

1. (001085) 判断题: (如果正确请在题目前面的横线上写“T”, 错误请在题目前面的横线上写“F”)

- _____ (1) 若 $a > b, c = d$, 则 $ac > bd$;
_____ (2) 若 $\frac{a}{c^2} < \frac{b}{c^2}$, 则 $a < b$;
_____ (3) 若 $ac < bc$, 则 $a < b$;
_____ (4) 若 $a > b$, 则 $ac^2 > bc^2$;
_____ (5) 若 $a > b, c < d$, 则 $ac > bd$;
_____ (6) 若 $a > b > 0, c > d > 0$, 则 $\frac{a}{c} > \frac{b}{d}$;
_____ (7) 若 $a > b, c \geq d$, 则 $a + c > b + d$;
_____ (8) 若 $a > b, c \geq d$, 则 $a + c \geq b + d$;
_____ (9) 若 $\sqrt[3]{a} > \sqrt[3]{b}$, 则 $a > b$.
_____ (10) 若 $ab^2 \geq 0$, 则 $a \geq 0$.

2. (001138) 已知 a, b, c 是不全相等的正数. 证明: $\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} > 6$.

3. (001134) 已知 $x, y \in \mathbf{R}$, 用比较法证明: $x^2 + y^2 \geq 4(x + y) - 8$.

4. (001139) 已知 $x, y \in \mathbf{R}^+$ 且 $x + y > 2$, 用反证法证明: $\frac{1+y}{x}$ 与 $\frac{1+x}{y}$ 中至少有一个小于 2.

5. (002812) 已知 $a, b \in \mathbf{R}^+$ 且 $a \neq b$, 求证: $|a^3 + b^3 - 2ab\sqrt{ab}| > |a^2b + ab^2 - 2ab\sqrt{ab}|$.

6. (000046) 已知实数 $0 < a < b$, 求证: $a < \frac{2ab}{a+b} < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} < b$.

7. (001086) 设 $\{a, b, m, n\} \subseteq \mathbf{R}^+$ 且 $a > b$, 将 $\frac{a}{b}, \frac{b}{a}, \frac{a+m}{b+m}, \frac{b+n}{a+n}$ 按由大到小的次序排列:
_____ > _____ > _____ > _____.

8. (001124) 设 $a, b, c, d > 0$.

(1) 利用三元的基本不等式“ $x, y, z > 0$ 时, $x^3 + y^3 + z^3 \geq 3xyz$ ”, 证明: $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 \geq abc + bcd + cda + dab$;

(2) 该不等式能否加强为 $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 \geq k(abc + bcd + cda + dab)$, 其中 $k = 1.0001$? 为什么?

(3) 利用三元的基本不等式“ $x, y, z > 0$ 时, $x^3 + y^3 + z^3 \geq 3xyz$ ”, 证明: $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 \geq \frac{3\sqrt[3]{2}}{2}(abc + bcd)$.

9. (000371) 已知 $x, y \in \mathbf{R}^+$, 且 $x + 2y = 1$, 则 xy 的最大值为_____.

10. (001127) 已知正实数 x, y 满足 $x + \frac{4}{y} = 1$, 求 $\frac{1}{x} + y$ 的最小值.

11. (001128) 已知 $x > 2$, 求代数式 $\frac{x^2 - 3x + 3}{x - 2}$ 的最小值.

12. (002755) 若正实数 a, b 满足 $a + b = 1$, 则 ().

A. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ 的最大值是 4 B. ab 的最小值是 $\frac{1}{4}$ C. $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ 有最大值 $\sqrt{2}$ D. $a^2 + b^2$ 有最小值 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

13. (002768) (1) 设 $x < 2$, 则 $2x + \frac{8}{x-2}$ 有最_____值是_____, 此时 $x =$ _____;

(2) 设 $0 < x < \sqrt{2}$, 则 $x\sqrt{4-2x^2}$ 的最大值是_____, 此时 $x =$ _____.

14. (001130) 已知直角三角形的面积为 8, 求斜边长的最小值.

15. (007826) 建造一个容积为 8 立方米、深为 2 米的长方形无盖水池. 如果池底和池壁的造价每平方米分别为 120 元和 80 元, 那么水池的最低造价是多少元?

16. (010104) 证明: $|x+2| - |x-1| \geq -3$, 对所有实数 x 均成立, 并求等号成立时 x 的取值范围.

17. (001096) 利用绝对值的三角不等式 $|a+b| \leq |a| + |b|$, 证明:

(1) 对任意 $x, y \in \mathbf{R}$, $|x-y| \geq |x| - |y|$;

(2) 对任意 $x, y \in \mathbf{R}$, $|x-y| \geq ||x| - |y||$.

18. (002750) 命题 (1) $a > b \Rightarrow ac^2 > bc^2$; (2) $ac^2 > bc^2 \Rightarrow a > b$; (3) $a > b \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$; (4) $a < b < 0, c < d < 0 \Rightarrow ac > bd$; (5) $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b} \Rightarrow a > b (n \in \mathbf{N}^*)$; (6) $a + c < b + d \Leftrightarrow \begin{cases} a < b, \\ c < d; \end{cases}$ (7) $a < b < 0 \Rightarrow a^2 > ab > b^2$. 其中真命题的序号是_____.

19. (001122) 在解不等式时, 有时我们可以用不等式的性质来求解. 例如解不等式 $x^2 + x + 1 \geq 0$, 我们可以利用不等式的基本性质, 得到 $x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} > 0$ 恒成立, 因此解集为 \mathbf{R} . 请你用基本不等式的观点解以下两个不等式:

(1) $x + \frac{1}{x} > 1$;

(2) $x + \frac{1}{x} > 2$.

20. (000022) 已知 $x > y$, 求证: $x^3 - y^3 > x^2y - xy^2$.

21. (001142) 已知 $g(x) = x^3 - 3x$.

(1) 若 $a > b \geq 1$, 证明: $g(a) > g(b)$;

(2) 若 $-1 \leq a < b \leq 1$, 证明: $g(a) > g(b)$.

22. (002761) 设 $a, b \in \mathbf{R}$, 若 $a - |b| > 0$, 则下列不等式中正确的是 ().

A. $b - a > 0$

B. $a^3 + b^3 < 0$

C. $b + a > 0$

D. $a^2 - b^2 < 0$

23. (001120) 判断以下各不等式是否成立. 如果成立在前面的横线上写 “T”, 如果不成立在前面的横线上写 “F”.

____(1) 当 $x < 0$ 时, $x + \frac{1}{x} \leq -2$;

____(2) 当 $x > 0$ 时, $x + \frac{1}{x} \geq 2$;

____(3) 当 $x > 0$ 时, $x^2 + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{x}$;

____(4) 当 $a, b \geq 0$ 时, $a + b \geq 2ab$;

____(5) 当 $a, b \geq 0$ 时, $2ab \geq a + b$;

____(6) 当 $x, y, z \in \mathbf{R}$ 时, $x^2 + y^2 + z^2 \geq 2xy + yz$;

____(7) 当 $a, b \in \mathbf{R}$ 时, $a^2 + b^2 + 4 \geq ab + 2a + 2b$;

____(8) 当 $a, b \in \mathbf{R}$ 时, $a^3 + b^3 \geq 2a^2b$;

____(9) 当 $a, b \in \mathbf{R}$ 时, $a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2$;

____(10) 当 $a, b \in \mathbf{R}^+$ 时, $a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2$;

____(11) 当 $x, y > 0$ 时, $x^2 + y^2 \geq (x + y)^2$;

24. (001123) 试确定实常数 k 使得 $a^2 + b^2 + c^2 \geq k(a + b + c)^2 \geq ab + bc + ca$ 对任意的 $a, b, c \in \mathbf{R}$ 成立, 并证明该不等式.
25. (000924) 已知 $x, y \in \mathbf{R}^+$, 且满足 $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$, 则 xy 的最大值为_____.
26. (000939) 若 $m > 0, n > 0, m + n = 1$, 且 $\frac{t}{m} + \frac{1}{n}(t > 0)$ 的最小值为 9, 则 $t =$ _____.
27. (002753) 下列函数中, 最小值为 2 的函数有_____.
- (1) $y = x + \frac{1}{x}, x \in (0, +\infty)$; (2) $y = x + \frac{1}{x}, x \in (1, +\infty)$; (3) $y = \frac{x^2 + 3}{\sqrt{x^2 + 2}}$; (4) $y = \log_3 x + \log_x 3$.
28. (001131) 已知直角三角形的斜边长为 2, 求周长的最大值.
29. (001132) 用长为 $4L$ 的篱笆在一堵墙边上圈起一块矩形的地来 (只需要围三面), 问能圈到的地最大面积为多少? 如何圈?
30. (005225) 若实数 a, b 满足 $ab > 0$, 则在① $|a + b| > |a|$; ② $|a + b| < |b|$; ③ $|a + b| < |a - b|$; ④ $|a + b| > |a - b|$ 这四个式子中, 正确的是 ().
- A. ①② B. ①③ C. ①④ D. ②④
31. (009468) 已知实数 a, b 满足 $|a| < \frac{1}{2}, |b| < \frac{1}{2}$. 证明下列各式:
- (1) $|a + b| < 1$;
- (2) $|a - b| < 1$.
32. (005239) 已知关于 x 的不等式 $|x - 4| + |x - 3| < a$ 在实数集 \mathbf{R} 上的解集不是空集, 求正数 a 的取值范围.