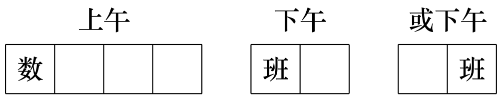
1. 由 $1,2,3,4,5,6$ 这 6 个数字可以组成多少个数字不重复且是 6 的倍数的五位数?

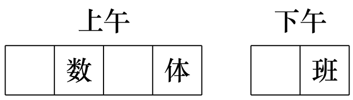
解答在这里一个数是 6 的倍数, 与一个数是 2 的倍数且是 3 的倍数是等价的. 而其中为 3 的倍数的数必须满足 "各个数位上的数字之和是 3 的倍数", 因此, 满足题意要求的五位数应有以下几类可能: 第一类, 由 $1,2,4,5,6$ 作数码. 第一步, $2,4,6$ 选一个作个位数字: P_3^1. 第二步, 其余四个数字在其他数位: P_4^4. 所以 $N_1=\mathrm{P}_3^1\mathrm{P}_4^4$. 第二类, 由 $1,2,3,4,5$ 作数码, 依上法可得 $N_2=\mathrm{P}_2^1\mathrm{P}_4^4$. 所以 $N=N_1+N_2=\mathrm{P}_4^4(\mathrm{P}_3^1+\mathrm{P}_2^1)=24\times 5=120$. 即满足条件的五位数共有 120 个.

2. 3 封不同的信, 有 4 个信箱可供投递, 共有多少种投信的方法? 解答在这里解法一元素分析法 (以信为主). 第一步, 投第一封信, 有 4 种不同的投法. 第二步, 再投第二封信, 也有 4 种不同的投法. 第三步, 最后投第三封信, 仍然有 4 种不同的投法. 因此, 投信的方法共有: $4\times 4\times 4=4^3=64$(种). 解法二位置分析法 (以信箱为主). 第一类, 四个信箱中的某一个信箱有 3 封信, 有投信方法 $N_1=\mathrm{C}_4^1\mathrm{C}_3^3$(种). 第二类, 四个信箱中的某一个信箱有 2 封信, 而另一个信箱有 1 封信, 有投信方法 $N_2=\mathrm{C}_4^2\mathrm{C}_3^2\mathrm{P}_2^2$(种). 第三类, 四个信箱中的某三个信箱各有 1 封信, 有投信方法 $N_3=\mathrm{C}_4^3\mathrm{P}_3^3$(种). 因此, 投信的方法共有: $N=N_1+N_2+N_3=\mathrm{C}_4^1\mathrm{C}_3^3+\mathrm{C}_4^2\mathrm{C}_3^2\mathrm{P}_2^2+\mathrm{C}_4^3\mathrm{P}_3^3=4+36+24=64$(种).

3. 一天要排语文、数学、英语、生物、体育、班会六节课 (上午四节、下午两节), 要求上午第一节不排体育课, 数学课排在上午, 班会课排在下午, 有多少种的排课方法?

解答在这里解法一从数学课入手. 第一类, 数学课排在第一节. 班会课限排在下午 (如下图上), 其余四科可任意排入另四节, 得 $N_1=\mathrm{P}_2^1\mathrm{P}_4^4=48$.

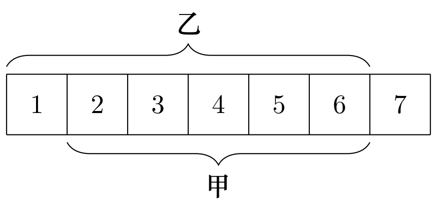




第二类, 数学课排在上午另三节中的一节, 班会课限排在下午, 体育课可排入余下 (不含上午第一节) 三节中的一节 (如上图下), 而其余三科可任意排入另三节, 得 $N_2=\mathrm{P}_3^1\mathrm{P}_2^1\mathrm{P}_3^3=108$. 因此, 共有排法 $N=N_1+N_2=48+108=156$(种). 解法二从体育课入手. 第一类: 体育课排在上午, $N_1=\mathrm{P}_3^1\mathrm{P}_3^1\mathrm{P}_2^1\mathrm{P}_3^3=108$; 第二类: 体育课排在下午, $N_2=\mathrm{P}_2^2\mathrm{P}_4^4=48$. 因此, 共有排法 $N=N_1+N_2=108+48=156$(种).

4. 七人坐一排, 要求甲不坐首位, 乙不坐末位, 共有几种不同的坐法?

解答在这里解法一 (直接法). 第一类, 如图.



第一步, 甲在第 2 至 6 号位中择一而坐, 得 P_5^1. 第二步, 乙在第 1 至 6 号位中余下的 5 个位置中择一而坐得 P_5^1. 第三步, 其余 5 人坐其余 5 个位置, 得 P_5^5, 所以 $N_1=\mathrm{P}_5^1\mathrm{P}_5^1\mathrm{P}_5^5$. 第二类, 如图.

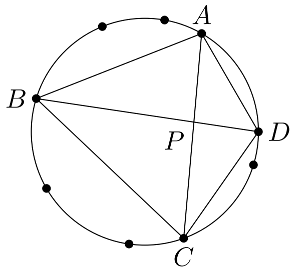
1	2	3	4	5	6	7
						甲

第一步, 甲坐末位. 得 P_1^1. 第二步, 其余 6 人坐其余 6 个位置, 得 P_6^6. 所以 $N_2=\mathrm{P}_6^6$. 于是, 满足条件的不同坐法共行: $N=N_1+N_2=\mathrm{P}_5^1\mathrm{P}_5^1\mathrm{P}_5^5+\mathrm{P}_6^6=3720$(种).

解法二 (间接法). 7 人并坐, 共有 P_7^7 种方法. 甲坐首位, 有 P_6^6 种方法; 乙坐末位, 有 P_6^6 种方法; 甲坐首位, 乙坐末位都不符合题意要求, 所以要从 P_7^7 中扣除, 但在扣除的过程中, 甲坐首位恰乙坐末位的情况被减了两次, 因此还需补回一个 P_5^5. 所以不同的坐法数为 $N=\mathrm{P}_7^7-2\mathrm{P}_6^6+\mathrm{P}_5^5=2720$(种).

5. 从 $1,3,5,7$ 这 4 个数字中任取 3 个, 从 $0,2,4$ 这 3 个数字中任取 2 个, 可以组成多少个无重复数字的五位数? 解答在这里第一类, 取 0, 有 $\mathrm{C}_4^3\mathrm{C}_2^1$ 种取法. 每一种 (如 $1,3,5,0,2$) 可组成 $\mathrm{P}_4^1\mathrm{P}_4^4$ 个五位数, 所以 $N_1=\mathrm{C}_4^3\mathrm{C}_2^1\mathrm{P}_4^1\mathrm{P}_4^4$. 第二类, 不取 0, 有 $\mathrm{C}_4^3\mathrm{C}_2^2$ 种取法, 每一种 (如 $1,3,5,2,4$) 可组成 P_5^5 个五位数, 所以 $N_2=\mathrm{C}_4^3\mathrm{C}_2^2\mathrm{P}_5^5$. 于是, 组成五位数的个数是 $N=\mathrm{C}_4^3\mathrm{C}_2^1\mathrm{P}_4^1\mathrm{P}_4^4+\mathrm{C}_4^3\mathrm{C}_2^2\mathrm{P}_5^5=1248$(种).

6. 如图, 圆上有 9 个点, 每两点连一线段, 所有线段在圆内最多有几个交点?



解答在这里设线段 AC, BD 在圆内交于点 P, 连接 AB, BC, CD, DA, 得到一个四边形, 于是问题转化为 9 个点可组成几个四边形. 所以 $N=\mathrm{C}_9^4=126$(个).

7. 5 位女生和 4 位男生彼此身高不一, 现欲选 3 位女生、2 位男生排成左低右高一行, 有几种排法?

8. 从甲、乙、丙、丁、戊 5 位同学中选 3 位, 安排每一位到京、津、沪旅游中的一地, 有几种选派方法?

解答在这里我们把京, 津, 沪看作 3 个位置, 于是问题就转化为 5 位同学选 3 位分坐 3 个位置的问题, 所以选派方法共有 $N=\mathrm{P}_5^3=60$(种).

9. 4 件不同的奖品, 全部奖给 3 位同学, 并要求每人至少一件, 有几种奖励方法?

解答在这里设 4 件奖品为 a, b, c, d, 显然, 要将它们分成 $2,1,1$ 三组, 因此第一步是组合, 得 C_4^2; 我们假定 $\{a,b\}\{c\}\{d\}$ 是一种组合, 再让它们坐到甲、乙、丙三个位置上去, 因此第二步是排列, 得 P_3^3. 所以不同的奖励法共有 $N=\mathrm{C}_4^2\mathrm{P}_3^3=36$(种).

10. 5 本不同的理科书和 3 本不同的文科书并排放在书架上, 要求 3 本文科书并列, 有几种不同的放法? 解答在这里先把 3 本文科书作一个单元与 5 本理科书一起进行全排列, 有 P_6^6 种排法; 然后考虑 3 本文科书的全排列, 对 P_3^3 种排法. 根据乘法原理, 共有不同排法为 $\mathrm{P}_6^6\mathrm{P}_3^3 = 4320$(种).

11. 联欢会上要演出 4 个歌唱节目和 3 个舞蹈节目, 如果舞蹈节目不能连排, 有几种排串节目的方法?
解答在这里如图, 先排 4 个歌唱节目, 有 P_4^4 种排法; 再在图中打 $\times$ 处排入舞蹈节目, 有 P_5^3 种排法. 因此共有不同排法: $\mathrm{P}_4^4\mathrm{P}_5^3 = 1440$(种).

×	歌	×	歌	×	歌	×	歌	×

12. 5 名运动员参加 100 米决赛, 如果每人到达终点的顺序各不相同, 问: 甲比乙先到达终点的可能有几种?
解答在这里解法一甲第一个到达, $N_1 = \mathrm{P}_4^4$; 甲第二个到达, $N_2 = \mathrm{P}_3^1\mathrm{P}_3^3$; 甲第三个到达 $N_3 = \mathrm{P}_2^1\mathrm{P}_3^3$; 甲第四个到达, $N_4 = \mathrm{P}_3^3$. 所以 $N = \mathrm{P}_4^4 + \mathrm{P}_3^1\mathrm{P}_3^3 + \mathrm{P}_2^1\mathrm{P}_3^3 + \mathrm{P}_3^3 = 60$(种). 解法二 5 名运动员到达终点的顺序有 $\mathrm{P}_5^5 = 120$(种), 而甲先于乙到达和乙先于甲到达的情况是对称出现的. 所以 $N = \dfrac{1}{2}\mathrm{P}_5^5 = 60$(种). 解法三 $N = \mathrm{C}_5^2\mathrm{P}_3^3 = 60$(种).

13. 若 $x \in \{2, 3, 7\}$, $y \in \{-31, -20, 4\}$, 则 xy 可表示不同的值的个数是 (　　).

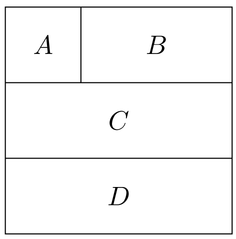
A. $1 + 1 = 2$　　B. $1 + 1 + 1 = 3$　　C. $2 \times 3 = 6$　　D. $3 \times 3 = 9$

14. 已知复数 $a + b\mathrm{i}$, 其中 $a, b \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, 则可组成的不同虚数个数为 (　　).

A. 100　　B. 90　　C. 81　　D. 46

15. 如图, 用 4 种不同的颜色涂入图中的矩形 A, B, C, D 中, 要求相邻的矩形涂色不同, 则不同的涂法共有 (　　).

A. 72 种　　B. 48 种　　C. 24 种　　D. 12 种



16. 把 10 个苹果分成三堆, 要求每堆至少 1 个, 至多 5 个, 则不同的分法共有 (　　).

A. 4 种　　B. 5 种　　C. 6 种　　D. 7 种

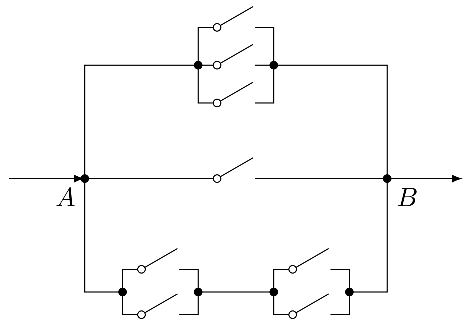
17. 沿着长方体的棱, 从一个顶点到与它相对的另一个顶点的最近路线共有 (　　).

A. 3 条　　B. 4 条　　C. 5 条　　D. 6 条

18. 若 $a, b \in \mathbf{N}$, 且 $a + b \leq 6$, 则复数 $a + b\mathrm{i}$ 共有__________ 个.

19. 若整数 x, y 满足 $|x| < 4$, $|y| < 5$, 则以 (x, y) 为坐标的点共有__________ 个.

20. 如图是一电路图, 从 A 到 B 共有__________ 条不同的线路可通电.



21. 若集合 $M=\{-1,1,2\}$, 且 $a,b,r\in M$, 则 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 所表示的不同圆共有__________ 个.

22. 若 $a\in\{-1,2,3\}$, $b\in\{0,3,4,5\}$, $R\in\{1,2\}$, 则方程 $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ 所表示的不同圆有__________ 个.

23. 某乒乓球队行男运动员 7 人, 女运动员 6 人, 从中选出一名担任队长, 共有__________ 种不同方案; 从中派出 2 人参加男女混合双打, 共有__________ 种不同方案.

24. 若 $m\in\{-2,-1,0,1,2,3\}$, $n\in\{-3,-2,-1,0,1,2\}$, 且方程 $\dfrac{x^2}{m}+\dfrac{y^2}{n}=1$ 是表示中心在原点的双曲线, 则表示不同的双曲线最多有__________ 条.

25. 3 张卡片的正反面分别写有数字 1 和 2, 3 和 4, 5 和 6, 若将 3 张卡片并列, 可得到__________ 个不同的三位数 (6 不能作 9 用).

26. 从 $2,3,5,7$ 这 4 个数字中, 任取两个分别作为分数的分子与分母.
(1) 能得到几个不同的分数?
(2) 其中有几个是真分数? 几个是假分数?

27. 在六棱锥各棱所在的 12 条直线中, 异面直线共有 (　　).

A. 12 对　　B. 24 对　　C. 36 对　　D. 48 对

28. 有一排 5 个信号的显示窗, 每个窗可亮红灯、绿灯或不亮灯, 则共可发出的不同信号有 (　　).

A. 2^5 种　　B. 5^2 种　　C. 3^5 种　　D. 5^3 种

29. 4 位学生各写一张贺卡, 放在一起, 然后每人从中各取一张, 但不能取自己写的那一张贺卡, 则不同的取法共有 (　　).

A. 9 种　　B. 12 种　　C. 16 种　　D. 24 种

30. 3 封不同的信, 投入 4 个信箱, 则并有不同的投法__________ 种.

31. 4 个学生报名参加跳高, 跳远, 游泳比赛, 每人限报 1 项, 则不同的报名方法共有__________ 种.

32. 若集合 $A=\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\}$, $B=\{b_1,b_2,b_3\}$, 则从集合 A 到 B 可建立__________ 个不同的映射, 从集合 B 到集合 A 可建立__________ 个不同的映射.

33. 如图, 用 4 种不同的颜色涂入图中编号为 1, 2, 3, 4 的正方形, 要求每个正方形只涂一种颜色, 且有公共边的两个正方形颜色不同, 则共有多少种不同的涂法?

1	2
3	4

34. 从 1 到 100 的自然数中, 每次取两个不同的数相加, 使它们的和不大于 100, 有几种取法? ($3+6$ 与 $4+5$ 算作不同的取法).

35. 从 1 到 200 这 200 个自然数中, 各个数位上都不含有数字 8 的数有几个?

36. 有一角硬币 3 枚, 贰元币 6 张, 百元币 4 张, 共可组成多少种不同的币值.

37. 设 $a \in \mathbf{N}$, 且 $a < 27$, 则 $(27-a)(28-a)\cdots(34-a)$ 等于 (　　).

A. P_{27-a}^{8}　　B. P_{34-a}^{27-a}　　C. P_{34-a}^{7}　　D. P_{34-a}^{8}

38. 6 人站成一排照相, 其中甲、乙、丙三人要站在一起, 且要求乙、丙分别站在甲的两边, 则不同的排法种数为 (　　).

A. 12　　B. 24　　C. 48　　D. 144

39. 记 8 个同学排成一排的排列数为 m, 8 个同学排成前后两排 (前排 3 人, 后排 5 人) 的排列数为 n, 则 m, n 的大小关系是 (　　).

A. $m=n$　　B. $m>n$　　C. $m<n$　　D. $n<m<2n$

40. 用 $0,1,2,3$ 这 4 个数字, 可以组成无重复数字的四位数的个数是 (　　).

A. 6　　B. 12　　C. 18　　D. 24

41. 5 辆汽车从停车场分五班开出, 其中甲车必须在乙车之前开出, 则发车方案种数为 (　　).

A. 24　　B. 48　　C. 60　　D. 96

42. 若 $\mathrm{P}_n^3 = n\mathrm{P}_3^3$, 则 $n=$__________.

43. 若 $\mathrm{P}_n^n + \mathrm{P}_{n-1}^{n-1} = x\mathrm{P}_{n+1}^{n+1}$, 则 $x=$__________.

44. 若 $\mathrm{P}_{56}^{n+6} : \mathrm{P}_{54}^{n+3} = 30800$, 则 $n=$__________.

45. 在 10 只不同的抽屉中, 放入 10 种不同的产品, 每只抽屉只放一种, 共有__________ 种不同的放法.

46. 有黄、红、蓝、白、黑五面不同颜色的信号旗, 按不同顺序从左到右排成一排表示不同的信号, 则可表示__________种不同的信号.

47. 7 位同学站成一排, 按下列要求各存多少种不同的排法:

(1) 甲站某一固定位置;

(2) 甲站中间, 乙与甲相邻;

(3) 甲、乙相邻;

(4) 甲、乙两人不能相邻;

(5) 甲、乙、丙三人相邻;

(6) 甲、乙两人不站在排头和排尾;

(7) 甲、乙、丙三人中任何两人都不相邻;

(8) 甲、乙两人必须相邻, 且丙不站在排头和排尾.

48. 在由 $0,1,2,3,4,5$ 这 6 个数字组成的无重复数字的六位数中, 个位数字小于十位数字的个数是 (　　).

A. 210　　B. 300　　C. 464　　D. 600

49. 在由数字 1, 2, 3, 4, 5 组成数字不重复的五位数中, 小于 50000 的偶数有 (　　).

A. 60 个　　B. 48 个　　C. 36 个　　D. 24 个

50. 由 0, 1, 2, 3, 4, 5 这 6 个数字组成数字不重复且大于 345012 的六位数的个数是 (　　).

A. 360　　B. 270　　C. 269　　D. 245

51. 6 个停车位置, 有 3 辆汽车需要停放, 若要使 3 个空位连在一起, 则停放方法数为 (　　).

A. P_4^4　　B. P_6^3　　C. P_6^4　　D. P_3^3

52. 6 张同排连号的电影票, 分给 3 名教师和 3 名学生, 若要求师生相间而坐, 则不同的分法数为 (　　).

A. $\mathrm{P}_3^3\mathrm{P}_4^3$　　B. $(\mathrm{P}_3^3)^2$　　C. $2(\mathrm{P}_3^3)^2$　　D. $\mathrm{P}_6^6-(\mathrm{P}_3^3)^2$

53. 取 $1,2,3,4,5$ 这 5 个数字中的两个分别作为一个对数的底数和真数, 则所得的不同值有 (　　).

A. 12 个　　B. 13 个　　C. 16 个　　D. 20 个

54. 由 $0,1,2,3,4,5$ 这 6 个数字组成的无重复数字的三位数中, 奇数个数与偶数个数之比为 (　　).

A. $1:1$　　B. $2:3$　　C. $12:13$　　D. $21:23$

55. 直线 $Ax+By=0$ 的系数 A, B 可以在 $0,1,2,3,5,7$ 这六个数字中取值, 则这些方程所表示的不同直线有 (　　).

A. 30 条　　B. 23 条　　C. 22 条　　D. 14 条

56. 已知集合 $M=\{a_1,a_2,a_3\}$, $P=\{b_1,b_2,b_3,b_4,b_5,b_6\}$, 若 M 中的不同元素对应到 P 中的不同像, 则这样的映射个数共有 (　　).

A. 3　　B. 20　　C. 64　　D. 120

57. 从 $1,2,\cdots,10$ 这 10 个自然数中, 每次取出不同的两个, 使它们的乘积是 6 的倍数, 则不同的取法总数为 (　　).

A. 14　　B. 15　　C. 16　　D. 17

58. 赛前将 4 对乒乓球双打选手介绍给观众, 每对选手要连着介绍, 则介绍这 8 位选手的不同顺序共有 (　　).

A. P_8^8 种　　B. P_4^4 种　　C. $2\mathrm{P}_4^4$ 种　　D. $16\mathrm{P}_4^4$ 种

59. 要排一张有 5 个独唱节目和 3 个合唱节目的演出节目表, 若合唱节目不排在节目表的第一位置上, 并且任何两个合唱节目不相邻, 则不同的排法总数是 (　　).

A. P_8^8　　B. $\mathrm{P}_5^5\mathrm{P}_3^3$　　C. $\mathrm{P}_5^5\mathrm{P}_5^3$　　D. $\mathrm{P}_3^3\mathrm{P}_5^3$

60. 由 $1,4,5,x$ 这四个数字组成无重复数字的四位数, 若所有 4 位数的各位数字之和为 288, 则 x 等于 (　　).

A. 2　　B. 3　　C. 6　　D. 8

61. 6 个人排成一排, 要求甲、乙、丙 3 人都不排在两端, 求不同排法的种数.

62. 5 男 2 女站成一排, 要求女生不能排在两端, 且又要相邻, 求不同排法的种数.

63. 5 人排成一行, 要求甲、乙 2 人之间至少有 1 人, 求不同排法的种数.

64. 6 人排成一排, 要求甲、乙 2 人之间必有 2 人, 求不同排法的种数.

65. 一排 6 张椅子上坐 3 个人, 每 2 人之间有 1 张空椅子, 求不同排法的种数.

66. 8 张椅子排成一排, 有 4 人就坐, 每人一个座位, 其中恰有 3 个连续空位, 求不同排法的种数.

67. 8 名学生站成前、后两排, 每排 4 人, 其中要求甲、乙 2 人在后排, 丙在前排, 求不同排法的种数.

68. 8 人站成一列纵队, 要求甲、乙、丙 3 人不在排头且要互相隔开, 求不同排法的种数.

69. 8 位同学, 其中有 3 位是三好学生, 他们和班主任合影, 要求班主任坐中间, 而且左、右两边都要有三好学生, 求不同排法的种数.

70. 6 人并排拍照, 要求甲不坐在最左边, 乙不坐在最右边, 求不同排法的种数.

71. 晚会上有 5 个不同的歌唱节目和 3 个不同的舞蹈节目, 分别按以下要求, 各可排出几种不同的节目单: (1) 前 4 个节目中既要有歌唱节目, 又要有舞蹈节目;

(2) 3 个舞蹈节目排在一起;

(3) 3 个舞蹈节目彼此隔开;

(4) 3 个舞蹈节目先后顺序一定.

72. 6 人划船, 其中 2 人只能划右桨, 1 人只能划左桨, 若要求左、右边各 3 人, 则有几种不同的划法?

73. 个位和百位的数字是奇数, 十位和千位的数字是偶数, 且无重复数字的四位数共有多少个?

74. 星期一上午某教师要上 3 个班级的课, 每班 1 节, 若上午规定限排 4 节课, 且要求 3 节课不能连排, 则这天上午该教师的课程表有几种不同的排法?

75. 某天的课程表排入政治、语文、数学、外语、劳技、体育 6 门课, 1 门课排 1 节, 若第 1 节不能排体育, 第 6 节不能排数学, 则共有几种不同排法?

76. 由 $0,2,5,7,9$ 这 5 个数字可组成多少个数字不重复且能被 3 整除的四位数?

77. 由 $0,1,2,3,4,5$ 这 6 个数字可组成多少个数字不重复且能被 4 整除的四位数? 可组成数字不重复且能被 25 整除的四位数又有多少?

78. 由 $1,2,3,4,5,6$ 这 6 个数字可组成多少个数字不重复且是 6 的倍数的五位数?

79. 由数字 $1,2,3,4,5$ 可以组成没有重复数字的五位数 120 个, 若把这些数从小到大排成一列数: $12345, 12354, \cdots, 54321$, 问:

(1) 43251 是这一列数的第几个数?

(2) 这列数中的第 93 个数是怎样的一个五位数?

(3) 求这一列数各数之和 (不必具体算出).

80. 用 $1,2,3,4,5,6$ 这 6 个数字组成无重复数字的四位数.

(1) 奇数数字必须在奇数位的有多少个?

(2) 奇数位只排奇数数字的有多少个?

(3) 奇数数字不排在奇数位的有多少个?

81. 从 $1,2,3,4,5$ 这 5 个数字中每次取出 3 个数字组成没有重复数字的三位数, 求所有三位数的个位数的和.

82. 用 $1,7,8,9$ 这 4 个数字组成的四位数中, 分别求所有四位数的各位数字的和与所有四位数的和.

83. 由 $1,4,5,x$ 这 4 个不同数字组成数字不重复的四位数, 若所有四位数的数字之和是 180, 求 x.

84. 用 $0,1,2,3,4,5$ 这 6 个数字组成无重复数字的三位数, 求所有这些三位数之和.

85. 从 $1,2,3,4,8$ 这 5 个数字中, 任选两个分别作 a^b 中的底数和指数, 则得到的不同值的幂有多少个?

86. 从 $1,2,3,\cdots,9$ 这 9 个数字中任取两个不同的数, 分别作一个对数的真数和底数, 一共可以得到几个不同的对数值? 其中比 1 大的有几个?

87. 若 $n \neq m$, 则组合数 C_n^m 等于 (　　).

A. $\dfrac{\mathrm{P}_n^m}{n!}$　　B. $\dfrac{n}{m}\mathrm{C}_{n-1}^m$　　C. C_m^{n-m+1}　　D. $\dfrac{n}{n-m}\mathrm{C}_{n-1}^m$

88. 计算 $\mathrm{C}_{10}^{r+1}+\mathrm{C}_{10}^{17-r}$, 值不相同的有 (　　).

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

89. 一组 6 条平行线与另一组 3 条平行线互相垂直, 则由它们所围成的矩形个数是 (　　).

A. 16 个　　B. 45 个　　C. 24 个　　D. 90 个

90. 从 $1, 3, 5, 7, 9$ 这 5 个数字中任取 3 个, 从 $2, 4, 6, 8$ 这 4 个数字中任取 2 个, 组成数字不重复的五位数的个数是 (　　).

A. $\mathrm{P}_5^3\mathrm{P}_4^2$　　B. $\mathrm{C}_5^3\mathrm{P}_5^3\mathrm{C}_5^2\mathrm{P}_4^2$　　C. $\mathrm{C}_5^3\mathrm{C}_4^2\mathrm{P}_5^5$　　D. $\mathrm{P}_5^3\mathrm{P}_6^2$

91. 从 4 台 A 型和 5 台 B 型的电视机中, 任取 3 台, 要求至少有 A 型和 B 型各一台的取法数为 (　　).

A. 70　　B. 140　　C. 84　　D. 35

92. 以正方形的 4 个顶点, 4 边中点和中心这 9 个点中的 3 点为顶点的三角形的个数是 (　　).

A. 84　　B. 81　　C. 76　　D. 73

93. 平面内有 9 个点, 其中有 4 个点在一条直线上, 此外无 3 点共线, 经过其中的每 2 个点作直线, 不同直线的条数是 (　　).

A. 31　　B. 30　　C. 29　　D. 28

94. 从集合 $P = \{1, 2, 3\}$, $Q = \{1, 4, 5, 6\}$ 这两个集合中各取一个元素作为平面直角坐标系中点的坐标, 能确定的不同点的个数是 (　　).

A. 11　　B. 12　　C. 23　　D. 24

95. 计算: $\mathrm{C}_m^5 - \mathrm{C}_{m+1}^5 + \mathrm{C}_m^4 =$__________.

96. 计算: $\mathrm{C}_{96}^{94} + \mathrm{C}_{97}^{95} + \mathrm{C}_{98}^{96} + \mathrm{C}_{99}^{97} =$__________.

97. 计算: $\mathrm{C}_2^2 + \mathrm{C}_3^2 + \mathrm{C}_4^2 + \cdots + \mathrm{C}_{10}^2 =$__________.

98. 计算: $\mathrm{C}_3^0 + \mathrm{C}_4^1 + \mathrm{C}_5^2 + \mathrm{C}_6^3 + \cdots + \mathrm{C}_{20}^{17} =$__________.

99. 从 5 名学生中任选 3 名学生分别担任 3 种不同的职务, 共有__________ 种小同的办法.

100. 有 3 名学生分别担任 5 种不同职务中的 3 个不同职务, 共有__________ 种不同分法.

101. 在两条异面直线上分别各有 5 个点和 4 个点, 每两点确定一条直线, 一共有__________ 条直线.

102. 直线 $l_1 \parallel l_2$, l_1 上有 4 个点, l_2 上有 6 个点, 以这些点为端点连接成线段, 则它们在 l_1 与 l_2 之间的交点最多有__________ 个.

103. M 和 N 是两个不重合的平面, 在平面 M 内取 5 个点, 在平面 N 内取 4 个点, 则由这些点最多能决定不同位置的三棱锥有__________ 个.

104. 平面内共有 17 个点, 其中有且仅有 5 个点共线, 以这些点中的 3 个点为顶点的三角形共有__________ 个.

105. 以三棱柱的顶点为顶点的四面体的个数为__________.

106. 平面内有 7 条不同的直线, 其中有且仅有两条直线互相平行, 则这 7 条直线最多能围成的三角形有__________ 个.

107. 已知一些点的坐标 (x, y) 满足 $|x| < 2$, $|y| < 2$ 且 $x \in \mathbf{Z}$, $y \in \mathbf{Z}$, 若以这些点的其中三点为顶点作三角形, 则这样的三角形共有 (　　).

A. 72 个　　B. 76 个　　C. 80 个　　D. 84 个

108. 以正方体的顶点为顶点的四面体个数是 (　　).

A. 70　　B. 64　　C. 58　　D. 24

109. 有甲、乙、丙 3 项任务, 其中甲需 2 人承担, 乙、丙各需 1 人承担, 现从 10 人中选派 4 人承担这 3 项任务, 则不同的选法数共有 (　　).

A. 1260 种　　B. 2025 种　　C. 2520 种　　D. 5040 种

110. 将 5 名学生分配到 4 个不同的科技小组参加活动, 要求每个科技小组至少有一名学生参加, 则不同的分配方法共有 (　　).

A. 60 种　　B. 120 种　　C. 240 种　　D. 480 种

111. 将 4 名教师分配到 3 个班级去参加活动, 要求每班至少 1 名的分配方法有 (　　).

A. 72 种　　B. 48 种　　C. 36 种　　D. 24 种

112. 高三年级有 8 个班, 分派 4 个数学教师任教, 每个教师教两个班, 则不同的分派方法有 (　　).

A. $\mathrm{P}_8^2\mathrm{P}_6^2\mathrm{P}_4^2\mathrm{P}_2^2$ 种　　B. $\mathrm{C}_8^2\mathrm{C}_6^2\mathrm{C}_4^2\mathrm{C}_2^2$ 种　　C. $\mathrm{C}_8^2\mathrm{C}_6^2\mathrm{C}_4^2\mathrm{C}_2^2\mathrm{C}_4^4$ 种　　D. $\dfrac{\mathrm{C}_8^2\mathrm{C}_6^2\mathrm{C}_4^2\mathrm{C}_2^2}{4!}$ 种

113. 现有男、女学生共 8 人, 从男生中选 2 人, 从女生中选 1 人分别参加数学、物理与化学三科竞赛, 共有 90 种不同的选派方案, 则男、女生人数为 (　　).

A. 男生 2 人, 女生 6 人　　B. 男生 3 人, 女生 5 人　　C. 男生 5 人, 女生 3 人　　D. 男生 6 人, 女生 2 人

114. 把字母 a, a, a, a, b, b, b 排成一列, 其中任何两个 b 不能相邻的排法共有 (　　).

A. 4 种　　B. 10 种　　C. 24 种　　D. 60 种

115. 已知 $a \in \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$, $b \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, 则方程 $\dfrac{x^2}{a} + \dfrac{y^2}{b} = 1$ 表示的不同双曲线条数最多是 (　　).

A. 48　　B. 26　　C. 22　　D. 14

116. 若 m, n 是不大于 6 的非负整数, 则 $\mathrm{C}_6^m x^2 + \mathrm{C}_6^n y^2 = 1$ 表示不同的椭圆个数是 (　　).

A. 42　　B. 30　　C. 12　　D. 6

117. 从 5 个学校中选出 8 名学生组成代表团, 要求每校至少有 1 人的选法种数是 (　　).

A. $\mathrm{C}_5^1 + \mathrm{C}_5^1\mathrm{C}_4^1 + \mathrm{C}_5^1\mathrm{C}_4^1\mathrm{C}_3^1$　　B. $\mathrm{C}_5^3 + \mathrm{C}_5^2\mathrm{C}_4^1 + \mathrm{C}_5^1\mathrm{C}_4^1\mathrm{C}_3^1$　　C. $\mathrm{C}_5^1 + \mathrm{P}_5^2 + \mathrm{C}_5^3$　　D. C_8^5

118. 空间有 n 个点, 任意 4 点均不共面, 连接其中任意两点均有一直线, 则成为异面直线的对数为 (　　).

A. C_n^4　　B. $2\mathrm{C}_n^4$　　C. $3\mathrm{C}_n^4$　　D. P_n^4

119. 若 $\mathrm{C}_7^x=\mathrm{C}_7^2$, 则 $x=$__________.

120. 若 $\mathrm{C}_{18}^{2x}=\mathrm{C}_{18}^{16-x}$, 则 $x=$__________.

121. 若 $\mathrm{C}_x^{12}=\mathrm{C}_x^8$, 则 $x=$__________.

122. 若 $\mathrm{C}_x^3:\mathrm{C}_x^2=44:3$, 则 $x=$__________.

123. 若 $3\mathrm{C}_{x-3}^{x-7}=5\mathrm{P}_{x-4}^2$, 则 $x=$__________.

124. 若 $\mathrm{C}_{17}^{2x}+\mathrm{C}_{17}^{2x-1}=\mathrm{C}_{18}^6$, 则 $x=$__________.

125. 异面直线 l_1 和 l_2 分别有 m 个和 $n(m,n\geq 3)$ 个不同的点, 若以这些点为顶点, 可构成__________ 个三角形, __________ 个四面体.

126. 一条直线 a 上有 n 个点, 平面 α 内有 m 个点, 以这些点为顶点, 最多可确定__________ 个三棱锥.

127. 有两个同心圆, 在外圆周上有相异的 6 个点, 内圆周上有相异的 3 个点, 由这 9 个点所确定的直线最多有__________ 条, 最少有__________ 条.

128. 已知 $\angle AOB$ 的一边 OA 上有不同的 8 个点, 在另一边 OB 上有不同的 3 个点, 现从 OA,OB 上分别取一点作连线, 则由这些直线相交的交点在 $\angle AOB$ 内的个数最多有__________ 个.

129. 解不等式: $\dfrac{1}{3}<\dfrac{\mathrm{C}_{x+1}^3}{\mathrm{C}_{x-1}^1}<7$.

130. 解不等式: $\mathrm{C}_n^{n-5}>\mathrm{C}_{n-2}^3+2\mathrm{C}_{n-2}^2+n-2$.

131. 解不等式: $\mathrm{C}_{21}^{x-4}<\mathrm{C}_{21}^{x-2}<\mathrm{C}_{21}^{x-1}$.

132. 解不等式: $\mathrm{C}_k^0+\mathrm{C}_k^1+2\mathrm{C}_k^2+3\mathrm{C}_k^3+\cdots+k\mathrm{C}_k^k<500$.

133. 解方程: $\mathrm{C}_{16}^{x^2-x}=\mathrm{C}_{16}^{5x-5}$.

134. 解方程: $\mathrm{C}_{x+3}^{x+1}=\mathrm{C}_{x+1}^{x-1}+\mathrm{C}_{x+1}^{x}+\mathrm{C}_x^{x-2}$.

135. 计算: $\mathrm{C}_{2n}^{17-n}+\mathrm{C}_{13+n}^{3n}$.

136. 计算: $\mathrm{C}_{3n}^{38-n}+\mathrm{C}_{21+n}^{3n}$.

137. 化简: $1\cdot 1!+2\cdot 2!+\cdots+10\cdot 10!$.

138. 求证: $\dfrac{1}{k!}-\dfrac{1}{(k+1)!}=\dfrac{k}{(k+1)!}$.

139. 化简: $\dfrac{1}{2!}+\dfrac{2}{3!}+\cdots+\dfrac{n}{(n+1)!}$.

140. 求证: $\dfrac{k+2}{k!+(k+1)!+(k+2)!}=\dfrac{1}{(k+1)!}-\dfrac{1}{(k+2)!}$.

141. 求和: ; $\dfrac{3}{1!+2!+3!}+\dfrac{4}{2!+3!+4!}+\cdots+\dfrac{n+2}{n!+(n+1)!+(n+2)!}$.

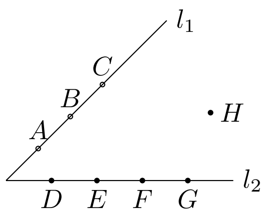
142. 求证: $\mathrm{C}_n^k=\mathrm{C}_2^0\mathrm{C}_{n-2}^k+\mathrm{C}_2^1\mathrm{C}_{n-2}^{k-1}+\mathrm{C}_2^2\mathrm{C}_{n-2}^{k-2}(k\geq 2)$.

143. 求证: $n!+\dfrac{(n+1)!}{1!}+\dfrac{(n+2)!}{2!}+\cdots+\dfrac{(n+m)!}{m!}=n!\mathrm{C}_{n+m+1}^{n+1}$.

144. n 个不同的球放入 n 个不同的盒子中, 若恰好有一个盒子是空盒, 则共有几种不同的放法?

145. 从集合 $M=\{1,2,3,4,5\}$ 到集合 $N=\{a,b,c\}$ 的映射, 要求集合 N 中的元素在集合 M 中都有原像, 这样的映射有几种?

146. 如图, $A,B,C\in l_1$, $D,E,F,G\in l_2$, H 不属于 $l_1\cup l_2$, 以这 8 个点中的 3 个点为顶点, 最多可作多少个不同的三角形?



147. $\angle AOB$ 的两边 OA, OB 上分别有异于顶点 O 的 5 个点和 6 个点, 这 12 个点 (连同 O 点) 可作几条不同直线和几个不同的三角形?

148. 在 $ABCD$ 中, M, N 是边 AB 的三等分点, P 是边 CD 的中点, 从 A, B, C, D, M, N, P 这 7 个点中选 3 个作为三角形的顶点, 一共可以构成几个不同的三角形? 其中面积最小的三角形有几个?

149. 以四棱台的顶点为顶点, 时组成多少个四面体?

150. 正方体有 8 个顶点, 每 3 点确定 1 个平面, 一共可确定多少个平面?

151. 从集合 $\{51,52,53,\cdots,99\}$ 中任选 2 个数, 使这 2 个数的和为偶数, 有多少种不同的选法?

152. 从 1 到 100 的自然数中, 每次取两个不同的数相加, 使它们的和不大于 100, 有几种不同的取法 ($1+4$ 与 $2+3$ 算不同的取法, $2+3$ 与 $3+2$ 算相同的取法)?

153. 从 1 到 18 这 18 个自然数中任选 3 个, 使它们的和是 3 的倍数, 有几种选法?

154. 从 5 个男乒乓球运动员和 4 个女乒乓球运动员中选出 2 男、2 女进行乒乓球混合双打, 有多少种不同的分组方法?

155. 有编号为 $1,2,3,4,5,6,7$ 的 7 个球和编号为 $1,2,3,4,5,6,7$ 的 7 只盒子, 将这 7 个球放入这 7 只盒子中, 要求每只盒子放 1 个, 恰使其中 4 个球的编号与盒子的编号相同, 一共有多少种不同的投放方法?

156. 9 件相同的奖品分给 3 个学生, 每人至少分得 2 件奖品, 一共存几种不同的分法?

157. 7 个相同的球任意放入 4 个不同的盒子中, 每个盒子至少有 1 个球的不同放法有几种?

158. 在连续的 6 次射击中, 恰好命中 4 次的情形有多少种?

159. 在所有的三位数中 (数字允许重复), 百位数字, 十位数字, 个位数字依次减小的有多少个? 仅是个位数字比百位数字小的有多少个?

160. 圆上有 10 个点, 每两点连成一条线段, 这些线段在圆内最多有多少个交点?

161. 将分别写有 $a, b, c, d, e, 1, 2, 3, 4, 5$ 的 10 张纸片排成一列, 要求 5 在最前, 1 在最后, 且数字从大到小, 字母按英文字母表的先后顺序排列, 则有多少种不同的排法?

162. 从 $1, 2, \cdots, 10$ 这 10 个数中任取 3 个互不相邻的自然数, 有几种不同的取法?

163. 从 6 个运动员中, 选出 4 人参加 4×100 米接力赛跑, 若其中甲、乙两人都不能跑第一棒, 共有多少种参赛方案?

164. 从 7 名运动员中, 选出 4 人参加 4×100 米接力赛跑, 若要求甲、乙两人都不跑中间两棒, 共有多少种参赛方案?

165. 有 6 名运动员参加 4×100 米接力跑, 其中甲不能跑第一棒, 乙不跑第四棒, 共有多少种参赛的方法?

166. 3 天中, 考政治、语文、外语、数学、物理和化学 6 科.

(1) 每天考一文一理, 有几种不同的安排方法?

(2) 每天考一文一理, 且语文、数学不能同一天考, 有几种不同的安排方法?

167. 在无重复数字的四位数中, 其中恰有 2 个奇数数字和 2 个偶数数字的四位数共有多少个?

168. 从 $1, 3, 5, 7$ 这 4 个数字中任取 3 个, 从 $0, 2, 4$ 这 3 个数字中任取 2 个, 共可组成多少个无重复数字的五位数?

169. 10 个人分乘 3 辆汽车, 要求甲车坐 5 人, 乙车坐 3 人, 丙车坐 2 人, 有多少种不同的乘车方法?

170. 某市今年有 8 项重点工程需要建设, 由甲、乙、丙、丁 4 个建筑公司承包, 若要求甲承包 3 项, 乙承包 1 项, 丙、丁各承包 2 项, 则共有多少种不同的承包方案?

171. 有 6 本不同的书, 分给甲、乙、丙 3 人, 按下列要求, 各有几种不同的分法:

(1) 甲得 1 本, 乙得 2 本, 丙得 3 本;

(2) 每人 2 本;

(3) 1 人 1 本, 1 人 2 本, 1 人 3 本.

172. 已知集合 A 和集合 B 各含有 12 个元素, $A \cap B$ 含有 4 个元素, 试求同时满足下列两个条件的集合 C 的个数:

(1) $C \subset (A \cup B)$, 且 C 中含有 3 个元素;

(2) $C \cap A \neq \varnothing$.

173. 有翻译 8 人, 其中 3 人只会英语, 2 人只会日语, 其余 3 人既会英语又会日语, 现从中选 6 人, 安排 3 人翻译英语, 3 人翻译日语, 则不同的安排方法有多少种?

174. 求二项式 $(2x-\dfrac{3}{2x^2})^7$ 展开式的第四项的二项式系数和第四项的系数.

解答在这里因为 $T_4=T_{3+1}=\mathrm{C}_7^3(2x)^{7-3}(-\dfrac{3}{2}x^{-2})^3=\mathrm{C}_7^3 2^4(-\dfrac{3}{2})^3x^{-2}$, 所以第四项的二项式系数为 C_7^3, 即 35; 第四项的系数为 $\mathrm{C}_7^3\cdot 2^4(-\dfrac{3}{2})^3$, 即 -1890.

175. 求 $(1+x)+(1+x)^2+(1+x)^3+\cdots+(1+x)^{2n}(n\in\mathbf{N})$ 的展开式中念 x^n 项的系数.

解答在这里解法一考虑 $(1+x)^k(n\le k\le 2n)$ 展开式的通项, 在 $T_{r+1}=\mathrm{C}_k^rx^r$ 中, 令 $r=n$, 得 $T_{n-1}=\mathrm{C}_k^nx^n$, 故 x^n 项的系数为

$$\begin{aligned}\mathrm{C}_n^n+\mathrm{C}_{n+1}^n+\mathrm{C}_{n+2}^n+\cdots+\mathrm{C}_{2n}^n&=\mathrm{C}_{n+1}^{n+1}+\mathrm{C}_{n+1}^n+\mathrm{C}_{n+2}^n+\cdots+\mathrm{C}_{2n}^n\\&=\mathrm{C}_{n+2}^{n+1}+\mathrm{C}_{n+2}^n+\cdots+\mathrm{C}_{2n}^n\\&=\cdots=\mathrm{C}_{2n}^{n+1}+\mathrm{C}_{2n}^n\\&=\mathrm{C}_{2n+1}^{n+1}.\end{aligned}$$

解法二题中的多项式是以 $(1+x)$ 为公比、项数为 $2n$ 的等比数列的和, 于是, 当 $x\neq 0$ 时, 原式 $=\dfrac{(1+x)[(1+x)^{2n}-1]}{(1+x)-1}=\dfrac{(1+x)^{2n+1}-(1+x)}{x}$. 因此, 只需求 $(1+x)^{2n+1}$ 的展开式中含 x^{n+1} 项的系数即可. 而 $(1+x)^{2n+1}$ 展开式的通项为 $T_{r+1}=\mathrm{C}_{2n+1}^rx^r$, 令 $r=n+1$, 得 $T_{n+2}=\mathrm{C}_{2n-1}^{n+1}x^{n+1}$ 所以题中含 x^n 项的系数为 C_{2n-1}^{n+1}.

176. 在 $(\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}})^{100}$ 的展开式中, 有多少项是有理项?

解答在这里考虑 $(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{3}})^{100}$ 展开式的通项 $T_{r+1}=\mathrm{C}_{100}^rx^{\frac{100-r}{2}}\cdot(x^{-\frac{1}{3}})^r=\mathrm{C}_{100}^rx^{50-\dfrac{3r}{6}}$. 令 $r=6k(k\in\mathbf{Z})$, 则 $0\le 6k\le 100$, 即 $r=0,6,12,\cdots,96$. 因此共有 17 个有理项.

177. 求 $(x^2+\dfrac{1}{x^2}-2)^3$ 展开式中含 x^2 项的表达式.

解答在这里原式 $=(x-\dfrac{1}{x})^6$, 它的展开式的通项为 $T_{r+1}=\mathrm{C}_6^rx^{6-r}(-x^{-1})^r=(-1)^r\mathrm{C}_6^rx^{6-2r}$. 令 $r=2$, 得 $T_{2+1}=\mathrm{C}_6^2x^2=15x^2$, 所以含 x^2 的项为 $15x^2$.

178. 求 $(1+x+x^2)(1-x)^{10}$ 展开式中含 x^4 项的系数.

解答在这里原式 $=(1-x^3)(1-x)^9$. $(1-x)^9$ 展开式的通项为 $T_{r+1}=\mathrm{C}_9^r(-x)^r$. 令 $r=4$, 得 $T_{4+1}=\mathrm{C}_9^4x^4$. 令 $r=1$, 得 $T_{1+1}=-\mathrm{C}_9^1x$. 故 x^4 的系数为 $\mathrm{C}_9^4+\mathrm{C}_9^1=135$.

179. 求 $(ax+by+cz)^n$ 的展开式中含 $x^py^qz^r$ 项的系数, 其中 $p+q+r=n(p,q,r,n\in\mathbf{N})$. 解答在这里原式 $=[(ax+by)+cz]^n$, 其展开式的通项为 $T_{k+1}=\mathrm{C}_n^k(ax+by)^{n-k}\cdot(cz)^k$. 令 $k=r$, 得 $T_{r+1}=\mathrm{C}_n^r(ax+by)^{n-r}\cdot(cz)^r$. 而 $(ax+by)^{n-r}$ 展开式的通项为 $T'_{s+1}=\mathrm{C}_{n-r}^s(ax)^{n-r-s}\cdot(by)^s$. 令 $s=q$, 得 $T'_{q+1}=\mathrm{C}_{n-r}^q(ax)^{n-r-q}\cdot(by)^q=\mathrm{C}_{n-r}^q(ax)^p\cdot(by)^q$. 故 $x^py^qz^r$ 的系数为 $\mathrm{C}_n^r\cdot\mathrm{C}_{n-r}^qa^pb^qc^r$.

180. 求 $(x+\dfrac{1}{x}-1)^5$ 展开式中的常数项.

解答在这里把 $[(x+\dfrac{1}{x})-1]^5$ 直接展开, 即 $[(x+\dfrac{1}{x})-1]^5=(x+\dfrac{1}{x})^5-5(x+\dfrac{1}{x})^4+10(x+\dfrac{1}{x})^3-10(x+\dfrac{1}{x})^2+5(x+\dfrac{1}{x})-1$. 考虑 $x+\dfrac{1}{x}$ 的对称性, 只打在它的偶次幂中, 其展开式才会出现常数项. 所以常数项为 $(-5)\times 6+(-10)\times 2-1=-51$.

181. 求证: $4^n-4^{n-1}\mathrm{C}_n^1+4^{n-2}\mathrm{C}_n^2-4^{n-3}\mathrm{C}_n^3+\cdots+4(-1)^{n-1}\mathrm{C}_n^{n-1}+(-1)^n\mathrm{C}_n^n=3^n(n\in\mathbf{N})$.

解答在这里在 "$(a+b)^n=\mathrm{C}_n^0a^n+\mathrm{C}_n^1a^{n-1}b+\cdots+\mathrm{C}_n^nb^n$" 中, 令 $a=4$, $b=-1$ 得 $4^n-4^{n-1}\mathrm{C}_n^1+4^{n-2}\mathrm{C}_n^2-4^{n-3}\mathrm{C}_n^3+\cdots+4\times(-1)^{n-1}\mathrm{C}_n^{n-1}+(-1)^n\mathrm{C}_n^n=(4-1)^n=3^n(n\in\mathbf{N})$.

182. 求证: $1-\mathrm{C}_n^2+\mathrm{C}_n^4-\mathrm{C}_n^6+\mathrm{C}_n^8-\mathrm{C}_n^{10}+\cdots=(\sqrt{2})^n\cos\dfrac{n\pi}{4}$, $\mathrm{C}_n^1-\mathrm{C}_n^3+\mathrm{C}_n^5-\mathrm{C}_n^7+\mathrm{C}_n^9-\mathrm{C}_n^{11}+\cdots=(\sqrt{2})^n\sin\dfrac{n\pi}{4}$.

解答在这里在 $(a+b)^n=\mathrm{C}_n^0a^n+\mathrm{C}_n^1a^{n-1}b+\cdots+\mathrm{C}_n^{n-1}ab^{n-1}+\mathrm{C}_n^nb^n$ 中, 令 $a=1$, $b=\mathrm{i}$, 则

$$\begin{aligned}(1+\mathrm{i})^n=&\mathrm{C}_n^0+\mathrm{C}_n^1\mathrm{i}+\mathrm{C}_n^2\mathrm{i}^2+\mathrm{C}_n^3\mathrm{i}^3+\mathrm{C}_n^4\mathrm{i}^4+\cdots+\mathrm{C}_n^n\mathrm{i}^n\\&=(\mathrm{C}_n^0-\mathrm{C}_n^2+\mathrm{C}_n^4-\mathrm{C}_n^6+\mathrm{C}_n^8-\mathrm{C}_n^{10}+\cdots)+(\mathrm{C}_n^1-\mathrm{C}_n^3+\mathrm{C}_n^5-\mathrm{C}_n^7+\mathrm{C}_n^9-\mathrm{C}_n^{11}+\cdots)\mathrm{i}\end{aligned}$$

又 $(1+i)^n=[\sqrt{2}(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4})]^n=(\sqrt{2})^n(\cos\dfrac{n\pi}{4}+i\sin\dfrac{n\pi}{4})$. 比较上述两式, 即得欲证.

183. 求证: $\mathrm{C}_n^1+2\mathrm{C}_n^2+3\mathrm{C}_n^3+\cdots+n\mathrm{C}_n^n=n\cdot2^{n-1}(n\in\mathbf{N})$.

解答在这里记 $S_n=0\mathrm{C}_n^0+1\cdot\mathrm{C}_n^1+2\mathrm{C}_n^2+3\mathrm{C}_n^3+\cdots+(n-1)\mathrm{C}_n^{n-1}+n\mathrm{C}_n^n$, 又 $S_n=n\mathrm{C}_n^n+(n-1)\mathrm{C}_n^{n-1}+\cdots+1\cdot\mathrm{C}_n^1+0\mathrm{C}_n^0$, 两式相加, 并利用 $\mathrm{C}_n^m=\mathrm{C}_n^{n-m}$, 得 $2S_n=n(\mathrm{C}_n^0+\mathrm{C}_n^1+\mathrm{C}_n^2+\cdots+\mathrm{C}_n^n)=n\cdot2^n$, 所以 $S_n=n\cdot2^{n-1}(n\in\mathbf{N})$.

184. 求证: $\mathrm{C}_n^0+\dfrac{1}{2}\mathrm{C}_n^1+\dfrac{1}{3}\mathrm{C}_n^2+\cdots+\dfrac{1}{n+1}\mathrm{C}_n^n=\dfrac{1}{n+1}(2^{n+1}-1)(n\in\mathbf{N})$.

解答在这里因为

$$\begin{aligned}\frac{1}{k+1}\mathrm{C}_n^k&=\frac{1}{k+1}\cdot\frac{n!}{k!(n-k)!}=\frac{n!}{(k+1)!(n-k!)}\\&=\frac{1}{n+1}\cdot\frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!}\\&=\frac{1}{n+1}\mathrm{C}_{n+1}^{k+1},\end{aligned}$$

所以左边 $=\dfrac{1}{n+1}(\mathrm{C}_{n+1}^1+\mathrm{C}_{n+1}^2+\mathrm{C}_{n+1}^3+\cdots+\mathrm{C}_{n+1}^{n-1})=\dfrac{1}{n+1}(2^{n+1}-1)=$ 右边.

185. 求证 $\mathrm{C}_n^0\mathrm{C}_n^1+\mathrm{C}_n^1\mathrm{C}_n^2+\cdots+\mathrm{C}_n^{n-1}\mathrm{C}_n^n=\dfrac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!}$.

解答在这里因为 $(1+x)^{2n}=(1+x)^n(1+x)^n$, $(1+x)^n=\mathrm{C}_n^0+\mathrm{C}_n^1x+\mathrm{C}_n^2x^2+\cdots+\mathrm{C}_n^nx^n$, 又因为 $(1+x)^n=\mathrm{C}_n^n+\mathrm{C}_n^{n-1}x+\mathrm{C}_n^{n-2}x^2+\cdots+\mathrm{C}_n^0x^n$, 所以两式的两边相乘, 得 $(1+x)^n\cdot(1+x)^n=(\mathrm{C}_n^0+\mathrm{C}_n^1x+\mathrm{C}_n^2x^2+\cdots+\mathrm{C}_n^nx^n)\times(\mathrm{C}_n^n+\mathrm{C}_n^{n-1}x+\mathrm{C}_n^{n-2}x^2+\cdots+\mathrm{C}_n^0x^n)$. 上式右边乘积中, 含 x^{n+1} 项的系数是 $\mathrm{C}_n^0\mathrm{C}_n^1+\mathrm{C}_n^1\mathrm{C}_n^2+\mathrm{C}_n^2\mathrm{C}_n^3+\cdots+\mathrm{C}_n^{n-1}\mathrm{C}_n^n$. 而在 $(1+x)^{2n}$ 的展开式中含 x^{n+1} 项的系数是 $\mathrm{C}_{2n}^{n+1}=\dfrac{(2n)!}{(n+1)!(2n-n-1)!}=\dfrac{(2n)!}{(n+1)!(n-1)!}$. 由 $(1+x)^n\cdot(1+x)^n=(1+x)^{2n}$, 等式两边展开式中对应项的系数应该相等, 于是 $\mathrm{C}_n^0\mathrm{C}_n^1+\mathrm{C}_n^1\mathrm{C}_n^2+\mathrm{C}_n^2\mathrm{C}_n^3+\cdots+\mathrm{C}_n^{n-1}\mathrm{C}_n^n=\dfrac{(2n)!}{(n+1)!(n-1)!}$.

186. 求证: $(\mathrm{C}_n^0)^2+(\mathrm{C}_n^1)^2+(\mathrm{C}_n^2)^2+\cdots+(\mathrm{C}_n^n)^2=\mathrm{C}_{2n}^n(n\in\mathbf{N})$.

解答在这里从 $2n$ 个不同的元素中选取 n 个元素的取法数是 C_{2n}^n. 我们也可将 $2n$ 个元素平均分成甲、乙两组, 那么取法也可按以下分类进行.

甲组	乙组	取法数
取 0 个	取 n 个	$C_n^0C_n^n$
取 1 个	取 $n-1$ 个	$C_n^1C_n^{n-1}$
取 2 个	取 $n-2$ 个	$C_n^2C_n^{n-2}$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
取 n 个	取 0 个	$C_n^nC_n^0$

由加法原理, $C_n^0C_n^n+C_n^1C_n^{n-1}+C_n^2C_n^{n-2}+\cdots+C_n^nC_n^0=C_{2n}^n$, 即 $(C_n^0)^2+(C_n^1)^2+(C_n^2)^2+\cdots+(C_n^n)^2=C_{2n}^n$.

187. 求 53^{53} 除以 9 的余数.

解答在这里因为 $53^{53}=(54-1)^{53}$ __________ $=54^{53}-C_{53}^1\cdot54^{52}+C_{53}^2\cdot54^{51}-C_{53}^3\cdot54^{50}+\cdots+C_{53}^{52}\cdot54-1$ __________ $=9A-1=9A-9+8=9B+8(A,B\in\mathbf{Z})$, 所以所求余数为 8.

188. 求证: $n^{n-1}-1$ 能被 $(n-1)^2$ 整除 $(n\geq3,\,n\in\mathbf{N})$.

解答在这里因为 $n^{n-1}-1=[(n-1)+1]^{n-1}-1=(n-1)^{n-1}+C_{n-1}^1(n-1)^{n-2}+C_{n-1}^2(n-1)^{n-3}+\cdots+C_{n-1}^{n-3}(n-1)^2+C_{n-1}^{n-2}(n-1)$ 而 $C_{n-1}^{n-2}(n-1)=C_{n-1}^1(n-1)=(n-1)^2$, 所以 $n^{n-1}-1$ 能被 $(n-1)^2$ 整除.

189. 求证: $2<(1+\dfrac{1}{n})^n<3(n\geq2,\,n\in\mathbf{N})$.

解答在这里显然, $(1+\dfrac{1}{n})^n=1+C_n^1\cdot\dfrac{1}{n}+C_n^2\cdot(\dfrac{1}{n})^2+\cdots+C_n^n\cdot(\dfrac{1}{n})^n>2$. 而

$$\begin{aligned}(1+\frac{1}{n})^n&=1+C_n^1\cdot\frac{1}{n}+C_n^2\cdot(\frac{1}{n})^2+C_n^3(\frac{1}{n})^3+\cdots+C_n^n\cdot(\frac{1}{n})^n\\&=2+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\frac{1}{n^3}+\cdots+\frac{n!}{n!}\cdot\frac{1}{n^n}\\&=2+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n})+\frac{1}{3!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})+\cdots+\frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{n-1}{n})\\&<2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}<2+\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}\\&=2+[(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+\cdots+(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n})]=3-\frac{1}{n}<3.\end{aligned}$$

190. 在 $(a-b)^n(n\in\mathbf{N})$ 的展开式中, 第 r 项的二项式系数为 (　　).

A. C_n^r　　B. C_n^{r-1}　　C. $(-1)^rC_n^r$　　D. $(-1)^{r-1}C_n^{r-1}$

191. $(\sqrt{3}i-x)^{10}$ 展开式的第 8 项是 (　　).

A. $-360\sqrt{3}x^7i$　　B. $-135x^3$　　C. $360\sqrt{3}x^7i$　　D. $3240\sqrt{3}x^3i$

192. $(\dfrac{1}{\sqrt{3}}-\sqrt[3]{x})^{20}$ 的展开式中, 不含 x 的项是 (　　).

A. 第 11 项　　B. 第 12 项　　C. 第 13 项　　D. 第 7 项或第 13 项

193. 若二项式 $(\sqrt[3]{x}-\dfrac{2}{x})^n$ 展开式中第 8 项是含 $\sqrt[3]{x}$ 的项, 则自然数 n 的值等于 (　　).

A. 27　　B. 28　　C. 29　　D. 30

194. 在 $(1+x)^n$ 的二项展开式中, 若第 9 项的系数与第 13 项的系数相等, 则第 20 项的系数等于 (　　).

A. 19　　B. 20　　C. 21　　D. 22

195. 若 $(1+x)^8$ 展开式的中间三项依次成等差数列, 则 x 的值等于 (　　).

A. $\frac{1}{2}$ 或 2　　B. $\frac{1}{2}$ 或 4　　C. 2 或 4　　D. 2 或 $\frac{1}{4}$

196. 在 $(x-1)^9$ 按 x 降幂排列的展开式中, 系数最大的项是 (　　).

A. 第 4 项和第 5 项　　B. 第 5 项　　C. 第 5 项和第 6 项　　D. 第 6 项

197. 在 $(x+\frac{2}{x^2})^n$ 的展开式中, 第 3 项为常数, 则中间项的表达式为 (　　).

A. 60　　B. $160x^{-3}$　　C. 672　　D. $960x^{-3}$

198. $(x+1)^4-4(x+1)^3+6(x+1)^2-4(x+1)+1$ 等于 (　　).

A. x^4　　B. $-x^4$　　C. 1　　D. -1

199. 在 $(x+y)^n$ 的展开式中, 若第 7 项的系数最大, 则 n 等于 (　　).

A. $11, 12, 13$　　B. $13, 14$　　C. $11, 15$　　D. $12, 13$

200. 在 $(x-\frac{1}{x})^9$ 的展开式中, x^3 的系数为__________.

201. 在 $(ax+1)^7$ 的展开式中, 若 x^3 的系数是 x^2 的系数与 x^4 的系数的等差中项, 且 $a>1$, 则 a 的值等于__________.

202. 在 $(x+1+\mathrm{i})^{10}$ 的展开式中, x^6 的系数是__________.

203. 若 $a>0$, $n\in\mathbf{N}$, 且 $(ax+1)^{2n}$ 和 $(x+a)^{2n+1}$ 展开式的 x^n 的系数相等, 则 a 的收值范围是__________.

204. $(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2})^{12}$ 的展开式的第 5 项是__________.

205. 若二项式 $(z-2)^6$ 展开式中的第 5 项是 -480, 则复数 z 的值是__________.

206. 若 $(x+\frac{1}{x})^n$ 展开式中的第 3 项和第 7 项系数相等, 则系数的最大项是__________.

207. 在 $(\sqrt[3]{a}-\frac{1}{\sqrt{a}})^{15}$ 的展开式中, 不含 a 的项是第__________ 项.

208. $(\frac{\sqrt{x}}{3}+\frac{3}{\sqrt{x}})^{12}$ 展开式的中间一项等于__________.

209. $(2x^2+\frac{1}{x})^{12}$ 展开式的常数项为__________.

210. 若 $(\frac{1}{x\sqrt[3]{x}}+x)^n$ 展开式中第 $5, 6, 7$ 项的系数成等差数列, 则展开式中不含 x 的项为__________.

211. 在 $(\sqrt[3]{2}+\sqrt{3})^{12}$ 的展开式中, 有理项是第__________ 项.

212. 在 $(1-3x)^{12}$ 的展开式中, 各项的二项式系数之和为__________.

213. 在 $(1-x)^9$ 的展开式中, x 的奇次项系数之和等于__________.

214. 若 $(4x-1)^6=a_6x^6+a_5x^5+a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$, 则 $a_6+a_5+a_4+a_3+a_2+a_1+a_0$ 的值等于__________.

215. 若 $(1-2x)^6=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5+a_6x^6$, 则 $a_6-a_5+a_4-a_3+a_2-a_1$ 的值等于__________.

216. 在 $(2x-1)^5$ 的展开式中, 各项系数的绝对值之和等于__________.

217. 在 $(x+2y)(2x+y)^2(x+y)^3$ 的展开式中, 各项系数的和是__________.

218.

219. $1+7\mathrm{C}_n^1+7^2\mathrm{C}_n^2+7^3\mathrm{C}_n^3+\cdots+7^n\mathrm{C}_n^n=$__________.

220. $1-2\mathrm{C}_n^1+4\mathrm{C}_n^2-\cdots+(-2)^n\mathrm{C}_n^n=$__________.

221. $3+3^{n-1}\mathrm{C}_n^1+3^{n-2}\mathrm{C}_n^2+\cdots+3\mathrm{C}_n^{n-1}+\mathrm{C}_n^n=$__________.

222. $\mathrm{C}_{21}^0-\mathrm{C}_{21}^2+\mathrm{C}_{21}^4-\mathrm{C}_{21}^6+\cdots+\mathrm{C}_{21}^{16}-\mathrm{C}_{21}^{18}+\mathrm{C}_{21}^{20}=$__________.

223. 若 $(2x^2-\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}})^n$ 的展开式中含有非零常数项, 则正整数 n 的最小值是 (　　).

A. 8　　B. 6　　C. 5　　D. 4

224. 在 $(\sqrt[5]{3}+\sqrt[7]{5})^{24}$ 的展开式中, 整数项是 (　　).

A. 第 12 项　　B. 第 13 项　　C. 第 14 项　　D. 第 15 项

225. 在 $(\sqrt{3}x+\sqrt[3]{2})^{100}$ 的展开式中, x 的系数为有理数的项共有 (　　).

A. 15 项　　B. 16 项　　C. 17 项　　D. 18 项

226. 在 $(1-x)^n(1+x)^n$ 的展开式中, 若含 x^4 项的系数是 10, 则自然数 n 的值等于 (　　).

A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6

227. 在二项式 $(1+x)^n$ 的展开式中, 若相邻两项的系数之比为 $8:15$, 则 n 的最小值是 (　　).

A. 21　　B. 22　　C. 23　　D. 24

228. 若集合 $P=\{\text{所有小于1993的正奇数}\}$, 则 P 的非空真子集的个数是 (　　).

A. 2^{996}　　B. $2^{996}-2$　　C. $2^{996}-1$　　D. 2^{995}

229. 在 $(2-3x)^n$ 的展开式中, 各项系数之和是 (　　).

A. 1　　B. n 为偶数时是 2, n 为奇数时是 -2

C. -1　　D. n 为偶数时是 1, n 为奇数时是 -1

230. 在 $(1+x)^3+(1+x)^4+\cdots+(1+x)^{n+2}$ 的展开式中, 含 x^2 项的系数是 (　　).

A. C_{n+3}^3　　B. C_{n+3}^3-1　　C. C_{n+2}^3-1　　D. C_{n+2}^3

231. $(a+b+c)^{10}$ 展开式的项数共有 (   ).

A. 11 项   B. 66 项   C. 121 项   D. 132 项

232. 在 $(x+1)(2x+1)(3x+1)\cdots(nx+1)$ 的展开式中, x 的一次项的系数是 (   ).

A. C_n^1 B. C_n^2 C. C_{n+1}^1 D. C_{n+1}^2

233. 在 $(1+x_1)(1+x_2)^2\cdots(1+x_{n-1})^{n-1}(1+x_n)^n$ 展开式中, 各项系数之和是 (   ).

A. $2^{n(n+1)}$ B. $2^{\frac{n(n+1)}{2}}$ C. $2^{n+1}+2$ D. $2(2^n-1)$

234. 55^{55} 被 8 除所得的余数是 (   ).

A. 7   B. -7 C. 1   D. -1

235. 求 $(x^2+\dfrac{4}{x^2}-4)^5$ 展开式中含 x^4 项的系数.

236. 求 $(x^2+3x+2)^5$ 展开式中含 x 项的系数.

237. 求 $(1-x)^5(1+x+x^2)^4$ 展开式中含 x^7 项的系数.

238. 求 $(x-2)^4(1+x)^5$ 展开式中含 x^6 项的系数.

239. 求 $(x^2+x-2)^4$ 展开式中含 x^2 项的系数.

240. 求 $(2\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}})^6$ 展开式中, x 的一次幂的系数.

241. 求 $(x+y-3z)^8$ 的展开式中含 x^5yz^2 项的系数.

242. 求 $(x+2y+z)^9$ 展开式中含 $x^2y^3z^4$ 项的系数.

243. 求 $(1-2x)^5(2+x)$ 展开式中含 x^3 项的系数.

244. 求 $(1+x+x^2)(1-x)^{10}$ 展开式中含 x^4 项的系数.

245. 求 $(1+x)^{2n}+x(1+x)^{2n-1}+x^2(1+x)^{2n-2}+\cdots+x^n\cdot(1+x)^n$ 展开式中含 x^n 项的系数.

246. 求 $(x-1)-(x-1)^2+(x-1)^3-(x-1)^4+(x-1)^5$ 的展开式中含 x^2 项的系数.

247. 若 $(x+x^{\lg x})^5$ 的展开式的第 4 项为 10^6, 求 x 的值.

248. 若 $x(1-x)^4+x^2(1+2x)^k+x^3(1+3x)^{12}$ 的展开式中 x^4 的系数是 144, 求 k 的值.

249. 若 $(x^{\lg x}+1)^n$ 展开式中最后 3 项的二项式系数的和是 22, 而它的中间项是 20000, 求 x 的值.

250. 已知 $(x\sin\alpha+1)^6$ 的展开式中 x^2 项的系数与 $(x-\dfrac{15}{2}\cos\alpha)^4$ 的展开式中 x^3 项的系数相等, 求 α 的值.

251. 已知 $(a+b)^n$ 展开式的末 3 项系数之和为 22, 又 $(x^{\lg x}-3)^n$ 展开式的中间项等于 -540000, 求 x 的值.

252. 求 $(|x|+\dfrac{1}{|x|}-2)^3$ 展开式中的常数项.

253. 求 $[(1+\log_3 x)(1+\log_x 3)]^n$ 的展开式中不含 x 的项.

254. 已知 $(\sqrt{x}+\dfrac{2}{x^2})^n$ 展开式中的第 5 项系数与第 3 项系数之比是 $56:3$, 求展开式中不含 x 的项.

255. 已知 $(\sqrt{x}+\dfrac{1}{2\cdot\sqrt[4]{x}})^n$ 展开式中前 3 项的系数依次成等差数列, 求展开式中所有的有理项.

256. 已知 $(x\cdot\sqrt{x}-\dfrac{1}{x})^6$ 展开式的第 5 项等于 $\dfrac{15}{2}$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}(x^{-1}+x^{-2}+\cdots+x^{-n})$.

257. 已知多项式 $f(x)=(1+x)^m+(1+x)^n(m\in\mathbf{N},\, n\in\mathbf{N})$ 的展开式中 x 项的系数为 19.

(1) 求 $f(x)$ 中含 x^2 项的系数的最小值;

(2) 对于使 $f(x)$ 的 x^2 项的系数取最小值时的 m, n, 求 $f(x)$ 中含 x^7 的项.

258. 在 $(x+1)(x+2)(x+3)\cdots(x+10)$ 的展开式中, 7 的系数是多少? x^8 的系数又是多少?

259. 求 $(x+1)(x+2)(x+3)\cdots(x+n)$ 展开式中含 x^{n-2} 项的系数.

260. 求多项式 $(x^2+x-1)^9(2x+1)^4$ 展开式中 x 的奇次项系数之和.

261. 求多项式 $(x^2+2x+2)^{1993}+(x^2-3x-3)^{1993}$ 展开式中 x 的偶次项系数之和.

262. 求 $(2-5x+2x^2)^5(2-x)^7$ 展开后各项系数的和.

263. 求 $(x^3+2x+1)(5x^2+4)$ 展开后各项系数的和.

264. 已知 $(1+x)^n$ 展开式中奇数项之和为 A, 偶数项之和为 B, 试证: $A^2-B^2=(1-x^2)^n$.

265. 若 $(a+b)^n$ 展开式的所有奇数项的二项式系数之和为 1024, 则展开式中间项的系数是 (　　).

A. 330　　B. 462　　C. 682　　D. 792

266. 在 $(x-\dfrac{1}{x})^n$ 的展开式中, 若奇数项的系数之和为 32, 则含 x^2 项的系数是 (　　).

A. -20　　B. -15　　C. 15　　D. 20

267. 若 a 为常数, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a+\mathrm{C}_n^1+\mathrm{C}_n^2+\cdots+\mathrm{C}_n^n}{2^n}$ 的值等于 (　　).

A. 0　　B. $\dfrac{1}{2}$　　C. 1　　D. $\dfrac{a}{2}$

268. 记 $(1+2x)^n$ 展开式中各项系数和为 a_n, 其二项式系数和为 b_n, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_n-a_n}{b_n+a_n}$ 为 (　　).

A. 1　　B. 0　　C. -1　　D. 不存在

269. 设 $(1-2x)^8=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_8x^8$, 则 $|a_0|+|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_8|$ 是 (　　).

A. -1　　B. 1　　C. 2^8　　D. 3^8

270. 在 $(x-1)^{11}$ 的展开式中, x 的偶次幂项的系数和为________.

271. 若 $2000<\mathrm{C}_n^1+\mathrm{C}_n^2+\mathrm{C}_n^3+\cdots+\mathrm{C}_n^n<3000$, 则 $n=$________.

272. 若 $x^4-3x^3+x^2+1=a(x+1)^4+b(x+1)^3+c(x+1)^2+d(x+1)+6$, 则 $b=$__________.

273. 设含有 10 个元素的集合的全部子集为 S, 其中由 3 个元素组成的子集数为 T, 则 $\dfrac{T}{S}$ 的值为__________.

274. 设 $(1+x)+(1+x)^2+(1+x)^3+\cdots+(1+x)^n=b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_nx^n$, 且 $b_0+b_1+\cdots+b_n=30$, 则自然数 n 的值等于 (　　).

A. 4　　B. 5　　C. 6　　D. 8

275. 在 $(x^2+x-1)^{100}+(x^2-x-1)^{100}$ 的展开式中, x 的偶次项系数之和为 (　　).

A. 4　　B. 5　　C. 6　　D. 8

276. $\mathrm{C}_n^0+2\mathrm{C}_n^1+2^2\mathrm{C}_n^2+\cdots+2^n\mathrm{C}_n^n$ 的值为 (　　).

A. 2^n　　B. 2^{n-1}　　C. 3^n　　D. 3^{n-1}

277. $101^{10}-1$ 的末尾连续零的个数是 (　　).

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

278. 若 $\mathrm{C}_n^0(x+1)^n-\mathrm{C}_n^1(x+1)^{n-1}+\mathrm{C}_n^2(x+1)^{n-2}-\cdots+(-1)^n\mathrm{C}_n^n=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$, 则 $a_1+a_2+\cdots+a_n=$__________.

279. 已知 x 为实数, i 为虚数单位, 则 $(1+ix)^{50}$ 展开式中实系数项的系数和为__________.

280. 设 a 是 $\sqrt{2}$ 的整数部分, b 是 $\sqrt{2}$ 的小数部分, 则 $(a-\dfrac{1}{b})^6$ 展开式的中间项是__________.

281. 设 $(2x+x^{\lg x})^n$ 展开式各项的二项式系数之和为 256, 且二项式系数最大项的值为 1120, 求 x.

282. 已知 $(\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}})^n$ 展开式系数之和比 $(a+b)^{2n}$ 展开式的系数之和小 240, 求 $(\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}})^n$ 展开式中系数最大的项.

283. 求满足 $\{a,b\}\subset A\subseteq\{a,b,c,d,e,f,g\}$ 的集合 A 的个数.

284. 设集合 $A=\{0,2,5,7,9\}$, 从集合 A 中任取两个元素相乘, 它们的积组成集合 B, 求集合 B 的子集的个数.

285. 求和: $\mathrm{C}_{100}^0+4\mathrm{C}_{100}^1+7\mathrm{C}_{100}^2+\cdots+(3n-2)\mathrm{C}_{100}^{n-1}+\cdots+298\mathrm{C}_{100}^{99}+301\mathrm{C}_{100}^{100}(n\in\mathbf{N},\ 1\le n\le 101)$.

286. 设 $a_0,a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是等差数列, 求证: $a_0+\mathrm{C}_n^1a_1+\mathrm{C}_n^2a_2+\cdots+\mathrm{C}_n^na_n=(a_0+a_n)\cdot 2^{n-1}$.

287. 若 n 为奇数, 求 $7^n+\mathrm{C}_n^1\cdot 7^{n-1}+\mathrm{C}_n^2\cdot 7^{n-2}+\mathrm{C}_n^3 7^{n-3}+\cdots+\mathrm{C}_n^{n-2}\cdot 7^2+\mathrm{C}_n^{n-1}\cdot 7$ 被 9 除所得的余数.

288. 求 47^{13} 被 5 除的余数.

289. 求 91^{92} 除以 8 所得的余数.

290. 求证: $3^{2n}-8n-1(n\in\mathbf{N})$ 能被 64 整除.

291. 求证: 数列 $65,65\times 66,65\times 66^2,65\times 66^3,\cdots,65\times 66^{48},65\times 66^{49}$ 之和必能被 67 整除.

292. 已知 $2^{n+2}\times 3^n+5n-a(n\in\mathbf{N})$ 能被 25 整除, 求 a 的最小正值.

293. 求 $x^{10}-3$ 除以 $(x-1)^2$ 所得的余式.

294. 求证: 当 $n\geq 3, n\in\mathbf{N}$ 时, $n^{n-1}-1$ 能被 $(n-1)^2$ 整除.

295. 设 $(x-2)^8=a_8x^8+a_7x^7+\cdots+a_1x+a_0$, 求 $a_8+a_6+a_4+a_2$.

296. 求 $(1-x)+(1-x)^2+(1-x)^3+\cdots+(1-x)^n$ 展开式中所有奇次项系数的和.

297. 已知 $(3-x)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_nx^n$, 求 $a_1+2a_2+2^2a_3+\cdots+2^{n-1}a_n$.

298. 求证: $\mathrm{C}_n^0\mathrm{C}_n^1+\mathrm{C}_n^1\mathrm{C}_n^2+\cdots+\mathrm{C}_n^{n-1}\mathrm{C}_n^n=\dfrac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!}$.

299. 求证: $\mathrm{C}_n^0\mathrm{C}_m^p+\mathrm{C}_n^1\mathrm{C}_m^{p-1}+\cdots+\mathrm{C}_n^p\mathrm{C}_m^0=\mathrm{C}_{m-n}^p(p\leq m,n)$.

300. 利用 $k\mathrm{C}_n^k=n\mathrm{C}_{n-1}^{k-1}$, 求证: $\mathrm{C}_n^1+2\mathrm{C}_n^2+3\mathrm{C}_n^3+\cdots+n\mathrm{C}_n^n=n\cdot 2^{n-1}$.

301. 利用 $k\mathrm{C}_n^k=n\mathrm{C}_{n-1}^{k-1}$, 求证: $\mathrm{C}_n^1-2\mathrm{C}_n^2+3\mathrm{C}_n^3+\cdots+(-1)^{n-1}n\mathrm{C}_n^n=0(n\geq 2, n\in\mathbf{N})$.

302. 利用 $k\mathrm{C}_n^k=n\mathrm{C}_{n-1}^{k-1}$, 求证: $\mathrm{C}_n^0+2\mathrm{C}_n^1+3\mathrm{C}_n^2+\cdots+(n+1)\mathrm{C}_n^n=(n+2)\cdot 2^{n-1}$.

303. 已知 $n\in\mathbf{N}, n\geq 2$, 求证: $2^n>1+2+\cdots+n$.

304. 求证: $3^n>2^{n-1}(n+2)(n>2, n\in\mathbf{N})$.

305. 已知正数 a,b,c 满足 $a+b+c=abc$, 求证: $a^n+b^n+c^n>3(1+\dfrac{n}{2})(n\in\mathbf{N})$.

306. 利用数学归纳法证明: $(\dfrac{n}{2})^n>n!(n\in\mathbf{N}$ 且 $n\geq 6)$.

307. 已知 $\mathrm{C}_{18}^n=\mathrm{C}_{18}^{n+2}$, $4\mathrm{P}_m^2=\mathrm{P}_{m+1}^4$, 求 $(1+\sqrt{m}\mathrm{i})^n$ 展开式中所有实数项的和.

308. 若实数 x,y 满足 $x+y=1$, 求证: $x^5+y^5\geq\dfrac{1}{16}$.

309. 已知: $|x|<1, n\in\mathbf{N}, n\geq 2$, 求证: $(1-x)^n+(1+x)^n<2^n$.

310. 计算: $\mathrm{C}_{21}^0-\mathrm{C}_{21}^2+\mathrm{C}_{21}^4-\mathrm{C}_{21}^6+\mathrm{C}_{21}^8-\mathrm{C}_{21}^{10}+\mathrm{C}_{21}^{12}-\mathrm{C}_{21}^{14}+\mathrm{C}_{21}^{16}-\mathrm{C}_{21}^{18}+\mathrm{C}_{21}^{20}$.

311. 求证: $1+\mathrm{C}_n^1\cos\alpha+\mathrm{C}_n^2\cos 2\alpha+\cdots+\mathrm{C}_n^n\cos n\alpha=2^n\cos^n(\dfrac{\alpha}{2})\cdot\cos\dfrac{n\alpha}{2}$, $\mathrm{C}_n^1\sin\alpha+\mathrm{C}_n^2\sin 2\alpha+\cdots+\mathrm{C}_n^n\sin n\alpha=2^n\cos^n(\dfrac{\alpha}{2})\sin\dfrac{n\alpha}{2}$.

312. 设 $a_n=1+q+q^2+\cdots+q^{n-1}(n\in\mathbf{N}, q\neq\pm 1)$, $A_n=a_1\mathrm{C}_n^1+a_2\mathrm{C}_n^2+\cdots+a_n\mathrm{C}_n^n$.

(1) 用 q,n 表示 A_n;

(2) 当 $-3<q<1$ 时, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{A_n}{2^n}$

(3) 设 $b_1+b_2+\cdots+b_n=\dfrac{A_n}{2^n}$, 求证: 数列 $\{b_n\}$ 是等比数列.

313. 设 $A_n=(1+\lg x)^n$, $B_n=1+n\lg x+\dfrac{n(n-1)}{2}\lg^2 x(n\geq 3, n\in\mathbf{N})$, 且 $x>\dfrac{1}{10}$, 试比较 A_n 和 B_n 的大小, 并证明你的结论.

314. 6 人按下列要求分组, 各有多少种分法.

(1) 分成人数为 2, 4 的两组;

(2) 分成人数相等的两组;

(3) 平均分成两组分别去植树和扫地.

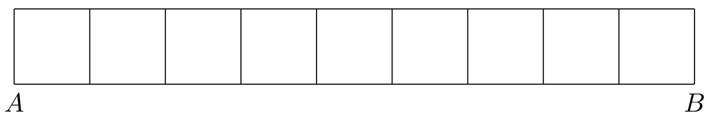
315. 某校以单循环制方法进行排球比赛, 其中有两个班级各比赛了 3 次后, 不再参加比赛, 这样一共进行了 84 场比赛, 问: 开始有多少班级参加比赛?

316. 红、黄、绿 3 种颜色的卡片分别写有 A, B, C, D, EE 字母各一张, 每次取出 5 张, 要求字母各不相同、3 种颜色齐全的取法有多少种?

317. 设 n 为偶数, 从 $1, 2, \cdots, n$ 中选 3 数使之不构成等差数列, 问: 这样的选法有多少种?

318. 设集合 $P = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$, 在 P 中取子集 A_1, A_2, A_3, 使 $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \varnothing$, 这样子集的集合 $\{A_1, A_2, A_3\}$ 共有多少个?

319. 如图, 有纵路 10 条, 横路 2 条, 从 A 沿道路行走到 B, 规定行走中不得重走已走过的路, 共有多少种不同的走法?



320. 由 1 分, 2 分, 5 分, 1 角, 2 角, 5 角, 1 元, 2 元, 5 元, 10 元人民币各一张, 可组成多少种不同的币值?

321. 壹分币 3 枚、贰角币 6 张、拾元币 4 张, 可以组成多少种不同的币值?

322. 求 21600 的正约数的个数 (1 和 21600 也是约数) 及所有约数之和.

323. 设自然数 $N = \{1, 2, 3, \cdots\}$ 的子集中含有 4 个元素的子集的个数记为 m, 且这 m 个集合中所有元素之和为 $\dfrac{1}{12}\mathrm{P}_{100}^{5}$, 求 m.

324. 有 11 名工人, 其中 5 名只会做钳工, 4 名只会做车工, 2 名既会做钳工, 又会做车工, 今要选 4 名车工、4 名钳工, 有多少种不同的选法?

325. 设 $(1 + x + x^2)^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{2n} x^{2n}$, 求 $a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{2n}$ 的值.

326. 求 $(\sqrt{x} + 2)^{2n+1}$ 的展开式中 x 的整数次幂的各项系数之和.

327. 求 $(1 + i)^{4k-2} (k \in \mathbf{N})$ 展开式中奇数项之和.

328. 求证: $(3 + \sqrt{7})^n (n \in \mathbf{N}, n \geq 2)$ 的整数部分为奇数.