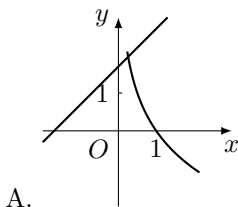


1. (000062) 选择题:

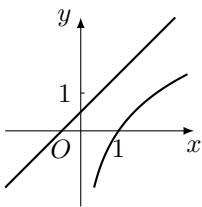
(1) 若指数函数 $y = a^x (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$ 在 \mathbf{R} 上是严格减函数, 则下列不等式中, 一定能成立的是 ().

- A. $a > 1$ B. $a < 0$ C. $a(a-1) < 0$ D. $a(a-1) > 0$

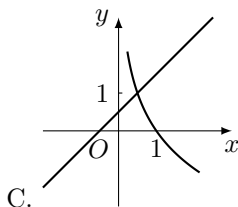
(2) 在同一平面直角坐标系中, 一次函数 $y = x + a$ 与对数函数 $y = \log_a x (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$ 的图像关系可能是 ().



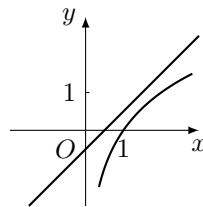
A.



B.



C.



D.

2. (000063) 求下列函数的定义域:

(1) $y = (x-1)^{\frac{5}{2}}$;

(2) $y = 3^{\sqrt{x-1}}$;

(3) $y = \lg \frac{1+x}{1-x}$.

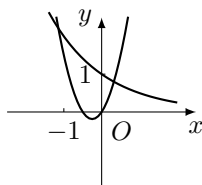
3. (000065) 设点 $(\sqrt{2}, 2)$ 在幂函数 $y_1 = x^a$ 的图像上, 点 $(-2, \frac{1}{4})$ 在幂函数 $y_2 = x^b$ 的图像上. 当 x 取何值时, $y_1 = y_2$?

4. (000070) 选择题:

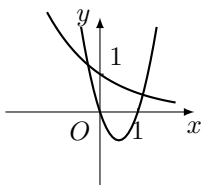
(1) 若 $m > n > 1$, 而 $0 < x < 1$, 则下列不等式正确的是 ().

- A. $m^x < n^x$ B. $x^m < x^n$ C. $\log_x m > \log_x n$ D. $\log_m x < \log_n x$

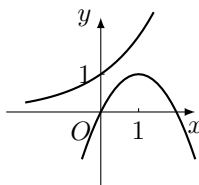
(2) 在同一平面直角坐标系中, 二次函数 $y = ax^2 + bx$ 与指数函数 $y = (\frac{b}{a})^x$ 的图像关系可能为 ().



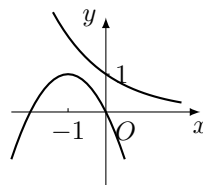
A.



B.



C.



D.

5. (000072) 在同一平面直角坐标系中, 作出函数 $y = (\frac{1}{2})^x$ 及 $y = x^{\frac{1}{2}}$ 的大致图像, 并求方程 $(\frac{1}{2})^x = x^{\frac{1}{2}}$ 的解的个数.

6. (000076) 求函数 $y = \frac{1}{2-x} + \sqrt{x^2-1}$ 的定义域.

7. (000080) 分别作出下列函数的大致图像, 并指出它们的单调区间:

(1) $y = |x^2 - 4x|$;

(2) $y = 2|x| - 3$.

8. (000083) 邮局规定: 当邮件质量不超过 100g 时, 每 20g 邮费 0.8 元, 且不足 20g 时按 20g 计算; 超过 100g 时, 超过 100g 的部分按每 100g 邮费 2 元计算, 且不足 100g 按 100g 计算; 同时规定邮件总质量不得超过 2000g. 请写出邮费关于邮件质量的函数表达式, 并计算 50g 和 500g 的邮件分别收多少邮费.

9. (000084) 若函数 $y = (a^2 + 4a - 5)x^2 - 4(a - 1)x + 3$ 的图像都在 x 轴上方 (不含 x 轴), 求实数 a 的取值范围.
10. (000085) 已知 $y = f(x)$ 是奇函数, 其定义域为 \mathbf{R} ; 而 $y = g(x)$ 是偶函数, 其定义域为 D . 判断函数 $y = f(x)g(x)$ 的奇偶性, 并说明理由.
11. (000092) 作出函数 $y = (x^2 - 1)^2 - 1$ 的大致图像, 写出它的单调区间, 并证明你的结论.
12. (000094) 设函数 $y = f(x)$, $x \in \mathbf{R}$ 的反函数是 $y = f^{-1}(x)$.
- (1) 如果 $y = f(x)$ 是奇函数, 那么 $y = f^{-1}(x)$ 的奇偶性如何?
- (2) 如果 $y = f(x)$ 在定义域上是严格增函数, 那么 $y = f^{-1}(x)$ 的单调性如何?
13. (000330) 若函数 $f(x) = \log_2 \frac{x-a}{x+1}$ 的反函数的图像过点 $(-2, 3)$, 则 $a =$ _____.
14. (000342) 若函数 $f(x) = \begin{cases} 2^x, & x \leq 0, \\ -x^2 + m, & x > 0 \end{cases}$ 的值域为 $(-\infty, 1]$, 则实数 m 的取值范围是_____.
15. (000349) 若函数 $f(x) = \log_2(x+1) + a$ 的反函数的图像经过点 $(4, 1)$, 则实数 $a =$ _____.
16. (000355) 有以下命题:
- ① 若函数 $f(x)$ 既是奇函数又是偶函数, 则 $f(x)$ 的值域为 $\{0\}$;
- ② 若函数 $f(x)$ 是偶函数, 则 $f(|x|) = f(x)$;
- ③ 若函数 $f(x)$ 在其定义域内不是单调函数, 则 $f(x)$ 不存在反函数;
- ④ 若函数 $f(x)$ 存在反函数 $f^{-1}(x)$, 且 $f^{-1}(x)$ 与 $f(x)$ 不完全相同, 则 $f(x)$ 与 $f^{-1}(x)$ 图像的公共点必在直线 $y = x$ 上;
- 其中真命题的序号是_____ (写出所有真命题的序号).
17. (000381) 若点 $(8, 4)$ 在函数 $f(x) = 1 + \log_a x$ 图像上, 则 $f(x)$ 的反函数为_____.
18. (000388) 已知函数 $f(x) = a^x - 1$ 的图像经过 $(1, 1)$ 点, 则 $f^{-1}(3) =$ _____.
19. (000450) 函数 $f(x) = 2^x + m$ 的反函数为 $y = f^{-1}(x)$, 且 $y = f^{-1}(x)$ 的图像过点 $Q(5, 2)$, 那么 $m =$ _____.
20. (000472) 若函数 $f(x) = x^a$ 的反函数的图像经过点 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$, 则 $a =$ _____.
21. (000486) 函数 $f(x) = \lg(2-x)$ 的定义域是_____.
22. (000498) 已知幂函数的图像过点 $(2, \frac{1}{4})$, 则该幂函数的单调递增区间是_____.
23. (000520) 已知函数 $f(x) = a \cdot 2^x + 3 - a$ ($a \in \mathbf{R}$) 的反函数为 $y = f^{-1}(x)$, 则函数 $y = f^{-1}(x)$ 的图像经过的定点的坐标为_____.
24. (000567) 函数 $f(x) = \sqrt{1 - \lg x}$ 的定义域为_____.
25. (000582) 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若点 (n, S_n) ($n \in \mathbf{N}^*$) 在函数 $y = \log_2(x+1)$ 的反函数的图像上, 则 $a_n =$ _____.

26. (000590) 已知函数 $f(x) = 1 + \log_a x$, $y = f^{-1}(x)$ 是函数 $y = f(x)$ 的反函数, 若 $y = f^{-1}(x)$ 的图像过点 $(2, 4)$, 则 a 的值为_____.
27. (000607) 函数 $y = \log_2(1 - \frac{1}{x})$ 的定义域为_____.
28. (000634) 若函数 $f(x) = 4^x + 2^{x+1}$ 的图像与函数 $y = g(x)$ 的图像关于直线 $y = x$ 对称, 则 $g(3) =$ _____.
29. (000646) 函数 $y = \sqrt{2x - x^2}$ 的定义域是_____.
30. (000655) 若将函数 $f(x) = |\sin(\omega x - \frac{\pi}{8})|$ ($\omega > 0$) 的图像向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位后, 所得图像对应的函数为偶函数, 则 ω 的最小值是_____.
31. (000675) 已知定义在 \mathbf{R} 上的函数 $f(x)$ 满足: ① $f(x) + f(2-x) = 0$; ② $f(x) - f(-2-x) = 0$; ③ 在 $[-1, 1]$ 上的表达式为 $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2}, & x \in [-1, 0], \\ 1-x, & x \in (0, 1] \end{cases}$, 则函数 $f(x)$ 与函数 $g(x) = \begin{cases} 2^x, & x \leq 0, \\ \log_{\frac{1}{2}} x, & x > 0 \end{cases}$ 的图像在区间 $[-3, 3]$ 上的交点的个数为_____.
32. (000715) 设奇函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , 当 $x > 0$ 时, $f(x) = x + \frac{m^2}{x} - 1$ (这里 m 为正常数). 若 $f(x) \leq m - 2$ 对一切 $x \leq 0$ 成立, 则 m 的取值范围为_____.
33. (000758) 若函数 $f(x) = \sqrt{8 - ax - 2x^2}$ 是偶函数, 则该函数的定义域是_____.
34. (000778) 函数 $y = \sqrt{\lg(x+2)}$ 的定义域为_____.
35. (000845) 已知函数 $f(x) = \lg(\sqrt{x^2+1} + ax)$ 的定义域为 \mathbf{R} , 则实数 a 的取值范围是_____.
36. (000851) 已知函数 $f(x) = \frac{3x+1}{x+a}$ ($a \neq \frac{1}{3}$) 的图像与它的反函数的图像重合, 则实数 a 的值为_____.
37. (000859) 设 $a > 0$ 且 $a \neq 1$, 若函数 $f(x) = a^{x-1} + 2$ 的反函数的图像经过定点 P , 则点 P 的坐标是_____.
38. (000868) 函数 $f(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{x-1}$ 的定义域为_____.
39. (000931) 函数 $y = \log_3(x-1)$ 的定义域是_____.
40. (000949) 已知函数 $f(x) = x^3 + \lg(\sqrt{x^2+1} + x)$, 若 $f(x)$ 的定义域中的 a, b 满足 $f(-a) + f(-b) - 3 = f(a) + f(b) + 3$, 则 $f(a) + f(b) =$ _____.
41. (000961) 已知函数 $f(x) = 2^x - a \cdot 2^{-x}$ 的反函数是 $f^{-1}(x)$, $f^{-1}(x)$ 在定义域上是奇函数, 则正实数 $a =$ _____.
42. (001160) 已知函数 $f(x) = 3x + 5$, $x \in \mathbf{R}$, 求 $f(-1)$, $f(10)$, $f(a)$, $f(a^2 + 1)$. 并写出函数 $y = f(f(x))$ 的定义域, 对应法则以及值域.
43. (001164) 写出下列函数的定义域 (写在对应关系的右边):
- (1) $f(x) = \frac{6}{x^2 - 3x + 2}$;
- (2) $f(x) = \frac{3x-1}{2x^3 + 4x^2 + x - 7}$;

$$(3) f(x) = \frac{\sqrt[3]{4x+8}}{\sqrt{3x-2}};$$

$$(4) f(x) = \sqrt{2x-1} + \sqrt{1-2x} + 4;$$

$$(5) f(x) = \sqrt{x^2-4};$$

$$(6) f(x) = \frac{\sqrt{2x+1}}{x-3}.$$

44. (001165)(1) 函数 $f(x) = x^2, x \in [0, 1]$ 的值域为_____;

(2) 函数 $f(x) = -x, x \in [-1, 0]$ 的值域为_____;

(3) 函数 $f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x \leq 1, \\ -x, & -1 \leq x < 0. \end{cases}$ 的值域为_____.

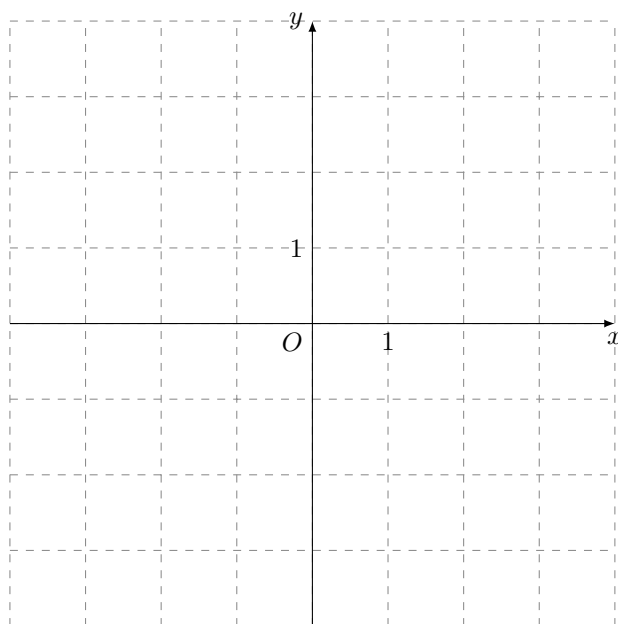
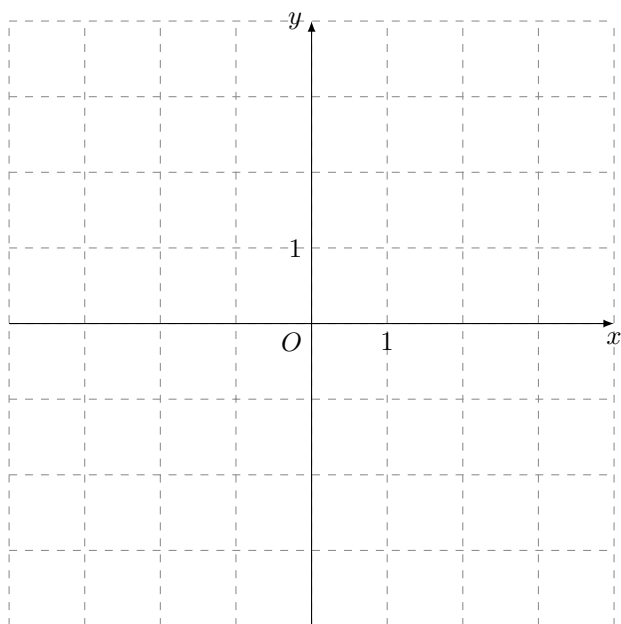
45. (001166) 函数 $f(x) = \sqrt{kx^2 + 4kx + 3}$ 的定义域为 \mathbf{R} , 求实数 k 的取值范围.

46. (001167) 求函数 $y = x^3 + 1$ 的值域 (要详细过程).

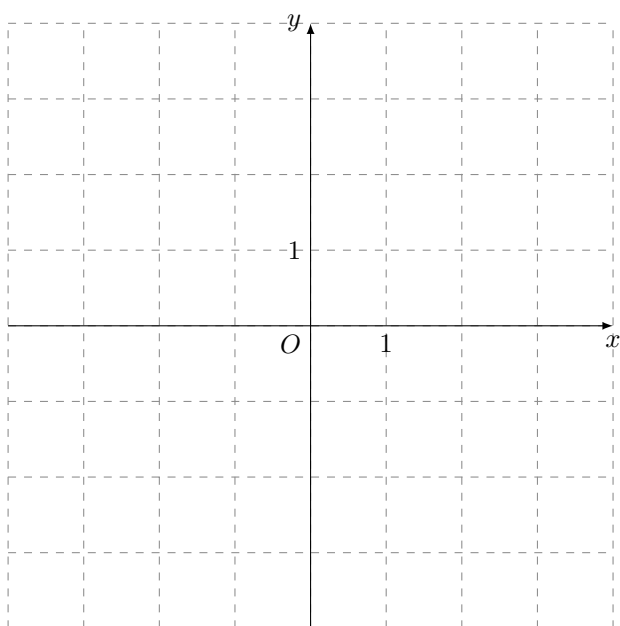
47. (001173) 在以下坐标系中分别作出下列函数的图像 (用铅笔, 要求清晰, 交代关键信息):

(1) $y = \sqrt{|x|};$

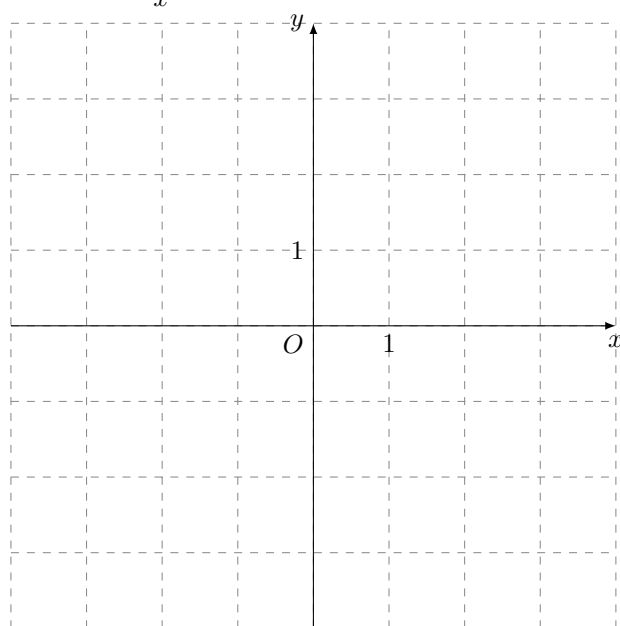
(2) $y = |x-1| - |x+1|;$



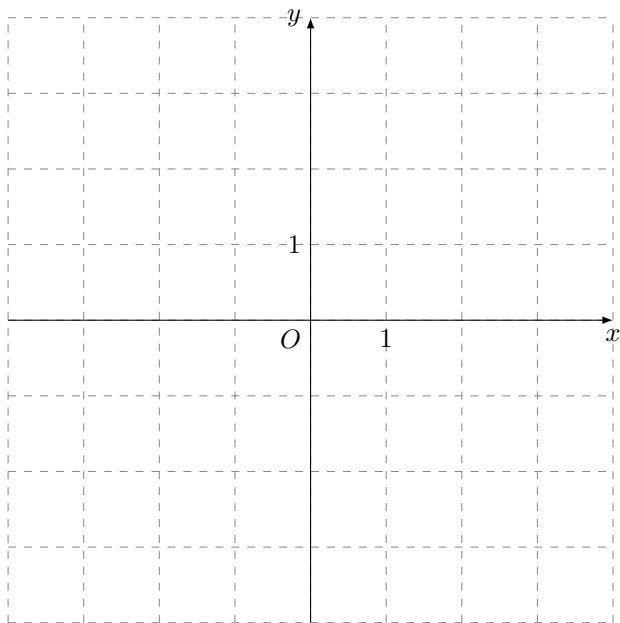
(3) $y = x - [x];$



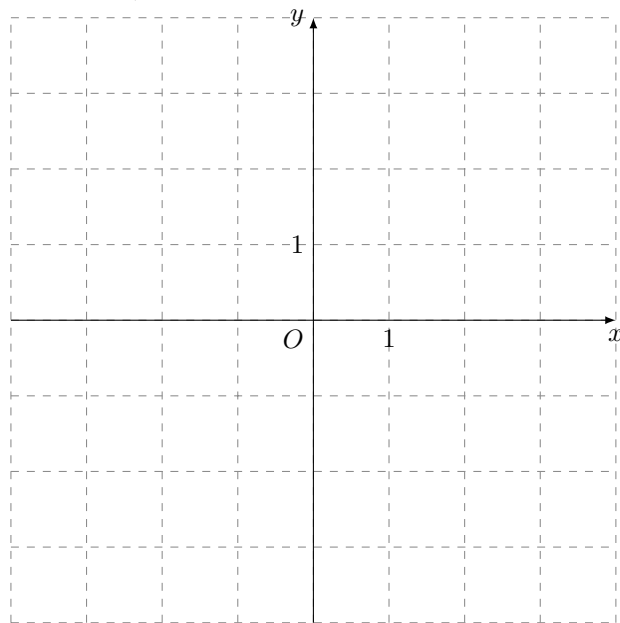
(4) $y = x + \frac{1}{x};$



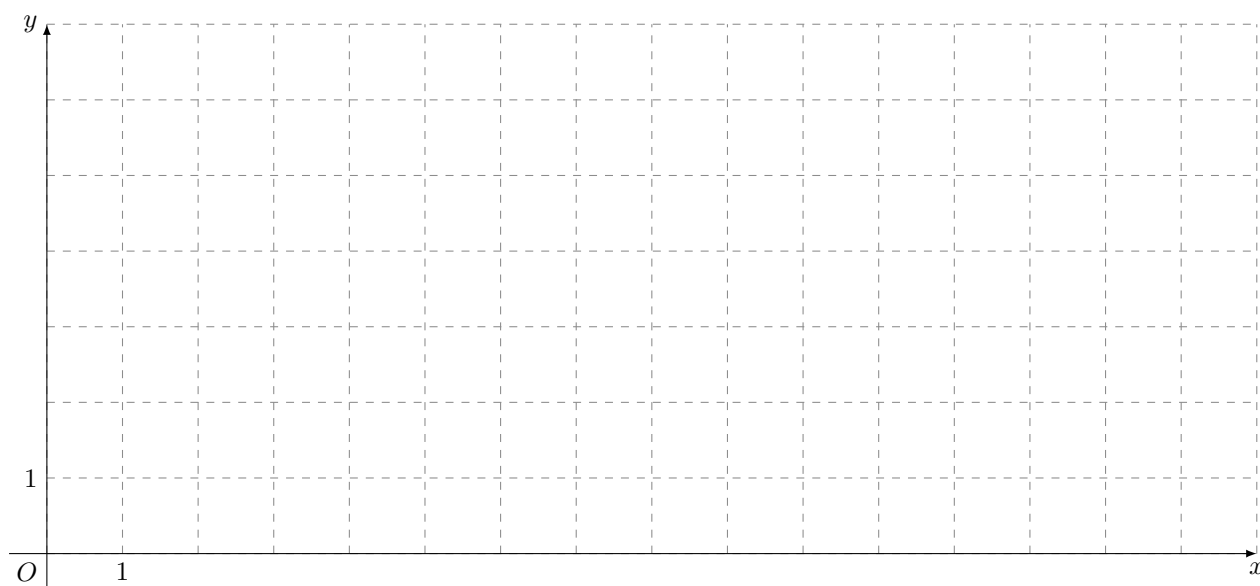
(5) $y = x - \frac{1}{x};$



(6) $y = \frac{6x}{1+x^2}.$



48. (001174) 某种茶杯每个 0.5 元, 买 x 个茶杯的钱数为 y 元. 画出 y 关于 x 的函数的图像.



49. (001175) 证明: 函数 $y = \frac{1}{x}$ 的图像关于原点对称 (一个图形关于原点对称是指任取该图形上的一点, 它关于原点对称所得的点也在该图形上).
50. (001176) 求证: 函数 $y = x^3$ 的图像不是一条直线 (本题不能使用斜率的概念).
51. (001177) 试求出函数 $y = x^2$ 的图像分别进行如下变换后, 所得的各个图像对应的函数.
- (1) 向右平移 2 个单位;
 - (2) 向上平移 1 个单位;
 - (3) 先向右平移 2 个单位, 再向上平移 1 个单位;
 - (4) 先向上平移 1 个单位, 再向右平移 2 个单位
52. (001178) 试求出函数 $y = \sqrt{x}$ 的图像分别进行如下变换后所得的各个图像对应的函数.
- (1) 图像上的每一点的横坐标变为原来的 2 倍;
 - (2) 图像上的每一点的纵坐标变为原来的 $\frac{1}{2}$;
 - (3) 图像上的每一点的横坐标变为原来的 2 倍, 然后向上平移 3 个单位, 所得图像上每一点的纵坐标变为原来的 3 倍, 再向左平移 2 个单位;
 - (4) 向左平移 3 个单位, 然后将所得图像上的每一点的横坐标变为原来的 $\frac{1}{2}$, 最后向下平移 2 个单位
53. (001179) 欲将函数 $y = 3x$ 的图像通过一次平移变为函数 $y = 3x - 5$ 的图像, 可向_____ 平移_____ 个单位; 也可向_____ 平移_____ 个单位.
54. (001180) 欲将函数 $y = x^2$ 的图像通过平移和放缩变为函数 $y = 2x^2 - 4x - 1$ 的图像, 所需的步骤依次为: (同时写出每步变换后所得图像对应的函数)
55. (001181) 证明: 在平面直角坐标系中, 将函数 $y = f(x), x \in \mathbf{R}$ 的图像绕原点旋转 180° , 得到的是函数 $y = -f(-x), x \in \mathbf{R}$ 的图像.

56. (001182) 在平面直角坐标系中, 将函数 $y = f(x), x \in \mathbf{R}$ 的图像沿直线 $x = 1$ 翻折, 将会得到哪个函数的图像? 试写出这个函数, 并证明.

57. (001185) 已知 $f(x) = x^2, g(x) = \frac{1}{x}$.

(1) 求 $f(x) + g(x), f(x)g(x)$ 和 $\frac{f(x)}{g(x)}$;

(2) 求 $f \circ g$ 和 $g \circ f$;

(3) 求 $f \circ g - g \circ f$, 判断它是否在其定义域上恒等于零.

58. (001186) 已知 $f(x) = x^2, g(x) = \frac{1}{x+1}$.

(1) 求 $f(x) + g(x), f(x)g(x)$ 和 $\frac{f(x)}{g(x)}$;

(2) 求 $f \circ g$ 和 $g \circ f$;

(3) 求 $f \circ g - g \circ f$, 判断它是否在其定义域上恒等于零.

59. (001190) 下列各映射中, 是单射的有_____, 是满射的有_____, 存在逆映射的有_____.

① $f: \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 4, 9\}; x \mapsto x^2$;

② $f: \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^+; x \mapsto x^2$;

③ $f: \mathbf{R} \rightarrow [0, +\infty); x \mapsto x^2$;

④ $f: \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^+; x \mapsto \frac{1}{x}$;

⑤ $f: \mathbf{R}^+ \cup \mathbf{R}^- \rightarrow \mathbf{R}^+ \cup \mathbf{R}^-; x \mapsto \frac{1}{x}$;

⑥ $f: \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}; x \mapsto x + \frac{1}{x}$;

⑦ $f: \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}; x \mapsto x - \frac{1}{x}$;

⑧ $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{Z}; x \mapsto [x]$;

⑨ $f: \{(x, y) | x, y \in \mathbf{R}\} \rightarrow \{(x, y) | x, y \in \mathbf{R}\}; (x, y) \mapsto (x + y, x - y)$;

⑩ $f: \{(x, y) | x, y \in \mathbf{R}\} \rightarrow \{(x, y) | x, y \in \mathbf{R}\}; (x, y) \mapsto (x + y, 2x + 2y)$.

60. (001192) 写出下列函数的反函数 (注意定义域).

(1) $y = -\frac{1}{x} + 3$;

(2) $y = \sqrt{2x - 1}$;

(3) $y = \frac{2x + 1}{x + 2}$;

(4) $y = x^2 + 2, x \in [2, +\infty)$;

(5) $y = 2^x, x \in \{1, 2, 3, 4\}$ (本小题不能使用对数);

(6) $y = \sqrt{9 - x^2}, x \in [-3, 0]$;

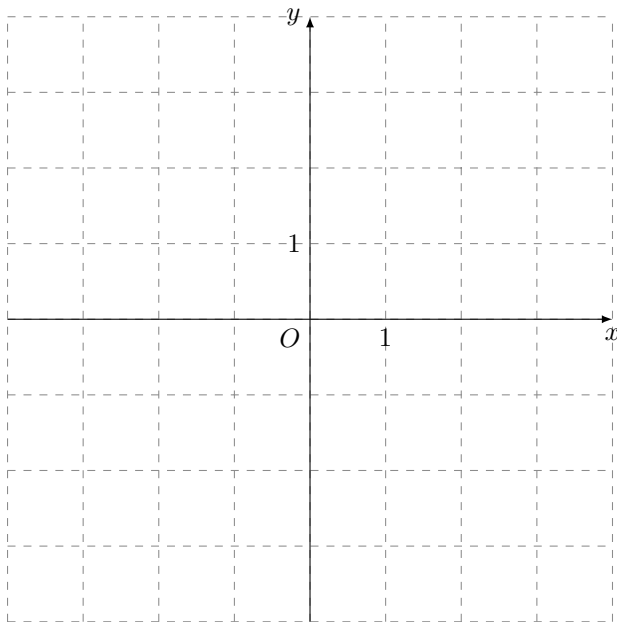
(7) $y = x^2 - 4x, x \in [3, 7]$.

61. (001193) 已知函数 $y = f(x)$ 的图像经过 $(1, 2)$, 它有反函数 $y = f^{-1}(x)$. 那么函数 $y = f^{-1}(x + 3)$ 的图像一定经过点_____.

62. (001194) 已知函数 $y = f(x)$ 有反函数, 且 $y = f^{-1}(3x + 1)$ 的图像经过点 $(0, -1)$. 试确定函数 $y = 5f(x + 2) + 3$ 的图像一定经过的点, 并说明理由.

63. (001196) 已知函数 $y = f(x)$ 的图像经过第一, 第二象限, 且它有反函数 $y = f^{-1}(x)$. 那么 $y = f^{-1}(x)$ 的图像一定经过_____象限.

64. (001198) 在同一坐标系中通过平移和放缩作出以下函数的图像, 并写出变换的方法. $y = |x|$; $y = |x - 1|$; $y = \frac{|x - 1|}{2}$; $y = \frac{|x - 1|}{2} - 3$; $y = \frac{|2x - 1|}{2} - 3$.



65. (001199)(1) 欲将函数 $y = x^2$ 的图像通过先平移后放缩的方式变为函数 $y = \frac{1}{2}x^2 + x$ 的图像, 所需的步骤依次为: (同时写出每步变换后所得图像对应的函数)

(2) 欲将函数 $y = x^2$ 的图像通过先放缩后平移的方式变为函数 $y = \frac{1}{2}x^2 + x$ 的图像, 所需的步骤依次为: (同时写出每步变换后所得图像对应的函数)

66. (001200)(1) 欲将函数 $y = \sqrt{x}$ 的图像通过先平移后放缩的方式变为函数 $y = \sqrt{2x - 4}$ 的图像, 所需的步骤依次为: (同时写出每步变换后所得图像对应的函数)

(2) 欲将函数 $y = \sqrt{x}$ 的图像通过先放缩后平移的方式变为函数 $y = \sqrt{2x - 4}$ 的图像, 所需的步骤依次为: (同时写出每步变换后所得图像对应的函数)

67. (001201) 将函数 $y = \sqrt{x}$ 的图像上的每一点的横坐标变为原来的 3 倍, 然后向右平移 3 个单位, 再沿直线 $y = x$ 翻折, 则所得图像对应的函数为_____.

68. (001202)[选做] 欲将函数 $y = |x - 1| + |x + 1|$ 的图像通过平移和放缩变为函数 $y = |x - 2| + |x - 6|$ 的图像, 所需的步骤依次为: (同时写出每步变换后所得图像对应的函数, 提示: 先把两个函数的图像画在一张草稿纸上找一下感觉)

69. (001203)[选做] 欲将函数 $y = x + \frac{1}{x}$ 的图像通过放缩变为函数 $y = x + \frac{4}{x}$ 的图像, 所需的步骤依次为: (同时写出每步变换后所得图像对应的函数, 提示: 先把两个函数的图像画在一张草稿纸上找一下感觉)

70. (001204) 奇函数的图像是否都过原点? 偶函数的图像是否一定和 y 轴相交? 为什么?

71. (001207) 已知 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 的定义域均关于原点对称且交集非空, 且 f 与 g 一奇一偶, 证明: $y = f(x)g(x)$ 是奇函数.

72. (001213) 已知函数 $y = f(x)$ 与 $y = g(x)$ 的定义域均为 \mathbf{R} .

- ____(1) 如果 $y = f(x)$ 是奇函数, 那么 $y = |f(x)|$ 是偶函数;
- ____(2) 如果 $y = f(x)$ 是奇函数, 那么 $y = \sqrt[3]{f(x)}$ 是奇函数;
- ____(3) 如果 $y = f(x)$ 是奇函数, 那么 $y = f(|x|)$ 是奇函数;
- ____(4) 如果 $y = f(x)$ 是奇函数, 那么 $y = f(|x|)$ 是偶函数;
- ____(5) 如果 $y = f(x)$ 是奇函数, $y = g(x)$ 是偶函数, 那么 $y = f(x)g(x)$ 是奇函数;
- ____(6) 如果 $y = f(x)$ 是奇函数, $y = g(x)$ 不是偶函数, 那么 $y = f(x) + 2g(x)$ 既非奇函数又非偶函数;
- ____(7) 如果 $y = f(x)$ 不是奇函数, $y = g(x)$ 也不是奇函数, 那么 $y = f(x) - g(x)$ 也不是奇函数;
- ____(8) 如果 $y = f(x)$ 是奇函数, $y = g(x)$ 不是偶函数, 那么 $y = f(x) + g(x)$ 不是偶函数;
- ____(9) 如果 $y = f(x) - g(x)$ 是奇函数, $y = g(x)$ 是奇函数, 那么 $y = f(x)$ 也是奇函数;
- ____(10) 如果 $y = (f(x))^2$ 是偶函数, 那么 $y = f(x)$ 是偶函数或者是奇函数;
- ____(11) 如果 $y = (f(x))^2$ 是奇函数, 那么 $y = f(x)$ 恒等于零, 因此是奇函数也是偶函数;
- ____(12) 如果 $y = (f(x))^3$ 是奇函数, 那么 $y = f(x)$ 是奇函数.

73. (001214) 已知函数 $y = f(x)$, $x \in D_f$ 与 $y = g(x)$, $x \in D_g$ 的定义域交集非空.

- ____(1) 如果 $y = f(x)$ 是奇函数, $y = g(x)$ 是奇函数, 那么 $y = f(x) + x^2g(x)$ 是奇函数;
- ____(2) 如果 $y = f(x)$ 是奇函数, $y = g(x)$ 是偶函数, 而且它们都不恒等于零, 那么 $y = f(x) + g(x)$ 既不是奇函数又不是偶函数;
- ____(3) 如果 $y = f(x)$ 是奇函数, $y = g(x)$ 是偶函数, 而且它们在 $D_f \cap D_g$ 上都不恒等于零, 那么 $y = f(x) + g(x)$ 既不是奇函数又不是偶函数;
- ____(4) 如果 $y = f(x)$ 不是奇函数, $y = g(x)$ 也不是奇函数, 那么 $y = f(x) - g(x)$ 也不是奇函数;
- ____(5) 如果 $y = |f(x)|$ 是奇函数, 那么 $f(x)$ 恒等于零;
- ____(6) 如果 $y = f(x)$ 不是奇函数, 那么 $y = |f(x)|$ 不是偶函数;
- ____(7) 如果 $y = f(x)$ 是偶函数, 且 $y = f(x) + g(x)$ 也是偶函数, 那么 $y = g(x)$ 也是偶函数.

74. (001215) 已知 $y = f(x)$, $x \in D$ 是偶函数.

- ____(1) $y = (f(x))^3 + f(x)$ 是偶函数;
- ____(2) $y = f(2x)$ 是偶函数;
- ____(3) $y = f(x-1)$ 的图像关于直线 $x = -1$ 对称;
- ____(4) $y = f(x-1)$ 的图像关于直线 $x = 1$ 对称;
- ____(5) $y = f(3x+1)$ 的图像关于直线 $x = -\frac{1}{3}$ 对称;
- ____(6) $y = f(3x+1)$ 的图像关于直线 $x = -1$ 对称;
- ____(7) $y = f(x^3+1)$ 是偶函数;
- ____(8) $y = f(x^3+x)$ 是偶函数.

75. (001216) 已知 $y = f(x)$ 是奇函数.

____(1) $y = f(3x)$ 是奇函数;

____(2) $y = f(x-1) + 2$ 的图像关于点 $(1, 2)$ 对称;

____(3) $y = 3f(2x-1) + 6$ 的图像关于点 $(1, 6)$ 对称;

____(4) $y = 3f(2x-1) + 6$ 的图像关于点 $(\frac{1}{2}, 6)$ 对称;

____(5) $y = 3f(2x-1) + 6$ 的图像关于点 $(\frac{1}{2}, 2)$ 对称;

____(6) $y = f(x^2)$ 是偶函数;

____(7) $y = f^{-1}(x)$ 一定存在;

____(8) $y = f^{-1}(x)$ 如果存在, 则必定是奇函数.

76. (001231) 已知函数 $y = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2}$ 的定义域为 $[1, b]$, 最大值为 b , 最小值为 1 . 求 b .

77. (001232) 已知函数 $f(x) = \frac{x^2 + 2x + a}{x}$, $x \in [1, +\infty)$.

(1) 当 $a = 4$ 时, 求函数的最小值;

(2) 如果对一切定义域中的 x , $f(x)$ 均为正数, 求实数 a 的取值范围.

78. (001237) 证明: 函数 $y = x^3 + x, x \in [1, 2]$ 的值域为 $[2, 10]$

79. (001238) 函数 $y = x^2 - 3x + 1, x \in [1, 4]$ 的值域为_____.

80. (001239) 函数 $y = \frac{2x+3}{x-1}$ 的值域为_____.

81. (001240) 函数 $y = \frac{6x}{x^2+1}$ 的值域为_____.

82. (001241) 函数 $y = x^5 + 3x + 1, x \in [1, 3]$ 的值域为_____.

83. (001242) 函数 $y = \sqrt{1+x} + 2x$ 的值域为_____.

84. (001243) 函数 $y = |x-3| - |x-10|$ 的值域为_____.

85. (001244) 函数 $y = |x-3| + |x-10| + |x+1| + |x+2|$ 的值域为_____.

86. (001245) 函数 $y = ||x-3| + x|$ 的值域为_____.

87. (001246) 求函数 $y = \frac{x^2 - 4x + 5}{x^2 - x - 1}$ 的值域.

88. (001247) 已知函数 $y = \sqrt{x} + \sqrt{x+a}$ 的值域为 $[\frac{\sqrt{3}}{2}, +\infty)$, 求实数 a .

89. (001248) 求函数 $y = |x-1| + |x-2| + |x-3| + \cdots + |x-20|$ 的值域.

90. (001249) 求函数 $y = |x-1| + |x-2| + |x-3| + \cdots + |x-50| + |100x-400|$ 的值域 (提示, 某种程度上来说这题目反而比上一题简单).

91. (001250) 函数 $y = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{x^2 + 64}}}}$ 的值域为_____.

92. (001251) 函数 $y = \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}$ 的值域为_____.
93. (001252) 函数 $y = \frac{1}{x^2 + x + 1}$ 的值域为_____.
94. (001253) 函数 $y = \frac{x^2}{x^2 + x + 1}$ 的值域为_____.
95. (001254) 函数 $y = 4 - \sqrt{4 - x^2}$ 的值域为_____.
96. (001255) 函数 $y = \frac{\sqrt{x}}{1 + x}$ 的值域为_____.
97. (001256) 函数 $y = \sqrt{6 - x} + \sqrt{x - 3}$ 的值域为_____.
98. (001257) 函数 $y = \frac{6x}{x^2 + 1}, x \in [-\frac{1}{2}, 5]$ 的值域为_____.
99. (001258) 求函数 $y = \frac{2x^2 + 3x + 1}{x - 1} (x \in (1, +\infty))$ 的值域.
100. (001259) 求函数 $y = \frac{2x^2 + 2x + 3}{x^2 + x + 1} (x \in (-1, +\infty))$ 的值域.
101. (001260) 求函数 $y = \frac{2x^2 + 3x + 3}{x^2 + x + 1} (x \in (-1, +\infty))$ 的值域.
102. (001261) 设 a 为实常数, 求函数 $y = |x - |x + |x + 1| + 2| + a| + |10x - 10|$ 的值域. (提示: 不觉得 $10x$ 的系数有点突兀吗?)
103. (001262) 已知函数 $y = f(2x - 1)$ 的定义域为 $[0, 3]$, 则函数 $y = f(3x + 1)$ 的定义域为_____.
104. (001264) 已知函数 $f(x) = \frac{a - x}{x - a - 1}$ 的反函数 $f^{-1}(x)$ 的图像关于点 $(-1, 3)$ 对称, 则 $a =$ _____.
105. (001266) 写出下列函数的值域.
- (1) $y = 3x + 1, x \in [-2, 5];$ _____
 - (2) $y = |2x + 1|, x \in [-1, 3];$ _____
 - (3) $y = \frac{x - 1}{2x + 3};$ _____
 - (4) $y = \frac{|x| + 1}{|x| - 1};$ _____
 - (5) $y = \frac{|x + 3|}{x - 4}, x \in [-4, 0];$ _____
 - (6) $y = \frac{2x + 1}{|x + 1| - |x|};$ _____
106. (001267) (1) 求函数 $f(x) = \frac{2x - 1}{x + 1}$ 的值域;
- (2) 已知 a 是实数, 求函数 $f(x) = \frac{2x - a}{x + 1}$ 的值域.
107. (001271) 写出下列函数的值域:
- (1) $y = x^2 + 2x + 2;$ _____
 - (2) $y = -x^2 + 3x + 4;$ _____
 - (3) $y = 4x^2 + x + 1, x \in [-3, 0];$ _____
 - (4) 已知 $a > 0, y = ax^2 + ax + 2a, x \in [-1, 1];$ _____

- (5) $y = \frac{1}{x^2 + 2x + 2}$; _____
 (6) $y = 4 - \sqrt{4x - 4x^2}$; _____
 (7) $y = \frac{x^2 - x - 2}{x^2 + 3x + 2}$; _____
 (8) $y = |x^2 - 2x - 3|$, $x \in (\frac{1}{2}, 2]$; _____

108. (001274) 已知 k 是实数, 函数 $y = \sqrt{kx^2 + 2(k+2)x + 3(4k-1)}$ 的定义域为 \mathbf{R} , 则 k 的取值范围为_____.
109. (001275) 已知 k 是实数, 函数 $y = \sqrt{kx^2 + 2(k+2)x + 3(4k-1)}$ 的值域为 $[0, +\infty)$, 则 k 的取值范围为_____.

110. (001281) 已知 a 是实数, 就关于 x 的方程 $x^2 + (a-5)x + (a-2) = 0$ 的两个根 (重根算两个根) 的不同分布情况, 利用函数 $y = \frac{-x^2 + 5x + 2}{x+1}$ 的图像与性质确定 a 的范围.

- (1) 两个根分别在 $(-\infty, 2)$ 和 $(2, +\infty)$ 中; (4) 有两个不同的根, 有且仅有一根在 $[0, +\infty)$ 中.
 (3) 有根在 $[0, 2)$ 内;
 (2) 两个根都在 $(-\infty, -2)$ 中;

111. (001283) 求函数 $y = 2x + \sqrt{1-x^2}$ 的值域.

112. (001318) 函数 $y = \sqrt{3^{2x-1} - 27}$ 的定义域为_____.

113. (001320) 已知 $f_1(x) = 3^x - 1$, $f_2(x) = 3^{x-1}$, $f_3(x) = -3^x$, $f_4(x) = -3^{-x}$, $f_5(x) = (1/3)^x$, $f_6(x) = (1/3)^{-x}$.
 则将函数 $y = 3^x$ 的图像右移 1 单位得_____的图像, 下移 1 单位得_____的图像.
 $y = 3^x$ 的图像与_____的图像关于 x 轴对称, 与_____的图像关于 y 轴对称, 与_____的图像关于原点对称, 与_____的图像完全相同.

114. (001322) 写出下列函数的单调区间和值域 (不用证明).

- (1) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+2x+3}$; _____
 (2) $y = \frac{1}{3^x - 1}$; _____
 (3) $y = 4^x - 2^{x+1}$.

115. (001327) 函数 $y = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}}\left(\left(\frac{1}{3}\right)^x - 27\right)}$ 的定义域为_____.

116. (001333) 一个函数和它的反函数的图像的公共点是否一定在直线 $y = x$ 上? 为什么?

117. (001334) 求证: 若递增函数与其反函数的图像有公共点, 则公共点一定在直线 $y = x$ 上.

118. (001335) 已知幂函数的图像过点 $(9, \frac{\sqrt{3}}{3})$, 则该幂函数为 $y =$ _____.

119. (001336) (1) 写出函数 $y = x^{-\frac{4}{3}}$ 的定义域, 奇偶性, 单调区间;
 (2) 写出函数 $y = x^{-\frac{3}{4}}$ 的定义域, 奇偶性, 单调区间.

120. (001337) 作出下列函数的大致图像 (只要能够表明定义域和单调性, 凹凸性方面的信息):

(1) $y = x^{\frac{2}{3}}$;

(2) $y = x^{-\frac{3}{2}}$;

(3) $y = \frac{|x| + 1}{|x + 1|}$;

(4) $y = \frac{1}{(x - 2)^2} - 1$.

121. (001513) 已知 2 是函数 $y = f(x), x \in \mathbf{R}$ 的周期, 且当 $x \in (-1, 1]$ 时, $f(x) = 1 - x^2$.

(1) 写出该函数的值域以及所有单调增区间;

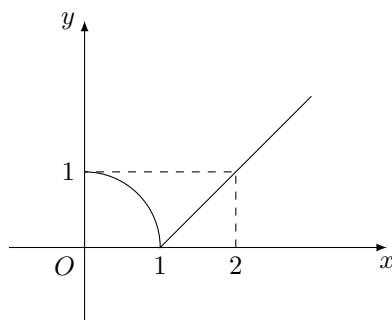
(2) 写出方程 $f(x) = \frac{1}{2}$ 的解集;

(3) 当 $x \in (99, 101]$ 时, 求 $f(x)$ 的解析式.

122. (002821) 函数 $y = \frac{\sqrt{2x+1}}{x-3} + (x-1)^0$ 的定义域为_____.

123. (002822) 若函数 $y = f(x)$ 的定义域是 $[-2, 4]$, 则函数 $g(x) = f(x) + f(-x)$ 的定义域是_____.

124. (002827) 已知 $y = f(x)$ 为偶函数, 且 $y = f(x)$ 的图像在 $x \in [0, 1]$ 时的部分是半径为 1 的圆弧, 在 $x \in [1, +\infty)$ 时的部分是过点 $(2, 1)$ 的射线, 如图.



(1) 写出函数 $y = f(x)$ 在 $x < 0$ 时的单调性:_____;

(2) 写出 $f(f(-2))$ 的值:_____;

(3) 写出方程 $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 的解集:_____.

125. (002829) 设常数 a, b 满足 $1 < a < b$, 函数 $f(x) = \lg(a^x - b^x)$, 求函数 $y = f(x)$ 的定义域.

126. (002831) 已知函数 $f(x) = \sqrt{ax^2 + x + 1}$.

(1) 若函数 $y = f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 求实数 a 的取值范围;

(2) 若函数 $y = f(x)$ 的值域为 $[0, +\infty)$, 求实数 a 的取值范围.

127. (002832) 已知函数 $f(x) = \sqrt{x}$, 函数 $g(x) = \sqrt{1-x} - \sqrt{x}$, 则函数 $y = f(x) + g(x)$ 的定义域为_____.

128. (002833) 已知函数 $y = f(x)$ 的定义域为 $[1, 4]$, 则函数 $y = \frac{f(2x)}{x-2}$ 的定义域是_____.

129. (002837) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x > 1, \\ x, & x \leq 1, \end{cases}$ 函数 $g(x) = 1 - \sqrt{x}$. 求函数 $y = f(x) + g(x)$ 的解析式及定义域.

130. (002838)* 设 D 是含数 1 的有限实数集, $f(x)$ 是定义在 D 上的函数, 若 $f(x)$ 的图像绕原点逆时针旋转 $\frac{\pi}{6}$ 后与原图像重合, 则在以下各项中, $f(1)$ 的可能取值只能是 ()

- A. $\sqrt{3}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D. 0

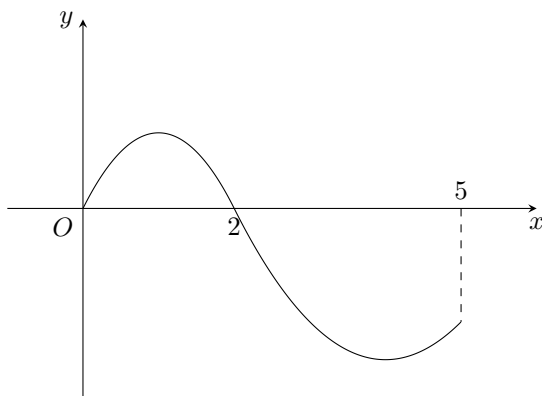
131. (002839) 设常数 $p \in \mathbf{R}$, 设函数 $f(x) = \log_2 \frac{x+1}{x-1} + \log_2(x-1) + \log_2(p-x)$.

- (1) 求 p 的取值范围以及函数 $y = f(x)$ 的定义域;
(2) 若 $y = f(x)$ 存在最大值, 求 p 的取值范围, 并求出最大值.

132. (002841) 已知常数 $a \in \mathbf{R}$, 函数 $g(x) = \frac{x}{x+2}$, 函数 $h(x) = \frac{1}{x+a}$. 设函数 $F(x) = g(x) \cdot h(x)$, D_F 是其定义域;
 $f(x) = g(x) - h(x)$, D_f 是其定义域.

- (1) 设 $a = 2$, 求函数 $F(x)$ 的值域;
(2) 对于给定的常数 a , 是否存在实数 t , 使得 $f(t) = 0$ 成立? 若存在, 求出这样的所有 t 的值; 若不存在, 说明理由;
(3)* 是否存在常数 a 的值, 使得对于任意 $x \in D_f \cap \mathbf{R}^+$, 有 $f(x) \geq 0$ 恒成立? 若存在, 求出所有这样的 a 的值; 若不存在, 说明理由.

133. (002848) 设奇函数 $y = f(x)$ 的定义域为 $[-5, 5]$. 若当 $x \in [0, 5]$ 时, $y = f(x)$ 的图像如图, 则不等式 $xf(x) < 0$ 的解是_____.



134. (002863) 函数 $y = \frac{1}{x^2 - 4x + 5}$ 的图像关于 ().

- A. y 轴对称 B. 原点对称 C. 直线 $x = 2$ 对称 D. 点 $(2, 1)$ 对称

135. (002864) 函数 $y = x + \frac{1}{x-1}$ 的图像关于 ().

- A. 点 $(1, 1)$ 对称 B. 点 $(-1, 1)$ 对称 C. 点 $(1, -1)$ 对称 D. 点 $(-1, -1)$ 对称

136. (002865) 若函数 $y = f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , 且 $f(x-1) = -f(3-x)$, 则 $y = f(x)$ 的图像关于 ().

- A. 原点中心对称 B. 点 $(1, 0)$ 中心对称 C. 点 $(2, 0)$ 中心对称 D. 点 $(4, 0)$ 中心对称

137. (002866) 设常数 $a, b \in \mathbf{R}$. 若函数 $y = x^2 + ax$ 在区间 $[a, b]$ 上的图像关于直线 $x = 1$ 对称, 则 $b =$ _____.

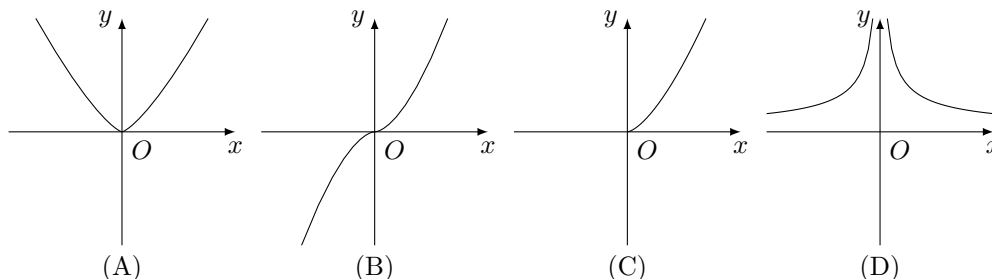
138. (002868) 已知函数 $y = f(x)$ 图像关于 $(1, 0)$ 对称. 若 $x \leq 1$ 时, $f(x) = x^2 - 1$, 则 $f(x) =$ _____.

139. (002870) 设常数 $a \in \mathbf{R}$. 已知函数 $y = f(x)$ 满足: 对于任意 $x \in \mathbf{R}$, 都有 $f(x-1) = f(1-x)$. 若函数 $y = f(x)$ 图像总是关于直线 $x = a$ 对称, 则 $a =$ _____.
140. (002873) 常数 $a, b \in \mathbf{R}$. 函数 $f(x) = \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{1}{x+a} + b$ 的图像关于点 $(1, 2)$ 对称.
- (1) 求 $y = f(x)$ 的解析式;
- (2) * 若 $y = f(x)$ 的图像关于某一条直线对称, 写出这样的一条对称轴直线的方程 (无需证明).
141. (002875) 函数 $y = \log_2(2 - 2^x)$ 的图像关于 ().
- A. 原点对称 B. y 轴对称 C. 直线 $y = x$ 对称 D. 直线 $y = -x$ 对称
142. (002877) 设定义在 \mathbf{R} 上的函数 $y = f(x)$ 的图像关于直线 $x = 1$ 对称. 若 $x \geq 1$ 时, $f(x) = 1 - 3^{x-1}$, 则 $x < 1$ 时, $f(x) =$ _____.
143. (002879) 已知定义域为 \mathbf{R} 的函数 $y = f(x)$ 是偶函数, 并且其图像关于直线 $x = 1$ 对称.
- (1) 若 $f(0) = 1, f(1) = 2$, 求 $f(15) + 2f(20)$ 的值;
- (2) 设 $x \in [0, 1]$ 时, $f(x) = x^3$.
- ① $1 < x \leq 2$ 时, 求 $y = f(x)$ 的解析式;
- ② $-2 \leq x < 0$ 时, 求 $y = f(x)$ 的解析式;
- ③ 求函数 $y = f(x) - \frac{1}{8}$ 在 $[-2, 2]$ 上的所有零点;
- ④ 求 $y = f(x)$ 在 \mathbf{R} 上的解析式.
144. (002880) 已知 $f(x)$ 是定义域为 $(-\infty, +\infty)$ 的奇函数, 满足 $f(1-x) = f(1+x)$. 若 $f(1) = 2$, 则 $f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(50) =$ ().
- A. -50 B. 0 C. 2 D. 50
145. (002883)* 设定义在 \mathbf{R} 上的函数 $y = f(x)$ 的满足: 对于任意 $x \in \mathbf{R}$, 恒有 $f(-x+1) = -f(x+1)$ 且 $f(-x-1) = -f(x-1)$. 则下面命题中, 正确的命题的序号是_____.
- ① 函数 $y = f(x)$ 是偶函数; ② 2 是 $y = f(x)$ 的周期; ③ 函数 $y = f(x)$ 图像关于 $(1, 0)$ 对称; ④ 函数 $y = f(x)$ 图像关于 $(3, 0)$ 对称.
146. (002884) 下列函数中, 在其定义域上是单调函数的序号为_____.
- ① $y = \frac{2-x}{x}$; ② $y = x - \frac{1}{x}$; ③ $y = 3^{x-1}$; ④ $y = \ln \frac{1}{x}$; ⑤ $y = \tan x$.
147. (002902)* 设 $f(x), g(x), h(x)$ 是定义域为 R 的三个函数, 对于下列命题:
- ① 若 $f(x) + g(x), f(x) + h(x), g(x) + h(x)$ 均为增函数, 则 $f(x), g(x), h(x)$ 中至少有一个是增函数;
- ② 若 $f(x) + g(x), f(x) + h(x), g(x) + h(x)$ 均是以 T 为周期的函数, 则 $f(x), g(x), h(x)$ 均是以 T 为周期的函数, 下列判断正确的是 ().
- A. ①和②均为真命题 B. ①和②均为假命题
- C. ①为真命题, ②为假命题 D. ①为假命题, ②为真命题
148. (002907) 函数 $y = x^{-\frac{3}{2}}$ 的定义域为_____.

149. (002908) 下列命题中, 正确的命题的序号是_____.

- ① 当 $\alpha = 0$ 时, 函数 $y = x^\alpha$ 的图像是一条直线;
- ② 幂函数的图像都经过 $(0, 0)$ 和 $(1, 1)$ 点;
- ③ 当 $\alpha < 0$ 且 $y = x^\alpha$ 是奇函数时, 它也是减函数;
- ④ 第四象限不可能有幂函数的图像.

150. (002910) 下列函数的图像为 (A)、(B)、(C)、(D) 之一, 试将正确的字母标号填在相应函数后面的横线上.



(1) $y = x^{\frac{3}{2}}$ _____; (2) $y = x^{\frac{4}{3}}$ _____; (3) $y = x^{\frac{5}{3}}$ _____; (4) $y = x^{-\frac{2}{3}}$ _____.

151. (002915) 设常数 $n \in \mathbf{Z}$. 若函数 $y = x^{n^2-2n-3}$ 的图像与两条坐标轴都无公共点, 且图像关于 y 轴对称, 则 n 的值为_____.

152. (002916) 函数 $y = 1 - (x+2)^{-2}$ 可以先将幂函数 $y = x^{-2}$ 的图像向_____ 平移 2 个单位, 再以_____ 轴为对称轴作对称变换, 最后向_____ 平移 1 个单位.

153. (002917) 在 $f(x) = (2m^2 - 7m - 9)x^{m^2-9m+19}$ 中, 当实数 m 为何值时,

- (1) $y = f(x)$ 是正比例函数, 且它的图像的倾斜角为钝角?
- (2) $y = f(x)$ 是反比例函数, 且它的图像在第一, 三象限?

154. (002920) 已知函数: ① $y = \frac{1}{x}$; ② $y = x^{\frac{1}{2}}$; ③ $y = x^{-\frac{1}{2}}$; ④ $y = x^{\frac{2}{3}}$; ⑤ $y = x^{-\frac{2}{3}}$, 填写分别具有下列性质的函数序号:

- (1) 图像与 x 轴有公共点的:_____;
- (2) 图像关于原点对称的:_____;
- (3) 定义域内递减的:_____;
- (4) 在定义域内有反函数的:_____.

155. (002921) 函数 $y = -(x+1)^{-3}$ 的图像可以先将幂函数 $y = x^{-3}$ 的图像向_____ 平移 1 个单位, 再以_____ 轴为对称轴作对称变换.

156. (002923) 下列关于幂函数图像及性质的叙述中, 正确的叙述的序号是_____.

- ① 对于一个确定的幂函数, 第二、三象限不可能同时有该幂函数的图像上的点;
- ② 若某个幂函数图像过 $(-1, -1)$, 则该幂函数是奇函数;

③ 若某个幂函数在定义域上递增, 则该幂函数图像必经过原点;

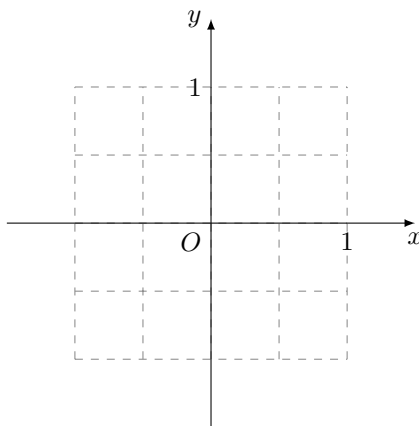
④ 幂函数图像不会经过点 $(-\frac{1}{2}, 8)$ 以及 $(-8, -4)$.

157. (002927) 设常数 a, b 满足 $a > b > 0$. 已知函数 $f(x) = \frac{x+a}{x+b}$. (1) 写出函数 $y = f(x)$ 的单调性;

(2) 写出函数 $y = f(x)$ 图像的一个对称中心的坐标.

158. (002929)* 设常数 a, b 满足 $a > b > 0$. 已知函数 $f(x) = \frac{x+a}{x+b}$. 证明: 该函数图像的对称中心是唯一的.

159. (002936) 若函数 $f(x) = 1 - \sqrt{1-x^2} (-1 \leq x \leq 0)$, 请画出函数 $y = f^{-1}(x)$ 的大致图像.



160. (002937) 已知定义在 \mathbf{R} 上的函数 $y = f(x)$ 是奇函数, 且有反函数 $y = f^{-1}(x)$. 若 a, b 是两个实数, 则下列点中, 必在 $y = f^{-1}(x)$ 的图像上的点的序号是_____.

① $(-f(a), a)$; ② $(-f(a), -a)$; ③ $(-b, -f(b))$; ④ $(b, -f^{-1}(-b))$.

161. (002938) 已知定义在 \mathbf{R} 上的函数 $y = f(x)$ 的反函数为 $y = f^{-1}(x)$. 若 $y = f(x+1)$ 的图像过点 $(-\frac{1}{2}, 1)$, 则 $y = f^{-1}(x+1)$ 的图像必过 ().

A. $(1, -\frac{1}{2})$

B. $(1, \frac{1}{2})$

C. $(0, -\frac{1}{2})$

D. $(0, \frac{1}{2})$

162. (002939) 设常数 $a \neq 0$. 若函数 $f(x) = \frac{1-ax}{1+ax}$ 的图像关于直线 $y = x$ 对称, 求实数 a 的值以及 $y = f(x)$ 的反函数 $y = f^{-1}(x)$.

163. (002940) 记 $y = f^{-1}(x)$ 是 $y = f(x)$ 的反函数.

(1) 若函数 $f(x+1) = \frac{x}{x+1}$, 求函数 $y = f^{-1}(x+1)$ 的解析式;

(2) 设函数 $f(x) = \frac{1-2x}{1+x}$. 若 $y = g(x)$ 的图像与 $y = f^{-1}(x+1)$ 的图像关于直线 $y = x$ 对称, 求 $y = g(x)$ 的解析式.

164. (002946) 已知函数 $y = f(x)$ 的图像经过点 $(0, -1)$. 若函数 $y = f(x+4)$ 存在反函数 $y = g(x)$, 则 $y = g(x)$ 的图像总经过的定点的坐标为_____.

165. (002947) 设 $y = f^{-1}(x)$, $y = g^{-1}(x)$ 分别是定义在 \mathbf{R} 上的函数 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 的反函数. 若函数 $y = f(x-1)$ 和 $y = g^{-1}(x-3)$ 的图像关于直线 $y = x$ 对称, 且 $g(5) = 2018$, 则 $f(4)$ 的值为_____.

166. (002953) 函数 $f(x) = \frac{\sqrt{4-x^2}}{\lg|x-1|}$ 的定义域为_____.

167. (002954) 为了得到函数 $y = \lg \frac{x+3}{10}$ 的图像, 只需把函数 $y = \lg x$ 的图像上所有的点 ().

- A. 向左平移 3 个单位长度, 再向上平移 1 个单位长度
- B. 向右平移 3 个单位长度, 再向上平移 1 个单位长度
- C. 向左平移 3 个单位长度, 再向下平移 1 个单位长度
- D. 向右平移 3 个单位长度, 再向下平移 1 个单位长度

168. (002958) 已知函数 $f(x) = \frac{3^x - 3^{-x}}{3^x + 3^{-x}}$.

(1) 证明 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是增函数;

(2) 求 $f(x)$ 的值域.

169. (002964) 对于函数 $y = f(x)$ 的定义域中的任意的 $x_1, x_2 (x_1 \neq x_2)$, 有如下结论:

- ① $f(x_1 + x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)$; ② $f(x_1 \cdot x_2) = f(x_1) + f(x_2)$;
- ③ $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$; ④ $f(\frac{x_1 + x_2}{2}) < \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$.

当 $y = \ln x$ 时, 上述结论中, 正确结论的序号是_____.

170. (002966)* 已知常数 $a > 1$, 函数 $y = |\log_a x|$ 的定义域为区间 $[m, n]$, 值域为区间 $[0, 1]$. 若 $n - m$ 的最小值为 $\frac{5}{6}$, 则 $a =$ _____.

171. (002968)* 已知函数 $f(x) = 2 + \log_3 x (3 \leq x \leq 27)$.

(1) 求函数 $y = f(x^2)$ 的定义域;

(2) 求函数 $g(x) = [f(x)]^2 + f(x^2)$ 的值域.

172. (002969) 已知定义域为 \mathbf{R} 的函数 $y = f(x)$ 为奇函数, 且满足 $f(x+2) = -f(x)$. 当 $x \in [0, 1]$ 时, $f(x) = 2^x - 1$.

(1) 求 $y = f(x)$ 在区间 $[-1, 0)$ 上的解析式;

(2) 求 $f(\log_{\frac{1}{2}} 24)$ 的值.

173. (002970)* 已知函数 $f(x) = 1 + a \cdot (\frac{1}{2})^x + (\frac{1}{4})^x$.

(1) 当 $a = 1$ 时, 求函数 $y = f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上的值域;

(2) 对于定义在集合 D 上的函数 $y = f(x)$, 如果存在常数 $M > 0$, 满足: 对任意 $x \in D$, 都有 $|f(x)| \leq M$ 成立, 则称 $f(x)$ 是 D 上的有界函数, 其中 M 称为函数 $f(x)$ 的一个上界. 若函数 $y = f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上是以 3 为一个上界的有界函数, 求实数 a 的取值范围.

174. (002971) 二次函数图像的顶点是 $(-1, 2)$, 且图像经过点 $(1, 6)$, 则此二次函数的解析式为_____.

175. (002972) 二次函数 $y = f(x)$ 满足 $f(2-x) = f(2+x)$, 且 $y = f(x)$ 的图像在 y 轴的截距为 3, 被 x 轴截得的线段长为 2, 则 $y = f(x)$ 的解析式为_____.

176. (002985) 函数 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2}$ 的定义域、值域都是区间 $[1, b]$, 则实数 $b =$ _____.

177. (002986) 设常数 $m \in \mathbf{R}$. 若函数 $f(x) = x^2 - (m-2)x + m - 4$ 的图像与 x 轴交于 A, B 两点, 且 $|AB| = 2$, 则函数 $y = f(x)$ 的最小值为_____.
178. (002987) 函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 与函数 $g(x) = cx^2 + bx + a$ ($ac \neq 0, a \neq c$) 的值域分别为 M, N , 则下列结论正确的是_____.
- A. $M = N$ B. $M \subseteq N$ C. $M \supseteq N$ D. $M \cap N \neq \emptyset$
179. (002988) 函数 $f(x) = x^2 - 2a|x - a| - 2ax + 1$ 的图像与 x 轴有且只有三个不同的公共点, 则 $a =$ _____.
180. (002990) 设常数 $a, m \in \mathbf{R}$. 已知函数 $f(x) = \frac{x^2 + 2x + a}{x} (x \geq m)$.
- (1) 设 $a = \frac{1}{2}$, 求函数 $y = f(x)$ 的值域;
- (2) 设 $m = 1$, 求函数 $y = f(x)$ 的值域.
181. (002993) 函数 $y = \frac{3^x - 1}{3^x - 2}$ 的值域是_____.
182. (002994) 函数 $y = \log_{\frac{1}{2}}(-x^2 + 2x + 3)$ 的值域是_____.
183. (002995) 函数 $y = |x - 1| + |x - 3|$ 的值域是_____.
184. (002996)(1) 函数 $y = x^2 + \frac{8}{x^2 + 1} (1 \leq x \leq 7)$ 的最小值是_____, 此时 $x =$ _____;
- (2) 函数 $y = \frac{3x}{x^2 + 4}$ 的值域是_____;
- (3) 函数 $y = x + \frac{m}{x + 3}, x \in [0, +\infty)$ 的最小值为_____;
- (4) 设常数 $m \in \mathbf{R}$. 若函数 $y = \frac{mx}{x^2 + 1}$ 的最大值为 1, 则 m 的值为_____.
185. (002997)(1) 函数 $y = x - \sqrt{1 - 2x}$ 的最大值为_____, 此时 $x =$ _____;
- (2) 函数 $y = 2x + \sqrt{1 - 2x}$ 的值域是_____.
186. (002998) 函数 $y = \frac{2x - 3}{x^2 - 2x + 3}$ 的值域是_____.
187. (003000) 已知函数 $f(x) = \log_a(x + \sqrt{x^2 + 1}), a > 1$.
- (1) 求 $f(x)$ 的定义域和值域;
- (2) 求 $f^{-1}(x)$;
- (3) 判断 $f^{-1}(x)$ 的奇偶性、单调性;
- (4) 若实数 m 满足 $f^{-1}(1 - m) + f^{-1}(1 - m^2) < 0$, 求 m 的范围.
188. (003001)* 设常数 $m, n \in \mathbf{R}$. 若函数 $y = \frac{mx^2 + 4x + n}{x^2 + 1}$ 的值域为 $[1, 6]$, 求 m, n 的值.
189. (003002) 设常数 $a \in \mathbf{R}$, 区间 $E \subseteq (0, +\infty)$. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{a} - \frac{1}{x}, x \in E$.
- (1) 求证: $y = f(x)$ 在区间 E 上递增;
- (2) 是否存在 a , 使得对于这样的 a , 总是存在 $E = [m, n] (m < n)$, 使得 $y = f(x)$ 在区间 E 上的值域也是 E ? 若存在, 求出 a 的取值范围; 若不存在, 说明理由.
190. (003003) 函数 $y = 2x + \frac{4}{x} (\frac{1}{2} < x \leq 2)$ 的值域是_____.

191. (003004) 函数 $y = |x - 3| - |x + 2|$ 的值域是_____.
192. (003005) 函数 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-x}$ 的值域是_____.
193. (003006) 函数 $y = \frac{\sqrt{x}}{x+1}$ 的值域是_____.
194. (003009) 求函数 $y = \frac{2x^2 - 4x - 1}{x^2 - 2x - 1}$ 的值域.
195. (003010) 求函数 $y = \frac{x^2 + 4x - 1}{x^2 - 2x + 1}$ ($2 \leq x \leq 3$) 的值域.
196. (003011) 记 $\max\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ 为 a_1, \dots, a_n 中的最大值. 已知 $f(x) = \max\{x, x^2\}$ ($-1 \leq x \leq 3$).
- (1) 求函数 $y = f(x)$ 的值域;
- (2) 设 PAB 三点的坐标分别为 $(x, f(x))$, $(0, -1)$, $(2, 0)$, 且 PAB 三点可以构成三角形, 求 $\triangle PAB$ 的面积取值范围.
197. (003012) 是否存在实数 m, n ($m < n$), 使得函数 $f(x) = -x^2 + 2$ 的定义域、值域分别是区间 $[m, n]$ 、 $[2m, 2n]$. 若存在, 求出 m, n 的值; 若不存在, 说明理由.
198. (003620) 已知 $a \in \mathbf{R}$, 若存在定义域为 \mathbf{R} 的函数 $f(x)$ 同时满足下列两个条件, ① 对任意 $x_0 \in \mathbf{R}$, $f(x_0)$ 的值为 x_0 或 x_0^2 ; ② 关于 x 的方程 $f(x) = a$ 无实数解; 则 a 的取值范围为_____.
199. (003642) 已知 $f(x) = \left| \frac{2}{x-1} - a \right|$ ($x > 1, a > 0$), $f(x)$ 的图像与 x 轴的交点为 A , 若对于 $f(x)$ 的图像上任意一点 P , 在其图像上总存在另一点 Q (P, Q 异于 A), 满足 $AP \perp AQ$, 且 $|AP| = |AQ|$, 则 $a =$ _____.
200. (003655) 设常数 $a \in \mathbf{R}$, 函数 $f(x) = \log_2(x + a)$. 若 $f(x)$ 的反函数的图像经过点 $(3, 1)$, 则 $a =$ _____.
201. (003667) 设 D 是含数 1 的有限实数集, $f(x)$ 是定义在 D 上的函数. 若 $f(x)$ 的图像绕原点逆时针旋转 $\frac{\pi}{6}$ 后与原图像重合, 则在以下各项中, $f(1)$ 的可能取值只能是 ().
- A. $\sqrt{3}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D. 0
202. (003681) 已知四个函数: ① $y = -x$, ② $y = -\frac{1}{x}$, ③ $y = x^3$, ④ $y = x^{\frac{1}{2}}$. 从中任选 2 个, 则事件“所选 2 个函数的图像有且仅有一个公共点”的概率为_____.
203. (003709) 若函数 $y = a^x + b$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 的图像经过点 $(1, 7)$, 其反函数的图像经过点 $(4, 0)$, 则 $a - b =$ _____.
204. (003720) 函数 $y = \sqrt{2016^{1-x}}$ 的定义域是_____.
205. (003726) 若函数 $f(x) = \frac{k - 2^x}{1 + k \cdot 2^x}$, ($k \neq 1, k \in \mathbf{R}$) 在定义域内为奇函数, 则 $k =$ _____.
206. (003730) 下列函数中, 与函数 $y = x^{2n+1}$ ($n \in \mathbf{N}^*$) 的值域相同的函数为_____.
- A. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}$ B. $y = \ln(x+1)$ C. $y = \frac{x+1}{x}$ D. $y = x + \frac{1}{x}$
207. (003732) 函数 $f(x) = \sqrt{27 - 3^{2x+1}}$ 的定义域是_____. (用区间表示)

208. (003746) 幂函数 $f(x)$ 的图像经过点 $(2, \sqrt{2})$, 且 $f^{-1}(x)$ 为 $f(x)$ 的反函数, 则 $f^{-1}(4) =$ _____.

209. (003783)(理科) 已知 $f(x)$ 是 \mathbf{R} 上的奇函数, $g(x)$ 是 \mathbf{R} 上的偶函数, 若函数 $f(x) + g(x)$ 的值域为 $[1, 3]$, 则 $f(x) - g(x)$ 的值域为_____.

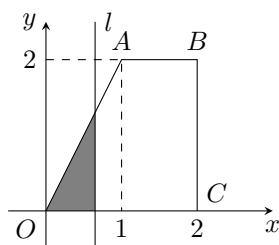
(文科) 已知 $f(x)$ 是 \mathbf{R} 上的奇函数, $g(x)$ 是 \mathbf{R} 上的偶函数, 若函数 $f(x) + g(x)$ 的值域为 $[1, 3]$, 则 $f(-x) + g(x)$ 的值域为_____.

210. (003789) 设函数 $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$, $g(x) = f^{-1}(|x|)$.

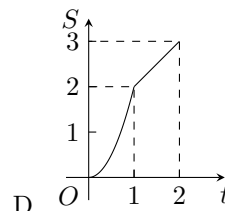
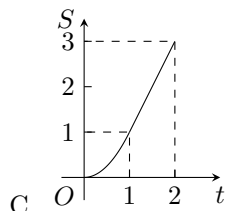
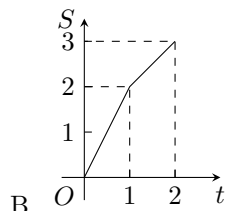
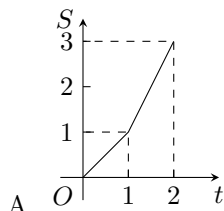
(1) 求函数 $g(x)$ 的解析式, 并画出大致图像;

(2) 若不等式 $g(x) + g(2x) \leq k$ 对任意 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立, 求实数 k 的取值范围.

211. (003862) 如图, 直角梯形 $OABC$ 中, $AB \parallel OC$, $AB = 1$, $OC = BC = 2$, 直线 $l: x = t$ 截此梯形所得位于 l 左方图形面积为 S ,



则函数 $S = f(t)$ 的图像大致为_____.



212. (003869) 函数 $f(x) = a^x + b$ ($a > 1$, $b < -1$), 则 $y = f^{-1}(x)$ 的图像一定不经过第_____象限.

213. (003884) 已知函数 $y = f(x)$ 的定义域为 $\{x | -3 \leq x \leq 8, x \neq 5\}$, 值域为 $\{y | -1 \leq y \leq 2, y \neq 0\}$. 下列关于函数 $y = f(x)$ 的说法: ① 当 $x = -3$ 时, $y = -1$; ② 将 $y = f(x)$ 的图像补上 $(5, 0)$, 得到的图像必定是一条连续的曲线; ③ $y = f(x)$ 是 $[-3, 5)$ 上的单调函数; ④ $y = f(x)$ 的图像与坐标轴只有一个交点. 其中正确的命题是_____.

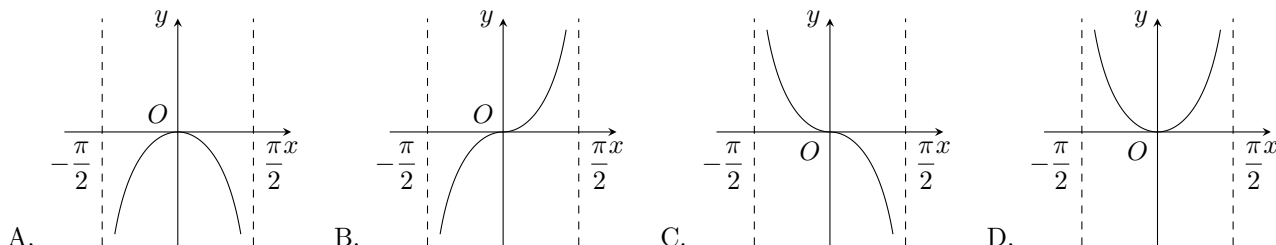
214. (003889) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} ax^2 - 2x - 1, & x \geq 0, \\ x^2 + bx + c, & x < 0 \end{cases}$ 是偶函数, 直线 $y = t$ 与函数 $y = f(x)$ 的图像自左向右依次交于四个不同点 A, B, C, D . 若 $AB = BC$, 则实数 t 的值为_____.

215. (003894) 对于函数 $f(x) = ax^2 + (b+1)x + b - 2$ ($a \neq 0$), 若存在实数 x_0 , 使 $f(x_0) = x_0$ 成立, 则称 x_0 为 $f(x)$ 的不动点.

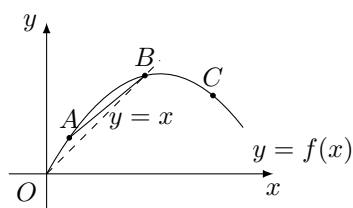
(1) 若对于任何实数 b , 函数 $f(x)$ 恒有两个相异的不动点, 求实数 a 的取值范围;

(2) 在 (1) 的条件下, 若函数 $y = f(x)$ 的图像上 A, B 两点的横坐标是函数 $f(x)$ 的不动点, 且直线 $y = kx + \frac{1}{2a^2 + 1}$ 是线段 AB 的垂直平分线, 求实数 b 的取值范围.

216. (003936) 函数 $y = \ln(\cos x) \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$ 的大致图像是_____.

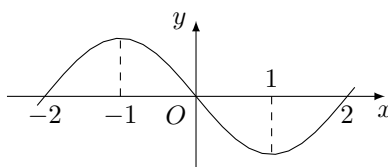


217. (004000) 请根据图中的函数图像, 将下列数值按从小到大的顺序排列:_____.



- ① 曲线在点 A 处切线的斜率;
- ② 曲线在点 B 处切线的斜率;
- ③ 曲线在点 C 处切线的斜率;
- ④ 割线 AB 的斜率;
- ⑤ 数值 0;
- ⑥ 数值 1.

218. (004007) 已知 $y = f'(x)$ 的图像如图所示, 求函数 $y = f(x)$ 在 $(-2, 2)$ 上的单调区间和极值点.



219. (004009) 设函数 $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ 的图像与 $y = 0$ 在原点相切, 若函数的极小值为 -4 , 求函数的表达式与单调减区间.

220. (004067) 已知定义在 \mathbf{R} 上的函数 $f(x)$ 满足: ① $f(x) + f(2-x) = 0$; ② $f(x) - f(-2-x) = 0$; ③ 在 $[-1, 1]$ 上表达式为 $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2}, & x \in [-1, 0], \\ 1-x, & x \in (0, 1], \end{cases}$ 则函数 $f(x)$ 与 $g(x) = \begin{cases} 2^x, & x \leq 0 \\ \log_{\frac{1}{2}} x, & x > 0 \end{cases}$ 的图像在区间 $[-3, 3]$ 上的交点的个数为_____.

221. (004070) 已知 $f(x) = 2x^2 + 2x + b$ 是定义在 $[-1, 0]$ 上的函数, 若 $f[f(x)] \leq 0$ 在定义域上恒成立, 而且存在实数 x_0 满足: $f[f(x_0)] = x_0$ 且 $f(x_0) \neq x_0$, 则实数 b 的取值范围是_____.

222. (004089) $[x]$ 是不超过 x 的最大整数, 则方程 $(2^x)^2 - \frac{7}{4} \cdot [2^x] - \frac{1}{4} = 0$ 满足 $x < 1$ 的所有实数解是_____.

223. (004097) 已知函数 $f(x) = 1 - \frac{6}{a^{x+1} + a}$ ($a > 0, a \neq 1$) 是定义在 \mathbf{R} 上的奇函数.

(1) 求实数 a 的值及函数 $f(x)$ 的值域;

(2) 若不等式 $t \cdot f(x) \geq 3^x - 3$ 在 $x \in [1, 2]$ 上恒成立, 求实数 t 的取值范围.

224. (004151) 设不等式组
$$\begin{cases} x + y - 6 \geq 0, \\ x - y + 2 \geq 0, \\ x - 3y + 6 \leq 0 \end{cases}$$
 表示的可行域为 Ω , 若指数函数 $y = a^x$ 的图像与 Ω 有公共点, 则 a 的取值范围是_____.

225. (004184) 设 m 为给定的实常数, 若函数 $y = f(x)$ 在其定义域内存在实数 x_0 , 使得 $f(x_0 + m) = f(x_0) + f(m)$ 成立, 则称函数 $f(x)$ 为 “ $G(m)$ 函数”.

(1) 若函数 $f(x) = 2^x$ 为 “ $G(2)$ 函数”, 求实数 x_0 的值;

(2) 若函数 $f(x) = \lg \frac{a}{x^2 + 1}$ 为 “ $G(1)$ 函数”, 求实数 a 的取值范围;

(3) 已知 $f(x) = x + b$ ($b \in \mathbf{R}$) 为 “ $G(0)$ 函数”, 设 $g(x) = x|x - 4|$. 若对任意的 $x_1, x_2 \in [0, t]$, 当 $x_1 \neq x_2$ 时, 都有 $\frac{g(x_1) - g(x_2)}{f(x_1) - f(x_2)} > 2$ 成立, 求实数 t 的最大值.

226. (004214) 设定义域为 \mathbf{R} 的函数 $f(x)$ 、 $g(x)$ 都有反函数, 且函数 $f(x - 1)$ 和 $g^{-1}(x - 3)$ 图像关于直线 $y = x$ 对称, 若 $g(5) = 2015$, 则 $f(4) =$ _____.

227. (004220) 已知函数① $f(x) = 3 \ln x$; ② $f(x) = 3e^{\cos x}$; ③ $f(x) = 3e^x$; ④ $f(x) = 3 \cos x$; 其中对于 $f(x)$ 定义域内的任意一个自变量 x_1 都存在唯一一个自变量 x_2 , 使 $\sqrt{f(x_1)f(x_2)} = 3$ 成立的函数是 ().

A. ③

B. ②③

C. ①②④

D. ④

228. (004224) 对于两个定义域相同的函数 $f(x)$ 、 $g(x)$, 若存在实数 m 、 n , 使 $h(x) = mf(x) + ng(x)$, 则称函数 $h(x)$ 是由 “基函数 $f(x)$ 、 $g(x)$ ” 生成的.

(1) $f(x) = x^2 + 3x$ 和 $g(x) = 3x + 4$ 生成一个偶函数 $h(x)$, 求 $h(2)$ 的值;

(2) 若 $h(x) = 2x^2 + 3x - 1$ 由 $f(x) = x^2 + ax$, $g(x) = x + b$ ($a, b \in \mathbf{R}$ 且 $ab \neq 0$) 生成, 求 $a + 2b$ 的取值范围.

229. (004228) 函数 $f(x) = \sqrt{1 - \frac{2}{x}}$ 的定义域是_____.

230. (004270) 函数 $f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{3+x}}$ 的定义域为_____.

231. (004272) 已知函数 $g(x)$ 的图像与函数 $f(x) = \log_2(3^x - 1)$ 的图像关于直线 $y = x$ 对称, 则 $g(3) =$ _____.

232. (004289) 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 若存在实常数 λ 及 a ($a \neq 0$), 对任意 $x \in D$, 当 $x + a \in D$ 且 $x - a \in D$ 时, 都有 $f(x + a) + f(x - a) = \lambda f(x)$ 成立, 则称函数 $f(x)$ 具有性质 $M(\lambda, a)$.

(1) 判断函数 $f(x) = x^2$ 是否具有性质 $M(\lambda, a)$, 并说明理由;

(2) 若函数 $g(x) = \sin 2x + \sin x$ 具有性质 $M(\lambda, a)$, 求 λ 及 a 应满足的条件;

(3) 已知定义域为 \mathbf{R} 的函数 $y = h(x)$ 不存在零点, 且具有性质 $M(t + \frac{1}{t}, t)$ (其中 $t > 0, t \neq 1$), 记 $a_n = h(n) (n \in \mathbf{N}^*)$, 求证: 数列 $\{a_n\}$ 为等比数列的充要条件是 $\frac{a_2}{a_1} = t$ 或 $\frac{a_2}{a_1} = \frac{1}{t}$.

233. (004305) 定义 $F(a, b) = \begin{cases} a, & a \leq b, \\ b, & a > b, \end{cases}$ 已知函数 $f(x)$ 、 $g(x)$ 定义域都是 \mathbf{R} , 给出下列命题:

- (1) 若 $f(x)$ 、 $g(x)$ 都是奇函数, 则函数 $F(f(x), g(x))$ 为奇函数;
- (2) 若 $f(x)$ 、 $g(x)$ 都是减函数, 则函数 $F(f(x), g(x))$ 为减函数;
- (3) 若 $f_{\min}(x) = m, g_{\min}(x) = n$, 则 $F_{\min}(f(x), g(x)) = F(m, n)$;
- (4) 若 $f(x)$ 、 $g(x)$ 都是周期函数, 则函数 $F(f(x), g(x))$ 是周期函数.

其中正确命题的个数为 ().

- A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

234. (004313) 设 $a \in \mathbf{R}$. 若 a 使得函数 $f(x) = \sqrt{8 - ax - 2x^2}$ 是偶函数, 则函数 $y = f(x)$ 的定义域是_____.

235. (004332) 函数 $y = \log_2(x - 2)$ 的定义域为_____.

236. (004335) 幂函数 $y = x^k$ 的图像经过点 $(4, \frac{1}{2})$, 则它的单调减区间为_____.

237. (004339) 已知偶函数 $y = f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , 且当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = x - 4$, 则不等式 $xf(x) \leq 5$ 的解为_____.

238. (004347) 已知 $y = f(x)$ 与 $y = g(x)$ 皆是定义域、值域均为 \mathbf{R} 的函数. 若对任意 $x \in \mathbf{R}$, $f(x) > g(x)$ 恒成立, 且 $y = f(x)$ 与 $y = g(x)$ 的反函数 $y = f^{-1}(x)$ 、 $y = g^{-1}(x)$ 均存在. 命题 P : “对任意 $x \in \mathbf{R}$, $f^{-1}(x) < g^{-1}(x)$ 恒成立”; 命题 Q : “函数 $y = f(x) + g(x)$ 的反函数一定存在”. 以下关于这两个命题的真假判断, 正确的是 ().

- A. 命题 P 真, 命题 Q 真 B. 命题 P 真, 命题 Q 假
C. 命题 P 假, 命题 Q 真 D. 命题 P 假, 命题 Q 假

239. (004368) 已知函数 $y = f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, 满足对任意 $x \in (0, +\infty)$, 恒有 $f[f(x) - \frac{1}{x}] = 4$. 若函数 $y = f(x) - 4$ 的零点个数为有限的 $n (n \in \mathbf{N}^*)$ 个, 则 n 的最大值为 ().

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

240. (004377) 函数 $f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{x}}$ 的定义域为_____.

241. (004380) 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , 满足对任意 $x \in \mathbf{R}$, 恒有 $f(x) + f(x+2) = 4$. 若 $f(1) + f(2) = 1$, 则 $f(2021) - f(2020) =$ _____.

242. (004385) 设函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , $f(x)$ 满足对任意 $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, 当 $x_1 \neq x_2$ 时, 恒有 $|f(x_1) - f(x_2)| > 2|x_1 - x_2|$. 对于命题: ① $f(x)$ 的解析式可以是 $f(x) = x^3 + 2021x$; ② $f(x)$ 的解析式可以是 $f(x) = 2021^{-x}$, 下列判断正确的是 ().

A. ①、②均为真命题

B. ①、②均为假命题

C. ①为真命题、②为假命题

D. ①为假命题、②为真命题

243. (004387) 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, 若对任意 $x \in (0, +\infty)$, 恒有 $f(2x) = 2f(x)$, 则称 $f(x)$ 为“2 阶缩放函数”.

(1) 已知函数 $f(x)$ 为“2 阶缩放函数”, 当 $x \in (1, 2]$ 时, $f(x) = 1 - \log_2 x$, 求 $f(2\sqrt{2})$ 的值;

(2) 已知函数 $f(x)$ 为“2 阶缩放函数”, 当 $x \in (1, 2]$ 时, $f(x) = \sqrt{2x - x^2}$, 求证: 函数 $y = f(x) - x$ 在 $(1, +\infty)$ 上无零点.

244. (004389) 函数 $f(x) = x^{-\frac{1}{2}}$ 的定义域为_____.

245. (004401) 下列函数中, 值域为 $(0, +\infty)$ 的是 ().

A. $y = x^2$

B. $y = \frac{2}{x}$

C. $y = 2^x$

D. $y = |\log_2 x|$

246. (004403) 设集合 $A = \{y|y = a^x, x > 0\}$ (其中常数 $a > 0, a \neq 1$), $B = \{y|y = x^k, x \in A\}$ (其中常数 $k \in \mathbf{Q}$), 则“ $k < 0$ ”是“ $A \cap B = \emptyset$ ”的 ().

A. 充分非必要条件

B. 必要非充分条件

C. 充分必要条件

D. 既非充分又非必要条件

247. (004408) 记函数 $f(x)$ 的定义域为 D . 如果存在实数 a, b 使得 $f(a-x) + f(a+x) = b$ 对任意满足 $a-x \in D$ 且 $a+x \in D$ 的 x 恒成立, 则称 $f(x)$ 为 Ψ 函数.

(1) 设函数 $f(x) = \frac{1}{x} - 1$, 试判断 $f(x)$ 是否为 Ψ 函数, 若是求出 a, b , 若不是请说明理由;

(2) 设函数 $g(x) = \frac{1}{2^x + t}$, 其中常数 $t \neq 0$, 证明: $g(x)$ 是 Ψ 函数;

(3) 若 $h(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的 Ψ 函数, 且函数 $h(x)$ 的图像关于直线 $x = m$ (m 为常数) 对称, 试判断 $h(x)$ 是否为周期函数? 并证明你的结论.

248. (004411) 若函数 $y = \log_2(x-m) + 1$ 的反函数的图像经过点 $(1, 3)$, 则实数 $m =$ _____.

249. (004412) 函数 $f(x) = x + \frac{1}{x-2}$ 的值域是_____.

250. (004417) 函数 $f(x) = \frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x+2} + \frac{x+2}{x+3}$ 图像的对称中心的坐标是_____.

251. (004424) 设 $\mu(x)$ 表示不小于 x 的最小整数, 例如 $\mu(0.3) = 1, \mu(-2.5) = 2$.

(1) 解方程 $\mu(x-1) = 3$;

(2) 设 $f(x) = \mu(x \cdot \mu(x)), n \in \mathbf{N}^*$, 试分别求出 $f(x)$ 在区间 $(0, 1], (1, 2]$ 以及 $(2, 3]$ 上的值域; 若 $f(x)$ 在区间 $(0, n]$ 上的值域为 M_n , 求集合 M_n 中的元素的个数;

(3) 设实数 $a > 0, g(x) = x + a \cdot \frac{\mu(x)}{x} - 2, h(x) = \frac{\sin(\pi x) + 2}{x^2 - 5x + 7}$, 若对于任意 $x_1, x_2 \in (2, 4]$ 都有 $g(x_1) > h(x_2)$, 求实数 a 的取值范围.

252. (004425) 函数 $y = \log_2(4-x^2)$ 的定义域是_____.

253. (004429) 已知函数 $f(x) = a \cdot 2^x + 3 - a$ ($a \in \mathbf{R}$ 且 $a \neq 0$) 的反函数为 $y = f^{-1}(x)$, 则函数 $y = f^{-1}(x)$ 的图像经过的定点的坐标为_____.

254. (004435) 集合 $A = \{y | y = \log_{\frac{1}{2}} x - x, 1 \leq x \leq 2\}$, $B = \{x | x^2 - 5tx + 1 \leq 0\}$, 若 $A \cap B = A$, 则实数 t 的取值范围是_____.

255. (004436) 若定义在实数集 \mathbf{R} 上的奇函数 $y = f(x)$ 的图像关于直线 $x = 1$ 对称, 且当 $0 \leq x \leq 1$ 时, $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$, 则方程 $f(x) = \frac{1}{3}$ 在区间 $(-4, 10)$ 内的所有实根之和为_____.

256. (004440) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \log_{\frac{1}{2}}(1-x), & -1 \leq x \leq n, \\ 2^{2-|x-1|} - 3, & n < x \leq m, \end{cases}$ ($n < m$) 的值域是 $[-1, 1]$, 有下列结论: ① 当 $n = 0$ 时, m 的取值范围为 $(0, 2]$; ② 当 $n = \frac{1}{2}$ 时, m 的取值范围为 $(\frac{1}{2}, 2]$; ③ 当 $n \in [0, \frac{1}{2})$ 时, m 的取值范围为 $[1, 2]$; ④ 当 $n \in [0, \frac{1}{2})$ 时, m 的取值范围为 $(n, 2]$; 其中结论正确的所有的序号是 ().

A. ①②

B. ③④

C. ②③

D. ②④

257. (004444) 定义区间 (m, n) 、 $[m, n]$ 、 $(m, n]$ 、 $[m, n)$ 的长度均为 $n - m$, 已知不等式 $\frac{7}{6-x} \geq 1$ 的解集为 A .

(1) 求 A 的长度;

(2) 函数 $f(x) = \frac{(a^2 + a)x - 1}{a^2 x}$ ($a \in \mathbf{R}, a \neq 0$) 的定义域与值域都是 $[m, n]$ ($n > m$), 求区间 $[m, n]$ 的最大长度;

(3) 关于 x 的不等式 $\log_2 x + \log_2(tx + 3t) < 2$ 的解集为 B , 若 $A \cap B$ 的长度为 6, 求实数 t 的取值范围.

258. (004445) 对于函数 $y = f(x)$ ($x \in D$), 如果存在实数 a, b ($a \neq 0$, 且 $a = 1, b = 0$ 不同时成立), 使得 $f(x) = f(ax + b)$ 对 $x \in D$ 恒成立, 则称函数 $f(x)$ 为 “ (a, b) 映像函数”.

(1) 判断函数 $f(x) = x^2 - 2$ 是否是 “ (a, b) 映像函数”, 如果是, 请求出相应的 a, b 的值, 若不是, 请说明理由;

(2) 已知函数 $y = f(x)$ 是定义在 $[0, +\infty)$ 上的 “ $(2, 1)$ 映像函数”, 且当 $x \in [0, 1)$ 时, $f(x) = 2^x$, 求函数 $y = f(x)$ ($x \in [3, 7)$) 的反函数;

(3) 在 (2) 的条件下, 试构造一个数列 $\{a_n\}$, 使得当 $x \in [a_n, a_{n+1})$ ($n \in \mathbf{N}^*$) 时, $2x + 1$ 的取值范围为 $[a_{n+1}, a_{n+2})$, 并求 $x \in [a_n, a_{n+1})$ ($n \in \mathbf{N}^*$) 时, 函数 $y = f(x)$ 的解析式, 及 $y = f(x)$ ($x \in [0, +\infty)$) 的值域.

259. (004446) 函数 $y = \sqrt{2+x}$ 的定义域为_____.

260. (004452) 已知幂函数 $y = f(x)$ 的图像经过点 $P(4, 2)$, 则它的反函数为 $f^{-1}(x) =$ _____.

261. (004496) 已知函数 $y = f(x)$ 存在反函数 $y = f^{-1}(x)$, 若函数 $y = f(x) + 2^x$ 的图像经过点 $(1, 4)$, 则函数 $y = f^{-1}(x) + \log_2 x$ 的图像必过点_____.

262. (004500) 对于定义域为 D 的函数 $f(x)$, 若存在 $x_1, x_2 \in D$ 且 $x_1 \neq x_2$, 使得 $f(x_1^2) = f(x_2^2) = 2f(x_1 + x_2)$, 则称函数 $f(x)$ 具有性质 M . 若函数 $g(x) = |\log_2 x - 1|$, $x \in (0, a]$ 具有性质 M , 则实数 a 的最小值为_____.

263. (004509) 若存在常数 k ($k > 0$), 使得对定义域 D 内的任意 x_1, x_2 ($x_1 \neq x_2$), 都有 $|f(x_1) - f(x_2)| \leq k|x_1 - x_2|$ 成立, 则称函数 $f(x)$ 在其定义域 D 是 “ k - 利普希兹条件函数”.

(1) 若函数 $f(x) = \sqrt{x}$ ($1 \leq x \leq 4$) 是 “ k - 利普希兹条件函数”, 求常数 k 的取值范围;

(2) 判断函数 $f(x) = \log_2 x$ 是否是 “2- 利普希兹条件函数”, 若是, 请证明, 若不是, 请说明理由;

(3) 若 $y = f(x) (x \in \mathbf{R})$ 是周期为 2 的“1- 利普希兹条件函数”, 证明: 对任意的实数 x_1, x_2 , 都有 $|f(x_1) - f(x_2)| \leq 1$.

264. (004516) 函数 $f(x) = 1 + \log_2 x (x \geq 4)$ 的反函数的定义域为_____.

265. (004523) 已知函数 $f^{-1}(x)$ 为函数 $f(x)$ 的反函数, 且函数 $f(x-1)$ 的图像经过点 $(1, 1)$, 则函数 $f^{-1}(x)$ 的图像一定经过点 ()

- A. $(0, 1)$ B. $(1, 0)$ C. $(1, 2)$ D. $(2, 1)$

266. (004525) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \text{ 为无理数,} \\ x, & x \text{ 为有理数,} \end{cases}$ 则以下 4 个命题: ① $f(x)$ 是偶函数; ② $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上是增函数; ③ $f(x)$ 的值域为 \mathbf{R} ; ④ 对于任意的正有理数 a , $g(x) = f(x) - a$ 存在奇数个零点. 其中正确命题的个数为 ().

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

267. (004530) 已知函数 $f(x)$ 的定义域是 D , 若对于任意的 $x_1, x_2 \in D$, 当 $x_1 < x_2$ 时, 都有 $f(x_1) \leq f(x_2)$, 则称函数 $f(x)$ 在 D 上为“非减函数”.

(1) 判断 $f_1(x) = x^2 - 4x, x \in [1, 4]$ 与 $f_2(x) = |x-1| + |x-2|, x \in [1, 4]$ 是否是“非减函数”?

(2) 已知函数 $g(x) = 2^x + \frac{a}{2^{x-1}}$ 在 $[2, 4]$ 上为“非减函数”, 求实数 a 的取值范围;

(3) 已知函数 $h(x)$ 在 $[0, 1]$ 上为“非减函数”, 且满足条件: ① $h(0) = 0$; ② $h(\frac{x}{3}) = \frac{1}{2}h(x)$; ③ $h(1-x) = 1 - h(x)$, 求 $h(\frac{1}{2020})$ 的值.

268. (004540) 已知 $y = f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的奇函数, 且当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = -\frac{1}{4^x} + \frac{1}{2^x}$, 则此函数的值域为_____.

269. (004563) 下列函数中, 值域为 $[0, +\infty)$ 的是 ().

- A. $y = 2^x$ B. $y = x^{\frac{1}{2}}$ C. $y = \tan x$ D. $y = \cos x$

270. (004661) 函数 $f(x) = x^{-\frac{1}{2}}$ 的定义域是_____.

271. (004760) 已知以下三个陈述句:

p : 存在 $a \in \mathbf{R}$ 且 $a \neq 0$, 对任意的 $x \in \mathbf{R}$, 均有 $f(2^{x+a}) < f(2^x) + f(a)$ 恒成立;

q_1 : 函数 $y = f(x)$ 是定义域为 \mathbf{R} 的减函数, 且对任意的 $x \in \mathbf{R}$, 都有 $f(x) > 0$;

q_2 : 函数 $y = f(x)$ 是定义域为 \mathbf{R} 的增函数, 存在 $x_0 < 0$, 使得 $f(x_0) = 0$;

用这三个陈述句组成两个命题, 命题 S : “若 q_1 , 则 p ”; 命题 T : “若 q_2 , 则 p ”. 关于 S, T 以下说法正确的是 ().

- A. 只有命题 S 是真命题 B. 只有命题 T 是真命题
C. 两个命题 S, T 都是真命题 D. 两个命题 S, T 都不是真命题

272. (005136) 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $BC = a, CA = b, AB = c, \angle ACB = \theta$. 现将 $\triangle ABC$ 分别以 BC, CA, AB 所在直线为轴旋转一周, 设所得三个旋转体的体积依次为 V_1, V_2, V_3 .

(1) 设 $T = \frac{V_3}{V_1 + V_2}$, 试用 a, b, c 表示 T ;

(2) 若 θ 为定值, 并令 $\frac{a+b}{c} = x$, 将 $T = \frac{V_3}{V_1 + V_2}$ 表示为 x 的函数, 写出这个函数的定义域, 并求这个函数的最大值 M ;

(3) 若 $\theta \in [\frac{\pi}{3}, \pi)$, 求 (2) 中 M 的最大值.

273. (005272) 求函数 $y = \frac{3x-1}{x+1}$ 的值域.

274. (005273) 求函数 $y = \frac{4x+3}{2x-1}$ 的值域.

275. (005274) 求函数 $y = \frac{x^2-1}{x^2+2}$ 的值域.

276. (005275) 求函数 $y = \frac{x^2-x+1}{2x^2-2x+3}$ 的值域.

277. (005276) 求函数 $y = \frac{x^2+4x+3}{x^2+x-6}$ 的值域.

278. (005277) 若实数 x, y 满足 $x^2 + 4y^2 = 4x$, 求 $S = x^2 + y^2$ 的值域.

279. (005279) 求函数 $y = 3x^2 - 12x + 18\sqrt{4x-x^2} - 23$ 的值域.

280. (005280) 求函数 $y = |x-2| - |x+1|$ 的值域.

281. (005282) 已知定义域为 \mathbf{R} 的函数 $f(x)$ 满足: ① $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ 对任何实数 x, y 都成立; ② 存在实数 x_1, x_2 , 使 $f(x_1) \neq f(x_2)$. 求证:

(1) $f(0) = 1$;

(2) $f(x) > 0$.

282. (005298) 函数 $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-5x+6}}{x-2}$ 的定义域是 ().

A. $\{x|2 < x < 3\}$

B. $\{x|x < 2 \text{ 或 } x > 3\}$

C. $\{x|x \leq 2 \text{ 或 } x \geq 3\}$

D. $\{x|x < 2 \text{ 或 } x \geq 3\}$

283. (005299) 若函数 $f(x)$ 的定义域是 $[-1, 1]$, 则函数 $f(x+1)$ 的定义域是 ().

A. $[-1, 1]$

B. $[0, 2]$

C. $[-2, 0]$

D. $[0, 1]$

284. (005301) 函数 $y = -x^2 - 2x + 3 (-5 \leq x \leq 0)$ 的值域是 ().

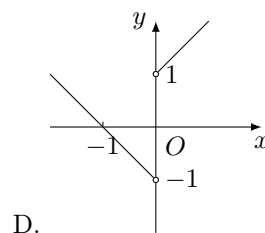
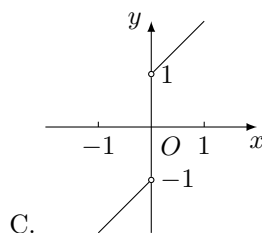
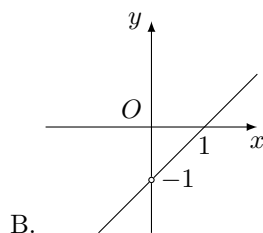
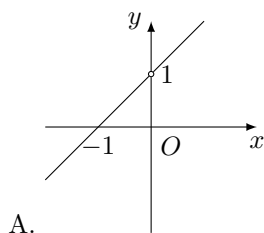
A. $(-\infty, 4]$

B. $[3, 12]$

C. $[-12, 4]$

D. $[4, 12]$

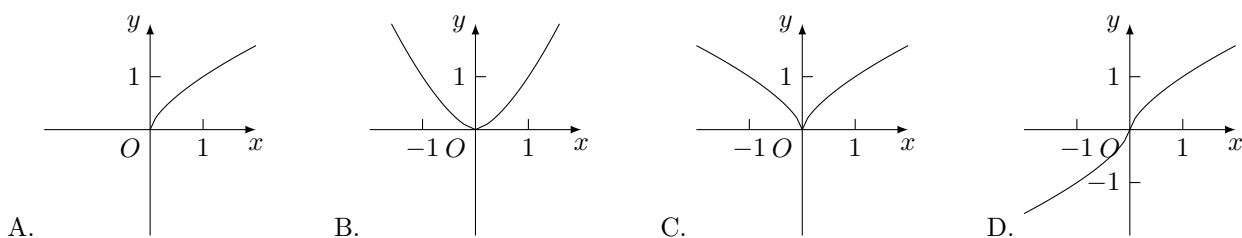
285. (005303) 函数 $y = x + \frac{|x|}{x}$ 的图像是 ().



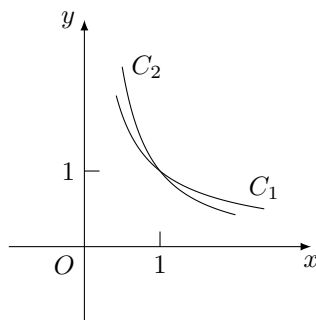
286. (005304) 函数 $y = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{x+1}$ 的定义域为_____.
287. (005305) 函数 $y = \frac{1}{\sqrt{2x^2+3}}$ 的定义域为_____.
288. (005306) 函数 $y = \frac{x+5}{3x^2-2x-1}$ 的定义域为_____.
289. (005307) 函数 $y = \sqrt{6x-x^2-9}$ 的定义域为_____.
290. (005308) 函数 $y = \sqrt{4-x^2} + \frac{1}{|x|-1}$ 的定义域为_____.
291. (005309) 函数 $y = \frac{x^3-1}{x+|x|}$ 的定义域为_____.
292. (005310) 函数 $y = \frac{1}{|x|-x^2}$ 的定义域为_____.
293. (005311) 函数 $y = \sqrt{1-(\frac{x-1}{x+1})^2}$ 的定义域为_____.
294. (005312) 函数 $y = \frac{\sqrt{x^2-2x-15}}{|x+3|-8}$ 的定义域为_____.
295. (005313) 函数 $y = 1 - \frac{1}{x+2}$ 的值域为_____.
296. (005314) 函数 $y = \frac{3}{2x}$ 的值域为_____.
297. (005315) 函数 $y = \frac{x+3}{x-3}$ 的值域为_____.
298. (005316) 函数 $y = \frac{5x+3}{x-3}$ 的值域为_____.
299. (005317) 函数 $y = 4 + \sqrt{2x+1}$ 的值域为_____.
300. (005318) 函数 $y = \sqrt{x - \frac{1}{2}x^2}$ 的值域为_____.
301. (005319) 函数 $y = \sqrt{-x^2+x+2}$ 的值域为_____.
302. (005320) 函数 $y = \frac{2x^2+2x+3}{x^2+x+1}$ 的值域为_____.
303. (005329) 若 $-b < a < 0$, 且函数 $d(x)$ 的定义域是 $[a, b]$, 则函数 $F(x) = f(x) + f(-x)$ 的定义域是 ().
- A. $[a, b]$ B. $[-b, -a]$ C. $[-b, b]$ D. $[a, -a]$
304. (005330) 若 $f(x)$ 的定义域是 $[0, 1]$, 且 $f(x+m) + f(x-m)$ 的定义域是 \varnothing , 则正数 m 的取值范围是 ().
- A. $0 < m < 1$ B. $0 < m \leq \frac{1}{2}$ C. $0 < m < \frac{1}{2}$ D. $m > \frac{1}{2}$
305. (005331) 函数 $y = \frac{x^2-1}{x^2+1}$ 的值域是 ().
- A. $(-1, 1)$ B. $[-1, 1]$ C. $[-1, 1)$ D. $(-1, 1]$
306. (005333) 函数 $f(x) = |1-x| - |x-3| (x \in \mathbf{R})$ 的值域是 ().
- A. $[-2, 2]$ B. $[-1, 3]$ C. $[-3, 1]$ D. $[0, 4]$

307. (005334) 若函数 $f(x)$ 的定义域是 $[0, 1]$, 分别求函数 $f(1-2x)$ 和 $f(x+a)(a>0)$ 的定义域.
308. (005335) 若函数 $f(x+1)$ 的定义域是 $[-2, 3]$, 求函数 $f(\frac{1}{x}+2)$ 的定义域.
309. (005336) 求函数 $y = \frac{2x}{x^2+x+1}$ 的值域.
310. (005337) 求函数 $y = \frac{x^2+x-1}{x^2+x+1}$ 的值域.
311. (005338) 求函数 $y = \frac{x^2-1}{x^2-5x+4}$ 的值域.
312. (005341) 求函数 $y = 3x-2+\sqrt{3-2x}$ 的值域.
313. (005342) 求函数 $y = 2x+\sqrt{2x-1}$ 的值域.
314. (005343) 求函数 $y = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)+15$ 的值域.
315. (005349) 已知函数 $f(x)$ 的定义域是一切非零实数, 且满足 $3f(x)+2f(\frac{1}{x})=4x$, 求 $f(x)$ 的表达式.
316. (005350) 作出函数 $y = 1 + \frac{|x|}{x}$ 的图像.
317. (005351) 作出函数 $y = x - |1-x|$ 的图像.
318. (005352) 作出函数 $y = |x^2-4x+3|$ 的图像.
319. (005353) 作出函数 $y = \frac{x^3+x}{|x|}$ 的图像.
320. (005354) 作出函数 $y = \frac{(x+\frac{1}{2})^0}{|x|-x}$ 的图像.
321. (005355) 已知 $f(x) = -x^2+2x+3$, 画出函数 $y = \frac{1}{2}[f(x)+|f(x)|]$ 的图像.
322. (005356) 已知 $f(x) = |x|, x \in [-1, 1]$, 作出函数 $y = f(x+1)+1$ 的图像.
323. (005363) 画出函数 $y = x^2-2|x|-1$ 的图像.
324. (005364) 求函数 $y = \frac{x-2}{2x+1}$ 的值域.
325. (005365) 已知函数 $f(x) = (x-1)^2(x \leq 1)$, 又 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称, 求 $\varphi(x)$ 的表达式.
326. (005445) 已知幂函数 $f(x)$ 的图像经过点 $(2, \frac{\sqrt{2}}{2})$, 则 $f(4)$ 的值等于 ().
- A. 16 B. $\frac{1}{16}$ C. $\frac{1}{2}$ D. 2
327. (005446) 下列幂函数中, 定义域为 $\{x|x>0\}$ 的是 ().
- A. $y = x^{\frac{2}{3}}$ B. $y = x^{\frac{3}{2}}$ C. $y = x^{-\frac{2}{3}}$ D. $y = x^{-\frac{3}{2}}$
328. (005447) 幂函数 $y = x^n(n \in \mathbf{Z})$ 的图像一定不经过 ().
- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

329. (005448) 函数 $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ 的图像是 ().

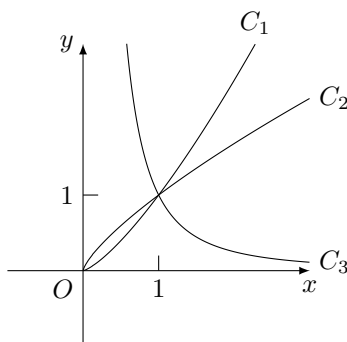


330. (005449) 幂函数 $y = x^m$ 和 $y = x^n$ 在第一象限内的图像 C_1 和 C_2 图像所示, 则 m, n 之间的关系是 ().



- A. $n < m < 0$ B. $m < n < 0$ C. $n > m > 0$ D. $m > n > 0$

331. (005450) 图中, C_1, C_2, C_3 为幂函数 $y = x^a$ 在第一象限的图像, 则解析式中的指数 α 依次可以取 ().



- A. $\frac{4}{3}, -2, \frac{3}{4}$ B. $-2, \frac{3}{4}, \frac{4}{3}$ C. $-2, \frac{4}{3}, \frac{3}{4}$ D. $\frac{3}{4}, \frac{4}{3}, -2$

332. (005451) 函数 $y = x^{\frac{5}{6}}$ 的定义域为_____, 值域为_____.

333. (005452) 函数 $y = x^{\frac{3}{5}}$ 的定义域为_____, 值域为_____.

334. (005453) 函数 $y = x^{\frac{8}{5}}$ 的定义域为_____, 值域为_____.

335. (005454) 函数 $y = x^{-\frac{5}{4}}$ 的定义域为_____, 值域为_____.

336. (005455) 函数 $y = x^{-\frac{5}{3}}$ 的定义域为_____, 值域为_____.

337. (005456) 函数 $y = x^{-\frac{2}{3}}$ 的定义域为_____, 值域为_____.

338. (005457) 函数 $y = -2(x+5)^{-\frac{1}{4}}$ 的定义域为_____, 值域为_____.

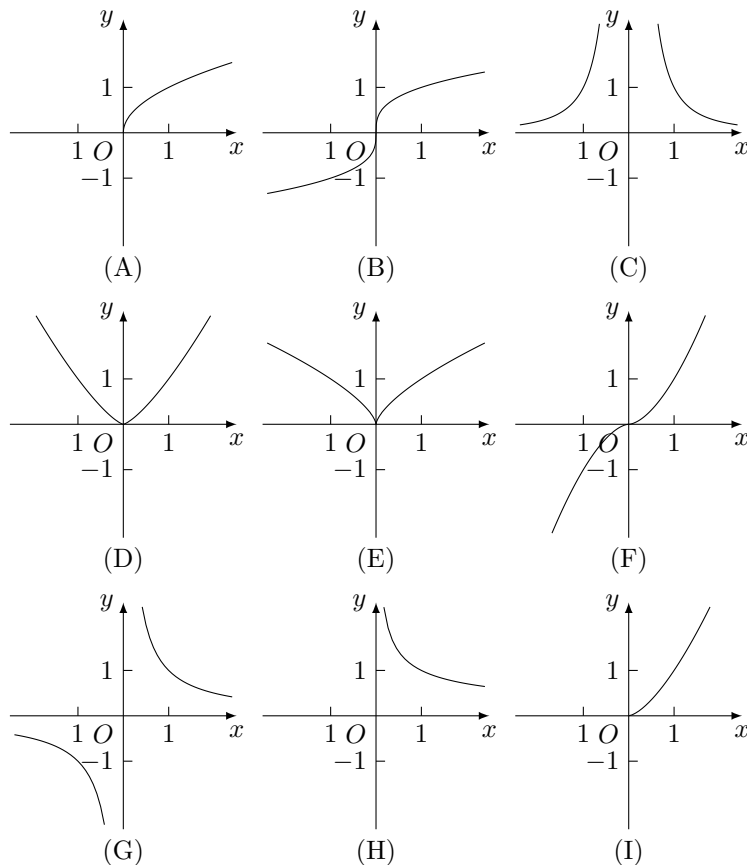
339. (005458) 函数 $y = 5(2x - 1)^{\frac{3}{4}}$ 的定义域为_____, 值域为_____.

340. (005459) 将下列函数图像的标号, 填在相应函数后面的横线上:

(1) $y = x^{\frac{2}{3}}$: _____; (2) $y = x^{-2}$: _____; (3) $y = x^{\frac{1}{2}}$: _____;

(4) $y = x^{-1}$: _____; (5) $y = x^{\frac{1}{3}}$: _____; (6) $y = x^{\frac{3}{2}}$: _____;

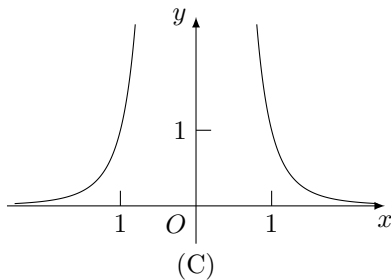
(7) $y = x^{\frac{4}{3}}$: _____; (8) $y = x^{-\frac{1}{2}}$: _____; (9) $y = x^{\frac{5}{3}}$: _____.



341. (005460) 若幂函数 $y = x^n$ 的图像在 $0 < x < 1$ 时位于直线 $y = x$ 的下方, 则 n 的取值范围是_____.

342. (005461) 若幂函数 $y = x^n$ 的图像在 $0 < x < 1$ 时位于直线 $y = x$ 的上方, 则 n 的取值范围是_____.

343. (005462) 函数 $f(x) = x^{k^2-2k-3} (k \in \mathbf{Z})$ 的图像如图所示, 则 $k =$ _____.



344. (005471) 已知函数 $y = x^{n^2-2n-3} (n \in \mathbf{Z})$ 的图像与两坐标轴都无公共点, 且其图像关于 y 轴对称, 求 n 的值, 并画出相应的函数图像.

345. (005477) 若函数 $f(x)$ 在定义域 \mathbf{R} 上为增函数, 且 $f(x) < 0$, 则下列函数在 \mathbf{R} 上为增函数的是 ().
- A. $y = |f(x)|$ B. $y = \frac{1}{f(x)}$ C. $y = [f(x)]^2$ D. $y = [f(x)]^3$
346. (005484) 已知 $f(x) = -x^3 - x + 1 (x \in \mathbf{R})$, 求证 $y = f(x)$ 在定义域上为减函数.
347. (005486) 求证: $f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{x}$ 在定义域上是增函数.
348. (005493) 下列函数中既是奇函数, 又在定义域上为增函数的是 ().
- A. $f(x) = 3x + 1$ B. $f(x) = \frac{1}{x}$ C. $f(x) = 1 - \frac{1}{x}$ D. $f(x) = x^3$
349. (005496) 已知 $f(x)$ 是奇函数, 则下列各点中在函数 $y = f(x)$ 的图像上的点的是 ().
- A. $(a, f(-a))$ B. $(-a, -f(a))$ C. $(\frac{1}{a}, -f(\frac{1}{a}))$ D. $(-\sin a, -f(-\sin a))$
350. (005498) 若奇函数 $f(x)$ 的定义域是 \mathbf{R} , 则 $f(0) =$ _____.
351. (005505) 若函数 $y = f(x)$ 是偶函数, 其图像与 x 轴有四个交点, 则方程 $f(x) = 0$ 的所有实数根之和为 ().
- A. 4 B. 2 C. 1 D. 0
352. (005508) $f(x) + f(2-x) + 2 = 0$ 对任何实数 x 都成立, 则 $f(x)$ 的图像 ().
- A. 关于直线 $x = 1$ 成轴对称图形 B. 关于直线 $x = 2$ 成轴对称图形
- C. 关于点 $(1, -1)$ 成中心对称图形 D. 关于点 $(-1, 1)$ 成中心对称图形
353. (005519) 已知奇函数 $f(x)$ 在定义域 $(-l, l)$ 上是减函数, 求满足 $f(1-m) + f(1-m^2) < 0$ 的实数 m 的取值范围.
354. (005522) 求证: 定义域为 $(-l, l)$ 的任何函数都能表示成一个奇函数与一个偶函数之和.
355. (005524) 函数 $y = \sqrt{x^2 - 2x + 3} (x \leq 1)$ 的反函数的定义域是 ().
- A. $[0, +\infty)$ B. $(2, +\infty)$ C. $(-\infty, 1]$ D. $[\sqrt{2}, +\infty)$
356. (005527) 若函数 $y = g(x)$ 的图像与函数 $f(x) = (x-1)^2 (x \leq 1)$ 的图像关于直线 $y = x$ 对称. 则 $g(x)$ 的表达式是 ().
- A. $g(x) = 1 - \sqrt{x} (x \geq 0)$ B. $g(x) = 1 + \sqrt{x} (x \geq 0)$
- C. $g(x) = \sqrt{1-x} (x \leq 1)$ D. $g(x) = \sqrt{1+x} (x \geq -1)$
357. (005530) 若函数 $f(x)$ 的图像经过点 $(0, -1)$, 则函数 $f(x+4)$ 的反函数的图像必经过点 ().
- A. $(-1, 4)$ B. $(-4, -1)$ C. $(-1, -4)$ D. $(1, -4)$
358. (005531) 已知函数 $y = -\sqrt{1-x^2}$ 的反函数是 $y = -\sqrt{1-x^2}$, 则原函数的定义域“最大”可以是_____.
359. (005533) 若点 $(1, 2)$ 既在函数 $y = \sqrt{ax+b}$ 的图像上. 又在其反函数的图像上, 则 $a =$ _____, $b =$ _____.
360. (005542) 若函数 $y = \sqrt{x-m}$ 与其反函数的图像有公共点, 则 m 的取值范围是 ().
- A. $m \geq \frac{1}{4}$ B. $m \leq \frac{1}{4}$ C. $m \geq 0$ D. $m \leq 0$

361. (005543) 已知 $y = g(x)$ 是函数 $y = f(x)$ 的反函数, 又 $y = h(x)$ 与 $y = g(x)$ 的图像关于原点 $O(0, 0)$ 对称, 则 $h(x)$ 的表达式是 ().

- A. $y = f^{-1}(x)$ B. $y = -f^{-1}(x)$ C. $y = f^{-1}(-x)$ D. $y = -f^{-1}(-x)$

362. (005547) 已知定义域为 $(-\infty, 0]$ 的函数 $f(x)$ 满足 $f(x-1) = x^2 - 2x$, 则 $f^{-1}(-\frac{1}{2}) =$ _____.

363. (005548) 求函数 $f(x) = \begin{cases} x+1, & x > 0, \\ x-1, & x < 0 \end{cases}$ 的反函数, 并作出其反函数的图像.

364. (005549) 已知函数 $f(x) = x^2 + 2x + 1$.

(1) 若函数的定义域是 $(-\infty, +\infty)$, 这个函数有没有反函数?

(2) 若函数的定义域是 $[0, +\infty)$, 求其反函数;

(3) 若函数的定义域是 $(-\infty, -1]$, 求其反函数.

365. (005562) 已知函数 $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = 1.5^x$, $h(x) = x^{1.5}$, 试用数值计算比较三个函数在 $[0, +\infty)$ 上的函数值的大小、图像递增的快慢. 并说明在函数图像上的表现. 解列表并计算得:

x	$f(x) = 2x + 1$	$f(x) - f(x-1)$	$g(x) = 1.5^x$	$g(x) - g(x-1)$	$h(x) = x^{1.5}$	$h(x) - h(x-1)$
0	1		1		0	
1	3	2	1.5	0.5	1	1
2	5	2	2.25	0.75	2.82842712	1.82842712
3	7	2	3.375	1.125	5.19615242	2.3677253
4	9	2	5.0625	1.6875	8	2.80384758
5	11	2	7.59375	2.53125	11.1803399	3.18033989
6	13	2	11.390625	3.796875	14.6969385	3.51659857
7	15	2	17.085938	5.6953125	18.5202592	3.82332072
8	17	2	25.628906	8.5429688	22.627417	4.10715782
9	19	2	38.443359	12.814453	27	4.372583
10	21	2	57.665039	19.22168	31.6227766	4.6227766
11	23	2	86.497559	28.83252	36.4828727	4.86009609
12	25	2	129.74634	43.248779	41.5692194	5.08634669
13	27	2	194.61951	64.873169	46.8721666	5.3029472
14	29	2	291.92926	97.309753	52.3832034	5.51103683
15	31	2	437.89389	145.96463	58.0947502	5.71154678
16	33	2	656.84084	218.94695	64	5.90524981
17	35	2	985.26125	328.42042	70.0927956	6.09279564
18	37	2	1477.8919	492.63063	76.3675324	6.27473673

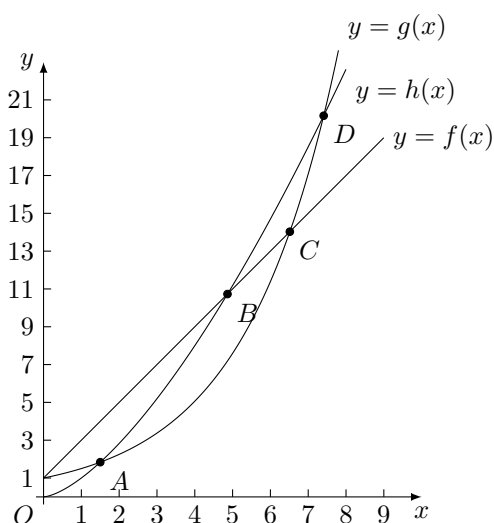
x	$f(x) = 2x + 1$	$f(x) - f(x - 1)$	$g(x) = 1.5^x$	$g(x) - g(x - 1)$	$h(x) = x^{1.5}$	$h(x) - h(x - 1)$
19	39	2	2216.8378	738.94594	82.8190799	6.45154756
20	41	2	3325.2567	1108.4189	89.4427191	6.62363917
21	43	2	4987.8851	1662.6284	96.2340896	6.79137049
22	45	2	7481.8276	2493.9425	103.189147	6.95505712
23	47	2	11222.741	3740.9138	110.304125	7.11497832
24	49	2	16834.112	5611.3707	117.575508	7.27138262
25	51	2	25251.168	8417.0561	125	7.42449235
26	53	2	37876.752	12625.584	132.574507	7.57450735
27	55	2	56815.129	18938.376	140.296115	7.72160806
28	57	2	85222.693	28407.564	148.162073	7.86595801
29	59	2	127834.04	42611.346	156.169779	8.00770599
30	61	2	191751.06	63917.02	164.316767	8.14698784
...

得点 A, B, C, D 的横坐标分别约为 1.5, 4.8, 6.5, 7.4, 记作 x_A, x_B, x_C, x_D .

(1) 三个函数的函数值的大小情况如下:

- ① 当 $0 < x < x_A$ 时, $f(x) > g(x) > h(x)$; ② 当 $x_A < x < x_B$ 时, $f(x) > h(x) > g(x)$; ③ 由 $x_B < x < x_C$ 时, $h(x) > f(x) > g(x)$; ④ 当 $x_C < x < x_D$ 时, $h(x) > g(x) > f(x)$; ⑤ 当 $x_D < x$ 时, $g(x) > h(x) > f(x)$; ⑥ 当 $x = x_A$ 时, $f(x) > g(x) = h(x)$; ⑦ 当 $x = x_B$ 时, $f(x) = h(x) > g(x)$; ⑧ 当 $x = x_C$ 时, $f(x) = g(x) < h(x)$; ⑨ 当 $x = x_D$ 时, $f(x) < g(x) = h(x)$.

(2) 它们在同一个平面直角坐标系下的图像如图 14 所示.



由表格及图像可看出, 三个函数的函数值变化及相应增量规律为: 随着 x 的增大, 直线型均匀上升, 增量恒定; 指数型急剧上升, 在区间 $[0, +\infty)$ 上递增增量快速增大; 幂函数型虽上升较快, 但随着 x 的不断增大上升趋势远不如指数型, 几乎微不足道, 其增量缓慢递增.

366. (005563) 已知函数 $f(x) = 4 + a^{x-1}$ 的图像恒过记点 P , 则点 P 的坐标是 ().

- A. (1, 5) B. (1, 4) C. (0, 4) D. (4, 0)

367. (005564) 下列函数中, 值域为 $(0, +\infty)$ 的函数是 ().

- A. $y = (\frac{1}{8})^{2-x}$ B. $y = \sqrt{1-3^x}$ C. $y = \sqrt{(\frac{1}{3})^x - 1}$ D. $y = 2^{\frac{1}{3-x}}$

368. (005574) 若函数 $f(x) = a^x - (b+1)$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 的图像在第一、三、四象限, 则必有 ().

- A. $0 < a < 1$ 且 $b > 0$ B. $0 < a < 1$ 且 $b < 0$ C. $a > 1$ 且 $b < 1$ D. $a > 1$ 且 $b > 0$

369. (005578) 函数 $f(x) = \sqrt{1-6^{x^2+x-2}}$ 的定义域是_____.

370. (005579) 若函数 $f(x)$ 的定义域是 $(0, 1)$, 则函数 $f(2^{-x})$ 的定义域是_____, $f(3 \times 9^x + 2 \times 3^x)$ 的定义域是_____.

371. (005588) 函数 $f(x) = \frac{1}{3^x - 1}$ 的值域是_____.

372. (005589) 函数 $f(x) = \frac{3^x}{3^x + 1}$ 的值域是_____.

373. (005596) 已知函数 $f(x) = (\frac{1}{2^x - 1} + \frac{1}{2})x^3$.

- (1) 求函数的定义域;
- (2) 讨论 $f(x)$ 的奇偶性;
- (3) 求证: $f(x) > 0$.

374. (005597) 已知 $f(x) = \frac{a^x - 1}{a^x + 1}$ ($a > 1$).

- (1) 判断函数 $f(x)$ 的奇偶性;
- (2) 求函数 $f(x)$ 的值域;
- (3) 求证: $f(x)$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上是增函数.

375. (005605) 在同一个平面直角坐标系中, 作出 $t(x) = 0.5x$ 与 $g(x) = 0.2 \times 2^x$ 的图像, 并比较它们的增长情况.

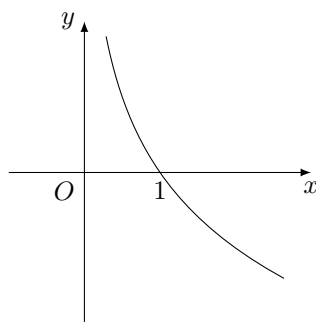
376. (005680) 求函数 $y = \frac{\sqrt{\log_{0.8} x - 1}}{2x - 1}$ 的定义域.

377. (005685) 求函数 $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 6x + 17)$ 的值域.

378. (005689) 若函数 $f(x) = \log_2 x + 3$ ($x \geq 1$), 则其反函数 $f^{-1}(x)$ 的定义域是 ().

- A. \mathbf{R} B. $\{x|x \geq 1\}$ C. $\{x|0 < x < 1\}$ D. $\{x|x \geq 3\}$

379. (005690) 图中图像所对应的函数可能是 ().



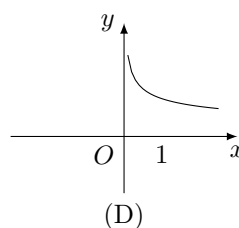
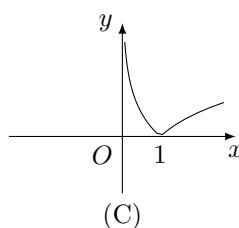
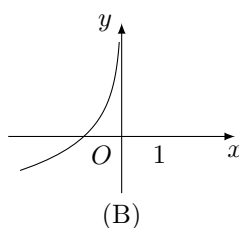
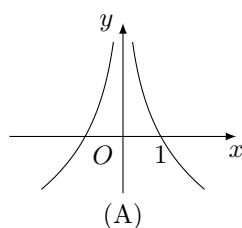
A. $y = 2^x$

B. $y = 2^x$ 的反函数

C. $y = 2^{-x}$

D. $y = 2^{-x}$ 的反函数

380. (005692) 下列函数图像中, 不正确的是 ().



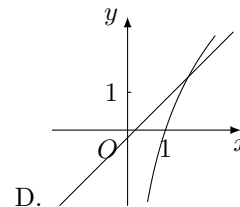
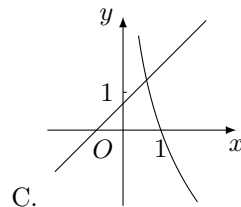
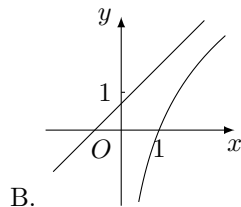
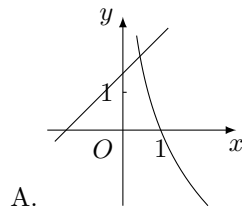
A. $y = \log_{\frac{1}{3}} x^2$

B. $y = \log_{\frac{1}{3}}(-x)$

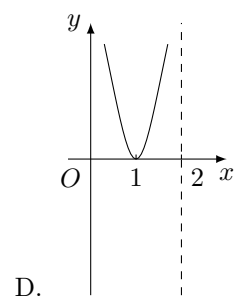
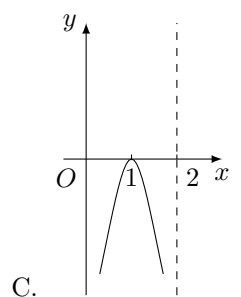
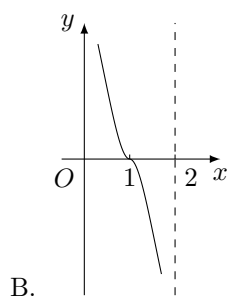
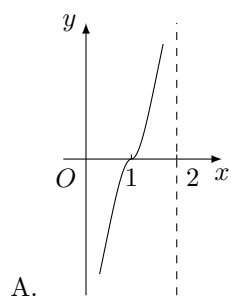
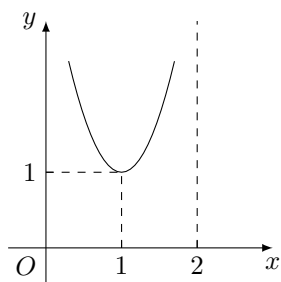
C. $y = |\log_3 x|$

D. $y = |x^{-\frac{1}{3}}|$

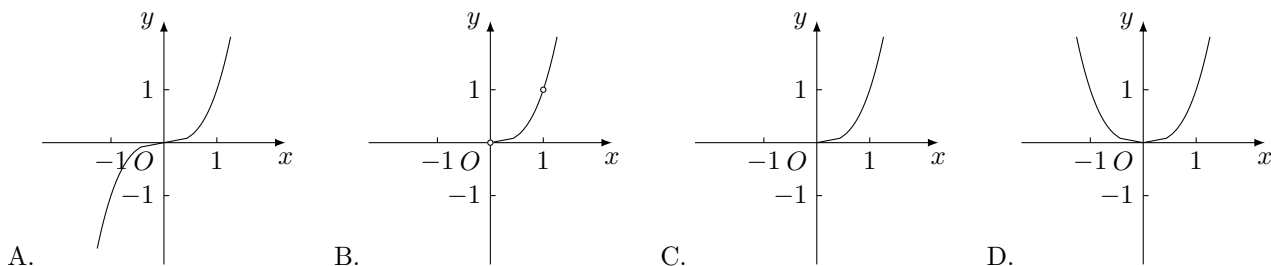
381. (005693) 在同一平面直角坐标系中画出函数 $y = x + a$ 与 $y = \log_a x$ 的图像, 可能是 ().



382. (005694) 函数 $y = f(x)$ 的图像如图所示, 则 $y = \log_{0.7} f(x)$ 的示意图是 ().



383. (005695) 由关系式 $\log_x y = 3$ 所确定的函数 $y = f(x)$ 的图像是 ().



384. (005697) 函数 $y = \log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 3x + 4)$ 的定义域为_____.

385. (005698) 函数 $y = \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{\lg(x^2 + 2x - 3)}$ 的定义域为_____.

386. (005699) 函数 $y = \log_{(2x-1)}(32 - 4^x)$ 的定义域为_____.

387. (005700) 函数 $y = \log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 4x + 7)$ 的值域为_____.

388. (005701) 函数 $y = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{x^2 - 2x + 5}$ 的值域为_____.

389. (005702) 函数 $y = \log_{\frac{1}{2}} \sqrt{3 - 2x - x^2}$ 的值域为_____.

390. (005712) 若函数 $f(x) = a^x - k$ 的图像过点 $(1, 3)$, 其反函数 $f^{-1}(x)$ 的图像过点 $(2, 0)$, 则 $f(x)$ 的表达式是_____.

391. (005716) 已知 $f(x) = \frac{a^x - 1}{a^x + 1} (a > 1)$.

(1) 求 $f(x)$ 的值域;

(2) 求证: $f(x)$ 在 R 上是增函数;

(3) 求 $f(x)$ 的反函数.

392. (005732) 求函数 $y = (\log_{\frac{1}{4}} x)^2 - \log_{\frac{1}{4}} x^2 + 5 (2 \leq x \leq 4)$ 的值域.

393. (005737) 已知函数 $f(x) = (\log_a b)x^2 + 2(\log_b a)x + 8$ 的图像在 x 轴的上方, 求 a, b 的取值范围.

394. (005743) 已知函数 $f(x) = \sqrt{\log_a x - 1} (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$.

(1) 求 $f(x)$ 的定义域;

(2) 当 $a > 1$ 时, 求证: $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上是增函数.

395. (005750) 已知函数 $f(x) = \log_a \frac{x+b}{x-b} (a > 0, b > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$.

(1) 求 $f(x)$ 的定义域;

(2) 讨论 $f(x)$ 的奇偶性;

(3) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(4) 求 $f(x)$ 的反函数 $f^{-1}(x)$.

396. (005751) 已知函数 $f(x) = \lg \frac{x+1}{x-1} + \lg(x-1) + \lg(a-x) (a > 1)$.

(1) 是否存在一个实数 a 使得函数 $y = f(x)$ 的图像关于某一条垂直于 x 轴的直线对称? 若存在, 求出这个实

数 a ; 若不存在, 说明理由;

(2) 当 $f(x)$ 的最大值为 2 时, 求实数 a 的值.

397. (005763) 若对于任意实数 p , 函数 $y = (p-1)2^x - \frac{p}{2}$ 的图像恒过一定点, 则这个点的坐标是 ().

- A. $(1, -\frac{1}{2})$ B. $(0, -1)$ C. $(-1, -\frac{1}{2})$ D. $(-2, -\frac{1}{4})$

398. (005776) 解方程: $\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{6} = \sqrt[3]{4}$.

399. (005828) 若函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R}^+ , 且满足 $f(xy) = f(x) + f(y)$, $f(8) = 3$, 求 $f(\sqrt{2})$ 的值.

400. (005829) 若函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , 且满足 $f(x) + 2f(-x) = -x^3 + 6x^2 - 3x + 3$, 求 $f(0)$ 的值, 并求 $f(x)$ 的表达式.

401. (005834) (1) 求函数 $y = 2x + \sqrt{1-2x}$ 的最大值. (2) 求函数 $y = 2x + \sqrt{1-x^2}$ 的值域. (3) 求函数 $y = \frac{\sqrt{x+1}}{x+2}$ 的值域.

402. (005835) 求函数 $g(t) = (t+3)(1+|t-1|)$ 的值域, 其中实数 t 的取值范围是使函数 $f(x) = x^2 - 4tx + 2t + 30$ 对任一 $x \in \mathbf{R}$ 都取非负值.

403. (005836) 已知函数 $f(x)$ 的定义域是 $[0, 1]$, 求函数 $f(x+m) + f(x-m)$ 的定义域 (其中 $m > 0$).

404. (005841) 已知 $y = f(x)$ 在其定义域上是增函数, 求证: $y = f(x)$ 的反函数 $y = f^{-1}(x)$ 在其定义域上也是增函数.

405. (005843) 已知函数 $f(x) = \frac{x}{1+x^2} (x \in \mathbf{R})$.

(1) 求 $f(x)$ 的值域;

(2) 讨论 $f(x)$ 的单调性.

406. (005844) 若二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 满足 $f(x_1) = f(x_2)$, $(x_1 \neq x_2)$ 求证: 直线 $x = \frac{x_1+x_2}{2}$ 是该二次函数图像的对称轴.

407. (005845) 若对于任何实数 x , 函数 $y = f(x)$ 始终满足 $f(a+x) = f(a-x)$, 求证: 函数 $y = f(x)$ 的图像关于直线 $x = a$ 对称.

408. (005846) 已知函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2) = f(2-x) (x \in \mathbf{R})$, 且 $f(x)$ 的图像与 x 轴有 15 个不同的交点, 求方程 $f(x) = 0$ 的所有解的和.

409. (005847) 已知函数 $f(2x+1)$ 是偶函数, 求函数 $f(2x)$ 的图像的对称轴.

410. (005848) 求函数 $y = \frac{3x-1}{x+2} (x \neq -2)$ 的图像的对称点.

411. (005849) 已知函数 $f(x)$ 满足 $f(x) + f(2-x) + 2 = 0 (x \in \mathbf{R})$, 求 $f(x)$ 的图像的对称中心.

412. (005850) 已知函数 $f(x) = \log_3(x^2 - 4mx + 4m^2 + m + \frac{1}{m-1})$, 集合 $M = \{m | m > 1, m \in \mathbf{R}\}$.

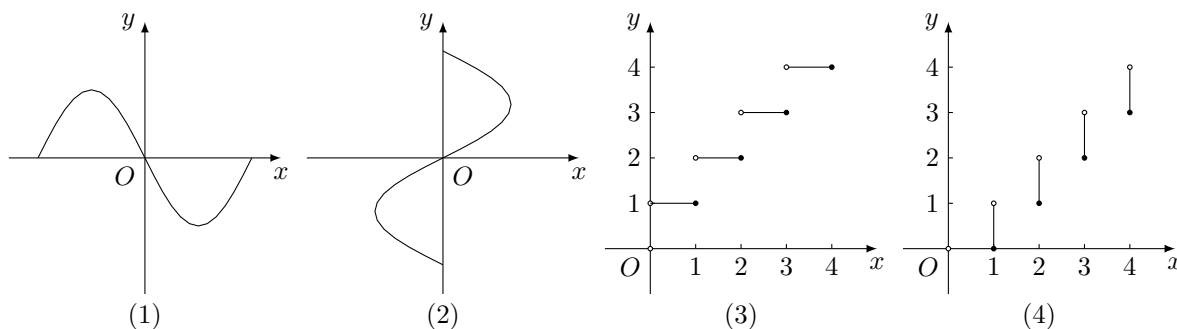
(1) 求证: 当 $m \in M$ 时, $f(x)$ 的定义域为 $x \in \mathbf{R}$; 反之, 若 $f(x)$ 对一切实数 x 都有意义, 则 $m \in M$;

- (2) 当 $m \in M$ 时, 求 $f(x)$ 的最小值;
 (3) 求证: 对每一个 $m \in M$, $f(x)$ 的最小值都不小于 1.

413. (005856) 已知函数 $f(x)$ 在定义域 $x \in \mathbf{R}^+$ 上是增函数, 且满足 $f(x \cdot y) = f(x) + f(y) (x, y \in \mathbf{R}^+)$.

- (1) 求 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上的值域;
 (2) 若 $f(2) = 1$, $f(x)$ 图像上三点 A, B, C 的横坐标分别为 $a, a+2, a+4 (a > 0)$, 且 $\triangle ABC$ 的面积小于 1, 求实数 a 的取值范围.

414. (007860) 下列各图像中, 哪些是函数的图像, 哪些不是函数的图像? 为什么?



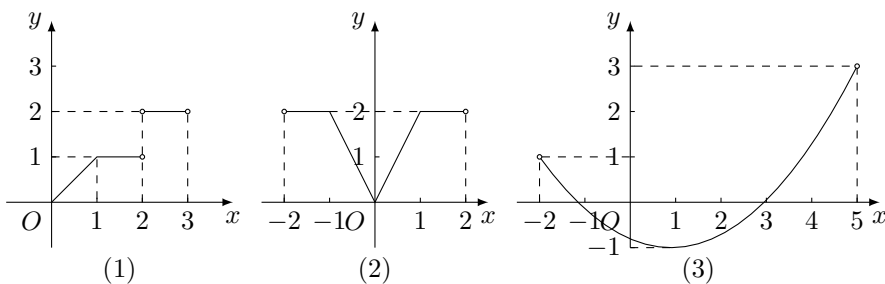
415. (007862) 求函数 $y = \frac{1}{x^2 + 2x - 3}$ 的定义域.

416. (007863) 求函数 $y = \sqrt{4 - 3x - x^2}$ 的定义域.

417. (007864) 求函数 $y = \sqrt{x-2} + \sqrt{x+3}$ 的定义域.

418. (007865) 求函数 $y = \frac{1}{x+2} + \frac{1}{\sqrt{5-x}}$ 的定义域.

419. (007867) 观察下列各函数, 并写出他们的值域:



420. (007868) 某企业去年四个季度生产某种型号机器的数量 y (万台) 与季度的函数关系是:

x (季度)	1	2	3	4
y (万台)	10	12	14	16

试写出函数的定义域, 并作出函数的图像.

421. (007869) 求函数 $y = \frac{1}{|x+3| - 1}$ 的定义域.

422. (007870) 求函数 $y = \sqrt{(a-x)(x-1)}$ (x 为自变量) 的定义域.

423. (007872) 试举出一个定义域为 $[-2, 2]$ 的函数例子.

424. (007873) 为分流短途乘客, 减缓轨道交通高峰压力, 上海地铁实行新的计费标准. 新标准的分段计程制度如下:
0—6 千米 (含 6 千米) 3 元; 6—16 千米 (含 16 千米) 4 元; 16 千米以上每 6 千米递增 1 元, 但总票价不超过 8 元.

(1) 试作出票价 y (元) 关于路程 x (千米) 的函数图像;

(2) 某人买了 5 元的车票, 他途经路程不能超过多少千米?

425. (007886) 已知函数 $f(x) = 2x - \frac{1}{x^2 - 1}$, 函数 $g(x) = \frac{1}{x^2 - 1} - 1$.

(1) 求函数 $y = f(x) + g(x)$;

(2) 画出函数 $y = f(x) + g(x)$ 的图像.

426. (007887) 已知函数 $f(x) = x\sqrt{x-1}$, 函数 $g(x) = \sqrt{x-1}$, 设 $F(x) = f(x) \cdot g(x)$.

(1) 写出 $F(x)$ 的解析式;

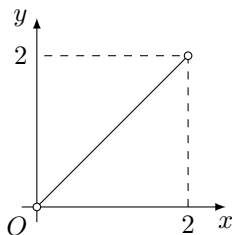
(2) 画出 $F(x)$ 的图像.

427. (007890) 已知函数 $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}$, 函数 $g(x) = \sqrt{4-x^2}$.

(1) 求函数 $y = f(x) \cdot g(x)$;

(2) 作出函数 $F(x) = \begin{cases} f(x) \cdot g(x), & x \leq 0, \\ x, & 0 < x \leq 2 \end{cases}$ 的图像.

428. (007891) 已知函数 $f(x) = x^2, x \in (0, 2)$, 函数 $y = f(x) + g(x)$ 的图像如图所示, 写出函数 $y = g(x)$ 的一个解析式.



429. (007892) 若函数 $y = f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , 则 $y = f(x)$ 为奇函数的充要条件为 ().

A. $f(0) = 0$

B. 对任意 $x \in \mathbf{R}, f(x) = 0$

C. 存在某个 $x_0 \in \mathbf{R}$, 使得 $f(x_0) + f(-x_0) = 0$

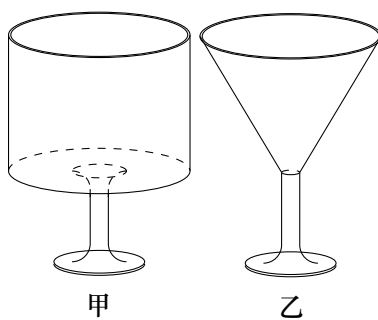
D. 对任意的 $x \in \mathbf{R}, f(x) + f(-x) = 0$ 都成立

430. (007899) 已知函数 $y = f(x)$ 的定义域为 $[0, +\infty)$. 如果对任意的 $x > 0$, 都有 $f(x) < f(0)$, 那么函数 $y = f(x)$ 有 $[0, +\infty)$ 上是否一定是减函数?

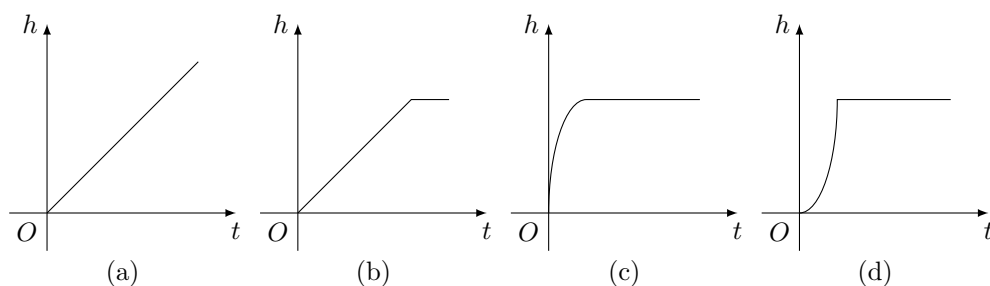
431. (007911) 画出函数 $y = x^2 - 2|x|$ 的图像, 并写出它的定义域、奇偶性、单调区间、最小值.

432. (007912) 研究函数 $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ 的定义域、奇偶性、单调性、最大值.

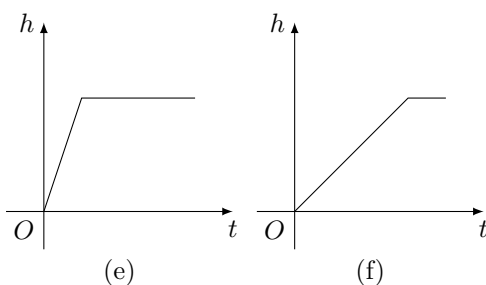
433. (007923) 研究函数 $f(x) = x + \frac{a}{x} (a > 0)$ 的定义域、奇偶性、单调性.
434. (007924) 求函数 $y = \frac{1}{2-x} + \sqrt{x^2-1}$ 的定义域.
435. (007928) 已知 $y = f(x)$ 是奇函数, 定义域为 \mathbf{R} , $y = g(x)$ 是偶函数, 定义域为 D . 设 $F(x) = f(x) \cdot g(x)$, 判断 $y = F(x)$ 奇偶性.
436. (007931) 作出函数 $y = |x^2 - 4x|$ 的图像, 并指出其单调区间.
437. (007932) 作出函数 $y = 2|x| - 3$ 的图像, 并指出其单调区间.
438. (007933) 设函数 $f(x) = (a^2 + 4a - 5)x^2 - 4(a - 1)x + 3$ 的图像都在 x 轴的上方, 求实数 a 的取值范围.
439. (007942) 打开水龙头, 让水匀速地注入一个杯子内, 随着时间的增加, 杯中水面的高度不断增加, 直至水满溢出. 在这个过程中, 杯中水面的高度 h 关于注水时间 t 的函数为 $h = f(t)$.



- (1) 如果甲杯、乙杯的形状分别如图所示, 那么下列草图中, 甲杯相应函数 $h = f(t)$ 的图像是_____, 乙杯相应函数 $h = f(t)$ 的图像是_____. (只有杯子的圆柱和圆锥形部分可以盛水)



- (2) 下列是两个杯子相应函数 $h = f(t)$ 的图像, 试说明这两个杯子形状有何差别.



440. (007943) 已知幂函数 $f(x)$ 的图像经过 $(2, \frac{\sqrt{2}}{2})$, 试求出这个函数的解析式.

441. (007944) 幂函数 $y = x^s$ 与 $y = x^t$ 的图像在第一象限都通过定点_____, 若它们在第一象限的部分关于直线 $y = x$ 对称, 则 s 、 t 应满足的条件是_____.

442. (007945) 研究幂函数 $f(x) = x^{\frac{2}{5}}$ 的定义域、奇偶性、单调性、值域.

443. (007946) 作函数 $y = \frac{|x| + 1}{|x + 1|}$ 的大致图像.

444. (007949) 已知幂函数 $f(x)$ 的定义域是 $(+\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, 且它的图像关于 y 轴对称, 写出一个满足要求的幂函数 $f(x)$.

445. (007959) 若函数 $y = 2^x - m$ 的图像不经过第二象限, 则 m 的取值范围是 ().

- A. $m \geq 1$ B. $m < 1$ C. $m > -1$ D. $m \leq -1$

446. (007962) 作函数 $y = 2^{|x|}$ 的大致图像.

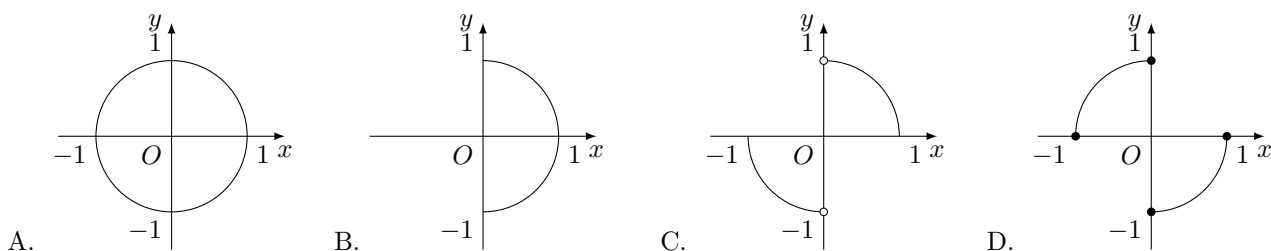
447. (007963) 作函数 $y = 2^{-|x|}$ 的大致图像.

448. (007966) 函数 $y = 4^x - 2^{x+1} + 1 (x < 0)$ 的值域是 ().

- A. $[0, +\infty)$ B. $(1, +\infty)$ C. $(0, 1)$ D. $(0, 1]$

449. (007982) 若函数 $f(x) = 3x + 1$ 的定义域为 $\{1, 3, k\}$. 值域为 $\{4, a^4, a^2 + 3a\}$, 且 a 、 k 为自然数, 则 $a + k =$ _____.

450. (007984) 下列图形中, 能作为某个函数的图像的只能是 ().



451. (007987) 点 $(\sqrt{2}, 2)$ 在幂函数 $y = f(x)$ 的图像上, 点 $(-2, \frac{1}{4})$ 在幂函数 $y = g(x)$ 的图像上. 当 x 为何值时, $f(x) = g(x)$?

452. (007998) 甲乙两地的高速公路全长 166 千米, 在高速公路上最高行驶时速不得高于 120 千米/时, 假设汽车从甲地进入该高速公路以不低于 70 千米/时的速度匀速行驶到乙地, 已知汽车每小时的运输成本 (以元为单位) 由可变部分和固定部分组成: 可变部分与速度 v (千米/时) 的平方成正比, 比例系数为 0.02; 固定部分为 220 元.

(1) 把全程运输成本 y (元) 表示为速度 v (千米/时) 的函数, 并指出这个函数的定义域;

(2) 汽车应以多大速度行驶才能使全程运输成本最小? 最小运输成本约为多少元?

453. (008032) 已知函数 $y = \frac{a}{x+1}$ 的反函数的图像经过点 $(\frac{1}{2}, 1)$, 求实数 a 的值.

454. (008033) 已知函数 $y = f(x)$ 的图像与函数 $y = \frac{x-1}{x+1}$ 的图像关于直线 $y = x$ 对称, 求函数 $y = f(x)$ 的解析式.

455. (008035) 一次函数 $y = -x$ 的图像与它的反函数的图像重合. 试写出一个非一次函数的函数, 使它的图像与其反函数的图像重合.

456. (008036) 如果函数 $y = f(x)$ 的图像过点 $(0, 1)$, 那么函数 $y = f^{-1}(x) + 2$ 的反函数的图像过点 ().

- A. $(3, 0)$ B. $(0, 3)$ C. $(1, 2)$ D. $(2, 1)$

457. (008037) 如果 $y = -\sqrt{1-x^2}$ 的反函数是 $y = -\sqrt{1-x^2}$, 那么原来的函数的定义域可以是 ().

- A. $(0, +\infty)$ B. $[-1, 1]$ C. $[-1, 0]$ D. $[0, 1]$

458. (008039) 求函数 $y = \lg(x^2 - 3x + 2)$ 的定义域.

459. (008040) 求函数 $y = \frac{\sqrt{2x-1}}{\lg x}$ 的定义域.

460. (008041) 求函数 $y = \sqrt{\lg x} + \lg(5-2x)$ 的定义域.

461. (008045) 已知函数 $f(x) = a^x + b$ 的图像经过点 $(1, 7)$, 反函数 $f^{-1}(x)$ 的图像经过点 $(4, 0)$, 求函数 $f(x)$ 的表达式.

462. (008053) 求证: $y = \lg(1-x)$ 在定义域上单调递减.

463. (008080) 若点 $(1, 7)$ 既在函数 $y = \sqrt{ax+b}$ 的图像上, 又在其反函数的图像上, 则数对 (a, b) 为_____.

464. (008081) 若 $f(x) = 3^x + 5$, 则 $f^{-1}(x)$ 的定义域是 ().

- A. $(0, +\infty)$ B. $(5, +\infty)$ C. $(8, +\infty)$ D. $(-\infty, +\infty)$

465. (008084) 作出函数 $y = \log_2(x-1)$ 的图像.

466. (008085) 作出函数 $y = |\log_2(x-1)|$ 的图像.

467. (008089) 已知函数 $f(x) = \log_a \frac{1+x}{1-x}$ ($a > 0, a \neq 1$). (1) 求 $f(x)$ 的定义域;

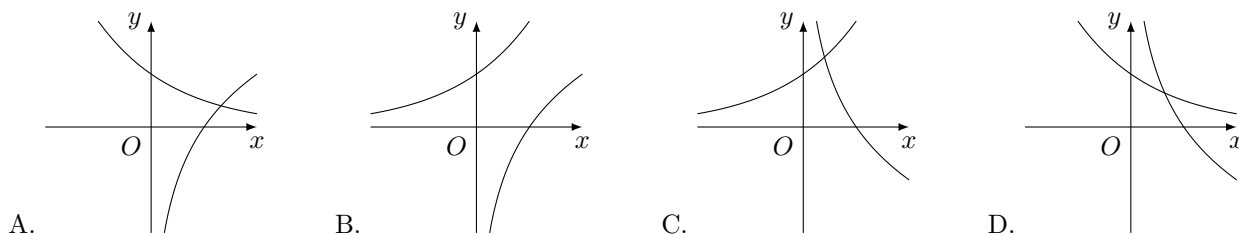
(2) 判断 $f(x)$ 的奇偶性, 并加以证明;

(3) 当 $a > 1$ 时, 求使 $f(x) > 0$ 的 x 的取值范围.

468. (008091) 如果函数 $f(x) = \log_a(-x^2 + ax)$ 的定义域为 $(0, \frac{1}{2})$, 那么实数 $a =$ _____.

469. (008093) 若函数 $y = f(x)$ 的图像与函数 $y = 2^x - 1$ 的图像关于直线 $y = x$ 成轴对称图形, 则函数 $y = f(x)$ 的解析式为_____.

470. (008094) 当 $a > 1$ 时, 在同一坐标系中, 函数 $y = a^{-x}$ 与 $y = \log_a x$ 的图像是 ().



471. (008095) 函数 $f(x) = 4 + \log_a(x-1)$ ($a > 0, a \neq 1$) 的图像恒经过定点 P , 则点 P 的坐标是 ().

A. (1, 4)

B. (4, 1)

C. (2, 4)

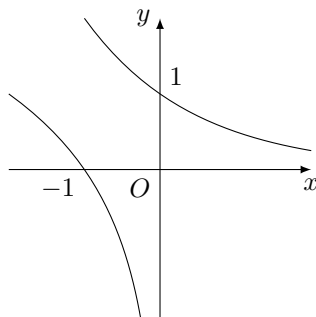
D. (4, 2)

472. (008098) 判断命题“若函数 $y = f(x)$ 与 $y = f^{-1}(x)$ 的图像有公共点, 则公共点必在直线 $y = x$ 上”的真假, 并说明理由.

473. (008364) 如果函数 $y = f(x)$ 的图像经过第三、四象限, 那么函数 $y = f^{-1}(x)$ 的图像经过第_____象限.

474. (008366) 函数 $y = \frac{1}{\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(2-x)}}$ 的定义域是_____.

475. (008371) 在同一坐标系内作出的两个函数图像如图所示, 这两个函数为 ().



A. $y = a^x$ 和 $y = \log_a(-x)$

B. $y = a^x$ 和 $y = \log_a x^{-1}$

C. $y = a^{-x}$ 和 $y = \log_a x^{-1}$

D. $y = a^{-x}$ 和 $y = \log_a(-x)$

476. (008378) 已知函数 $f(x) = \log_2(2^x - 1)$.

(1) 求 $f(x)$ 的定义域;

(2) 判断 $f(x)$ 的增减性, 说明理由;

(3) 求 $f^{-1}(x)$.

477. (008387) 已知函数 $y = f(x)$ 的图像过点 $A(1, 2)$, 函数 $y = g(x)$ 的图像与 $y = f(x)$ 的图像关于直线 $y = x$ 对称, 则 $y = g(x)$ 的图像必过点 ().

A. (2, 1)

B. (1, 2)

C. (-2, 1)

D. (-1, 2)

478. (008394) 已知函数 $f(x) = \log_a \frac{x+b}{x-b}$ ($a > 0, b > 0, a \neq 1$).

(1) 求 $f(x)$ 的定义域;

(2) 判断 $f(x)$ 的奇偶性;

(3) 求函数 $y = f^{-1}(x)$ 的解析式.

479. (009485) 若幂函数 $y = x^a$ 的图像经过点 $(3, \sqrt{3})$, 求此幂函数的表达式.

480. (009486) 求下列函数的定义域, 并作出它们的大致图像:

(1) $y = x^{\frac{1}{3}}$;

(2) $y = x^{-\frac{1}{2}}$;

(3) $y = x^{\frac{4}{3}}$.

481. (009487) 若幂函数 $y = x^{-m^2+2m+3}$ (m 为整数) 的定义域为 \mathbf{R} , 求 m 的值.

482. (009492) 求下列函数的定义域:

- (1) $y = 3^x$;
- (2) $y = 3^{\frac{1}{x-2}}$.

483. (009493) 在同一平面直角坐标系中分别作出下列函数的大致图像:

- (1) $y = 4^x$;
- (2) $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$.

484. (009499) 若对数函数 $y = \log_a x$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 的图像经过点 $(4, 2)$, 求此对数函数的表达式.

485. (009500) 求下列函数的定义域:

- (1) $y = \log_2 \frac{2+x}{1-x}$;
- (2) $y = \log_a(4-x^2)$ (常数 $a > 0$ 且 $a \neq 1$).

486. (009501) 在同一平面直角坐标系中作出 $y = \lg x$ 及 $y = \log_{0.1} x$ 的大致图像.

487. (009502) 已知常数 $a > 0$ 且 $a \neq 1$, 假设无论 a 取何值, 函数 $y = \log_a(x-1)$ 的图像恒经过一个定点, 求此点的坐标.

488. (009507) 求下列函数的定义域:

- (1) $y = \sqrt{(x-2)(x+3)}$;
- (2) $y = \frac{1}{1-\sqrt{x-1}}$.

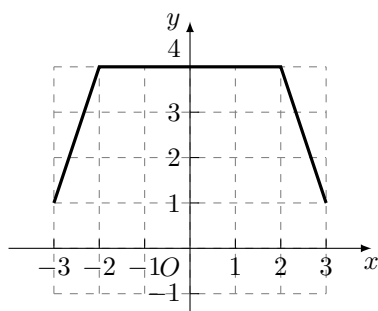
489. (009509) 求下列函数的值域:

- (1) $y = (\lg x)^2 + 1, x \in (0, +\infty)$;
- (2) $y = 3x^2 - 4x + 1, x \in [0, 1]$.

490. (009510) 作下列函数的大致图像:

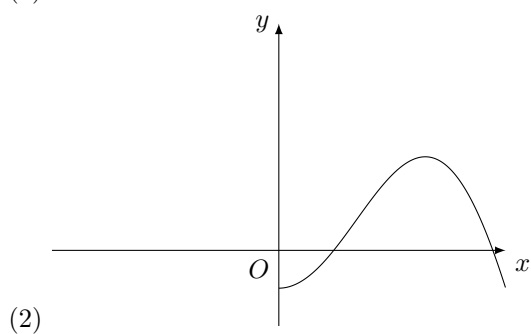
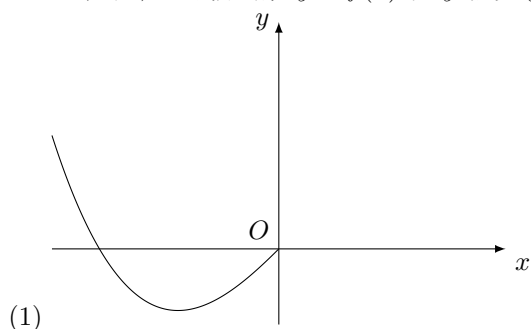
- (1) $y = -|x|$;
- (2) $y = \sqrt{x+2}$;
- (3) $y = \frac{1}{x^2+1}$;
- (4) $y = \frac{2x-1}{x-1}$.

491. (009511) 根据下图的函数图像, 用解析法表示 y 关于 x 的函数.

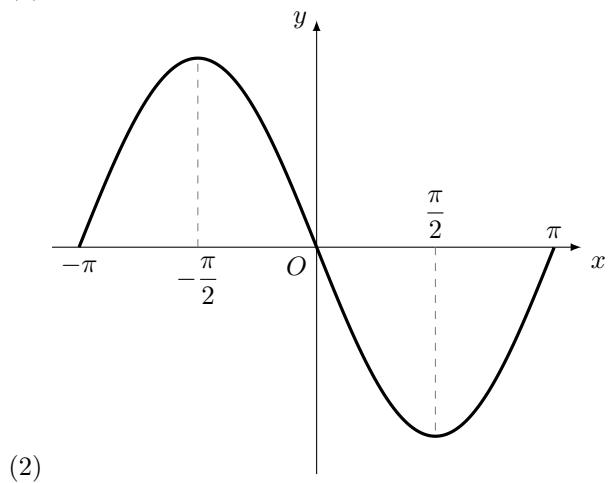
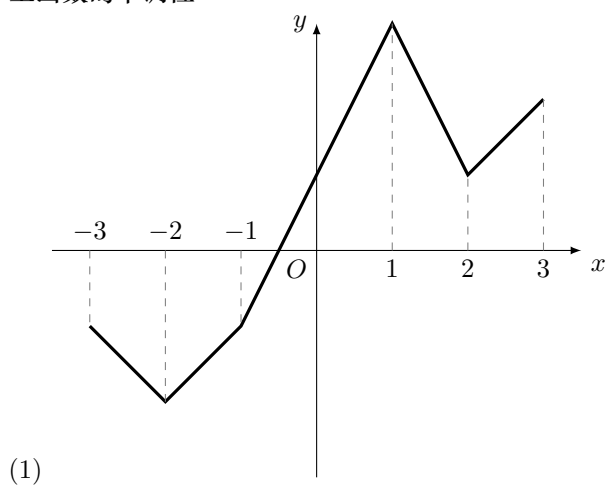


492. (009512) 奇函数的图像是不是一定通过原点? 偶函数的图像是不是一定与 y 轴相交? 请说明理由.

493. (009513) 如图, 已知偶函数 $y = f(x)$ 在 y 轴及 y 轴一侧的部分图像, 作出 $y = f(x)$ 的大致图像.



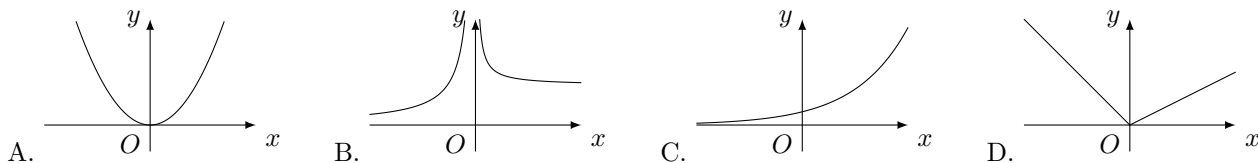
494. (009520) 根据下列函数 $y = f(x)$ 的图像 (包括端点), 分别指出这两个函数的单调区间, 以及在每一个单调区间上函数的单调性.



495. (009531) 对于在区间 $[a, b]$ 上的图像是一段连续曲线的函数 $y = f(x)$, 如果 $f(a) \cdot f(b) > 0$, 那么是否该函数在区间 (a, b) 上一定无零点? 说明理由.

496. (009533) 求函数 $y = x^2 + 2x, x \in [0, +\infty)$ 的反函数的定义域.

497. (009537) 下列各图中, 存在反函数的函数 $y = f(x)$ 的图像只可能是 ().



498. (009908) 借助函数图像, 判断下列导数的正负 (可利用信息技术工具):

(1) $f'(\frac{\pi}{4})$, 其中 $f(x) = \sin x$;

(2) $f'(0)$, 其中 $f(x) = (\frac{1}{2})^x$.

499. (009923) 求函数 $y = x^2 - 6x + 5, x \in [1, 4]$ 的值域.

500. (009995) 设定义在 $[0, +\infty)$ 上的函数 $f(x)$ 的值域为 A_f . 若对任意满足 $f(x) = f(\frac{1}{x+1})$ 的函数 $f(x)$, 集合 $\{y | y = f(x), x \in [0, a]\}$ 总可以取得 A_f 中的所有值, 则实数 a 的取值范围为_____.

501. (010001) 已知 $f(x) = \log_3(x+a) + \log_3(6-x)$.

(1) 若将函数 $y = f(x)$ 的图像向下平移 $m(m > 0)$ 个单位后, 所得的图像经过点 $(3, 0)$ 与点 $(5, 0)$, 求 a 与 m 的值;

(2) 若 $a > -3$ 且 $a \neq 0$, 解关于 x 的不等式 $f(x) \leq f(6-x)$.

502. (010129) 若幂函数 $y = x^a$ 的图像经过点 $(\sqrt[4]{3}, 3)$, 求此幂函数的表达式.

503. (010130) 求下列函数的定义域, 并作出它们的大致图像:

(1) $y = x^{\frac{1}{5}}$;

(2) $y = x^{-2}$;

(3) $y = x^{-\frac{3}{4}}$.

504. (010133) 下列幂函数在区间 $(0, +\infty)$ 上是严格增函数, 且图像关于原点成中心对称的是_____ (请填入全部正确的序号).

① $y = x^{\frac{1}{2}}$; ② $y = x^{\frac{1}{3}}$; ③ $y = x^{\frac{2}{3}}$; ④ $y = x^{-\frac{1}{3}}$.

505. (010134) 作出函数 $y = \frac{x-1}{x+2}$ 的大致图像.

506. (010135) 幂函数 $y = x^{n(n+1)}$ (n 为正整数) 的图像一定经过_____ 象限.

507. (010136) 若幂函数 $y = x^s$ 在 $0 < x < 1$ 时的图像位于直线 $y = x$ 的上方, 则 s 的取值范围是_____.

508. (010138) 写出一个图像经过第一、第二象限但不经过原点的幂函数的表达式.

509. (010141) 求下列函数的定义域:

(1) $y = 2^{\sqrt{3-x}}$;

(2) $y = 0.1^{\frac{1}{x}}$.

510. (010142) 在同一直角坐标系中作出下列函数的大致图像, 并指出这些函数图像间的关系:

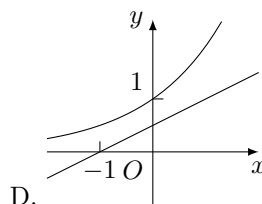
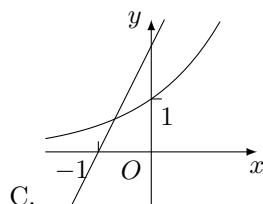
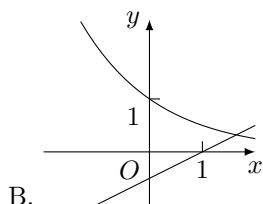
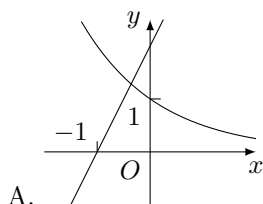
(1) $y = (\frac{3}{2})^x$;

(2) $y = (\frac{2}{3})^x$;

(3) $y = (\frac{2}{3})^x - 1$.

511. (010144) 已知常数 $a > 0$ 且 $a \neq 1$. 假设无论 a 取何值, 函数 $y = a^{2-x}$ 的图像恒经过一个定点, 求此定点的坐标.

512. (010149) 在同一平面直角坐标系中, 指数函数 $y = a^x$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 和一次函数 $y = a(x+1)$ 的图像关系可能是 ().



513. (010154) 若函数 $y = 5^{x+1} + m$ 的图像不经过第二象限, 求实数 m 的取值范围.

514. (010155) 求下列函数的定义域:

(1) $y = \log_a(x+12)$ (常数 $a > 0$ 且 $a \neq 1$);

(2) $y = \log_2 \frac{1}{x^2 - 2x + 5}$.

515. (010156) 已知对数函数 $y = \log_a x$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 的图像经过点 $(3, 2)$. 若点 $P(b, 4)$ 为此函数图像上的点, 求实数 b 的值.

516. (010157) 在同一平面直角坐标系中画出下列函数的图像, 并指出这些函数图像之间的关系.

(1) $y = \log_3 x$;

(2) $y = \log_{\frac{1}{3}} x$;

(3) $y = (\frac{1}{3})^x$.

517. (010158) 已知常数 $a > 0$ 且 $a \neq 1$, 假设无论 a 取何值, 函数 $y = \log_a x - 1$ 的图像恒经过一个定点. 求此点的坐标.

518. (010163) 设常数 $a > 0$ 且 $a \neq 1$, 求函数 $y = \log_a(a - a^x)$ 的定义域.

519. (010168) 求下列函数的定义域:

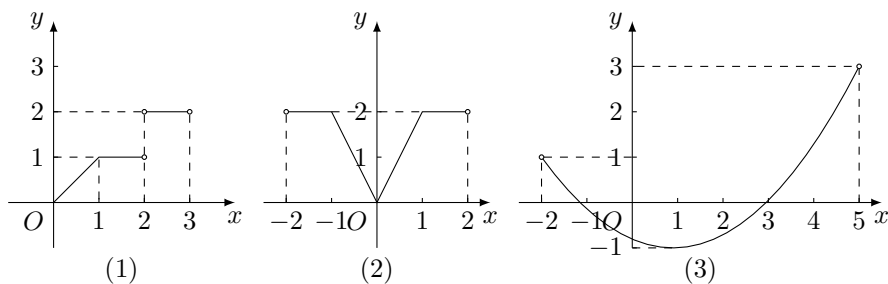
(1) $y = \frac{1}{x^2 + 2x - 3}$;

(2) $y = \sqrt{4 - 3x - x^2}$;

$$(3) y = \sqrt{x-2} + \sqrt{x+3};$$

$$(4) y = \frac{1}{\lg(x+2)} + \frac{1}{\sqrt{5-x}}.$$

520. (010170) 观察下列函数的图像, 并写出它们的值域:



521. (010171) 设 a 是常数, 求下列函数的定义域

$$(1) y = \frac{1}{|x| - a};$$

$$(2) y = \sqrt{x(x-a)}.$$

522. (010173) 若函数 $y = f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , 则 $y = f(x)$ 为奇函数的一个充要条件为 ().

A. $f(0) = 0$

B. 对任意 $x \in \mathbf{R}$, $f(x) = 0$ 都成立

C. 存在某个 $x_0 \in \mathbf{R}$, 使得 $f(x_0) + f(-x_0) = 0$

D. 对任意给定的 $x \in \mathbf{R}$, $f(x) + f(-x) = 0$ 都成立

523. (010178) 证明: 函数 $y = \lg(1-x)$ 在其定义域上是严格减函数.

524. (010185) 作出函数 $y = x^2 - 2|x|$ 的大致图像, 并分别写出它的定义域、奇偶性、单调区间及最小值.

525. (010186) 研究函数 $y = \frac{1}{1+x^2}$ 的定义域、奇偶性、单调性及最大值.

526. (010189) 某企业去年四个季度生产某种型号机器的数量 y (单位: 万台) 与季度 x 的函数关系如下表所示:

$x/\text{季度}$	1	2	3	4
$y/\text{万台}$	10	12	14	16

试写出该函数的定义域, 并作出其大致图像.

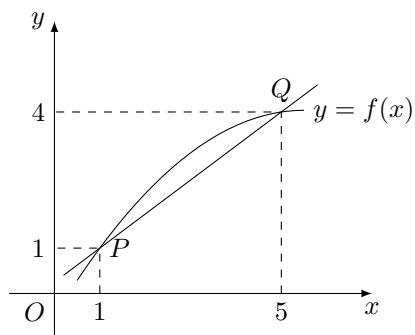
527. (010194) 为分流短途乘客, 减缓轨道交通高峰压力, 某地地铁实行新的计费标准, 其分段计费规则如下: 0 至 6km(含 6km) 票价 3 元; 6 至 16km(含 16km) 票价 4 元; 16km 以上每 6km(不足 6km 时按 6km 计) 票价递增 1 元, 但总票价不超过 8 元.

(1) 试作出票价 y (单位: 元) 关于路程 x (单位: km) 的函数的大致图像;

(2) 某人买了 5 元的车票, 他乘车的路程不能超过多少?

528. (010202) 已知函数 $y = \frac{a}{x+1}$ 的反函数的图像经过点 $(\frac{1}{2}, 1)$, 求实数 a 的值.

529. (010793) 函数 $y = f(x)$ 的图像如图所示.



(1) 求割线 PQ 的斜率;

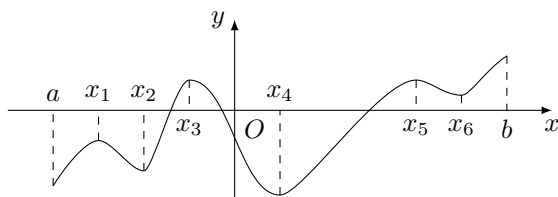
(2) 当点 Q 沿曲线向点 P 运动时, 割线 PQ 的斜率会变大还是变小?

530. (010795) 借助函数图像, 判断下列导数的正负:

(1) $f'(-\frac{\pi}{4})$, 其中 $f(x) = \cos x$;

(2) $f'(3)$, 其中 $f(x) = \ln x$.

531. (010821) 某函数图像如图所示, 它在 $[a, b]$ 上哪一点处取得最大值? 它是极大值点吗? 在哪一点处取得最小值? 它是极小值点吗?



532. (010826) 求函数 $y = -x^3 + 12x - 1$, $x \in [0, 3]$ 的值域.