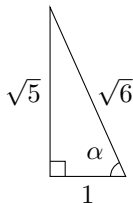


1. 已知 $\cos \alpha = \frac{24}{25}$, 求 $\sin \alpha$. 解答在这里利用“勾股数”, 若 α 在第一象限, 则 $\sin \alpha = \frac{7}{25}$; 若 α 在第四象限, 则 $\sin \alpha = -\frac{7}{25}$.

2. 已知 $\tan \alpha = -\sqrt{5}$, 求 $\cos \alpha$. 解答在这里如图, 若 α 在第二象限, 则 $\cos \alpha = \frac{-1}{\sqrt{6}} = -\frac{\sqrt{6}}{6}$; 若 α 在第四象限, 则 $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$.



3. 已知 $\cos \alpha = m (m \neq 0, m \neq \pm 1)$, 求 α 的其他三角函数值.

解答在这里因为 $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, 故可按 $\sin \alpha$ 的符号划分象限. (1) 若 α 在第一、二象限, 则 $\sec \alpha = \frac{1}{m}$ (倒), $\sin \alpha = \sqrt{1-m^2}$ (平), $\csc \alpha = \frac{1}{\sqrt{1-m^2}}$ (倒), $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sqrt{1-m^2}}{m}$ (商), $\cot \alpha = \frac{m}{\sqrt{1-m^2}}$ (倒). (2) 若 α 在第二、四象限, 则 $\sec \alpha = \frac{1}{m}$, $\sin \alpha = -\sqrt{1-m^2}$, $\csc \alpha = -\frac{1}{\sqrt{1-m^2}}$, $\tan \alpha = -\frac{\sqrt{1-m^2}}{m}$, $\cot \alpha = -\frac{m}{\sqrt{1-m^2}}$.

4. 求证: $\frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x} = \cos^2 x - \sin^2 x$.

解答在这里因为 $\frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x} = \frac{1-\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{1+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \cos^2 x - \sin^2 x$, 左边 = 右边, 所以原式成立.

5. 求证: $\frac{\tan \alpha}{\tan \alpha - \tan \beta} = \frac{\cot \beta}{\cot \beta - \cot \alpha}$.

解答在这里因为 $\frac{\cot \beta}{\cot \beta - \cot \alpha} = \frac{\cot \beta (\tan \alpha \tan \beta)}{(\cot \beta - \cot \alpha)(\tan \alpha \tan \beta)} = \frac{\tan \alpha (\cot \beta \tan \beta)}{\tan \alpha (\cot \beta \tan \beta) - (\cot \alpha \tan \alpha) \tan \beta} = \frac{\tan \alpha}{\tan \alpha - \tan \beta}$, 左边 = 右边, 所以原式成立.

6. 求证: $\sin^2 1^\circ + \sin^2 2^\circ + \cdots + \sin^2 89^\circ = \frac{89}{2}$.

解答在这里因为 $\sin^2 89^\circ = \cos^2 1^\circ$, $\sin^2 88^\circ = \cos^2 2^\circ$, \cdots , $\sin^2 46^\circ = \cos^2 44^\circ$, 所以左边 = $(\sin^2 1^\circ + \cos^2 1^\circ) + (\sin^2 2^\circ + \cos^2 2^\circ) + \cdots + (\sin^2 44^\circ + \cos^2 44^\circ) + \sin^2 45^\circ = 44 + \frac{1}{2} = \frac{89}{2}$. 所以原式成立.

7. 求证 $\frac{1+2\sin \alpha \cos \alpha \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{1-\tan \alpha} = \frac{1}{\tan \alpha}$.

解答在这里因为左边 = $\frac{\sin^2 \alpha + 2\sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{(\cos \alpha + \sin \alpha)(\cos \alpha - \sin \alpha)} = \frac{(\cos \alpha + \sin \alpha)^2}{(\cos \alpha + \sin \alpha)(\cos \alpha - \sin \alpha)} = \frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} = \frac{1+\tan \alpha}{1-\tan \alpha}$, 所以原式成立.

8. 求证 $\frac{1+\sec \alpha + \tan \alpha}{1+\sec \alpha - \tan \alpha} = \frac{1+\sin \alpha}{\cos \alpha}$. 解答在这里因为 $\frac{1+\sec \alpha + \tan \alpha}{1+\sec \alpha - \tan \alpha} = \frac{(\sec^2 \alpha - \tan^2 \alpha) + (\sec \alpha + \tan \alpha)}{\sec \alpha + 1 - \tan \alpha} = \frac{(\sec \alpha + \tan \alpha)(\sec \alpha - \tan \alpha) + (\sec \alpha + \tan \alpha)}{\sec \alpha + 1 - \tan \alpha} = \frac{(\sec \alpha + \tan \alpha)(\sec \alpha - \tan \alpha + 1)}{\sec \alpha + 1 - \tan \alpha} = \sec \alpha + \tan \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1+\sin \alpha}{\cos \alpha}$, 所以原式成立.

9. 已知 $\tan \theta = -3$, 求下列各式的值:

(1) $3 \sin \theta + \cos \theta$;

(2) $\sin^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta + 1$.

解答在这里 (1) $3 \sin \theta + \cos \theta = \cos \theta (3 \tan \theta + 1) = \pm \frac{1}{\sqrt{10}}(-9 + 1) = \pm \frac{8}{\sqrt{10}} = \pm \frac{4}{5}\sqrt{10}$. (2) $\sin^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta + 1 = \frac{2 \sin^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta} = \frac{2 \tan^2 \theta - 2 \tan \theta + 1}{\tan^2 \theta + 1} = \frac{18 + 6 + 1}{9 + 1} = \frac{5}{2}$.

10. 在① 160° , ② 480° , ③ -960° , ④ -1600° 这四个角中, 属于第二象限的角有 ().

A. ①

B. ①②

C. ①②③

D. ①②③④

11. 集合 $M = \{\alpha | \alpha = k \cdot 90^\circ, k \in \mathbf{N}\}$ 中各角的终边都在 ().

A. x 轴的正半轴上

B. y 轴的正半轴上

C. x 轴或 y 轴上

D. x 轴正半轴或 y 轴的正半轴上

12. 若 α 是第四象限的角, 则 $\pi - \alpha$ 是 ().

A. 第一象限的角

B. 第二象限的角

C. 第三象限的角

D. 第四象限的角

13. 若一圆弧长等于其所在圆的内接正三角形的边长, 则其圆心角的弧度数为 ().

A. $\frac{\pi}{3}$

B. $\frac{2}{3}\pi$

C. $\sqrt{3}$

D. 2

14. 若 α 和 β 的终边关于 y 轴对称, 则必有 ().

A. $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$

B. $\alpha + \beta = (2k + \frac{1}{2})\pi (k \in \mathbf{Z})$

C. $\alpha + \beta = 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$

D. $\alpha + \beta = (2k + 1)\pi (k \in \mathbf{Z})$

15. 若 $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$, 则 $\alpha - \beta$ 的取值范围是 ().

A. $(-\frac{\pi}{2}, 0)$

B. $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

C. $(-\pi, 0)$

D. $(-\pi, \pi)$

16. 集合 $M = \{x | x = \frac{k\pi}{2} \pm \frac{\pi}{4}, k \in \mathbf{Z}\}$ 与 $P = \{x | x = \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbf{Z}\}$ 之间的关系是 ().

A. $M \subset P$

B. $M \supset P$

C. $M = P$

D. $M \cap P = \emptyset$

17. 与 -45° 角终边相同的角的集合是_____.

18. 若 α 是第四象限的角, 则 α 的取值范围是_____.

19. 终边落在 x 轴负半轴上的角的集合为_____.

20. 终边落在第一、三象限角平分线上的角的集合为_____.

21. 若角 α 与 β 的终边是互为反向延长线, 则 α, β 之间满足关系式是_____.

22. 若角 α 的终边和函数 $y = -|x|$ 的图像重合, 则 α 的集合是_____.

23. 若 α 是第二象限的角, 则 $\frac{\alpha}{2}$ 是第_____象限的角, 2α 是第_____象限的角.

24. 若 $\alpha = -4$, 则 α 是第_____象限的角.
25. 在 -720° 与 720° 之间, 与 60° 角终边相同的角是_____.
26. 设角 α 的终边与 $\frac{7}{5}\pi$ 的终边关于 y 轴对称, 且 $\alpha \in (-2\pi, 2\pi)$, 则 $\alpha =$ _____.
27. 在扇形 OAB 中, 已知半径 $OA = 8\text{cm}$, $\widehat{AB} = 12\text{cm}$, 则圆心角 $\angle AOB =$ _____弧度, 扇形 OAB 的面积为_____ cm^2 .
28. 若 3 弧度的圆心角所对的弧长为 9cm , 则此圆心角所夹的扇形面积为_____ cm^2 .
29. 若圆中的一条弦长等于其半径 r , 则此弦和劣弧所组成的弓形的面积等于_____.
30. 若 1 弧度的圆心角所对的弦长为 2, 则此圆心角所夹的扇形的面积等于_____.
31. 若集合 $A = \{x | k\pi + \frac{\pi}{3} \leq x < k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\}$, $B = \{x | 4 - x^2 \geq 0\}$, 则 $A \cap B =$ _____.
32. 已知扇形的周长为 30cm , 当它的半径和圆心角各取什么值时, 扇形的面积最大? 最大面积是多少?
33. 已知一扇形的圆心角是 120° , 求此扇形面积与其内切圆面积之比.
34. 在 1 时 15 分时, 时针和分针所成的最小正角是多少弧度?
35. 若角 α 的终边落在直线 $y = 2x$ 上, 则 $\sin \alpha$ 的值等于 ().
- A. $\pm \frac{1}{5}$ B. $\pm \frac{\sqrt{5}}{5}$ C. $\pm \frac{2}{5}\sqrt{5}$ D. $\pm \frac{1}{2}$
36. 若点 $P(3, y)$ 在角 α 的终边上, 且满足 $y < 0$, $\cos \alpha = \frac{3}{5}$, 则 $\tan \alpha$ 的值等于 ().
- A. $-\frac{3}{4}$ B. $\frac{4}{3}$ C. $\frac{3}{4}$ D. $-\frac{4}{3}$
37. 若三角形的两内角 α, β 满足 $\sin \alpha \cdot \cos \beta < 0$, 则此三角形的形状 ().
- A. 是锐角三角形 B. 是钝角三角形 C. 是直角三角形 D. 不能确定
38. 若 α 是第三象限角, 则下列各式中不成立的是 ().
- A. $\sin \alpha + \cos \alpha < 0$ B. $\tan \alpha - \sin \alpha < 0$ C. $\cos \alpha - \cot \alpha < 0$ D. $\cot \alpha \cdot \csc \alpha < 0$
39. 下列四个命题中, 正确的是 ().
- A. 终边相同的角的三角函数值相等
- B. $\{\alpha | \alpha = k\pi + \frac{\pi}{6}, k \in \mathbf{Z}\} \neq \{\beta | \beta = -k\pi + \frac{\pi}{6}, k \in \mathbf{Z}\}$
- C. 若 α 是第二象限角, 则 $\sin 2\alpha < 0$
- D. 第四象限的角可表示为 $\{\alpha | 2k\pi + \frac{3}{2}\pi < \alpha < 2k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$
40. 若 θ 是第三象限角. 且 $\cos \frac{\theta}{2} < 0$. 则 θ 是 ().
- A. 第一象限角 B. 第二象限角 C. 第三象限角 D. 第四象限角

41. 若 $(\frac{1}{2})^{\sin 2\theta} < 1$, 则 θ 是 ().
- A. 第一或第二象限角 B. 第二或第四象限角 C. 第一或第三象限角 D. 第二或第三象限角
42. 直角坐标平面内, 终边过点 $(1, -\sqrt{3})$ 的所有角组成的集合可表示成_____.
43. 若角 α 的终边上有一点 $P(-3, a)$, 且 $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$, 则 $a =$ _____.
44. 若点 $P(-\sqrt{3}, m)$ 是角 θ 终边上一点, 且 $\sin \theta = \frac{\sqrt{13}}{13}$, 则 $m =$ _____.
45. 若点 $P(-\sqrt{2}, -\sqrt{3})$ 在角 α 的终边上, 则 $\sin \alpha - \cos \alpha =$ _____.
46. $\frac{\sin x}{|\sin x|} + \frac{|\cos x|}{\cos x} + \frac{\tan x}{|\tan x|} + \frac{|\cot x|}{\cot x}$ 的取值范围是_____.
47. 若 $\sin \alpha \cdot \cos \alpha > 0$, 则 α 的取值范围 (用区间表示) 是_____.
48. 若 x 为三角形的内角, 则当 $x =$ _____ 时, $\frac{\sin \frac{x}{2}}{1 - \tan x}$ 无意义.
49. 若函数 $f(x)$ 的定义域是 $[0, 1]$, 则 $f(\sin x)$ 的定义域是_____.
50. 函数 $y = \sqrt{\cos x}$ 的定义域是_____.
51. 函数 $y = \sqrt{-\cot x} + \lg \cos x$ 的定义域是_____.
52. 函数 $y = \sqrt{\sin x} + \sqrt{-\tan x}$ 的定义域是_____.
53. 若实数 α, β 满足 $|\cos \alpha - \cos \beta| = |\cos \alpha| + |\cos \beta|$, 且 $\alpha \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, 则化简 $\sqrt{(\cos \alpha - \cos \beta)^2}$ 结果是 ().
- A. $\cos \alpha - \cos \beta$ B. $|\cos \alpha| - |\cos \beta|$ C. $\cos \beta - \cos \alpha$ D. $|\cos \beta| - |\cos \alpha|$
54. 已知角 α 终边上一点 P 的坐标是 $(5a, 12a)(a < 0)$, 求角 α 的各三角函数值. 已知角 α 终边上一点 P 与 x 轴的距离和与 y 轴的距离之比为 $4:3$, 且 $\cos \alpha < 0$. 求 $\sin \alpha$ 和 $\tan \alpha$.
55. 求函数 $y = \sqrt{\sin(\cos x)}$ 的定义域.
56. 求函数 $y = \sqrt{\cos(\sin x)}$ 的定义域.
57. 下列四个命题中. 能够成立的是 ().
- A. $\sin \alpha = \frac{1}{2}$ 且 $\cos \alpha = \frac{1}{2}$ B. $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ 且 $\csc \alpha = 2$
- C. $\sin \alpha = 0$ 且 $\cos \alpha = -1$ D. $\cos \alpha = \frac{1}{2}$ 且 $\sec \alpha = -2$
58. 已知 $\sin \alpha = \frac{4}{5}$, 且 α 是第二象限的角, 那么 $\tan \alpha$ 的值等于 ().
- A. $-\frac{3}{4}$ B. $-\frac{4}{3}$ C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{4}{3}$
59. 若 $1 + \sin \theta \sqrt{1 - \cos^2 \theta} + \cos \theta \sqrt{1 - \sin^2 \theta} = 0$. 则 θ 的取值范围是 ().
- A. 第三象限角 B. 第四象限角
- C. $2k\pi \leq \theta \leq 2k\pi + \frac{3}{2}\pi (k \in \mathbf{Z})$ D. $2k\pi + \frac{3}{2}\pi \leq \theta \leq 2k\pi + 2\pi (k \in \mathbf{Z})$

60. 若 α 是二角形的一个内角, 且 $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{2}{3}$, 则这个三角形的形状是 ().
- A. 锐角三角形 B. 钝角三角形 C. 不等腰的直角三角形 D. 等腰直角三角形
61. 化简 $(\frac{1}{\sin \alpha} + \frac{1}{\tan \alpha})(1 - \cos \alpha)$ 的结果是 ().
- A. $\sin \alpha$ B. $\cos \alpha$ C. $1 + \sin \alpha$ D. $1 + \cos \alpha$
62. 若 $\theta \neq \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$, 则 $\frac{\sin \theta + \tan \theta}{\cos \theta + \cot \theta}$ ().
- A. 恒取正值 B. 恒取负值 C. 恒取非正值 D. 恒取非负值
63. 若 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, 且 $\lg(1 + \cos \alpha) = m$, $\lg \frac{1}{1 - \cos \alpha} = n$, 则 $\lg \sin \alpha =$ 的值等于 ().
- A. $m + \frac{1}{n}$ B. $m - n$ C. $\frac{1}{2}(m + \frac{1}{n})$ D. $\frac{1}{2}(m - n)$
64. 若 $\frac{\sin^2 \theta + 4}{\cos \theta + 1} = 2$, 则 $(\cos \theta + 3)(\sin \theta + 1)$ 的值是 ().
- A. 6 B. 4 C. 2 D. 0
65. 若 $\sin \theta \cdot \cos \theta < 0$, $|\cos \theta| = \cos \theta$, 则点 $P(\tan \theta, \sec \theta)$ 一定在 ().
- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限
66. 若 $\sqrt{\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}} = \tan x - \sec x$, 则 x 的取值范围是 ().
- A. $2k\pi + \frac{\pi}{2} < x < 2k\pi + \frac{3\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$ B. $k\pi + \frac{\pi}{2} < x < k\pi + \frac{3\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$
- C. $2k\pi < x < 2k\pi + \pi (k \in \mathbf{Z})$ D. $2k\pi - \frac{\pi}{2} < x < 2k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$
67. 若 $\alpha \in (0, 2\pi)$, 则适合 $\sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}} - \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} = 2 \cot \alpha$ 的角 α 的集合是 ().
- A. $\{\alpha | 0 < \alpha < \pi\}$ B. $\{\alpha | 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \text{ 或 } \frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi\}$
- C. $\{\alpha | 0 < \alpha < \pi \text{ 或 } \frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi\}$ D. $\{\alpha | 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \text{ 或 } \frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi\}$
68. 若角 α 的终边过点 $(1, \tan \theta)$, 且 $\theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, 则 $\sin \alpha =$ _____.
69. 若 $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{1}{3}$, 则 $\sin \alpha \cos \alpha =$ _____.
70. 化简 $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha \sin^2 \beta + \cos^2 \alpha \cos^2 \beta =$ _____.
71. 化简 $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta - \sin^2 \alpha \sin^2 \beta + \cos^2 \alpha \cos^2 \beta =$ _____.
72. 化简 $\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha + 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha =$ _____.
73. 若 θ 是第二象限角, 且 $\sin \theta = \frac{m-3}{m+5}$, $\cos \theta = \frac{1-2m}{m+5}$, 则 $m =$ _____.
74. 计算: $\tan \alpha(1 - \cot^2 \alpha) + \cot \alpha(1 - \tan^2 \alpha) =$ _____.
75. 计算: $(\sec^2 \beta - 1)(1 - \csc^2 \beta) + \tan \beta \cot \beta =$ _____.

76. 计算: $(\sec \alpha - \cos \alpha)(\csc \alpha - \sin \alpha)(\tan \alpha + \cot \alpha) =$ _____.

77. 若 $\alpha \in (-\frac{4}{3}\pi - \frac{5}{4}\pi)$, 则 $\frac{\sin \alpha}{|\sin \alpha|} + \frac{|\cos \alpha|}{\cos \alpha} + \tan \alpha |\cot \alpha| =$ _____.

78. 若 θ 是第四象限的角, 则 $\frac{1}{\cos \theta \sqrt{1 + \tan^2 \theta}} + \frac{2 \cot \theta}{\sqrt{\frac{1}{\sin^2 \theta} - 1}} =$ _____.

79. 若 $\cot \theta + \csc \theta = 5$, 则 $\sin \theta =$ _____.

80. 若 $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 则 $\tan \alpha + \cot \alpha =$ _____.

81. 若 $\cot \alpha + \tan \alpha = \frac{25}{12}$, 则 $\tan \alpha - \cot \alpha =$ _____.

82. 若 $\tan x = 2$, 则 $\frac{1}{1 - \sin x} + \frac{1}{1 + \sin x} =$ _____; $\frac{1}{(\sin x - 3 \cos x)(\cos x - \sin x)} =$ _____; $\frac{1}{4} \sin^2 x + \frac{2}{3} \cos^2 x =$ _____.

83. 若 $\frac{2 \sin^2 \alpha - 3 \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} = -4$, 则 $\tan \alpha =$ _____.

84. 若 $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = \frac{8}{5}$, 则 $\tan \alpha =$ _____.

85. 若 $\tan \alpha$ 和 $\tan \beta$ 是关于 x 的方程 $x^2 - px + q = 0$ 的两根, $\cot \alpha$ 和 $\cot \beta$ 是关于 x 的方程 $x^2 - rx + s = 0$ 的两根, 则 rs 等于 ().

A. pq

B. $\frac{1}{pq}$

C. $\frac{p}{q^2}$

D. $\frac{q}{p^2}$

86. 若 $\sin x = \frac{a-b}{a+b}$ ($0 < a < b$), 则 $\sqrt{\cot^2 x - \cos^2 x}$ 的结果是 ().

A. $\frac{4ab}{a^2 - b^2}$

B. $-\frac{4ab}{a^2 - b^2}$

C. $\frac{4ab}{a^2 + b^2}$

D. $-\frac{4ab}{a^2 + b^2}$

87. 若 α 在第一象限, 且 $\frac{1 + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha} = 3 + 2\sqrt{2}$, 则 $\cos \alpha$ 的值是 ().

A. $\frac{\sqrt{6}}{2}$

B. $\frac{\sqrt{6}}{3}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

88. 求 $(1 + \cot \alpha - \csc \alpha)(1 + \tan \alpha + \sec \alpha)$ 的值.

89. 求 $\frac{1 - \sin^6 \alpha - \cos^6 \alpha}{\sin^2 \alpha - \sin^4 \alpha}$ 的值.

90. 求 $\frac{1 - \sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha}{1 - \sin^6 \alpha - \cos^6 \alpha}$ 的值.

91. 求证: $\frac{\tan \alpha - \cot \alpha}{\sec \alpha - \csc \alpha} = \sin \alpha + \cos \alpha$.

92. 求证: $\frac{\sin^2 \alpha}{1 + \cot \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{1 + \tan \alpha} = 1 - \sin \alpha \cos \alpha$.

93. 求证: $(\frac{\sin \theta + \tan \theta}{\csc \theta + \cot \theta})^2 = \frac{\sin^2 \theta + \tan^2 \theta}{\csc^2 \theta + \cot^2 \theta}$.

94. 利用“1”的代换证明: $\frac{1 - 2 \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} = \tan \alpha - \cot \alpha$.

95. 利用“1”的代换证明: $\frac{\cot \alpha + \csc \alpha - 1}{\cot \alpha - \csc \alpha + 1} = \cot \alpha + \csc \alpha$.
96. 利用“1”的代换证明: $\tan \alpha \cdot \frac{1 - \sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \cot \alpha \cdot \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \sin \alpha}$.
97. 已知 $\sin \theta + \cos \theta = \sqrt{2}$, 求 $\sin \theta - \cos \theta$ 的值.
98. 已知 $\sin \theta - \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{3} (0 < \theta < \frac{\pi}{2})$, 求 $\sin \theta + \cos \theta$ 的值.
99. 已知 $\sin \theta + m \cos \theta = n$, 求 $m \sin \theta - \cos \theta$ 的值.
100. 已知 $\sin \theta + \sin^2 \theta = 1$, 求 $\cos^2 \theta + \cos^4 \theta = 1$ 的值.
101. 已知 $\cos A = \cos \theta \cdot \sin C$, $\cos B = \sin \theta \cdot \sin C (C \neq k\pi, k \in \mathbf{Z})$, 求 $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C$ 的值.
102. 已知 $\tan \theta = \sqrt{\frac{1-a}{a}} (0 < a < 1)$, 求 $\frac{\sin^2 \theta}{a + \cos \theta} + \frac{\sin^2 \theta}{a - \cos \theta}$ 的值.
103. 已知锐角 θ 满足 $\log_{(\tan \theta + \cot \theta)} \sin \theta = -\frac{3}{4}$, 求 $\log_{\tan \theta} \cos \theta$ 的值.
104. 若 $\sin(\pi + \alpha) = -\frac{3}{5}$, 则 ().
 A. $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ B. $\tan \alpha = \frac{3}{4}$ C. $\sec \alpha = -\frac{5}{4}$ D. $\sin(\pi - \alpha) = \frac{3}{5}$
105. 若 $4\pi < \alpha < 5\pi$, $\cos \alpha = -\frac{1}{3}$, 则 $\tan \alpha$ 的值为 ().
 A. $-2\sqrt{2}$ B. $\pm 2\sqrt{2}$ C. $\pm \frac{\sqrt{2}}{4}$ D. $-\frac{\sqrt{2}}{4}$
106. 下列各式正确的是 ().
 A. $\cos^3(-\alpha - \pi) = \cos^3 \alpha$ B. $\sin(\alpha - 3\pi) = \sin \alpha$
 C. $\sec(3\pi - \alpha) = \frac{1}{\cos \alpha}$ D. $-\cot(5\pi - 2\alpha) = \cot 2\alpha$
107. 若 α, β, γ 是一个三角形的三个内角, 则在① $\sin(\alpha + \beta) - \sin \gamma$, ② $\cos(\alpha + \beta) + \cos \gamma$, ③ $\tan \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \tan \frac{\gamma}{2}$, ④ $\tan(\alpha + \beta) - \tan \gamma$ 这四个式子中, 其值为常数的有 ().
 A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个
108. 函数 $y = \cos(\tan x)$ ().
 A. 是奇函数, 但不是偶函数 B. 是偶函数, 但不是奇函数
 C. 既不是奇函数, 也不是偶函数 D. 奇偶性无法确定
109. 若函数 $f(x) = a \sin x + b \tan x + 1$ 满足 $f(5) = 7$, 则 $f(-5)$ 的值等于 ().
 A. 5 B. -5 C. 6 D. -6
110. 化简 $\tan(\frac{k\pi}{2} + \alpha) (k \in \mathbf{Z})$ 的结果是 ().
 A. $\tan \alpha$ B. $\pm \tan \alpha$ C. $\tan \alpha$ 或 $-\cot \alpha$ D. $\tan \alpha$ 或 $\cot \alpha$
111. 计算: $\sin^2 20^\circ + \sin^2 70^\circ - \cos^2 20^\circ \cdot \cot^2 70^\circ \cdot \csc^2 20^\circ =$ _____.

112. 计算: $\tan 1^\circ \cdot \tan 2^\circ \cdot \tan 3^\circ \cdots \tan 87^\circ \cdot \tan 88^\circ \cdot \tan 89^\circ =$ _____.

113. 计算: $\sin^2(42^\circ + \alpha) + \cot(25^\circ + \beta) \cdot \cot(\beta - 65^\circ) + \sin^2(48^\circ - \alpha) =$ _____.

114. 计算: $\log_4 \sin \frac{3}{4}\pi + \log_9 \tan(-\frac{5\pi}{6}) =$ _____.

115. 计算: $\tan \frac{\pi}{5} + \tan \frac{2\pi}{5} + \tan \frac{3\pi}{5} + \tan \frac{4\pi}{5} =$ _____.

116. 若锐角 α 终边上一点 A 的坐标为 $(2 \sin 3, -2 \cos 3)$, 则角 α 的弧度数为_____.

117. 化简: $\frac{\sin(\pi + \alpha) \cos(\pi - \alpha) \tan(-\alpha + 3\pi)}{\sin(5\pi - \alpha) \tan(8\pi - \alpha) \cot(\alpha - 3\pi)}$ _____.

118. 化简: $\frac{\sin(\theta - \pi) \cos(\theta - \frac{3}{2}\pi) \cot(-\theta - \pi)}{\tan(\theta + 3\pi) \sec(-\theta - 2\pi) \csc(\frac{\pi}{2} - \theta)}$ _____.

119. 若三角形中的两内角 α, β 满足 $\sin 2\alpha = \sin 2\beta$, 则这个三角形的形状 ().

A. 只可能是等腰三角形. 不可能是直角三角形

B. 只可能是直角三角形, 不可能是等腰三角形

C. 只可能是等腰直角三角形

D. 既可能是等腰三角形, 也可能是直角三角形

120. 若函数 $f(x)$ 满足, $f(\cos x) = \frac{x}{2} (0 \leq x \leq \pi)$, 则 $f(-\frac{1}{2})$ 等于 ().

A. $\cos \frac{1}{2}$

B. $\frac{\pi}{3}$

C. $\frac{\pi}{4}$

D. $\frac{\pi}{2}$

121. 若函数 $f(x) = a \sin(\pi x + \alpha) + b \cos(\pi x + \beta)$, 其中 a, b, α, β 都是非零实数, 且满足 $f(1997) = -1$, 则 $f(1998)$ 等于 ().

A. -1

B. 0

C. 1

D. 2

122. 已知 $\cos(\frac{\pi}{6} - \theta) = a (|a| \leq 1)$, 求 $\cos(\frac{5\pi}{6} + \theta)$ 和 $\sin(\frac{2\pi}{3} - \theta)$ 的值.

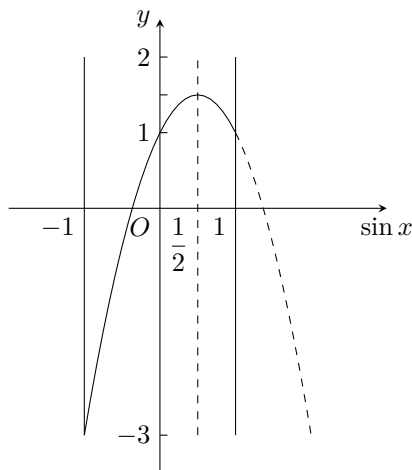
123. 已知 $\tan(\pi - \alpha) = a^2$, $|\cos(\pi - \alpha)| = -\cos \alpha$, 求 $\sec(\pi + \alpha)$ 的值.

124. 求满足 $\sin(\frac{\pi}{4} - \alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\alpha \in (0, 2\pi)$ 的角 α .

125. 求 $\frac{\sin(k\pi - x)}{\sin x} - \frac{\cos x}{\cos(k\pi - x)} + \frac{\tan(k\pi - x)}{\tan x} - \frac{\cot x}{\cot(k\pi - x)} (k \in \mathbf{Z})$ 的取值范围.

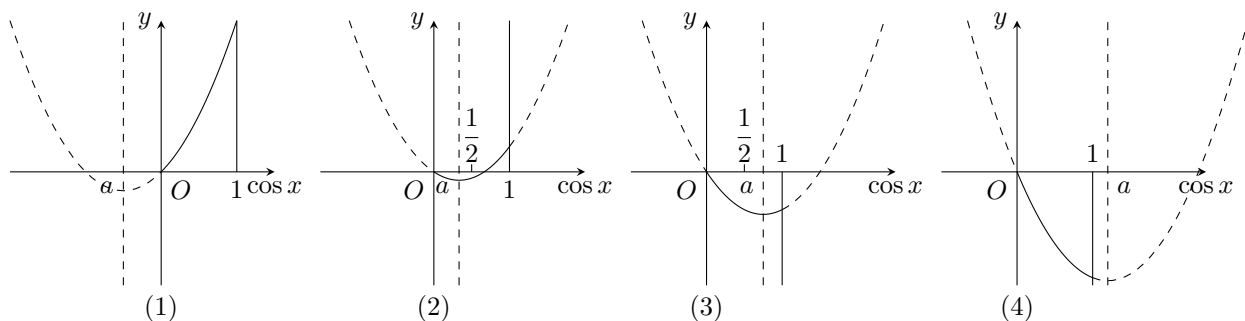
126. 求函数 $y = -2 \sin^2 x + 2 \sin x + 1$ 的值域.

解答在这里 $y = -2(\sin x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{2}$. 考虑到 $-1 \leq \sin x \leq 1$, 因此, 若以 $\sin x$ 为横轴, 则函数图像应足抛物线夹在两直线 $\sin x = \pm 1$ 之间的一段 (如图). 观察图像易知 $y_{\max} = \frac{3}{2}$, $y_{\min} = -3$ 所以函数的值域是 $-3 \leq y \leq \frac{3}{2}$.



127. 已知 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, 求函数 $y = \cos^2 x - 2a \cos x$ 的最大值 $M(a)$ 与最小值 $m(a)$.

解答在这里函数 $y = f(\cos x) = (\cos x - a)^2 - a^2$, 又 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, 所以 $0 \leq \cos x \leq 1$, 画出函数的图像如下:



(1) 如图 (1), 此时 $a < 0$, $m(a) = f(0) = 0$, $M(a) = f(1) = 1 - 2a$.

(2) 如图 (2), 此时 $0 \leq a \leq \frac{1}{2}$, $m(a) = f(a) = -a^2$, $M(a) = f(1) = 1 - 2a$.

(3) 如图 (3), 此时 $\frac{1}{2} \leq a < 1$, $m(a) = f(a) = -a^2$, $M(a) = f(0) = 0$.

(4) 如图 (4), 此时 $a \geq 1$, $m(a) = f(1) = 1 - 2a$, $M(a) = f(0) = 0$.

综上所述, 可得 $M(a) = \begin{cases} 1 - 2a, & a < \frac{1}{2}, \\ 0, & a \geq \frac{1}{2}, \end{cases} m(a) = \begin{cases} 0, & a < 0, \\ -a^2, & 0 \leq a < 1, \\ 1 - 2a, & a \geq 1. \end{cases}$

128. 求函数 $y = \frac{2 \sin x - 1}{\sin x + 3}$ 的值域.

解答在这里由已知, 得 $\sin x = \frac{3y+1}{2-y}$, 而 $|\sin x| \leq 1$, 故 $|\frac{3y+1}{2-y}| \leq 1$, 即 $8y^2 + 10y - 3 \leq 0$, $(4y-1)(2y+3) \leq 0$.

所以函数的值域是 $[-\frac{3}{2}, \frac{1}{4}]$.

129. 求函数 $y = \frac{\sec^2 x - \tan x}{\sec^2 x + \tan x}$ 的值域.

解答在这里因为 $\sec^2 x = \tan^2 x + 1$, 故原式时变形为 $(y-1)\tan^2 x + (y+1)\tan x + (y-1) = 0$.

(1) 若 $y = 1$, 则 $\tan x = 0$.

(2) 若 $y \neq 1$, 则 $\tan x \in \mathbf{R}$, 得 $\Delta = (y+1)^2 - 4(y-1)^2 \geq 0$, 于是 $\frac{1}{3} \leq y \leq 3$ 且 $y \neq 1$.

综合 (1), (2) 知, 函数的值域是 $[\frac{1}{3}, 3]$.

130. 解不等式 $\sin x \leq \frac{1}{2}$.

解答在这里在单位圆内绘出 $\sin x = \frac{1}{2}$ 的正弦线 ***** (如图 4), 并结合 $y = \sin x$ 的单调性, 可得 $2k\pi - \frac{7\pi}{6} \leq x \leq 2k\pi + \frac{\pi}{6} (k \in \mathbf{Z})$. _____ (图 4) _____ (图 5)

131. 解不等式 $|\cos 2x| \leq \frac{1}{2}$. 解原不等式为 $-\frac{1}{2} \leq \cos 2x \leq \frac{1}{2}$. 由图 5, 可得 $k\pi + \frac{\pi}{3} \leq 2x \leq k\pi + \frac{2\pi}{3}$, 于是 $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{3} (k \in \mathbf{Z})$.

132. 解不等式 $\tan \frac{x}{2} \geq \sqrt{3}$. 解由图 6, 可得 $k\pi + \frac{\pi}{3} \leq \frac{x}{2} \leq k\pi + \frac{\pi}{2}$, 所以 $2k\pi + \frac{2\pi}{3} \leq x < 2k\pi + \pi (k \in \mathbf{Z})$. (图 6)
注意有关 $\sin x, \cos x, \tan x$ 等的简单不等式, 通常可在单位圆中利用三角函数线的知识求解.

133. 函数图像的“平移”和坐标的“伸缩” (1) 图像的“平移”. 容易证明, 函数 $y = f(x - m) (m > 0)$ 的图像可由函数 $y = f(x)$ 的图像向右平移 m 个单位长度得到, 而函数 $y = f(x + m) (m > 0)$ 的图像可由函数 $y = f(x)$ 的图像向左平移 m 个单位长度得到.

134. 在同一个坐标系内, 为了得到 $y = 3\sin(2x + \frac{\pi}{4})$ 的图像, 只需将 $y = 3\cos 2x$ 的图像 ().

- A. 向左平移 $\frac{\pi}{4}$ B. 向右平移 $\frac{\pi}{4}$ C. 向左平移 $\frac{\pi}{8}$ D. 向右平移 $\frac{\pi}{8}$

解令 $f(x) = 3\cos 2x$, 则 $\begin{cases} f(x - m) = 3\cos 2(x - m) = 3\cos(2x - 2m) = 3\cos(2m - 2x) = 3\sin[\frac{\pi}{2} - (2m - 2x)] \\ = 3\sin(2x + \frac{\pi}{2} - 2m). \end{cases}$

按题意应有 $3\sin(2x + \frac{\pi}{2} - 2m) = 3\sin(2x + \frac{\pi}{4})$. 令 $\frac{\pi}{2} - 2m = \frac{\pi}{4}$, 得 $m = \frac{\pi}{8}$, 故选 D. 也可以这样解: 因为 $f(x) = 3\sin(2x + \frac{\pi}{4}) = 3\cos[(2x + \frac{\pi}{4}) - \frac{\pi}{2}] = 3\cos(2x - \frac{\pi}{4}) = 3\cos[2(x - \frac{\pi}{8})] = f(x - \frac{\pi}{8})$, 所以选 D. (2) 坐标的“伸缩”. 容易证明, 函数 $y = f(\frac{x}{k}) (k > 0)$ 的图像, 可由将 $y = f(x)$ 图像上每一点的横坐标伸长到原来的 k 倍 (纵坐标不变) 而得到.

135. 将函数 $y = \cos x$ 图像上每一点的纵坐标保持不变, 横坐标缩小为原来的一半, 再将所得图像沿 x 轴向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度, 则与所得新图像对应的函数的解析式为 ().

- A. $y = \cos(2x + \frac{\pi}{4})$ B. $y = \cos(2x - \frac{\pi}{4})$ C. $y = \sin 2x$ D. $y = -\sin 2x$

解横坐标缩小为原来的一半, 可理解为伸长到原来的 $\frac{1}{2}$, 故先得到函数 $y = \cos \frac{x}{\frac{1}{2}} = \cos 2x$. 再向左平移 $\frac{\pi}{4}$

后, 得 $y = \cos 2(x + \frac{\pi}{4})$, 即 $y = \cos(2x + \frac{\pi}{2}) = -\sin 2x$, 故选 D.

136. 函数 $y = 3\sin x$ 的图像经过怎样的变换后, 可得到 $y = 3\sin(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4})$ 的图像? 解法一先“伸缩”, 后“平移”. 第一步: 将函数 $y = 3\sin x$ 的图像上的每一点, 纵坐标保持不变, 横坐标伸长到原来的 2 倍. 得到函数 $y = 3\sin \frac{x}{2}$ 的图像. 第二步: 将函数 $y = 3\sin \frac{x}{2}$ 的图像向右平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位长度, 便得到函数 $y = 3\sin \frac{1}{2}(x - \frac{\pi}{2}) = 3\sin(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4})$ 的图像. 解法二先“平移”, 后“伸缩”. 第一步: 将函数 $y = 3\sin x$ 的图像, 向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度, 得到函数 $y = 3\sin(x - \frac{\pi}{4})$ 的图像. 第二步: 将函数 $y = 3\sin(x - \frac{\pi}{4})$ 的每一点, 纵坐标保持不变, 横坐标伸长到原来的 2 倍, 得到函数 $y = 3\sin(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4})$ 的图像.

137. 函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi) = \pm 1 (A \neq 0)$ 的对称轴. 观察图 7, 易求出 $\sin(\omega x + \varphi) = \pm 1$ 的解 x_0 , 则直线 $x = x_0$ 便是函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 图像的对称轴. (图 7)

138. 函数 $y = \sin(2x + \frac{\pi}{4})$ 图像的一条对称轴是直线 ().

- A. $x = \frac{3\pi}{4}$ B. $x = -\frac{3\pi}{4}$ C. $x = \frac{3\pi}{8}$ D. $x = -\frac{3\pi}{8}$

解以 $x = -\frac{3\pi}{8}$ 代入, 得 $\sin[1(-\frac{3\pi}{8}) + \frac{\pi}{4}] = \sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$, 故选 D. 注意若令 $\sin(2x + \frac{\pi}{4}) = \pm 1$, 可得 $2x + \frac{\pi}{4} = k\pi + \frac{\pi}{2}$, 即得 $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8} (k \in \mathbf{Z})$, 故函数 $y = \sin(2x + \frac{\pi}{4})$ 图像的对称轴直线的一般形式是 $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8} (k \in \mathbf{Z})$. 请读者思考: 若函数 $f(x) = 3 \cos(2x + \varphi)$ 是偶函数, 则 φ 的值应取什么? 【训练题】

(一) 正弦函数、余弦函数的图像和性质

139. 若 MP, OM, AT 分别是 60° 角的正弦线、余弦线和正切线, 则 ().

- A. $MP < OM < AT$ B. $OM < MP < AT$ C. $AT < OM < MP$ D. $OM < AT < MP$

140. 在同一坐标系内, 曲线 $y = \sin x$ 与 $y = \cos x$ 的交点坐标是 ().

- A. $(2k\pi + \frac{\pi}{2}, 1)$ B. $(k\pi + \frac{\pi}{2}, (-1)^k)$ C. $(k\pi + \frac{\pi}{4}, \frac{(-1)^k}{\sqrt{2}})$ D. $(k\pi, 0) (k \in \mathbf{Z})$

141. 函数 $y = \log_{\frac{1}{2}}(\sin 2x)$ 为减函数的区间是 ().

- A. $(k\pi, k\pi + \frac{\pi}{4}]$, $k \in \mathbf{Z}$ B. $(k\pi, k\pi + \frac{\pi}{2}]$, $k \in \mathbf{Z}$ C. $(2k\pi, 2k\pi + \frac{\pi}{4}]$, $k \in \mathbf{Z}$ D. $(2k\pi, 2k\pi + \frac{\pi}{2}]$, $k \in \mathbf{Z}$

142. 函数 $y = \lg(1 - \sin x) - \lg(1 + \sin x)$ ().

- A. 是奇函数, 但非偶函数 B. 是偶函数, 但非奇函数 C. 既不是奇函数, 也不是偶函数 D. 奇偶性无法确定

143. 若 $0 < x < \frac{1}{2}$, 则下列各式不成立的是 ().

- A. $\sin(1+x) > \sin x$ B. $\cos(1+x) < \cos x$ C. $(1+x)^x > x^x$ D. $\log_x(1+x) > \log_x x$

144. 若函数 $y = \cos(\sin x)$, 则下列结论正确的是 ().

- A. 它的定义域是 $[-1, 1]$ B. 它是奇函数 C. 它的值域是 $[\cos 1, 1]$ D. 它不是周期函数

145. 下列四个函数中, 是偶函数且在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上为增函数, 但不是周期函数的函数是 ().

- A. $y = |\sin x| (x \in \mathbf{R})$ B. $y = |\cos x| (x \in \mathbf{R})$ C. $y = \sin |x| (x \in \mathbf{R})$ D. $y = |\sin x| + |\cos x| (x \in \mathbf{R})$

146. 下列函数中, 既在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上是增函数, 又是以 π 为最小正周期的偶函数是 ().

- A. $y = x^2 |\cos x|$ B. $y = \cos 2x$ C. $y = |\sin x|$ D. $y = |\sin 2x|$

147. 要使 $\sqrt{(1+2\sin\theta)^2} = -(1+2\sin\theta)$, 则 θ 的取值范围是 ().

- A. 第三、四象限 B. $[2k\pi - \frac{5\pi}{6}, 2k\pi - \frac{\pi}{6}]$ C. $[2k\pi - \frac{\pi}{6}, 2k\pi + \frac{7\pi}{6}]$ D. $[2k\pi - \frac{7\pi}{6}, 2k\pi - \frac{\pi}{6}] (k \in \mathbf{Z})$

148. (1) 设 $\cos^2 x + 4 \sin x - a = 0 (a, x \in \mathbf{R})$, 则 a 的取值范围是_____. (2) 函数 $y = 1 - 2 \sin x + 3 \cos^2 x$ 的值域是_____. (3) 函数 $y = \sin^2 x + 2 \cos x (-\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{2}{3}\pi)$ 的值域是_____. (4) 函数 $y = \frac{3 \cos x + 1}{\cos x + 2}$ 的值域是_____. (5) 函数 $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(2 \sin x)$ 的最小值是_____.
149. 将下列各数由小到大排列: (1) $\sin 46^\circ, \cos 46^\circ, \cos 36^\circ$:_____. (2) $\sin 2, \cos 2, \tan 2$:_____. (3) $\log_x \sin \frac{x}{2}, \log_x \cos \frac{x}{2} (x < 1)$:_____. (4) $\cos 1^\circ, \sin 1^\circ, \cos 1, \sin 1$:_____.
150. (1) 在 $[0, 2\pi]$ 中, 满足 $\sin x \geq \frac{1}{2}$ 的 x 的取值范围是_____. (2) 不等式 $\sin x \leq \frac{1}{2}$ 的解为_____. (3) 不等式 $|\cos 2x| \leq \frac{1}{2}$ 的解为_____. (4) 若集合 $M = \{\theta | \sin \theta \geq \frac{1}{2}, 0 \leq \theta \leq \pi\}$, $P = \{\theta | \cos \theta \leq \frac{1}{2}, 0 < \theta \leq \pi\}$, 则 $M \cap P =$ _____. (5) 若 $-\pi \leq x \leq \pi$, 则不等式 $\log_2(1 + 2 \cos x) < 1$ 的解为_____.
151. 若锐角 α, β 满足 $\sin \alpha < \cos \beta$ 则 ().
- A. $\alpha > \beta$ B. $\alpha < \beta$ C. $\alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$ D. $\alpha + \beta > \frac{\pi}{2}$
152. 方程 $2^x = \cos x$ 的解有 ().
- A. 0 个 B. 1 个 C. 2 个 D. 无穷多个
153. 函数 $f(x) = (\sin \alpha)^{|\log_{\sin \alpha} x|} (2k\pi < \alpha < 2k\pi + \pi \text{ 且 } \alpha \neq 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z})$ 的图像是 (). _____
- A. B. C. D.
154. 设 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, 则下列各式中正确的是 ().
- A. $\sin(\sin x) < \cos x < \sin(\cos x)$ B. $\sin(\cos x) < \cos x < \sin(\sin x)$ C. $\cos(\sin x) < \cos x < \cos(\cos x)$ D. $\cos(\cos x) < \cos x < \cos(\sin x)$
155. 求下列函数的定义域: (1) $y = \log_{\sin x}(2 \cos x + 1)$. (2) $y = \sqrt{1 - 2 \cos x} + \lg(2 \sin x - \sqrt{2})$. (3) $y = \sqrt{\sin x} + \frac{1}{\sqrt{16 - x^2}}$.
156. 画出下列函数的图像: (1) $y = |\sin x|$. (2) $y = |\cos x| + \cos x$. (3) $y = (\sin \alpha)^{|\log_{\sin \alpha} x|} (\alpha \text{ 为锐角})$. (4) $y = \frac{|\sin x|}{\sin x}$. (5) $y = f(\sin x)$, 其中 $f(x) = \begin{cases} 2(x \geq 0), \\ -1(x < 0). \end{cases}$
157. (1) 若 $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$, 且 $\lg \sin \alpha + \lg \cos \alpha + \lg 9 = \lg \tan \alpha + \lg \cot \alpha + \frac{1}{2} \lg 8$, 求 $\sin \alpha - \cos \alpha$ 的值. (2) 设 x 是第二象限角, 且满足 $\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2} = -\frac{\sqrt{5}}{2}$, 求 $\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2}$ 的值.
158. 若 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, 比较 $M = \log_{\sin \theta} \cos \theta$ 与 $N = \log_{\cos \theta} \sin \theta$ 的大小.
159. 若 α, β 是关于 x 的二次方程 $x^2 + 2(\cos \theta + 1)x + \cos^2 \theta = 0$ 的两实根, 且 $|\alpha - \beta| \leq 2\sqrt{2}$, 求 θ 的范围.
160. (1) 求函数 $f(x) = a \sin x - \sin^2 x$ 的最大值 $g(a)$, 并画出 $g(a)$ 的图像. (2) 若函数 $f(x) = \cos^2 x - a \sin x + b$ 的最大值为 0, 最小值为 -4, 实数 $a > 0$, 求 a, b 的值. (二) 函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 的图像

161. 函数 $y = 3\sin(2x + \frac{\pi}{6})$ 的图像的一条对称轴是直线 ().
- A. $x = 0$ B. $x = \frac{\pi}{6}$ C. $x = -\frac{\pi}{6}$ D. $x = \frac{\pi}{3}$
162. 先将函数 $y = \sin 2x$ 的图像向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度, 再将所得图像作关于 y 轴的对称变换, 则与最后所得图像对应的函数的解析式是 ().
- A. $y = \sin(-2x + \frac{\pi}{3})$ B. $y = \sin(-2x - \frac{\pi}{3})$ C. $y = \sin(-2x + \frac{2}{3}\pi)$ D. $y = \sin(-2x - \frac{2}{3}\pi)$
163. 将函数 $y = \sin x$ 的图像上所有点向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度, 再把所得图像上各点横坐标伸长到原来的 2 倍, 则与最后得到的图像对应的函数的解析式为 ().
- A. $y = \sin(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3})$ B. $y = \sin(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6})$ C. $y = \sin(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3})$ D. $y = \sin(2x + \frac{\pi}{3})$
164. 函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)(A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2})$ 的图像如图所示, 则 y 的表达式是 ().
- A. $2\sin(\frac{10}{11}x + \frac{\pi}{6})$ B. $2\sin(\frac{10}{11}x - \frac{\pi}{6})$ C. $2\sin(2x + \frac{\pi}{6})$ D. $2\sin(2x - \frac{\pi}{6})$
- (第 91 题)
165. 函数 $y = 2\sin(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{3})$ 在一个周期内的简图是 (). _____
- A. _____ B. 向左平移 $\frac{\pi}{6}$ C. 向右平移 $\frac{\pi}{3}$ D. 向左平移 $\frac{\pi}{3}$
- _____ (C) _____ (D)
166. 要得到函数 $y = \sin(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6})$ 的图像. 只需将函数 $y = \sin \frac{x}{2}$ 的图像 ().
- (A) 向右平移 $\frac{\pi}{6}$
167. (1) $f(x) = \log \frac{\pi}{4} \cos(2x + \frac{\pi}{4})$ 为增函数的区间是_____. (2) 函数 $f(x) = 2\sin(3 - 2x)$ 为增函数的区间是_____. (3) 函数 $y = \cos(2x - \frac{\pi}{5})$ 为减函数的区间是_____.
168. (1) 函数 $y = \sin(2x + \frac{\pi}{3})$ 的图像可由 $y = \sin 2x$ 的图像向_____ 平移_____ 个单位长度得到. (2) 将奇函数 $y = f(x)(x \in \mathbf{R})$ 的图像沿 x 轴正向平移 1 个单位长度后, 所得的图像为 C' , 而图像 C' 与 C 关于原点对称, 那么 C 所对应的函数应为_____. (3) 先将函数 $f(x) = \sin x$ 的图像向右平移 $\frac{\pi}{5}$ 个单位长度, 再改变各点的横坐标 (纵坐标不变), 得到最小正周期为 $\frac{2\pi}{3}$ 的函数 $y = \sin(\omega x + \varphi)(\omega > 0)$ 的图像, 则 $\omega =$ _____, $\varphi =$ _____.
169. 若函数 $f(x) = 2\cos(\frac{k}{4}x + \frac{\pi}{3}) - 5$ 的最小正周期不大于 2, 则正整数 k 的最小值为 ().
- A. 10 B. 11 C. 12 D. 13
170. (1) 若函数 $f(x) = \sin(2x + \varphi)(-\pi < \varphi < 0)$ 是偶函数, 则 $\varphi =$ _____. (2) 若函数 $f(x) = \cos(x + \varphi)$ 的图像关于坐标原点对称, 则 $\varphi =$ _____.
171. 根据周期函数的定义, 求函数 $y = 2\cos(4x - \frac{\pi}{3})$ 的最小正周期.

172. (1) 若奇函数 $f(x)$ 是姑小正周期为 3 的周期函数, 且 $f(1) = -1$, 则 $f(101) =$ _____. (2) 若偶函数 $y = f(x)$ 是最小正周期为 2 的周期函数. 且 $2 \leq x \leq 3$ 时, $f(x) = x$, 则当 $-2 \leq x \leq 0$ 时, $f(x)$ 的表达式为_____.

173. (1) 已知函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0$) 在同一周期内, 当 $x = \frac{\pi}{9}$ 时取得最大值 $\frac{1}{2}$, 当 $x = \frac{4\pi}{9}$ 时取得最小值 $-\frac{1}{2}$, 求此函数的解析式. (2) 已知函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0$) 的图像上一个最高点的坐标为 $(2, \sqrt{2})$, 由这个最高点到的最低点间, 图像与 x 轴交于点 $(6, 0)$, 求此函数的解析式. (三) 正切函数、余切函数的图像和性质

174. 函数 $y = \tan 3\pi x$ 的最小正周期为 ().

- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{6}{\pi}$ D. $\frac{3}{\pi}$

175. 下列函数中, 以 π 为最小正周期的偶函数是 ().

- A. $y = \sin x \cdot \cos x$ B. $y = \cot x$ C. $y = \cos \frac{x}{2}$ D. $y = \cos^2 x$

176. 若 $a = \sin \frac{3}{4}$, $b = \cos \frac{3}{4}$, $c = \cot \frac{3}{4}$, 则 a, b, c 之间的大小关系是 ().

- A. $a > b > c$ B. $b > c > a$ C. $c > a > b$ D. $c > b > a$

177. 若 $\tan(2x - \frac{\pi}{3}) \leq 1$, 则 x 的取值范围是 ().

- A. $\frac{k\pi 2 - \frac{\pi}{12}}{2} \leq x \leq \frac{k}{\pi} + \frac{7}{24}\pi (k \in \mathbf{Z})$ B. $k\pi - \frac{\pi}{12} \leq x < k\pi + \frac{7}{24}\pi (k \in \mathbf{Z})$ C. $\frac{k\pi 2 - \frac{\pi}{12}}{2} < x \leq \frac{k}{\pi} + \frac{7}{24}\pi (k \in \mathbf{Z})$ D. $k\pi - \frac{\pi}{12} < x < k\pi + \frac{7}{24}\pi (k \in \mathbf{Z})$

178. 下列函数中, 同时满足条件 “① 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 为增函数, ② 为奇函数, ③ 以 π 为最小正周期” 的函数是 ().

- A. $y = \tan x$ B. $y = \cot x$ C. $y = \tan \frac{x}{2}$ D. $y = |\sin x|$

179. 函数 $y = \cot x (-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4})$ 的值域是 ().

- A. $[-1, 1]$ B. $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ C. $(-\infty, -1]$ D. $[1, +\infty)$

180. 根据要求, 求 x 的取值范围: (1) $\tan \frac{x}{2} \geq \sqrt{3}$:_____. (2) $\cot 2x \leq -\sqrt{3}$:_____. (3) $|\sin x| \leq |\cos x|$:_____. (4) $\log_x \tan x > 0$:_____. (5) $\log_{\sqrt{3}} \sin \frac{x}{2} - \log_{\sqrt{3}} \cos \frac{x}{2} > -1$, 且 $-2\pi < x < 2\pi$:_____.

181. 将下列各题中的数由小到大排列: (1) $\tan 1, \tan 2, \tan 3$:_____. (2) $1, \sin 1, \cos 1, \tan 1$:_____.

182. 在 “① $y = |\sin 2x|$, ② $y = |\cos x|$, ③ $y = |\tan 2x|$, ④ $y = |\tan x| + |\cot x|$ ” 这四个函数中, 最小正周期为 $\frac{\pi}{2}$ 的偶函数有 ().

- A. 0 个 B. 1 个 C. 2 个 D. 3 个

183. $\sin \frac{2\pi}{3}, \cos 1, \tan 2, \cot 3$ 的大小关系为 ().

$$\begin{array}{llll} \text{A. } \sin \frac{2\pi}{3} > \cos 1 > \cot 3 > \tan 2 & \text{B. } \sin \frac{2\pi}{3} > \cos 1 > \tan 2 > \cot 3 & \text{C. } \cos 1 > \sin \frac{2\pi}{3} > \tan 2 > \cot 3 & \text{D. } \cos 1 > \sin \frac{2\pi}{3} > \cot 3 > \tan 2 \end{array}$$

184. 若 $0 < \alpha < 2\pi$, 且满足 $\sin \alpha < \cos \alpha < \cot \alpha < \tan \alpha$, 则有 ().

$$\begin{array}{llll} \text{A. } 0 < \alpha < \frac{\pi}{4} & \text{B. } \frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2} & \text{C. } \pi < \alpha < \frac{5}{4}\pi & \text{D. } \frac{5\pi}{4} < \alpha < \frac{3\pi}{2} \end{array}$$

185. 求下列函数的定义域: (1) $y = \sqrt{\sqrt{3} - \cot \frac{x}{2}}$. (2) $y = \frac{\lg(\tan x - 1)}{\sqrt{1 - 2\sin x}}$. (3) $y = \lg(\tan x - 1) + \sqrt{\sin 2x}$.

186. (1) 求函数 $y = \frac{\sec^2 x + \tan x}{\sec^2 x - \tan x}$ 的值域. (2) 已知 $\theta \in [-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}]$, 求函数 $y = \sec^2 \theta + 2 \tan \theta + 1$ 的最大值与最小值.

187. 根据条件比较下列各组数的大小: (1) 已知 $\frac{\pi}{3} < \theta < \frac{\pi}{2}$, 比较 $\sin \theta, \cot \theta, \cos \theta$ 的大小. (2) 已知 $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$, 比较 $\sin \alpha, \sin(\sin \alpha), \sin(\tan \alpha)$ 的大小. (3) 已知 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, 比较 $\cos \theta, \sin(\cos \theta), \cos(\sin \theta)$ 的大小.

188. 利用锐角三角函数的定义解下列各题: (1) 若 $\alpha, \beta \in (0, \frac{\pi}{2})$, 且 $17 \cos \alpha + 13 \cos \beta = 17$, $17 \sin \alpha = 13 \sin \beta$, 求 $\frac{\alpha}{2} + \beta$. (2) 设 $x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$, 求证: $\csc x - \cot x \geq \sqrt{2} - 1$.

189. 已知 $a \cos \alpha + b \sin \alpha = c$, $a \cos \beta + b \sin \beta = c$ ($0 < \alpha, \beta < \pi$, $\alpha \neq \beta$), 且 $\cos \alpha + \cos \beta = \cos \alpha \cdot \cos \beta$, 求证: $c^2 - b^2 = 2ac$.

190. 已知函数 $f(x)$ 满足 $af(\sin x) + bf(-\sin x) = c \sin x \cos x$ ($-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, $a^2 - b^2 \neq 0$), 求 $f(x)$ 的解析式.

191. (1) 设 $\frac{\sin \alpha}{a^2 - 1} = \frac{\cos \alpha}{2a \sin 2\beta} = \frac{1}{1 + 2a \cos 2\beta + a^2}$, 求证: $\sin \alpha = \frac{a^2 - 1}{a^2 + 1}$. (2) 已知 $a \sec^2 \alpha - b \cos \alpha = 2a$, $b \cos^2 \alpha - a \sec \alpha = 2b$, 求 a, b 的关系式. (3) 已知 $a \sin^2 \theta + b \cos^2 \theta = m$, $b \sin^2 \varphi + a \cos^2 \varphi = n$, $a \tan \theta = b \tan \varphi$ (a, b, m, n 互不相等), 求证: $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.

192. 利用单位圆和三角函数线证明: (1) 若 α 为锐角, 则① $\sin \alpha + \cos \alpha > 1$; ② $\sin \alpha < \alpha < \tan \alpha$; ③ $\alpha \cdot \sin \alpha + \cos \alpha > 1$. (2) 若 $0 < \beta < \alpha < \frac{\pi}{2}$, 则 $\sin \alpha - \sin \beta < \alpha - \beta < \tan \alpha - \tan \beta$.

193. 若 α 是锐角, 求证: $\cos(\sin \alpha) > \sin(\cos \alpha)$.

194. (1) 已知函数 $f(x)$ 满足 $f(x+a) = \frac{1-f(x)}{1+f(x)}$ (a 为常数, 且 $a \neq 0$), 求证: $f(x)$ 是一个以 $2a$ 为周期的周期函数. (2) 已知 $f(x)$ 为偶函数, 其图像关于直线 $x = a$ ($a \neq 0$) 对称, 求证: $f(x)$ 是一个以 $2a$ 为周期的周期函数.

195. 已知 $f(x), g(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的两个函数, 且 $g(x)$ 为奇函数. 并满足: ① $f(0) = 1$; ② 对任何 $x, y \in \mathbf{R}$ 都有 $f(x-y) = f(x)f(y) + g(x)g(y)$. 求证: (1) 对任何 $x \in \mathbf{R}$ 都有 $f^2(x) + g^2(x) = 1$. (2) $f(x)$ 是偶函数. (3) 若存在非零实数 a 满足 $f(a) = 1$, 则 $f(x)$ 是周期函数.

196. 利用图像求方程 $\sin x = \tan \frac{x}{2}$ 在区间 $[0, 8\pi]$ 上解的个数.

197. 设 $0 \leq x \leq \pi$, $f_1(x) = \sin(\cos x)$, $f_2(x) = \cos(\sin x)$. (1) 求 $f_1(x), f_2(x)$ 的最大值和最小值. (2) 比较 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 的大小.