

- 用列举法表示下列集合:
  - 10 以内的所有素数组成的集合;
  - $\{y|y = x - 1, 0 \leq x \leq 3, x \in \mathbf{Z}\}$ .
- 用描述法表示下列集合:
  - 被 3 除余 1 的所有自然数组成的集合;
  - 比 1 大又比 10 小的所有实数组成的集合;
  - 平面直角坐标系中坐标轴上所有点组成的集合.
- 集合  $\{(x, y)|xy > 0, x, y \text{ 为实数}\}$  是指 ( ).
 

A. 第一象限内的所有点组成的集合                      B. 第三象限内的所有点组成的集合

C. 第一象限和第三象限内的所有点组成的集合              D. 不在第二象限也不在第四象限内的所有点组成的集合
- 用符号 “ $\subset$ ” “ $=$ ” 或 “ $\supset$ ” 连接集合  $A$  与  $B$ :
  - $A = \{x|x^2 - 2x + 1 = 0\}, B = \{x|x^2 - 1 = 0\}$ ;
  - $A = \{1, 2, 4, 8\}, B = \{x|x \text{ 是 } 8 \text{ 的正约数}\}$ .
- 已知集合  $A = \{1\}, B = \{x|x^2 - 3x + a = 0\}$ . 是否存在实数  $a$ , 使得  $A \subset B$ ? 若存在, 求  $a$  的值; 若不存在, 说明理由.
- 已知集合  $A = \{x, y\}, B = \{2x, 2x^2\}$ , 且  $A = B$ . 求集合  $A$ .
- 已知集合  $A = \{x|x \leq 7\}, B = \{x|x < 2\}, C = \{x|x > 5\}$ . 求:  $A \cap B, A \cap C, A \cap (B \cap C)$ .
- 已知集合  $A = \{(x, y)|y = -x + 1\}, B = \{(x, y)|y = x^2 - 1\}$ . 求  $A \cap B$ .
- 已知全集  $U = \mathbf{R}$ , 集合  $A = \{x|4 - x > 2x + 1\}$ . 求  $A$ .
- 已知集合  $A = \{2, (a + 1)^2, a^2 + 3a + 3\}$ , 且  $1 \in A$ . 求实数  $a$  的值.
- 已知集合  $A = \{x|x = 2n + 1, n \in \mathbf{Z}\}, B = \{x|x = 4n - 1, n \in \mathbf{Z}\}$ . 判断集合  $A$  与  $B$  的包含关系, 并证明你的结论.
- 设  $a$  是实数, 集合  $M = \{x|x^2 + x - 6 = 0\}, N = \{y|ay + 2 = 0\}$ . 是否存在  $a$ , 使得  $N \subset M$ ? 若存在, 求这些  $a$  的值; 若不存在, 说明理由.
- 已知集合  $A = \{1, 4, x\}, B = \{1, x^2\}$ , 且  $A \cup B = A$ . 求  $x$  的值及集合  $A, B$ .
- 判断下列语句是否为命题:
  - 有的正方形是三角形;
  - 任意一个三角形的内角和都为  $180^\circ$ ;
  - 1 是自然数吗?

(4)  $3 > \pi$ ;

(5)  $2 \in (0, 5)$ , 且  $2 \in \mathbf{Z}$ .

15. 判断下列命题的真假, 并说明理由:

(1) 如果  $a, b$  都是奇数, 那么  $a + b$  是偶数;

(2) 一组对边平行且两对角线等长的四边形是平行四边形;

(3) 如果  $A \cap B = A$ , 那么  $A \cup B = B$ .

16. 如果  $a, b, c$  为实数, 设  $\alpha: a = b = c = 0$ ;  $\beta: a, b, c$  中至少有一个为 0;  $\gamma: a^2 + \sqrt{b} + |c| = 0$ . 那么  $\alpha$  \_\_\_\_\_  $\beta$ ;  
 $\alpha$  \_\_\_\_\_  $\gamma$ ;  $\beta$  \_\_\_\_\_  $\gamma$ . (用符号 “ $\Leftarrow$ ” “ $\Rightarrow$ ” 或 “ $\Leftrightarrow$ ” 填空)

17. 下列各组中,  $\alpha$  是  $\beta$  的什么条件?

(1)  $\alpha$ : 四边形  $ABCD$  的四条边等长,  $\beta$ : 四边形  $ABCD$  是正方形;

(2)  $\alpha$ :  $\triangle ABC$  与  $\triangle DEF$  全等,  $\beta$ :  $\triangle ABC$  与  $\triangle DEF$  的周长相等;

(3)  $\alpha$ :  $x$  是 2 的倍数,  $\beta$ :  $x$  是 6 的倍数;

(4)  $\alpha$ : 集合  $A \subseteq B, B \subseteq C, C \subseteq A$ ,  $\beta$ : 集合  $A = B = C$ ;

(5)  $\alpha$ :  $A \cap B = A \cap C$ ,  $\beta$ :  $B = C$ .

18. 已知  $l, m$  都是自然数, 试判断 “ $l + m$  是偶数” 与 “ $l, m$  都是偶数” 是否等价, 并说明理由.

19. 证明: “四边形  $ABCD$  是平行四边形” 是 “四边形  $ABCD$  的对角线互相平分” 的充要条件.

20. 判断下列命题的真假, 并说明理由:

(1) 若  $A \cap B = \emptyset, C \subset B$ , 则  $A \cap C = \emptyset$ ;

(2) 若  $a, b \in \mathbf{R}$ , 则关于  $x$  的方程  $(a + 1)x + b = 0$  的解为  $x = -\frac{b}{a + 1}$ .

21. 已知  $a$  为实数. 写出关于  $x$  的方程  $ax^2 + 2x + 1 = 0$  至少有一个实根的一个充要条件、一个充分非必要条件和必要非充分条件.

22. 若  $\alpha: \{2\} \subset B \subseteq \{2, 3, 4\}$ ,  $\beta: B = \{2, 4\}$ , 则  $\alpha$  是  $\beta$  的 ( ).

A. 充分非必要条件

B. 必要非充分条件

C. 充要条件

D. 既非充分又非必要条件

23. 已知  $\alpha: x < 3m - 1$  或  $x > -m$ ,  $\beta: x < 2$  或  $x \geq 4$ .

(1) 若  $\alpha$  是  $\beta$  的充分条件, 求实数  $m$  的取值范围;

(2) 若  $\alpha$  是  $\beta$  的必要条件, 求实数  $m$  的取值范围.

24. 设  $a \in \mathbf{R}$ , 求关于  $x$  的方程  $ax = 2$  的解集.

25. 设  $k \in \mathbf{R}$ , 求关于  $x$  与  $y$  的二元一次方程组  $\begin{cases} y = -2x + 1, \\ y = kx - 3 \end{cases}$  的解集.

26. 设  $a \in \mathbf{R}$ , 求一元二次方程  $x^2 - 2ax + a^2 - 4 = 0$  的解集.

27. 已知等式  $2x^2 + 3x + 5 = a(2x + 1)(x + 1) + c$  恒成立, 求常数  $a$ 、 $c$  的值.

28. 已知一元二次方程  $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$  的两实根为  $x_1$ 、 $x_2$ , 求证:  $|x_2 - x_1| = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{|a|}$ .

29. 已知一元二次方程  $x^2 + 3x - 3 = 0$  的两个实根分别为  $x_1$ 、 $x_2$ , 求作二次项系数是 1, 且分别以下列数值为根的一元二次方程:

(1)  $-x_1, -x_2$ ;

(2)  $2x_1 + 1, 2x_2 + 1$ ;

(3)  $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}$ ;

(4)  $x_1^2, x_2^2$ .

30. 设  $a$ 、 $b$ 、 $c$ 、 $d$  为实数, 判断下列命题的真假:

(1) 若  $a > b \geq 0$ , 则  $a^2 > b^2$ ;

(2) 若  $\sqrt{a} > \sqrt{b}$ , 则  $a > b$ ;

(3) 若  $a > b > 0, c > d > 0$ , 则  $ac > bd$ ;

(4) 若  $\frac{b}{a} > 0$ , 则  $ab > 0$ ;

(5) 若  $a > b > 0$ , 则  $a^2 > ab > b^2$ ;

(6) 若  $\sqrt{a} > b$ , 则  $a > b^2$ .

31. 如果  $a^2 > b^2$ , 那么下列不等式中成立的是 ( ).

A.  $a > 0 > b$

B.  $a > b > 0$

C.  $|a| > |b|$

D.  $a > |b|$

32. 如果  $a < b < 0$ , 那么下列不等式中成立的是 ( ).

A.  $\frac{a}{b} < 1$

B.  $a^2 > ab$

C.  $\frac{1}{b^2} < \frac{1}{a^2}$

D.  $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

33. 如果  $a < 0 < b$ , 那么下列不等式中成立的是 ( ).

A.  $\sqrt{-a} < \sqrt{-b}$

B.  $a^2 < b^2$

C.  $a^3 < b^3$

D.  $ab > b^2$

34. 证明: “ $a > 0$  且  $b > 0$ ” 是 “ $a + b > 0$  且  $ab > 0$ ” 的充要条件.

35. 设  $x$  是实数, 比较  $(x + 1)(x^2 - x + 1)$  与  $(x - 1)(x^2 + x + 1)$  的值的大小.

36. 试比较下列各数的大小, 并说明理由:

(1)  $3 + \sqrt{3}$  与  $2 + \sqrt{5}$ ;

(2)  $\sqrt{3} + \sqrt{5}$  与  $\sqrt{2} + \sqrt{6}$ .

37. 设  $a$ 、 $b$  为实数, 比较  $a^2 + b^2$  与  $2a - 2b - 2$  的值的大小.

38. 已知  $a > b, c > d$ . 求证:  $ac + bd > ad + bc$ .

39. 已知  $a \geq -1$ , 求证:  $a^3 + 1 \geq a^2 + a$ .

40. 已知  $a$ 、 $b$  为任意给定的正数, 求证:  $a^3 + b^3 \geq ab^2 + ba^2$ , 并指出等号成立的条件.

41. 设  $a$  为实数, 求关于  $x$  的方程  $2x + a^2 = ax + 4$  的解集.
42. 设  $m$  为实数, 求关于  $x$  的方程  $(m+1)x^2 + 6mx + 9m = 1$  的解集.
43. 已知等式  $2x^2 - 3x - 1 = a(x-1)^2 + b(x-1) + c$  恒成立, 其中  $a$ 、 $b$ 、 $c$  为常数. 求  $a - b + c$  的值.
44. 对一元二次方程  $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ , 证明:  $ac < 0$  是该方程有两个异号实根的充要条件.
45. 已知一元二次方程  $2x^2 + x - 3 = 0$  的两个实根分别为  $x_1$ 、 $x_2$ , 求作二次项系数是 1, 且分别以下列数值为根的一元二次方程:
- (1)  $x_1 + x_2, x_1x_2$ ;
  - (2)  $2x_1^2 + 1, 2x_2^2 + 1$ ;
  - (3)  $\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_1}{x_2}$ ;
  - (4)  $x_1^4, x_2^4$ .
46. 已知一元二次方程  $x^2 - 2mx + m - 1 = 0$  的两实根为  $x_1$ 、 $x_2$ , 且  $x_1^2 + x_2^2 = 4$ . 求实数  $m$  的值.
47. 已知实数  $a$ 、 $b$ 、 $c$  满足  $a + b + c = 0$ , 且  $a > b > c$ . 求证:  $a > 0$  且  $c < 0$ .
48. 设  $s = a + b, p = ab (a, b \in \mathbf{R})$ , 写出 “ $a > 1$  且  $b > 1$ ” 用  $s$ 、 $p$  表示的一个充要条件, 并证明.
49. 原有酒精溶液  $a$  (单位: g), 其中含有酒精  $b$  (单位: g), 其酒精浓度为  $\frac{b}{a}$ . 为增加酒精浓度, 在原溶液中加入酒精  $x$  (单位: g), 新溶液的浓度变为  $\frac{b+x}{a+x}$ . 根据这一事实, 可提炼出如下关于不等式的命题: 若  $a > b > 0, x > 0$ , 则  $\frac{b}{a} < \frac{b+x}{a+x} < 1$ . 试加以证明.