1. 函数 $y=\log_2(x-2)$ 的定义域为__________.

2. 设圆锥的底面半径为 1, 体积为 $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\pi$, 则该圆锥的侧面积为__________.

3. 等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_3+a_{10}=25$, 则其前 12 项之和 S_{12} 的值为__________.

4. 幂函数 $y=x^k$ 的图像经过点 $(4,\dfrac{1}{2})$, 则它的单调减区间为__________.

5. 三角形 ABC 中, $A=45°$, $B=75°$, AB 边的长为 $2\sqrt{6}$, 则 BC 边的长为__________.

6. 已知 a 是实数, 方程 $x^2+2x+a=0$ 的两根在复平面上对应的点分别为 P 和 Q. 若三角形 POQ 是等腰直角三角形, 则 $a=$__________.

7. 设实数 x,y 满足 $|x|+|y|\le 1$, 则 $2x+y$ 的最大值为__________.

8. 已知偶函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 且当 $x\ge 0$ 时, $f(x)=x-4$, 则不等式 $xf(x)\le 5$ 的解为__________.

9. 等比数列 $\{a_n\}$ 的首项为 1, 公比为 3, 则极限 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_na_{n+1}}{a_1+a_2+\cdots+a_{2n-1}}$ 的值为__________.

10. 甲乙两人分别投掷两颗骰子与一颗骰子, 设甲的两颗骰子的点数分别为 a 与 b, 乙的骰子的点数为 c. 则掷出的点数满足 $|a-b|=c$ 的概率为__________(用最简分数表示).

11. 已知 a 是实数, 在 $(1+ax)^8$ 的二项展开式中, 第 $k+1$ 项的系数为 $c_{k+1}=\mathrm{C}_8^k\cdot a^k$ $(k=0,1,2,3,\cdots,8)$. 若 $c_1<c_2<c_3<\cdots<c_9$, 则 a 的取值范围为__________.

12. 设 $P_1P_2P_3\cdots P_8$ 是平面直角坐标系中的一个正八边形, 点 P_i 的坐标为 (x_i,y_i) $(i=1,2,\cdots,8)$. 集合 $A=\{y|存在i\in\{1,2,\cdots,8\},\ 使得y=y_i\}$, 则集合 A 的元素个数可能为__________(写出所有可能的值).

13. 方程 $2\sin(2x+\dfrac{\pi}{3})-1=0$ 在区间 $[0,4\pi)$ 上的解的个数为 (　　).

A. 2　　B. 4　　C. 6　　D. 8

14. 已知直线 l 平行于平面 α, 平面 β 垂直于平面 α. 则以下关于直线 l 与平面 β 的位置关系的表述, 正确的是 (　　).

A. l 与 β 不平行　　B. l 与 β 不相交

C. l 不在平面 β 上　　D. l 在 β 上, 与 β 平行, 与 β 相交都有可能

15. 设三角形 ABC 是位于平面直角坐标系 xOy 的第一象限中的一个不等边三角形. 该平面上的动点 P 满足: $|PA|^2+|PB|^2+|PC|^2=|OA|^2+|OB|^2+|OC|^2$. 已知动点 P 的轨迹是一个圆, 则该圆的圆心位于三角形 ABC 的 (　　).

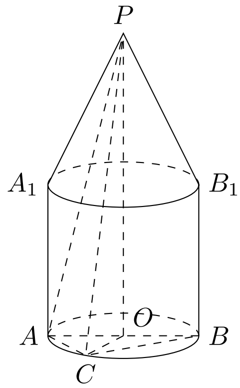
A. 内心　　B. 外心　　C. 重心　　D. 垂心

16. 已知 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 皆是定义域、值域均为 $\mathbf{R}$ 的函数. 若对任意 $x\in\mathbf{R}$, $f(x)>g(x)$ 恒成立, 且 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 的反函数 $y=f^{-1}(x)$、$y=g^{-1}(x)$ 均存在. 命题 P: "对任意 $x\in\mathbf{R}$, $f^{-1}(x)<g^{-1}(x)$ 恒成立"; 命题 Q: "函数 $y=f(x)+g(x)$ 的反函数一定存在". 以下关于这两个命题的真假判断, 正确的是 (　　).

A. 命题 P 真, 命题 Q 真　　B. 命题 P 真, 命题 Q 假

C. 命题 P 假, 命题 Q 真　　D. 命题 P 假, 命题 Q 假

17. 如图, 空间几何体由两部分构成, 上部是一个底面半径为 1, 高为 2 的圆锥, 下部是一个底面半径为 1, 高为 2 的圆柱. 圆锥和圆柱的轴在同一直线上, 圆锥的下底面与圆柱的上底面重合. 点 P 是圆锥的顶点, AB 是圆柱下底面的一条直径, AA_1、BB_1 是圆柱的两条母线. C 是弧 AB 的中点.



(1) 求异面直线 PA_1 与 BC 所成的角的大小;

(2) 求点 B_1 到平面 PAC 的距离.

18. 已知 α, λ 是实常数, $f(x) = \begin{vmatrix} \lambda\cos x & \sin(x-\alpha) \\ \sin(x+\alpha) & \cos x \end{vmatrix}$.

(1) 当 $\lambda = 1$, $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$ 时, 求函数 $y = f(x)$ 的最小正周期、单调增区间与最大值;

(2) 是否存在 λ, 使得 $f(x)$ 是与 α 有关的常数函数 (即 $f(x)$ 的值与 x 的取值无关)? 若存在, 求出所有满足条件的 λ; 若不存在, 说明理由.

19. 已知 a 是实常数, $a > 0$, $f(x) = ax - 1 + \dfrac{1}{x^2}$.

(1) 当 $a = 2$ 时, 判断函数 $y = f(x)$ 在区间 $[1, +\infty)$ 上的单调性, 并说明理由;

(2) 写出一个 a 的值, 使得 $f(x) = 0$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上有至少两个不同的解, 并严格证明你的结论.

20. 设抛物线 Γ 的方程为 $y^2 = 2px$, 其中常数 $p > 0$. F 是抛物线 Γ 的焦点.

(1) 若直线 $x = 3$ 被抛物线 Γ 所截得的弦长为 6, 求 p 的值;

(2) 设 A 是点 F 关于顶点 O 的对称点. P 是抛物线 Γ 上的动点, 求 $\dfrac{|PA|}{|PF|}$ 的最大值;

(3) 设 $p = 2$, l_1, l_2 是两条互相垂直, 且均经过点 F 的直线. l_1 与抛物线 Γ 交于点 A、B, l_2 与抛物线交于点 C、D. 若点 G 满足 $4\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{FC} + \overrightarrow{FD}$, 求点 G 的轨迹方程.

21. 设各项均为整数的无穷数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1 = 1$, 且对所有 $n \in \mathbf{N}^*$, 均成立 $|a_{n+1} - a_n| = n$.

(1) 写出 a_4 的所有可能值 (不需要写计算过程);

(2) 若 $\{a_{2n-1}\}$ 是公差为 1 的等差数列, 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(3) 证明: 存在满足条件的数列 $\{a_n\}$, 使得在该数列中, 有无穷多项为 2019.

22. 设 $m \in \mathbf{R}$. 已知集合 $A = \{2, 3\}$, $B = \{1, m\}$. 若 $4 - m \in A$, 则 $m =$__________.

23. 不等式 $|1-x|>1$ 的解集是__________.

24. 设 $a\in\mathbf{R}$. 若 a 使得函数 $f(x)=\sqrt{8-ax-2x^2}$ 是偶函数, 则函数 $y=f(x)$ 的定义域是__________.

25. 已知 $\triangle ABC$ 的三内角 A,B,C 所对的边长分别为 a,b,c, 若 $a^2=b^2+c^2+2bc\sin A$, 则内角 A 的大小是__________.

26. 已知向量 $\overrightarrow{a}$ 在向量 $\overrightarrow{b}$ 方向上的投影为 -2, 且 $|\overrightarrow{b}|=3$, 则 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=$__________(结果用数值表示).

27. 方程 $\log_3\dfrac{1}{2^x+4}+\log_3(4^x-2)=0$ 的解 $x=$__________.

28. 已知函数 $f(x)=\begin{vmatrix}\sin x\cos x\\ \cos x\cos x\end{vmatrix}$, 则函数 $y=f(x)$ 的最小正周期是__________.

29. 已知某市 A 社区 35 岁至 45 岁的居民有 450 人, 46 岁至 55 岁的居民有 750 人, 56 岁至 65 岁的居民有 900 人. 为了解该社区 35 岁至 65 岁居民的身体健康状况, 社区负责人采用分层抽样技术抽取若干人进行体检调查, 若从 46 岁至 55 岁的居民中随机抽取了 50 人, 试问这次抽样调查抽取的人数是__________ 人.

30. 已知 α 是实系数一元二次方程 $x^2-(2m-1)x+m^2+1=0$ 的一个虚数根, 且 $|\alpha|\le 2$, 则实数 m 的取值范围是__________.

31. 设 $a\in\mathbf{R}$. 若函数 $y=f(x)$ 是奇函数, 且 $x>0$ 时, $f(x)=a(x-1)+1$. 若 $y=f(x)$ 是单调增函数, 则 a 取值范围为__________.

32. 已知数列 $\{a_n\}$ 是共有 k 个项的有限数列, 且满足 $a_{n+1}=a_{n-1}-\dfrac{n}{a_n}$ $(n=2,\cdots,k-1)$, 若 $a_1=24$, $a_2=51$, $a_k=0$, 则 $k=$__________.

33. 设 $\varphi\in(0,\pi)$. 若存在实数 a,b 使得关于 x 的方程 $a\sin(2x+\varphi)+b=0$ 在 $[0,2\pi]$ 时恰有 5 个解, 且解的和为 $\dfrac{63}{11}\pi$, 则 $\varphi=$__________.

34. 设 $x\in\mathbf{R}$, $y\in\mathbf{R}$. 那么 “$x>0$” 是 “$xy>0$” 的 (　　).

A. 充分非必要条件　　B. 必要非充分条件

C. 充要条件　　D. 既非充分又非必要条件

35. 在某段时间内, 甲地不下雨的概率为 $P_1(0<P_1<1)$, 乙地不下雨的概率为 $P_2(0<P_2<1)$. 若在这段时间内两地下雨相互独立, 则这段时间内两地都下雨的概率为 (　　).

A. P_1P_2　　B. $1-P_1P_2$　　C. $P_1(1-P_2)$　　D. $(1-P_1)(1-P_2)$

36. 已知梯形 $ABCD$, $AB\parallel CD$, 设 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{e_1}$, 向量 $\overrightarrow{e_2}$ 的起点和终点分别是 A, B, C, D 中的两个点, 若对平面中任意的非零向量 $\overrightarrow{a}$, 都可以唯一表示为 $\overrightarrow{e_1}$、$\overrightarrow{e_2}$ 的线性组合, 那么 $\overrightarrow{e_2}$ 的个数为 (　　).

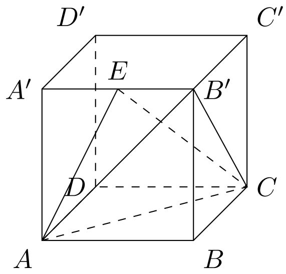
A. 6　　B. 8　　C. 10　　D. 12

37. 在 $\triangle ABC$ 中, $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$, 对于下面两个说法: ① 对于任意 $\triangle ABC$, 以 $\sqrt{a},\sqrt{b},\sqrt{c}$ 为三边的三角形存在, 且总是一个锐角三角形; ② 存在一个 $\triangle ABC$, 以 $\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c}$ 为三边的三角形是一个钝角三角形. 下面判断正确的是 (　　).

A. ①正确, ②错误　　B. ①错误, ②正确

C. ①正确, ②正确　　D. ①错误, ②错误

38. 如图, 在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中, E 为 AB 的中点.



(1) 求证: 直线 AE 平行于平面 $CC'D'D$;

(2) 求点 E 到平面 $AB'C$ 的距离.

39. 经济订货批量模型, 是目前大多数工厂、企业等最常采用的订货方式, 即某种物资在单位时间的需求量为某常数, 经过某段时间后, 存储量消耗下降到零, 此时开始订货并随即到货, 然后开始下一个存储周期. 该模型适用于整批间隔进货、不允许缺货的存储问题. 具体如下:

年存储成本费 T(元) 关于每次订货 x(单位: 吨) 的函数关系为 $T(x)=\frac{Bx}{2}+\frac{AC}{x}$, 其中 A 为年需求量, B 为每单位物资的年存储费, C 为每次订货费.

某化工厂需用甲醇作为原料, 年需求量为 6000 吨, 每吨存储费为 120 元/年, 每次订货费为 2500 元. (1) 若该化工厂每次订购 300 吨甲醇, 求年存储成本费;

(2) 每次需订购多少吨甲醇, 可使该化工厂年存储成本费最少? 最少费用为多少?

40. 已知函数 $f(x)=\sin x$.

(1) 设 $a\in\mathbf{R}$, 判断函数 $g(x)=a\cdot f(x)+f(x+\frac{\pi}{2})$ 的奇偶性, 并说明理由;

(2) 设函数 $F(x)=2f(x)-\sqrt{3}$. 对任意 $b\in\mathbf{R}$, 求 $y=F(x)$ 在区间 $[b,b+100\pi]$ 上零点个数的所有可能值.

41. 双曲线 Γ: $x^2-\frac{y^2}{b^2}=1(b>0)$.

(1) 若 Γ 的一条渐近线方程为 $y=2x$, 求 Γ 的方程;

(2) 设 F_1、F_2 是 Γ 的两个焦点, P 为 Γ 上一点, 且 $PF_1\perp PF_2$, $\triangle PF_1F_2$ 的面积为 9, 求 b 的值;

(3) 已知斜率为 2 的直线与 Γ 交于 A、B 两点, 点 M 是线段 AB 的中点, 设点 M 的横坐标的集合为 Ω. 若 $\{x|x=2n,\ n\in\mathbf{N}^*\}\subseteq\Omega$, 求正数 b 的取值范围.

42. 已知以 a_1 为首项的数列 $\{a_n\}$ 满足: $|a_{n+1}|=|a_n+1|(n\in\mathbf{N}^*)$.

(1) 当 $a_1=-\frac{1}{3}$ 时, 且 $-1<a_n<0$, 写出 a_2, a_3;

(2) 若数列 $\{|a_n|\}(1\le n\le 10,\ n\in\mathbf{N}^*)$ 是公差为 -1 的等差数列, 求 a_1 的取值范围;

(3) 设 $a_1=0$. 记 S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 给定正整数 $m\geq 4$, 求 S_{m-1} 的最小值, 并证明取到最小值的数列 $\{a_n\}$ 不唯一.

43. 函数 $y=3\sin(2x+\dfrac{\pi}{3})$ 的最小正周期 $T=$__________.

44. 函数 $y=\lg x$ 的反函数是__________.

45. 已知集合 $P=\{x|(x+1)(x–3)<0\}$, $Q=\{x||x|>2\}$, 则 $P\cap Q=$__________.

46. 函数 $y=x+\dfrac{9}{x}$, $x\in(0,+\infty)$ 的最小值是__________.

47. 计算: $\lim\limits_{n\to\infty}[\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}+\ldots+(\dfrac{1}{2})^n]=$__________.

48. 记球 O_1 和 O_2 的半径、体积分别为 r_1、V_1 和 r_2、V_2, 若 $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{8}{27}$, 则 $\dfrac{r_1}{r_2}=$__________.

49. 若某线性方程组对应的增广矩阵是 $\begin{pmatrix} m & 4 & 2 \\ 1 & m & m \end{pmatrix}$, 且此方程组有唯一的一组解, 则实数 m 的取值范围是__________.

50. 若一个布袋中有大小、质地相同的三个黑球和两个白球, 从中任取两个球, 则取出的两球中恰是一个白球和一个黑球的概率是__________.

51. $(1+2x)^n$ 的二项展开式中, 含 x^3 项的系数等于含 x 项的系数的 8 倍, 则正整数 $n=$__________.

52. 平面上三条直线 $x-2y+1=0$, $x-1=0$, $x+ky=0$, 如果这三条直线将平面划分为六个部分, 则实数 k 的取值组成的集合 $A=$__________.

53. 已知双曲线 $C:\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{8}=1$, 左、右焦点分别为 F_1、F_2, 过点 F_2 作一直线与双曲线 C 的右支交于 P、Q 两点, 使得 $\angle F_1PQ=90^\circ$, 则 $\triangle F_1PQ$ 的内切圆的半径 $r=$__________.

54. 已知点 $B(4,0)$, $C(2,2)$, 平面直角坐标系上的动点 P 满足 $\overrightarrow{OP}=\lambda\cdot\overrightarrow{OB}+\mu\cdot\overrightarrow{OC}$(其中 O 是坐标原点, 且 $1<\lambda\leq a$, $1<\mu\leq b$), 若动点 P 组成的区域的面积为 8, 则 $a+b$ 的最小值是__________.

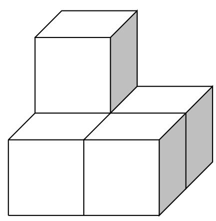
55. 若向量 $\overrightarrow{a}=(2,0)$, $\overrightarrow{b}=(1,1)$, 则下列结论中正确的是 (　　).

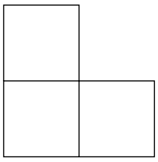
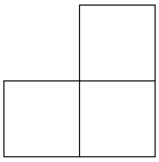
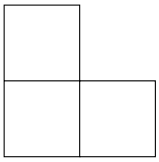
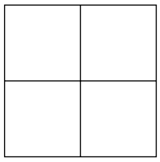
A. $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=1$　　B. $|\overrightarrow{a}|=|\overrightarrow{b}|$　　C. $(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b})\perp\overrightarrow{b}$　　D. $\overrightarrow{a}\parallel\overrightarrow{b}$

56. 椭圆的参数方程为 $\begin{cases} x=5\cos\theta, \\ y=3\sin\theta \end{cases}$ (θ 为参数), 则它的两个焦点坐标是 (　　).

A. $(\pm4,0)$　　B. $(0,\pm4)$　　C. $(\pm5,0)$　　D. $(0,\pm3)$

57. 如图几何体是由五个相同正方体叠成的, 其三视图中的左视图序号是 (　　).



A.  B.  C.  D. 

58. 定义 $F(a,b)=\begin{cases}a, & a\le b,\\ b, & a>b,\end{cases}$ 已知函数 $f(x)$、$g(x)$ 定义域都是 $\mathbf{R}$, 给出下列命题:

(1) 若 $f(x)$、$g(x)$ 都是奇函数, 则函数 $F(f(x),g(x))$ 为奇函数;

(2) 若 $f(x)$、$g(x)$ 都是减函数, 则函数 $F(f(x),g(x))$ 为减函数;

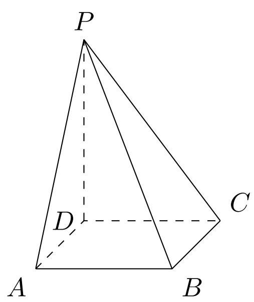
(3) 若 $f_{\min}(x)=m$, $g_{\min}(x)=n$, 则 $F_{\min}(f(x),g(x))=F(m,n)$;

(4) 若 $f(x)$、$g(x)$ 都是周期函数, 则函数 $F(f(x),g(x))$ 是周期函数.

其中正确命题的个数为 (　　).

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

59. 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是边长为 6 的正方形, $PD\perp$ 平面$ABCD$, $PD=8$.



(1) 求 PB 与平面 $ABCD$ 所成角的大小;

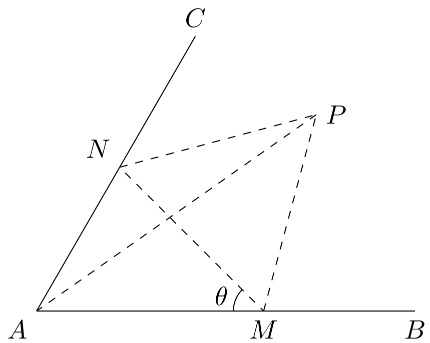
(2) 求异面直线 PB 与 DC 所成角的大小.

60. 复数 $z=(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i})^2$ 是一元二次方程 $mx^2+nx+1=0(m,n\in\mathbf{R})$ 的一个根.

(1) 求 m 和 n 的值;

(2) 若 $(m+n\mathrm{i})\overline{u}+u=z(u\in\mathbf{C})$, 求 u.

61. 如图, 经过村庄 A 有两条夹角为 60° 的公路 AB、AC, 根据规划拟在两条公路之间的区域内建一工厂 P, 分别在两条公路边上建两个仓库 M、N(异于村庄 A), 要求 $PM=PN=MN=2$(单位: 千米). 记 $\angle MN=\theta$.



(1) 将 AN、AM 用含 θ 的关系式表示出来;

(2) 如何设计 (即 AN、AM 为多长时), 使得工厂产生的噪声对居民的影响最小 (即工厂与村庄的距离 AP 最大)?

62. 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$ 的左、右焦点分别为 F_1、F_2.

(1) 点 P 在椭圆 C 上运动 (点 P 不在 x 轴上), 设 F_2 关于 $\angle F_1PF_2$ 的外角平分线所在直线的对称点为 Q, 求 Q 的轨迹方程;

(2) 设 M、N 分别是曲线 C 上的两个不同点, 且点 M 在第一象限, 点 N 在第三象限, 若 $\overrightarrow{OM}+2\overrightarrow{ON}=2\overrightarrow{OF_1}$, O 为坐标原点, 求直线 MN 的斜率;

(3) 过点 $S(0,-\dfrac{1}{3})$ 的动直线 l 交曲线 C 于 A、B 两点, 在 y 轴上是否存在定点 T, 使以 AB 为直径的圆恒过这个点? 若存在, 求出点 T 的坐标; 若不存在, 请说明理由.

63. 已知无穷数列 $\{a_n\}(a_n\in\mathbf{Z})$ 的前 n 项和为 S_n, 记 S_1、S_2、$\cdots$、S_n 中奇数的个数为 b_n.

(1) 若 $a_n=n$, 请写出数列 $\{b_n\}$ 的前 5 项;

(2) 求证: "a_1 为奇数, $a_i(i=2,3,4,\cdots)$ 均为偶数" 是 "数列 $\{b_n\}$ 是单调递增数列" 的充分不必要条件;

(3) 若 $a_i=b_i$, $i=1,2,3,\cdots$, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

64. 函数 $f(x)=3\cos 2x+1$ 的最小值为__________.

65. 函数 $f(x)=\sqrt{\dfrac{1-x}{3+x}}$ 的定义域为__________.

66. 若集合 $A=\{2,4,6,8\}$, $B=\{x|x^2-4x\le 0\}$, 则 $A\cap B=$__________.

67. 已知函数 $g(x)$ 的图像与函数 $f(x)=\log_2(3^x-1)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称，则 $g(3)=$__________.

68. 设复数 $z=\begin{vmatrix}\cos\alpha & \mathrm{i}\\ \sin\alpha & \sqrt{2}+\mathrm{i}\end{vmatrix}$(i 为虚数单位)，若 $|z|=\sqrt{2}$，则 $\tan 2\alpha=$__________.

69. 设 $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，若 $b=2\sqrt{3}$, $c=8$, $A=30^\circ$，则 $\sin C=$__________.

70. 已知点 $A(3,-2)$，点 P 满足线性约束条件 $\begin{cases}x+2\ge 0,\\ y-1\le 0,\\ x-2y\le 4,\end{cases}$ 设 O 为坐标原点，则 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}$ 的最大值为__________.

71. 若函数 $f(x)=\log_2(2^x+1)+kx$ 是偶函数, 则 $k=$__________.

72. 已知等边 $\triangle ABC$ 的边长为 $2\sqrt{3}$, 点 P 是其外接圆上的一个动点, 则 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ 的取值范围是__________.

73. 已知函数 $f(x)=\cos(2x-\dfrac{\pi}{6})$, 若对于任意的 $x_1\in[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}]$, 总存在 $x_2\in[m,n]$, 使得 $f(x_1)+f(x_2)=0$, 则 $|m-n|$ 的最小值为__________.

74. 已知 AB 为单位圆 O 的一条弦, P 为单位圆 O 上的点, 若 $f(\lambda)=|\overrightarrow{AP}-\lambda\overrightarrow{AB}|(\lambda\in\mathbf{R})$ 的最小值为 m, 当点 P 在单位圆上运动时, m 的最大值为 $\dfrac{4}{3}$, 则线段 AB 长度为__________.

75. 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=3$, $a_{n+1}=1+a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdots a_n$, 记 T_n 为数列 $\{\frac{1}{a_n}\}$ 的前 n 项和, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} T_n=$__________.

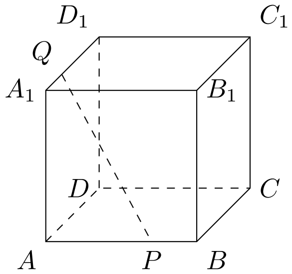
76. 若 O 为坐标原点, P 是直线 $x-y+2=0$ 上的动点, 则 $|OP|$ 的最小值为 (　　).

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B. $\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. 2

77. 若 $|x-a|\le 1$ 成立的一个充分不必要条件是 $1\le x\le 2$, 则实数 a 的取值范围是 (　　).

A. $1\le a\le 2$　　B. $a\ge 1$　　C. $a\le 2$　　D. $a\ge 1$ 或 $a\le 2$

78. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, P、Q 两点分别从点 B 和点 A_1 出发, 以相同的速度在棱 BA 和 A_1D_1 上运动至点 A 和点 D_1, 在运动过程中, 直线 PQ 与平面 $ABCD$ 所成角 θ 的变化范围为 (　　).



A. $[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}]$　　B. $[\arctan\frac{\sqrt{2}}{2},\arctan\sqrt{2}]$

C. $[\frac{\pi}{4},\arctan\sqrt{2}]$　　D. $[\arctan\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\pi}{2}]$

79. 已知函数 $f(x)=m\cdot 2^x+x^2+nx$, 记集合 $A=\{x|f(x)=0,\ x\in\mathbf{R}\}$, 集合 $B=\{x|f(f(x))=0,\ x\in\mathbf{R}\}$. 若 $A=B$, 且 A、B 都不是空集, 则 $m+n$ 的取值范围是 (　　).

A. $[0,4)$　　B. $[-1,4)$　　C. $[-3,5]$　　D. $[0,7)$

80. 已知函数 $f(x)=2\cos^2 x+2\sqrt{3}\sin x\cos x$.

(1) 求 $f(x)$ 的最大值和最小正周期 T;

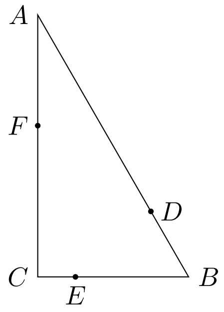
(2) 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A、B、C 所对的边分别为 a、B、C, 已知 $f(\frac{A}{2})=3$, 且 $a=1$, 求 $\triangle ABC$ 面积的最大值.

81. 已知函数 $f(x)=a-\frac{4}{3^x+1}$(a 为实常数).

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的奇偶性, 并说明理由;

(2) 当 $f(x)$ 为奇函数时, 对任意的 $x\in[1,5]$, 不等式 $f(x)\ge\frac{u}{3^x}$ 恒成立, 求实数 u 的最大值.

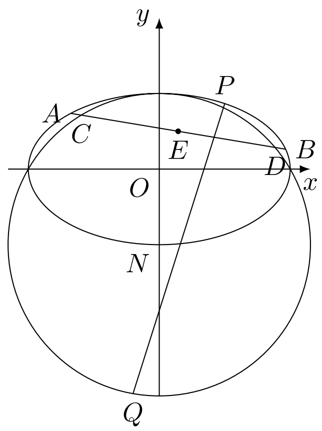
82. 如图, 某公园有三条观光大道 AB、BC、CA 围成直角三角形, 其中直角边 $BC=200\text{m}$, 斜边 $AB=400\text{m}$, 现有甲、乙、丙三位小朋友分别在 AB、BC、AC 大道上嬉戏, 所在位置分别记为点 D、E、F.



(1) 若甲乙都以每分钟 100m 的速度从点 B 出发在各自的大道上奔走, 到大道的另一端时即停, 乙比甲迟 2 分钟出发, 当乙出发 1 分钟后, 求此时甲乙两人之间的距离;

(2) 设 $\angle CEF=\theta$, 乙丙之间的距离是甲乙之间距离的 2 倍, 且 $\angle DEF=\dfrac{\pi}{3}$, 请将甲乙之间的距离 y 表示为 θ 的函数, 并求甲乙之间的最小距离.

83. 如图, 已知椭圆 $M:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 经过圆 $N:x^2+(y+1)^2=4$ 与 x 轴的两个交点和与 y 轴正半轴的交点.



(1) 求椭圆 M 的方程;

(2) 若点 P 为椭圆 M 上的动点, 点 Q 为圆 N 上的动点, 求线段 PQ 长的最大值;

(3) 若不平行于坐标轴的直线 L 交椭圆 M 于 A、B 两点, 交圆 N 于 C、D 两点, 且满足 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DB}$, 求证: 线段 AB 的中点 E 在定直线上.

84. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 D, 若存在实常数 λ 及 $a(a\neq 0)$, 对任意 $x\in D$, 当 $x+a\in D$ 且 $x-a\in D$ 时, 都有 $f(x+a)+f(x-a)=\lambda f(x)$ 成立, 则称函数 $f(x)$ 具有性质 $M(\lambda,a)$.

(1) 判断函数 $f(x)=x^2$ 是否具有性质 $M(\lambda,a)$, 并说明理由;

(2) 若函数 $g(x)=\sin 2x+\sin x$ 具有性质 $M(\lambda,a)$, 求 λ 及 a 应满足的条件;

(3) 已知定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $y=h(x)$ 不存在零点, 且具有性质 $M(t+\dfrac{1}{t},t)$(其中 $t>0$, $t\neq 1$), 记 $a_n=h(n)(n\in\mathbf{N}^*)$, 求证: 数列 $\{a_n\}$ 为等比数列的充要条件是 $\dfrac{a_2}{a_1}=t$ 或 $\dfrac{a_2}{a_1}=\dfrac{1}{t}$.

85. 已知 $\tan\alpha=\dfrac{1}{2}$, 则 $\tan 2\alpha=$__________.

86. 不等式 $\dfrac{1}{x-1}>1$ 的解集为__________.

87. 在 $(x-\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}})^6$ 的二项展开式中, x^2 项的系数为__________.

88. 已知球的体积为 $\dfrac{4}{3}\pi$, 则该球的左视图所表示图形的面积为__________.

89. 已知圆的方程为 $x^2+y^2-2x-4y+4=0$, 则圆心到直线 $l:3x+4y+4=0$ 的距离 $d=$__________.

90. 若关于 x 的实系数一元二次方程 $x^2-bx+c=0$ 的一根为 $1-\mathrm{i}$(i 为虚数单位), 则 $b+c=$__________.

91. 已知 $m\in\mathbf{R}$, 若直线 $l_1:mx+y+1=0$ 与直线 $l_2:9x+my+2m+3=0$ 平行, 则 $m=$__________.

92. 已知实数 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}x+2y\ge 3,\\ 2x+y\ge 3,\\ x\ge 0,\ y\ge 0,\end{cases}$ 则 $z=x+y$ 的最小值是__________.

93. 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 当 $x>0$ 时, $f(x)=a^x+b(0<a<1,\ b\in\mathbf{R})$, 若 $f(x)$ 存在反函数, 则 b 的取值范围是__________.

94. 上海某高校哲学专业的 4 名研究生到指定的 4 所高级中学宣讲习近平新时代中国特色社会主义思想. 若他们每人都随机地从 4 所学校选择一所, 则 4 人中至少有 2 人选择到同一所学校的概率是__________(结果用最简分数表示).

95. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $AB=1$, $AC=2$, $\angle A=120^\circ$, 若点 P 是 $\triangle ABC$ 所在平面上一点, 且满足 $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{CP}=-1$, 则实数 λ 的值为__________.

96. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+1)=2f(x)+1$, 当 $x\in[0,1)$ 时, $f(x)=x^3$. 设 $f(x)$ 在区间 $[n,n+1)(n\in\mathbf{N}^*)$ 上的最小值为 a_n, 若存在 $n\in\mathbf{N}^*$, 使得 $\lambda(a_n+1)<2n-7$ 成立, 则实数 λ 的取值范围是__________.

97. 下列以 t 为参数的参数方程中, 其表示的曲线与方程 $xy=1$ 表示的曲线完全一致的是 (　　).

A. $\begin{cases}x=t^{\frac{1}{2}},\\ y=t^{-\frac{1}{2}}\end{cases}$　　B. $\begin{cases}x=|t|,\\ y=\dfrac{1}{|t|}\end{cases}$　　C. $\begin{cases}x=\cos t,\\ y=\sec t\end{cases}$　　D. $\begin{cases}x=\tan t,\\ y=\cot t\end{cases}$

98. 已知函数 $f(x)=\sin 2x$, $x\in[a,b]$, 则 "$b-a\ge\dfrac{\pi}{2}$" 是 "$f(x)$ 的值域为 $[-1,1]$" 的 (　　) 条件

A. 充分不必要　　B. 必要不充分　　C. 充要　　D. 既不充分也不必要

99. 某高校举行科普知识竞赛, 所有参赛的 500 名选手成绩的平均数为 82, 方差为 0.82, 则下列四个数据中不可能是参赛选手成绩的是 (　　).

A. 60　　B. 70　　C. 80　　D. 100

100. 设数列 $\{a_n\}$, 若存在常数 t, 对任意小的正数 s, 总存在正整数 n_0, 当 $n \geq n_0$ 时, $|a_n - t| < s$, 则数列 $\{a_n\}$ 为收敛数列. 下列关于收敛数列说法正确的是 (　　).

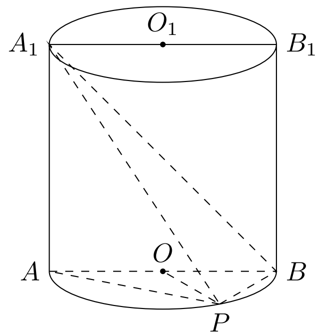
A. 若等比数列 $\{a_n\}$ 是收敛数列, 则公比 $q \in (0,1)$

B. 等差数列不可能是收敛数列

C. 设公差不为 0 的等差数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和为 $S_n(S_n \neq 0)$, 则数列 $\{\frac{1}{S_n}\}$ 一定是收敛数列

D. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 满足 $a_1 = 1$, $S_{n+1} = a_n + 1$, 则数列 $\{a_n\}$ 是收敛数列

101. 如图, 已知 AB 为圆柱 OO_1 的底面圆 O 的一条直径, P 为圆周上的一点, $OA = 2$, $\angle BOP = 60°$, 圆柱 OO_1 的表面积为 24π.



(1) 求三棱锥 $A_1 - APB$ 的体积;

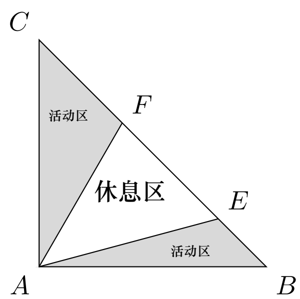
(2) 求直线 AP 与平面 A_1PB 所成的角的大小.

102. 已知 a 为实数, 函数 $f(x) = x|x - a| - a$, $x \in \mathbf{R}$.

(1) 当 $a = 2$ 时, 求函数 $f(x)$ 的单调递增区间;

(2) 若对任意 $x \in (0,1)$, $f(x) < 0$ 恒成立, 求 a 的取值范围.

103. 某动物园喜迎虎年的到来, 拟用一块形如直角三角形 ABC 的地块建造小老虎的休息区和活动区. 如图, $\angle BAC = 90°$, $AB = AC = 20$(单位: 米), E、F 为 BC 上的两点, 且 $\angle EAF = 45°$, $\triangle AEF$ 区域为休息区, $\triangle ABE$ 和 $\triangle ACF$ 区域均为活动区. 设 $\angle EAB = \alpha(0 < \alpha < 45°)$.



(1) 求 AE、AF 的长; (用 α 的代数式表示) (2) 为了使小老虎能健康成长, 要求所建造的活动区面积尽可能大 (即休息区尽可能小). 当 α 为多少时, 活动区的面积最大? 最大面积活动区为多少?

104. 在平面直角坐标系中, 已知点 $A(0,\sqrt{2})$、$B(0,-\sqrt{2})$, 动点 $C(x,y)$ 关于直线 $y = x$ 的对称点为 D, 且 $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}x^2$, 动点 C 的轨迹为曲线 E.

(1) 求曲线 E 的方程;

(2) 已知动点 P 在曲线 E 上, 点 Q 在直线 $y=2\sqrt{2}$ 上, 且 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=0$, 求线段 PQ 长的最小值;

(3) 过点 $(-\sqrt{2},0)$ 且不垂直于 x 轴的直线交曲线 E 于 M、N 两点, 点 M 关于 x 轴的对称点为 M', 试问: 在 x 轴上是否存在一定点 T, 使得 M'、N、T 三点共线? 若存在, 求出定点 T 的坐标; 若不存在, 说明理由.

105. 对于数列 $\{a_n\}$, 记 $V(n)=|a_2-a_1|+|a_3-a_2|+\cdots+|a_n-a_{n-1}|(n>1,\ n\in\mathbf{N}^*)$.

(1) 若数列 $\{a_n\}$ 通项公式为: $a_n=\dfrac{1+(-1)^n}{2}(n\in\mathbf{N}^*)$, 求 $V(5)$;

(2) 若数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1=a$, $a_n=b$, 且 $a>b$, 求证: $V(n)=a-b$ 的充分必要条件是 $a_{i+1}\le a_i(i=1,2,\cdots,n-1)$;

(3) 已知 $V(2022)=2022$, 若 $y_t=\dfrac{1}{t}(a_1+a_2+\cdots+a_t)$, $t=1,2,\cdots,2022$, 求 $|y_2-y_1|+|y_3-y_2|+\cdots+|y_{2022}-y_{2021}|$ 的最大值.

106. 已知集合 $A=\{1,3,m\}$, $B=\{3,5\}$, 且 $B\subseteq A$, 则实数 m 的值是__________.

107. 函数 $f(x)=\sqrt{1-\dfrac{2}{x}}$ 的定义域是__________.

108. 函数 $y=2^x(x\ge 2)$ 的反函数是__________.

109. 如果圆锥的底面积为 π, 母线长为 2, 那么该圆锥的高为__________.

110. 二项式 $(\sqrt[3]{x}-\dfrac{2}{x})^8$ 的展开式中的常数项为__________.

111. 某班从 4 位男生和 3 位女生志愿者选出 4 人参加校运会的点名签到工作, 则选出的志愿者中既有男生又有女生的概率的是__________(结果用最简分数表示).

112. 在复平面内, 三点 A、B、C 分别对应复数 z_A、z_B、z_C, 若 $\dfrac{z_B-z_A}{z_C-z_A}=1+\dfrac{4}{3}\mathrm{i}$, 则 $\triangle ABC$ 的三边长之比为__________.

113. 已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\dfrac{\pi}{6})$, $\omega>0$, 若函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=f(x+12)$, $x\in\mathbf{R}$ 恒成立, 且在 "任意两个相邻奇数所形成的闭区间" 内总存在至少两个零点, 则 ω 的最小值为__________.

114. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A、B、C 所对的边分别为 a、b、c, 如果对任意的实数 λ, $|\overrightarrow{BA}-\lambda\overrightarrow{BC}|\ge|\overrightarrow{BC}|$ 恒成立, 则 $\dfrac{c}{b}+\dfrac{b}{c}$ 的最大值是__________.

115. 在边长为 1 的正方形 $ABCD$ 中, P、Q 分别为边 BC、CD 上的动点, 如果 $\triangle PCQ$ 的周长为定值 2, 那么 $\triangle PAQ$ 的外接圆直径的最小值为__________.

116. 已知平面直角坐标系中两点 $A(a_1,a_2)$、$B(b_1,b_2)$, 有 $S_{\triangle AOB}=\dfrac{1}{2}|a_1b_2-a_2b_1|$. 设 (x_1,y_1)、(x_2,y_2)、(x_3,y_3) 是平面曲线 $x^2+y^2=2x-4y$ 上任意三点, 则 $T=x_1y_2-x_2y_1+x_2y_3-x_3y_2$ 的最大值为__________.

117. 对实数 $x\in\mathbf{R}$, 函数 $f(x)$ 满足: $f(x+1)=\sqrt{f(x)-f^2(x)}+\dfrac{1}{2}$, $a_n=f^2(n)-f(n)$, 数列 $\{a_n\}$ 的前 15 项和为 $-\dfrac{31}{16}$, 数列 $\{c_n\}$ 满足 $c_n+c_{n+1}=[f(2019)]^n$, 若数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 S_n 的极限存在, 则 $c_1=$__________.

118. 关于 x、y 的二元一次方程组 $\begin{cases} 3x+4y=1, \\ x-3y=10 \end{cases}$ 的增广矩阵为 (　　).

A. $\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & -3 & 10 \end{pmatrix}$　　B. $\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & -3 & -10 \end{pmatrix}$　　C. $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & -3 & 10 \end{pmatrix}$　　D. $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 10 \end{pmatrix}$

119. 已知函数 $f(x)=\cos(3x+\varphi)$ 满足 $f(x)\le f(1)$ 恒成立, 则 (　　).

A. 函数 $f(x-1)$ 一定是奇函数　　B. 函数 $f(x+1)$ 一定是奇函数

C. 函数 $f(x-1)$ 一定是偶函数　　D. 函数 $f(x+1)$ 一定是偶函数

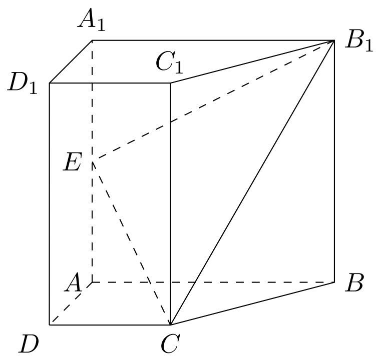
120. 如果一个几何体绕着一条直线旋转 θ 角与原几何体重合, 其中 $0^\circ<\theta\le 180^\circ$, 称该直线为该几何体的一条旋转轴. 正四面体的不同旋转轴有 (　　) 条.

A. 3　　B. 4　　C. 6　　D. 7

121. 已知点 P 为椭圆 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{16}=1$ 上的任意一点, 点 F_1、F_2 分别为该椭圆的上下焦点, 设 $\alpha=\angle PF_1F_2$, $\beta=\angle PF_2F_1$, 则 $\sin\alpha+\sin\beta$ 的最大值为 (　　).

A. $\dfrac{3\sqrt{7}}{7}$　　B. $\dfrac{4\sqrt{7}}{7}$　　C. $\dfrac{8}{9}$　　D. $\dfrac{3}{2}$

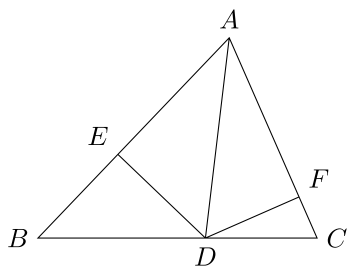
122. 如图, 四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 侧棱 $AA_1\perp$ 底面 $ABCD$, $AB\parallel CD$, $AB\perp AD$, $AD=DC=1$, $AA_1=AB=2$, E 为棱 AA_1 的中点.



(1) 求二面角 B_1-CE-C_1 的正弦值;

(2) 设点 M 为线段 C_1E 上, 且直线 AM 与平面 ADD_1A_1 所成角正弦值为 $\dfrac{\sqrt{2}}{6}$, 求线段 AM 的长.

123. 在锐角 $\triangle ABC$ 中, 已知 $\cos A=\dfrac{5}{13}$, $S_{\triangle ABC}=6$, 若点 D 是线段 BC 上一点 (不含端点), 过 D 作 $DE\perp AB$ 于 E, $DF\perp AC$ 于 F.



(1) 求 BC 的取值范围;

(2) 问点 D 在何处时, $\triangle DEF$ 的面积最大, 最大值为多少?

124. 已知各项都不为零的无穷数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_{n+1}a_n+a_{n+1}-a_n=0.n\in\mathbf{N}^*$.

(1) 证明 $\{\dfrac{1}{a_n}\}$ 为等差数列, 并求 $a_1=1$ 时数列 $\{a_n\}$ 中的最大项;

(2) 若 a_{2018} 为数列 $\{a_n\}$ 中的最小项, 求 a_1 的取值范围.

125. 已知曲线 $\Gamma:F(x,y)=0$, 对坐标平面上任意一点 $P(x,y)$, 定义 $F[P]=F(x,y)$. 若两点 P、Q, 满足 $F[P]\cdot F[Q]>0$, 称点 P、Q 在曲线 Γ 同侧; 若 $F[P]\cdot F[Q]<0$, 称点 P、Q 在曲线 Γ 两侧.

(1) 直线 $l:kx-y=0$ 过原点, 线段 AB 上所有点都在直线 l 同侧, 其中 $A(-1,1)$、$B(2,3)$, 求直线 l 的倾斜角的取值范围;

(2) 已知曲线 $F(x,y)=(3x+4y-5)\cdot\sqrt{4-x^2-y^2}=0$, O 为坐标原点, 求点集 $S=\{P|F[P]\cdot F[O]>0\}$ 的面积;

(3) 记到点 $(0,1)$ 与到 x 轴距离和为 5 的点的轨迹为曲线 C, 曲线 $\Gamma:F(x,y)=x^2+y^2-y-a=0$, 若曲线 C 上总存在两点 M、N 在曲线 Γ 两侧, 求曲线 C 的方程与实数 a 的取值范围.

126. 设函数 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上有定义, 实数 a 和 b 满足 $1\le a<b$, 若 $f(x)$ 在区间 $(a,b]$ 上不存在最小值, 则称 $f(x)$ 在区间 $(a,b]$ 上具有性质 P.

(1) 当 $f(x)=x^2+cx$, 且 $f(x)$ 在区间 $(1,2]$ 上具有性质 P, 求实数 c 的取值范围;

(2) 已知 $f(x+1)=f(x)+1(x\ge1)$, 且当 $1\le x<2$ 时, $f(x)=1-x$, 判别 $f(x)$ 在区间 $(1,4]$ 上是否具有性质 P;

(3) 若对于满足 $1\le a<b$ 的任意实数 a 和 b, $f(x)$ 在区间 $(a,b]$ 上具有性质 P, 且对于任意 $n\in\mathbf{N}^*$, 当 $x\in(n,n+1)$ 时, 有 $|f(n)-f(x)|+|f(x)-f(n+1)|=|f(n)-f(n+1)|$, 证明: 当 $x\ge1$ 时, $f(2x)>f(x)$.

127. 在复平面内, 复数 $\dfrac{2}{1+\mathrm{i}}$ 对应的点与原点的距离是__________.

128. 将参数方程 $\begin{cases}x=\cos\theta,\\ y=2\sin\theta\end{cases}$ $(\theta\in[0,\pi])$ 化为普通方程, 所得方程是__________.

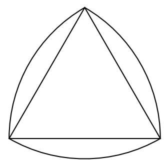
129. 已知向量 $\overrightarrow{a}=(1,4,-5)$, $\overrightarrow{b}=(1,1,4)$, 则 $\overrightarrow{a}$ 在 $\overrightarrow{b}$ 方向上的投影是__________.

130. 若函数 $y=\tan2x\cdot(2\cos^2x-1)$ 的定义域是__________.

131. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_4+a_8=16$, 则该数列前 11 项和 $S_{11}=$__________.

132. 在 $(\sqrt[3]{x}+\dfrac{2}{x})^n$ 的二项展开式中, 所有项的系数之和为 81, 则其常数项为__________.

133. 在均匀分布的条件下, 某些概率问题可转化为几何图形的面积比来计算, 勒洛三角形是由德国机械工程专家勒洛首先发现, 作法为: 以等边三角形的每个顶点为圆心, 以边长为半径, 在另两个顶点间作一段弧, 三段弧围成的曲边三角形就是勒洛三角形, 在勒洛三角形中随机取一点, 此点取自正三角形的概率为__________.



134. 平面上整点 (横、纵坐标都为整数的点) 到直线 $y=\dfrac{5}{3}x+\dfrac{4}{5}$ 的距离的最小值是__________.

135. 设定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $f(x)$、$g(x)$ 都有反函数, 且函数 $f(x-1)$ 和 $g^{-1}(x-3)$ 图像关于直线 $y=x$ 对称, 若 $g(5)=2015$, 则 $f(4)=$__________.

136. 在 $\triangle ABC$ 中, $\dfrac{\sin A}{a}=\dfrac{\sqrt{3}\cos B}{b}$, 如果 $b=2$, 则 $\triangle ABC$ 面积的最大值为__________.

137. 数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=2$, $a_2=7$, a_{n+2} 等于 $a_n\cdot a_{n+1}$ 的个位数, 则 $a_{2019}=$__________.

138. 已知函数 $f(x)$ 满足: ① 对任意 $x\in(0,+\infty)$ 恒有 $f(2x)=2f(x)$ 成立; ② $x\in(1,2]$ 时, $f(x)=2-x$; 若 $f(a)=f(2020)$, 则满足条件的最小的正实数 a 是__________.

139. 给出下列命题, 其中正确的命题为 (　　).

A. 若直线 a 和 b 共面, 直线 b 和 c 共面, 则 a 和 c 共面

B. 直线 a 与平面 α 不垂直, 则 a 与平面 α 内的所有直线都不垂直

C. 直线 a 与平面 α 不平行, 则 a 与平面 α 内的所有直线都不平行

D. 异面直线 a、b 不垂直, 则过 a 的任何平面与 b 都不垂直

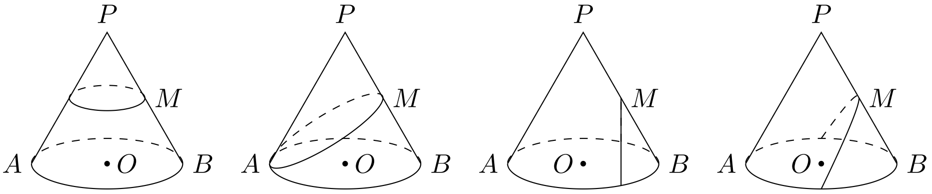
140. 已知平面向量 $\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$、$\overrightarrow{OC}$ 为三个单位向量, 且 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$, 若 $\overrightarrow{OC}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}(x,y\in\mathbf{R})$, 则 $x+y$ 的最大值为 (　　).

A. 1　　B. $\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. 2

141. 已知函数① $f(x)=3\ln x$; ② $f(x)=3\mathrm{e}^{\cos x}$; ③ $f(x)=3\mathrm{e}^{x}$; ④ $f(x)=3\cos x$; 其中对于 $f(x)$ 定义域内的任意一个自变量 x_1 都存在唯一一个自变量 x_2, 使 $\sqrt{f(x_1)f(x_2)}=3$ 成立的函数是 (　　).

A. ③　　B. ②③　　C. ①②④　　D. ④

142. 在圆锥 PO 中, 已知高 $PO=2$, 底面圆的直径 $AB=8$, M 为母线 PB 的中点. 根据圆锥曲线的定义, 下列四个图中的截面边界曲线分别为圆 (截面平行于底面)、椭圆 (椭圆长轴为线段 AM)、双曲线的一部分 (双曲线所在平面垂直于 AB) 及抛物线的一部分 (抛物线对称轴为 MO 所在直线), 下面四个命题:
① 圆的面积为 4π; ② 椭圆的长轴为 $\sqrt{37}$; ③ 双曲线两渐近线的夹角为 $\arcsin\dfrac{3}{5}$; ④ 抛物线中焦点到准线的距离为 $\dfrac{8\sqrt{5}}{5}$ 中, 正确的个数为 (　　).



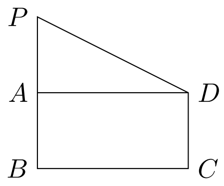
A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

143. 已知复数 $z_1=\sin 2x+\lambda\mathrm{i}$, $z_2=m+(m-\sqrt{3}\cos 2x)\mathrm{i}(\lambda,m,x\in\mathbf{R})$, 且 $z_1=z_2$.

(1) 若 $\lambda=0$ 且 $0<x<\pi$, 求 x 的值;

(2) 设 $\lambda=f(x)$, 求 $f(x)$ 的最小正周期和单调递减区间.

144. 如图, 在直角梯形 $PBCD$ 中, $PB\parallel DC$, $DC\perp BC$, $PB=BC=2CD=2$, 点 A 是 PB 的中点, 现沿 AD 将平面 PAD 折起, 设 $\angle PAB=\theta$.



(1) 当 θ 为直角时, 求异面直线 PC 与 BD 所成角的大小;

(2) 当 θ 为多少时, 三棱锥 $P-ABD$ 的体积为 $\dfrac{\sqrt{2}}{6}$.

145. 对于两个定义域相同的函数 $f(x)$、$g(x)$, 若存在实数 m、n, 使 $h(x)=mf(x)+ng(x)$, 则称函数 $h(x)$ 是由"基函数 $f(x)$、$g(x)$" 生成的.

(1) $f(x)=x^2+3x$ 和 $g(x)=3x+4$ 生成一个偶函数 $h(x)$, 求 $h(2)$ 的值;

(2) 若 $h(x)=2x^2+3x-1$ 由 $f(x)=x^2+ax$, $g(x)=x+b(a,b\in\mathbf{R}$ 且 $ab\neq 0)$ 生成, 求 $a+2b$ 的取值范围.

146. 设抛物线 $y^2=4px$ $(p>0)$ 的准线与 x 轴的交点为 M, 过 M 作直线 l 交抛物线于 A、B 两点.

(1) 求线段 AB 中点的轨迹方程;

(2) 若线段 AB 的垂直平分线交对称轴于 $N(x_0,0)$, 求 x_0 的取值范围;

(3) 若直线 l 的斜率依次取 $p,p^2,p^3,\cdots,p^n,\cdots$ 时, 线段 AB 的垂直平分线与对称轴的交点依次为 $N_1,N_2,N_3,\cdots,N_n,\cdots$, 当 $0<p<1$ 时, 求: $S=\dfrac{1}{|N_1N_2|}+\dfrac{1}{|N_2N_3|}+\dfrac{1}{|N_3N_4|}+\cdots+\dfrac{1}{|N_nN_{n+1}|}+\cdots$ 的值.

147. 给定无穷数列 $\{a_n\}$, 若无穷数列 $\{b_n\}$ 满足: 对任意 $n\in\mathbf{N}^*$, 都有 $|b_n-a_n|\leq 1$, 则称 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ "接近".

(1) 设 $\{a_n\}$ 是首项为 1, 公比为 $\dfrac{1}{2}$ 的等比数列, $b_n=a_{n+1}+1$, $n\in\mathbf{N}^*$, 判断数列 $\{b_n\}$ 是否与 $\{a_n\}$ 接近, 并说明理由;

(2) 设数列 $\{a_n\}$ 的前四项为: $a_1=1$, $a_2=2$, $a_3=4$, $a_4=8$, $\{b_n\}$ 是一个与 $\{a_n\}$ 接近的数列, 记集合 $M=\{x|x=b_i,\ i=1,2,3,4\}$, 求 M 中元素的个数 m 的所有可能值;

(3) 已知 $\{a_n\}$ 是公差为 d 的等差数列, 若存在数列 $\{b_n\}$ 满足: $\{b_n\}$ 与 $\{a_n\}$ 接近, 且在 $b_2-b_1,b_3-b_2,\cdots,b_{201}-b_{200}$ 中至少有 100 个为正数, 求 d 的取值范围.

148. 已知复数 z 满足 $z(1+\mathrm{i}^{2020})=2-4\mathrm{i}$(其中, i 为虚数单位), 则 $z=$__________.

149. 函数 $y=\arcsin(x+1)$ 的定义域是__________.

150. 计算行列式的值, $\begin{vmatrix}0 & 1\\ 2 & 3\end{vmatrix}=$__________.

151. 已知双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的实轴与虚轴长度相等, 则 C 的渐近线方程是__________.

152. 已知无穷数列 $a_n=\dfrac{2}{(-3)^n}$, $n\in\mathbf{N}^*$, 则数列 $\{a_n\}$ 的各项和为__________.

153. 一个圆锥的表面积为 π, 母线长为 $\dfrac{5}{6}$, 则其底面半径为__________.

154. 某种微生物的日增长率为 r, 经过 n 天后其数量由 p_0 变化为 p, 并且满足方程 $p=p_0\mathrm{e}^{rn}$. 实验检测, 这种微生物经过一周数量由 2.58 个单位增长到 14.86 个单位, 则增长率 $r=$__________(精确到 1%).

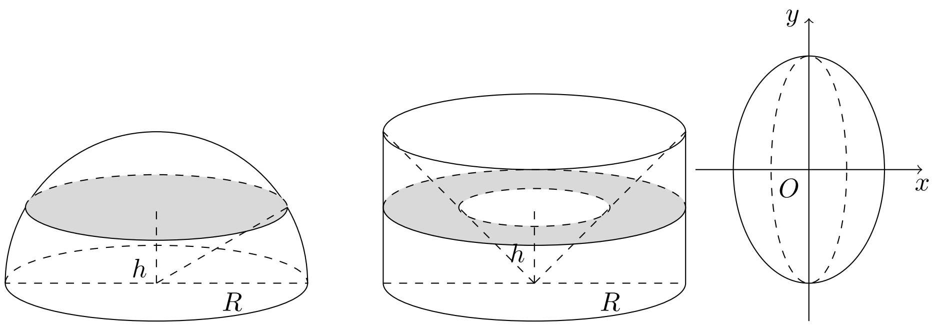
155. 已知 $(x-\dfrac{1}{2x})^n$ 的展开式的常数项为第 6 项, 则常数项为__________.

156. 某医院 ICU 从 3 名男医生和 2 名女医生中任选 2 位赴武汉抗疫, 则选出的 2 位医生中至少有 1 位女医生的概率是__________.

157. 已知方程 $x^2+tx+1=0(t\in\mathbf{R})$ 的两个根是 x_1,x_2, 若 $|x_1-x_2|=2\sqrt{2}$, 则 $t=$__________.

158. 已知 O 是坐标原点, 点 $A(-1,1)$, 若点 $M(x,y)$ 为平面区域 $\begin{cases}x+y\geq 2,\\ x\leq 1,\\ y\leq 2,\end{cases}$ 上的一个动点, 则 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OM}$ 的取值范围是__________.

159. 课本中介绍了应用祖暅原理推导棱锥体积公式的做法. 祖暅原理也可用来求旋转体的体积. 现介绍用祖暅原理求球体体积公式的做法: 可构造一个底面半径和高都与球半径相等的圆柱, 然后在圆柱内挖去一个以圆柱下底面圆心为顶点, 圆柱上底面为底面的圆锥, 用这样一个几何体与半球应用祖暅原理 (左图), 即可求得球的体积公式. 请研究和理解球的体积公式求法的基础上, 解答以下问题: 已知椭圆的标准方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{25}=1$, 将此椭圆绕 y 轴旋转一周后, 得一橄榄状的几何体 (右图), 其体积等于__________.



160. 抛物线 $y=4x^2$ 的准线方程是 (　　).

A. $x=-2$　　B. $x=-1$　　C. $y=-\dfrac{1}{8}$　　D. $y=-\dfrac{1}{16}$

161. 若函数 $f(x)=\sin x+a\cos x$ 的图像关于直线 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 对称, 则 a 的值为 (　　).

A. 1　　B. -1　　C. $\sqrt{3}$　　D. $-\sqrt{3}$

162. 已知 $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ 是平面内两个互相垂直的单位向量, 若向量 $\overrightarrow{c}$ 满足 $(\overrightarrow{c}-\overrightarrow{a})\cdot(\overrightarrow{c}-\overrightarrow{b})=0$, 则 $|\overrightarrow{c}|$ 的最大值是 (　　).

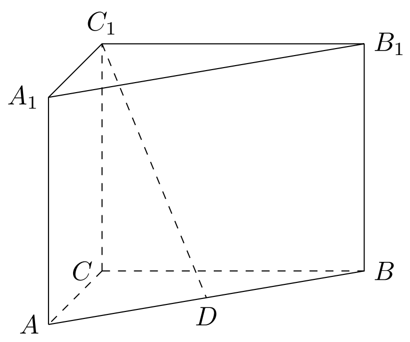
A. 1　　B. 2　　C. $\sqrt{2}$　　D. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

163. 已知命题: "若 a,b 为异面直线, 平面 α 过直线 a 且与直线 b 平行, 则直线 b 与平面 α 的距离等于异面直线 a,b 之间的距离" 为真命题. 根据上述命题, 若 a,b 为异面直线, 且它们之间的距离为 d, 则空间中与 a,b 均异面且距离也均为 d 的直线 c 的条数为 (　　).

A. 0 条　　B. 1 条

C. 多于 1 条, 但为有限条　　D. 无数多条

164. 如图, 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $\angle ACB=90^\circ$, $AB=2AC=2$, D 是 AB 的中点.



(1) 若三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积为 $3\sqrt{3}$, 求三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的高;

(2) 若 $C_1C=2$, 求二面角 $D-B_1C_1-A_1$ 的大小.

165. 已知函数 $f(x)=\sqrt{2}\sin(\omega x+\varphi)$, $g(x)=\sqrt{2}\cos\omega x$, $\omega>0$, $\varphi\in[0,\pi)$, 它们的最小正周期为 π.

(1) 若 $y=f(x)$ 是奇函数, 求 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上的公共递减区间 D;

(2) 若 $h(x)=f(x)+g(x)$ 的一个零点为 $x=-\dfrac{\pi}{6}$, 求 $h(x)$ 的最大值.

166. 已知函数 $f(x)=ax+\log_2(2^x+1)$, 其中 $a\in\mathbf{R}$.

(1) 根据 a 的不同取值, 讨论 $f(x)$ 的奇偶性, 并说明理由;

(2) 已知 $a>0$, 函数 $f(x)$ 的反函数为 $f^{-1}(x)$, 若函数 $y=f(x)+f^{-1}(x)$ 在区间 $[1,2]$ 上的最小值为 $1+\log_2 3$, 求函数 $f(x)$ 在区间 $[1,2]$ 上的最大值.

167. 设椭圆 Γ: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右焦点为 $F(1,0)$, 短轴的一个端点 B 到 F 的距离等于焦距. (1) 求椭圆 Γ 的标准方程;

(2) 设 C、D 是四条直线 $x=\pm a$, $y=\pm b$ 所围成的矩形在第一、第二象限的两个顶点, P 是椭圆 Γ 上任意一点, 若 $\overrightarrow{OP}=m\overrightarrow{OC}+n\overrightarrow{OD}$, 求证: m^2+n^2 为定值;

(3) 过点 F 的直线 l 与椭圆 Γ 交于不同的两点 M、N, 且满足 $\triangle BFM$ 与 $\triangle BFN$ 的面积的比值为 2, 求直线 l 的方程.

168. 定义: 设 $\{a_n\}$ 是无穷数列, 若存在正整数 k 使得对任意 $n\in\mathbf{N}^*$, 均有 $a_{n+k}>a_n(a_{n+k}<a_n)$, 则称 $\{a_n\}$ 是近似递增 (减) 数列, 其中 k 叫近似递增 (减) 数列 $\{a_n\}$ 的间隔数.

(1) 若 $a_n=n+(-1)^n$, $\{a_n\}$ 是不是近似递增数列? 并说明理由;

(2) 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=\dfrac{1}{(-2)^{n-1}}+a$, 其前 n 项的和为 S_n, 若 2 是近似递增数列 $\{S_n\}$ 的间隔数, 求 a 的取值范围;

(3) 已知 $a_n=-\dfrac{n}{2}+\sin n$, 证明 $\{a_n\}$ 是近似递减数列, 并且 4 是它的最小间隔数.

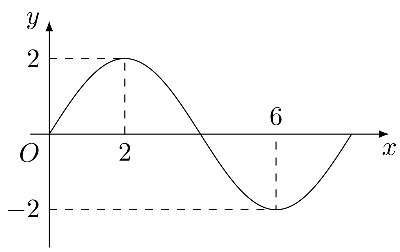
169. 集合 $A=\{x|x^2-2x<0\}$, $B=\{x||x|<1\}$, 则 $A\cup B$=__________.

170. 已知函数 $f(x)=\log_3(\dfrac{4}{x+2})$, 则方程 $f^{-1}(x)=4$ 的解 $x=$__________.

171. 等比数列 $\{a_n\}(n\in\mathbf{N}^*)$ 中, 若 $a_2=\dfrac{1}{16}$, $a_5=\dfrac{1}{2}$, 则 $a_8=$__________.

172. 若方程 $x^2-2x+3=0$ 的两个根为 α 和 β, 则 $|\alpha|\ +|\beta|=$__________.

173. 函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0, \omega>0, |\varphi|<\dfrac{\pi}{2})$ 的部分图像如图所示, 则 $f(x)=$__________.



174. 双曲线 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}=1$ 的焦点到渐近线的距离等于__________.

175. 在二项式 $(1+ax)^7(a\in\mathbf{R})$ 的展开式中, x 的系数为 $\dfrac{7}{3}$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}(a+a^2+a^3+\cdots+a^n)$ 的值是__________.

176. 已知正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的八个顶点都在同一球面上, 若 $AB=1$, $AA_1=\sqrt{2}$, 则 A、C 两点间的球面距离是__________.

177. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $AB=1$, $BC=2$, 若 $y=\begin{vmatrix}\cos C & \sin C\\ \sin C & \cos C\end{vmatrix}$, 则 y 的最小值是__________.

178. 已知双曲线 $C:\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{8}=1$, 左、右焦点分别为 F_1、F_2, 过点 F_2 作一直线与双曲线 C 的右支交于 P、Q 两点, 使得 $\angle F_1PQ=90^\circ$, 则 $\triangle F_1PQ$ 的内切圆的半径 $r=$__________

179. 若函数 $f(x)=(1+\sin x)^{2021}+(1-\sin x)^{2021}$, 其中 $\dfrac{\pi}{6}\le x\le\dfrac{2\pi}{3}$, 则 $f(x)$ 的最大值为__________

180. 已知实数 a、b 使得不等式 $|ax^2+bx+a|\le x$ 对任意 $x\in[1,2]$ 都成立, 在平面直角坐标系 xOy 中, 点 (a,b) 形成的区域记为 Ω, 若圆 $x^2+y^2=r^2$ 上的任一点都在 Ω 中, 则 r 的最大值为__________

181. 设 z_1、z_2 为复数, 下列命题一定成立的是 (　　).

A. 如果 $z_1^2+z_2^2=0$, 那么 $z_1=z_2=0$

B. 如果 $|z_1|=|z_2|$, 那么 $z_1=\pm z_2$

C. 如果 $|z_1|\le a$, a 是正实数, 那么 $-a\le z_1\le a$

D. 如果 $|z_1|=a$, a 是正实数, 那么 $z_1\cdot\overline{z_1}=a^2$

182. 下列命题为真命题的是 (　　).

A. 若直线 l 与平面 α 上的两条直线垂直, 则直线 l 与平面 α 垂直

B. 若两条直线同时垂直于一个平面, 则这两条直线平行

C. 若两个平面同时垂直于第三个平面, 则这两个平面垂直

D. 若直线 l 上的不同两点到平面 α 的距离相等, 则直线 l 与平面 α 平行

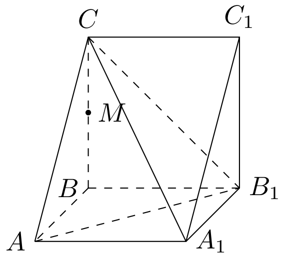
183. 若数列 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$ 的通项公式分别为 $a_n=(-1)^{n+2020}a$, $b_n=2+\dfrac{(-1)^{n+2019}}{n}$, 且 $a_n<b_n$ 对任意 $n\in\mathbf{N}^*$ 恒成立, 则实数 a 的取值范围为 (　　).

A. $[-2,1)$　　B. $[-2,\dfrac{3}{2})$　　C. $[-1,\dfrac{1}{2})$　　D. $[-1,1)$

184. 已知定义在实数集 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+1)=\dfrac{1}{2}+\sqrt{f(x)-f^2(x)}$, 则 $f(0)+f(2021)$ 的最小值与最大值的和为 (　　).

A. 2　　B. 3　　C. $\dfrac{3}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　D. $\dfrac{5}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

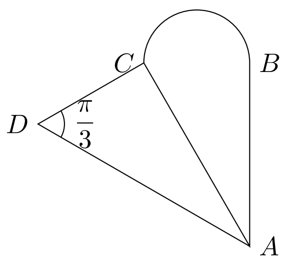
185. 如图, 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $BA\perp BC$, $BA=BC=BB_1=2$.



(1) 求异面直线 AB_1 与 A_1C_1 所成角的大小;

(2) 若 M 是棱 BC 的中点. 求点 M 到平面 A_1B_1C 的距离.

186. 随着生活水平的不断提高, 人们更加关注健康, 重视锻炼, 通过 “小步道”, 走出 “大健康”, 健康步道成为引领健康生活的一道亮丽风景线. 如图, $A-B-C-A$ 为某区的一条健康步道, AB、AC 为线段, $\overset{\frown}{BC}$ 是以 BC 为直径的半圆, $AB=2\sqrt{3}\text{km}$, $AC=4\text{km}$, $\angle BAC=\dfrac{\pi}{6}$.



(1) 求 $\overset{\frown}{BC}$ 的长度;

(2) 为满足市民健康生活需要, 提升城市品位, 改善人居环境, 现计划新建健康步道 $A-D-C$(B, D 在 AC 两侧), 其中 AD, CD 为线段. 若 $\angle ADC=\dfrac{\pi}{3}$, 求新建的健康步道 $A-D-C$ 的路程最多可比原有健康步道 $A-B-C$ 的路程增加多少长度 (精确到 0.01km)?

187. 已知椭圆 $\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 上有两点 $P(-2,1)$ 及 $Q(2,-1)$, 直线 $l: y=kx+b$ 与椭圆交于 A、B 两点, 与线段 PQ 交于点 C(异于 P、Q).

(1) 当 $k=1$ 且 $\overrightarrow{PC}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{CQ}$ 时, 求直线 l 的方程;

(2) 当 $k=2$ 时, 求四边形 $PAQB$ 面积的取值范围.

188. 在数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_1=2$, $a_{n+1}a_n=2a_n-a_{n+1}(n\in\mathbf{N}^*)$.

(1) 证明: 数列 $\{\dfrac{1}{a_n}-1\}$ 为等比数列;

(2) 记 $b_n=\dfrac{a_na_{n+1}}{2^n}$, 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 S_n. 求使得 $S_n>1.999$ 的整数 n 的最小值;

(3) 是否存在正整数 m、n、k, 且 $m<n<k$, 使得 a_m、a_n、a_k 成等差数列? 若存在, 求出 m、n、k 的值; 若不存在, 请说明理由.

189. 设 m 为给定的实常数, 若函数 $y=f(x)$ 在其定义域内存在实数 x_0, 使得 $f(x_0+m)=f(x_0)+f(m)$ 成立, 则称函数 $f(x)$ 为 "$G(m)$ 函数".

(1) 若函数 $f(x)=2^x$ 为 "$G(2)$ 函数", 求实数 x_0 的值;

(2) 若函数 $f(x)=\lg\dfrac{a}{x^2+1}$ 为 "$G(1)$ 函数", 求实数 a 的取值范围;

(3) 已知 $f(x)=x+b(b\in\mathbf{R})$ 为 "$G(0)$ 函数", 设 $g(x)=x|x-4|$. 若对任意的 $x_1,x_2\in[0,t]$, 当 $x_1\neq x_2$ 时, 都有 $\dfrac{g(x_1)-g(x_2)}{f(x_1)-f(x_2)}>2$ 成立, 求实数 t 的最大值.

190. 方程 $\log_3(2x+1)=2$ 的解是__________.

191. 已知集合 $M=\{x||x+1|\leq 1\}$, $N=\{-1,0,1\}$, 则 $M\cap N=$__________.

192. 若复数 $z_1=a+2\mathrm{i}$, $z_2=2+\mathrm{i}$(i 是虚数单位), 且 z_1z_2 为纯虚数, 则实数 $a=$__________.

193. 直线 $\begin{cases}x=-2-\sqrt{2}t,\\ y=3+\sqrt{2}t\end{cases}$ (t 为参数) 对应的普通方程是__________.

194. 函数 $y=\begin{vmatrix}\sin x & 1\\ 0 & \cos x\end{vmatrix}$ 的最小正周期为__________.

195. 若 $(x+2)^n=x^n+ax^{n-1}+\cdots+bx+c(n\in\mathbf{N}^*, n\geq 3)$, 且 $b=4c$, 则 a 的值为__________.

196. 若函数 $f(x)=2^x(x+a)-1$ 在区间 $[0,1]$ 上有零点, 则实数 a 的取值范围是__________.

197. 某学生在上学路上要经过 2 个路口, 假设在各路口是否遇到红灯是相互独立的, 遇到红灯概率都是 $\dfrac{1}{3}$, 则这名学生在上学路上到第二个路口时第一次遇到红灯的概率是__________.

198. 设不等式组 $\begin{cases}x+y-6\geq 0,\\ x-y+2\geq 0,\\ x-3y+6\leq 0\end{cases}$ 表示的可行域为 Ω, 若指数函数 $y=a^x$ 的图像与 Ω 有公共点, 则 a 的取值范围是__________.

199. 已知椭圆 $x^2+\dfrac{y^2}{b^2}=1(0<b<1)$, 其左、右焦点分别为 F_1、F_2, $|F_1F_2|=2c$, 若椭圆上存在点 P, 使 P 到直线 $x=\dfrac{1}{c}$ 距离是 $|PF_1|$ 与 $|PF_2|$ 的等差中项, 则 b 的最大值为__________.

200. 已知 $f(x)=1+ax-\sqrt{1+ax^2}$, 若对任意 $x\in[0,\sqrt{2}]$, $f(x)\le 0$ 恒成立, 则实数 a 的取值范围为__________.

201. 已知函数 $f(x)=|\sin x|+|\cos x|-4\sin x\cos x-k$, 若函数 $f(x)$ 在区间 $(0,\pi)$ 内恰好有奇数个零点, 则实数 k 的所有取值之和为__________.

202. 函数 $y=x^2(x\le 0)$ 的反函数为 (　　).

A. $y=\sqrt{x},\ x\ge 0$　　B. $y=-\sqrt{x},\ x\ge 0$　　C. $y=\sqrt{x},\ x\le 0$　　D. $y=-\sqrt{x},\ x\le 0$

203. 某高科技公司所有雇员的工资情况如下表所示.

年薪 (万元)	135	95	80	70	60	52	40	31
人数	1	1	2	1	3	4	1	12

该公司雇员年薪的标准差约为 (　　).

A. 24.5(万元)　　B. 25.5(万元)　　C. 26.5(万元)　　D. 27.5(万元)

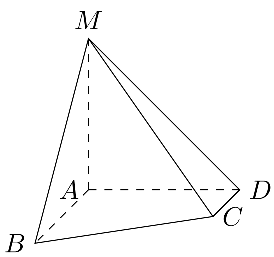
204. 已知函数 $f(x)=x+\dfrac{a}{x}(a>0)$, $0<x_1<x_2$, 且 $f(x_1)=f(x_2)$, 给出以下结论:
① $\dfrac{x_1+x_2}{2}>\sqrt{a}$ 恒成立; ② $f(2\sqrt{a}-x_1)<f(x_2)$ 恒成立. 则 (　　).

A. ①正确, ②正确　　B. ①正确, ②错误　　C. ①错误, ②正确　　D. ①错误, ②错误

205. 在直角坐标平面上, 到两条直线 $y=0$ 与 $y=x$ 的距离和为 3 的点的轨迹所围成的图形的面积是 (　　).

A. 18　　B. $18\sqrt{2}$　　C. 36　　D. $36\sqrt{2}$

206. 如图, 在四棱锥 $M-ABCD$ 中, 已知 $AM\perp$ 平面$ABCD$, $AB\perp AD$, $AB\parallel CD$, $AB=2CD$, 且 $AB=AM=AD=2$.



(1) 求四棱锥 $M-ABCD$ 的体积;

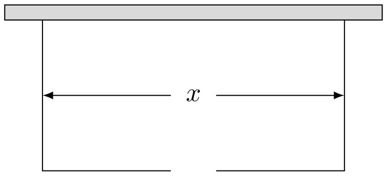
(2) 求直线 MC 与平面 ADM 所成的角.

207. 已知 $x\in\mathbf{R}$, $\overrightarrow{m}=(2\cos x,2\sqrt{3}\sin x)$, $\overrightarrow{n}=(\cos x,\cos x)$.

(1) 设 $f(x)=\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{n}$, 求函数 $y=f(x)$ 的解析式及最大值;

(2) 设 $\triangle ABC$ 的三个内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c, 当 $x=A$ 时, $\overrightarrow{m}=a\overrightarrow{n}$, 且 $c=2\sqrt{3}$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

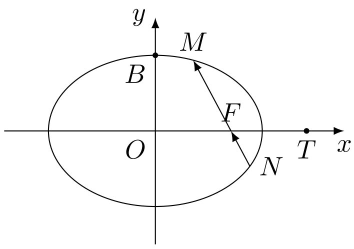
208. 某学校对面有一块空地要围建成一个面积为 $360\mathrm{m}^2$ 的矩形场地, 要求矩形场地的一面利用旧墙 (旧墙需要整修), 其它三面围墙要新建, 在旧墙对面的新墙上要留一个宽度为 2m 的进出口, 如图所示. 已知旧墙的整修费用为 45元/m, 新建墙的造价为 180元/m, 建 2m 宽的进出口需 2360 元的单独费用, 设利用的旧墙的长度为 x(单位: m), 设修建此矩形场地围墙的总费用 (含建进出口的费用) 为 y(单位: 元).



(1) 将 y 表示为 x 的函数;

(2) 试确定 x, 使修建此矩形场地围墙的总费用 (含建进出口的费用) 最少, 并求出最少总费用.

209. 已知椭圆 Γ 的中心是坐标原点 O, 焦点在 x 轴上, 点 B 是椭圆 Γ 的上顶点, 椭圆 Γ 上一点 $A(1, \dfrac{\sqrt{2}}{2})$ 到两焦点距离之和为 $2\sqrt{2}$.



(1) 求椭圆 Γ 的标准方程;

(2) 若点 P, Q 是椭圆 Γ 上异于点 B 的两点, $BP \perp BQ$, 且满足 $3\overrightarrow{PC} = 2\overrightarrow{CQ}$ 的点 C 在 y 轴上, 求直线 BP 的方程;

(3) 设 x 轴上点 T 坐标为 $(2,0)$, 过椭圆 Γ 的右焦点 F 作直线 l(不与 x 轴重合) 与椭圆 Γ 交于 M、N 两点, 如图, 点 M 在 x 轴上方, 点 N 在 x 轴下方, 且 $\overrightarrow{FM} = 2\overrightarrow{NF}$, 求 $|\overrightarrow{TM} + \overrightarrow{TN}|$ 的值.

210. 已知数列 $\{x_n\}$, 若对任意 $n \in \mathbf{N}^*$, 都有 $\dfrac{x_n + x_{n+2}}{2} > x_{n+1}$, 则称数列 $\{x_n\}$ 为 "差增数列".

(1) 试判断数列 $a_n = n^2 (n \in \mathbf{N}^*)$ 是否为 "差增数列", 并说明理由;

(2) 对于所有各项均为正整数的 "差增数列" $\{a_n\}$, 其中 $a_1 = a_2 = 1$, 若使得 $a_k = m$ 成立的序数 k 的最大值为 20, 求正整数 m 的所有可能取值的集合;

(3) 若数列 $\{\lg x_n\}$ 为 "差增数列" $(n \in \mathbf{N}^*, n \leq 2020)$ 且 $\lg x_1 + \lg x_2 + \cdots + \lg x_{2020} = 0$, 证明: $x_{1010} \cdot x_{1011} < 1$.

211. 若 $\sin\alpha = \dfrac{1}{4}$, 则 $\sin(\pi + \alpha) =$__________.

212. 设集合 $A = \{1,2,3\}$, $B = \{y | y = \sin x,\ x \in \mathbf{R}\}$, 则 $A \cap B =$__________.

213. 已知圆锥的底面半径为 1, 母线长为 2, 则该圆锥的体积为__________.

214. 关于 x 的不等式 $\dfrac{1}{x} > 1$ 的解集为__________.

215. 已知常数 $a \in \mathbf{R}$, 若复数 $z=(a+\mathrm{i})(2+\mathrm{i})$($\mathrm{i}$ 为虚数单位) 的实部与虚部相等, 则 $|z|=$__________.

216. 在 $(x^2+\dfrac{2}{x})^7$ 的二项展开式中, x^2 的系数为__________.

217. 各项都不为零的等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_2-2a_8^2+3a_{10}=0$, 则 $a_8=$__________.

218. 设椭圆 $\Gamma: \dfrac{x^2}{a^2}+y^2=1(a>1)$ 的左顶点为 A, 过点 A 的直线 l 与 Γ 相交于另一点 B, 与 y 轴相交于点 C. 若 $|OA|=|OC|$, $|AB|=|AC|$, 则 $a=$__________.

219. 已知常数 $b, c \in \mathbf{R}$. 若函数 $f(x)=(x^2+x-2)(x^2+bx+c)$ 为偶函数, 则 $b+c=$__________.

220. 设 a, b, c, d, e, f 为 $1,2,3,4,5,6$ 的任意一个排列, 则使得 $(a+b)(c+d)(e+f)$ 为偶数的排列共有__________个.

221. 已知定点 $A(1,0)$, 圆 $\omega: x^2+y^2=4$, M, N 为 ω 上的动点, 满足 $|MN|=2\sqrt{3}$, 则 $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}$ 的取值范围为__________.

222. 空间中, 给定两条异面直线 m, n 以及平面 α, 满足: $m \perp n$, n 在平面 α 上, m 与 α 所成的角 $\theta \in [60^\circ, 90^\circ]$. 动点 P 在 α 上, 满足 P 到 m 的距离与 P 到 n 的距离相等, 记 P 的轨迹为曲线 Γ. 对于下列命题: ① Γ 可以是椭圆; ② Γ 可以是双曲线, 且两条渐近线的夹角为 30°; ③ Γ 可以是双曲线, 且两条渐近线的夹角为 60°; ④ Γ 可以是抛物线, 所有真命题的序号为__________.

223. 行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$=(　　).

A. -4　　B. -2　　C. 2　　D. 4

224. 函数 $f(x)=\sin(2x+\dfrac{\pi}{4})$ 的图像关于 (　　) 对称.

A. 直线 $x=\dfrac{\pi}{4}$　　B. 直线 $x=\dfrac{3\pi}{8}$　　C. 点 $(\dfrac{\pi}{4},0)$　　D. 点 $(\dfrac{3\pi}{8},0)$

225. 设 a, b, c 表示三条互不重合的直线, α、β 表示两个不重合的平面, 则使得 $a \parallel b$ 成立的一个充分条件为 (　　).

A. $a \perp c$, $b \perp c$　　B. $a \parallel \alpha$, $b \parallel \alpha$

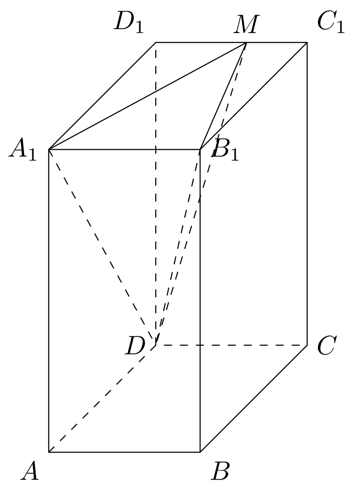
C. $a \parallel \alpha$, $a \parallel \beta$, $\alpha \cap \beta = b$　　D. $b \perp \alpha$, $c \parallel \alpha$, $a \perp c$

226. 在锐角 $\triangle ABC$ 中, O 为 $\triangle ABC$ 的外心, 设 O 到直线 BC, AC, AB 的距离分别为 d_1, d_2, d_2. 若将所有的全等三角形看作同一个三角形, 则对于命题: ① 对任意给定的 $d_1, d_2 \in \mathbf{R}^+$ 以及 $\angle C \in (0, \dfrac{\pi}{2})$, 锐角 $\triangle ABC$ 都存在且唯一; ② 对任意给定的 $d_1, d_2, d_3 \in \mathbf{R}^+$, 锐角 $\triangle ABC$ 都存在且唯一, 下列判断正确的是 (　　).

A. ①、②均为真命题　　B. ①、②均为假命题

C. ①为真命题, ②为假命题　　D. ①为假命题, ②为真命题

227. 如图, 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $2AB=BC=AA_1$, 点 M 为棱 C_1D_1 上的动点.



(1) 求三棱锥 $D-A_1B_1M$ 与长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的体积比;

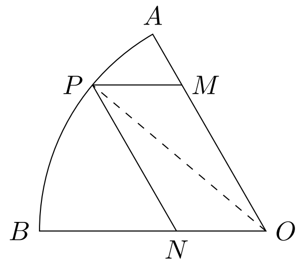
(2) 若 M 为棱 C_1D_1 的中点, 求直线 DB_1 与平面 DA_1M 所成角的大小.

228. 已知常数 $a \in \mathbf{R}^+$, 函数 $f(x)=3^x+a^2\cdot 3^{-x}$.

(1) 若 $a=\sqrt{3}$, 解关于 x 的不等式 $f(x)<4$;

(2) 若 $f(x)$ 在 $[3,+\infty)$ 上为增函数, 求 a 的取值范围.

229. 某居民小区为缓解业主停车难的问题, 拟对小区内一块扇形空地 AOB 进行改建. 如图所示, 平行四边形 $OMPN$ 区域为停车场, 其余部分建成绿地, 点 P 在围墙 $\overset{\frown}{AB}$ 上, 点 M 和 N 分别在道路 OA 和道路 OB 上, 且 $OA=60\text{m}$, $\angle AOB=\dfrac{\pi}{3}$. 设 $\angle POB=\theta$.



(1) 求停车场面积 S(单位: m^2) 关于 θ 的函数关系式, 并写出 θ 的取值范围;

(2) 求停车场面积 S 的最大值以及相应 θ 的值.

230. 已知常数 $p>0$, 抛物线 $\Gamma: y^2=2px$ 的焦点为 F.

(1) 若直线 $x=2$ 被 Γ 截得的弦长为 4, 求 p 的值;

(2) 设 E 为点 F 关于原点 O 的对称点, P 为 Γ 上的动点, 求 $\dfrac{|PE|}{|PF|}$ 的取值范围;

(3) 设 $p=2$. 两条互相垂直的直线 l_1, l_2 均过点 F, l_1 与 Γ 相交于 A, B 两点, l_2 与 Γ 相交于 C, D 两点. 若 $AC\perp BC$, 求四边形 $ACBD$ 的面积.

231. 记无穷数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 集合 $M=\{x|x=a_n,\ n\in\mathbf{N}^*\}$. 若对任意 $n\in\mathbf{N}^*$, 恒有 $S_n\in M$, 则称 $\{a_n\}$ 具有性质 $\mathbf{P}$.

(1) 若无穷数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n=n^2+n+2$, 判断 $\{a_n\}$ 是否具有性质 $\mathbf{P}$, 并说明理由;

(2) 若无穷数列 $\{a_n\}$ 为等差数列, 首项 $a_1=-1$, 公差 $d>0$, 且 $\{a_n\}$ 具有性质 $\mathbf{P}$, 求 d 的值;

(3) 若无穷数列 $\{a_n\}$ 为等比数列, 首项 $a_1=1$, 公比 $q>0$, 问: 是否存在 q, 使得 $\{a_n\}$ 具有性质 $\mathbf{P}$? 若存在, 求出所有 q 的值; 若不存在, 说明理由.

232. 已知复数 z 满足 $z=3-\mathrm{i}$(i 为虚数单位), 则 $z\cdot\bar{z}=$__________.

233. 已知函数 $f(x)=\sqrt{2x-1}$ 的反函数为 $f^{-1}(x)$, 则 $f^{-1}(7)=$__________.

234. 在行列式 $D=\begin{vmatrix}1 & 3 & 7\\ 2 & 5 & -2\\ 1 & 2 & 3\end{vmatrix}$ 中, 第二行第三列的元素 3 的代数余子式的值为__________.

235. 在 $(x-\sqrt{2})^8$ 的二项展开式中, x^5 项的系数是__________.

236. 已知 x,y 满足: $\begin{cases}x+2\geq 0,\\ y-1\leq 0,\\ x-y-4\leq 0\end{cases}$ 则 $z=x-2y$ 的最大值为__________.

237. 方程 $\log_5(4^x-11)-1=\log_5(2^x-3)$ 的解为 $x=$__________.

238. 已知一组数据 $a,3,-2,8$ 的中位数为 5, 则其总体方差为__________.

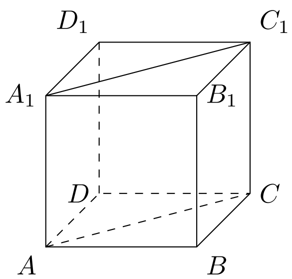
239. 已知函数 $f(x)=g(x)+|2x-1|$ 为奇函数, 若 $g(-2)=7$, 则 $g(2)=$__________.

240. 直线 $l:(n+2)x-y+n-1=0(n\in\mathbf{N}^*)$ 被圆 $C:(x-1)^2+y^2=16$ 所截得的弦长为 d_n, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}d_n=$__________.

241. 非空集合 A 中所有元素乘积记为 T. 已知集合 $M=\{1,4,5,7,8,9\}$, 从集合 M 的所有非空子集中任选一个子集 A, 则 $T(A)$ 为偶数的概率是__________(结果用最简分数表示).

242. 函数 $f(x)=\sin(\omega x)+\sqrt{3}\cos(\omega x)(\omega>0)$, 若恰有两个实数 m 满足: ① $0\leq m\leq\frac{\pi}{2}$; ② $x=m$ 是函数图像的对称轴, 则 ω 的取值范围是__________.

243. 如图, 在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 点 P 是平面 ACC_1A_1 上一动点, 且满足 $\overrightarrow{DP}\cdot\overrightarrow{CP}=0$, 则满足条件的所有点 P 所围成的平面区域的面积是__________.



244. 若 $m,n\in\mathbf{R}$, i 是虚数单位, 则 "$m^2=n^2$" 是 "$(m-n)+(m+n)\mathrm{i}$ 为纯虚数" 的 ( ).

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

245. 已知数列 $\{a_n\}$ 是无穷等比数列, 若 $a_1<a_2<0$, 则数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n( ).

A. 无最大值, 有最小值　　B. 有最大值, 有最小值

C. 有最大值, 无最小值　　D. 无最大值, 无最小值

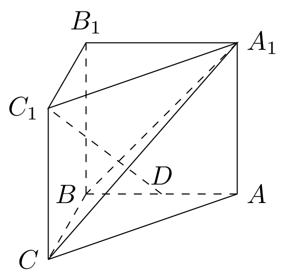
246. 若直线 $ax+by=2(a,b$ 不全为零) 经过点 $M(2\cos\alpha,\sin\alpha)(\alpha\in\mathbf{R})$, 则 ( ).

A. $4a^2+b^2\le 4$　　B. $4a^2+b^2\ge 4$　　C. $\dfrac{4}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}\le 4$　　D. $\dfrac{4}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}\ge 4$

247. 已知集合 $M=\{(x,y)|y=f(x)\}$, 若对于任意 $(x_1,y_1)\in M$, 存在 $(x_2,y_2)\in M$, 使得 $x_1x_2+y_1y_2=0$ 成立, 则称集合 M 是 "Ω 集合". 给出下列 4 个集合: ① $M=\{(x,y)|y=\dfrac{1}{x}\}$; ② $M=\{(x,y)|y=\mathrm{e}^x-2\}$; ③ $M=\{(x,y)|y=\cos x\}$; ④ $M=\{(x,y)|y=\ln x\}$. 其中所有 "Ω 集合" 的序号是 ( ).

A. ②③　　B. ③④　　C. ①②④　　D. ①③④

248. 如图, 棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AB=BC=AA_1=2$, $BB_1\perp$ 底面ABC, $AB\perp BC$, D 是棱 AB 的中点.



(1) 求证: 直线 BC 与直线 DC_1 为异面直线;

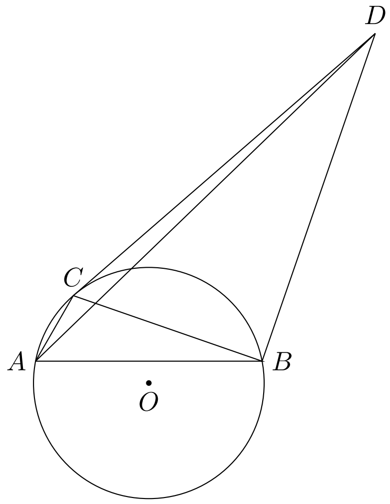
(2) 求直线 DC_1 与平面 A_1BC 所成角的大小.

249. 已知 $f(x)=ax+\dfrac{x^2}{x^2+1}$, a 为实常数.

(1) 当 $a=1$ 时, 求不等式 $f(x)+f(\dfrac{1}{x})<x$ 的解集;

(2) 若函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 中有零点, 求 a 的取值范围.

250. 如图, A,B,C 三地在以 O 为圆心的圆形区域边界上, $AB=30$ 公里, $AC=10$ 公里, $\angle BAC=60^\circ$, D 是圆形区域外一景点, $\angle DBC=90^\circ$, $\angle DCB=60^\circ$.



(1) O、A 相距多少公里 (精确到小数点后两位)? (2) 若一汽车从 A 处出发, 以每小时 50 公里的速度沿公路 AD 行驶到 D 处, 需要多少小时 (精确到小数点后两位)?

251. 已知椭圆 $\Omega: \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 的左右两焦点分别为 F_1, F_2.

(1) 若矩形 $ABCD$ 的边 AB 在 y 轴上, 点 C, D 均在 Ω 上, 求该矩形绕 y 轴旋转一周所得圆柱侧面积 S 的取值范围;

(2) 设斜率为 k 的直线 l 与 Ω 交于 P, Q 两点, 线段 PQ 的中点为 $M(1, m)(m>0)$, 求证: $k<-\dfrac{1}{2}$;

(3) 过 Ω 上一动点 $E(x_0, y_0)$ 作直线 $l: \dfrac{x_0 x}{4}+\dfrac{y_0 y}{3}=1$, 其中 $y_0 \neq 0$, 过 E 作直线 l 的垂线交 x 轴于点 R. 问是否存在实数 λ, 使得 $|EF_1| \cdot |RF_2|=\lambda|EF_2| \cdot |RF_1|$ 恒成立? 若存在, 求出 λ 的值; 若不存在, 说明理由.

252. 已知无穷数列 $\{a_n\}$ 与无穷数列 $\{b_n\}$ 满足下列条件: ① $a_n \in\{0,1,2\}$, $n \in \mathbf{N}^*$; ② $\dfrac{b_{n+1}}{b_n}=(-1)^n \cdot|\dfrac{1}{2} a_n-\dfrac{1}{4} a_{n+1}|$, $n \in \mathbf{N}^*$. 记数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项积为 T_n.

(1) 若 $a_1=b_1=1$, $a_2=0$, $a_3=2$, $a_4=1$, 求 T_4;

(2) 是否存在 a_1, a_2, a_3, a_4, 使得 b_1, b_2, b_3, b_4 成等差数列? 若存在, 请写出一组 a_1, a_2, a_3, a_4; 若不存在, 请说明理由;

(3) 若 $b_1=1$, 求 T_{2021} 的最大值.

253. 集合 $A=\{1,2,3,4\}$, $B=\{x \mid(x-1)(x-5)<0\}$, 则 $A \cap B=$__________.

254. 复数 $z=\dfrac{2-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$ 所对应的点在复平面内位于第__________ 象限.

255. 已知首项为 1 公差为 2 的等差数列 $\{a_n\}$, 其前 n 项和为 S_n, 则 $\lim\limits_{n \rightarrow \infty} \dfrac{(a_n)^2}{S_n}=$__________.

256. 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{81}=1(a>0)$ 的一条渐近线方程为 $y=3x$, 则 $a=$__________.

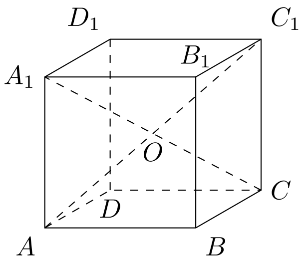
257. 若圆柱的侧面展开图是边长为 4 的正方形, 则圆柱的体积为__________.

258. 已知 x、y 满足 $\begin{cases} x-y\le 0, \\ x+y\le 2, \\ x+2\ge 0, \end{cases}$，则 $z=2x+y$ 的最大值是__________.

259. 已知函数 $f(x)=\begin{cases} 2^x, & x\le 0 \\ \log_2 x, & 0<x\le 1 \end{cases}$ 的反函数是 $f^{-1}(x)$, 则 $f^{-1}(\frac{1}{2})=$__________.

260. 生产零件需要经过两道工序, 在第一、第二道工序中产生废品的概率分别为 0.01 和 p, 每道工序产生废品相互独立, 若经过两道工序后得到的零件不是废品的概率是 0.9603, 则 $p=$__________.

261. 如图, 长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的边长 $AB=AA_1=1$, $AD=\sqrt{2}$, 它的外接球是球 O, 则 A、A_1 这两点的球面距离等于__________.



262. $[x]$ 是不超过 x 的最大整数, 则方程 $(2^x)^2-\frac{7}{4}\cdot[2^x]-\frac{1}{4}=0$ 满足 $x<1$ 的所有实数解是__________.

263. 在直角 $\triangle ABC$ 中, $\angle A=\frac{\pi}{2}$, $AB=1$, $AC=2$, M 是 $\triangle ABC$ 内一点, 且 $AM=\frac{1}{2}$, 若 $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$, 则 $\lambda+2\mu$ 的最大值为__________.

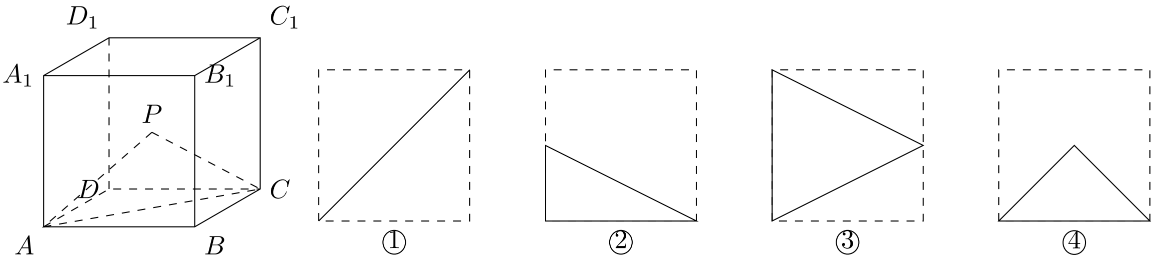
264. 已知函数 $f(x)=\cos x$, 若对任意实数 x_1、x_2, 方程 $|f(x)-f(x_1)|+|f(x)-f(x_2)|=m(m\in\mathbf{R})$ 有解, 方程 $|f(x)-f(x_1)|-|f(x)-f(x_2)|=n(n\in\mathbf{R})$ 也有解, 则 $m+n$ 的值的集合为__________.

265. 已知 α,β 是两个不同平面, m 为 α 内的一条直线, 则 “$m\parallel\beta$” 是 “$\alpha\parallel\beta$” 的 (　　).

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

266. 如图, P 为正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中 AC_1 与 BD_1 的交点, 则 $\triangle PAC$ 在该正方体各个面上的正投影可能是 (　　).



A. ①②③④　　B. ①③　　C. ①④　　D. ②④

267. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 对任意两个不相等的正数 x_1, x_2 都有 $\dfrac{x_2 f(x_1)-x_1 f(x_2)}{x_1-x_2}<0$, 则函数 $g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$ (　　).

A. 是偶函数, 且在 $(0,+\infty)$ 上单调递减　　B. 是偶函数, 且在 $(0,+\infty)$ 上单调递增

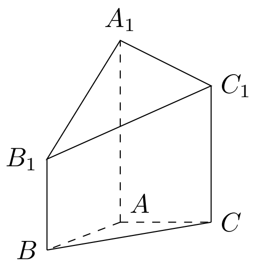
C. 是奇函数, 且单调递减　　D. 是奇函数, 且单调递增

268. 已知数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1=a$, 且 $0<a\leq 4$, $a_{n+1}=\begin{cases}a_n-4, & a_n>4,\\ 6-a_n, & a_n\leq 4,\end{cases}$ S_n 是此数列的前 n 项和, 则以下结论正确的是 (　　).

A. 不存在 a 和 n 使得 $S_n=2015$　　B. 不存在 a 和 n 使得 $S_n=2016$

C. 不存在 a 和 n 使得 $S_n=2017$　　D. 不存在 a 和 n 使得 $S_n=2018$

269. 如图, 在多面体 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, AA_1、BB_1、CC_1 均垂直于平面 ABC, $AA_1=4$, $CC_1=3$, $BB_1=AB=AC=2$, $\angle BAC=120°$.



(1) 求 AB_1 与 $A_1B_1C_1$ 所成角的大小;

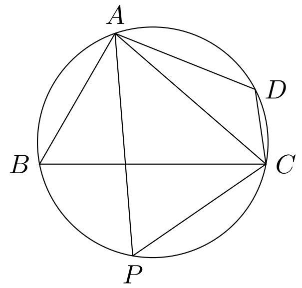
(2) 求二面角 $A-A_1B_1-C_1$ 的大小.

270. 已知函数 $f(x)=1-\dfrac{6}{a^{x+1}+a}(a>0, a\neq 1)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数.

(1) 求实数 a 的值及函数 $f(x)$ 的值域;

(2) 若不等式 $t\cdot f(x)\geq 3^x-3$ 在 $x\in[1,2]$ 上恒成立, 求实数 t 的取值范围.

271. 某城市的棚户区改造建筑用地平面示意图如图所示, 经过调研、规划确定, 棚改规划用地区域近似为圆面, 该圆的内接四边形 $ABCD$ 区域是原棚户区建筑用地, 测量可知边界 $AB=AD=2(\text{km}), BC=3(\text{km}), CD=1(\text{km})$.



(1) 求 AC 的长及原棚户区建筑用地 $ABCD$ 的面积;

(2) 因地理条件限制, 边界 AD, DC 不能变更, 而边界 AB, BC 可以调整, 为了增加棚户区建筑用地的面积, 请在弧 $\overset{\frown}{ABC}$ 上设计一点 P, 使得棚户区改造后的新建筑用地 (四边形 $APCD$) 的面积最大, 并求出这个面积最大值.

272. 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$, 定义椭圆 C 上的点 $M(x_0,y_0)$ 的 "伴随点" 为 $N(\dfrac{x_0}{a},\dfrac{y_0}{b})$.

(1) 求椭圆 C 上的点 M 的 "伴随点"N 的轨迹方程;

(2) 如果椭圆 C 上的点 $(1,\dfrac{3}{2})$ 的 "伴随点" 为 $(\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2b})$, 对于椭圆 C 上的任意点 M 及它的 "伴随点"N, 求 $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}$ 的取值范围;

(3) 当 $a=2$, $b=\sqrt{3}$ 时, 直线 l 交椭圆 C 于 A, B 两点, 若点 A, B 的 "伴随点" 分别是 P, Q, 且以 PQ 为直径的圆经过坐标原点 O, 求 $\triangle OAB$ 的面积.

273. 已知项数为 $m\,(m\in N^*,m\geq 2)$ 的数列 $\{a_n\}$ 满足条件: ① $a_n\in N^*(n=1,2,\cdots,m)$ ② $a_1<a_2<\cdots<a_m$.; 若数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n=\dfrac{(a_1+a_2+\cdots+a_m)-a_n}{m-1}\in\mathbf{N}^*(n=1,2,\cdots,m)$, 则称 $\{b_n\}$ 为数列 $\{a_n\}$ 的 "关联数列".

(1) 数列 $1,5,9,13,17$ 是否存在 "关联数列"? 若存在, 写出其 "关联数列"; 若不存在, 请说明理由;

(2) 若数列 $\{a_n\}$ 存在 "关联数列"$\{b_n\}$, 证明:$a_{n+1}-a_n\geq m-1(n=1,2,\cdots,m-1)$;

(3) 已知数列 $\{a_n\}$ 存在 "关联数列"$\{b_n\}$, 且 $a_1=1$, $a_m=2049$, 求数列 $\{a_n\}$ 项数 m 的最小值与最大值.

274. 已知集合 $A=\{-2,1,2\}$, $B=\{\sqrt{a}+1,a\}$, 且 $B\subseteq A$, 则实数 a 的值是__________.

275. 若直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=4-4t,\\ y=-2+3t,\end{cases}$ $t\in\mathbf{R}$, 则直线 l 在 y 轴上的截距是__________.

276. 如果一个圆柱的高不变, 要使它的体积扩大为原来的 5 倍, 那么它的底面半径应该扩大为原来的__________倍.

277. 平面上有 12 个不同的点, 其中任何 3 点不在同一直线上, 如果任取 3 点作为顶点作三角形, 那么一共可作__________ 个三角形 (结果用数值表示).

278. 把三阶行列式 $\begin{vmatrix}2^x & 0 & 3\\ x & 4 & 0\\ 1 & x-3 & -1\end{vmatrix}$ 中第 1 行第 3 列元素的代数余子式记为 $f(x)$, 则关于 x 的不等式 $f(x)<0$ 的解集为__________.

279. 焦点在 y 轴上, 焦距为 6, 且经过点 $(0,\sqrt{5})$ 的双曲线的标准方程为__________.

280. 已知抛物线型拱桥的顶点距水面 2 米时, 量得水面宽为 8 米, 当水面下降 1 米后, 水面的宽为__________ 米.

281. 函数 $y=\sin(\dfrac{\pi}{6}-x)$, $x\in[0,\dfrac{3\pi}{2}]$ 的单调递减区间是__________.

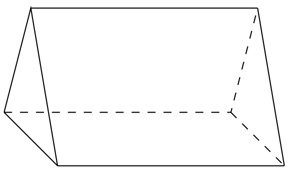
282. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足: ① $f(x)+f(2-x)=0$; ② $f(x)-f(-2-x)=0$; ③ 在 $[-1,1]$ 上表达式为 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2}, & x\in[-1,0],\\ 1-x, & x\in(0,1],\end{cases}$ 则函数 $f(x)$ 与 $g(x)=\begin{cases}2^x, & x\le 0\\ \log_{\frac{1}{2}}x, & x>0\end{cases}$ 的图像在区间 $[-3,3]$ 上的交点的个数为__________.

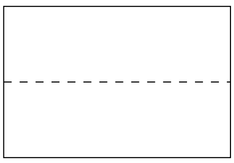
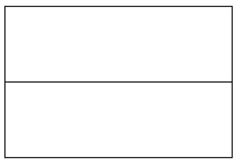
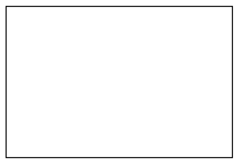
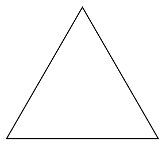
283. 已知 6 个正整数, 它们的平均数是 5, 中位数是 4, 唯一众数是 3, 则这 6 个数方差的最大值为__________(精确到小数点后一位).

284. 已知正方形 $ABCD$ 边长为 8, $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{EC}$, $\overrightarrow{DF}=3\overrightarrow{FA}$, 若在正方形边上恰有 6 个不同的点 P, 使 $\overrightarrow{PE}\cdot\overrightarrow{PF}=\lambda$, 则 λ 的取值范围为__________

285. 已知 $f(x)=2x^2+2x+b$ 是定义在 $[-1,0]$ 上的函数, 若 $f[f(x)]\le 0$ 在定义域上恒成立, 而且存在实数 x_0 满足: $f[f(x_0)]=x_0$ 且 $f(x_0)\ne x_0$, 则实数 b 的取值范围是__________.

286. 如图, 水平放置的正三棱柱的俯视图是 (　　).



A. 　B. 　C. 　D. 

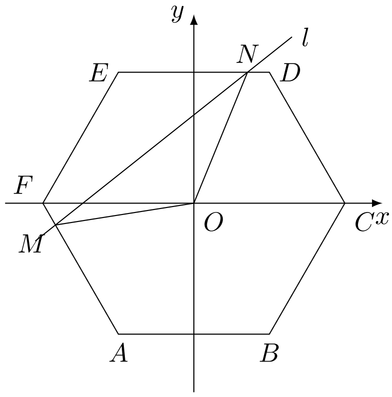
287. 已知 $z=x+y\mathrm{i}$, $x,y\in\mathrm{R}$, i 是虚数单位. 若复数 $\dfrac{z}{1+\mathrm{i}}+\mathrm{i}$ 是实数, 则 $|z|$ 的最小值为 (　　).

A. 0　B. $\dfrac{5}{2}$　C. 5　D. $\sqrt{2}$

288. 已知点 $P(x,y)$ 满足约束条件 $\begin{cases}x+y\le 50,\\ 2x+5y\le 200,\\ 0\le x\le 40,\\ y\ge 0,\end{cases}$ 则目标函数 $z=x-y$ 的最小值为 (　　).

A. 40　B. -40　C. 30　D. -30

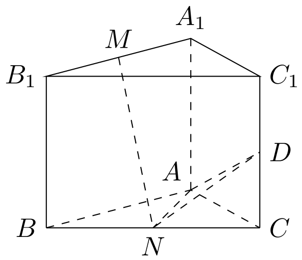
289. 如图, 在直角坐标平面内有一个边长为 a, 中心在原点 O 的正六边形 $ABCDEF$, $AB\parallel Ox$. 直线 $l:y=kx+t$ (k 是常数) 与正六边形交于 M、N 两点, 记 $\triangle OMN$ 的面积为 S, 则函数 $S=f(t)$ 的奇偶性为 (　　).



A. 偶函数　　B. 奇函数

C. 不是奇函数, 也不是偶函数　　D. 奇偶性与 k 有关

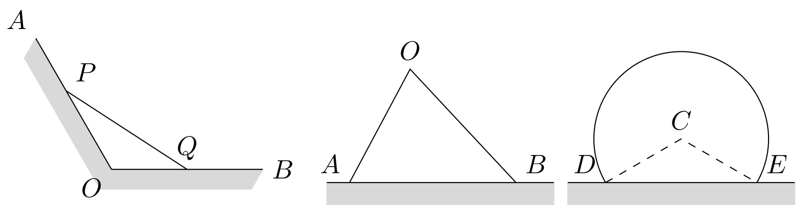
290. 如图, 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AB\perp AC$, $AA_1=AB=AC=1$, $\angle ABC=\dfrac{\pi}{4}$, D、M、N 分别是 CC_1、A_1B_1、BC 的中点.



(1) 求异面直线 MN 与 AC 所成角的大小;

(2) 求点 M 到平面 ADN 之间的距离.

291. 某地计划在一处海滩建造一个养殖场.



(1) 如图, 射线 OA、OB 为海岸线, $\angle AOB=\dfrac{2\pi}{3}$, 现用长度为 1 千米的围网 PQ 依托海岸线围成一个 $\triangle POQ$ 的养殖场, 问如何选取点 P、Q, 才能使养殖场 $\triangle POQ$ 的面积最大, 并求其最大面积;

(2) 如图, 直线 l 为海岸线, 现用长度为 1 千米的围网依托海岸线围成一个养殖场.

方案一: 围成三角形 OAB(点 A、B 在直线 l 上), 使三角形 OAB 面积最大, 设其为 S_1;

方案二: 围成弓形 CDE(点 D、E 在直线 l 上, C 是优弧所在圆的圆心且 $\angle DCE=\dfrac{2\pi}{3}$), 其面积为 S_2; 试求出 S_1 的最大值和 S_2(均精确到 0.001 平方千米), 并指出哪一种设计方案更好 (面积较大的更好).

292. 已知各项均不为零的数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$, 前 n 项的和为 S_n, 且 $\dfrac{S_n^2-S_{n-1}^2}{a_n}=2n^2$, $n\in\mathbf{N}^*$, $n\geq 2$, 数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n=a_n+a_{n+1}$, $n\in\mathbf{N}^*$.

(1) 求 a_2、a_3、S_{2019};

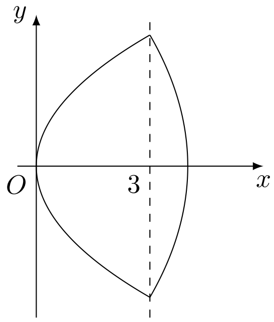
(2) 已知等式 $k\mathrm{C}_n^k = n \cdot \mathrm{C}_{n-1}^{k-1}$ 对 $1 \le k \le n$, $k,n \in \mathbf{N}^*$ 成立, 请用该结论求有穷数列 $\{b_k\mathrm{C}_n^k\}$, $k=1,2,\cdots,n$ 的前 n 项和 T_n.

293. (1) 设椭圆 $C_1: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 与双曲线 $C_2: 9x^2-\dfrac{9y^2}{8}=1$ 有相同的焦点 F_1、F_2, M 是椭圆 C_1 与双曲线 C_2 的公共点, 且 $\triangle MF_1F_2$ 的周长为 6, 求椭圆 C_1 的方程;

我们把具有公共焦点、公共对称轴的两段圆锥曲线弧合成的封闭曲线称为“盾圆”.

(2) 如图, 已知“盾圆 D”的方程为 $y^2=\begin{cases}4x, & 0\le x\le 3,\\ -12(x-4), & 3<x\le 4.\end{cases}$ 设“盾圆 D”上的任意一点 M 到 $F(1,0)$ 的距离为 d_1, M 到直线 $l: x=3$ 的距离为 d_2, 求证: d_1+d_2 为定值;

(3) 由抛物线弧 $E_1: y^2=4x(0\le x\le\dfrac{2}{3})$ 与第 (1) 小题椭圆弧 $E_2: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(\dfrac{2}{3}\le x\le a)$ 所合成的封闭曲线为“盾圆 E”. 设“盾圆 E”上的两点 AB 关于 x 轴对称, O 为坐标原点, 试求 $\triangle OAB$ 面积的最大值.



294. 已知函数 $f(x)=\log_2 x$.

(1) 若 $f(x)$ 的反函数是 $f^{-1}(x)$, 解方程: $f^{-1}(2x+1)=3f^{-1}(x)-1$;

(2) 当 $x\in(3m,3m+3](m\in\mathbf{N})$ 时, 定义 $g(x)=f(x-3m)$. 设 $a_n=n\cdot g(n)$, 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 求 a_1、a_2、a_3、a_4 和 S_{3n};

(3) 对于任意 a、b、$c\in[M,+\infty)$, 且 $a\ge b\ge c$. 当 a、b、c 能作为一个三角形的三边长时, $f(a)$、$f(b)$、$f(c)$ 也总能作为某个三角形的三边长, 试探究 M 的最小值.