

1. 在下列各组的两个角中, 终边不重合的一组是 ( ).

A.  $-43^\circ$  与  $677^\circ$

B.  $900^\circ$  与  $-1260^\circ$

C.  $-120^\circ$  与  $960^\circ$

D.  $150^\circ$  与  $630^\circ$

2. 在平面直角坐标系中, 下列结论正确的是 ( ).

A. 小于  $\frac{\pi}{2}$  的角一定是锐角

B. 第二象限的角一定是钝角

C. 始边相同且相等的角的终边一定重合

D. 始边相同且终边重合的角一定相等

3. 如果  $\alpha$  是锐角, 那么  $2\alpha$  是 ( ).

A. 第一象限的角

B. 第二象限的角

C. 小于  $180^\circ$  的正角

D. 钝角

4. 找出与下列各角的终边重合的角  $\alpha (0^\circ \leq \alpha < 360^\circ)$ , 并判别下列各角是第几象限的角:

(1)  $-1441^\circ$ ;

(2)  $890^\circ$ .

5. 把下列各角度化为弧度, 并判断它们是第几象限的角:

(1)  $225^\circ$ ;

(2)  $1500^\circ$ ;

(3)  $-22^\circ 30'$ ;

(4)  $-216^\circ$ .

6. 已知扇形的弧长为  $\frac{5\pi}{3}$ , 半径为 2. 求该扇形的圆心角  $\alpha$  及面积  $S$ .

7. 已知角  $\alpha$  的终边分别经过以下各点, 求角  $\alpha$  的正弦、余弦、正切和余切值:

(1)  $(3, -4)$ ;

(2)  $(-1, -\sqrt{3})$ .

8. 不用计算器, 根据角所属的象限, 判断下列各式的符号:

(1)  $\sin 237^\circ \cos 390^\circ$ ;

(2)  $\tan 135^\circ \cos 275^\circ$ ;

(3)  $\frac{\cos \frac{5\pi}{6} \tan \frac{11\pi}{6}}{\sin \frac{2\pi}{3}}$ .

9. 根据下列条件, 确定角  $\theta$  所属的象限:

(1)  $\sin \theta < 0$  且  $\cos \theta > 0$ ;

(2)  $\frac{\sin \theta}{\tan \theta} > 0$ .

10. 分别求  $\frac{2\pi}{3}$  及  $\frac{7\pi}{6}$  的正弦、余弦及正切值.

11. 已知  $\sin \alpha = -\frac{2}{3}$ , 且  $\alpha$  是第四象限的角. 求  $\cos \alpha$  及  $\tan \alpha$ .

12. 已知  $\tan \alpha = -\frac{1}{2}$ , 求  $\sin \alpha$  及  $\cos \alpha$ .

13. 证明下列恒等式:

(1)  $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$ ;

(2)  $\tan \alpha - \cot \alpha = \frac{1 - 2 \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha}$ .

14. 已知  $\tan \alpha = 2$ , 求  $\frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha}$  的值.

15. 若  $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{2}$ , 求  $\sin \alpha \cos \alpha$  的值.

16. 用诱导公式求值:

(1)  $\sin 1110^\circ$ ;

(2)  $\cos \frac{7\pi}{4}$ ;

(3)  $\cos(-600^\circ)$ ;

(4)  $\tan(-\frac{7\pi}{6})$ .

17. 利用诱导公式, 分别求角  $\frac{23\pi}{3}$  和  $-\frac{87\pi}{4}$  的正弦、余弦及正切值.

18. 化简下列各式:

(1)  $\cos(90^\circ + \alpha) + \sin(180^\circ - \alpha) - \sin(180^\circ + \alpha) + \sin(-\alpha)$ ;

(2)  $\frac{\sin(\pi - \alpha)}{\tan(\pi + \alpha)} \cdot \frac{\cot(\frac{\pi}{2} - \alpha)}{\tan(\frac{\pi}{2} + \alpha)} \cdot \frac{\cos(-\alpha)}{\sin(2\pi - \alpha)}$ ;

(3)  $\frac{\sin(\alpha - \pi) \cot(\alpha - 2\pi)}{\cos(\alpha - \pi) \tan(\alpha - 2\pi)}$ ;

(4)  $\frac{\tan(\pi + \alpha) \cos(-\pi) \cos(2\pi - \alpha)}{\cot(\pi - \alpha) \sin(3\pi + \alpha)}$ .

19. 写出与下列各角的终边重合的所有角组成的集合  $S$ , 并写出  $S$  中适合不等式  $-360^\circ \leq \alpha < 720^\circ$  的元素  $\alpha$ :

(1)  $60^\circ$ ;

(2)  $-21^\circ$ .

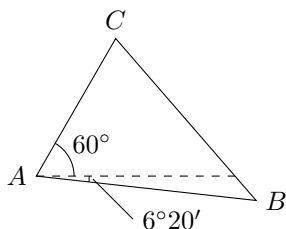
20. 已知  $0^\circ < \beta < 180^\circ$ , 若将角  $\beta$  的终边顺时针旋转  $120^\circ$  所得的角的终边与角  $\beta$  的 5 倍角的终边重合. 求角  $\beta$ .

21. 已知一个扇形的周长是 16, 面积是 12. 求其圆心角的大小.

22. 写出终边在直线  $y = x$  上的所有角组成的集合. (分别用角度制和弧度制来表示)
23. 若  $\alpha$  为第二象限的角, 则  $2\pi - \alpha$  为第\_\_\_\_\_象限的角.
24. 若角  $\alpha$  的终边与角  $\beta$  的终边关于  $x$  轴对称, 则  $\alpha$  与  $\beta$  的关系是\_\_\_\_\_.
25. 若角  $\alpha$  与  $\beta$  满足关系  $\alpha = (2k + 1)\pi - \beta (k \in \mathbf{Z})$ , 则角  $\alpha$  与  $\beta$  的终边关于\_\_\_\_\_对称.
26. 已知一个扇形的周长为 20cm, 当圆心角等于多少时, 这个扇形的面积最大, 并求该最大值.
27. 已知  $\alpha$  为第二象限的角, 其终边上有一点  $P(x, \sqrt{5})$ , 且  $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}x$ . 求  $\tan \alpha$ .
28. 证明下列恒等式:
- (1)  $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta - \sin^2 \alpha \sin^2 \beta + \cos^2 \alpha \cos^2 \beta = 1$ ;
  - (2)  $2(1 - \sin \alpha)(1 + \cos \alpha) = (1 - \sin \alpha + \cos \alpha)^2$ .
29. 已知  $\alpha$  是第二象限的角, 化简:  $\sqrt{\frac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha}} + \sqrt{\frac{1 - \sin \alpha}{1 + \sin \alpha}}$ .
30. 已知  $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{1}{5}$ ,  $\alpha \in (0, \pi)$ . 求  $\sin \alpha$  和  $\cos \alpha$ .
31. 已知  $\sin \alpha$  及  $\cos \alpha$  是关于  $x$  的方程  $2x^2 + 4kx + 3k = 0$  的两个实根, 求实数  $k$ .
32. 根据下列条件, 求角  $x$ :
- (1)  $\tan x = \sqrt{3}$ , 且  $x$  是第三象限的角;
  - (2)  $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $x \in [0, 2\pi)$ ;
  - (3)  $\sin x = -\frac{1}{2}$ ;
  - (4)  $2\cos(2x + \frac{\pi}{8}) = 1$ .
33. 利用两角和与差的相应公式, 分别求下列各值:
- (1)  $\cos 105^\circ$ ;
  - (2)  $\sin 165^\circ$ ;
  - (3)  $\tan \frac{5\pi}{12}$ .
34. 化简下列各式:
- (1)  $\cos(\alpha + \beta) \cos \beta + \sin(\alpha + \beta) \sin \beta$ ;
  - (2)  $\sin(\theta + 105^\circ) \cos(\theta - 15^\circ) - \cos(\theta + 105^\circ) \sin(\theta - 15^\circ)$ ;
  - (3)  $\cos(\theta + \frac{\pi}{4}) + \sin(\frac{\pi}{4} + \theta)$ ;
  - (4)  $\frac{\tan(\alpha - \beta) + \tan \beta}{1 - \tan(\alpha - \beta) \tan \beta}$ .

35. 已知  $\sin \alpha = \frac{8}{17}$ ,  $\cos \beta = -\frac{5}{13}$ , 且  $\alpha, \beta \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ . 求  $\cos(\alpha + \beta)$  的值.
36. 已知  $\sin \alpha = \frac{5}{13}$ ,  $\cos \beta = -\frac{3}{5}$ , 且  $\alpha, \beta$  都是第二象限的角. 求  $\sin(\alpha - \beta)$ ,  $\cos(\alpha - \beta)$  和  $\tan(\alpha - \beta)$  的值.
37. 已知  $\tan \alpha = 2$ ,  $\tan \beta = 3$ , 其中  $\alpha$  及  $\beta$  均为锐角. 求  $\alpha + \beta$  的值.
38. 已知  $\sin \theta = -\frac{7}{25}$ ,  $\theta \in (\pi, \frac{3\pi}{2})$ . 求  $\tan(\theta - \frac{\pi}{4})$  的值.
39. 证明下列恒等式:
- (1)  $\frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta} = \tan \alpha + \tan \beta$ ;
  - (2)  $\sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \alpha + \sin \beta \cos \beta$ .
40. 已知  $\cos \varphi = -\frac{1}{3}$ , 且  $\pi < \varphi < \frac{3\pi}{2}$ . 求  $\sin 2\varphi$ ,  $\cos 2\varphi$  和  $\tan 2\varphi$  的值.
41. 已知等腰三角形的底角的正弦值等于  $\frac{4}{5}$ , 求这个三角形的顶角的正弦、余弦和正切值.
42. 证明下列恒等式:
- (1)  $1 + \sin \alpha = (\sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2})^2$ ;
  - (2)  $8 \sin^4 \alpha = \cos^4 \alpha - 4 \cos 2\alpha + 3$ ;
  - (3)  $\frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1 + \tan \frac{\alpha}{2}}{1 - \tan \frac{\alpha}{2}}$ ;
  - (4)  $\tan \alpha + \cot \alpha = \frac{2}{\sin 2\alpha}$ .
43. 已知  $\sin \alpha - \sin \beta = -\frac{1}{3}$ ,  $\cos \alpha - \cos \beta = \frac{1}{2}$ . 求  $\cos(\alpha - \beta)$ .
44. 已知锐角  $\alpha, \beta$  满足  $\cos \alpha = \frac{4}{5}$  及  $\cos(\alpha + \beta) = \frac{3}{5}$ , 求  $\sin \beta$ .
45. 已知  $\tan(\frac{\pi}{4} + \alpha) = 2$ ,  $\tan \beta = \frac{1}{2}$ . 求下列各式的值:
- (1)  $\tan \alpha$ ;
  - (2)  $\frac{\sin(\alpha + \beta) - 2 \sin \alpha \cos \beta}{2 \sin \alpha \sin \beta + \cos(\alpha + \beta)}$ .
46. 已知  $\cos(\alpha + \beta) = \frac{1}{2}$ ,  $\cos(\alpha - \beta) = \frac{1}{3}$ . 求  $\tan \alpha \tan \beta$  的值.
47. 已知  $\sin \alpha = -\frac{1}{4}$ ,  $\alpha \in (\pi, \frac{3\pi}{2})$ ,  $\cos \beta = \frac{4}{5}$ ,  $\beta \in (\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$ . 判断  $\alpha + \beta$  是第几象限的角.
48. 用  $\cot \alpha$  和  $\cot \beta$  表示  $\cot(\alpha + \beta)$ .
49. 把下列各式化成  $A \sin(\alpha + \varphi)$  ( $A > 0$ ) 的形式:
- (1)  $\sqrt{3} \sin \alpha + \cos \alpha$ ;
  - (2)  $5 \sin \alpha - 12 \cos \alpha$ .

50. 设点  $P$  是以原点为圆心的单位圆上的一个动点, 它从初始位置  $P_0(1, 0)$  出发, 沿单位圆按逆时针方向转动角  $\alpha (0 < \alpha < \frac{\pi}{2})$  后到达点  $P_1$ , 然后继续沿单位圆按逆时针方向转动角  $\frac{\pi}{4}$  到达点  $P_2$ . 若点  $P_2$  的横坐标为  $-\frac{3}{5}$ , 求点  $P_1$  的坐标.
51. 若  $\sin \alpha = \frac{8}{5} \sin \frac{\alpha}{2}$ , 求  $\cos \alpha$ .
52. 在  $\triangle ABC$  中, 已知  $A = 120^\circ$ ,  $B = 45^\circ$ ,  $AC = 2$ . 求  $BC$ .
53. 在  $\triangle ABC$  中, 已知  $b = 40$ ,  $c = 32$ ,  $A = 60^\circ$ . 求  $a$ .
54. 在  $\triangle ABC$  中, 若  $a = 7$ ,  $b = 8$ ,  $\cos C = \frac{13}{14}$ . 求最大角的余弦值.
55. 已知  $\triangle ABC$  的面积为 3,  $a = 3$ ,  $b = 2\sqrt{2}$ . 求  $c$ .
56. 在  $\triangle ABC$  中, 已知  $b = 2$ ,  $c = \sqrt{2}$ ,  $B = 45^\circ$ . 求  $C$ 、 $a$  及  $A$ .
57. 在  $\triangle ABC$  中, 若  $c = 2$ ,  $C = \frac{\pi}{3}$ , 且其面积为  $\sqrt{3}$ , 求  $a$  及  $b$ .
58. 在  $\triangle ABC$  中, 已知  $AD$  是  $\angle BAC$  的内角平分线. 求证:  $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$ .
59. 在  $\triangle ABC$  中, 已知  $AB = \sqrt{3}$ ,  $BC = 3$ ,  $AC = 4$ . 求边  $AC$  上的中线  $BD$  的长.
60. 根据下列条件, 分别判断三角形  $ABC$  的形状:
- (1)  $a = 2b \cos C$ ;
- (2)  $\tan B = \frac{\cos(B - C)}{\sin A - \sin(B - C)}$ .
61. 如图, 自动卸货汽车采用液压机构, 设计时需要计算油泵顶杆  $BC$  的长度. 已知车厢的最大仰角为  $60^\circ$ , 油泵顶点  $B$  与车厢支点  $A$  之间的距离为 1.95m,  $AB$  与水平线之间的夹角为  $6^\circ 20'$ ,  $AC$  的长为 1.4m. 计算  $BC$  的长. (结果精确到 0.01m)



62. 在  $\triangle ABC$  中, 若  $\sqrt{3}a = 2b \sin A$ , 求  $B$ .
63. 已知  $\triangle ABC$  的面积  $S = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4}$ , 求  $A$ .

64. 在  $\triangle ABC$  中, 已知  $a = 13, b = 14, c = 15$ .

(1) 求  $\cos A$ ;

(2) 求  $\triangle ABC$  的面积  $S$ .

65. 已知三角形两边之和为 8, 其夹角为  $60^\circ$ . 分别求这个三角形周长的最小值和面积的最大值, 并指出面积最大时三角形的形状.

66. 求分别满足下列条件的角:

(1)  $\sin x = \frac{2}{5}, x \in [0, \pi]$ ;

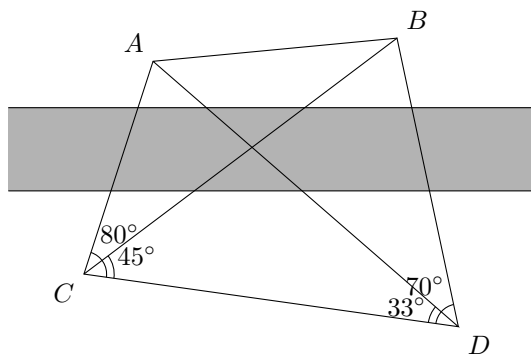
(2)  $\cos x = -\frac{2}{3}, x \in [0, 2\pi]$ ;

(3)  $\tan x = -\frac{1}{2}, x \in \mathbf{R}$ .

67. 在  $\triangle ABC$  中,  $A = 60^\circ, b = 1$ , 且其面积为  $\sqrt{3}$ . 求  $a$ .

68. 某船在海面  $A$  处测得灯塔  $C$  在北偏东  $30^\circ$  方向, 与  $A$  相距  $10\sqrt{3}$  海里, 且测得灯塔  $B$  在北偏西  $75^\circ$  方向, 与  $A$  相距  $15\sqrt{6}$  海里. 船由  $A$  向正北方向航行到  $D$  处, 测得灯塔  $B$  在南偏西  $60^\circ$  方向. 这时灯塔  $C$  与  $D$  相距多少海里?  $C$  在  $D$  的什么方向?

69. 如图, 为了测定对岸  $A, B$  两点之间的距离, 在河的一岸定一条基线  $CD$ , 测得  $CD = 100\text{m}$ ,  $\angle ACD = 80^\circ$ ,  $\angle BCD = 45^\circ$ ,  $\angle BDC = 70^\circ$ ,  $\angle ADC = 33^\circ$ . 求  $A, B$  间的距离. (结果精确到 0.01m)



70. 在  $\triangle ABC$  中, 求证:

(1)  $\frac{\cos 2A}{a^2} - \frac{\cos 2B}{b^2} = \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}$ ;

(2)  $(a^2 - b^2 - c^2) \tan A + (a^2 - b^2 + c^2) \tan B = 0$ .

71. 作出下列函数的大致图像:

(1)  $y = 1 + \sin x, x \in [0, 2\pi]$ ;

(2)  $y = |\sin x|, x \in \mathbf{R}$ .

72. 求下列函数的最小正周期:

(1)  $y = 1 + \sin \frac{2}{7}x, x \in \mathbf{R};$

(2)  $y = \frac{1}{3} \sin(-3x + \frac{\pi}{3}), x \in \mathbf{R}.$

73. 已知函数  $y = 2 \sin(2\omega x - \frac{\pi}{4})$  (其中常数  $\omega \neq 0$ ) 的最小正周期为 2, 求  $\omega$  的值.

74. 求下列函数的最大值和最小值, 并指出使其取得最大值和最小值时的所有  $x$  值的集合:

(1)  $y = 2 - 3 \sin x, x \in \mathbf{R};$

(2)  $y = -\sin^2 x + 2 \sin x + 2, x \in \mathbf{R};$

(3)  $y = 2 \sin x - 5, x \in [-\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}];$

(4)  $y = \cos^2 x - \sin x, x \in \mathbf{R}.$

75. 判断下列函数的奇偶性, 并说明理由:

(1)  $y = -2 \sin x;$

(2)  $y = \frac{\sin x}{x};$

(3)  $y = \frac{x}{1 + \sin x}.$

76. 利用函数的单调性, 比较下列各组数的大小:

(1)  $\sin \frac{3\pi}{1} 1$  与  $\sin \frac{5\pi}{1} 2;$

(2)  $\sin(-\frac{76\pi}{11})$  与  $\sin \frac{85\pi}{12}.$

77. 求下列函数的单调区间:

(1)  $y = 2 - \sin x;$

(2)  $y = 3 \sin(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{4}).$

78. 求下列函数的值域:

(1)  $y = 3 \sin x + \sqrt{3} \cos x;$

(2)  $y = \sin^2 x + 4 \sin x.$

79. 求函数  $y = 2 \sin x - 1$  的零点.

80. 可以利用正弦函数  $y = \sin x$  和  $y = \frac{1}{2}$  的图像, 并结合正弦函数的周期性来求解不等式  $\sin x \geq \frac{1}{2}$ . 请根据上述方法求函数  $y = \sqrt{2 \sin x - 1}$  的定义域.

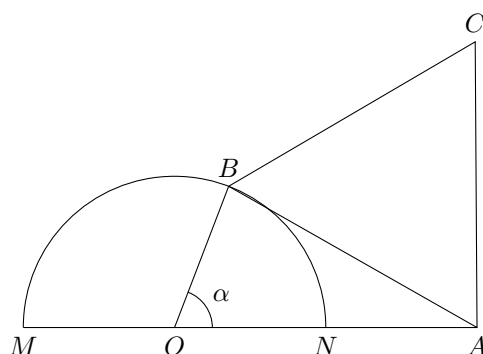
81. 求函数  $y = \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}$  的单调减区间.

82. 已知函数  $y = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2kx + \cos^2 kx$  (其中常数  $k > 0$ ) 的最小正周期为  $\pi$ , 求  $k$  的值.

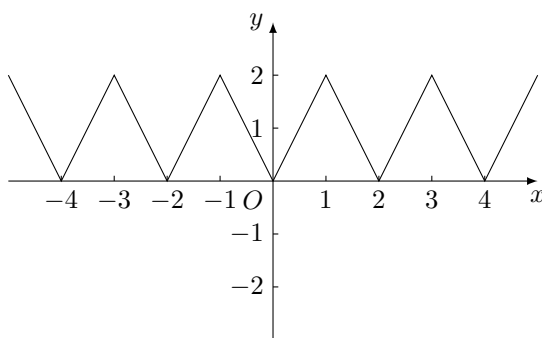
83. 求函数  $y = \sin(x + \frac{\pi}{6})$ ,  $x \in [-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$  的值域.

84. 求函数  $y = \sin^4 x + \cos^4 x$  的最小正周期与最值.

85. 设半圆  $O$  的直径为 2, 而  $A$  为直径延长线上的一点, 且  $OA = 2$ . 对半圆上任意给定的一点  $B$ , 以  $AB$  为一边作等边三角形  $ABC$ , 使  $\triangle ABC$  和  $\triangle ABO$  在  $AB$  的两侧 (如图所示). 求四边形  $OACB$  面积的最大值, 并求使四边形  $OACB$  面积取得最大值时的  $\angle AOB$  的大小.



86. 如图, 函数  $y = f(x)$  ( $x \in \mathbf{R}$ ) 的图像由折线段组成, 且当  $x$  取偶数时, 对应的  $y$  的值为 0; 而当  $x$  取奇数时, 对应的  $y$  的值为 2.



(1) 写出函数  $y = f(x)$  的最小正周期;

(2) 作出函数  $y = f(x - 1)$  的图像.

87. 作出下列函数的大致图像:

(1)  $y = 2 \cos x - 1$ ,  $x \in [0, 2\pi]$ ;

(2)  $y = |\cos x|$ ,  $x \in \mathbf{R}$ .

88. 求下列函数的最小正周期:

(1)  $y = \cos \frac{x}{3}$ ;



$$(2) y = 2 \cos(-2x + \frac{\pi}{6}).$$

89. 求下列函数的最大值和最小值, 并指出使其取得最大值和最小值时  $x$  的集合:

$$(1) y = 3^{\cos 2x}, x \in \mathbf{R};$$

$$(2) y = \cos x - \sin^2 x, x \in \mathbf{R}.$$

90. 判断下列函数的奇偶性, 并说明理由:

$$(1) y = \sin^2 x + \cos x;$$

$$(2) y = 2 \sin x + \cos 2x;$$

$$(3) y = \frac{x}{1 + \cos x}.$$

91. 求函数  $y = \cos 2x, x \in [-\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}]$  的单调区间和值域.

92. 函数  $y = 1 - 2 \sin^2(x - \frac{\pi}{4})$  是 ( ).

A. 最小正周期为  $\pi$  的奇函数

B. 最小正周期为  $\pi$  的偶函数

C. 最小正周期为  $\frac{\pi}{2}$  的奇函数

D. 最小正周期为  $\frac{\pi}{2}$  的偶函数

93. 设函数  $y = \sin(\frac{x}{2} + \varphi)$  (其中常数  $\varphi \in [0, \pi]$ ) 是  $\mathbf{R}$  上的偶函数, 求  $\varphi$  的值.

94. 已知  $y = \sin x$  和  $y = \cos x$  的图像的连续三个交点  $A, B, C$  构成  $\triangle ABC$ , 求  $\triangle ABC$  的面积.

95. 当函数  $y = A \sin(\omega x + \varphi)$  ( $A > 0, \omega > 0$ ) 中的常数  $A, \omega, \varphi$  分别取下列各组值时, 在同一平面直角坐标系中分别作出它们的图像:

$$(1) A = \frac{1}{2}, \omega = 1, \varphi = 0;$$

$$(2) A = 1, \omega = \frac{1}{2}, \varphi = 0;$$

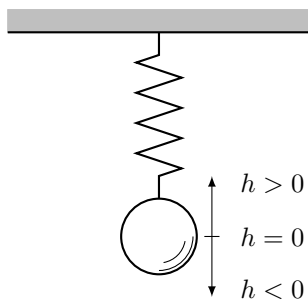
$$(3) A = 1, \omega = 1, \varphi = -\frac{\pi}{2}.$$

96. 求函数  $y = \sqrt{2} \sin(30\pi x - \frac{\pi}{12})$  的振幅、频率和初始相位.

97. 已知某交流电流  $I(A)$  随时间  $t(s)$  的变化规律可以用函数  $I = 8 \sin(100\pi t - \frac{\pi}{2}), t \in [0, +\infty)$  表示. 求这种交流电流在 0.5s 内往复运行的次数.

98. 作出函数  $y = 2 \sin(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{6})$  的大致图像.

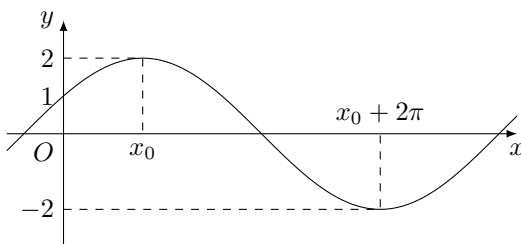
99. 如图, 弹簧挂着的小球上下振动. 设小球相对于平衡位置 (即静止时的位置) 的距离  $h(\text{cm})$  与时间  $t(\text{s})$  之间的函数表达式是  $h = 2 \sin(\pi t + \frac{\pi}{4}), t \geq 0$ , 作出这个函数的大致图像, 并回答下列问题:



- (1) 小球开始振动 (即  $t = 0$ ) 时的位置在哪里?
- (2) 小球最高点和最低点与平衡位置的距离分别是多少?
- (3) 经过多少时间小球往复振动一次?
- (4) 每秒钟小球往复振动多少次?

100. 作出函数  $y = \sin x + \sqrt{3} \cos x$  的大致图像.

101. 如图, 已知函数  $y = A \cos(\omega x + \varphi)$  ( $A > 0, \omega > 0, 0 < \varphi < 2\pi$ ) 的图像与  $y$  轴的交点为  $(0, 1)$ , 并已知其在  $y$  轴右侧的第一个最高点和第一个最低点的坐标分别为  $(x_0, 2)$  和  $(x_0 + 2\pi, -2)$ . 求此函数的表达式.



102. 三相交流电的插座上有四个插孔, 其电压分别为  $U_0 = 0, U_1 = A \sin \omega t, U_2 = A \sin(\omega t + \frac{2\pi}{3}), U_3 = A \sin(\omega t + \frac{4\pi}{3})$ , 其中  $\omega = 100\pi \text{ rad/s}, A = 220\sqrt{2} \text{ V}$ . 记  $U_2 - U_1, U_3 - U_2, U_1 - U_3$  的最大值分别为  $Y_1, Y_2, Y_3$ , 试计算三相交流电的线电压的有效值  $\frac{Y_1}{\sqrt{2}}, \frac{Y_2}{\sqrt{2}}$  及  $\frac{Y_3}{\sqrt{2}}$ .

103. 求下列函数的最小正周期:

- (1)  $y = \tan(-\frac{1}{2}x)$ ;
- (2)  $y = \tan(3x + \frac{\pi}{3})$ .

104. 求函数  $y = \tan(ax + b)$  ( $a, b$  为常数, 且  $a \neq 0$ ) 的最小正周期.

105. 求函数  $y = \tan x, x \in [-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}]$  的最大值和最小值, 并指出使其取得最大值和最小值时所有  $x$  的值.

106. 判断下列函数的奇偶性, 并说明理由:

- (1)  $y = \tan 2x$ ;

(2)  $y = |\tan x|$ ;

(3)  $y = \frac{1}{\tan x}$ ;

(4)  $y = \frac{\tan x}{x}$ .

107. 求函数  $y = 2 \tan(3x - \frac{\pi}{6})$  的定义域和单调区间.

108. 求正切函数  $y = \tan x$  的零点.

109. 对于函数  $y = f(x)$ , 其中  $f(x) = a \sin 2x + b \tan x + 3$ , 已知  $f(-2) = 1$ . 求  $f(\pi + 2)$  的值.

110. 求函数  $y = \tan^2 x - \tan x$ ,  $x \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$  的最大值与最小值.

111. 如果把平面上所有的单位向量的起点都平移到同一点, 那么它们的终点构成的图形是什么?

112. 在平面直角坐标系中, 作出表示下列向量的有向线段:

(1) 向量  $\vec{a}$  的起点在坐标原点, 与  $x$  轴正方向的夹角为  $120^\circ$  且  $|\vec{a}| = 3$ ;

(2) 向量  $\vec{b}$  的模为 4, 方向与  $y$  轴的正方向反向;

(3) 向量  $\vec{c}$  的方向与  $y$  轴的正方向同向, 模为 2.

113. 判断下列命题的真假, 并说明理由:

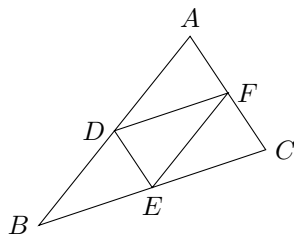
(1) 长度相等的向量均为相等向量;

(2) 给定向量  $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 、 $\vec{c}$ , 若  $\vec{a} = \vec{b}$ ,  $\vec{b} = \vec{c}$ , 则  $\vec{a} = \vec{c}$ ;

(3) 若  $ABCD$  为平行四边形, 则必有  $\vec{AB} = \vec{CD}$ ;

(4) 若平面上四点  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$  使  $\vec{AB} = \vec{CD}$ , 则  $AB \parallel CD$ .

114. 如图, 在  $\triangle ABC$  中, 点  $D$ 、 $E$ 、 $F$  分别是  $AB$ 、 $BC$ 、 $CA$  的中点, 根据下列条件, 写出相应的向量:

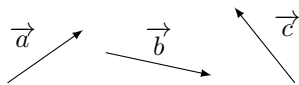


(1) 与向量  $\vec{AD}$  相等的向量;

(2) 向量  $\vec{DE}$  的负向量;

(3) 与向量  $\vec{EF}$  平行的向量.

115. 如图, 已知向量  $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 、 $\vec{c}$ , 作出下列向量:



- (1)  $\vec{a} + \vec{b}$ ,  $\vec{b} + \vec{c}$ ,  $\vec{a} + \vec{c}$ ;
- (2)  $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$  和  $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ .

116. 化简下列向量运算:

- (1)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}$ ;
- (2)  $(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{CD})$ ;
- (3)  $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MB}) + (\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DM})$ .

117. 设向量  $\vec{a}$  表示“向东走 2km”; 向量  $\vec{b}$  表示“向西走 1km”; 向量  $\vec{c}$  表示“向南走 2km”; 向量  $\vec{d}$  表示“向北走 1km”. 试说明下列向量所表示的意义:

- (1)  $\vec{a} + \vec{a}$ ;
- (2)  $\vec{a} + \vec{c}$ ;
- (3)  $\vec{a} + \vec{b} + \vec{d}$ ;
- (4)  $\vec{c} + \vec{d} + \vec{c}$ .

118. 设向量  $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ , 且  $|\overrightarrow{OA}| = 12$ ,  $|\overrightarrow{OB}| = 4$ ,  $\angle AOB = \frac{\pi}{3}$ . 求  $|\vec{a} + \vec{b}|$ .

119. 运用作图的方法, 验证下列等式:

- (1)  $\frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) + \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a}$ ;
- (2)  $\frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) - \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b}) = \vec{b}$ .

120. 化简下列向量运算:

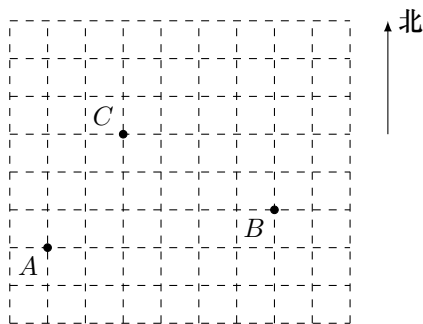
- (1)  $4(\vec{a} + \vec{b}) - 3(\vec{a} - \vec{b}) - 8\vec{b}$ ;
- (2)  $3(\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}) + 4(\vec{c} - \vec{a} - \vec{b})$ ;
- (3)  $\frac{1}{3}[\frac{1}{2}(2\vec{a} + 8\vec{b}) - (4\vec{a} - 2\vec{b})]$ .

121. 已知四边形  $ABCD$  和点  $O$  在同一平面上, 设向量  $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ ,  $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ ,  $\overrightarrow{OD} = \vec{d}$ , 且  $\vec{a} + \vec{c} = \vec{b} + \vec{d}$ . 求证:  $ABCD$  是平行四边形.

122. 已知平行四边形  $ABCD$ , 设向量  $\overrightarrow{AC} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{BD} = \vec{b}$ . 试用  $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$  表示下列向量:

- (1)  $\overrightarrow{AB}$ ;
- (2)  $\overrightarrow{BC}$ .

123. 如图是由边长为 1 的小正方形组成的网格. 按要求, 分别以  $A$ 、 $B$ 、 $C$  为向量的起点, 在图中画出下列向量:

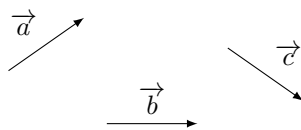


- (1) 正北方向且模为 2 的向量  $\overrightarrow{AE}$ ;
- (2) 模为  $2\sqrt{2}$ 、方向为北偏西  $45^\circ$  的向量  $\overrightarrow{BF}$ ;
- (3) (2) 中向量  $BF$  的负向量.

124. 已知正方形  $ABCD$  的边长为 1, 求:

- (1)  $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}|$ ;
- (2)  $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{AC}|$ ;
- (3)  $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC}|$ .

125. 如图, 已知向量  $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 、 $\vec{c}$ , 作出下列向量:



- (1)  $\vec{a} + \vec{c} - \vec{b}$  和  $\vec{a} + (\vec{c} - \vec{b})$ ;
- (2)  $\vec{a} - (\vec{b} + \vec{c})$  和  $\vec{a} - \vec{c} - \vec{b}$ .

126. 试用作图法验证下列不等式:

- (1)  $|\vec{a}| - |\vec{b}| \leq |\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$ ;
- (2)  $|\vec{a}| - |\vec{b}| \leq |\vec{a} - \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$ .

127. 判断下列命题的真假, 并说明理由:

- (1) 若存在一个  $\lambda \in \mathbf{R}$  使  $\lambda \vec{a} = \lambda \vec{b}$ , 则  $\vec{a} = \vec{b}$ ;

(2) 对于任意给定的实数  $\lambda$  和向量  $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ , 均有  $\lambda(\vec{a} - \vec{b}) = \lambda\vec{a} - \lambda\vec{b}$ ;

(3) 对于任意给定的实数  $\lambda$ 、 $\mu$  和向量  $\vec{a}$ , 均有  $(\lambda - \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} - \mu\vec{a}$ .

128. 设  $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$  是两个不平行的向量, 求证: 若实数  $\lambda$ 、 $\mu$  使得  $\lambda\vec{a} + \mu\vec{b} = \vec{0}$ , 则  $\lambda = \mu = 0$ .

129. 已知  $\vec{e}_1$ 、 $\vec{e}_2$  是两个不平行的向量, 而向量  $\vec{AB} = 3\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2$ ,  $\vec{BC} = -2\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2$ ,  $\vec{CD} = -2\vec{e}_1 - 4\vec{e}_2$ . 求证:  $A$ 、 $C$ 、 $D$  三点共线.

130. 已知  $G$  是  $\triangle ABC$  的重心,  $D$ 、 $E$ 、 $F$  分别为  $AB$ 、 $AC$ 、 $BC$  中点. 求证:  $\vec{GD} + \vec{GE} + \vec{GF} = \vec{0}$ .

131. 设向量  $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$  满足  $|\vec{a}| = 6$ ,  $|\vec{b}| = 3$ , 且  $\vec{a} \cdot \vec{b} = -12$ , 则向量  $\vec{a}$  在向量  $\vec{b}$  方向上的投影是\_\_\_\_\_.

132. 在  $\triangle ABC$  中, 若  $|AB| = 3$ ,  $|AC| = 2$ ,  $|BC| = \sqrt{10}$ , 则  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} =$ \_\_\_\_\_.

133. 已知向量  $\vec{a}$  与  $\vec{b}$  的夹角为  $45^\circ$ , 且  $|\vec{a}| = 1$ ,  $|2\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{10}$ , 则  $|\vec{b}| =$ \_\_\_\_\_.

134. 在菱形  $ABCD$  中,  $(\vec{AB} + \vec{AD}) \cdot (\vec{AB} - \vec{AD}) =$ \_\_\_\_\_.

135. 设向量  $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$  满足  $|\vec{a}| = 1$ ,  $|\vec{b}| = \sqrt{2}$ , 向量  $\vec{a} - \vec{b}$  与  $\vec{a}$  垂直. 求  $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ .

136. 设向量  $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$  满足  $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 60^\circ$ ,  $|\vec{a}| = 3$ ,  $|\vec{b}| = 3$ . 求  $(\vec{a} + \vec{b})^2$ .

137. 在  $\triangle ABC$  中,  $|AB| = |AC| = 4$ ,  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 8$ . 判断  $\triangle ABC$  的形状, 并说明理由.

138. 设向量  $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$  满足  $|\vec{a}| = 4$ ,  $|\vec{b}| = 5$ ,  $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{21}$ . 分别求下列各式的值:

(1)  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ;

(2)  $(2\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} + 3\vec{b})$ .

139. 设  $\vec{e}_1$ 、 $\vec{e}_2$  是互相垂直的单位向量, 向量  $\vec{a} = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2$ ,  $\vec{b} = -3\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$ . 求  $(\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b})$ .

140. 设向量  $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$  满足  $|\vec{a}| = 1$ ,  $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \frac{1}{2}$ .

(1) 求  $|\vec{b}|$ ;

(2) 设  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}$ , 求  $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ .

141. 设向量  $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 、 $\vec{c}$  满足  $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ , 且  $|\vec{a}| = 4$ ,  $|\vec{b}| = 3$ ,  $|\vec{c}| = 5$ . 求下列各式的值:

(1)  $\vec{a} \cdot \vec{c}$ ;

(2)  $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}$ .

142. 在  $\triangle ABC$  中,  $C = \frac{\pi}{2}$ ,  $|AC| = 1$ . 求  $\vec{AB} \cdot \vec{CA}$ .

143. 在  $\triangle ABC$  中, 若  $|AB| = 2$ ,  $|AC| = 3$ ,  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 1$ , 则  $|BC| =$ \_\_\_\_\_.

144. 设向量  $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$  满足  $|\vec{a}| = 2$ ,  $|\vec{b}| = 1$ ,  $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{2\pi}{3}$ . 求  $|\vec{a} - \vec{b}|$ .

145. 在  $\triangle ABC$  中,  $|BC| = 3$ ,  $|AC| = 1$ ,  $\angle BCA = 30^\circ$ . 求  $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA}$ .

146. 在直角三角形  $ABC$  中, 若  $D$  是斜边  $AB$  的中点,  $P$  为线段  $CD$  的中点, 则  $\frac{|\overrightarrow{PA}|^2 + |\overrightarrow{PB}|^2}{|\overrightarrow{PC}|^2} =$ \_\_\_\_\_.

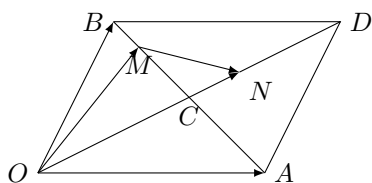
147. 在  $\triangle ABC$  中, 设  $M$  是  $BC$  的中点, 且  $|AM| = 3$ ,  $|BC| = 10$ , 则  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} =$ \_\_\_\_\_.

148. 已知  $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$  都是非零向量, 且  $\vec{a} + 3\vec{b}$  与  $7\vec{a} - 5\vec{b}$  垂直,  $\vec{a} - 4\vec{b}$  与  $7\vec{a} - 2\vec{b}$  垂直. 求  $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$  的夹角.

149. 在  $\triangle ABC$  中, 内角  $A$ 、 $B$ 、 $C$  的对边依次为  $a$ 、 $b$ 、 $c$ . 求证:  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(b^2 + c^2 - a^2)$ .

150. 在四边形  $ABCD$  中, 设向量  $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ ,  $\overrightarrow{CD} = \vec{c}$ ,  $\overrightarrow{DA} = \vec{d}$ , 且  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{d} = \vec{d} \cdot \vec{a}$ .  
求证: 四边形  $ABCD$  是矩形.

151. 如图,  $OADB$  是以向量  $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$  为邻边的平行四边形,  $C$  是对角线的交点, 且  $BM = \frac{1}{3}BC$ ,  $CN = \frac{1}{3}CD$ . 试用  $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$  表示  $\overrightarrow{OM}$ 、 $\overrightarrow{ON}$ 、 $\overrightarrow{MN}$ .



152. 已知向量  $\vec{a} = (-1, 2)$ ,  $\vec{b} = (2, 1)$ . 求  $2\vec{a} + 3\vec{b}$ ,  $\vec{a} - 2\vec{b}$ ,  $\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b}$ .

153. 已知点  $A(3, 2)$ 、 $B(7, 5)$ 、 $C(-1, 8)$ , 求  $\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ .

154. 已知向量  $\vec{a} = (-5, 12)$ , 求  $|\vec{a}|$  以及向量  $\vec{a}$  的单位向量  $\vec{a}_0$ .

155. 已知点  $A(1, 2)$ 、 $B(-3, 1)$ , 且  $\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AE} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ . 求点  $C$ 、 $D$ 、 $E$  的坐标.

156. 已知向量  $\vec{a} = (5, 3)$ ,  $\vec{b} = (x, 1)$ , 且  $\vec{a} \parallel \vec{b}$ . 求实数  $x$  的值.

157. 已知点  $A(3, 0)$ 、 $B(-1, -6)$ , 点  $P$  是直线  $\overrightarrow{AB}$  上一点, 且  $|\overrightarrow{AP}| = \frac{1}{3}|\overrightarrow{AB}|$ . 求点  $P$  的坐标.

158. 已知向量  $\vec{a} = (3, -1)$ ,  $\vec{b} = (1, -2)$ . 求  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  与  $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ .

159. 已知向量  $\vec{a} = (3 - m, 3m)$ ,  $\vec{b} = (m + 2, -2)$ , 且  $\vec{a} \perp \vec{b}$ . 求实数  $m$  的值.

160. 已知向量  $\vec{a} = (2, 4)$ , 求与  $\vec{a}$  垂直的单位向量的坐标.

161. 已知  $O$  为坐标原点, 在  $\triangle ABC$  中, 向量  $\overrightarrow{OA} = (2, 3)$ ,  $\overrightarrow{OB} = (1, 4)$ , 且  $\overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OA}$ ,  $\overrightarrow{OD} = 3\overrightarrow{OB}$ ,  $\overrightarrow{OE} = 2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ . 求  $C$ 、 $D$ 、 $E$  三点的坐标, 并判断  $C$ 、 $D$ 、 $E$  三点是否共线.

162. 已知向量  $\vec{a} = (1, 2)$ ,  $\vec{b} = (m, 1)$ , 且  $\vec{a} + 2\vec{b}$  与  $2\vec{a} - \vec{b}$  平行. 求实数  $m$  的值.

163. 经过点  $M(-2, 3)$  的直线分别与  $x$  轴、 $y$  轴交于  $A$ 、 $B$  两点, 且  $|\overrightarrow{AB}| = 3|\overrightarrow{AM}|$ . 求点  $A$ 、 $B$  的坐标.

164. 已知向量  $\vec{a} = (1, -1)$ ,  $\vec{b} = (2, -3)$ , 且  $k\vec{a} - 2\vec{b}$  与  $\vec{a}$  垂直. 求实数  $k$  的值.

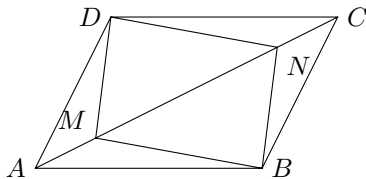
165. 已知平面上  $A$ 、 $B$  两点的坐标分别是  $(3, 5)$ 、 $(0, 1)$ ,  $P$  为直线  $AB$  上一点, 且  $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{5}\overrightarrow{PB}$ . 求点  $P$  的坐标.

166. 已知  $\triangle ABC$  的三个顶点  $A$ 、 $B$ 、 $C$  的坐标分别是  $(1, 2)$ 、 $(2, 3)$ 、 $(3, 7)$ , 求此三角形的面积.

167. 用向量方法证明三角形的余弦定理.

168. 菱形是四条边都相等的四边形. 用向量方法证明菱形的对角线互相垂直.

169. 如图, 已知  $M$ 、 $N$  是平行四边形  $ABCD$  的对角线  $AC$  上的两点, 且  $AM = CN$ . 求证:  $BMDN$  是平行四边形.



170. 证明: 三角形的三条中线相交于一点.

171. 已知平面上不共线的三点  $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$  与  $C(x_3, y_3)$ , 求证:  $\triangle ABC$  的面积  $S = \frac{1}{2}|x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)|$ .

172. 已知  $a$ 、 $b$  均为正数, 且  $a + b = 1$ . 求证:  $(a + 2)^2 + (b + 3)^2 \geq 18$ .

173. 已知  $ABCD$  是正方形,  $M$  是  $AB$  边的中点, 点  $E$  在对角线  $AC$  上, 且  $AE : EC = 3 : 1$ . 求证:  $\angle MED = \frac{\pi}{2}$ .

174. 用向量方法证明: 把一个平行四边形的一个顶点和两条不过此顶点的边的中点分别连线, 则这两条连线三等分此平行四边形的一条对角线.

175. 已知复数  $(\frac{1}{2}x + y) + (5x + \frac{2}{3}y - 16)i = -4$ , 其中  $x$ 、 $y \in \mathbf{R}$ . 求  $x$ 、 $y$  的值.