1. 求 θ, 使复数 $z=\cos 2\theta+(\tan^2\theta-\tan\theta-2)\mathrm{i}$ 是:

(1) 实数;

(2) 纯虚数;

(3) 零.

解答在这里 (1) 由 $\tan^2\theta-\tan\theta-2=0$, 得 $\tan\theta=-1$, $\tan\theta=2$, 所以 $\theta=k\pi-\dfrac{\pi}{4}$, $\theta=k\pi+\arctan 2(k\in\mathbf{Z})$. (2) 由 $\begin{cases}\cos 2\theta=0,\\(\tan\theta-2)(\tan\theta+1)\neq 0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}\cos^2\theta-\sin^2\theta=0,\\(\tan\theta-2)(\tan\theta+1)\neq 0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\tan\theta=\pm 1,\\(\tan\theta-2)(\tan\theta+1)\neq 0,\end{cases}$ 则 $\tan\theta=1$, 所以 $\theta=k\pi+\dfrac{\pi}{4}(k\in\mathbf{Z})$. (3) 由 $\begin{cases}\cos 2\theta=0,\\(\tan\theta-2)(\tan\theta+1)=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}\tan\theta=\pm 1,\\(\tan\theta-2)(\tan\theta+1)=0,\end{cases}$ 则 $\tan\theta=-1$, 所以 $\theta=k\pi-\dfrac{\pi}{4}(k\in\mathbf{Z})$.

2. 已知实数 a,x,y 满足 $a^2+(2+\mathrm{i})a+2xy+(x-y)\mathrm{i}=0$, 则点 (x,y) 的轨迹是 (　　).

A. 直线　　B. 圆心在原点的圆　　C. 圆心不在原点的圆　　D. 椭圆

解答在这里将题设之式整理得 $a^2+2a+2xy+(a+x-y)\mathrm{i}=0$. 所以 $\begin{cases}a^2+2a+2xy=0,\\a+x-y=0.\end{cases}$ 由② , 得 $a=y-x$, 代入① , 得 $(y-x)^2+2(y-x)+2xy=0$ 即 $x^2+y^2-2x+2y=0$, $(x-1)^2+(y+1)^2=2$. 故应选 (C).

3. 若 $x,y\in\mathbf{R}$, 则 “$x=0$” 是 “$x+y\mathrm{i}$ 为纯虚数” 的 (　　).

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

4. 复数 $a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$ 在复平面内的对应点在虚轴上的一个充要条件是 (　　).

A. $a=0$　　B. $b\neq 0$　　C. $ab=0$　　D. $\dfrac{a}{b}=0$

5. 下列结论中, 正确的是 (　　).

A. 复平面内, 原点是实轴与虚轴的公共点

B. 实数的共轭复数一定是实数, 虚数的共轭复数一定是虚数

C. 复数集 $\mathbf{C}$ 与复平面内所有向量所组成的集合是一一对应的

D. 若使得实数 x 对应于纯虚数 $x\mathrm{i}$, 则实数集 $\mathbf{R}$ 与纯虚数集是一一对应的

6. 复平面内, 若复数 $z=m^2(1+\mathrm{i})-m(4+\mathrm{i})-6\mathrm{i}$ 所对应的点在第二象限, 则实数 m 的取值范围是 (　　).

A. $(0,3)$　　B. $(-2,0)$　　C. $(3,4)$　　D. $(-\infty,-2)$

7. 由方程 $|z|^2-8|z|+15=0$ 所确定的复数在复平面内对应点的轨迹是 (　　).

A. 四个点　　B. 四条直线　　C. 一个圆　　D. 两个圆

8. 已知集合 $M=\{1,2,(m^2-3m-1)+(m^2-5m+6)\mathrm{i},m\in\mathbf{R}\}$, $N=\{-1,3\}$ 满足 $M\cap N\neq\varnothing$, 则 m 等于 (　　).

A. 0 或 3　　B. -1 或 3　　C. -1 或 6　　D. 3

9. 若复数 $z=2m^2-3m-2+(m^2-3m+2)\mathrm{i}$ 是纯虚数, 则实数 m 的值为 (　　).

A. 1 或 2　　B. $-\dfrac{1}{2}$ 或 2　　C. $-\dfrac{1}{2}$　　D. 2

10. 复平面内, 正方形的三个顶点对应的复数分别是 $1+2\mathrm{i}$, 0, $-2+\mathrm{i}$, 则第四个顶点所对应的复数为 (　　).

A. $3+\mathrm{i}$　　B. $3-\mathrm{i}$　　C. $1-3\mathrm{i}$　　D. $-1+3\mathrm{i}$

11. 判断命题的真假: $x_1+y_1\mathrm{i}=x_2+y_2\mathrm{i}$ 的充要条件是 $x_1=x_2$, 且 $y_1=y_2$.__________.

12. 判断命题的真假: 任意两个复数都不能比较大小.__________.

13. 判断命题的真假: 若 $x,y\in\mathbf{R}$, 且 $x=y$, 则 $(x-y)+(x+y)\mathrm{i}$ 是纯虚数.__________.

14. 已知复数 $z=\dfrac{a^2+a-2}{a-3}+(a^2-4a+3)\mathrm{i}(a\in\mathbf{R})$. 若 $z\in\mathbf{R}$, 则 $a=$__________; 若 z 是纯虚数, 则 $a=$__________.

15. 已知 $z=(2\cos\theta-\sqrt{3})+\mathrm{i}(2\sin\theta-1)$. 若 $z\in\mathbf{R}$, 则 $\theta=$__________; 若 z 是纯虚数, 则 $\theta=$__________.

16. 已知复数 $z=(\tan^2\theta+\tan\theta-2)+\mathrm{i}(\cos^2\theta-\sin^2\theta)$. 当 $\theta=$__________ 时, z 为实数; 当 $\theta=$__________ 时, z 为纯虚数; 当 $\theta=$__________ 时, $z=0$.

17. 复平面内, 若复数 $z=(m^2-m-2)+(m^2-3m+2)\mathrm{i}$ 所对应的点在虚轴上, 则实数 m 的值等于__________.

18. 复平面内, 若复数 $(m^2-8m+15)+(m^2-5m-14)\mathrm{i}$ 所对应的点位于第四象限, 则实数 m 的取值范围是__________.

19. 满足 $|\log_3 x+4\mathrm{i}|=5$ 的实数 x 的值是__________.

20. 复平面内, 已知复数 $z=x-\dfrac{1}{3}\mathrm{i}$ 所对应的点都在单位圆内, 则实数 x 的取值范围是__________.

21. 不等式 $|4+\mathrm{i}\log_{\frac{1}{2}}(x-1)|\geq|-3+4\mathrm{i}|$ 的解集是__________.

22. 若复数 $z=(x-1)+(2x-1)\mathrm{i}$ 的模小于 $\sqrt{10}$, 则实数 x 的取值范围是__________.

23. 若复数 $z=\cos\alpha+\mathrm{i}(1-\sin\alpha)$, 则 $|z|$ 的取值范围是__________.

24. 若复数 $z_1=1-\mathrm{i}r\sin\alpha$ 与 $z_2=r\cos\alpha-\sqrt{3}\mathrm{i}(r>0)$ 相等, 则 $z_1=$__________.

25. 已知 $z_1=\sin 2\theta+\mathrm{i}\cos\theta$, $z_2=\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta(0\leq\theta<\pi)$. 若 $z_1=z_2$, 则 $\theta=$__________; 若 $z_1=\overline{z_2}$, 则 $\theta=$__________.

26. 已知 $z+|\overline{z}|=2+\mathrm{i}$, 求复数 z.

27. 已知 $z-2|z|=-7+4\mathrm{i}$, 求复数 z.

28. 已知复数 $z=\dfrac{x^2-3x+2}{x+3}+(x^2+2x-3)\mathrm{i}$, 求实数 x, 使:

(1) z 是实数;

(2) z 是虚数;

(3) z 是纯虚数.

29. 若 $\cos 2\theta+\mathrm{i}(1-\tan\theta)$ 是纯虚数, 则 θ 的值取 (　　).

A. $k\pi-\dfrac{\pi}{4}(k\in\mathbf{Z})$　　B. $k\pi+\dfrac{\pi}{4}(k\in\mathbf{Z})$　　C. $k\pi\pm\dfrac{\pi}{4}(k\in\mathbf{Z})$　　D. $\dfrac{k\pi}{2}+\dfrac{\pi}{4}(k\in\mathbf{Z})$

30. 方程 $3z+|z|=1-3\mathrm{i}$ 的解是 (　　).

A. i　　B. $-\mathrm{i}$　　C. $\dfrac{3}{4}-\mathrm{i}$　　D. $-\mathrm{i}$ 和 $\dfrac{3}{4}-\mathrm{i}$

31. 若虚数 $(x-2)+y\mathrm{i}(x,y\in\mathbf{R})$ 的模为 $\sqrt{3}$, 则 $\dfrac{y}{x}$ 的最大值是 (　　).

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　C. $\dfrac{1}{2}$　　D. $\sqrt{3}$

32. 设复数 $z=\log_2(\cos\alpha+\dfrac{1}{2})+\mathrm{i}\log_2(\sin\alpha+\dfrac{1}{2})$, 求 α, 使:

(1) z 为实数;

(2) z 为纯虚数;

(3) z 在复平面内的对应点在第二象限;

(4) z 的实部与虚部相等.

33. 根据条件, 在复平面内画出复数对应点的集合所表示的图形: $1\le|\mathrm{Re}(z)|\le 2(\mathrm{Re}(z)$ 表示 z 的实部).

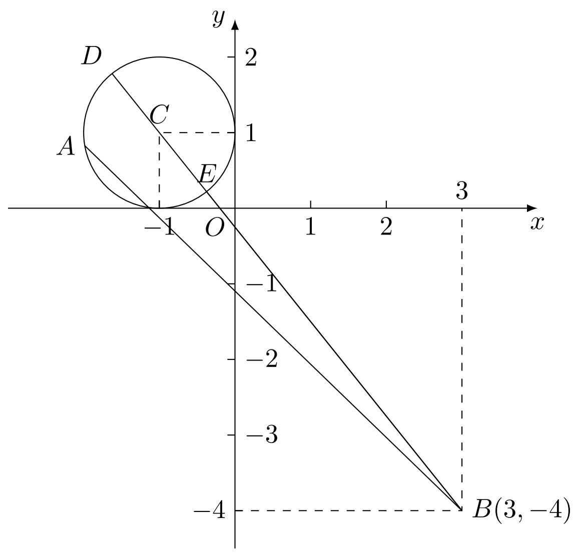
34. 根据条件, 在复平面内画出复数对应点的集合所表示的图形: $1\le|z|\le 2$ 且 $\mathrm{Im}(z)<0(\mathrm{Im}(z)$ 表示 z 的虚部).

35. 已知两个复数集 $M=\{z|z=t+(1-t^2)\mathrm{i},t\in\mathbf{R}\}$ 及 $N=\{z|z=2\cos\theta+(\lambda+3\sin\theta)\mathrm{i},\lambda\in\mathbf{R},\theta\in\mathbf{R}\}$ 的交集为非空集合, 求 λ 的取值范围.

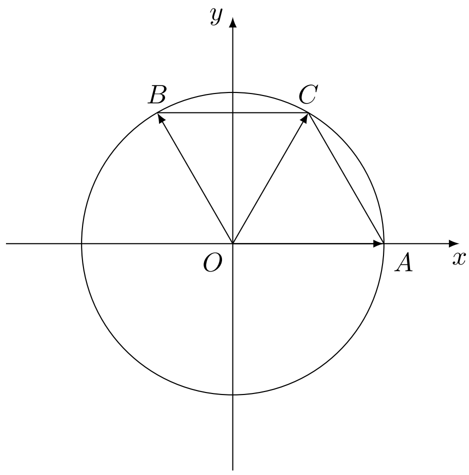
36. 已知 $\dfrac{z}{z-1}$ 是纯虚数, 求复数 z 在复平面内对应点的轨迹的普通方程.

解答在这里设 $z=x+y\mathrm{i}(x,y\in\mathbf{R})$, 则 $\dfrac{z}{z-1}=\dfrac{x+y\mathrm{i}}{(x-1)+y\mathrm{i}}=\dfrac{(x+y\mathrm{i})[(x-1)-y\mathrm{i}]}{(x-1)^2+y^2}=\dfrac{x(x-1)+y^2+[y(x-1)-xy]i}{(x-1)^2+y^2}=\dfrac{x(x-1)+y^2-y\mathrm{i}}{(x-1)^2+y^2}$. 因为 $\dfrac{z}{z-1}$ 是纯虚数, 所以 $\begin{cases}x(x-1)+y^2=0,\\ y\neq 0.\end{cases}$ 即复数 z 在复平面内对应点的轨迹方程是圆 (除两点), $(x-\dfrac{1}{2})^2+y^2=\dfrac{1}{4}(y\neq 0)$.

37. 若 $|z+1-\mathrm{i}|=1$, 求 $|z-3+4\mathrm{i}|$ 的最大值和最小值. 解答在这里由条件 $|z-(-1+\mathrm{i})|=1$, 知复数 Z 的对应点 A 在以 (-1, 1) 为圆心、1 为半径的圆上运动, 而 $|z-3+4\mathrm{i}|=|z-(3-4\mathrm{i})|$, 它表示点 A 和点 B(3, -4) 的距离 (如图 1), 显然, $|BE|\le|AB|\le|BD|$, 所以 $|z-3+4\mathrm{i}|$ 的最大值和最小值分别是 $\sqrt{41}+1$ 和 $\sqrt{41}-1$.



38. 已知 $|z_1| = |z_2| = 1$, $z_1 + z_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$, 求复数 z_1, z_2. 解答在这里如图,



因为 $z_1 + z_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$, 所以 $z_1 + z_2$ 对应于向量 $\overrightarrow{OC}$, 其中 $\angle COA = 60°$. 设 $\overrightarrow{OA}$ 对应于复数 z_1, $\overrightarrow{OB}$ 对应于复数 z_2, 则四边形 $AOBC$ 是菱形, 且 $\triangle AOC$ 和 $\triangle BOC$ 都是等边三角形, 于是 $z_1 = 1$, $z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{i}$ 或 $z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{i}$, $z_2 = 1$.

39. 求值: $(1+\mathrm{i})^{10} - (1-\mathrm{i})^{10}$.

解答在这里原式 $= [(1+\mathrm{i})^2]^5 - [(1-\mathrm{i})^2]^5 = (2\mathrm{i})^5 - (-2\mathrm{i})^5 = 2^5\mathrm{i} + 2^5\mathrm{i} = 64\mathrm{i}$.

40. $\dfrac{(2+2\mathrm{i})^5}{(-1+\sqrt{3}\mathrm{i})^4}$.

解答在这里原式 $= \dfrac{(2+2\mathrm{i})(1+\mathrm{i})^4}{(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i})^4} = \dfrac{(2+2\mathrm{i})(2\mathrm{i})^2}{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}} = \dfrac{-8(1+\mathrm{i})(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i})}{(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i})(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i})} = 4(1+\mathrm{i})(1+\sqrt{3}\mathrm{i}) = 4(1-\sqrt{3}) + 4(1+\sqrt{3})\mathrm{i}$.

41. 求复数 $z = \dfrac{(3-4\mathrm{i})^3}{(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i})\cdot(\sqrt{3}+\sqrt{2}\mathrm{i})^4}$ 的模.

解答在这里 $|z|=\dfrac{|3-4\mathrm{i}|^3}{|\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}|^2\cdot|\sqrt{3}+\sqrt{2}\mathrm{i}|^4}=\dfrac{5^3}{(\sqrt{5})^4}=5.$

42. 已知 $|z|\leq 1$, $|\omega|\leq 1$, 求证: $|z+\omega|\leq|1+\overline{z}\omega|$. 解答在这里因为 $|z+\omega|^2-|1+\overline{z}\omega|^2=(z+\omega)(\overline{z}+\overline{\omega})-(1+\overline{z}\omega)(1+z\overline{\omega})=z\overline{z}+\omega\overline{\omega}-1-z\overline{z}\omega\overline{\omega}=|z|^2+|\omega|^2-1-|z|^2\cdot|\omega|^2=(|z|^2-1)(1-|\omega|^2)\leq 0$. 所以 $|z+\omega|^2\leq|1+\overline{z}\omega|^2$, 于是 $|z+\omega|\leq|1+\overline{z}\omega|$.

43. 若复数 z 满足 $z+\dfrac{4}{z}\in\mathbf{R}$, 且 $|z-2|=2$, 求 z. 解答在这里因为 $z+\dfrac{4}{z}\in\mathbf{R}$, 所以 $z+\dfrac{4}{z}=\overline{z}+\dfrac{4}{\overline{z}}$, 整理得 $z^2\overline{z}+4\overline{z}=z\overline{z^2}+4z$, 即 $z|z|^2-|z|^2\cdot\overline{z}-4(z-\overline{z})=0$, 即 $(z-\overline{z})(|z|^2-4)=0$.

(1) 若 $|z|=2$, 结合已知条件, $|z-2|=2$, 得 $z=1\pm\sqrt{3}\mathrm{i}$.

(2) 若 $z-\overline{z}=0$, 结合 $|z-2|=2$, 得 $z=0$(舍去) 和 $z=4$.

综合 (1) 与 (2), 得 $z=1\pm\sqrt{3}\mathrm{i}$ 或 $z=4$.

44. 求函数 $y=\sqrt{4a^2+x^2}+\sqrt{(x-a)^2+a^2}(a>0)$ 的最值.

解答在这里令 $z_1=x+2a\mathrm{i}$, $z_2=a-x+a\mathrm{i}$, 则 $y=|z_1|+|z_2|\geq|z_1+z_2|=|a+3a\mathrm{i}|=\sqrt{10}a$. 所以当 $\dfrac{a-x}{x}=\dfrac{a}{2a}$, 即 $x=\dfrac{2a}{3}$ 时, 函数 y 有最小值 $\sqrt{10}a$.

45. 若 $|z+\dfrac{1}{z}|=1$, 求 $|z|$ 的取值范围. 解答在这里由 $||z|-|\dfrac{1}{z}||\leq|z+\dfrac{1}{z}|$, 得 $-1\leq|z|-\dfrac{1}{|z|}\leq 1$, 即 $\begin{cases}|z|^2+|z|-1\geq 0,\\ |z|^2-|z|-1\leq 0,\end{cases}$ 所以 $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\leq|z|\leq\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$. 注意在应用不等式 $||z_1|-|z_2||\leq|z_1+z_2|\leq|z_1|+|z_2|$ 求函数的最大值、最小值时, 需留意取 “=” 的条件. 当 $\overrightarrow{OZ_1}$ 与 $\overrightarrow{OZ_2}$ 同向时, $|z_1+z_2|=|z_1|+|z_2|$; 当 $\overrightarrow{OZ_1}$ 与 $\overrightarrow{OZ_2}$ 异向时, $|z_1+z_2|=||z_1|-|z_2||$.

46. 两个共轭虚数的差一定是 (　　).

A. 非零实数　　B. 零　　C. 纯虚数　　D. 非纯虚数

47. 复平面内, 已知复数 $2-\mathrm{i}$ 和 $3+4\mathrm{i}$ 分别对于点 M,N, 则向量 $\overrightarrow{MN}$ 对应的复数是 (　　).

A. $5+3\mathrm{i}$　　B. $-1-5\mathrm{i}$　　C. $1+5\mathrm{i}$　　D. $1-5\mathrm{i}$

48. 若复数 $z=3+a\mathrm{i}$ 满足条件 $|z-2|<2$, 则实数 a 的取值范围是 (　　).

A. $(-2\sqrt{2},2\sqrt{2})$　　B. (-2, 2)　　C. (-1, 1)　　D. $(-\sqrt{3},\sqrt{3})$

49. 若复数 z 满足 $|z+3-4\mathrm{i}|=2$, 则 $|z|$ 的最小值和最大值分别是 (　　).

A. 1 和 9　　B. 4 和 10　　C. 5 和 11　　D. 3 和 7

50. 若 $|z-25\mathrm{i}|\leq 15$, $z\in\mathbf{C}$, 则 $|z|$ 最小时的 $z=$__________, $|z|$ 最大时的 $z=$__________.

51. 若复数 z 满足 $|z|=3$, 则 $|z-1+\sqrt{3}\mathrm{i}|$ 的最小值是__________.

52. 若复数 z 满足 $|z-3|=5$, 则 $|z-(1+4\mathrm{i})|$ 的最大值是__________, 最小值是__________.

53. 若 $|z-1-2\mathrm{i}|=1$, 则 $|z-3-\mathrm{i}|$ 的取值范围是__________.

54. 复平面内, 已知点 A,B,C 分别对应于复数 $z_1=1+\mathrm{i}$, $z_2=5+\mathrm{i}$, $z_3=3+3\mathrm{i}$, 以 AB,AC 为邻边作一平行四边形 $ABDC$, 求点 D 对应的复数 z_4 及 AD 的长.

55. 若 $f(\overline{z+\mathrm{i}})=2z+\overline{z}+\mathrm{i}$, 则 $f(\mathrm{i})$ 等于 (　　).

A. 1　　B. -1　　C. i　　D. $-\mathrm{i}$

56. 若复数 z 满足 $|z+1|^2-|z+\mathrm{i}|^2=1$, 则 z 在复平面内的对应点所表示的图形是 (　　).

A. 直线　　B. 圆　　C. 椭圆　　D. 双曲线

57. 若复数 z 满足 $|z-1|+|z+1|=2$, 则 z 在复平面内的对应点所表示的图形是 (　　).

A. 圆　　B. 椭圆　　C. 双曲线　　D. 线段

58. 若 z_1,z_2 都是虚数, 则 “$z_1=\overline{z}_2$” 的一个必要不充分条件是 (　　).

A. $|z_1-\overline{z}_2|=0$　　B. $\overline{z}_1=z_2$　　C. $z_1=z_2$　　D. $|z_1|=|z_2|$

59. 复平面内, 曲线 $|z-1+\mathrm{i}|=1$ 关于直线 $y=x$ 的对称曲线方程为 (　　).

A. $|z-1-\mathrm{i}|=1$　　B. $|\overline{z}-1-\mathrm{i}|=1$　　C. $|z+1+\mathrm{i}|=1$　　D. $|\overline{z}+1+\mathrm{i}|=1$

60. 若 $|z|=1$, 则 $|z+\mathrm{i}|+|z-6|$ 的最小值等于 (　　).

A. 7　　B. $\sqrt{37}$　　C. 6　　D. 5

61. 若复平面内的点 A,B 分别对应于复数 $2+\mathrm{i}$ 和 $1-\mathrm{i}$, 则线段 AB 的中垂线方程的复数形式是__________.

62. 设 $z\in\mathbf{C}$, 则方程 $|z+2|+|z-2|=6$ 对应的曲线的普通方程是__________.

63. 以 $(\pm3,0)$ 为两焦点, 且长半轴长为 5 的椭圆方程的复数形式是__________.

64. 已知复数 z 满足 $|z-(1+\mathrm{i})|-|z-(1-\mathrm{i})|=2$, 则复平面内 z 的对应点的轨迹是__________.

65. 若 $|z-3|+|z+3|=10$, 且 $|z-5\mathrm{i}|-|z+5\mathrm{i}|=8$, 则复数 $z=$__________.

66. 若 $|z-2|=\sqrt{17}$, $|z-3|=4$, 则复数 $z=$__________.

67. 设 $|z_1|=3$, $|z_2|=5$, $|z_1+z_2|=6$, 求 $|z_1-z_2|$.

68. 若 $|z_1|=3$, $|z_1+z_2|=5$, $|z_1-z_2|=7$, 求 $|z_2|$.

69. 已知两个复数集合 $A=\{z||z-2|\le 2\}$, $B=\{z|z=\dfrac{z_1}{2}\mathrm{i}+b,\ z_1\in A,\ b\in\mathbf{R}\}$.

(1) 当 $b=0$ 时, 求集合 B 所对应的区域;

(2) 当 $A\cap B=\varnothing$ 时, 求 b 的取值范围;

(3) 若复数 $z_1=1+2a\mathrm{i}$, $z_2=a+\mathrm{i}(a\in\mathbf{R})$, 集合 $A=\{z||z-z_1|\le\sqrt{2}\}$, $B=\{z||z-z_2|\le 2\sqrt{2}\}$ 满足 $A\cap B=\varnothing$, 求 a 的取值范围.

70. 已知复数 z_1,z_2 满足 $|z_1|=1$, $|z_2|=1$, 且 $z_1+z_2=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$, 求 z_1,z_2.

71. 复平面内三点 A, B, C 依次对应于复数 $1+z, 1+2z, 1+3z$, 其中 $|z|=2$, O 为原点, 若 $S_{\triangle AOB}+S_{\triangle BOC}=2$, 求复数 z.

72. 若复数 $z=(1+\mathrm{i})^2$, 则 $z\cdot\overline{z}$ 的值为 (　　).

A. $-4\mathrm{i}$　　B. $4\mathrm{i}$　　C. 4　　D. 8

73. 计算 $(\dfrac{\sqrt{2}\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}})^{100}$ 的结果是 (　　).

A. i　　B. $-\mathrm{i}$　　C. 1　　D. -1

74. 当 n 取遍正整数时, $i^n+\mathrm{i}^{-n}$ 表示不同值的个数是 (　　).

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

75. 使 $(\dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}})^n$ 为实数的最小自然数 n 是 (　　).

A. 2　　B. 4　　C. 6　　D. 8

76. “z_1 和 z_2 为共轭复数” 是 “$z_1+z_2\in\mathbf{R}$ 且 $z_1\cdot z_2\in\mathbf{R}$” 的 (　　).

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

77. 若 $(z-1)^2=|z-1|^2$, 则 z 一定是 (　　).

A. 纯虚数　　B. 实数　　C. 虚数　　D. 零

78. 设 $z=1+ki(k\in\mathbf{R})$, 则 z^2 对应点的轨迹是 (　　).

A. 圆　　B. 椭圆　　C. 抛物线　　D. 双曲线

79. 若 z 是复数, 判断 “$|z|^2=z^2$ 恒成立” 的真假:__________.

80. 若 z 是复数, 判断 “$|z|^2=z^2$ 恒不成立”. 的真假:__________.

81. 若 z 是复数, 判断 “$|z|^2=|z|^2$ 恒成立” 的真假:__________.

82. 若 z 是复数, 判断 “$|z|\le 1\Leftrightarrow -1\le z\le 1$” 的真假:__________.

83. 若 z 是复数, 判断 “$\sqrt{|z|^2}=|z|$ 恒成立” 的真假:__________.

84. 若 z_1, z_2 都是复数, 判断 “若 $|z_1|=|z_2|$, 则 $z_1=\pm z_2$” 的真假:__________.

85. 若 z 是复数, 判断 “$z+\overline{z}$ 一定是实数” 的真假:__________.

86. 若 z 是复数, 判断 “$z-\overline{z}$ 一定是纯虚数” 的真假:__________.

87. 若 z 是复数, 判断 “$z^2\ge 0$ 恒成立” 的真假:__________.

88. 若 z 是复数, 判断 “若 $|z|=1$, 则 $\overline{z}=\dfrac{1}{z}$” 的真假:__________.

89. 若 z 是复数, 判断 “$z=\overline{z} \Leftrightarrow z \in \mathbf{R}$ 恒成立” 的真假:__________.

90. 若 z_1, z_2 都是复数, 判断 “若 $z_1^2+z_2^2=0$, 则 $z_1=z_2=0$” 的真假:__________.

91. $(\mathrm{i}-\frac{1}{\mathrm{i}})^6$ 的虚部是__________.

92. 计算 $(1+\mathrm{i})^{20}-(1-\mathrm{i})^{20}=$__________.

93. 计算 $\frac{(1+\mathrm{i})^5}{1-\mathrm{i}}+\frac{(1-\mathrm{i})^5}{1+\mathrm{i}}=$__________.

94. 若 $z=1+\mathrm{i}$, 则 $\frac{5}{1+z^2}=$__________.

95. 计算 $\frac{-2\sqrt{3}+\mathrm{i}}{1+2\sqrt{3}\mathrm{i}}+(\frac{\sqrt{2}}{1+\mathrm{i}})^{3996}=$__________.

96. 若 $a \in \mathbf{R}$, 且 $\frac{a+2\mathrm{i}}{3+\mathrm{i}} \in \mathbf{R}$, 则 $\frac{a+2\mathrm{i}}{3+\mathrm{i}}=$__________.

97. 已知 $\omega=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$, 则: $\omega^2+\frac{1}{\omega^2}=$__________; $\omega^3+\frac{1}{\omega^3}=$__________; $\omega^{14}+\frac{1}{\omega^{14}}=$__________; $1+\omega+\omega^2+\omega^3+\cdots+\omega^{10}=$__________.

98. 若 $f(x)=2x^4-11x^3-7x^2-9x+4$, 则 $f(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i})=$__________.

99. 计算: $(\mathrm{i}-\frac{1}{\mathrm{i}})^{10}=$__________.

100. 计算: $\frac{(1+\mathrm{i})^3-(1-\mathrm{i})^3}{(1+\mathrm{i})^2-(1-\mathrm{i})^2}=$__________.

101. 计算: $\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}^2\cdot\mathrm{i}^3\cdot\cdots\cdot\mathrm{i}^{1997}=$__________.

102. 计算: $\mathrm{i}+\mathrm{i}^2+\mathrm{i}^3+\cdots+\mathrm{i}^{1997}=$__________.

103. 计算: $(\frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}})^{1997}+(\frac{1-\mathrm{i}}{\sqrt{2}})^{1997}=$__________.

104. 已知 $\mathrm{i}^{3m}=\mathrm{i}^n(m,n \in \mathbf{Z})$, 则 i^{m+n} 的值为 (　　).

A. 1　　B. i　　C. $-$i　　D. -1

105. 若 $x+\frac{1}{x}=-1$, 则 $x^{17}+x^{-17}$ 的值等于 (　　).

A. 0　　B. -1　　C. 1　　D. 2

106. 计算: $1+2\mathrm{i}+3\mathrm{i}^2+4\mathrm{i}^3+\cdots+10\mathrm{i}^9$.

107. 计算: $\mathrm{i}+2\mathrm{i}^2+3\mathrm{i}^3+\cdots+359\mathrm{i}^{359}$.

108. 求首项为 i, 公比为 $1+\frac{1}{\mathrm{i}}$ 的等比数列的第七项.

109. 计算: $(\frac{-1+\mathrm{i}}{1+\sqrt{3}\mathrm{i}})^3$.

110. 计算: $\frac{(\sqrt{3}+\mathrm{i})^5}{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}$.

111. 复数 $(3+4\mathrm{i})(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i})$ 的模为:__________.

112. 复数 $\frac{5-12\mathrm{i}}{-8+15\mathrm{i}}$ 的模为:__________.

113. 复数 $\frac{(1+\mathrm{i})^3}{(1-\mathrm{i})^2(9+40\mathrm{i})}$ 的模为:__________.

114. 若 $t\in\mathbf{R}$, 则复数 $\frac{1-t^2}{1+t^2}+\frac{2t}{1+t^2}\mathrm{i}$ 的模为:__________.

115. 复数 $\frac{(1-\mathrm{i})^{10}(3-4\mathrm{i})^4}{(-\sqrt{3}+\mathrm{i})^8}$ 的模为:__________.

116. 复数 $\frac{(\sqrt{6}+\mathrm{i})(1+\mathrm{i})^2}{(-1+\sqrt{6}\mathrm{i})(-\frac{1}{3}+\frac{2\sqrt{2}}{3}\mathrm{i})(\sqrt{3}\mathrm{i})}$ 的模为:__________.

117. 已知 $z=1+\mathrm{i}$, 且 $\frac{z^2+az+b}{z^2-z+1}=1-\mathrm{i}$, 求实数 a,b 的值.

118. 已知 $a>0$, 且 $a\neq 1$, 若 $(\log_a x+\mathrm{i})z=1+\mathrm{i}\log_a x$, 问: x 为何值时, z 为:

(1) 实数;

(2) 虚数;

(3) 纯虚数;

(4) 模等于 1 的复数.*****

119. 已知 $z=|\frac{\sqrt{2}\mathrm{i}(3+\mathrm{i})^2}{(\sqrt{3}+\sqrt{7}\mathrm{i})^2}|+2\mathrm{i}$, 求 $|z|$.

120. 已知复数 $z=\frac{(1+\mathrm{i})^3(a-1)^2}{\sqrt{2}(a-3\mathrm{i})^2}$ 满足 $|z|=\frac{2}{3}$, 求实数 a 的值.

121. 已知复数 z 满足 $|z|=5$, 且 $(3+4\mathrm{i})z$ 是纯虚数, 求 z.

122. 已知 $z=\frac{\sqrt{3}\sin\theta+\mathrm{i}\cos\theta}{\sin\theta-\mathrm{i}\sqrt{3}\cos\theta}$, 求 z 的最大值.

123. 已知复数 z 满足 $|z+\frac{1}{z}|=1$, 求 $|z|$ 的取值范围.

124. 已知复数 z 满足 $z+\frac{4}{z}\in\mathbf{R}$, $|z-2|=2$, 求 z.

125. 已知复数 z 满足 $|z-4|=|z-4\mathrm{i}|$, $z+\frac{14-z}{z-1}\in\mathbf{R}$, 求 z.

126. 已知 $|\frac{z-12}{z-8\mathrm{i}}|=\frac{5}{3}$, $|\frac{z-4}{z-8}|=1$, 求复数 z.

127. 求满足 $z^2+\frac{9}{z^2}\in\mathbf{R}$ 的复数 z 的对应点轨迹的普通方程.

128. 求满足 $\frac{z}{z-1}$ 的复数 z 的对应点轨迹的普通方程.

129. 已知 $a\in\mathbf{R}$, 求满足 $z\cdot\overline{z}+az+\overline{z}=0$ 的复数 z 的对应点轨迹的普通方程.

130. 已知非零复数 z_1,z_2 满足 $|z_1+z_2|=|z_1-z_2|$, 求证: $(\frac{z_1}{z_2})^2$ 一定是负数.

131. 已知 P, Q 两点分别对应于复数 z_1 和 $2z_1+3-4\mathrm{i}$, 若点 P 在曲线 $|z|=2$ 上移动, 求点 Q 的轨迹.

132. 已知复数 z 满足 $|z|=2$, 求复数 $w=\dfrac{z+1}{z}$ 在复平面内的对应点的轨迹.

133. 复平面内两动点 P_1, P_2 所对应的复数 z_1, z_2 满足 $z_1=z_2\mathrm{i}+3$, 又点 P_2 沿着曲线 $|z-5|-|z+5|=6$ 运动, 试求点 P_1 的轨迹方程, 并指出它表示何种曲线.

134. 复平面内, 线段 AB 上的点 P 对应的复数为 z, 其中 A, B 点分别对应于复数 $z_A=1$, $z_B=i$, 求 z^2 的对应点轨迹的普通方程, 并画出图形.

135. 已知点 $Q(u,v)$ 在 $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(1,1)$ 为顶点的 $\triangle OAB$ 的边界上移动, 求 $z=(u+2vi)^2+2+3\mathrm{i}$ 所对应的点 P 的轨迹, 并画出草图.

136. 求证: 复数 z 可以表示为 $\dfrac{1+t\mathrm{i}}{1-t\mathrm{i}}(t\in\mathbf{R})$ 的充要条件是 $|z|=1$ 且 $z\neq-1$.

137. 求证: $\dfrac{z-1}{z+1}$ 为纯虚数的充要条件是 $|z|=1$ 且 $z\neq\pm1$.

138. 利用 $||z_1|-|z_2||\leq|z_1+z_2|\leq|z_2|+|z_2|$, 求函数 $y=\sqrt{x^2+4}+\sqrt{x^2-8x+17}$ 的最小值及相应的 x.

139. 利用 $||z_1|-|z_2||\leq|z_1+z_2|\leq|z_2|+|z_2|$, 求函数 $y=\sqrt{x^2+9}-\sqrt{x^2-2x+5}$ 的最大值及相应的 x.

140. 利用 $||z_1|-|z_2||\leq|z_1+z_2|\leq|z_2|+|z_2|$, 求证: $\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(x-2)^2+y^2}+\sqrt{x^2+(y-2)^2}+\sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2}\geq 4\sqrt{2}$.

141. 利用 $|z|^2=z\cdot\overline{z}$, 解决问题: “若 $|z|=1$, 求证 $|\dfrac{a-z}{1-a\overline{z}}|=1$”.

142. 利用 $|z|^2=z\cdot\overline{z}$, 解决问题: “若 $|1-z_1z_2|=|z_1-\overline{z}_2|$, 求证: $|z_1|$, $|z_2|$ 中至少有一个为 1”.

143. 利用 $|z|^2=z\cdot\overline{z}$, 解决问题: “若 $|z_1|\leq1$, $|z_2|\leq1$, 求证: $|\dfrac{z_1-z_2}{1-\overline{z}_1z_2}|\leq1$”.

144. 利用 $|z|^2=z\cdot\overline{z}$, 解决问题: “若复数 z_{i} 满足 $|z_{\mathrm{i}}|=1(\mathrm{i}=1,2,3)$, 求 $|\dfrac{z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1}{z_1+z_2+z_3}|$ 的值”.

145. 利用 $|z|^2=z\cdot\overline{z}$, 解决问题: “已知复数 $A=z_1\overline{z}_2+z_2\overline{z}_1$, $B=z_1\overline{z}_1+z_2\overline{z}_2$, 其中 z_1, z_2 是非零复数, 问: A, B 可不可以比较大小? 并证明之”.

146. 已知 $|z|=1$, $|z_2|=\sqrt{2}$, 求证: $|\dfrac{2z_1+(1+3\mathrm{i})z_2^2}{3+4\mathrm{i}}|\leq\dfrac{12}{5}$.

147. 已知 $z=\dfrac{\sin\alpha+\mathrm{i}\sqrt{2}\cos\alpha}{\sqrt{2}\sin\alpha-\mathrm{i}\cos\alpha}$, 求证: $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\leq|z|\leq\sqrt{2}$.

148. 复平面内三点 A, B, C 分别对应于复数 z_1, z_2, z_3, 若 $\dfrac{z_2-z_1}{z_3-z_1}=1+\dfrac{4}{3}\mathrm{i}$, 试求 $\triangle ABC$ 的三边之比.

149. 已知 $|z|=1$, 求 $|z^2-z+1|$ 的最大值和最小值.

150. 已知 $|z|=1$, 求 $|z^2-z+2|$ 的最大值和最小值.

151. 已知 $|z|=1$, 求 $|z^3-3z-2|$ 的最大值和最小值.

152. 将复数 $2(\cos\dfrac{\pi}{5}-\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{5})$ 化为三角形式.

解答在这里 $2(\cos\dfrac{\pi}{5}-\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{5})=2[\cos(-\dfrac{\pi}{5})+\mathrm{i}\sin(-\dfrac{\pi}{5})]$.

153. 将复数 $2(-\cos\dfrac{\pi}{5}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{5})$ 化为三角形式.

解答在这里 $2(-\cos\dfrac{\pi}{5}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{5})=2(\cos\dfrac{4\pi}{5}+\mathrm{i}\sin\dfrac{4\pi}{5})$.

154. 将复数 $-2(\cos\dfrac{\pi}{5}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{5})$ 化为三角形式.

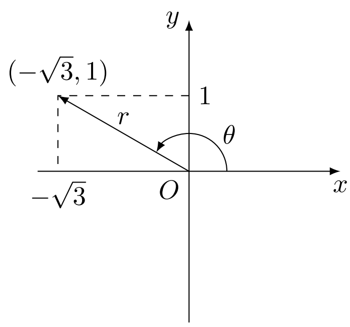
解答在这里 $-2(\cos\dfrac{\pi}{5}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{5})=2(\cos\dfrac{6\pi}{5}+\mathrm{i}\sin\dfrac{6\pi}{5})$.

155. 将复数 $2(\sin\dfrac{\pi}{5}+\mathrm{i}\cos\dfrac{\pi}{5})$ 化为三角形式.

解答在这里 $2(\sin\dfrac{\pi}{5}+\mathrm{i}\cos\dfrac{\pi}{5})=2(\cos\dfrac{3\pi}{10}+\mathrm{i}\sin\dfrac{3\pi}{10})$.

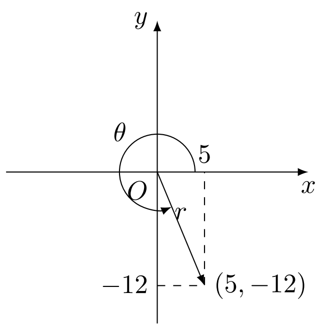
156. 将复数 $z=-\sqrt{3}+\mathrm{i}$ 化成三角形式.

解答在这里如图, 因为 $r=2$, $\cos\theta=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\theta=\dfrac{5\pi}{6}$, 所以 $-\sqrt{3}+\mathrm{i}=2(\cos\dfrac{5\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\dfrac{5\pi}{6})$.



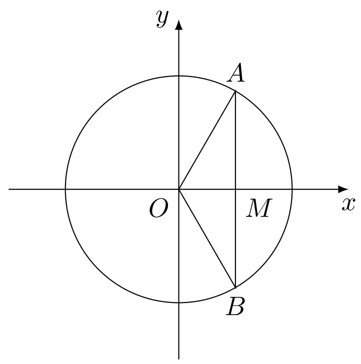
157. 将复数 $z=5-12\mathrm{i}$ 化成三角形式.

解答在这里如图, 因为 $r=13$, $\cos\theta=\dfrac{5}{13}$, $\theta=2\pi-\arccos\dfrac{5}{13}$, 所以 $5-12\mathrm{i}=13[\cos(-\arccos\dfrac{5}{13})+\mathrm{i}\sin(-\arccos\dfrac{5}{13})]$.



158. 若复数 $z=\dfrac{1}{2}+\mathrm{i}\sin\alpha(\alpha\in\mathbf{R})$, 且 $|z|\le 1$, 求 $\arg z$ 和 α 的取值范围.

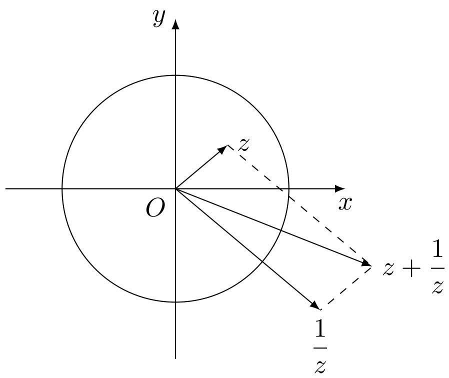
解答在这里因为 $|z|\le 1$, 所以 $\dfrac{1}{4}+\sin^2\alpha\le 1$, 所以 $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\le\sin\alpha\le\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 如图, z 的对应点 P 应在线段 AB 上运动, 当点 P 在 MA 上时, $\arg z\in[0,\dfrac{\pi}{3}]$, 当点 P 在 BM 上时, $\arg z\in[\dfrac{5\pi}{3},2\pi)$.



所以 $\arg z\in[0,\frac{\pi}{3}]\cup[\frac{5\pi}{3},2\pi)$. 所以 $a\in[k\pi-\frac{\pi}{3},k\pi+\frac{\pi}{3}](k\in\mathbf{Z})$.

159. 已知 $z+\frac{1}{z}=\cos x(x\in\mathbf{R})$, 且 $|z|\le 1$, 求 $\arg z$ 的取值范围.

解答在这里先设 $|z|<1$, 则如图所示, 此时 $z+\frac{1}{z}$ 所对应的向量不在 x 轴上,



所以 $z+\frac{1}{z}\ne\cos x$, 故 $|z|<1$ 不可能, 于是 $|z|=1$. 令 $z=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta(0\le\theta<2\pi)$, 则由 $z+\frac{1}{z}=z+\overline{z}=2\cos\theta=\cos x$, 得 $\cos\theta=\frac{1}{2}\cos x\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$. 所以 $\theta\in[\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}]\cup[\frac{4\pi}{3},\frac{5\pi}{3}]$, 即 $\arg z\in[\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}]\cup[\frac{4\pi}{3},\frac{5\pi}{3}]$.

160. 已知非零复数 z 满足 $|z-\mathrm{i}|=1$, 且 $\arg z=\theta$, 求:

(1) θ 的取值范围;

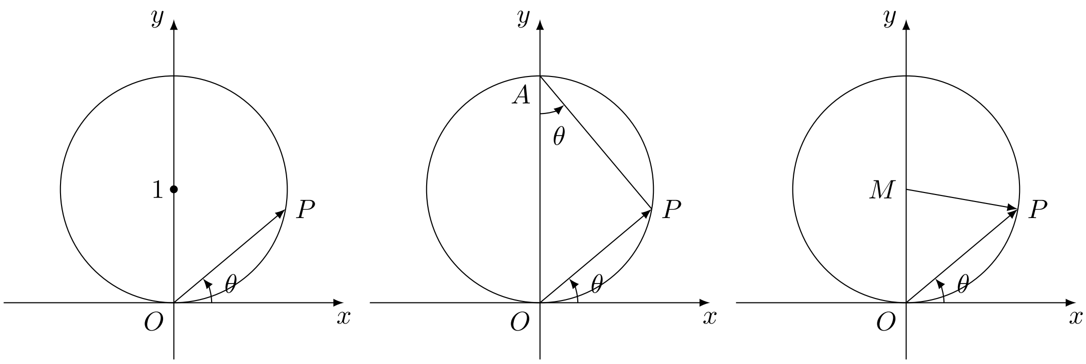
(2) 复数 z 的模;

(3) 复数 $z^2-z\mathrm{i}$ 的辐角.

解答在这里 (1) 因为 $|z-\mathrm{i}|=1$, 所以 z 的对应点 P 在以 $(0,1)$ 为圆心, 半径为 1 的圆上 (如下图左), θ 的取值范围是 $0<\theta<\pi$.

(2) 如下图中, 在 $\mathrm{Rt}\triangle AOP$ 中, 因为 $|OP|=2\sin\theta$, 故 $|z|=2\sin\theta$.

(3) 由 $|z-\mathrm{i}|=1$, 故可令 $z-\mathrm{i}=\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi(\varphi\in\mathbf{R})$, 于是 $z^2-z\mathrm{i}=z(z-\mathrm{i})=2\sin\theta(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)\cdot(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)=2\sin\theta[\cos(\theta+\varphi)+\mathrm{i}2\sin(\theta+\varphi)]$. 又 $\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi=z-\mathrm{i}=2\sin\theta(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)-\mathrm{i}=2\sin\theta\cos\theta+\mathrm{i}(2\sin^2\theta-1)=\sin 2\theta-\mathrm{i}\cos 2\theta=\cos(2\theta-\frac{\pi}{2})+\mathrm{i}\sin(2\theta-\frac{\pi}{2})$, 所以 $\varphi=2k\pi+2\theta-\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$, $\theta+\varphi=2k\pi+3\theta-\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$. 即 $\arg(z^2-z\mathrm{i})=2k\pi+3\theta-\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$.



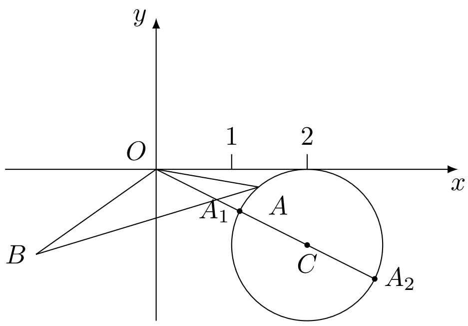
第 (3) 题有另一种解法: 如上图右, $z-\mathrm{i}$ 和向量 $\overrightarrow{MP}$ 对应, 而 $\angle OMP=2\theta$, 则 $z-\mathrm{i}$ 的一个辐角为 $2\theta-\dfrac{\pi}{2}$, 由 $z^2-z\mathrm{i}=z(z-\mathrm{i})$ 知, $z^2-z\mathrm{i}$ 的辐角等于 z 的辐角和 $z-\mathrm{i}$ 的辅角之和, 即 $2k\pi+3\theta-\dfrac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$.

161. 已知等边 $\triangle ABC$ 的两个顶点坐标是 $A(2,1)$, $B(3,2)$, 求顶点 C 的对应坐标.

解答在这里记 A,B,C 的对应复数为 $z_A=2+\mathrm{i}$, $z_B=3+2\mathrm{i}$, z_C. 由 $z_C=z_A+(z_B-z_A)[\cos 60^\circ\pm i\sin 60^\circ]$, 得 $z_C=(2+\mathrm{i})+(1+\mathrm{i})(\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i})=\dfrac{5\mp\sqrt{3}}{2}+\dfrac{3\pm\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$, 即点 C 坐标是 $(\dfrac{5-\sqrt{3}}{2}+\dfrac{3+\sqrt{3}}{2})$ 或 $(\dfrac{5+\sqrt{3}}{2}+\dfrac{3-\sqrt{3}}{2})$.

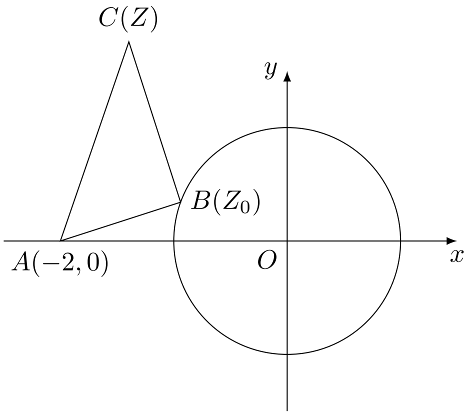
162. 复平面内, 两点 A,B 分别对应于复数 α,β, 且 $\beta+(1+\mathrm{i})\alpha=0$, $|\alpha-2+\mathrm{i}|=1$, 求 $\triangle AOB$ 面积的最大值和最小值.

解答在这里因为 $|\alpha-(2-\mathrm{i})|=1$, 所以 A 是以 $C(2,-1)$ 为圆心, 1 为半径的圆上的动点. 而 $\beta=(-1-\mathrm{i})\alpha=\sqrt{2}(\cos\dfrac{5\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\dfrac{5\pi}{4})\alpha$, 故线段 OB 的长是 OA 长的 $\sqrt{2}$ 倍, 且由 OA 绕原点按逆时针方向旋转 $\dfrac{5\pi}{4}$ 而得 (如图).



故 $S_{\triangle AOB}=\dfrac{1}{2}|OA|\cdot|OB|\cdot\sin\dfrac{3\pi}{4}=\dfrac{1}{2}\sqrt{2}\cdot|OA|^2\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{1}{2}|OA|^2$. 连接 OC 并延长, 与圆交于点 A_1, A_2, 则 $|OA_1|=\sqrt{5}-1$, $|OA_2|=\sqrt{5}+1$, 因此 $\triangle AOB$ 面积的最大值和最小值分别为 $\dfrac{1}{2}(\sqrt{5}+1)^2$ 和 $\dfrac{1}{2}(\sqrt{5}-1)^2$, 即 $3+\sqrt{5}$ 和 $3-\sqrt{5}$.

163. 已知定点 $A(-2,0)$ 和圆 $x^2+y^2=1$ 的动点 B, 点 A,B,C 按逆时针方向排列, 且 $|AB|:|BC|:|CA|=3:4:5$(如图), 求点 C 的轨迹方程. 解答在这里设点 C,B 分别对应复数 z,z_0, 则 $z=z_0+(-2-z_0)(-\dfrac{4}{3}\mathrm{i})=z_0+\dfrac{4}{3}\mathrm{i}z_0+\dfrac{8}{3}\mathrm{i}$, 于是 $(1+\dfrac{4}{3}\mathrm{i})z_0=z-\dfrac{8}{3}\mathrm{i}$, 两边取模得 $|1+\dfrac{4}{3}\mathrm{i}|\cdot|z_0|=|z-\dfrac{8}{3}\mathrm{i}|$. 又因为 $|z_0|=1$, 所以 $|z-\dfrac{8}{3}\mathrm{i}|=\dfrac{5}{3}$, 即点 C 的轨迹是以 $(0,\dfrac{8}{3})$ 为圆心, $\dfrac{5}{3}$ 为半径的圆.



164. 求值: $\operatorname{arccot}\frac{1}{3}+\arcsin\frac{1}{\sqrt{26}}+\arccos\frac{7}{\sqrt{50}}+\operatorname{arccot}8$.

解答在这里因为 $\arcsin\frac{1}{\sqrt{26}}=\operatorname{arccot}\frac{1}{5}$, $\arccos\frac{1}{\sqrt{50}}=\operatorname{arccot}\frac{1}{7}$, $\operatorname{arccot}8=\operatorname{arccot}\frac{1}{8}$, 令 $z_1=3+\mathrm{i}=r_1(\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha)$, $z_2=5+\mathrm{i}=r_2(\cos\beta+\mathrm{i}\sin\beta)$, $z_3=7+\mathrm{i}=r_3(\cos\gamma+\mathrm{i}\sin\gamma)$, $z_4=8+\mathrm{i}=r_4(\cos\delta+\mathrm{i}\sin\delta)$, 其中 $0<\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta<\frac{\pi}{4}$, 所以 $z_1\cdot z_2\cdot z_3\cdot z_4=(3+\mathrm{i})(5+\mathrm{i})(7+\mathrm{i})(8+\mathrm{i})=650(1+\mathrm{i})=650\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4})$. 又因为 $z_1\cdot z_2\cdot z_3\cdot z_4=r_1r_2r_3r_4[\cos(\alpha+\beta+\gamma+\delta)+\mathrm{i}\sin(\alpha+\beta+\gamma+\delta)]$, 而 $0<\alpha+\beta+\gamma+\delta<\pi$, 所以 $\alpha+\beta+\gamma+\delta=\frac{\pi}{4}$, 即所求之值为 $\frac{\pi}{4}$.

165. 记 $A=\cos\frac{\pi}{11}+\cos\frac{3\pi}{11}+\cos\frac{5\pi}{11}+\cos\frac{7\pi}{11}+\cos\frac{9\pi}{11}$, $B=\sin\frac{\pi}{11}+\sin\frac{3\pi}{11}+\sin\frac{5\pi}{11}+\sin\frac{7\pi}{11}+\sin\frac{9\pi}{11}$, 求证: $A=\frac{1}{2}$, $B=\frac{1}{2}\cot\frac{\pi}{22}$. 解答在这里设 $z=\cos\frac{\pi}{11}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{11}$, 则

$$\begin{aligned}A+B\mathrm{i}=&z+z^3+z^5+z^7+z^9=\frac{z(1-z^{10})}{1-z^2}=\frac{z-z^{11}}{1-z^2}=\frac{z-(\cos\pi+\mathrm{i}\sin\pi)}{1-z^2}=\frac{z+1}{1-z^2}=\frac{1}{1-z}\\&=\frac{1-\overline{z}}{(1-z)(1-\overline{z})}=\frac{1-\cos\frac{\pi}{11}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{11}}{2-(z+\overline{z})}=\frac{1-\cos\frac{\pi}{11}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{11}}{2(1-\cos\frac{\pi}{11})}\\&=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{11}}{1-\cos\frac{\pi}{11}}\mathrm{i}=\frac{1}{2}+\mathrm{i}\cdot\frac{1}{2}\cdot\cot\frac{\pi}{22},\end{aligned}$$

所以 $A=\frac{1}{2}$, $B=\frac{1}{2}\cot\frac{\pi}{22}$.

166. 复数 $z=-\sin100^\circ+\mathrm{i}\cos100^\circ$ 的轴角主值是 (　　).

A. 80°　　B. 100°　　C. 190°　　D. 260°

167. 复数 $z=-2(\sin220^\circ-\mathrm{i}\cos220^\circ)$ 在复平面内的对应点所在的象限是 (　　).

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三角限　　D. 第四象限

168. 若 $\frac{3\pi}{2}<\theta<2\pi$, 则 $-\sin\theta+\mathrm{i}\cos\theta$ 的辐角主值等于 (　　).

A. $2\pi-\theta$　　B. $\theta-\frac{3\pi}{2}$　　C. $\theta-\pi$　　D. $\theta-\frac{\pi}{2}$

169. 复数 $z=1+\sin\theta+\mathrm{i}\cos\theta(0<\theta<\frac{\pi}{2})$ 的辐角主值是 (　　).

A. θ　　B. $\frac{\theta}{2}$　　C. $\frac{\pi}{2}-\theta$　　D. $\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}$

170. 若复数 $z=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$ 所对应的点在第四象限, 则 $\arg z$ 等于 (　　).

A. $\arcsin\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$　　B. $\arcsin\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$　　C. $\operatorname{arccot}\dfrac{b}{a}$　　D. $2\pi+\arctan\dfrac{b}{a}$

171. 若复数 z 满足 $|z+3\mathrm{i}|\le 2$, 则 $\arg z$ 的最大值为 (　　).

A. $\arcsin\dfrac{2}{3}$　　B. $\arccos\dfrac{2}{3}$　　C. $\pi-\arcsin\dfrac{2}{3}$　　D. $2\pi-\arccos\dfrac{2}{3}$

172. 复数 $z=1+\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta(\pi<\theta<2\pi)$ 的模是 (　　).

A. 1　　B. $1+\cos\theta$　　C. $2\cos\dfrac{\theta}{2}$　　D. $-2\cos\dfrac{\theta}{2}$

173. 若复数 z 的辐角主值是 $\dfrac{5\pi}{6}$, 实部是 $-2\sqrt{3}$, 则 z 的代数形式是 (　　).

A. $-2\sqrt{3}-2\mathrm{i}$　　B. $-2\sqrt{3}+2\mathrm{i}$　　C. $-2\sqrt{3}+2\sqrt{3}\mathrm{i}$　　D. $-2\sqrt{3}-2\sqrt{3}\mathrm{i}$

174. 若 $\arg z=\alpha(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2})$, 则 $\arg\overline{z}$ 等于 (　　).

A. $-\alpha$　　B. $\pi-\alpha$　　C. $\pi+\alpha$　　D. $2\pi-\alpha$

175. 满足 $|z-2+2\mathrm{i}|=\sqrt{2}$ 的复数 z 的辐角主值的最小值是 (　　).

A. 105°　　B. 265°　　C. 285°　　D. 315°

176. 复数 $z=-1-2\mathrm{i}$ 的辐角主值是 (　　).

A. $\arctan 2$　　B. $\pi+\arctan 2$

C. $-\arctan 2$　　D. $(2k+1)\pi+\arctan 2(k\in\mathbf{Z})$

177. 若复数 z 满足 $z=(a+\mathrm{i})^2$, 且 $\arg z=\dfrac{7}{4}\pi$, 则实数 a 的值为 (　　).

A. 1　　B. -1　　C. $-1\pm\sqrt{2}$　　D. $-1-\sqrt{2}$

178. 复数 $2(\cos\dfrac{\pi}{5}-\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{5})$ 的三角形式为__________.

179. 复数 $2(\sin\dfrac{\pi}{5}+\mathrm{i}\cos\dfrac{\pi}{5})$ 的三角形式为__________.

180. 复数 $2(-\cos\dfrac{\pi}{5}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{5})$ 的三角形式为__________.

181. 复数 $-2(\cos\dfrac{\pi}{5}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{5})$ 的三角形式为__________.

182. 已知 $\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$, 复数 $|\cos\theta|+\mathrm{i}|\sin\theta|$ 的三角形式为__________.

183. 若复数 z 满足 $\arg(z+4)=\dfrac{\pi}{6}$, 则 $|z|$ 的最小值为 (　　).

A. 1　　B. 2　　C. $2\sqrt{3}$　　D. $3\sqrt{2}$

184. 若复数 z 满足 $|z|\le\dfrac{1}{2}$, 则 $\arg(z+1)$ 的取值范围是 (　　).

A. $[0,\dfrac{\pi}{6}]$　　B. $[-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{6}]$　　C. $[0,\dfrac{\pi}{6}]\cup[\dfrac{11\pi}{6},2\pi)$　　D. $[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{11\pi}{6}]$

185. 若非零复数 z 的辐角主值为 $\dfrac{7\pi}{4}$, 则复数 $z+\mathrm{i}$ 的辐角主值的取值范围是 (　　).

A. $(-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2})$　　B. $(\dfrac{7\pi}{4},2\pi)$　　C. $[0,\dfrac{\pi}{2})$　　D. $[0,\dfrac{\pi}{2})\cup(\dfrac{7\pi}{4},2\pi)$

186. 若 $7+3\mathrm{i}$ 的辐角主值为 θ, 则 $6-14\mathrm{i}$ 的辐角主值为 (　　).

A. $\dfrac{\pi}{2}+\theta$　　B. $\dfrac{\pi}{2}-\theta$　　C. $\dfrac{3\pi}{2}-\theta$　　D. $\dfrac{3\pi}{2}+\theta$

187. 复数 $\cot 20^\circ - \mathrm{i}$ 的模是__________, 辐角的主值是__________.

188. 若 $a,b\in\{-2,-1,1,2\}$, 且 $a\neq b$, 则 $\arg(a+b\mathrm{i})$ 的最大值是__________.

189. 若复数 $z=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$ 的对应点在第四象限, 则 $\arg z=$__________.

190. 若 $z_1=1+\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$, $z_2=1-\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta(\pi<\theta<2\pi)$, 则 z_1,z_2 的辐角主值之和等于__________.

191. 若 $\pi<\theta<\dfrac{3\pi}{2}$, 则 $\arg(|\cos\theta|+\mathrm{i}|\sin\theta|)=$__________.

192. 若 $|z|\leq 1$, 则 $\arg(z-2)$ 的最大值为__________, 最小值为__________.

193. 已知 $|z+1|=\sqrt{10}$, $\arg(z-3\overline{z})=\dfrac{5\pi}{4}$, 求复数 z.

194. 已知复数 z 满足 $|\dfrac{1}{z}-1|=\dfrac{1}{2}$, $\arg\dfrac{z-1}{z}=\dfrac{\pi}{3}$, 求 z 的值.

195. 已知复数 z 满足 $|\dfrac{z-\mathrm{i}}{2z}|=2$, $\arg\dfrac{1+\mathrm{i}z}{z}=\dfrac{\pi}{2}$, 求 z.

196. 已知 $\omega=z+a\mathrm{i}$, 其中 $a\in\mathbf{R}$, $z=\dfrac{(1+4\mathrm{i})(1+\mathrm{i})+2+4\mathrm{i}}{3+4\mathrm{i}}$. 且 $|\omega|\leq\sqrt{2}$, 求 ω 的辐角主值 θ 的取值范围.

197. 已知 $f(z)=|1+z|-\overline{z}$, $f(-\overline{z}\mathrm{i})=10+3\mathrm{i}$, 求 $\dfrac{z+3}{z-2}$ 的模及辐角主值.

198. 已知复数 $1-\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta(-\pi<\theta<\pi)$.

(1) 求 $|z|$ 及 $\arg z$;

(2) 要使 $1\leq|z|\leq\sqrt{2}$, 求 θ 的取值范围.

199. 求复数 $z=\dfrac{1+\mathrm{i}}{1+\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta}$ 的模和辐角, 其中 $\theta\in[0,2\pi)$, $\theta\neq\pi$.

200. 已知复数 $z=\sqrt{|\cos t|}+\mathrm{i}\sqrt{|\sin t|}$. 求:

(1) $|z|$ 的取值范围;

(2) t 的范围, 使 $0\leq\arg z\leq\dfrac{\pi}{4}$.

201. 在复平面内, 作出满足 $\begin{cases}|z|\leq 1,\\ \arg z\in[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{2\pi}{3}]\end{cases}$ 的复数 z 的对应点所构成的图形.

202. 在复平面内, 作出满足 $\arg(z+2)=\dfrac{\pi}{4}$ 的复数 z 的对应点所构成的图形.

203. 在复平面内, 作出满足 $\begin{cases}0\leq\arg(z-1)\leq\dfrac{\pi}{4},\\ \mathrm{Re}(z)\leq 2\end{cases}$ 的复数 z 的对应点所构成的图形.

204. 在复平面内, 作出满足 $\begin{cases}|z|=1,\\ \dfrac{\pi}{4}<\arg(z+\mathrm{i})<\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$ 的复数 z 的对应点所构成的图形.

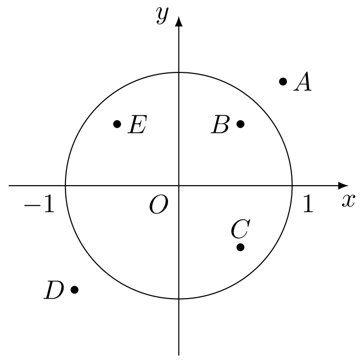
205. 已知 $A=\{z||z-1|\leq 1,\ z\in\mathbf{C}\}$, $B=\{z|\arg z\geq\dfrac{\pi}{6},\ z\in\mathbf{C}\}$ 在复平面内, 求 $A\cap B$ 所表示的图形的面积.

206. 已知复数 z 满足 $|z-(1+\sqrt{3}\mathrm{i})|\leq 2$, $\arg z\leq\dfrac{\pi}{3}$, 求 z 所对应区域的面积.

207. 若复数 $z_1=\cos\dfrac{2\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\dfrac{2\pi}{3}$, $z_2=\cos\dfrac{11\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\dfrac{11\pi}{6}$, 则 $\dfrac{2z_1^2}{z_2}$ 的辐角主值是 (　　).

A. $\dfrac{\pi}{6}$　　B. $\dfrac{5\pi}{6}$　　C. $\dfrac{3\pi}{2}$　　D. $-\dfrac{\pi}{2}$

208. 复平面内有 A,B,C,D,E 五点分别在单位圆内部和外部 (如图), 其中有一点对应的复数是点 A 对应复数的倒数, 则此点是 (　　).



A. 点 B　　B. 点 C　　C. 点 D　　D. 点 E

209. 把复数 $a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$ 在复平间内的对应向量绕原点 O 顺时针方向旋转 90° 后, 所得向量对应的复数为 (　　).

A. $a-b\mathrm{i}$　　B. $-a+b\mathrm{i}$　　C. $b-a\mathrm{i}$　　D. $-b+a\mathrm{i}$

210. 复平面内, 向量 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ 分别对应于非零复数 z_1, z_2, 若 $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$, 则 $\dfrac{z_2}{z_1}$ 一定是 (　　).

A. 非负数　　B. 纯虚数　　C. 正实数　　D. 非纯虚数

211. 复数 $z=(\sin 25^\circ+\mathrm{i}\cos 25^\circ)^3$ 的三角形式为 (　　).

A. $\sin 75^\circ+\mathrm{i}\cos 75^\circ$　　B. $\cos 15^\circ+\mathrm{i}\sin 15^\circ$　　C. $\cos 75^\circ+\mathrm{i}\sin 75^\circ$　　D. $\cos 195^\circ+\mathrm{i}\sin 195^\circ$

212. $(1-\sqrt{3}\mathrm{i})^2$ 的辐角主值为 (　　).

A. $\dfrac{10\pi}{3}$　　B. $\dfrac{7\pi}{3}$　　C. $\dfrac{4}{3}\pi$　　D. $\dfrac{\pi}{3}$

213. 若 α,β,γ 是一个三角形的三个内角, 则 $(\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha)(\cos\beta+\mathrm{i}\sin\beta)(\cos\gamma+\mathrm{i}\sin\gamma)=$__________.

214. $(\cos 1^\circ+\mathrm{i}\sin 1^\circ)(\cos 2^\circ+\mathrm{i}\sin 2^\circ)(\cos 3^\circ+\mathrm{i}\sin 3^\circ)\cdots(\cos 359^\circ+\mathrm{i}\sin 359^\circ)=$__________.

215. 若 $\dfrac{\sin A+\mathrm{i}\cos A}{(\sin B+\mathrm{i}\cos B)(\sin C+\mathrm{i}\cos C)}$ 是纯虚数, 则 $\triangle ABC$ 是__________ 三角形.

216. 计算: $\dfrac{[2(\cos 45^\circ+\mathrm{i}\sin 45^\circ)]^4}{(\sin 80^\circ+\mathrm{i}\cos 80^\circ)}=$__________.

217. 计算: $\dfrac{(\sqrt{3}+\mathrm{i})^5}{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}=$__________.

218. 计算: $(1-\cos 60^\circ+\mathrm{i}\sin 60^\circ)^4=$__________.

219. 计算: $(\cos 15^\circ-\mathrm{i}\sin 15^\circ)^3+(\cos 15^\circ-\mathrm{i}\sin 15^\circ)^{-3}=$__________.

220. 若 $z=(\sqrt{3}-\mathrm{i})^5$, 则 $\arg z=$__________.

221. 若复数 $z=7(\sin 140^\circ-\mathrm{i}\cos 140^\circ)$, 则 $\arg(-\frac{1}{z^2})=$__________.

222. 若 $\arg z=\theta$, 则 $\arg z^2=$__________.

223. 若 $\arg z=\theta$, $\frac{4}{3}\pi\le\theta<2\pi$, 则 $\arg z^3=$__________.

224. 复平面内, 将 $1+\sqrt{3}\mathrm{i}$ 所对应的向量绕原点按逆时针方向旋转 θ 角, 所得向量对应的复数是 $-2\mathrm{i}$, 则 θ 的最小正值为__________.

225. 复平面内, 向量 $\overrightarrow{AB}$ 对应的复数为 $2+\mathrm{i}$, 点 A 对应的复数为 -1, 将 $\overrightarrow{AB}$ 绕点 A 顺时针方向旋转 90° 后得到向量 $\overrightarrow{AC}$, 则点 C 对应的复数为__________.

226. 若复数 $z_1=\tan\theta-\mathrm{i}$, $z_2=\tan\theta+\mathrm{i}(0<\theta<\frac{\pi}{2})$, 将 z_1 的对应向量顺时针旋转到 z_2 所对应的向量, 则所转过的最小正角等于__________.

227. 若复数 $z_1\cdot z_2$ 满足 $|z_1|=|z_2|=1$, $z_2-z_1=-1$, 则 $\arg\frac{z_1}{z_2}=$__________.

228. 若 $\arg(z\mathrm{i})=\theta$, $\theta\in(\frac{\pi}{2},\pi)$, 则 $\arg\overline{z}=$__________.

229. 若 $\arg z_1=\alpha$, $\arg z_2=\beta$, 且 $\alpha<\beta$, 则 $\arg\frac{z_1}{z_2}$ 等于 (　　).

A. $\beta-\alpha$　　B. $\alpha-\beta$　　C. $2\pi+\alpha-\beta$　　D. $\pi+\beta-\alpha$

230. 若 $|z|=1$, $\arg z=\theta(\theta\ne 0)$, 则 $\frac{z+\overline{z}}{1+z^2}$ 的辐角主值为 (　　).

A. $\frac{\theta}{2}$　　B. θ　　C. $\pi-\theta$　　D. $2\pi-\theta$

231. 若 $z_1=1+\cos 2\theta+\mathrm{i}\sin 2\theta$, $z_2=1-\cos 2\theta+\mathrm{i}\sin\theta$, 则下列各式中必为定值的是 (　　).

A. $z_1\cdot z_2$　　B. $\frac{z_1}{z_2}$　　C. $|z_1|+|z_2|$　　D. $|z_1|^2+|z_2|^2$

232. 若复数 $-2+\mathrm{i}$ 和 $3-\mathrm{i}$ 的辐角主值分别为 α 和 β, 则 $\alpha+\beta$ 等于 (　　).

A. $\frac{3\pi}{4}$　　B. $\frac{5\pi}{4}$　　C. $\frac{7\pi}{4}$　　D. $\frac{11\pi}{4}$

233. 复平面内, 已知点 P_1, P_2 分别对应于复数 $3-2\mathrm{i}$, $7+4\mathrm{i}$, 线段 P_1P_2 绕点 P_1 按逆时针方向旋转 $\frac{5}{6}\pi$ 到 P_1P_3 的位置, 则点 P_3 对应的复数为 (　　).

A. $2\sqrt{3}+3\sqrt{3}\mathrm{i}$　　B. $2\sqrt{3}-3\sqrt{3}\mathrm{i}$　　C. $-2\sqrt{3}+3\sqrt{3}\mathrm{i}$　　D. $-2\sqrt{3}-3\sqrt{3}\mathrm{i}$

234. 复平面内, 点 P_1 的对应复数是 $z_1=-2\sqrt{3}+4\mathrm{i}$, 将向量 $\overrightarrow{OP_1}$(O 为原点) 旋转一个锐角 θ 后得到新向量 $\overrightarrow{OP_2}$, 且点 P_2 的对应复数是 $z_2=\sqrt{3}+5\mathrm{i}$, 则 (　　).

A. $\theta=60^\circ$, 且按逆时针旋转　　B. $\theta=60^\circ$, 且按顺时针旋转

C. $\theta=30^\circ$, 且按逆时针旋转　　D. $\theta=30^\circ$, 且按顺时针旋转

235. 已知 $z_A = a + b\mathrm{i}(a, b \in \mathbf{R}$, 且 $ab \neq 0)$, 复平面内, 把 z_A 对应的向量 $\overrightarrow{OA}$ 绕原点分别按逆、顺时针方向旋转 $\dfrac{2\pi}{3}$, 得向量 $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, 则 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ 所对应的复数之和等于 (　　).

A. $-a - b\mathrm{i}$　　B. $-\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$　　C. $a - b\mathrm{i}$　　D. 0

236. 若 $\arg z \in [\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}]$, 则 $\arg(-\dfrac{1}{z\mathrm{i}})$ 的取值范围是 (　　).

A. $[\dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4}]$　　B. $[\dfrac{5\pi}{4}, \dfrac{7\pi}{4}]$　　C. $[\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{7\pi}{4}]$　　D. $[0, \dfrac{\pi}{4}] \cup [\dfrac{7\pi}{4}, 2\pi)$

237. 若数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = (\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n(\theta \neq 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z})$, 则 $\{a_n\}$(　　).

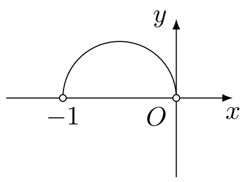
A. 成等差数列, 但不成等比数列　　B. 成等比数列, 但不成等差数列

C. 成等差数列又成等比数列　　D. 既不成等差数列也不成等比数列

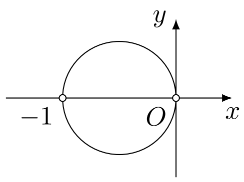
238. 若 $(-\sqrt{3} + \mathrm{i})^n \in \mathbf{R}^+$, 则最小的自然数 n 的值是 (　　).

A. 6　　B. 8　　C. 10　　D. 12

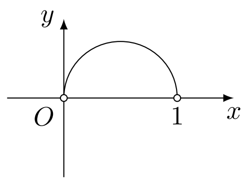
239. 已知非纯虚数 z 满足 $\arg z = \arg[(z+1)\mathrm{i}]$, 则 z 在复平面内的对应点所表示的图形为 (　　).



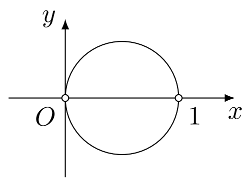
A.



B.

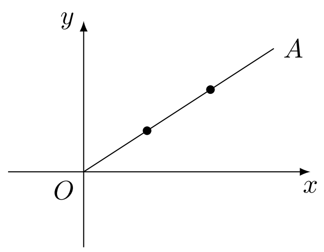


C.



D.

240. 复平面内, 已知 $\triangle ABC$ 的三个顶点分别对应于复数 z, $\overline{z}$, $\dfrac{1}{z}$, 且 $|z| = 3$, 点 A 的位置如图所示.



(1) 试在图上画出点 B, C 的大概位置;

(2) 求 $\triangle ABC$ 面积的最大值.

241. 已知 $|z_1| = 3$, $|z_2| = 5$, $|z_1 - z_2| = 7$, 求 $\dfrac{z_1}{z_2}$.

242. 已知复数 z 满足 $|z| = 5$, 且 $(3 + 4\mathrm{i})z$ 为纯虚数, 求 z.

243. 若 $|z| = 1$, 求 $|z^2 - z + 1|$ 的最大值和最小值.

244. 已知 $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$, 且 $|z_1| = |z_2| = 1$, $z_1 + z_2 = \dfrac{4}{5} + \dfrac{3}{5}\mathrm{i}$, 求 $\tan(\arg z_1 + \arg z_2)$.

245. 已知复数 z_1 和 z_2 满足 $|z_1| = |z_2| = 1$, 且 $z_1 - z_2 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3}\mathrm{i}$, 设 θ 是 $z_1 \cdot z_2$ 的辐角, 求 $\sin\theta$ 的值.

246. 已知复数 z_1, z_2, z_3 的辐角主值依次成公差为 $\dfrac{2\pi}{3}$ 的等差数列, 且 $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$, 求证: $z_1 + z_2 + z_3 = 0$.

247. 若复数 z_1, z_2, z_3 满足 $z_1+z_2+z_3=0$, 且 $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$, 求证: 复平面内以 z_1, z_2, z_3 所对应的点为顶点的三角形是内接于单位圆的正三角形.

248. 已知非零实数 x, y, z 满足了 $x+y+z=0$, 复数 α, β, γ 满足 $|\alpha|=|\beta|=|\gamma| \neq 0$, 且 $x\alpha+y\beta+z\gamma=0$, 求证: $\alpha=\beta=\gamma$.

249. 计算: $\arg(\mathrm{i}+2)+\arg(\mathrm{i}+3)$.

250. 若 $\arg(-2-\mathrm{i})=\alpha$, $\arg(-3-\mathrm{i})=\beta$, 求 $\alpha+\beta$.

251. 复平面内, 两点 A, B 分别对应于非零复数 α, β, 若 $\alpha=\beta(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)(0<\theta<\pi)$, 判断 $\triangle OAB$ 的形状 (O 为原点).

252. 复平面内, 两点 A, B 分别对应于非零复数 α, β, 若 $\alpha=\pm\beta\mathrm{i}$, 判断 $\triangle OAB$ 的形状 (O 为原点).

253. 复平面内, 两点 A, B 分别对应于非零复数 α, β, 若 $\dfrac{\alpha}{\beta}=\pm\sqrt{3}\mathrm{i}$, 判断 $\triangle OAB$ 的形状 (O 为原点).

254. 复平面内, 两点 A, B 分别对应于非零复数 α, β, 若 $\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$, 判断 $\triangle OAB$ 的形状 (O 为原点).

255. 复平面内, 两点 A, B 分别对应于非零复数 α, β, 若 $\dfrac{\alpha}{\beta}=1+\mathrm{i}$, 判断 $\triangle OAB$ 的形状 (O 为原点).

256. 已知复数 z_1, z_2 满足 $4z_1^2-2z_1z_2+z_2^2=0$, 且 $|z_2|=4$, $z_1, z_2, 0$ 所对应的点分别为 A, B, O, 求 $\triangle AOB$ 的面积.

257. 复平面内, 点 A, B 分别对应于复数 $\omega-z$ 和 $\omega+z$, 其中 $\omega=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$, 若 $\triangle AOB$ 是以原点 O 为直角顶点的等腰直角三角形. 求:

(1) 复数 z;

(2) $\triangle AOB$ 的面积.

258. 已知等边三角形的两个顶点 A, B 对应的复数分别为 $z_A=2+\mathrm{i}$, $z_B=3+2\mathrm{i}$, 求第三个顶点 C 所对应的复数.

259. 复平面内, 等边三角形的一个顶点在原点, 中心 P 所对应的复数是 $1+\mathrm{i}$, 求其他两个顶点所对应的复数.

260. 复平而内, 矩形 $OMNP$ 的相邻两边之比是 $|OM|:|OP|=1:\sqrt{3}$, 且点 O, M 的对应复数分别是 0, $-1+2\mathrm{i}$, 求点 N 对应的复数.

261. 已知等腰 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 的斜边 AB 的两个端点的坐标分别为 $A(-1,2)$, $B(2,3)$, 求顶点 C 的坐标.

262. 若等边 $\triangle ABC$ 的一个顶点为 $A(0,5)$, 中心 M 的坐标是 $M(2,3)$, 求其他两个顶点 B, C 的坐标.

263. 已知复数 $z_1=1+(2-\sqrt{3})\mathrm{i}$, $z_3=(2+\sqrt{3})+\mathrm{i}$, 又复数 z_1, z_2, z_3, z_4 在复平面内的对应点依逆时针方向排列是一个正方形的四个顶点.

(1) 求 z_2, z_4;

(2) 求证: z_2, z_4, 0 的对应点是一个等边三角形的三个顶点.

264. 复平面内, 已知 $\triangle AOB$ 的顶点 A, B 所对应的复数 α, β 满足 $\beta+(1-\mathrm{i})\alpha=0$, 且 $\triangle AOB(O$ 为原点) 面积的最大值和最小值分别是 8 和 2, 求 $|\alpha|$ 与 $|\beta|$ 的取值范围.

265. 已知复数 z_1, z_2, z_3 满足 $\dfrac{z_2-z_1}{z_3-z_1}=1+\sqrt{3}\mathrm{i}$, 试判断复平面内的 z_1, z_2, z_3 的对应点为顶点的三角形的形状, 并求其各内角的值.

266. 复平面内, 已知 A, B, C 三点对应的复数 z_1, z_2, z_3 满足 $\dfrac{z_2-z_1}{z_3-z_1}=1+\dfrac{3}{4}\mathrm{i}$, 试求这个三角形三边长之比.

267. 一个三角形的底边 BC 的两端所表水的复数是 $z_B=a$, $z_C=-a$, 顶点 A 的位置不定, 以两边 AB, AC 为腰, 分别以 B, C 为直角的顶点, 在 $\triangle ABC$ 外作等腰直角三角形 ABD, ACE, 求证: DE 的中点 M 为定点.

268. 已知 B 是半圆 $x^2+y^2=1(y\geq 0)$ 上的动点, $A(2,0)$ 是 x 轴上的一个定点, 以 A 为直角顶点作等腰直角 $\triangle ABC$(字母按顺时针排列), 求 $|OC|$ 的最大值及其相应的点 B 的坐标 (O 为坐标原点).

269. 复平面内, 已知 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 的三个顶点 A, B, C 分别对应于复数 z, z^2, z^3, 且 $|z|=2$, $\angle BAC=90°$, 求复数 z.

270. 已知复数 z_1 满足 $\arg z_1=\dfrac{5\pi}{12}$, $|z_1-z_0|=\sqrt{2}$, $z_0-(1+\mathrm{i})z_1=0$.
(1) 求 z_1 和 z_0;
(2) 求证: 在满足 $|z_1-z_0|=\sqrt{2}$ 条件的所有复数 z 中, z_1 的辐角主值最小.

271. 已知复数 $z=[\cos(\pi+\alpha)+\mathrm{i}\sin(\pi+\alpha)]\cdot[\sin(\dfrac{3}{2}\pi+\beta)+\mathrm{i}\cos(\dfrac{3}{2}\pi+\beta)]$, $0<\beta<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$, 且 $\sin(\alpha+\beta)=4\cos\alpha\sin\beta$, 求 $\arg z$ 的最大值.

272. 已知 $|z-1-\mathrm{i}|=2$, 求复数 z^2 虚部的取值范围.

273. 已知复数 $z=x+y\mathrm{i}$ 满足 $|z+\dfrac{1}{z}|=1(x,y\in\mathbf{R})$. 求证:
(1) $(x^2+y^2)^2+x^2-3y^2+1=0$;
(2) $k\pi+\dfrac{\pi}{3}\leq\arg z\leq k\pi+\dfrac{2\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$;
(3) $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\leq|z|\leq\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$.

274. 对 $n\in\mathbf{N}$, 求证: $(\dfrac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}})^n+(\dfrac{1-\mathrm{i}}{\sqrt{2}})^n=2\cos\dfrac{n\pi}{4}$.

275. 对 $n\in\mathbf{N}$, 求证: $(1+\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha)^n=2^n\cos^n(\dfrac{\alpha}{2})(\cos\dfrac{n\alpha}{2}+\mathrm{i}\sin\dfrac{n\alpha}{2})$.

276. 对 $n\in\mathbf{N}$ 求证: $(\dfrac{1+\mathrm{i}\tan\alpha}{1-\mathrm{i}\tan\alpha})^n=\dfrac{1+\mathrm{i}\tan n\alpha}{1-\mathrm{i}\tan n\alpha}$.

277. 对 $n\in\mathbf{N}$, $k\in\mathbf{N}$, 求证: $(\dfrac{1-\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta}{1-\cos\theta-\mathrm{i}\sin\theta})^n=\cos n(\pi+\theta)-\mathrm{i}\sin n(\pi+\theta)(\theta\neq 2k\pi)$.

278. 若 $(1+\sqrt{3}\mathrm{i})^n$ 是一个实数, 求自然数 n 的值.

279. 已知复数 $z=\dfrac{(1+\mathrm{i})^3}{\sqrt{2}(a+\mathrm{i})^2}(a>0)$ 满足 $|z|=\dfrac{1}{2}$. 求:
(1) a 的值;
(2) 使 z^n 为实数的最小自然数 n.

280. 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项 $a_n = \dfrac{1}{(1+\sqrt{3}\mathrm{i})^n}$, 当 n 取 $1, 2, 3, \cdots$ 时, 依次得到的实数记为 $b_1, b_2, b_3, \cdots$, 求数列 $\{b_n\}$ 的所有项之和.

281. 已知复数 $z = \cos 20^\circ + \mathrm{i}\sin 20^\circ$, 求 $|z - z^2 + z^3 - z^4 + z^5 - z^6 + z^7 - z^8 + z^9 - z^{10}|$.

282. 设 $z = \cos 40^\circ + \mathrm{i}\sin 40^\circ$, 求 $|z + z^2 + \cdots + z^{100}|$.

283. 已知 $z = \cos\dfrac{2\pi}{5} + \mathrm{i}\sin\dfrac{2\pi}{5}$, 求 $(1+z^8)(1+z^4)(1+z^2)(1+z)$.

284. 已知 $z = \cos\dfrac{\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{3}$, 求 $|z + 2z^2 + 3z^3 + \cdots + 12z^{12}|$.

285. 已知 $z_n = (\dfrac{1+\mathrm{i}}{2})^n (n \in \mathbf{N})$. 记 $a_n = |z_{n+1}| - |z_n| (n \in \mathbf{N})$, 求数列 $\{a_n\}$ 所有项之和.

286. 已知 $z_n = (\dfrac{1+\mathrm{i}}{2})^n (n \in \mathbf{N})$. 记 $b_n = |z_{n+2} - z_n| (n \in \mathbf{N})$, 求数列 $\{b_n\}$ 所有项之和.

287. 设复数 $z = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta (0 < \theta < \pi)$, $\omega = \dfrac{1 - (\overline{z})^4}{1 + z^4}$, 且 $|\omega| = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, $\arg\omega < \dfrac{\pi}{2}$, 求 θ.

288. 已知复数 $z = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta (0 < \theta < 2\pi)$, $\omega = \dfrac{1 - z^3}{1 - z}$. 求:

(1) 满足 $|\omega| = 1$ 的复数 z;

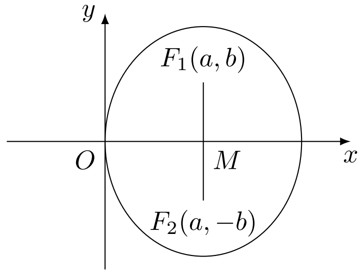
(2) ω 的辐角 (用 θ 表示).

289. 解方程 $3z + \mathrm{i} = 2\mathrm{i}z + 1$. 解答在这里由已知, 得 $(3 - 2\mathrm{i})z = 1 - \mathrm{i}$, 所以 $z = \dfrac{1-\mathrm{i}}{3-2\mathrm{i}} = \dfrac{(1-\mathrm{i})(3+2\mathrm{i})}{13} = \dfrac{5}{13} - \dfrac{1}{13}i$.

290. 设 x 是模不为 1 的虚数, 记 $y = x + \dfrac{1}{x}$, 求满足 $y^2 + ay + 1 = 0$ 的实数 a 的取值范围. 解答在这里由题意可设 $x = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)(r > 0,\ r \neq 1,\ \theta \neq k\pi)$, 则 $y = x + \dfrac{1}{x} = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) + \dfrac{1}{r}(\cos\theta - \mathrm{i}\sin\theta) = (r + \dfrac{1}{r})\cos\theta + \mathrm{i}(r - \dfrac{1}{r})\sin\theta$. 因为 $\theta \neq k\pi$, $r > 0$, 且 $r \neq 1$, 所以 $(r - \dfrac{1}{r})\sin\theta \neq 0$. 故 y 是虚数, 即方程 $y^2 + ay + 1 = 0$ 有虚数根, 所以 $\triangle = a^2 - a < 0$, 故实数 a 的取值范围是 $-2 < a < 2$.

291. 已知关于 x 的实系数方程 $z^2 - 2pz + q = 0 (p \neq 0)$ 的两虚根 z_1, z_2 在复平面内的对应点为 F_1, F_2, 求以 F_1, F_2 为两焦点, 且经过原点的椭圆的普通方程.

解答在这里设 $z_1 = a + b\mathrm{i}(a, b \in \mathbf{R})$, 则 $z_2 = a - b\mathrm{i}$. 由韦达定理, 得 $\begin{cases} z_1 + z_2 = 2a = 2p, \\ z_1 z_2 = a^2 + b^2 = q. \end{cases}$ 于是 $a = p$, $|OF_1| = |OF_2| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{q}$(如图). 显然, 椭圆的半短轴长 $= |OM| = |a| = |p|$, 半焦距 $= |b|$, 半长轴 $= \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{q}$, 而椭圆的中心为 $(a, 0)$, 即 $(p, 0)$, 所以椭圆的普通方程为 $\dfrac{(x-p)^2}{p^2} + \dfrac{y^2}{q} = 1$.



292. 若非零复数 z_1, z_2 在复平面内的对应点分别为 A, B, 且满足 $|z_2|=2$, $z_1^2-2z_1z_2+4z_2^2=0$.

(1) 试判断 $\triangle AOB$(O 为原点) 的形状;

(2) 求 $\triangle AOB$ 的面积. 解答在这里 (1) 由 $z_1^2-2z_1z_2+4z_2^2=0$, 得 $z_1=\dfrac{2z_2\pm 2\sqrt{3}\mathrm{i}z_2}{2}$, 即 $z_1=(1\pm\sqrt{3}\mathrm{i})z_2$, 即 z_1=$2(\cos\dfrac{\pi}{3}\pm i\sin\dfrac{\pi}{3})z_2$. 由此得 $\triangle AOB$ 是直角三舟形, 且 $\angle AOB=60^\circ$.

(2)$S_{\triangle AOB}=\dfrac{1}{2}|AO|\cdot|BO|\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot 2\cdot|BO|^2=2\sqrt{3}$.

293. 解方程 $x^2-(3-2\mathrm{i})x+5-5\mathrm{i}=0$.

解答在这里因为 $\triangle=(3-2\mathrm{i})^2-4(5-5\mathrm{i})=-15+8\mathrm{i}=(1+4\mathrm{i})^2$, 所以 $x=\dfrac{3-2\mathrm{i}\pm(1+4\mathrm{i})}{2}$. 故 $x_1=2+\mathrm{i}$, $x_2=1-3\mathrm{i}$.

294. 解方程 $x^3+8=0$.

解答在这里原方程即为 $(x+2)(x^2-2x+4)=0$. 由 $x+2=0$, 得 $x=-2$. 由 $x^2-2x+4=0$, 得 $x=1\pm\sqrt{3}\mathrm{i}$. 所以原方程的解为 $x_1=-2$, $x_2=1+\sqrt{3}\mathrm{i}$, $x_3=1-\sqrt{3}\mathrm{i}$.

295. 解方程 $(1+z)^n-(1-z)^n=0$.

解答在这里由已知, 得 $(1+z)^n=(1-z)^n$, 显然 $(1-z)^n\neq 0$, 故有 $(\dfrac{1+z}{1-z})^n=1$. 所以 $\dfrac{1+z}{1-z}=\cos\dfrac{2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\dfrac{2k\pi}{n}(k=0,1,2,\cdots n-1)$. 由合分比定理得 $z=\dfrac{\cos\dfrac{2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\dfrac{2k\pi}{n}-1}{\cos\dfrac{2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\dfrac{2k\pi}{n}+1}=\dfrac{\sin\dfrac{k\pi}{n}(-\sin\dfrac{k\pi}{n}+\mathrm{i}\cos\dfrac{k\pi}{n})}{\cos\dfrac{k\pi}{n}(\cos\dfrac{k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\dfrac{k\pi}{n})}=\tan\dfrac{k\pi}{n}\cdot\dfrac{(\cos\dfrac{k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\dfrac{k\pi}{n})\mathrm{i}}{(\cos\dfrac{k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\dfrac{k\pi}{n})}=-\mathrm{i}\tan\dfrac{k\pi}{n}(n=0,1,2,\cdots,n-1)$.

296. 解方程 $(\overline{z})^2=z$.

解答在这里令 $z=x+y\mathrm{i}(x,y\in\mathbf{R})$, 则有 $(x-y\mathrm{i})^2=x+y\mathrm{i}$, 即 $x^2-y^2-2xy\mathrm{i}=x+y\mathrm{i}$, 于是 $\begin{cases}x^2-y^2=x,\\ -2xy=y.\end{cases}$

若 $y=0$, 则 $x^2=x$, 得 $x=0$ 或 $x=1$, 所以 $z_1=0$, $z_2=1$. 若 $y\neq 0$, 则 $x=-\dfrac{1}{2}$, $y=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, 所以 $z_3=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$, $z_4=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$. 所以方程的解为 0, 1, $-\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$.

297. 解方程 $z^2-4|z|+3=0$.

解答在这里由已知, $z^2=-3+4|z|$, 故 z^2 必是实数, 因此, z 是实数或纯虚数.

(1) z 是实数时, 原方程即为 $|z|^2-4|z|+3=0$, 所以 $(|z|-1)(|z|-3)=0$, 于是得 $z=\pm1$ 或 $z=\pm3$.

(2) z 是纯虚数时, 可令 $z=ti(t\in\mathbf{R},\ t\neq 0)$, 则原方程即为 $(ti)^2-4|ti|+3=0$, 即 $-t^2-4|t|+3=0$, 即 $|t|^2+4|t|-3=0$, 所以 $|t|=-2+\sqrt{7}$, 故 $z=\pm(-2+\sqrt{7})\mathrm{i}$. 方程的解为 ±1, ±3, $\pm(2-\sqrt{7})\mathrm{i}$.

298. 若 $z\in\mathbf{C}$, 则方程 $|z|^2-|z|=0$ 解的个数是 (　　).

A. 2　　B. 3　　C. 5　　D. 无穷多

299. 方程 $z^2=\overline{z}$ 的解的个数是 (　　).

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

300. 二次方程 $x^2-2x\mathrm{i}-5=0$ 的根的情况是 ( ).

A. 有两个不等的实根　B. 有一个实根和一个虚根

C. 有一对共轭的虚根　D. 有两个不共轭的虚根

301. 满足 $z+|\overline{z}|=2+\mathrm{i}$ 的复数 z 等于 ( ).

A. $-\dfrac{3}{4}+\mathrm{i}$　B. $\dfrac{3}{4}-\mathrm{i}$　C. $-\dfrac{3}{4}-\mathrm{i}$　D. $\dfrac{3}{4}+\mathrm{i}$

302. 若关于 x 的方程 $x^2+x+p=0$ 的两个虚根 α,β 满足 $|\alpha-\beta|=3$, 则实数 p 的值为 ( ).

A. -2　B. $-\dfrac{1}{2}$　C. $\dfrac{5}{2}$　D. 1

303. 若 $a>1$, α, β 是关于 x 的方程 $x^2+2x+a=0$ 的两根, 则 $|\alpha|+|\beta|$ 的值为 ( ).

A. 2　B. $2\sqrt{a}$　C. $2\sqrt{a-1}$　D. $2\sqrt{1-a}$

304. 若关于 x 的实系数二次方程 $x^2+ax+b=0$ 的一个根是 $2+\mathrm{i}$, 则 $a=$__________, $b=$__________.

305. 若实系数的一元二次方程的一个根是 $\dfrac{1}{3}-\dfrac{4\sqrt{5}}{3}\mathrm{i}$, 则这个方程为__________.

306. 1 的 5 次方根的五个复数的辐角主值之和是 ( ).

A. 2π　B. 4π　C. 6π　D. 8π

307. 若 ω 是 $x^5-1=0$ 的一个虚根, 则 $\omega(1+\omega)(1+\omega^2)$ 的值是 ( ).

A. 1　B. -1　C. i　D. $-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$

308. 复平面内, 两点 M, N 所对应的非零复数是 $\alpha,\beta(O$ 是原点). 若 $\alpha^2+\beta^2=0$, 则 $\triangle OMN$ 是__________ 三角形; 若 $2\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2=0$, 则 $\triangle OMN$ 是__________ 三角形.

309. 在复数范围内解方程 $z\cdot\overline{z}-3\mathrm{i}\overline{z}=1+3\mathrm{i}$.

310. 在复数范围内解方程 $z^2-5|z|+6=0$.

311. 在复数范围内解方程 $2z+|z|=2+6\mathrm{i}$.

312. 在复数范围内解方程 $z|z|+az+\mathrm{i}=0$.

313. 在复数范围内解方程 $a\geq 0$.

314. 已知 $a\in\mathbf{R}$, 在复数范围内解方程 $|z|^2-2z\mathrm{i}+2a(1+\mathrm{i})=0$.

315. 已知关于 x 的方程 $x^2+(k+2\mathrm{i})x+2+k\mathrm{i}=0$ 有一个实根, 求实数 k 的值.

316. 已知关于 x 的方程 $x^2-\mathrm{i}x-m+4n\mathrm{i}=0$ 有实根, 求点 (m,n) 应满足的方程.

317. 已知关于 x 的方程 $x^2-zx+4+3\mathrm{i}=0$ 有实根, 求复数 z 的模的最小值和此时的 z 值.

318. 已知方程 $x^2+\mathrm{i}x+6=2\mathrm{i}+5x$ 有一个实数解, 试在复数范围内解此方程.

319. 已知关于 x 的方程 $x^2+2px+1=0$ 的两根 α, β 在复平面内的对应点和原点恰是一个等边三角形的三个顶点, 求实数 p 的值.

320. 已知 $p, q \in \mathbf{R}$, 方程 $x^2+px+q=0$ 有两虚根 α, β, 方程 $x^2-px+q=0$ 有两虚根 α^2, β^2, 求 α, β, p, q 的值.

321. 已知 a, b 是实数, 关于 x 的方程 $x^2+(2a-b\mathrm{i})x+a-b\mathrm{i}=0$ 的两个非零复数根的辐角分别为 $\dfrac{2\pi}{3}$ 及 π, 求 a, b 的值.

322. 求 $5+12\mathrm{i}$ 的平方根.

323. 解方程: $z^2-\mathrm{i}=0$.

324. 解方程: $z^2-2z\mathrm{i}-5=0$.

325. 复平面内, 已知非零复数 z_1, z_2 对应于点 A 和 B, 复数 z_1-a 与 z_1+a 所对应的两个向量相互垂直且模不相等, 又 $z_1^2-4z_1z_2+6z_2^2=0$.

(1) 求 z_1 与 z_2 的模;

(2) O 为复平面上的坐标原点, 求 $\triangle AOB$ 的面积.

326. 非零复数 α, β 分别对应于点 A, B(O 是原点), 已知 $4\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2=0$.

(1) 求证: $\triangle AOB$ 是直角三角形;

(2) 若 $|\alpha|=1$, 求 $\triangle AOB$ 的面积;

(3) 若 $|\alpha|=t>0$, 求 $|\beta|^2-\alpha\overline{\beta}-\overline{\alpha}\beta$ 的值.

327. 设 α, β 是实系数一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两根, α 为虚数, 而 $\dfrac{\alpha^2}{\beta}$ 为实数, 求复数 $\dfrac{\alpha}{\beta}$ 的值.

328. 已知: $x+\dfrac{1}{x}=2\cos\varphi$. 求证:

(1) $x=\cos\varphi \pm i\sin\varphi$;

(2) $x^n+\dfrac{1}{x^n}=2\cos n\varphi (n \in \mathbf{N})$.

329. 要使关于 x 的方程 $(1-\mathrm{i})x^2+2mix-(1+\mathrm{i})=0$ 有实根, 求实数 m 的值.

330. 若关于 x 的实系数方程 $2x^2+3ax+a^2-a=0$ 至少布一个模为 1 的根, 求实数 a 的值.

331. 若关于 x 的方程 $x^2+(2+\mathrm{i})x+4mn+(2m-n)\mathrm{i}=0 (m, n \in \mathbf{R})$ 有实根, 求点 (m, n) 的轨迹方程.

332. 已知 α, β 是方程 $x^2-2x+2=0$ 的两根, p, q 是关于 x 的方程 $x^2+2mx-1=0 (m \in \mathbf{R})$ 的两根, 且 α, β, p, q 在复平面内的对应点共圆, 求 m 的值.

333. 已知关于 x 的方程 $3x^2-6(m-1)x+m^2+1=0$ 的两根 x_1, x_2 满足 $|x_1|+|x_2|=2$, 求实数 m 的值.

334. 实系数方程 $x^4-4x^3+9x^2-ax+b=0$ 的一个根是 $1+\mathrm{i}$, 求 a, b 的值, 并解此方程.

335. 已知关于 x 的实系数方程 $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$ 有一个纯虚根, 求证: $a^2d+c^2-abc=0$.

336. 已知模为 2, 辐角为 $\frac{\pi}{6}$ 的复数是方程 $x^5+a=0$ 的一个根, 求 a.

337. 已知复数 $z=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$ 满足 $z^n=\overline{z}$, 求整数 n 的一般形式.

338. 利用复数乘法、除法的几何意义, 求证: $\arctan 1+\arctan 2+\arctan 3=\pi$.

339. 利用复数乘法、除法的几何意义, 求证: $\arcsin\frac{\sqrt{10}}{10}+\arccos\frac{7\sqrt{2}}{10}+\arctan\frac{7}{31}+\operatorname{arccot}10=\frac{\pi}{4}$.

340. 利用复数乘法、除法的几何意义, 求证: $\arctan(3+2\sqrt{2})-\arctan\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}$.

341. 利用复数乘法、除法的几何意义, 求证: $\arctan\frac{1}{7}+2\arcsin\frac{1}{\sqrt{10}}=\frac{\pi}{4}$.

342. 复平面内, 已知动点 A, B 所对应的复数 z_1, z_2 的一个辐角为定值 θ 和 $-\theta(0<\theta<\frac{\pi}{2})$, 且 $\triangle AOB$ 的面积为定值 S(O 为坐标原点), 求 $\triangle AOB$ 的重心 M 所对应复数 z 的模的最小值.

343. 复数 z_1, z_2, z_3 的辐角主值分别为 α, β, γ, 模分别为 1, k 和 $2-k$, 且 $z_1+z_2+z_3=0$, 求 k, 使 $\cos(\beta-\alpha)$ 分别取到最大值和最小值, 并求出大值和最小值.

344. 已知复数 $z=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$.

(1) 当实数 k 和 θ 分别为何值时, $z^3+k\overline{z}^3$ 是纯虚数?

(2) 求 $|z^3+k\overline{z}^3|$ 的最大值与最小值.

345. 已知复数 z_1, z_2, z_3 满足 $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$, 求证: $|z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1|=|z_1+z_2+z_3|$.

346. 已知复数 α, β, γ 满足 $|\alpha|=|\beta|=|\gamma|\neq 0$, 求证: $\frac{(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)}{\alpha\beta\gamma}$ 是实数.

347. 设 A, B, C 分别是复数 z_1, z_2, z_3(z_1, z_2, z_3 互不相等) 在复平面内所对应的点, 求证: $\triangle ABC$ 为等边三角形的充要条件是 $z_1^2+z_2^2+z_3^2=z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1$.

348. 利用复数知识证明: $\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$, $\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$.

349. 求证: $\cos\frac{\pi}{2n+1}+\cos\frac{3\pi}{2n+1}+\cos\frac{5\pi}{2n+1}+\cdots+\cos\frac{2n-1}{2n+1}\pi=\frac{1}{2}(n\in\mathbf{N})$.

350. 已知 $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=0$, $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=0$. 求证:

(1) $\cos 3\alpha+\cos 3\beta+\cos 3\gamma=3\cos(\alpha+\beta+\gamma)$, $\sin 3\alpha+\sin 3\beta+\sin 3\gamma=3\sin(\alpha+\beta+\gamma)$;

(2) $\cos 3k\alpha=\cos 3k\beta=\cos 3k\gamma=\cos k(\alpha+\beta+\gamma)$, $\sin 3k\alpha=\sin 3k\beta=\sin 3k\gamma=\sin k(\alpha+\beta+\gamma)(k\in\mathbf{N})$.

351. 若 $|z|=1$, 求复数 $u=3z^2+\frac{1}{z^2}$ 在复平面内的对应点的轨迹.

352. 求复数 $z=\frac{1}{1-b\mathrm{i}}(b\in\mathbf{R}$ 且 $b\neq 0)$ 在复平面内对应点的轨迹方程.

353. 复平面内, 若复数 z 对应的点在连接复数 $2+\mathrm{i}$ 和 $2-\mathrm{i}$ 对应点的线段上移动, 求 z^2 对应点的轨迹方程.

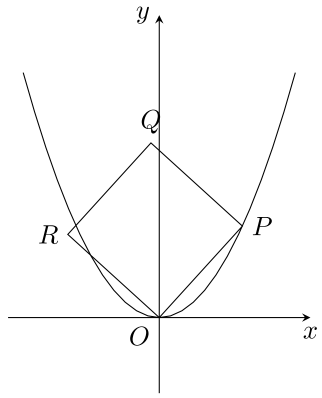
354. 若 $|z|=1$, 求复数 $z+\frac{1}{z}$ 在复平面内的对应点轨迹的普通方程.

355. 若 $|z|=r(r>0, r\neq 1)$, 求复数 $z+\frac{1}{z}$ 在复平面内的对应点轨迹的普通方程.

356. 若 $|z| \neq 0$, 且 $\arg z = \theta$, 求复数 $z + \dfrac{1}{z}$ 在复平面内的对应点轨迹的普通方程.

357. 在等腰 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中, 已知 $\angle C = 90^\circ$, $|AC| = a$. 若点 A 在 x 轴上移动, 点 B 在抛物线上移动, 且点 A, B, C 按逆时针方向排列, 求顶点 C 的轨迹方程.

358. 设 P 是抛物线 $y = x^2$ 上任意一点, 以线段 OP 为边, 按逆时针方向作正方形 $OPQR$(如图), 利用复数知识求点 R 的轨迹方程.



359. 一动点从原点出发, 开始沿 x 轴的正半轴运动, 每运动一个长度单位, 就向左转 θ 角, 求此动点运动 n 个长度单位时与原点的距离.

360. 复平面内, 复数 α 的对应点在连接 $1+\mathrm{i}$ 和 $1-\mathrm{i}$ 的对应两点的线段上运动, 复数 β 的对应点在以原点为圆心, 半径为 1 的圆周上运动, 试求:

(1) 复数 $\alpha + \beta$ 的对应点运动范围的面积;

(2) 复数 $\alpha\beta$ 的对应点运动范围的面积.

361. 已知半径为 1 的定圆 O 的内接正 n 边形的顶点为 $P_k(k = 1, 2, \cdots n)$, P 为该圆周上任意一点, 求证: $|PP_1|^2 + |PP_2|^2 + \cdots + |PP_n|^2$ 为一定值.