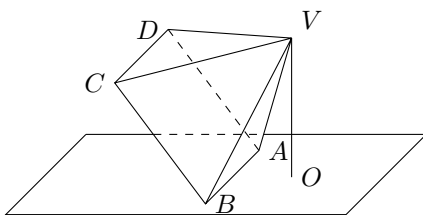


1. 已知函数  $f(x) = \log_a x + x - b$  ( $a > 0$  且  $a \neq 1$ ). 当  $2 < a < 3 < b < 4$  时, 函数  $f(x)$  的零点  $x_0 \in (n, n+1)$ ,  $n \in \mathbf{N}^*$ , 则  $n =$ \_\_\_\_\_.
2. 设实数  $a, b, c$  满足:  $ac \neq 0$  且  $a \neq c$ , 集合  $A = \{y | y = ax^2 + bx + c, x \in \mathbf{R}\}$ ,  $B = \{y | y = cx^2 + bx + a\}$ , 以下结论一定正确的是 ( ).
- A.  $A \subseteq B$                       B.  $B \subseteq A$                       C.  $A \cup B = \mathbf{R}$                       D.  $A \cap B = \emptyset$
3. 对于无穷数列  $\{a_n\}$ , 定义数列  $b_n = |a_{n+1} - a_n|$ , 记  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  存在, 则称数列  $\{a_n\}$  为“好数列”.
- (1) 若  $a_n = \frac{1}{n}$ , 判断数列  $\{a_n\}$  是否为“好数列”? 并说明理由;
- (2) 若数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 = 1$ ,  $a_{n+1} = qa_n$  ( $q \neq 0$ ), 且  $\{a_n\}$  是“好数列”, 求  $q$  的取值范围;
- (3) 若递增数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $\{T_n\}$ , 则“ $\{a_n\}$  为‘好数列’”是“ $\{T_n\}$  为‘好数列’”的什么条件? 判断并说明理由.
4. 函数  $f(x) = \sin x$ , 对于  $x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_n$  且  $x_1, x_2, \cdots, x_n \in [0, 8\pi]$  ( $n \geq 10$ ,  $n \in \mathbf{N}$ ), 记  $M = |f(x_1) - f(x_2)| + |f(x_2) - f(x_3)| + |f(x_3) - f(x_4)| + \cdots + |f(x_{n-1}) - f(x_n)|$ , 则  $M$  的最大值等于\_\_\_\_\_.
5. 设  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{R}$ , 且  $\frac{1}{2 + \sin \alpha_1} + \frac{1}{2 + \sin(2\alpha_2)} = 2$ , 则  $|10\pi - \alpha_1 - \alpha_2|$  的最小值等于\_\_\_\_\_.
6. 正四棱锥  $V-ABCD$  的表面积为 12,  $AB = 2$ ,  $N$  为棱  $CD$  的中点, 直线  $AB$  在平面  $\alpha$  内. 将该正四棱锥绕直线  $AB$  任意旋转, 旋转过程中, 设  $V$  在  $\alpha$  内的射影为  $O$ , 则线段  $ON$  长的最大值为\_\_\_\_\_.



7. 已知  $a, b$  为空间两条互相垂直的直线, 等腰  $\text{Rt}\triangle ABC$  的直角边  $AC$  所在直线与  $a, b$  都垂直, 斜边  $AB$  以直线  $AC$  为旋转轴旋转. 有下列结论: ① 当直线  $AB$  与  $a$  所成的角为  $60^\circ$  时,  $AB$  与  $b$  所成的角为  $30^\circ$ ; ② 直线  $AB$  与  $a$  所成角的最小值为  $45^\circ$ ; ③ 直线  $AB$  与  $a$  所成角的最大值为  $60^\circ$ . 其中所有真命题的序号为\_\_\_\_\_.
8. 已知数列  $\{a_n\}$  满足: ①  $a_1 = 0$ ; ② 对任意的  $n \in \mathbf{N}^*$ , 都有  $a_{n+1} > a_n$  成立. 函数  $f_n(x) = \left| \sin \frac{1}{n}(x - a_n) \right|$ ,  $x \in [a_n, a_{n+1}]$  满足: 对于任意的实数  $m \in [0, 1]$ ,  $f_n(x) = m$  总是有且仅有两个不同的根, 求  $\{a_n\}$  的通项公式.
9. 设  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  是平面上的向量,  $|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 3, |\vec{c}| = 4$ , 且  $\vec{b} \cdot \vec{c} = 0$ , 实数  $\lambda$  满足  $0 \leq \lambda \leq 1$ . 若  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  及  $\lambda$ , 使得  $s = |\vec{a} - \lambda \vec{b} - (1 - \lambda) \vec{c}|$  是正整数, 则  $s$  的值的集合是\_\_\_\_\_.

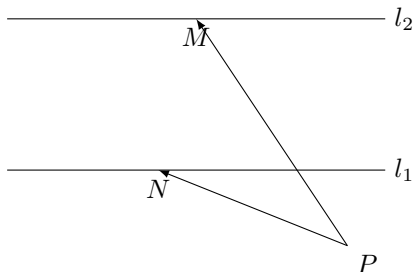
10. 如图, 在平面内,  $l_1, l_2$  是两条平行直线, 它们之间的距离为 2, 点  $P$  位于  $l_1, l_2$  的下方, 它到  $l_1$  的距离为 1, 动点  $N, M$  分别在  $l_1, l_2$  上, 满足  $|\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{PN}| = 6$ , 则  $\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PN}$  的最大值为 ( ).

A. 6

B. 8

C. 12

D. 15



11. 已知过原点  $O$  的直线与椭圆  $C: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$  交于  $A, B$  两点, 点  $A$  到  $y$  的距离  $d$  满足  $d \in [1, 2)$ , 点  $D$  在椭圆  $C$  上, 且  $AD \perp AB$ , 直线  $BD$  与  $x$  轴、 $y$  轴分别交于  $M, N$  两点.

(1) 设直线  $BD, AM$  的斜率分别为  $k_1, k_2$ , 求  $k_1 \cdot k_2$  的取值范围; (2) 求  $\triangle OMN$  面积的最大值.

12. 已知点  $A(0, \frac{2}{n}), B(0, -\frac{2}{n}), C(4+\frac{2}{n}, 0)$ , 其中  $n$  为正整数, 设  $S_n$  表示  $\triangle ABC$  外接圆的面积, 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n =$ \_\_\_\_\_.

13. 如图所示: 矩形  $A_n B_n P_n Q_n$  的一边  $A_n B_n$  在  $x$  轴上, 另两个顶点  $P_n, Q_n$  在函数  $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$  的图像上 (其中点  $B_n$  的坐标为  $(n, 0)$  ( $n \geq 2, n \in \mathbb{N}^*$ )), 矩形  $A_n B_n P_n Q_n$  的面积记为  $S_n$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n =$ \_\_\_\_\_.

