightarrow{a''}$. 求证: 向量 $\overrightarrow{a''}$ 是向量 $\overrightarrow{a}$ 在向量 $\overrightarrow{b}$ 方向上的投影.



125. 如图, 在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 设 $\overrightarrow{D_1A}=\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{D_1B_1}=\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{D_1C}=\overrightarrow{c}$. 试用 $\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$、$\overrightarrow{c}$ 表示 $\overrightarrow{D_1B}$.



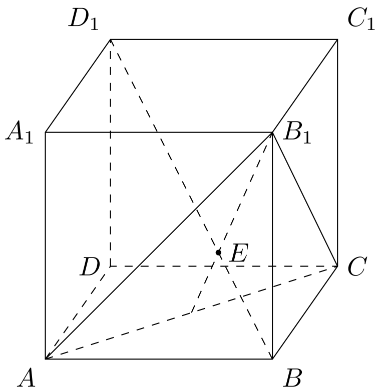
126. 已知 $\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$ 是空间的非零向量, 分析 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=|\overrightarrow{a}|\cdot|\overrightarrow{b}|$ 与 $\overrightarrow{a}\parallel\overrightarrow{b}$ 的关系.

127. 在正方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中, E 是面 $A'B'C'D'$ 的中心. 求下列各式中实数 λ、μ、ν 的值:

(1) $\overrightarrow{BD'}=\lambda\overrightarrow{AD}+\mu\overrightarrow{AB}+\nu\overrightarrow{AA'}$;

(2) $\overrightarrow{AE}=\lambda\overrightarrow{AD}+\mu\overrightarrow{AB}+\nu\overrightarrow{AA'}$.

128. 如图, 在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, BD_1 交平面 ACB_1 于点 E. 求证:

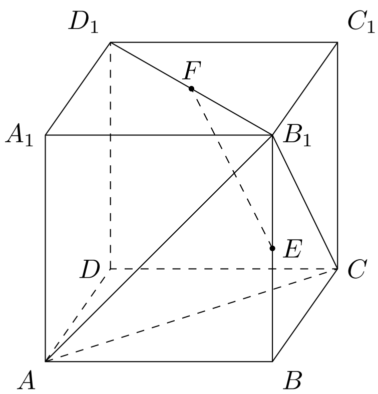


(1) $BD_1 \perp$ 平面 ACB_1;

(2) $|BE| = \dfrac{1}{2}|ED_1|$.

129. 在平面上有如下命题: "若 O 为直线 AB 外的一点, 则点 P 在直线 AB 上的充要条件是: 存在实数 λ、μ, 满足 $\overrightarrow{OP} = \lambda\overrightarrow{OA} + \mu\overrightarrow{OB}$, 且 $\lambda + \mu = 1$." 类比此

130. 如图, 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, E、F 分别是 BB_1、D_1B_1 的中点. 求证: $EF \perp$ 平面 B_1AC.



131. 在棱长为 1 的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, E、F 分别是 DD_1、DB 的中点, 点 G 在棱 CD 上, $|CG| = \dfrac{1}{4}|CD|$, H 是 C_1G 的中点.

(1) 求证: $EF \perp B_1C$;

(2) 求 EF 与 C_1G 所成角的余弦值;

(3) 求线段 FH 的长.

132. 已知长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱长 $|AB| = 14$, $|AD| = 6$, $|AA_1| = 10$, 以这个长方体的顶点 A 为坐标原点, 分别以射线 AB、AD、AA_1 为 x 轴、y 轴、z 轴的正半轴, 建立空间直角坐标系. 求长方体各顶点的坐标.

133. 已知 PA 垂直于正方形 $ABCD$ 所在的平面, M、N 分别是 AB、PC 的中点, 且 $|PA|=|AD|$, 分别以射线 AB、AD、AP 为 x 轴、y 轴、z 轴的正半轴, 建立空间直角坐标系. 求向量 $\overrightarrow{MN}$、$\overrightarrow{DC}$ 的坐标表示.

134. 已知 $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}-4\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{b}=\overrightarrow{i}-2\overrightarrow{j}+2\overrightarrow{k}$. 求:

(1) 向量 $\overrightarrow{a}$ 与 $\overrightarrow{b}$ 的夹角的大小;

(2) 向量 $\overrightarrow{a}$ 与 $\overrightarrow{b}$ 所在直线的夹角的大小.

135. 已知平行四边形 $ABCD$ 中的三个顶点的坐标分别为 $A(1,2,3)$、$B(2,-1,5)$ 与 $C(3,2,-5)$, 求顶点 D 的坐标.

136. 设 $\overrightarrow{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\overrightarrow{b}=(b_1,b_2,b_3)$, 且 $\overrightarrow{a}\neq\overrightarrow{b}$. 记 $|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}|=m$, 求 $\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}$ 与 x 轴正方向向量夹角的余弦值.

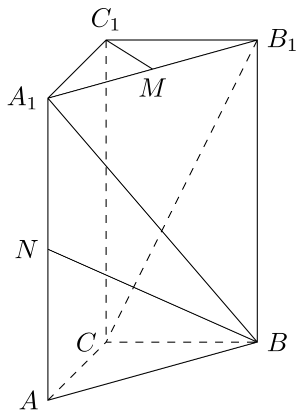
137. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $\overrightarrow{AB}=(2,4,0)$, $\overrightarrow{BC}=(-1,3,0)$. 求 $\angle ABC$ 的大小.

138. 给定空间三点 $A(0,2,3), B(-2,1,6), C(1,-1,5)$.

(1) 求以向量 $\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AC}$ 为一组邻边的平行四边形的面积 S;

(2) 若向量 $\overrightarrow{a}$ 与向量 $\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AC}$ 都垂直, 且 $|\overrightarrow{a}|=\sqrt{3}$, 求向量 $\overrightarrow{a}$ 的坐标.

139. 如图, 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $|CA|=|CB|=1$, $\angle BCA=90^\circ$,$|AA_1|=2$, M、N 分别是 A_1B_1、A_1A 的中点. 建立适当的空间直角坐标系, 解决如下问题:



(1) 求 $\overrightarrow{BN}$ 的模;

(2) 求 $\cos\langle\overrightarrow{BA_1},\overrightarrow{CB_1}\rangle$;

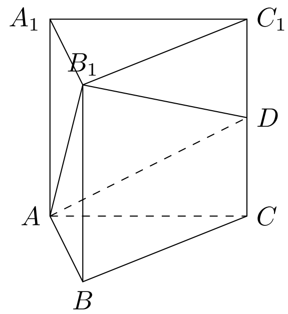
(3) 求证: $A_1B\perp C_1M$.

140. 在正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $|AA_1|=2|AB|=2$, E 为 AA_1 的中点. 求异面直线 BE 与 CD_1 所成角的大小.

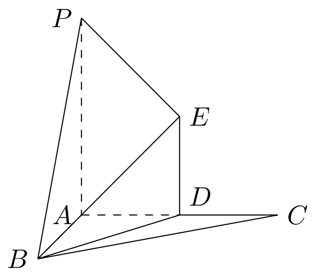
141. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, M、N、P 分别是 CC_1、B_1C_1、C_1D_1 的中点. 求证: 平面 $MNP \parallel$ 平面 A_1BD.

142. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 求 BB_1 与平面 ACD_1 所成角的大小.

143. 如图, 已知正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的各条棱长均为 a, D 是棱 CC_1 的中点. 求证: 平面 $AB_1D \perp$ 平面 ABB_1A_1.

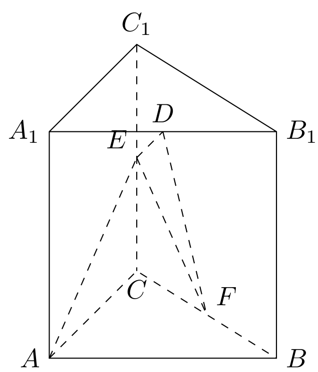


144. 如图, 已知 P 为平面 ABC 外一点, AP、AB、AC 两两互相垂直, 过 AC 的中点 D 作 $ED \perp$ 平面 ABC, 且 $|ED|=1$, $|PA|=2$, $|AC|=2$, 多面体 $B-PADE$ 的体积是 $\frac{\sqrt{3}}{3}$. 求平面 PBE 与平面 ABC 所成二面角的大小.

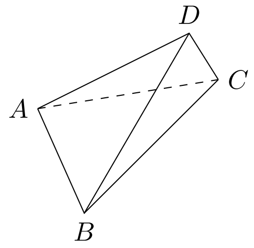


145. 如图, 在直棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $|AA_1|=|AB|=|AC|=2$, $AB \perp AC$, D、E、F 分别是 A_1B_1、CC_1、BC 的中点. (1) 求 AE 与平面 DEF 所成角的大小;

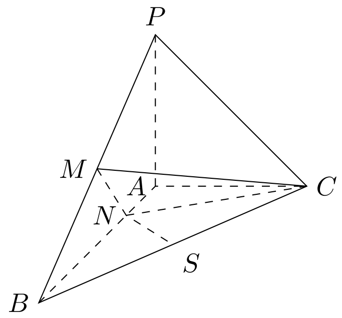
(2) 求 A 到平面 DEF 的距离.



146. 如图, 在空间四边形 $ABCD$ 中, $|AC| = |AD|$, $\angle BAC = \angle BAD$. 求证: $CD \perp AB$.



147. 如图, 在三棱锥 $P-ABC$ 中, $PA \perp$ 平面 ABC,$AB \perp AC$, $|PA| = |AC| = \frac{1}{2}|AB|$, M、S 分别为 PB、BC 的中点, N 为 AB 上一点, $|BN| = 3|NA|$.



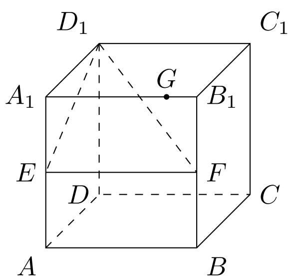
(1) 求证: $CM \perp SN$;

(2) 求二面角 $PBCA$ 的大小.

148. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 设 AB、DD_1 的中点分别为 M、N. 求直线 B_1M 与 CN 所成角的大小.

149. 过边长为 1 的正方形 $ABCD$ 的顶点 A, 作长度为 1 的线段 $AE \perp$ 平面 $ABCD$. 求平面 ADE 与平面 BCE 所成二面角的大小.

150. 如图, 在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, E、F 分别为棱 AA_1、BB_1 的中点, G 为棱 A_1B_1 上的一点. 求点 G 到平面 D_1EF 的距离.



151. 分别求下列两数的等差中项:

(1) $8-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 与 $8+\frac{\sqrt{2}}{2}$;

(2) $(a+b)^2$ 与 $(a-b)^2$.

152. 设数列 $\{a_n\}$ 为等差数列, 其公差为 d.

(1) 已知 $a_1 = 2$, $d = 3$, 求 a_{10};

(2) 已知 $a_1 = 3$, $a_n = 21, d = 2$, 求 n;

(3) 已知 $a_1 = 12$, $a_6 = 27$, 求 d;

(4) 已知 $a_6 = 9$, $d = -\frac{1}{2}$, 求 a_1.

153. 已知数列 $\{a_n\}$ 为等差数列, 其公差为 d. 求证: 对任意给定的正整数 m、n, 都有 $a_n = a_m + (n-m)d$.

154. 设数列 $\{a_n\}$ 为等差数列, 其公差为 d.

(1) 已知 $a_2 = 31$, $a_7 = 76$, 求 a_1 及 d;

(2) 已知 $a_1 + a_6 = 12$, $a4 = 7$, 求 a_9.

155. 设数列 $\{a_n\}$ 为等差数列, 其公差为 d, 前 n 项和为 S_n.

(1) 已知 $a_1 = 20$, $a_n = 54$, $S_n = 999$, 求 d 及 n;

(2) 已知 $d = \frac{1}{3}$, $S_{37} = 629$, 求 a_1 及 a_{37};

(3) 已知 $a_1 = \frac{5}{6}$, $d = -\frac{1}{6}$, $S_n = -5$, 求 n 及 a_n;

(4) 已知 $d = 2$, $a_{15} = -10$, 求 a_1 及 S_15.

156. 设数列 $\{a_n\}$ 为等差数列, 其前 n 项和为 S_n.

(1) 已知 $a_6 = 10$, $S_5 = 5$, 求 S_8;

(2) 已知 $S_4 = 2$, $S_9 = -6$, 求 S_{12}.

157. 设数列 $\{a_n\}$ 为等差数列, 其前 n 项和为 S_n.

(1) 已知 $a_4 + a_{14} = 1$, 求 S_{17};

(2) 已知 $S_{21} = 420$, 求 a_{11}; (3) 已知 $a_1 + a_2 + a_3 = -3$, $a_{18} + a_{19} + a_{20} = 6$, 求 S_{20};

(4) 已知 $S_4 = 2$, $S_8 = 6$, 求 S_{16}.

158. 求证: “$\triangle ABC$ 三个内角的度数可以构成等差数列” 是 “$\triangle ABC$ 中有一个内角为 $60°$” 的充要条件.

159. 《九章算术》中的 “竹九节” 问题: 现有一根 9 节的竹子, 自上而下各节的容积成等差数列. 若最上面 4 节的容积共 3 升, 最下面 3 节的容积共 4 升, 则第 5 节的容积为多少升?

160. (1) 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 等式 $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$ $(n \geq 2)$ 是否都成立?

(2) 在数列 $\{a_n\}$ 中, 如果对于任意的正整数 $n(n \geq 2)$, 都有 $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$, 那么数列 $\{a_n\}$ 一定是等差数列吗?

161. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 其前 n 项和为 S_n. 已知公差 $d=24$, $S_{20}=400$.

(1) 写出 $\sum_{i=1}^{10} a_{2i-1}$ 的具体展开式, 并求其值;

(2) 用求和符号表示 $a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{20}$, 并求其值.

162. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_1=-3$, $11a_5=5a_8$. 求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 的最小值.

163. 已知等差数列 $\{a_n\}$, 其前 n 项和为 S_n. 若存在两个不相等的正整数 p 和 q, 满足 $S_p=q$, $S_q=p$, 求 S_{p+q}.

164. 已知一个凸多边形各个内角的度数可以排列成一个公差为 5 的等差数列, 且最小角为 120°, 该多边形是几边形?

165. 某产品按质量分成 10 个档次, 生产最低档次产品的利润是 8 元/件. 每提高一个档次, 每件产品的利润增加 2 元, 但产量每天减少 3 件. 如果在某段时间内, 最低档次 (记作第 1 档次) 的产品每天可生产 60 件, 那么在该段时间内, 生产第几档次的产品可获得最大利润?

166. 求下列各组数的等比中项:

(1) $\sqrt{3}+1$ 与 $\sqrt{3}-1$;

(2) $a^4+a^2b^2$ 与 $b^4+a^2b^2(a\neq 0,\, b\neq 0)$.

167. 设数列 $\{a_n\}$ 为等比数列, 其公比为 q.

(1) 已知 $a_5=8$, $a_8=1$, 求 a_1、q;

(2) 已知 $a_3=2$, $q=-1$, 求 a_{15};

(3) 已知 $a_4=12$, $a_8=6$, 求 a_{12}.

168. 已知数列 $\{a_n\}$ 为等比数列, 其公比为 q. 判断下列数列是否为等比数列. 如果是, 求其公比; 如果不是, 请说明理由.

(1) 数列 $\{2a_n\}$;

(2) 数列 $\{a_n+a_{n+1}\}$.

169. 已知数列 $\{a_n\}$ 和数列 $\{b_n\}$ 为项数相同的等比数列, 公比分别为 q_1 和 q_2. 求证: 数列 $\{a_nb_n\}$ 为等比数列, 其公比为 q_1q_2.

170. 已知直角三角形的斜边长为 c, 两条直角边长分别为 a 和 $b(a<b)$, 且 a,b,c 成等比数列. 求 $a:c$ 的值.

171. 某产品经过 4 次革新后, 成本由原来的 105 元下降到 60 元. 如果这种产品每次革新后成本下降的百分比相同, 那么每次革新后成本下降的百分比是多少? (结果精确到 0.1%)

172. 设数列 $\{a_n\}$ 为等比数列, 其公比为 q, 前 n 项和为 S_n.

(1) 已知 $a_1 = 5$, $q = 3$, 求 S_5;

(2) 已知 $a_8 = \dfrac{1}{16}$, $q = \dfrac{1}{2}$, 求 S_8;

(3) 已知 $a_1 = -2$, $q = -\dfrac{1}{2}$, $a_n = \dfrac{1}{1024}$, 求 S_n;

(4) 已知 $S_6 = \dfrac{189}{4}$, $q = \dfrac{1}{2}$, 求 a_1.

173. 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比 $q < 1$, 前 n 项和为 S_n. 已知 $a_3 = 2$, $S_4 = 5S_2$, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

174. 一个球从 100m 高处自由落下, 假设每次着地后又跳回到原高度的一半再落下.

(1) 当它第 10 次着地时, 求它经过的总路程;

(2) 它可能在某次着地时, 经过的总路程超过 300m 吗? 如果可能, 请说明是第几次着地首次超过 300m; 如果不可能, 请说明理由.

175. 已知 b 是 a 与 c 的等比中项, 且 a、b、c 同号. 求证: $\dfrac{a+b+c}{3}, \sqrt{\dfrac{ab+bc+ca}{3}}, \sqrt[3]{abc}$ 成等比数列.

176. 已知 $a \neq b$, 且 a、b 都不为 0. 设 n 为正整数, 写出 $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} a^{n-i}b^i$ 的具体展开式, 并证明 $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} a^{n-i}b^i = \frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}$.

177. 已知对任意给定的正整数 n, 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = \dfrac{1-q^n}{1-q}(q \neq 0$ 且 $q \neq 1)$. 判断 $\{a_n\}$ 是否为等比数列, 并说明理由.

178. 已知数列 $\{a_n\}$ 为等差数列, 数列 $\{bn\}$ 满足 $b_n = (\dfrac{1}{2})^{a_n}$($n$ 为正整数).

(1) 求证: 数列 $\{b_n\}$ 为等比数列;

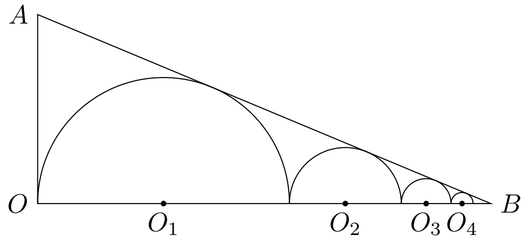
(2) 若 $b_1 + b_2 + b_3 = \dfrac{21}{8}$, $b_1b_2b_3 = \dfrac{1}{8}$, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

179. 如图, 已知直角三角形 AOB 的两条直角边 AO 和 BO 的长分别为 5 和 12, 点 O_1、O_2、$\cdots$、O_n、$\cdots$ 在边 OB 上, 半圆 O_1 与 AO 和 AB 所在直线均相切, 半圆 O_2、O_3、$\cdots$、O_n、$\cdots$ 与 AB 所在直线相切, 且与半圆 O_1、O_2、$\cdots$、O_{n-1}、$\cdots$ 分别外切. 设这些半圆的半径分别为 r_1、r_2、$\cdots$、r_n、$\cdots$.

(1) 求证: 数列 $\{r_n\}$ 为等比数列;

(2) 求前 n 个半圆弧长的总和 L_n;

(3) 利用前 n 个半圆弧长的总和 L_n 的表达式, 计算 $\lim\limits_{n\to+\infty} L_n$.



180. 已知下列数列 $\{a_n\}$ 的通项公式, 写出它的前 4 项.

(1) $a_n = n^2 - 5n$;

(2) $a_n = \dfrac{\cos n\pi}{2}$.

181. 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = \dfrac{n^2+n-1}{3}$, $79\dfrac{2}{3}$ 是否是该数列中的项? 若是, 是第几项?

182. 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = n^2 - 8n + 5$.

(1) 写出这个数列的前 5 项;

(2) 这个数列有没有最小项? 如果有, 是第几项?

183. 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = (3n-2)(\dfrac{3}{5})^n$, 试问: 该数列是否有最大项、最小项? 若有, 分别指出第几项最大、最小; 若没有, 试说明理由.

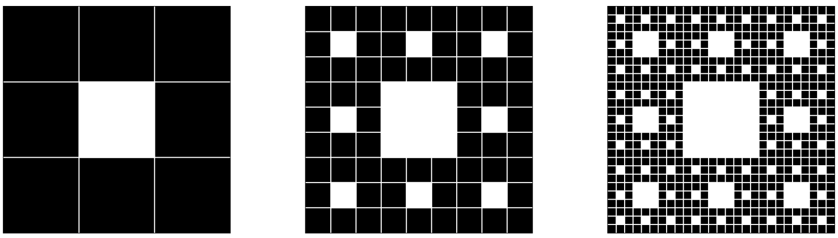
184. 已知数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1 = 1$, 且 $a_n = 2^{n-1} \cdot a_{n-1} (n \geq 2)$. 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

185. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 33$, 且 $a_n - a_{n-1} = 2(n-1)(n \geq 2)$. 求数列 $\{\dfrac{a_n}{n}\}$ 的最小项.

186. 一个正方形被等分成九个相等的小正方形, 将最中间的一个正方形挖掉, 得图①; 再将剩下的每个正方形都分成九个相等的小正方形, 并将其最中间的一个正方形挖掉, 得图②; 如此继续下去 ······

(1) 图③中共挖掉了多少个正方形?

(2) 求每次挖掉的正方形个数所构成的数列的一个递推公式.



① ② ③

187. 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = \dfrac{n-\sqrt{97}}{n-\sqrt{98}}$, 试问: 该数列是否有最大项、最小项? 若有, 分别指出第几项最大、最小; 若没有, 试说明理由.

188. 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = n^2 + \lambda n$, 其中 λ 是常数. 若数列 $\{a_n\}$ 为严格增数列, 求 λ 的取值范围.

189. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 且 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 2S_n$(n 为正整数). 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

190. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n = 12 - 12 \cdot (\dfrac{2}{3})^n$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n = (2n-1)a_n$, 问是否存在正整数 m, 使得 $b_m \geq 9$ 成立, 并说明理由.

191. 某皮革厂第 1 年初有资金 1000 万元, 由于引进了先进的生产设备, 资金年平均增长率可达到 50%. 每年年底定额扣除下一年的消费基金后, 将剩余资金投入再生产. 这家皮革厂每年应扣除多少消费基金, 才能实现资金在第 5 年年底扣除消费基金后达到 2000 万元的目标? (结果精确到 1 万元)

192. 用数学归纳法证明 $1+a+a^2+\cdots+a^{n+1}=\dfrac{1-a^{n+2}}{1-a}$ ($a\neq 1$, n 为正整数). 在验证 $n=1$ 等式成立时, 等式左边为 (　　).

A. 1　　B. $1+a$　　C. $1+a+a^2$　　D. $1+a+a^2+a^3$

193. 用数学归纳法证明: $1\times 2+2\times 5+\cdots+n(3n-1)=n^2(n+1)$($n$ 为正整数).

194. 用数学归纳法证明: $\dfrac{1}{1\times 3}+\dfrac{1}{3\times 5}+\dfrac{1}{5\times 7}+\cdots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{n}{2n+1}$($n$ 为正整数).

195. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$, 设该数列的前 n 项和为 S_n, 且 $S_n, S_{n+1}, 2a_1$ 成等差数列. 用数学归纳法证明: $S_n=\dfrac{2^n-1}{2^{n-1}}$($n$ 为正整数).

196. 用数学归纳法证明: $1\cdot n+2\cdot(n-1)+3\cdot(n-2)+\cdots+n\cdot 1=\dfrac{1}{6}n(n+1)(n+2)$($n$ 为正整数).

197. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=\dfrac{1}{2}$, 且对任意正整数 n, $a_1+a_2+\cdots+a_n=n^2a_n$ 成立. 试用数学归纳法证明: $a_n=\dfrac{1}{n(n+1)}$.

198. 设 $a_n=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}$($n$ 为正整数), 是否存在一次函数 $g(x)=kx+b$, 使得等式 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}=g(n)(a_n-1)$ 对大于 1 的正整数 n 都成立? 证明你的结论.