

1. 已知 $\sin x = -\frac{1}{3} (\pi < x < \frac{3\pi}{2})$, 用反正弦形式表示 x .

解答在这里因为 $\sin(\pi - x) = \sin x = -\frac{1}{3}$, 且由 $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ 知, $-\frac{\pi}{2} < \pi - x < 0$, 所以 $\pi - x = \arcsin(-\frac{1}{3}) = -\arcsin \frac{1}{3}$, 于是 $x = \pi + \arcsin \frac{1}{3}$.

2. 若 $\cos x = \frac{1}{3} (-\frac{\pi}{2} < x < 0)$, 用反余弦形式表示 x .

解答在这里因为 $\cos(-x) = \cos x = \frac{1}{3}$, 且由 $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ 知, $0 < -x < \frac{\pi}{2}$, 所以 $-x = \arccos \frac{1}{3}$, 故 $x = -\arccos \frac{1}{3}$.

3. 求值: $\tan[\frac{1}{2} \arcsin(\frac{-2\sqrt{6}}{5})]$.

解答在这里令 $\alpha = \arcsin(\frac{-2\sqrt{6}}{5})$, 则 $\sin \alpha = \frac{-2\sqrt{6}}{5}$, $\alpha \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$, 于是 $\cos \alpha = \frac{1}{5}$. 所以原式 $= \tan \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{1 - \frac{1}{5}}{\frac{-2\sqrt{6}}{5}} = -\frac{\sqrt{6}}{3}$.

4. 求值: $\cos[\arctan \frac{3}{4} + \arccos(-\frac{2}{3})]$. 解答在这里令 $\alpha = \arctan \frac{3}{4}$, 则 $\tan \alpha = \frac{3}{4}$, $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$, 于是 $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, $\cos \alpha = \frac{4}{5}$. 又 $\beta = \arccos(-\frac{2}{3})$, 则 $\cos \beta = -\frac{2}{3}$, $\beta \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, 于是 $\sin \beta = \frac{\sqrt{5}}{3}$. 所以原式 $= \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = \frac{4}{5} \times (-\frac{2}{3}) - \frac{3}{5} \times \frac{\sqrt{5}}{3} = -\frac{8 + 3\sqrt{5}}{15}$.

5. 求值: $\arcsin(\sin 2)$.

解答在这里 (1) 因为 $\sin 2 = \sin(\pi - 2)$, 且 $\pi - 2 \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, 所以原式 $= \arcsin[\sin(\pi - 2)] = \pi - 2$.

6. 求值: $\arccos(\cos \frac{6}{5}\pi)$.

解答在这里因为 $\cos \frac{6}{5}\pi = \cos \frac{4}{5}\pi$, 且 $\frac{4}{5}\pi \in [0, \pi]$, 所以原式 $= \arccos(\cos \frac{4}{5}\pi) = \frac{4}{5}\pi$.

7. 求值: $\arctan(\cot \sqrt{3})$.

解答在这里因为 $\cot \sqrt{3} = \tan(\frac{\pi}{2} - \sqrt{3})$, 且 $\frac{\pi}{2} - \sqrt{3} \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, 所以原式 $= \arctan[\tan(\frac{\pi}{2} - \sqrt{3})] = \frac{\pi}{2} - \sqrt{3}$.

8. 求值: $\operatorname{arccot}(-\cot \frac{\pi}{7})$. 解答在这里因为 $-\cot \frac{\pi}{7} = \cot(-\frac{\pi}{7}) = \cot[\pi + (-\frac{\pi}{7})] = \cot \frac{6}{7}\pi$, 且 $\frac{6}{7}\pi \in (0, \pi)$, 所以原式 $= \operatorname{arccot}(\cot \frac{6}{7}\pi) = \frac{6}{7}\pi$.

9. 若 $|x| \leq 1$, 求证: $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.

解答在这里证法一因为 $\sin(\frac{\pi}{2} - \arccos x) = \cos(\arccos x) = x$, 其中 $-1 \leq x \leq 1$, 又由 $\arccos x \in [0, \pi]$, 得 $(\frac{\pi}{2} - \arccos x) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, 所以根据反正弦函数的定义, 得 $\frac{\pi}{2} - \arccos x = \arcsin x$, 即 $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.

证法二设 $\arcsin x = \alpha$, 则 $\sin \alpha = x$, $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. 再设 $\arccos x = \beta$, 则 $\cos \beta = x$, $\beta \in [0, \pi]$. 因为 $\sin \alpha = x$, $\sin(\frac{\pi}{2} - \beta) = \cos \beta = x$, 所以 $\sin \alpha = \sin(\frac{\pi}{2} - \beta)$. 因为 $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} - \beta \leq \frac{\pi}{2}$, 所以 $\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$, 即 $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$, 所以 $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.

10. 求证: $\arctan \frac{1}{3} + \arctan \frac{1}{5} + \arctan \frac{1}{7} + \arctan \frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}$.

解答在这里设 $\alpha = \arctan \frac{1}{3}$, $\beta = \arctan \frac{1}{5}$, $\gamma = \arctan \frac{1}{7}$, $\delta = \arctan \frac{1}{8}$, 则 $\tan \alpha = \frac{1}{3}$, $\tan \beta = \frac{1}{5}$, $\tan \gamma = \frac{1}{7}$,

$\tan \delta = \frac{1}{8}$ 且 $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in (0, \frac{\pi}{4})$. 于是 $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{3} \times \frac{1}{5}} = \frac{4}{7}$, $\tan(\gamma + \delta) = \frac{\tan \gamma + \tan \delta}{1 - \tan \gamma \tan \delta} = \frac{\frac{1}{7} + \frac{1}{8}}{1 - \frac{1}{7} \times \frac{1}{8}} = \frac{3}{11}$. 所以 $\tan(\alpha + \beta + \gamma + \delta) = \frac{\frac{4}{7} + \frac{3}{11}}{1 - \frac{4}{7} \times \frac{3}{11}} = 1$. 因为 $0 < \alpha + \beta + \gamma + \delta < \pi$, 所以 $\alpha + \beta + \gamma + \delta = \frac{\pi}{4}$, 原命题得证.

11. 求满足不等式 $\arcsin x < 1$ 的 x 的取值范围. 解答在这里由已知条件, 得 $\begin{cases} -1 \leq x \leq 1, \\ \arcsin x < \arcsin(\sin 1), \end{cases}$ 于是

$$\begin{cases} -1 \leq x \leq 1, \\ x < \sin 1, \end{cases} \quad \text{所以 } -1 \leq x < \sin 1.$$

12. 求满足不等式 $\arccos(2x^2 - 1) < \arccos x$ 的 x 的取值范围. 解答在这里由已知条件, 得 $\begin{cases} -1 \leq 2x^2 - 1 \leq 1, \\ -1 \leq x \leq 1, \\ 2x^2 - 1 > x, \end{cases}$

$$\text{即 } \begin{cases} -1 \leq x \leq 1, \\ 2x^2 - x - 1 > 0, \end{cases} \quad \text{也即 } \begin{cases} -1 \leq x \leq 1, \\ x < -\frac{1}{2}x > 1, \end{cases} \quad \text{所以 } -1 \leq x < -\frac{1}{2}.$$

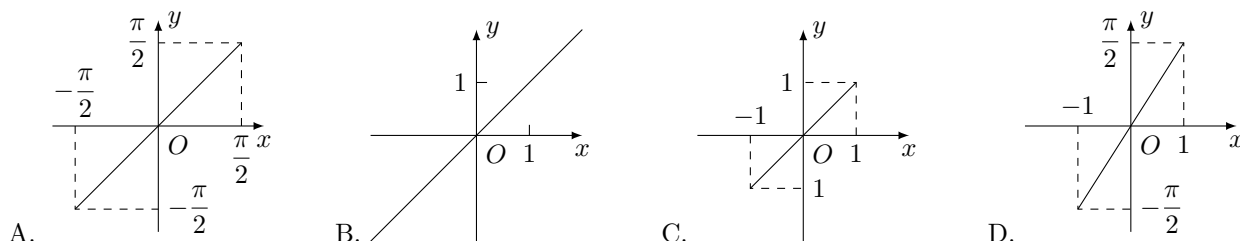
13. 若 $\pi \leq \alpha \leq \frac{3\pi}{2}$, 且 $\sin \alpha = -\frac{1}{4}$, 则用反三角形式表示 α 是 ().

- A. $\pi - \arcsin \frac{1}{4}$ B. $\pi + \arcsin \frac{1}{4}$ C. $\frac{3\pi}{2} - \arcsin \frac{1}{4}$ D. $\frac{3\pi}{2} + \arcsin \frac{1}{4}$

14. 函数 $y = \arcsin(\cot x)$ 的定义域是 ().

- A. $[-1, 1]$ B. $[k\pi + \frac{\pi}{4}, k\pi + \frac{3\pi}{4}](k \in \mathbf{Z})$
C. $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ D. $[k\pi - \frac{\pi}{4}, k\pi + \frac{\pi}{4}](k \in \mathbf{Z})$

15. 函数 $y = \sin(\arcsin x)$ 的图像是 ().



16. 函数 $f(x) = 2 \arcsin(x - 1)$ 的反函数是 ().

- A. $y = \frac{1}{2} \sin(x - 1) (-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2})$ B. $y = 1 + \sin \frac{x}{2} (-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2})$
C. $y = 1 + \sin \frac{x}{2} (-\pi \leq x \leq \pi)$ D. $y = \sin(\frac{x}{2} + 1) (-\pi \leq x \leq \pi)$

17. 函数 $y = \arcsin(x^2 - x)$ 为减函数的区间是 ().

- A. $[-1, 1]$ B. $[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})]$ C. $(-\frac{\pi}{4}, +\infty)$ D. $[\frac{1}{2}(1 - \sqrt{5}), \frac{1}{2}]$

18. 若 $0 < a < 1$, 则在 $[0, 2\pi]$ 内满足 $\sin x \geq a$ 的 x 的取值范围是 ().

- A. $[0, \arcsin a]$ B. $[\arcsin a, \pi - \arcsin a]$ C. $[\pi \arcsin a, \pi]$ D. $[\arcsin a, \frac{\pi}{2} + \arcsin a]$

19. 若 $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$, 则 $\arcsin(\sin x)$ 的值等于 ().

- A. x B. $\pi - x$ C. $x - \pi$ D. $x + \pi$

20. 已知 $\arcsin x \geq 1$, 则 x 的取值范围是 ().

- A. $[0, 1]$ B. $[0, \sin 1]$ C. $[\sin 1, 1]$ D. $[-1, 1]$

21. 若函数 $y = \arcsin(\cos x)$ 的定义域是 $(-\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3})$, 则值域是 ().

- A. $(-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$ B. $(-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}]$ C. $(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}]$ D. $[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$

22. 函数 $y = \sqrt{\arcsin x}$ 的定义域为_____, 值域为_____.

23. 函数 $y = \arcsin(\lg \frac{x}{2})$ 的定义域为_____, 值域为_____.

24. 函数 $y = \frac{1}{2} \arcsin \frac{1}{x-2}$ 的定义域为_____, 值域为_____.

25. 函数 $y = \arcsin(x - x^2)$ 的定义域为_____, 值域为_____.

26. 函数 $f(x) = \log_2(\arcsin \frac{x}{2})$ 的定义域为_____, 值域为_____.

27. 计算: $\arcsin[\sin(-\frac{5\pi}{4})] =$ _____.

28. 计算: $\arcsin(\sin 3) =$ _____.

29. 计算: $\arcsin(\cos 2) =$ _____.

30. 计算: $\arcsin(\cos 5) =$ _____.

31. 计算: $\arcsin(\sin \pi^2) =$ _____.

32. 求函数 $y = (\arcsin x)^2 - 2 \arcsin x - 2$ 的最大值与最小值, 并求取得最大值、最小值时的 x 值.

33. 已知 a, b, c 依次为直角三角形的两直角边和斜边, 且满足 $\arcsin \frac{1}{a} + \arcsin \frac{1}{b} = \frac{\pi}{2}$, 求证: $c = ab$.

34. 已知 $\alpha = \frac{9\pi}{8}$, 求 $\arcsin(\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sqrt{2}})$ 的值.

35. 已知 $\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{5\pi}{4}$, 求证 $\arcsin(\frac{\sin \theta + \cos \theta}{\sqrt{2}}) = \frac{3\pi}{4} - \theta$.

36. 求函数 $f(x) = \sin(x - \frac{\pi}{4}) \cos(x + \frac{\pi}{4})$, $-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ 的反函数.

37. 求函数 $f(x) = \sin(x - \frac{\pi}{4}) \cos(x + \frac{\pi}{4})$, $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ 的反函数.

38. 下列各式正确的是 ().

- A. $\arcsin(-\frac{\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\sin(\arcsin \frac{\pi}{3}) = \frac{\pi}{3}$
C. $\arcsin(\sin \frac{5\pi}{4}) = \frac{\pi}{4}$ D. $\sin[\arccos(-\frac{\sqrt{2}}{2})] = \frac{\sqrt{2}}{2}$

39. 在 $[-1, \frac{3}{2}]$ 上与函数 $y = x$ 相同的函数是 ().

- A. $y = \arccos(\cos x)$ B. $y = \arcsin(\sin x)$ C. $y = \sin(\arcsin x)$ D. $y = \cos(\arccos x)$

40. 若 $f(\cos x) = \frac{x}{2}$, $x \in [0, \pi]$, 则 $f(-\frac{1}{2})$ 等于 ().

- A. $\cos \frac{1}{2}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{\pi}{4}$ D. $\frac{2\pi}{3}$

41. 函数 $y = \arccos(-x)$ 的图像与 $y = \arccos x$ 的图像 ().

- A. 关于 x 轴对称 B. 关于 y 轴对称 C. 关于原点对称 D. 关于直线 $y = x$ 对称

42. 函数 $y = \arccos(x^2 - 2x)$ 为减函数的区间是 ().

- A. $[1, +\infty]$ B. $[-1, 1 + \sqrt{2}]$ C. $[1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}]$ D. $[1, 1 + \sqrt{2}]$

43. 函数 $y = \sqrt{\arccos x}$ 的定义域为_____, 值域为_____.

44. 函数 $y = \arccos(\sqrt{2} \sin x)$ 的定义域为_____, 值域为_____.

45. 函数 $y = \arccos \frac{2}{x}$ 的定义域为_____, 值域为_____.

46. 函数 $y = \arccos(2x^2 - x)$ 的定义域为_____, 值域为_____.

47. 函数 $y = \sqrt{\frac{2\pi}{3} - \arccos(\frac{1}{2}x - 1)}$ 的定义域为_____, 值域为_____.

48. 已知 $\cos x = -\frac{1}{3}$, $\pi \leq x \leq 2\pi$ 则 $x =$ _____.

49. 函数 $f(x) = \frac{1}{2} \arccos(x + 2)$ 的反函数是_____.

50. $\sin(\arccos x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 则 $x =$ _____.

51. 已知 $\arccos(\cos x) = \frac{\pi}{6}$, 则 $x =$ _____.

52. 已知 $\cos[\arccos(x + 1)] = x + 1$, 则 x 的取值范围是_____.

53. 计算: $\arcsin(\sin \frac{3\pi}{4}) + \arccos(\cos \frac{3\pi}{4}) =$ _____.

54. 计算: $\arccos[\cos(-\frac{\pi}{6})] =$ _____.

55. 计算: $\arccos(\sin \frac{\pi}{7}) =$ _____.

56. 计算: $\arccos(\cos \pi^2) =$ _____.

57. 计算: $\tan(\frac{1}{2} \arccos \frac{2\sqrt{2}}{3}) =$ _____.

58. 计算: $\cos[\frac{1}{2} \arccos(-\frac{3}{5})] =$ _____.

59. 满足不等式 $2 \arccos x - \arccos(-x) > 0$ 的 x 的取值集合为_____.

60. 满足不等式 $\arccos 3x < \arccos(2 - 5x)$ 的 x 的取值集合为_____.

61. 满足不等式 $\arccos(2x^2 - 1) < \arccos x$ 的 x 的取值集合为_____.
62. 满足不等式 $\arccos x > \arcsin x$ 的 x 的取值集合为_____.
63. 已知 $f(x) = \arccos x + 1$, 且 $f(a) = a$, 求 $f(-a)$ 的值.
64. 设 $f(x)$ 为奇函数, 且当 $x > 0$ 时, $f(x) = \pi - \arccos(\sin x)$, 则当 $x < 0$ 时, $f(x)$ 的解析式为 ().
- A. $\arccos(\sin x)$ B. $-\arccos(\sin x)$ C. $\pi + \arccos(\sin x)$ D. $-\pi - \arccos(\sin x)$
65. 下列四个命题中正确的是 ().
- A. 若 $\sin f(x)$ 是奇函数, 则 $f(x)$ 是奇函数 B. 若 $\cos f(x)$ 是奇函数, 则 $f(x)$ 是奇函数
- C. 若 $\arcsin f(x)$ 是奇函数, 则 $f(x)$ 是奇函数 D. 若 $\arccos f(x)$ 是奇函数, 则 $f(x)$ 是奇函数
66. 函数 $f(x) = \frac{\arcsin x}{\frac{\pi}{2} - \arccos x}$ ().
- A. 是奇函数, 但不是偶函数 B. 是偶函数, 但不是奇函数
- C. 即不是奇函数, 也不是偶函数 D. 奇偶性无法确定
67. 若函数 $f(x) = -\arccos x + \varphi$ 是奇函数, 则 φ 等于 ().
- A. π B. $\frac{\pi}{2}$ C. $-\pi$ D. $-\frac{\pi}{2}$
68. 用一个反正弦形式表示 $\arcsin \frac{12}{13} + \arccos \frac{4}{5}$.
69. 用一个反余弦形式表示 $\arccos \frac{15}{17} - \arcsin \frac{4}{5}$.
70. 求值: $\arcsin \frac{2\sqrt{2}}{3} + \arcsin \frac{1}{3}$.
71. 求值: $\arccos(-\frac{11}{14}) - \arccos \frac{1}{7}$.
72. 已知 $\arccos \frac{x}{a} = 2 \arcsin \frac{y}{a}$, 求证: $a^2 = ax + 2y^2$.
73. 求值: $\sin(\arcsin \frac{3}{5} + \arcsin \frac{8}{17})$.
74. 求值: $\tan[\arcsin \frac{1}{3} + \arccos(-\frac{1}{5})]$.
75. 求值: $\cos[\arccos \frac{4}{5} - \arccos(-\frac{5}{13})]$.
76. 求值: $\arcsin(\cos 4) - \arccos(\sin 5)$.
77. 已知 $-\frac{\pi}{3} < \theta < \frac{2\pi}{3}$, 求证: $\arccos \frac{\sqrt{3} \sin \theta - \cos \theta}{2} + \theta = \frac{2\pi}{3}$.
78. 若 $\arcsin(\sin \alpha + \sin \beta) + \arcsin(\sin \alpha - \sin \beta)$ 是 $\frac{\pi}{2}$ 的奇数倍, 求证: $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta = \frac{1}{2}$.
79. 求函数 $y = (\arccos x)^2 - 5 \arccos x (|x| \leq 1)$ 的值域.
80. 已知函数 $f(x) = \cos(2 \arccos x) + 4 \sin(\arcsin \frac{x}{2})$, 求它的最大值与最小值.

81. 记 $M = \arcsin(-\frac{1}{3})$, $P = \arctan(-\sqrt{2})$, $Q = \arccos(-\frac{2}{3})$, 则 M, P, Q 的大小关系是 ().
- A. $M < P < Q$ B. $M < Q < P$ C. $P < M < Q$ D. $P < Q < M$
82. 计算 $\arctan(\tan \frac{3}{5}\pi)$ 的值是 ().
- A. $-\frac{3}{5}\pi$ B. $\frac{2}{5}\pi$ C. $-\frac{2}{5}\pi$ D. $\frac{3}{5}\pi$
83. 若 $x < 0$, 则 $\arctan x$ 等于 ().
- A. $\operatorname{arccot} \frac{1}{x}$ B. $-\operatorname{arccot} \frac{1}{x}$ C. $\pi - \operatorname{arccot} \frac{1}{x}$ D. $\operatorname{arccot} \frac{1}{x} - \pi$
84. 函数 $f(x) = \frac{\pi}{2} + \arctan x$ 的反函数是 ().
- A. $f^{-1}(x) = \tan(x - \frac{\pi}{2})(0 < x < \pi)$ B. $f^{-1}(x) = -\cot x(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2})$
C. $f^{-1}(x) = -\frac{1}{\tan x}(0 < x < \pi)$ D. $f^{-1}(x) = \tan x(0 < x < \pi)$
85. 若 $\arctan(x+1) - \arctan(x-1) = \frac{\pi}{4}$, 则 $\arcsin \frac{1}{x^2}$ 等于 ().
- A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{4}$ C. $\frac{\pi}{3}$ D. $\frac{4\pi}{3}$
86. 下列函数中, 同时满足条件① 定义域是 \mathbf{R} , ② 是奇函数, ③ 是周期函数的函数是 ().
- A. $y = \arcsin(\sin x)$ B. $y = \cos(\arcsin x)$ C. $y = \tan(\arctan x)$ D. $y = \arctan(\tan x)$
87. 在① $\arcsin(\sin \frac{5}{6}\pi) = \frac{5}{6}\pi$, ② $\arctan(\tan \frac{7}{6}\pi) = \frac{\pi}{6}$, ③ $\cos(\arccos \pi) = \pi$, ④ $\tan(\operatorname{arccot} 0) = 0$ 这四个式子中, 正确的有 ().
- A. 0 个 B. 1 个 C. 2 个 D. 3 个
88. 计算: $\arctan \frac{1}{3} + \arctan 3 + \arcsin \frac{1}{5} - \arccos(-\frac{1}{5}) =$ _____.
89. 计算: $\arctan(\cot 1) =$ _____.
90. 计算: $\operatorname{arccot}(\cot \frac{10}{7}\pi) =$ _____.
91. 计算: $\arctan \frac{1 - \tan 25^\circ}{1 + \tan 25^\circ} =$ _____.
92. 计算: $\arctan 7 + \operatorname{arccot} \frac{3}{4} =$ _____.
93. 计算: $\arctan(3 + 2\sqrt{2}) - \arctan \frac{\sqrt{2}}{2} =$ _____.
94. 计算: $\arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{5} + \arctan \frac{1}{8} =$ _____.
95. 计算: $\arcsin(\sin 4) + \arccos(\cos 3) + \arctan(\tan 2) + \operatorname{arccot}(\cot 1) =$ _____.
96. 求值: $\sin[\frac{1}{2} \arctan(-2\sqrt{2})] =$ _____.
97. 求值: $\sin[\frac{1}{2} \operatorname{arccot}(-\frac{3}{4})] =$ _____.

98. 求值: $\tan(\arctan \frac{1}{5} + \arctan 3) =$ _____.

99. 求值: $\sin[2 \arctan(-6)] =$ _____.

100. 求值: $\cos(2 \operatorname{arccot} \frac{1}{2}) + \tan[\frac{1}{2} \arccos(-\frac{3}{5})] =$ _____.

101. 在下列各组函数中, 图像不相同的是 ().

A. $y = \sin(\arccos x)$ 与 $y = \cos(\arcsin x)$

B. $y = \tan(\operatorname{arccot} x)$ 与 $y = \cot(\arctan x)$

C. $y = \arcsin(\sin x)$ 与 $y = \arccos(\cos x)$, $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

D. $y = \arctan(\tan x)$ 与 $y = \arctan(\cot x)$, $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$

102. 若将函数 $y = \arctan x$ 的图像沿 x 轴正方向平移 2 个单位长度所得到的图像记为 C , 又图像 C' 与 C 关于原点对称, 则与 C' 对应的函数是 ().

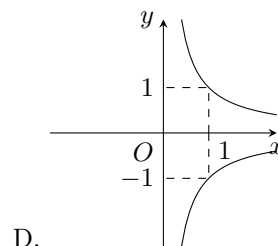
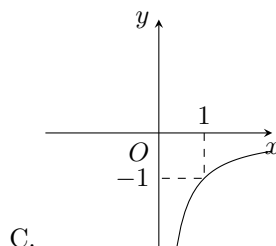
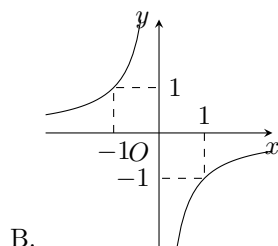
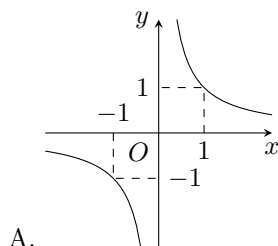
A. $y = -\arctan(x-2)$

B. $y = \arctan(x-2)$

C. $y = -\arctan(x+2)$

D. $y = \arctan(x+2)$

103. 若 $\arctan x + \operatorname{arccot} y = \pi$, 则点 (x, y) 组成的图像是 ().



104. 函数 $y = \arctan(\sin x)$ 的定义域为_____, 值域为_____.

105. 函数 $y = \frac{1}{3} \arcsin 3x + \arctan \sqrt{3}x$ 的定义域为_____, 值域为_____.

106. 函数 $y = \operatorname{arccot} \sqrt{\cos x}$ 的定义域为_____, 值域为_____.

107. 函数 $y = \arctan \frac{1}{x^2 - 1}$ 的定义域为_____, 值域为_____.

108. 已知方程 $x^2 + 3\sqrt{3}x + 4 = 0$ 的两个实根为 x_1 与 x_2 , 记 $\alpha = \arctan x_1$, $\beta = \arctan x_2$, 求 $\alpha + \beta$ 的值.

109. 已知实数 a, b 满足 $(a+1)(b+1) = 2$, 求 $\arctan a + \arctan b$ 的值.

110. 已知 $|x| \leq 1$, 求 $\csc^2(\arctan x) - \tan^2(\arccos x)$ 的值.

111. 解方程 $2 \sin^2 x + 3 \sin x - 2 = 0$.

解答在这里原方程即 $(2 \sin x - 1)(\sin x + 2) = 0$, 所以 $\sin x = \frac{1}{2}$ 或 $\sin x = -2$ (舍去). 所以 $x = k\pi + (-1)^k \frac{\pi}{6} (k \in \mathbf{Z})$.

112. 解方程 $2 \sin x - \cos x = 1$.

解答在这里原方程即 $\sin x \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} - \cos x \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$, 即 $\sin(x - \varphi) = \frac{1}{\sqrt{5}}$ (其中 $\varphi = \arctan \frac{1}{2}$), 所以 $x = k\pi + (-1)^k \arcsin \frac{1}{\sqrt{5}} + \arctan \frac{1}{2} (k \in \mathbf{Z})$.

113. 解方程 $\sin^2 x - 3 \sin x \cos x + 1 = 0$.

解答在这里解法一原方程即 $2 \sin^2 x - 3 \sin x \cos x + \cos^2 x = 0$. 显然 $\cos^2 x \neq 0$, 则有 $2 \tan^2 x - 3 \tan x + 1 = 0$, 即 $(2 \tan x - 1)(\tan x - 1) = 0$, 所以 $\tan x = \frac{1}{2}$ 或 $\tan x = 1$, 所以 $x = k\pi + \arctan \frac{1}{2}$ 或 $x = k\pi + \frac{\pi}{4} (k \in \mathbf{Z})$. 解法二原方程即 $\frac{1 - \cos 2x}{2} - \frac{3}{2} \sin 2x + 1 = 0$. 整理, 得 $3 \sin 2x + \cos 2x = 3$, 于是 $\sin(2x + \varphi) = \frac{3}{\sqrt{10}}$ (其中 $\varphi = \arctan \frac{1}{3}$), 所以 $2x + \varphi = k\pi + (-1)^k \arcsin \frac{3}{\sqrt{10}}$, 故 $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{1}{2}(-1)^k \arcsin \frac{3}{\sqrt{10}} - \frac{1}{2} \arctan \frac{1}{3} (k \in \mathbf{Z})$.

114. 解方程 $\tan 5x = \tan 4x$.

解答在这里由已知, 得
$$\begin{cases} 5x \neq m\pi + \frac{\pi}{2}, \\ 4x \neq n\pi + \frac{\pi}{2}, \\ 5x = k\pi + 4x \end{cases} \quad (m, n, k \in \mathbf{Z}), \text{ 所以 } x = k\pi (k \in \mathbf{Z}).$$

115. 解方程 $\sin 2x - 12(\sin x - \cos x) + 12 = 0$.

解答在这里令 $\sin x - \cos x = t (|t| \leq \sqrt{2})$, 则 $\sin 2x = 1 - t^2$, 原方程可化为 $1 - t^2 - 12t + 12 = 0$, 即 $t^2 + 12t - 13 = 0$, 也即 $(t + 13)(t - 1) = 0$. 所以 $t = -13$ (舍去), 或 $t = 1$. 所以 $\sin x - \cos x = 1$, 即 $\sin(x - \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 故 $x = k\pi + (-1)^k \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} (k \in \mathbf{Z})$.

116. 解方程 $\sin^2 x + \sin^2 2x = \sin^2 3x$.

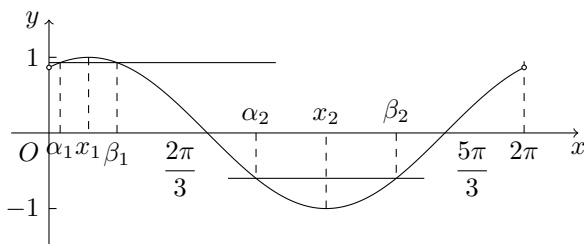
解答在这里原方程即 $(\sin^2 3x - \sin^2 x) - \sin^2 2x = 0$, 所以 $(\sin 3x + \sin x)(\sin 3x - \sin x) - \sin^2 2x = 0$, 即 $4 \sin 2x \cos x \cos 2x \sin x - \sin^2 2x = 0$, 所以 $2 \sin^2 2x \cos 2x - \sin^2 2x = 0$. 于是 $\sin^2 2x(2 \cos 2x - 1) = 0$, 所以 $\sin 2x = 0$ 或 $\cos 2x = \frac{1}{2}$, 故 $x = \frac{k\pi}{2}$ 或 $x = k\pi \pm \frac{\pi}{6} (k \in \mathbf{Z})$.

117. 求实数 m 的取值范围, 使关于 x 的方程 $2 \sin^2 x + 2 \sin x \cos x - \cos^2 x - 1 - m = 0$ 有解.

解答在这里原方程即 $\sin^2 x + 2 \sin x \cos x - 2 \cos^2 x = m$, 所以 $\frac{1 - \cos 2x}{2} + \sin 2x - 2 \cdot \frac{1 + \cos 2x}{2} = m$, 即 $2 \sin 2x - 3 \cos 2x = 2m + 1$, 所以 $\sin(2x - \varphi) = \frac{2m + 1}{\sqrt{13}}$ (其中 $\varphi = \arctan \frac{3}{2}$). 欲使方程有解, 只需 $-\sqrt{13} \leq 2m + 1 \leq \sqrt{13}$, 所以 $\frac{-1 - \sqrt{13}}{2} \leq m \leq \frac{-1 + \sqrt{13}}{2}$.

118. 关于 x 的方程 $\sin x + \sqrt{3} \cos x + a = 0$ 在 $(0, 2\pi)$ 内有两个相异的实数解 α, β , 求实数 a 的取值及 $\alpha + \beta$ 的值.

解答在这里原方程即 $\sin(x + \frac{\pi}{3}) = -\frac{a}{2}$. 令 $y_1 = \sin(x + \frac{\pi}{3}) (0 < x < 2\pi)$, $y_2 = -\frac{a}{2}$. 只需 y_2 的图像 (一条和 y 轴垂直的直线) 和 y_1 的图像在 $(0, 2\pi)$ 内有两个交点即可. 观察下图, 得
$$\begin{cases} -1 < -\frac{a}{2} < 1, \\ -\frac{a}{2} \neq \frac{\sqrt{3}}{2}, \end{cases} \quad \text{即 } -2 < a < 2$$
 且 $a \neq -\sqrt{3}$. 利用中点知识, 易得 $\alpha_1 + \beta_1 = 2x_1 = \frac{\pi}{2}$, $\alpha_2 + \beta_2 = 2x_2 = \frac{7}{3}\pi$, 即 $\alpha + \beta = \frac{\pi}{3}$ 或 $\alpha + \beta = \frac{7\pi}{3}$.

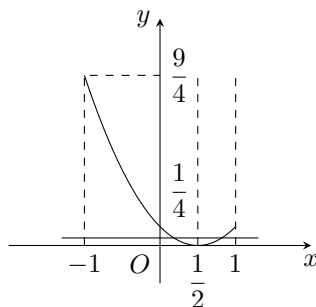


119. 就实数 a 的取值范围, 讨论关于 x 的方程 $\cos 2x + 2\sin x + 2a - 3 = 0$ 在 $[0, 2\pi]$ 内解的情况.

解答在这里原方程即 $\sin^2 x - \sin x = a - 1$, 配方, 得 $(\sin x - \frac{1}{2})^2 = a - \frac{3}{4}$. 令 $y_1 = (\sin x - \frac{1}{2})^2$, $y_2 = a - \frac{3}{4}$.

观察下图, 得:

- (1) 当 $a - \frac{3}{4} > \frac{9}{4}$ 或 $a - \frac{3}{4} < 0$, 即 $a > 3$ 或 $a < \frac{3}{4}$ 时, 方程无解.
- (2) 当 $a - \frac{3}{4} = \frac{9}{4}$, 即 $a = 3$ 时, 方程有一解 $x = \frac{3}{2}\pi$.
- (3) 当 $\frac{1}{4} < a - \frac{3}{4} < \frac{9}{4}$ 或 $a - \frac{3}{4} = 0$, 即 $1 < a < 3$ 或 $a = \frac{3}{4}$ 时, 方程有两解.
- (4) 当 $a - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$, 即 $a = 1$ 时, 方程有三解: $x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$.
- (5) 当 $0 < a - \frac{3}{4} < \frac{1}{4}$, 即 $\frac{3}{4} < a < 1$ 时, 方程有四解.



120. 若关于 x 的方程 $\sin x = 2a - 1$ 有解, 则 a 的取值范围是 ().

- A. $0 < a < 1$ B. $a < 0$ 或 $a > 1$ C. $a \leq 0$ 或 $a \geq 1$ D. $0 \leq a \leq 1$

121. 满足 $\cos(2x + 45^\circ) = \sin(30^\circ - x)$ 的最小正角是 ().

- A. 5° B. 15° C. 30° D. 37.5°

122. 记方程 $\cos 2x = 1$ 的解集为 M , 方程 $\sin 4x = 0$ 的解集为 P , 则 M 与 P 的关系是 ().

- A. $M \subset P$ B. $M \supset P$ C. $M = P$ D. $M \not\subset P$ 且 $M \not\supset P$

123. 方程 $\cos x^2 = 1$ 的解集是 ().

- A. $\{x|x = 2k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$ B. $\{x|x = \pm\sqrt{2k\pi}, k \in \mathbf{Z}\}$
C. $\{x|x = \pm\sqrt{2k\pi}, k \in \mathbf{N}\}$ D. $\{x|x = \pm\sqrt{2k\pi}, k \in \mathbf{N}\} \cup \{0\}$

124. 方程 $\sin^2 x = \cos^2 x$ 的解集是 ().

- A. $\{x|x = 2k\pi + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbf{Z}\}$ B. $\{x|x = k\pi + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbf{Z}\}$
C. $\{x|x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbf{Z}\}$ D. $\{x|x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbf{Z}\}$

方程 $\sqrt{1 - \sin^2 x} = \sin x$ 的解集是 ().

- A. $\{x|x = k\pi + (-1)^k \frac{\pi}{4}, k \in \mathbf{Z}\}$ B. $\{x|x = k\pi + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbf{Z}\}$
C. $\{x|x = k\pi \pm \frac{\pi}{4}, k \in \mathbf{Z}\}$ D. $\{x|x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{4}, k \in \mathbf{Z}\}$

125. 方程 $\tan(2x + \frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 在 $[0, 2\pi)$ 范围内的解的个数是 ().

- A. 5 B. 4 C. 3 D. 2

126. 若方程 $2\cos x = (\frac{1}{2})^a$ 无解, 则实数 a 的取值范围是_____.
127. 方程 $\sin x = -\cos \frac{2\pi}{5}$ 的解集是_____.
128. 方程 $\sin 2x \cdot \cot x = 0$ 的解集是_____.
129. 若函数 $f(x) = \sin(2x + 5\theta)$ 的图像关于 y 轴对称, 则 θ 的值等于_____.
130. 若方程 $\sin x = a$ 在 $[\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}]$ 中恰有两个不同的实数解, 则 a 的取值范围是_____.
131. 若 $-6 < \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} x < -2$, 求方程 $\cos \pi x = 1$ 的解集.
132. 求方程 $\lg x = \cos 2x$ 解的个数.
133. 方程 $\frac{\cos 2x}{1 + \sin 2x} = 0$ 的解集是 ().
- A. $\{x|x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{4}, k \in \mathbf{Z}\}$ B. $\{x|x = k\pi \pm \frac{\pi}{4}, k \in \mathbf{Z}\}$ C. $\{x|x = k\pi + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbf{Z}\}$ D. $\{x|x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbf{Z}\}$
134. 方程 $\frac{2\sin x}{\sin 2x} = 1$ 在 $-2\pi \leq x \leq 2\pi$ 范围内 ().
- A. 有一个解 B. 有两个解 C. 有三个解 D. 无解
135. 下列方程中, 与方程 $\sin x = \cos x$ 的解集相同的是 ().
- A. $\sin 2x = 2\sin^2 x$ B. $\cos x = \sqrt{1 - \cos^2 x}$ C. $\sin^2 x = \cos^2 x$ D. $\frac{\cos 2x}{\sin x + \cos x} = 0$
136. 方程 $\lg_2 \tan x = 1 + \lg_2 \sin x$ 的解集为_____.
137. 方程 $\sin x + \sqrt{3} \cos x = 2$ 的解集为_____.
138. 已知 $|a| \leq 2$, 方程 $\sin x - \sqrt{3} \cos x = a$ 的解集为_____.
139. 方程 $\cos(x + \frac{2\pi}{3}) \cos(x + \frac{\pi}{3}) = -\frac{1}{4}$ 的解集为_____.
140. 方程 $\cos^2(\frac{x - 30^\circ}{2}) + \cos^2(\frac{x + 30^\circ}{2}) = 1$ 的解集为_____.
141. 方程 $\sin x \cos x + 1 = \sin x + \cos x$ 的解集为_____.
142. 方程 $\sqrt{2} \sin x = \sin 2x + \cos 2x$ 的解集为_____.
143. 方程 $\sin(x - \frac{\pi}{6}) \sin(x + \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$ 的解集为_____.
144. 解方程 $\sin 3x - \sin 2x + \sin x = 0$.
145. 解方程 $\cos 2x \cos 3x = \cos x \cos 4x$.
146. 解方程 $\sin 4x \cos 3x = \sin 6x \cos x$.
147. 解方程 $\sin 5x - \sin 3x = \sqrt{2} \cos 4x$.

148. 解方程 $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 1 + \cos x + \cos 2x$.
149. 若方程 $\sin x + \cos x = m (m \in \mathbf{R})$ 在 $0 \leq x \leq \pi$ 范围内有两个不同的实数解, 则 ().
 A. $-1 \leq m \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ B. $-1 < m \leq 1$ 或 $m = \sqrt{2}$ C. $1 \leq m < \sqrt{2}$ D. $-\sqrt{2} < m < \sqrt{2}$
150. 方程 $\sin^2 x + 2 \sin x - a = 0$ 有解的条件为 ().
 A. $a \in \mathbf{R}$ B. $a \in [-1, 3]$ C. $a \in [-1, \infty)$ D. $a \in (-\infty, 3]$
151. 若方程 $\cos^2 x - |\sin x| + 1 = 0$ 在 $-\pi < x < \pi$ 范围内的解之和是 p , 解之积是 q , 则下列结论正确的是 ().
 A. $p = -1$ B. $p = 0$
 C. $q = 1$ D. $q = 2$
152. 设 $f(x) = \cos(x - a) + \sin(x + a)$ 是偶函数, 求 a 的值.
153. 解方程 $8 \sin^2 x = 3 \sin 2x - 1$.
154. 解方程 $(\sin x + \cos x)^2 = 2 \cos 2x$.
155. 解方程 $\frac{1 + \tan x}{1 - \tan x} = 1 + \sin 2x$.
156. 解方程 $\tan(\frac{\pi}{3} + x) + \tan(\frac{\pi}{6} - x) = \frac{4}{\sqrt{3}}$.
157. 解方程 $\sin x + \cos x + \sin x \cos x = 1$.
158. 解方程 $\sin 2x - 12(\sin x - \cos x) + 12 = 0$.
159. 解方程 $\sqrt{2}(\sin x + \cos x) = \tan x + \cot x$.
160. 解方程 $\sin x + \cos x + \tan x + \cot x + \sec x + \csc x + 2 = 0$.
161. 已知方程 $2x^2 - 4x \sin \theta + 3 \cos \theta = 0 (0 \leq \theta \leq \pi)$ 有相等的实根, 求 θ 的值, 并解此方程.
162. 已知方程 $x^2 - (\sin \alpha + \cos \alpha)x + \sin^2 \alpha - \sin \alpha \cos \alpha - 1 = 0$ 有两个相等的实根, 求实数 α 和相应的 x 的值.
163. 已知方程 $x^2 - 4x \cos 2\theta + 2 = 0$ 和方程 $2x^2 + 4x \sin 2\theta - 1 = 0$ 有一根互为倒数, 求角 θ 的值 ($0 < \theta < \pi$).
164. 已知关于 x 的方程 $\sin^2 x + \cos x + a = 0$ 有解, 求实数 a 的取值范围.
165. 已知 $\cos^2 x - \sin x + a = 0$ 在 $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$ 范围内有解, 求实数 a 的取值范围.
166. 求实数 k 的取值范围, 使关于 x 的方程 $\sin^2 x - \sin x + k = 0$ 在 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上
 (1) 无解;
 (2) 恰有一解;
 (3) 有两解.

167. (1) 若关于 x 的方程 $\cos 2x - \sin x + 1 + m = 0$ 有解, 求实数 m 的取值范围. I(2) 若关于 x 的方程 $\sin^2 x + 4 \sin x \cos x - 2 \cos^2 x = a$ 恒有实数解, 求实数 a 的取值范围.
168. 将 $\frac{1}{2}, \sin \frac{1}{2}, \arcsin \frac{1}{2}$ 中的三个数从小到大排列.
169. 将 $\frac{1}{3}, \cos \frac{1}{3}, \arccos \frac{1}{3}$ 中的三个数从小到大排列.
170. 将 $\arcsin \frac{1}{4}, \arctan \sqrt{5}, \arccos(-\frac{1}{3})$ 中的三个数从小到大排列.
171. 已知 $0 < x < 1$, 求证: $2 \arctan \frac{1+x}{1-x} + \arcsin \frac{1-x^2}{1+x^2} = \pi$.
172. 已知 $a, b, c > 0$, 求证: 若 $\arctan a + \arctan b + \arctan c = \pi$, 则 $a + b + c = abc$, 反过来也成立.
173. 画出函数 $y = \arctan x + \arctan \frac{1-x}{1+x}$ 的图像.
174. 在不同坐标系内分别画出 $y = \arcsin(\sin x)(-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2})$ 和 $y = \arcsin(\sin x)(x \in \mathbf{R})$ 的图像.
175. 解方程 $x = \arcsin(\sin 2x)$.
176. 解方程 $\cos(\pi \sin x) = \sin(\pi \cos x)(0 \leq \pi < 2\pi)$.
177. 解方程 $x^2 + 2x \cos(xy) + 1 = 0(x, y \in \mathbf{R})$.
178. 已知 α, β 是关于 x 的方程 $a \cos x + b \sin x = c$ 的两个实根 ($a^2 + b^2 \neq 0, a \neq 2k\pi + \beta, k \in \mathbf{Z}$), 求证 $\cos^2 \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{c^2}{a^2 + b^2}$.
179. 已知 $\triangle ABC$ 的两内角 A, B 满足方程 $8 \sin^2 x + 3 \sin 2x - 4 = 0$, 且 $A > B$, 求此三角形三边长之比.
180. 解方程 $\tan(x + \frac{\pi}{4}) + \tan(x - \frac{\pi}{4}) = 2 \cot x$.
181. 已知关于 x 的方程 $x = a \sin x + b(0 < a < 1, b \in \mathbf{R})$ 有实根, 求证: 该方程只有一个实根.
182. 已知方程 $\sin^2 x + 3a^2 \cos x - 2a^2(3a - 2) - 1 = 0$ 有实数解, 求实数 a 的取值范围.
183. 已知关于 x 的方程 $2 \cos 2x + 4(a - 1) \sin x - 4a + 1 = 0$ 在 $0 \leq x \leq 2\pi$ 范围内有相异两个实根, 求 a 的取值范围.
184. 已知关于 x 的方程 $\cos 2x - 2(2a + 1) \cos x + 2a^2 + 2a + 1 = 0$ 在 $[0, 2\pi)$ 范围内有两个不同的解, 求实数 a 的取值范围.