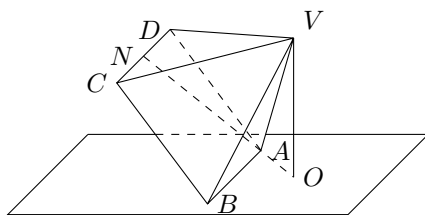


1. 已知函数 $f(x) = \log_a x + x - b$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$). 当 $2 < a < 3 < b < 4$ 时, 函数 $f(x)$ 的零点 $x_0 \in (n, n+1)$, $n \in \mathbf{N}^*$, 则 $n =$ _____.
2. 设实数 a, b, c 满足: $ac \neq 0$ 且 $a \neq c$, 集合 $A = \{y | y = ax^2 + bx + c, x \in \mathbf{R}\}$, $B = \{y | y = cx^2 + bx + a\}$, 以下结论一定正确的是 ().
- A. $A \subseteq B$ B. $B \subseteq A$ C. $A \cup B = \mathbf{R}$ D. $A \cap B \neq \emptyset$
3. 对于无穷数列 $\{a_n\}$, 定义数列 $b_n = |a_{n+1} - a_n|$, 记 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 存在, 则称数列 $\{a_n\}$ 为“好数列”.
- (1) 若 $a_n = \frac{1}{n}$, 判断数列 $\{a_n\}$ 是否为“好数列”? 并说明理由;
- (2) 若数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = qa_n$ ($q \neq 0$), 且 $\{a_n\}$ 是“好数列”, 求 q 的取值范围;
- (3) 若递增数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $\{T_n\}$, 则“ $\{a_n\}$ 为‘好数列’”是“ $\{T_n\}$ 为‘好数列’”的什么条件? 判断并说明理由.
4. 函数 $f(x) = \sin x$, 对于 $x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_n$ 且 $x_1, x_2, \cdots, x_n \in [0, 8\pi]$ ($n \geq 10$, $n \in \mathbf{N}$), 记 $M = |f(x_1) - f(x_2)| + |f(x_2) - f(x_3)| + |f(x_3) - f(x_4)| + \cdots + |f(x_{n-1}) - f(x_n)|$, 则 M 的最大值等于_____.
5. 设 $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{R}$, 且 $\frac{1}{2 + \sin \alpha_1} + \frac{1}{2 + \sin(2\alpha_2)} = 2$, 则 $|10\pi - \alpha_1 - \alpha_2|$ 的最小值等于_____.
6. 正四棱锥 $V-ABCD$ 的表面积为 12, $AB = 2$, N 为棱 CD 的中点, 直线 AB 在平面 α 内. 将该正四棱锥绕直线 AB 任意旋转, 旋转过程中, 设 V 在 α 内的射影为 O , 则线段 ON 长的最大值为_____.



7. 已知 a, b 为空间两条互相垂直的直线, 等腰 $\text{Rt}\triangle ABC$ 的直角边 AC 所在直线与 a, b 都垂直, 斜边 AB 以直线 AC 为旋转轴旋转. 有下列结论: ① 当直线 AB 与 a 所成的角为 60° 时, AB 与 b 所成的角为 30° ; ② 直线 AB 与 a 所成角的最小值为 45° ; ③ 直线 AB 与 a 所成角的最大值为 60° . 其中所有真命题的序号为_____.
8. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足: ① $a_1 = 0$; ② 对任意的 $n \in \mathbf{N}^*$, 都有 $a_{n+1} > a_n$ 成立. 函数 $f_n(x) = \left| \sin \frac{1}{n}(x - a_n) \right|$, $x \in [a_n, a_{n+1}]$ 满足: 对于任意的实数 $m \in [0, 1]$, $f_n(x) = m$ 总是有且仅有两个不同的根, 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.
9. 设 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 是平面上的向量, $|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 3, |\vec{c}| = 4$, 且 $\vec{b} \cdot \vec{c} = 0$, 实数 λ 满足 $0 \leq \lambda \leq 1$. 若 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 及 λ , 使得 $s = |\vec{a} - \lambda \vec{b} - (1 - \lambda) \vec{c}|$ 是正整数, 则 s 的值的集合是_____.

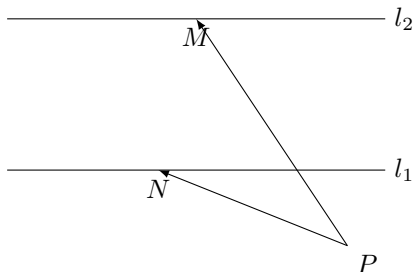
10. 如图, 在平面内, l_1, l_2 是两条平行直线, 它们之间的距离为 2, 点 P 位于 l_1, l_2 的下方, 它到 l_1 的距离为 1, 动点 N, M 分别在 l_1, l_2 上, 满足 $|\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{PN}| = 6$, 则 $\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PN}$ 的最大值为 ().

A. 6

B. 8

C. 12

D. 15



11. 已知过原点 O 的直线与椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 交于 A, B 两点, 点 A 到 y 轴的距离 d 满足 $d \in [1, 2)$, 点 D 在椭圆 C 上, 且 $AD \perp AB$, 直线 BD 与 x 轴、 y 轴分别交于 M, N 两点.

(1) 设直线 BD, AM 的斜率分别为 k_1, k_2 , 求 $k_1 \cdot k_2$ 的取值范围;

(2) 求 $\triangle OMN$ 面积的最大值.

12. 已知点 $A(0, \frac{2}{n}), B(0, -\frac{2}{n}), C(4+\frac{2}{n}, 0)$, 其中 n 为正整数, 设 S_n 表示 $\triangle ABC$ 外接圆的面积, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n =$ _____.

13. 如图所示: 矩形 $A_n B_n P_n Q_n$ 的一边 $A_n B_n$ 在 x 轴上, 另两个顶点 P_n, Q_n 在函数 $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ 的图像上 (其中点 B_n 的坐标为 $(n, 0)$ ($n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*$)), 矩形 $A_n B_n P_n Q_n$ 的面积记为 S_n , 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n =$ _____.

