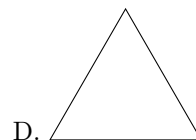
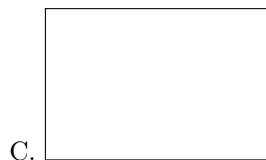
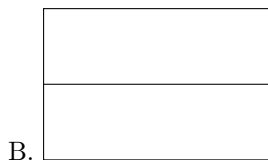
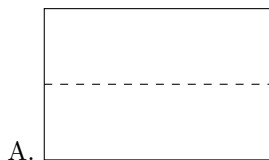
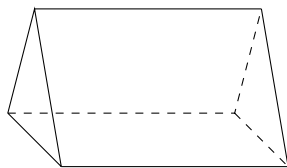


1. 已知集合 $A = \{-2, 1, 2\}$, $B = \{\sqrt{a} + 1, a\}$, 且 $B \subseteq A$, 则实数 a 的值是_____.
2. 若直线 l 的参数方程为
$$\begin{cases} x = 4 - 4t, \\ y = -2 + 3t, \end{cases} \quad t \in \mathbf{R},$$
 则直线 l 在 y 轴上的截距是_____.
3. 如果一个圆柱的高不变, 要使它的体积扩大为原来的 5 倍, 那么它的底面半径应该扩大为原来的_____倍.
4. 平面上有 12 个不同的点, 其中任何 3 点不在同一直线上, 如果任取 3 点作为顶点作三角形, 那么一共可作_____个三角形 (结果用数值表示).
5. 把三阶行列式
$$\begin{vmatrix} 2^x & 0 & 3 \\ x & 4 & 0 \\ 1 & x-3 & -1 \end{vmatrix}$$
 中第 1 行第 3 列元素的代数余子式记为 $f(x)$, 则关于 x 的不等式 $f(x) < 0$ 的解集为_____.
6. 焦点在 y 轴上, 焦距为 6, 且经过点 $(0, \sqrt{5})$ 的双曲线的标准方程为_____.
7. 已知抛物线型拱桥的顶点距水面 2 米时, 量得水面宽为 8 米, 当水面下降 1 米后, 水面的宽为_____米.
8. 函数 $y = \sin(\frac{\pi}{6} - x)$, $x \in [0, \frac{3\pi}{2}]$ 的单调递减区间是_____.
9. 已知定义在 \mathbf{R} 上的函数 $f(x)$ 满足: ① $f(x) + f(2-x) = 0$; ② $f(x) - f(-2-x) = 0$; ③ 在 $[-1, 1]$ 上表达式为 $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2}, & x \in [-1, 0], \\ 1-x, & x \in (0, 1], \end{cases}$ 则函数 $f(x)$ 与 $g(x) = \begin{cases} 2^x, & x \leq 0 \\ \log_{\frac{1}{2}} x, & x > 0 \end{cases}$ 的图像在区间 $[-3, 3]$ 上的交点的个数为_____.
10. 已知 6 个正整数, 它们的平均数是 5, 中位数是 4, 唯一众数是 3, 则这 6 个数方差的最大值为_____(精确到小数点后一位).
11. 已知正方形 $ABCD$ 边长为 8, $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{EC}$, $\overrightarrow{DF} = 3\overrightarrow{FA}$, 若在正方形边上恰有 6 个不同的点 P , 使 $\overrightarrow{PE} \cdot \overrightarrow{PF} = \lambda$, 则 λ 的取值范围为_____.
12. 已知 $f(x) = 2x^2 + 2x + b$ 是定义在 $[-1, 0]$ 上的函数, 若 $f[f(x)] \leq 0$ 在定义域上恒成立, 而且存在实数 x_0 满足: $f[f(x_0)] = x_0$ 且 $f(x_0) \neq x_0$, 则实数 b 的取值范围是_____.
13. 如图, 水平放置的正三棱柱的俯视图是 ().



14. 已知 $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$, i 是虚数单位. 若复数 $\frac{z}{1+i} + i$ 是实数, 则 $|z|$ 的最小值为 ().

A. 0

B. $\frac{5}{2}$

C. 5

D. $\sqrt{2}$

15. 已知点 $P(x, y)$ 满足约束条件 $\begin{cases} x + y \leq 50, \\ 2x + 5y \leq 200, \\ 0 \leq x \leq 40, \\ y \geq 0, \end{cases}$ 则目标函数 $z = x - y$ 的最小值为 ().

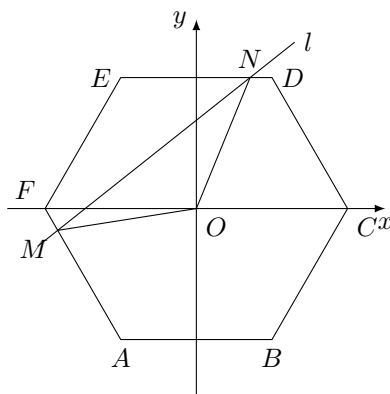
A. 40

B. -40

C. 30

D. -30

16. 如图, 在直角坐标平面内有一个边长为 a , 中心在原点 O 的正六边形 $ABCDEF$, $AB \parallel Ox$. 直线 $l: y = kx + t$ (k 是常数) 与正六边形交于 M 、 N 两点, 记 $\triangle OMN$ 的面积为 S , 则函数 $S = f(t)$ 的奇偶性为 ().



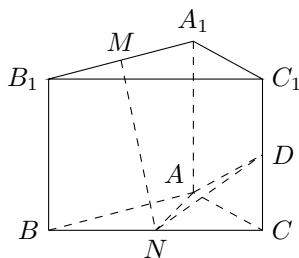
A. 偶函数

B. 奇函数

C. 不是奇函数, 也不是偶函数

D. 奇偶性与 k 有关

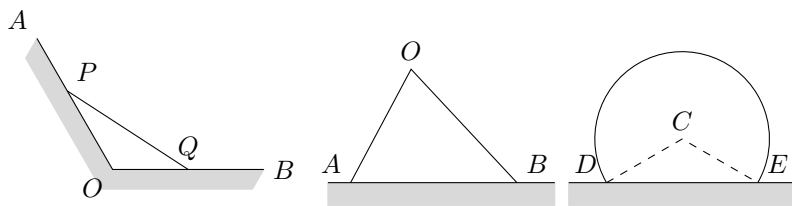
17. 如图, 在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $AB \perp AC$, $AA_1 = AB = AC = 1$, $\angle ABC = \frac{\pi}{4}$, D 、 M 、 N 分别是 CC_1 、 A_1B_1 、 BC 的中点.



(1) 求异面直线 MN 与 AC 所成角的大小;

(2) 求点 M 到平面 ADN 之间的距离.

18. 某地计划在一处海滩建造一个养殖场.



(1) 如图, 射线 OA 、 OB 为海岸线, $\angle AOB = \frac{2\pi}{3}$, 现用长度为 1 千米的围网 PQ 依托海岸线围成一个 $\triangle POQ$ 的养殖场, 问如何选取点 P 、 Q , 才能使养殖场 $\triangle POQ$ 的面积最大, 并求其最大面积;

(2) 如图, 直线 l 为海岸线, 现用长度为 1 千米的围网依托海岸线围成一个养殖场.

方案一: 围成三角形 OAB (点 A 、 B 在直线 l 上), 使三角形 OAB 面积最大, 设其为 S_1 ;

方案二: 围成弓形 CDE (点 D 、 E 在直线 l 上, C 是优弧所在圆的圆心且 $\angle DCE = \frac{2\pi}{3}$), 其面积为 S_2 ; 试求出 S_1 的最大值和 S_2 (均精确到 0.001 平方千米), 并指出哪一种设计方案更好 (面积较大的更好).

19. 已知各项均不为零的数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, 前 n 项的和为 S_n , 且 $\frac{S_n^2 - S_{n-1}^2}{a_n} = 2n^2$, $n \in \mathbf{N}^*$, $n \geq 2$, 数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n = a_n + a_{n+1}$, $n \in \mathbf{N}^*$.

(1) 求 a_2 、 a_3 、 S_{2019} ;

(2) 已知等式 $kC_n^k = n \cdot C_{n-1}^{k-1}$ 对 $1 \leq k \leq n$, $k, n \in \mathbf{N}^*$ 成立, 请用该结论求有穷数列 $\{b_k C_n^k\}$, $k = 1, 2, \dots, n$ 的前 n 项和 T_n .

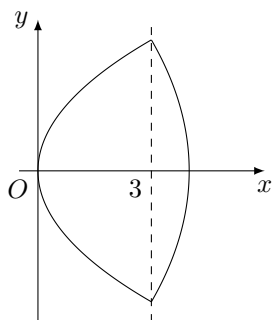
20. (1) 设椭圆 $C_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 与双曲线 $C_2: 9x^2 - \frac{9y^2}{8} = 1$ 有相同的焦点 F_1 、 F_2 , M 是椭圆 C_1 与双曲线 C_2 的公共点, 且 $\triangle MF_1F_2$ 的周长为 6, 求椭圆 C_1 的方程;

我们把具有公共焦点、公共对称轴的两段圆锥曲线弧合成的封闭曲线称为“盾圆”.

(2) 如图, 已知“盾圆 D ”的方程为 $y^2 = \begin{cases} 4x, & 0 \leq x \leq 3, \\ -12(x-4), & 3 < x \leq 4. \end{cases}$ 设“盾圆 D ”上的任意一点 M 到 $F(1, 0)$

的距离为 d_1 , M 到直线 $l: x = 3$ 的距离为 d_2 , 求证: $d_1 + d_2$ 为定值;

(3) 由抛物线弧 $E_1: y^2 = 4x (0 \leq x \leq \frac{2}{3})$ 与第 (1) 小题椭圆弧 $E_2: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (\frac{2}{3} \leq x \leq a)$ 所合成的封闭曲线为“盾圆 E ”. 设“盾圆 E ”上的两点 AB 关于 x 轴对称, O 为坐标原点, 试求 $\triangle OAB$ 面积的最大值.



21. 已知函数 $f(x) = \log_2 x$.

(1) 若 $f(x)$ 的反函数是 $f^{-1}(x)$, 解方程: $f^{-1}(2x+1) = 3f^{-1}(x) - 1$;

(2) 当 $x \in (3m, 3m+3] (m \in \mathbf{N})$ 时, 定义 $g(x) = f(x-3m)$. 设 $a_n = n \cdot g(n)$, 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 求 a_1 、 a_2 、 a_3 、 a_4 和 S_{3n} ;

(3) 对于任意 $a, b, c \in [M, +\infty)$, 且 $a \geq b \geq c$. 当 a, b, c 能作为一个三角形的三边长时, $f(a), f(b), f(c)$ 也总能作为某个三角形的三边长, 试探究 M 的最小值.

22. 集合 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{x | (x-1)(x-5) < 0\}$, 则 $A \cap B =$ _____.

23. 复数 $z = \frac{2-i}{1+i}$ 所对应的点在复平面内位于第_____象限.

24. 已知首项为 1 公差为 2 的等差数列 $\{a_n\}$, 其前 n 项和为 S_n , 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a_n)^2}{S_n} =$ _____.

25. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{81} = 1 (a > 0)$ 的一条渐近线方程为 $y = 3x$, 则 $a =$ _____.

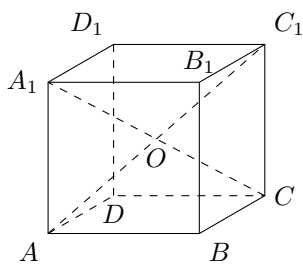
26. 若圆柱的侧面展开图是边长为 4 的正方形, 则圆柱的体积为_____.

27. 已知 x, y 满足 $\begin{cases} x - y \leq 0, \\ x + y \leq 2, \\ x + 2 \geq 0, \end{cases}$, 则 $z = 2x + y$ 的最大值是_____.

28. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2^x, & x \leq 0 \\ \log_2 x, & 0 < x \leq 1 \end{cases}$ 的反函数是 $f^{-1}(x)$, 则 $f^{-1}(\frac{1}{2}) =$ _____.

29. 生产零件需要经过两道工序, 在第一、第二道工序中产生废品的概率分别为 0.01 和 p , 每道工序产生废品相互独立, 若经过两道工序后得到的零件不是废品的概率是 0.9603, 则 $p =$ _____.

30. 如图, 长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的边长 $AB = AA_1 = 1$, $AD = \sqrt{2}$, 它的外接球是球 O , 则 A, A_1 这两点的球面距离等于_____.



31. $[x]$ 是不超过 x 的最大整数, 则方程 $(2^x)^2 - \frac{7}{4} \cdot [2^x] - \frac{1}{4} = 0$ 满足 $x < 1$ 的所有实数解是_____.

32. 在直角 $\triangle ABC$ 中, $\angle A = \frac{\pi}{2}$, $AB = 1$, $AC = 2$, M 是 $\triangle ABC$ 内一点, 且 $AM = \frac{1}{2}$, 若 $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{AC}$, 则 $\lambda + 2\mu$ 的最大值为_____.

33. 已知函数 $f(x) = \cos x$, 若对任意实数 x_1, x_2 , 方程 $|f(x) - f(x_1)| + |f(x) - f(x_2)| = m (m \in \mathbf{R})$ 有解, 方程 $|f(x) - f(x_1)| - |f(x) - f(x_2)| = n (n \in \mathbf{R})$ 也有解, 则 $m + n$ 的值的集合为_____.

34. 已知 α, β 是两个不同平面, m 为 α 内的一条直线, 则 “ $m \parallel \beta$ ” 是 “ $\alpha \parallel \beta$ ” 的 ().

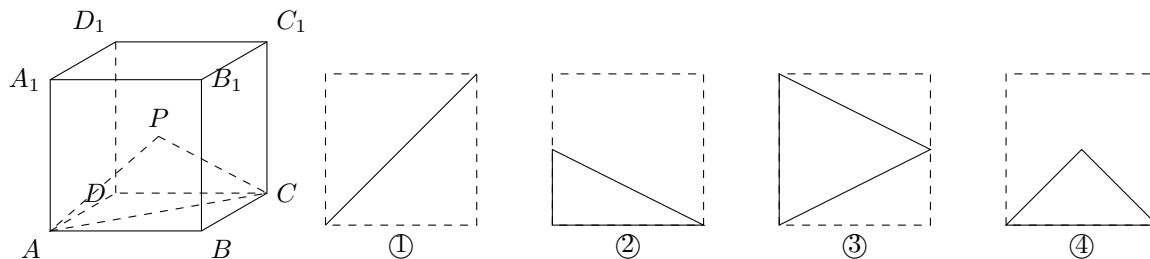
A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

35. 如图, P 为正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中 AC_1 与 BD_1 的交点, 则 $\triangle PAC$ 在该正方体各个面上的正投影可能是 ().



- A. ①②③④ B. ①③ C. ①④ D. ②④

36. 已知 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的奇函数, 对任意两个不相等的正数 x_1, x_2 都有 $\frac{x_2 f(x_1) - x_1 f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$, 则函数

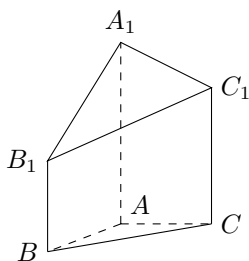
$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad ().$$

- A. 是偶函数, 且在 $(0, +\infty)$ 上单调递减 B. 是偶函数, 且在 $(0, +\infty)$ 上单调递增
C. 是奇函数, 且单调递减 D. 是奇函数, 且单调递增

37. 已知数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1 = a$, 且 $0 < a \leq 4$, $a_{n+1} = \begin{cases} a_n - 4, & a_n > 4, \\ 6 - a_n, & a_n \leq 4, \end{cases}$ S_n 是此数列的前 n 项和, 则以下结论正确的是 ().

- A. 不存在 a 和 n 使得 $S_n = 2015$ B. 不存在 a 和 n 使得 $S_n = 2016$
C. 不存在 a 和 n 使得 $S_n = 2017$ D. 不存在 a 和 n 使得 $S_n = 2018$

38. 如图, 在多面体 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, AA_1, BB_1, CC_1 均垂直于平面 ABC , $AA_1 = 4, CC_1 = 3, BB_1 = AB = AC = 2, \angle BAC = 120^\circ$.

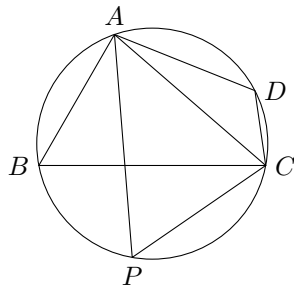


- (1) 求 AB_1 与 $A_1B_1C_1$ 所成角的大小;
(2) 求二面角 $A - A_1B_1 - C_1$ 的大小.

39. 已知函数 $f(x) = 1 - \frac{6}{a^{x+1} + a}$ ($a > 0, a \neq 1$) 是定义在 \mathbf{R} 上的奇函数.

- (1) 求实数 a 的值及函数 $f(x)$ 的值域;
(2) 若不等式 $t \cdot f(x) \geq 3^x - 3$ 在 $x \in [1, 2]$ 上恒成立, 求实数 t 的取值范围.

40. 某城市的棚户区改造建筑用地平面示意图如图所示, 经过调研、规划确定, 棚改规划用地区域近似为圆面, 该圆的内接四边形 $ABCD$ 区域是原棚户区建筑用地, 测量可知边界 $AB = AD = 2(\text{km})$, $BC = 3(\text{km})$, $CD = 1(\text{km})$.



- (1) 求 AC 的长及原棚户区建筑用地 $ABCD$ 的面积;
- (2) 因地理条件限制, 边界 AD , DC 不能变更, 而边界 AB , BC 可以调整, 为了增加棚户区建筑用地的面积, 请在弧 ABC 上设计一点 P , 使得棚户区改造后的新建筑用地 (四边形 $APCD$) 的面积最大, 并求出这个面积最大值.
41. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, 定义椭圆 C 上的点 $M(x_0, y_0)$ 的“伴随点”为 $N(\frac{x_0}{a}, \frac{y_0}{b})$.
- (1) 求椭圆 C 上的点 M 的“伴随点” N 的轨迹方程;
- (2) 如果椭圆 C 上的点 $(1, \frac{3}{2})$ 的“伴随点”为 $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2b})$, 对于椭圆 C 上的任意点 M 及它的“伴随点” N , 求 $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON}$ 的取值范围;
- (3) 当 $a = 2$, $b = \sqrt{3}$ 时, 直线 l 交椭圆 C 于 A, B 两点, 若点 A, B 的“伴随点”分别是 P, Q , 且以 PQ 为直径的圆经过坐标原点 O , 求 $\triangle OAB$ 的面积.
42. 已知项数为 $m (m \in \mathbb{N}^*, m \geq 2)$ 的数列 $\{a_n\}$ 满足条件: ① $a_n \in \mathbb{N}^* (n = 1, 2, \dots, m)$ ② $a_1 < a_2 < \dots < a_m$; 若数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n = \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_m) - a_n}{m - 1} \in \mathbb{N}^* (n = 1, 2, \dots, m)$, 则称 $\{b_n\}$ 为数列 $\{a_n\}$ 的“关联数列”.
- (1) 数列 $1, 5, 9, 13, 17$ 是否存在“关联数列”? 若存在, 写出其“关联数列”; 若不存在, 请说明理由;
- (2) 若数列 $\{a_n\}$ 存在“关联数列” $\{b_n\}$, 证明: $a_{n+1} - a_n \geq m - 1 (n = 1, 2, \dots, m - 1)$;
- (3) 已知数列 $\{a_n\}$ 存在“关联数列” $\{b_n\}$, 且 $a_1 = 1$, $a_m = 2049$, 求数列 $\{a_n\}$ 项数 m 的最小值与最大值.
43. 已知复数 z 满足 $z = 3 - i$ (i 为虚数单位), 则 $z \cdot \bar{z} =$ _____.
44. 已知函数 $f(x) = \sqrt{2x - 1}$ 的反函数为 $f^{-1}(x)$, 则 $f^{-1}(7) =$ _____.
45. 在行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ 中, 第二行第三列的元素 3 的代数余子式的值为_____.
46. 在 $(x - \sqrt{2})^8$ 的二项展开式中, x^5 项的系数是_____.

47. 已知 x, y 满足:
$$\begin{cases} x + 2 \geq 0, \\ y - 1 \leq 0, \\ x - y - 4 \leq 0 \end{cases}$$
 则 $z = x - 2y$ 的最大值为_____.

48. 方程 $\log_5(4^x - 11) - 1 = \log_5(2^x - 3)$ 的解为 $x = \underline{\hspace{2cm}}$.

49. 已知一组数据 $a, 3, -2, 8$ 的中位数为 5, 则其总体方差为_____.

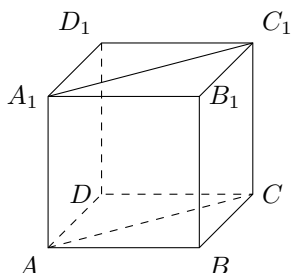
50. 已知函数 $f(x) = g(x) + |2x - 1|$ 为奇函数, 若 $g(-2) = 7$, 则 $g(2) =$ _____.

51. 直线 $l : (n+2)x - y + n - 1 = 0 (n \in \mathbf{N}^*)$ 被圆 $C : (x-1)^2 + y^2 = 16$ 所截得的弦长为 d_n , 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n =$ _____.

52. 非空集合 A 中所有元素乘积记为 T . 已知集合 $M = \{1, 4, 5, 7, 8, 9\}$, 从集合 M 的所有非空子集中任选一个子集 A , 则 $T(A)$ 为偶数的概率是_____ (结果用最简分数表示).

53. 函数 $f(x) = \sin(\omega x) + \sqrt{3}\cos(\omega x)(\omega > 0)$, 若恰有两个实数 m 满足: ① $0 \leq m \leq \frac{\pi}{2}$; ② $x = m$ 是函数图像的对称轴, 则 ω 的取值范围是_____.

54. 如图, 在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 点 P 是平面 ACC_1A_1 上一动点, 且满足 $\overrightarrow{DP} \cdot \overrightarrow{CP} = 0$, 则满足条件的所有点 P 所围成的平面区域的面积是_____.



55. 若 $m, n \in \mathbf{R}$, i 是虚数单位, 则 “ $m^2 = n^2$ ” 是 “ $(m - n) + (m + n)i$ 为纯虚数” 的 ().

- A. 充分不必要条件
B. 必要不充分条件
C. 充要条件
D. 既不充分也不必要条件

56. 已知数列 $\{a_n\}$ 是无穷等比数列, 若 $a_1 < a_2 < 0$, 则数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n ().

- A. 无最大值, 有最小值
B. 有最大值, 有最小值
C. 有最大值, 无最小值
D. 无最大值, 无最小值

57. 若直线 $ax + by = 2$ (a, b 不全为零) 经过点 $M(2 \cos \alpha, \sin \alpha)$ ($\alpha \in \mathbf{R}$), 则 ().

- A. $4a^2 + b^2 \leq 4$ B. $4a^2 + b^2 \geq 4$ C. $\frac{4}{a^2} + \frac{1}{b^2} \leq 4$ D. $\frac{4}{a^2} + \frac{1}{b^2} \geq 4$

58. 已知集合 $M = \{(x, y) | y = f(x)\}$, 若对于任意 $(x_1, y_1) \in M$, 存在 $(x_2, y_2) \in M$, 使得 $x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0$ 成立, 则称集合 M 是“ Ω 集合”. 给出下列 4 个集合: ① $M = \{(x, y) | y = \frac{1}{x}\}$; ② $M = \{(x, y) | y = e^x - 2\}$; ③ $M = \{(x, y) | y = \cos x\}$; ④ $M = \{(x, y) | y = \ln x\}$. 其中所有“ Ω 集合”的序号是 ().

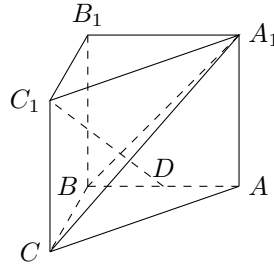
A. ②③

B. ③④

C. ①②④

D. ①③④

59. 如图, 棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $AB = BC = AA_1 = 2$, $BB_1 \perp$ 底面 ABC , $AB \perp BC$, D 是棱 AB 的中点.



(1) 求证: 直线 BC 与直线 DC_1 为异面直线;

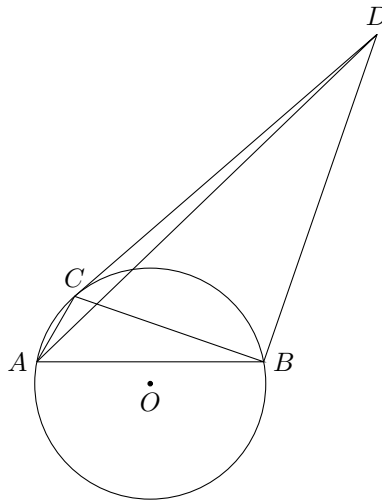
(2) 求直线 DC_1 与平面 A_1BC 所成角的大小.

60. 已知 $f(x) = ax + \frac{x^2}{x^2 + 1}$, a 为实常数.

(1) 当 $a = 1$ 时, 求不等式 $f(x) + f(\frac{1}{x}) < x$ 的解集;

(2) 若函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 中有零点, 求 a 的取值范围.

61. 如图, A, B, C 三地在以 O 为圆心的圆形区域边界上, $AB = 30$ 公里, $AC = 10$ 公里, $\angle BAC = 60^\circ$, D 是圆形区域外一景点, $\angle DBC = 90^\circ$, $\angle DCB = 60^\circ$.



(1) O, A 相距多少公里 (精确到小数点后两位)? (2) 若一汽车从 A 处出发, 以每小时 50 公里的速度沿公路 AD 行驶到 D 处, 需要多少小时 (精确到小数点后两位)?

62. 已知椭圆 $\Omega: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的左右两焦点分别为 F_1, F_2 .

(1) 若矩形 $ABCD$ 的边 AB 在 y 轴上, 点 C, D 均在 Ω 上, 求该矩形绕 y 轴旋转一周所得圆柱侧面积 S 的取值范围;

(2) 设斜率为 k 的直线 l 与 Ω 交于 P, Q 两点, 线段 PQ 的中点为 $M(1, m) (m > 0)$, 求证: $k < -\frac{1}{2}$;

(3) 过 Ω 上一动点 $E(x_0, y_0)$ 作直线 $l: \frac{x_0x}{4} + \frac{y_0y}{3} = 1$, 其中 $y_0 \neq 0$, 过 E 作直线 l 的垂线交 x 轴于点 R . 问是否存在实数 λ , 使得 $|EF_1| \cdot |RF_2| = \lambda |EF_2| \cdot |RF_1|$ 恒成立? 若存在, 求出 λ 的值; 若不存在, 说明理由.

63. 已知无穷数列 $\{a_n\}$ 与无穷数列 $\{b_n\}$ 满足下列条件: ① $a_n \in \{0, 1, 2\}$, $n \in \mathbf{N}^*$; ② $\frac{b_{n+1}}{b_n} = (-1)^n \cdot |\frac{1}{2}a_n - \frac{1}{4}a_{n+1}|$, $n \in \mathbf{N}^*$. 记数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项积为 T_n .
- (1) 若 $a_1 = b_1 = 1$, $a_2 = 0$, $a_3 = 2$, $a_4 = 1$, 求 T_4 ;
- (2) 是否存在 a_1, a_2, a_3, a_4 , 使得 b_1, b_2, b_3, b_4 成等差数列? 若存在, 请写出一组 a_1, a_2, a_3, a_4 ; 若不存在, 请说明理由;
- (3) 若 $b_1 = 1$, 求 T_{2021} 的最大值.
64. 若 $\sin \alpha = \frac{1}{4}$, 则 $\sin(\pi + \alpha) =$ _____.
65. 设集合 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{y | y = \sin x, x \in \mathbf{R}\}$, 则 $A \cap B =$ _____.
66. 已知圆锥的底面半径为 1, 母线长为 2, 则该圆锥的体积为_____.
67. 关于 x 的不等式 $\frac{1}{x} > 1$ 的解集为_____.
68. 已知常数 $a \in \mathbf{R}$, 若复数 $z = (a + i)(2 + i)$ (i 为虚数单位) 的实部与虚部相等, 则 $|z| =$ _____.
69. 在 $(x^2 + \frac{2}{x})^7$ 的二项展开式中, x^2 的系数为_____.
70. 各项都不为零的等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_2 - 2a_8^2 + 3a_{10} = 0$, 则 $a_8 =$ _____.
71. 设椭圆 $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} + y^2 = 1 (a > 1)$ 的左顶点为 A , 过点 A 的直线 l 与 Γ 相交于另一点 B , 与 y 轴相交于点 C . 若 $|OA| = |OC|$, $|AB| = |AC|$, 则 $a =$ _____.
72. 已知常数 $b, c \in \mathbf{R}$. 若函数 $f(x) = (x^2 + x - 2)(x^2 + bx + c)$ 为偶函数, 则 $b + c =$ _____.
73. 设 a, b, c, d, e, f 为 $1, 2, 3, 4, 5, 6$ 的任意一个排列, 则使得 $(a + b)(c + d)(e + f)$ 为偶数的排列共有_____个.
74. 已知定点 $A(1, 0)$, 圆 $\omega: x^2 + y^2 = 4$, M, N 为 ω 上的动点, 满足 $|MN| = 2\sqrt{3}$, 则 $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN}$ 的取值范围为_____.
75. 空间中, 给定两条异面直线 m, n 以及平面 α , 满足: $m \perp n$, n 在平面 α 上, m 与 α 所成的角 $\theta \in [60^\circ, 90^\circ]$. 动点 P 在 α 上, 满足 P 到 m 的距离与 P 到 n 的距离相等, 记 P 的轨迹为曲线 Γ . 对于下列命题: ① Γ 可以是椭圆; ② Γ 可以是双曲线, 且两条渐近线的夹角为 30° ; ③ Γ 可以是双曲线, 且两条渐近线的夹角为 60° ; ④ Γ 可以是抛物线, 所有真命题的序号为_____.
76. 行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} =$ ().
- A. -4 B. -2 C. 2 D. 4
77. 函数 $f(x) = \sin(2x + \frac{\pi}{4})$ 的图像关于 () 对称.
- A. 直线 $x = \frac{\pi}{4}$ B. 直线 $x = \frac{3\pi}{8}$ C. 点 $(\frac{\pi}{4}, 0)$ D. 点 $(\frac{3\pi}{8}, 0)$

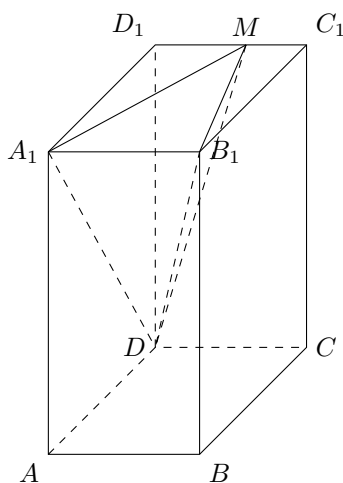
78. 设 a, b, c 表示三条互不重合的直线, α, β 表示两个不重合的平面, 则使得 $a \parallel b$ 成立的一个充分条件为 ().

- A. $a \perp c, b \perp c$
B. $a \parallel \alpha, b \parallel \alpha$
C. $a \parallel \alpha, a \parallel \beta, \alpha \cap \beta = b$
D. $b \perp \alpha, c \parallel \alpha, a \perp c$

79. 在锐角 $\triangle ABC$ 中, O 为 $\triangle ABC$ 的外心, 设 O 到直线 BC, AC, AB 的距离分别为 d_1, d_2, d_3 . 若将所有的全等三角形看作同一个三角形, 则对于命题: ① 对任意给定的 $d_1, d_2 \in \mathbf{R}^+$ 以及 $\angle C \in (0, \frac{\pi}{2})$, 锐角 $\triangle ABC$ 都存在且唯一; ② 对任意给定的 $d_1, d_2, d_3 \in \mathbf{R}^+$, 锐角 $\triangle ABC$ 都存在且唯一, 下列判断正确的是 ().

- A. ①、②均为真命题
B. ①、②均为假命题
C. ①为真命题, ②为假命题
D. ①为假命题, ②为真命题

80. 如图, 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $2AB=BC=AA_1$, 点 M 为棱 C_1D_1 上的动点.

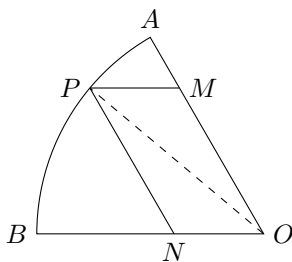


- (1) 求三棱锥 $D - A_1B_1M$ 与长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的体积比;
- (2) 若 M 为棱 C_1D_1 的中点, 求直线 DB_1 与平面 DA_1M 所成角的大小.

81. 已知常数 $a \in \mathbf{R}^+$, 函数 $f(x) = 3^x + a^2 \cdot 3^{-x}$.

- (1) 若 $a = \sqrt{3}$, 解关于 x 的不等式 $f(x) < 4$;
(2) 若 $f(x)$ 在 $[3, +\infty)$ 上为增函数, 求 a 的取值范围.

82. 某居民小区为缓解业主停车难的问题, 拟对小区内一块扇形空地 AOB 进行改建. 如图所示, 平行四边形 $OMPN$ 区域为停车场, 其余部分建成绿地, 点 P 在围墙 \widehat{AB} 上, 点 M 和 N 分别在道路 OA 和道路 OB 上, 且 $OA = 60\text{m}$, $\angle AOB = \frac{\pi}{3}$. 设 $\angle POB = \theta$.



(1) 求停车场面积 S (单位: m^2) 关于 θ 的函数关系式, 并写出 θ 的取值范围;

(2) 求停车场面积 S 的最大值以及相应 θ 的值.

83. 已知常数 $p > 0$, 抛物线 $\Gamma: y^2 = 2px$ 的焦点为 F .

(1) 若直线 $x = 2$ 被 Γ 截得的弦长为 4, 求 p 的值;

(2) 设 E 为点 F 关于原点 O 的对称点, P 为 Γ 上的动点, 求 $\frac{|PE|}{|PF|}$ 的取值范围;

(3) 设 $p = 2$. 两条互相垂直的直线 l_1, l_2 均过点 F , l_1 与 Γ 相交于 A, B 两点, l_2 与 Γ 相交于 C, D 两点. 若 $AC \perp BC$, 求四边形 $ACBD$ 的面积.

84. 记无穷数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 集合 $M = \{x | x = a_n, n \in \mathbf{N}^*\}$. 若对任意 $n \in \mathbf{N}^*$, 恒有 $S_n \in M$, 则称 $\{a_n\}$ 具有性质 **P**.

(1) 若无穷数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n = n^2 + n + 2$, 判断 $\{a_n\}$ 是否具有性质 **P**, 并说明理由;

(2) 若无穷数列 $\{a_n\}$ 为等差数列, 首项 $a_1 = -1$, 公差 $d > 0$, 且 $\{a_n\}$ 具有性质 **P**, 求 d 的值;

(3) 若无穷数列 $\{a_n\}$ 为等比数列, 首项 $a_1 = 1$, 公比 $q > 0$, 问: 是否存在 q , 使得 $\{a_n\}$ 具有性质 **P**? 若存在, 求出所有 q 的值; 若不存在, 说明理由.

85. 方程 $\log_3(2x + 1) = 2$ 的解是_____.

86. 已知集合 $M = \{x | |x + 1| \leq 1\}$, $N = \{-1, 0, 1\}$, 则 $M \cap N =$ _____.

87. 若复数 $z_1 = a + 2i$, $z_2 = 2 + i$ (i 是虚数单位), 且 $z_1 z_2$ 为纯虚数, 则实数 $a =$ _____.

88. 直线 $\begin{cases} x = -2 - \sqrt{2}t, \\ y = 3 + \sqrt{2}t \end{cases}$ (t 为参数) 对应的普通方程是_____.

89. 函数 $y = \begin{vmatrix} \sin x & 1 \\ 0 & \cos x \end{vmatrix}$ 的最小正周期为_____.

90. 若 $(x + 2)^n = x^n + ax^{n-1} + \cdots + bx + c$ ($n \in \mathbf{N}^*$, $n \geq 3$), 且 $b = 4c$, 则 a 的值为_____.

91. 若函数 $f(x) = 2^x(x + a) - 1$ 在区间 $[0, 1]$ 上有零点, 则实数 a 的取值范围是_____.

92. 某学生在上学路上要经过 2 个路口, 假设在各路口是否遇到红灯是相互独立的, 遇到红灯概率都是 $\frac{1}{3}$, 则这名学生在上学路上到第二个路口时第一次遇到红灯的概率是_____.

93. 设不等式组 $\begin{cases} x + y - 6 \geq 0, \\ x - y + 2 \geq 0, \\ x - 3y + 6 \leq 0 \end{cases}$ 表示的可行域为 Ω , 若指数函数 $y = a^x$ 的图像与 Ω 有公共点, 则 a 的取值范围是_____.

94. 已知椭圆 $x^2 + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($0 < b < 1$), 其左、右焦点分别为 F_1, F_2 , $|F_1 F_2| = 2c$, 若椭圆上存在点 P , 使 P 到直线 $x = \frac{1}{c}$ 距离是 $|PF_1|$ 与 $|PF_2|$ 的等差中项, 则 b 的最大值为_____.

95. 已知 $f(x) = 1 + ax - \sqrt{1 + ax^2}$, 若对任意 $x \in [0, \sqrt{2}]$, $f(x) \leq 0$ 恒成立, 则实数 a 的取值范围为_____.

96. 已知函数 $f(x) = |\sin x| + |\cos x| - 4 \sin x \cos x - k$, 若函数 $f(x)$ 在区间 $(0, \pi)$ 内恰好有奇数个零点, 则实数 k 的所有取值之和为_____.

97. 函数 $y = x^2 (x \leq 0)$ 的反函数为 ().

- A. $y = \sqrt{x}, x \geq 0$ B. $y = -\sqrt{x}, x \geq 0$ C. $y = \sqrt{x}, x \leq 0$ D. $y = -\sqrt{x}, x \leq 0$

98. 某高科技公司所有雇员的工资情况如下表所示.

年薪 (万元)	135	95	80	70	60	52	40	31
人数	1	1	2	1	3	4	1	12

该公司雇员年薪的标准差约为 ().

- A. 24.5(万元) B. 25.5(万元) C. 26.5(万元) D. 27.5(万元)

99. 已知函数 $f(x) = x + \frac{a}{x} (a > 0)$, $0 < x_1 < x_2$, 且 $f(x_1) = f(x_2)$, 给出以下结论:

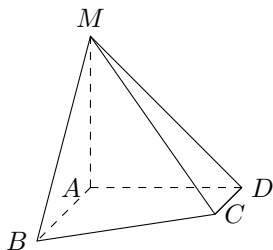
① $\frac{x_1 + x_2}{2} > \sqrt{a}$ 恒成立; ② $f(2\sqrt{a} - x_1) < f(x_2)$ 恒成立. 则 ().

- A. ①正确, ②正确 B. ①正确, ②错误 C. ①错误, ②正确 D. ①错误, ②错误

100. 在直角坐标平面上, 到两条直线 $y = 0$ 与 $y = x$ 的距离和为 3 的点的轨迹所围成的图形的面积是 ().

- A. 18 B. $18\sqrt{2}$ C. 36 D. $36\sqrt{2}$

101. 如图, 在四棱锥 $M - ABCD$ 中, 已知 $AM \perp$ 平面 $ABCD$, $AB \perp AD$, $AB \parallel CD$, $AB = 2CD$, 且 $AB = AM = AD = 2$.



(1) 求四棱锥 $M - ABCD$ 的体积;

(2) 求直线 MC 与平面 ADM 所成的角.

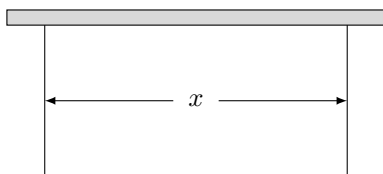
102. 已知 $x \in \mathbf{R}$, $\vec{m} = (2 \cos x, 2\sqrt{3} \sin x)$, $\vec{n} = (\cos x, \cos x)$.

(1) 设 $f(x) = \vec{m} \cdot \vec{n}$, 求函数 $y = f(x)$ 的解析式及最大值;

(2) 设 $\triangle ABC$ 的三个内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 当 $x = A$ 时, $\vec{m} = a\vec{n}$, 且 $c = 2\sqrt{3}$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

103. 某学校对面有一块空地要围建成一个面积为 360m^2 的矩形场地, 要求矩形场地的一面利用旧墙 (旧墙需要整修), 其它三面围墙要新建, 在旧墙对面的新墙上要留一个宽度为 2m 的进出口, 如图所示. 已知旧墙的整修费

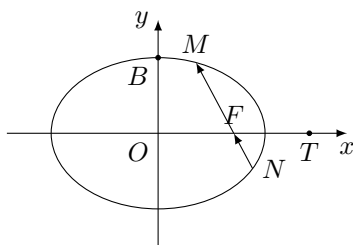
用为 45 元/m, 新建墙的造价为 180 元/m, 建 2m 宽的进出口需 2360 元的单独费用, 设利用的旧墙的长度为 x (单位: m), 设修建此矩形场地围墙的总费用 (含建进出口的费用) 为 y (单位: 元).



(1) 将 y 表示为 x 的函数;

(2) 试确定 x , 使修建此矩形场地围墙的总费用 (含建进出口的费用) 最少, 并求出最少总费用.

104. 已知椭圆 Γ 的中心是坐标原点 O , 焦点在 x 轴上, 点 B 是椭圆 Γ 的上顶点, 椭圆 Γ 上一点 $A(1, \frac{\sqrt{2}}{2})$ 到两焦点距离之和为 $2\sqrt{2}$.



(1) 求椭圆 Γ 的标准方程;

(2) 若点 P, Q 是椭圆 Γ 上异于点 B 的两点, $BP \perp BQ$, 且满足 $3\overrightarrow{PC} = 2\overrightarrow{CQ}$ 的点 C 在 y 轴上, 求直线 BP 的方程;

(3) 设 x 轴上点 T 坐标为 $(2, 0)$, 过椭圆 Γ 的右焦点 F 作直线 l (不与 x 轴重合) 与椭圆 Γ 交于 M, N 两点, 如图, 点 M 在 x 轴上方, 点 N 在 x 轴下方, 且 $\overrightarrow{FM} = 2\overrightarrow{NF}$, 求 $|\overrightarrow{TM} + \overrightarrow{TN}|$ 的值.

105. 已知数列 $\{x_n\}$, 若对任意 $n \in \mathbf{N}^*$, 都有 $\frac{x_n + x_{n+2}}{2} > x_{n+1}$, 则称数列 $\{x_n\}$ 为 “差增数列”.

(1) 试判断数列 $a_n = n^2 (n \in \mathbf{N}^*)$ 是否为 “差增数列”, 并说明理由;

(2) 对于所有各项均为正整数的 “差增数列” $\{a_n\}$, 其中 $a_1 = a_2 = 1$, 若使得 $a_k = m$ 成立的序数 k 的最大值为 20, 求正整数 m 的所有可能取值的集合;

(3) 若数列 $\{\lg x_n\}$ 为 “差增数列” ($n \in \mathbf{N}^*, n \leq 2020$) 且 $\lg x_1 + \lg x_2 + \cdots + \lg x_{2020} = 0$, 证明: $x_{1010} \cdot x_{1011} < 1$.

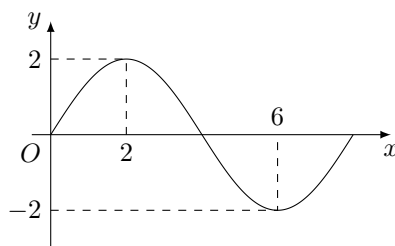
106. 集合 $A = \{x | x^2 - 2x < 0\}$, $B = \{x | |x| < 1\}$, 则 $A \cup B =$ _____.

107. 已知函数 $f(x) = \log_3(\frac{4}{x+2})$, 则方程 $f^{-1}(x) = 4$ 的解 $x =$ _____.

108. 等比数列 $\{a_n\} (n \in \mathbf{N}^*)$ 中, 若 $a_2 = \frac{1}{16}$, $a_5 = \frac{1}{2}$, 则 $a_8 =$ _____.

109. 若方程 $x^2 - 2x + 3 = 0$ 的两个根为 α 和 β , 则 $|\alpha| + |\beta| =$ _____.

110. 函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi) (A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2})$ 的部分图像如图所示, 则 $f(x) =$ _____.



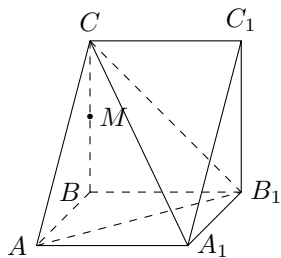
111. 双曲线 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ 的焦点到渐近线的距离等于_____.
112. 在二项式 $(1+ax)^7 (a \in \mathbf{R})$ 的展开式中, x 的系数为 $\frac{7}{3}$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a + a^2 + a^3 + \cdots + a^n)$ 的值是_____.
113. 已知正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的八个顶点都在同一球面上, 若 $AB=1, AA_1=\sqrt{2}$, 则 A, C 两点间的球面距离是_____.
114. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $AB=1, BC=2$, 若 $y = \begin{vmatrix} \cos C & \sin C \\ \sin C & \cos C \end{vmatrix}$, 则 y 的最小值是_____.
115. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{8} = 1$, 左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 过点 F_2 作一直线与双曲线 C 的右支交于 P, Q 两点, 使得 $\angle F_1PQ = 90^\circ$, 则 $\triangle F_1PQ$ 的内切圆的半径 $r =$ _____.
116. 若函数 $f(x) = (1 + \sin x)^{2021} + (1 - \sin x)^{2021}$, 其中 $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{2\pi}{3}$, 则 $f(x)$ 的最大值为_____.
117. 已知实数 a, b 使得不等式 $|ax^2 + bx + a| \leq x$ 对任意 $x \in [1, 2]$ 都成立, 在平面直角坐标系 xOy 中, 点 (a, b) 形成的区域记为 Ω , 若圆 $x^2 + y^2 = r^2$ 上的任一点都在 Ω 中, 则 r 的最大值为_____.
118. 设 z_1, z_2 为复数, 下列命题一定成立的是 ().
- 如果 $z_1^2 + z_2^2 = 0$, 那么 $z_1 = z_2 = 0$
 - 如果 $|z_1| = |z_2|$, 那么 $z_1 = \pm z_2$
 - 如果 $|z_1| \leq a$, a 是正实数, 那么 $-a \leq z_1 \leq a$
 - 如果 $|z_1| = a$, a 是正实数, 那么 $z_1 \cdot \overline{z_1} = a^2$
119. 下列命题为真命题的是 ().
- 若直线 l 与平面 α 上的两条直线垂直, 则直线 l 与平面 α 垂直
 - 若两条直线同时垂直于一个平面, 则这两条直线平行
 - 若两个平面同时垂直于第三个平面, 则这两个平面垂直
 - 若直线 l 上的不同两点到平面 α 的距离相等, 则直线 l 与平面 α 平行
120. 若数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的通项公式分别为 $a_n = (-1)^{n+2020}a, b_n = 2 + \frac{(-1)^{n+2019}}{n}$, 且 $a_n < b_n$ 对任意 $n \in \mathbf{N}^*$ 恒成立, 则实数 a 的取值范围为 ().
- $[-2, 1)$
 - $[-2, \frac{3}{2})$
 - $[-1, \frac{1}{2})$
 - $[-1, 1)$
121. 已知定义在实数集 \mathbf{R} 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+1) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - f^2(x)}$, 则 $f(0) + f(2021)$ 的最小值与最大值的和为 ().

A. 2

B. 3

C. $\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{5}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}$

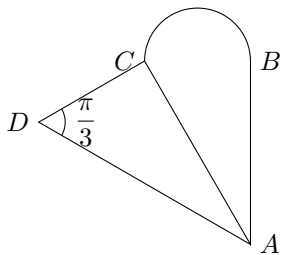
122. 如图, 在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $BA \perp BC$, $BA = BC = BB_1 = 2$.



(1) 求异面直线 AB_1 与 A_1C_1 所成角的大小;

(2) 若 M 是棱 BC 的中点. 求点 M 到平面 A_1B_1C 的距离.

123. 随着生活水平的不断提高, 人们更加关注健康, 重视锻炼, 通过“小步道”, 走出“大健康”, 健康步道成为引领健康生活的一道亮丽风景线. 如图, $A - B - C - A$ 为某区的一条健康步道, AB 、 AC 为线段, \widehat{BC} 是以 BC 为直径的半圆, $AB = 2\sqrt{3}\text{km}$, $AC = 4\text{km}$, $\angle BAC = \frac{\pi}{6}$.



(1) 求 \widehat{BC} 的长度;

(2) 为满足市民健康生活需要, 提升城市品位, 改善人居环境, 现计划新建健康步道 $A - D - C$ (B, D 在 AC 两侧), 其中 AD, CD 为线段. 若 $\angle ADC = \frac{\pi}{3}$, 求新建的健康步道 $A - D - C$ 的路程最多可比原有健康步道 $A - B - C$ 的路程增加多少长度 (精确到 0.01km)?

124. 已知椭圆 $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1$ 上有两点 $P(-2, 1)$ 及 $Q(2, -1)$, 直线 $l: y = kx + b$ 与椭圆交于 A, B 两点, 与线段 PQ 交于点 C (异于 P, Q).

(1) 当 $k = 1$ 且 $\overrightarrow{PC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CQ}$ 时, 求直线 l 的方程;

(2) 当 $k = 2$ 时, 求四边形 $PAQB$ 面积的取值范围.

125. 在数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_1 = 2$, $a_{n+1}a_n = 2a_n - a_{n+1}$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

(1) 证明: 数列 $\{\frac{1}{a_n} - 1\}$ 为等比数列;

(2) 记 $b_n = \frac{a_n a_{n+1}}{2^n}$, 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 S_n . 求使得 $S_n > 1.999$ 的整数 n 的最小值;

(3) 是否存在正整数 m, n, k , 且 $m < n < k$, 使得 a_m, a_n, a_k 成等差数列? 若存在, 求出 m, n, k 的值; 若不存在, 请说明理由.

126. 设 m 为给定的实常数, 若函数 $y = f(x)$ 在其定义域内存在实数 x_0 , 使得 $f(x_0 + m) = f(x_0) + f(m)$ 成立, 则称函数 $f(x)$ 为 “ $G(m)$ 函数”.

(1) 若函数 $f(x) = 2^x$ 为 “ $G(2)$ 函数”, 求实数 x_0 的值;

(2) 若函数 $f(x) = \lg \frac{a}{x^2 + 1}$ 为 “ $G(1)$ 函数”, 求实数 a 的取值范围;

(3) 已知 $f(x) = x + b (b \in \mathbf{R})$ 为 “ $G(0)$ 函数”, 设 $g(x) = x|x - 4|$. 若对任意的 $x_1, x_2 \in [0, t]$, 当 $x_1 \neq x_2$ 时, 都有 $\frac{g(x_1) - g(x_2)}{f(x_1) - f(x_2)} > 2$ 成立, 求实数 t 的最大值.

127. 已知复数 z 满足 $z(1 + i^{2020}) = 2 - 4i$ (其中, i 为虚数单位), 则 $z =$ _____.

128. 函数 $y = \arcsin(x + 1)$ 的定义域是_____.

129. 计算行列式的值, $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} =$ _____.

130. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的实轴与虚轴长度相等, 则 C 的渐近线方程是_____.

131. 已知无穷数列 $a_n = \frac{2}{(-3)^n}, n \in \mathbf{N}^*$, 则数列 $\{a_n\}$ 的各项和为_____.

132. 一个圆锥的表面积为 π , 母线长为 $\frac{5}{6}$, 则其底面半径为_____.

133. 某种微生物的日增长率为 r , 经过 n 天后其数量由 p_0 变化为 p , 并且满足方程 $p = p_0 e^{rn}$. 实验检测, 这种微生物经过一周数量由 2.58 个单位增长到 14.86 个单位, 则增长率 $r =$ _____ (精确到 1%).

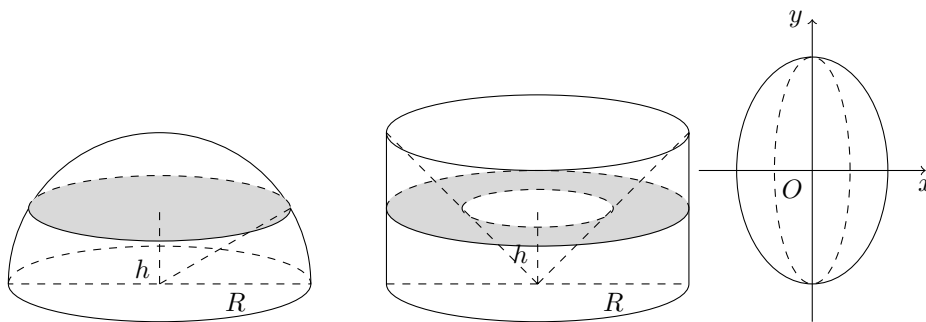
134. 已知 $(x - \frac{1}{2x})^n$ 的展开式的常数项为第 6 项, 则常数项为_____.

135. 某医院 ICU 从 3 名男医生和 2 名女医生中任选 2 位赴武汉抗疫, 则选出的 2 位医生中至少有 1 位女医生的概率是_____.

136. 已知方程 $x^2 + tx + 1 = 0 (t \in \mathbf{R})$ 的两个根是 x_1, x_2 , 若 $|x_1 - x_2| = 2\sqrt{2}$, 则 $t =$ _____.

137. 已知 O 是坐标原点, 点 $A(-1, 1)$, 若点 $M(x, y)$ 为平面区域 $\begin{cases} x + y \geq 2, \\ x \leq 1, \\ y \leq 2, \end{cases}$ 上的一个动点, 则 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OM}$ 的取值范围是_____.

138. 课本中介绍了应用祖暅原理推导棱锥体积公式的做法. 祖暅原理也可用来求旋转体的体积. 现介绍用祖暅原理求球体体积公式的做法: 可构造一个底面半径和高都与球半径相等的圆柱, 然后在圆柱内挖去一个以圆柱下底面圆心为顶点, 圆柱上底面为底面的圆锥, 用这样一个几何体与半球应用祖暅原理 (左图), 即可求得球的体积公式. 请研究和理解球的体积公式求法的基础上, 解答以下问题: 已知椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 1$, 将此椭圆绕 y 轴旋转一周后, 得一橄榄状的几何体 (右图), 其体积等于_____.



139. 抛物线 $y = 4x^2$ 的准线方程是 ().

A. $x = -2$

B. $x = -1$

C. $y = -\frac{1}{8}$

D. $y = -\frac{1}{16}$

140. 若函数 $f(x) = \sin x + a \cos x$ 的图像关于直线 $x = \frac{\pi}{4}$ 对称, 则 a 的值为 ().

A. 1

B. -1

C. $\sqrt{3}$

D. $-\sqrt{3}$

141. 已知 \vec{a}, \vec{b} 是平面内两个互相垂直的单位向量, 若向量 \vec{c} 满足 $(\vec{c} - \vec{a}) \cdot (\vec{c} - \vec{b}) = 0$, 则 $|\vec{c}|$ 的最大值是 ().

A. 1

B. 2

C. $\sqrt{2}$

D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

142. 已知命题: “若 a, b 为异面直线, 平面 α 过直线 a 且与直线 b 平行, 则直线 b 与平面 α 的距离等于异面直线 a, b 之间的距离” 为真命题. 根据上述命题, 若 a, b 为异面直线, 且它们之间的距离为 d , 则空间中与 a, b 均异面且距离也均为 d 的直线 c 的条数为 ().

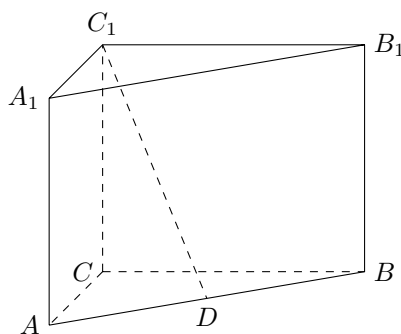
A. 0 条

B. 1 条

C. 多于 1 条, 但为有限条

D. 无数多条

143. 如图, 在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $AB = 2AC = 2$, D 是 AB 的中点.



(1) 若三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 的体积为 $3\sqrt{3}$, 求三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 的高;

(2) 若 $C_1C = 2$, 求二面角 $D - B_1C_1 - A_1$ 的大小.

144. 已知函数 $f(x) = \sqrt{2} \sin(\omega x + \varphi)$, $g(x) = \sqrt{2} \cos \omega x$, $\omega > 0$, $\varphi \in [0, \pi)$, 它们的最小正周期为 π .

(1) 若 $y = f(x)$ 是奇函数, 求 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上的公共递减区间 D ;

(2) 若 $h(x) = f(x) + g(x)$ 的一个零点为 $x = -\frac{\pi}{6}$, 求 $h(x)$ 的最大值.

145. 已知函数 $f(x) = ax + \log_2(2^x + 1)$, 其中 $a \in \mathbf{R}$.

(1) 根据 a 的不同取值, 讨论 $f(x)$ 的奇偶性, 并说明理由;

(2) 已知 $a > 0$, 函数 $f(x)$ 的反函数为 $f^{-1}(x)$, 若函数 $y = f(x) + f^{-1}(x)$ 在区间 $[1, 2]$ 上的最小值为 $1 + \log_2 3$, 求函数 $f(x)$ 在区间 $[1, 2]$ 上的最大值.

146. 设椭圆 $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右焦点为 $F(1, 0)$, 短轴的一个端点 B 到 F 的距离等于焦距. (1) 求椭圆 Γ 的标准方程;

(2) 设 C, D 是四条直线 $x = \pm a, y = \pm b$ 所围成的矩形在第一、第二象限的两个顶点, P 是椭圆 Γ 上任意一点, 若 $\overrightarrow{OP} = m\overrightarrow{OC} + n\overrightarrow{OD}$, 求证: $m^2 + n^2$ 为定值;

(3) 过点 F 的直线 l 与椭圆 Γ 交于不同的两点 M, N , 且满足 $\triangle BFM$ 与 $\triangle BFN$ 的面积比值为 2, 求直线 l 的方程.

147. 定义: 设 $\{a_n\}$ 是无穷数列, 若存在正整数 k 使得对任意 $n \in \mathbf{N}^*$, 均有 $a_{n+k} > a_n (a_{n+k} < a_n)$, 则称 $\{a_n\}$ 是近似递增 (减) 数列, 其中 k 叫近似递增 (减) 数列 $\{a_n\}$ 的间隔数.

(1) 若 $a_n = n + (-1)^n$, $\{a_n\}$ 是不是近似递增数列? 并说明理由;

(2) 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = \frac{1}{(-2)^{n-1}} + a$, 其前 n 项的和为 S_n , 若 2 是近似递增数列 $\{S_n\}$ 的间隔数, 求 a 的取值范围;

(3) 已知 $a_n = -\frac{n}{2} + \sin n$, 证明 $\{a_n\}$ 是近似递减数列, 并且 4 是它的最小间隔数.

148. 在复平面内, 复数 $\frac{2}{1+i}$ 对应的点与原点的距离是_____.

149. 将参数方程 $\begin{cases} x = \cos \theta, \\ y = 2 \sin \theta \end{cases} (\theta \in [0, \pi])$ 化为普通方程, 所得方程是_____.

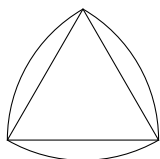
150. 已知向量 $\vec{a} = (1, 4, -5)$, $\vec{b} = (1, 1, 4)$, 则 \vec{a} 在 \vec{b} 方向上的投影是_____.

151. 若函数 $y = \tan 2x \cdot (2 \cos^2 x - 1)$ 的定义域是_____.

152. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_4 + a_8 = 16$, 则该数列前 11 项和 $S_{11} =$ _____.

153. 在 $(\sqrt[3]{x} + \frac{2}{x})^n$ 的二项展开式中, 所有项的系数之和为 81, 则其常数项为_____.

154. 在均匀分布的条件下, 某些概率问题可转化为几何图形的面积比来计算, 勒洛三角形是由德国机械工程专家勒洛首先发现, 作法为: 以等边三角形的每个顶点为圆心, 以边长为半径, 在另两个顶点间作一段弧, 三段弧围成的曲边三角形就是勒洛三角形, 在勒洛三角形中随机取一点, 此点取自正三角形的概率为_____.



155. 平面上整点 (横、纵坐标都为整数的点) 到直线 $y = \frac{5}{3}x + \frac{4}{5}$ 的距离的最小值是_____.

156. 设定义域为 \mathbf{R} 的函数 $f(x)$ 、 $g(x)$ 都有反函数, 且函数 $f(x-1)$ 和 $g^{-1}(x-3)$ 图像关于直线 $y=x$ 对称, 若 $g(5)=2015$, 则 $f(4)=$ _____.

157. 在 $\triangle ABC$ 中, $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sqrt{3}\cos B}{b}$, 如果 $b=2$, 则 $\triangle ABC$ 面积的最大值为_____.

158. 数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=2$, $a_2=7$, a_{n+2} 等于 $a_n \cdot a_{n+1}$ 的个位数, 则 $a_{2019}=$ _____.

159. 已知函数 $f(x)$ 满足: ① 对任意 $x \in (0, +\infty)$ 恒有 $f(2x) = 2f(x)$ 成立; ② $x \in (1, 2]$ 时, $f(x) = 2-x$; 若 $f(a) = f(2020)$, 则满足条件的最小的正实数 a 是_____.

160. 给出下列命题, 其中正确的命题为 ().

- A. 若直线 a 和 b 共面, 直线 b 和 c 共面, 则 a 和 c 共面
- B. 直线 a 与平面 α 不垂直, 则 a 与平面 α 内的所有直线都不垂直
- C. 直线 a 与平面 α 不平行, 则 a 与平面 α 内的所有直线都不平行
- D. 异面直线 a 、 b 不垂直, 则过 a 的任何平面与 b 都不垂直

161. 已知平面向量 \vec{OA} 、 \vec{OB} 、 \vec{OC} 为三个单位向量, 且 $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 0$, 若 $\vec{OC} = x\vec{OA} + y\vec{OB}$ ($x, y \in \mathbf{R}$), 则 $x+y$ 的最大值为 ().

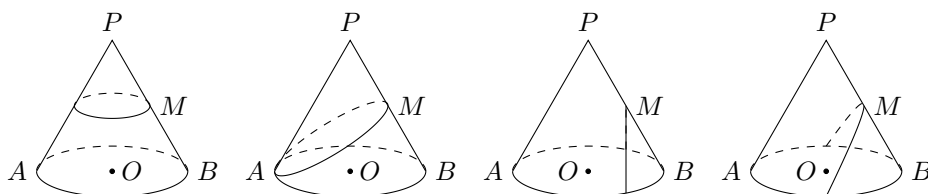
- A. 1
- B. $\sqrt{2}$
- C. $\sqrt{3}$
- D. 2

162. 已知函数① $f(x) = 3\ln x$; ② $f(x) = 3e^{\cos x}$; ③ $f(x) = 3e^x$; ④ $f(x) = 3\cos x$; 其中对于 $f(x)$ 定义域内的任意一个自变量 x_1 都存在唯一一个自变量 x_2 , 使 $\sqrt{f(x_1)f(x_2)} = 3$ 成立的函数是 ().

- A. ③
- B. ②③
- C. ①②④
- D. ④

163. 在圆锥 PO 中, 已知高 $PO=2$, 底面圆的直径 $AB=8$, M 为母线 PB 的中点. 根据圆锥曲线的定义, 下列四个图中的截面边界曲线分别为圆 (截面平行于底面)、椭圆 (椭圆长轴为线段 AM)、双曲线的一部分 (双曲线所在平面垂直于 AB) 及抛物线的一部分 (抛物线对称轴为 MO 所在直线), 下面四个命题:

- ① 圆的面积为 4π ; ② 椭圆的长轴为 $\sqrt{37}$; ③ 双曲线两渐近线的夹角为 $\arcsin \frac{3}{5}$; ④ 抛物线中焦点到准线的距离为 $\frac{8\sqrt{5}}{5}$ 中, 正确的个数为 ().

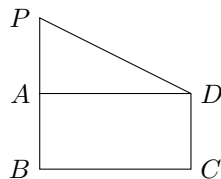


- A. 1 个
- B. 2 个
- C. 3 个
- D. 4 个

164. 已知复数 $z_1 = \sin 2x + \lambda i$, $z_2 = m + (m - \sqrt{3}\cos 2x)i$ ($\lambda, m, x \in \mathbf{R}$), 且 $z_1 = z_2$.

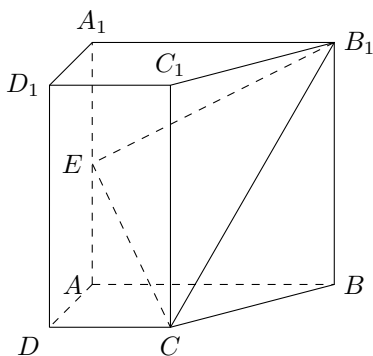
- (1) 若 $\lambda=0$ 且 $0 < x < \pi$, 求 x 的值;
- (2) 设 $\lambda = f(x)$, 求 $f(x)$ 的最小正周期和单调递减区间.

165. 如图, 在直角梯形 $PBCD$ 中, $PB \parallel DC$, $DC \perp BC$, $PB = BC = 2CD = 2$, 点 A 是 PB 的中点, 现沿 AD 将平面 PAD 折起, 设 $\angle PAB = \theta$.



- (1) 当 θ 为直角时, 求异面直线 PC 与 BD 所成角的大小;
 (2) 当 θ 为多少时, 三棱锥 $P-ABD$ 的体积为 $\frac{\sqrt{2}}{6}$.
166. 对于两个定义域相同的函数 $f(x)$ 、 $g(x)$, 若存在实数 m 、 n , 使 $h(x) = mf(x) + ng(x)$, 则称函数 $h(x)$ 是由“基函数 $f(x)$ 、 $g(x)$ ”生成的.
 (1) $f(x) = x^2 + 3x$ 和 $g(x) = 3x + 4$ 生成一个偶函数 $h(x)$, 求 $h(2)$ 的值;
 (2) 若 $h(x) = 2x^2 + 3x - 1$ 由 $f(x) = x^2 + ax$, $g(x) = x + b$ ($a, b \in \mathbf{R}$ 且 $ab \neq 0$) 生成, 求 $a + 2b$ 的取值范围.
167. 设抛物线 $y^2 = 4px$ ($p > 0$) 的准线与 x 轴的交点为 M , 过 M 作直线 l 交抛物线于 A 、 B 两点.
 (1) 求线段 AB 中点的轨迹方程;
 (2) 若线段 AB 的垂直平分线交对称轴于 $N(x_0, 0)$, 求 x_0 的取值范围;
 (3) 若直线 l 的斜率依次取 $p, p^2, p^3, \dots, p^n, \dots$ 时, 线段 AB 的垂直平分线与对称轴的交点依次为 $N_1, N_2, N_3, \dots, N_n, \dots$, 当 $0 < p < 1$ 时, 求: $S = \frac{1}{|N_1 N_2|} + \frac{1}{|N_2 N_3|} + \frac{1}{|N_3 N_4|} + \dots + \frac{1}{|N_n N_{n+1}|} + \dots$ 的值.
168. 给定无穷数列 $\{a_n\}$, 若无穷数列 $\{b_n\}$ 满足: 对任意 $n \in \mathbf{N}^*$, 都有 $|b_n - a_n| \leq 1$, 则称 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ “接近”.
 (1) 设 $\{a_n\}$ 是首项为 1, 公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列, $b_n = a_{n+1} + 1$, $n \in \mathbf{N}^*$, 判断数列 $\{b_n\}$ 是否与 $\{a_n\}$ 接近, 并说明理由;
 (2) 设数列 $\{a_n\}$ 的前四项为: $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 4, a_4 = 8$, $\{b_n\}$ 是一个与 $\{a_n\}$ 接近的数列, 记集合 $M = \{x | x = b_i, i = 1, 2, 3, 4\}$, 求 M 中元素的个数 m 的所有可能值;
 (3) 已知 $\{a_n\}$ 是公差为 d 的等差数列, 若存在数列 $\{b_n\}$ 满足: $\{b_n\}$ 与 $\{a_n\}$ 接近, 且在 $b_2 - b_1, b_3 - b_2, \dots, b_{201} - b_{200}$ 中至少有 100 个为正数, 求 d 的取值范围.
169. 已知集合 $A = \{1, 3, m\}$, $B = \{3, 5\}$, 且 $B \subseteq A$, 则实数 m 的值是_____.
170. 函数 $f(x) = \sqrt{1 - \frac{2}{x}}$ 的定义域是_____.
171. 函数 $y = 2^x (x \geq 2)$ 的反函数是_____.
172. 如果圆锥的底面积为 π , 母线长为 2, 那么该圆锥的高为_____.
173. 二项式 $(\sqrt[3]{x} - \frac{2}{x})^8$ 的展开式中的常数项为_____.
174. 某班从 4 位男生和 3 位女生志愿者选出 4 人参加校运会的点名签到工作, 则选出的志愿者中既有男生又有女生的概率的是_____ (结果用最简分数表示).

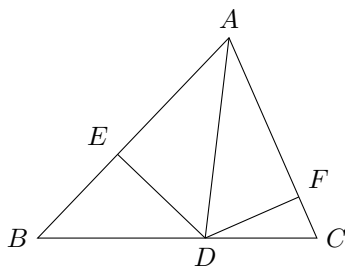
175. 在复平面内, 三点 A 、 B 、 C 分别对应复数 z_A 、 z_B 、 z_C , 若 $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = 1 + \frac{4}{3}i$, 则 $\triangle ABC$ 的三边长之比为_____.
176. 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \frac{\pi}{6})$, $\omega > 0$, 若函数 $f(x)$ 满足 $f(x) = f(x+12)$, $x \in \mathbf{R}$ 恒成立, 且在“任意两个相邻奇数所形成的闭区间”内总存在至少两个零点, 则 ω 的最小值为_____.
177. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A 、 B 、 C 所对的边分别为 a 、 b 、 c , 如果对任意的实数 λ , $|\overrightarrow{BA} - \lambda \overrightarrow{BC}| \geq |\overrightarrow{BC}|$ 恒成立, 则 $\frac{c}{b} + \frac{b}{c}$ 的最大值是_____.
178. 在边长为 1 的正方形 $ABCD$ 中, P 、 Q 分别为边 BC 、 CD 上的动点, 如果 $\triangle PCQ$ 的周长为定值 2, 那么 $\triangle PAQ$ 的外接圆直径的最小值为_____.
179. 已知平面直角坐标系中两点 $A(a_1, a_2)$ 、 $B(b_1, b_2)$, 有 $S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2}|a_1b_2 - a_2b_1|$. 设 (x_1, y_1) 、 (x_2, y_2) 、 (x_3, y_3) 是平面曲线 $x^2 + y^2 = 2x - 4y$ 上任意三点, 则 $T = x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_3 - x_3y_2$ 的最大值为_____.
180. 对实数 $x \in \mathbf{R}$, 函数 $f(x)$ 满足: $f(x+1) = \sqrt{f(x) - f^2(x)} + \frac{1}{2}$, $a_n = f^2(n) - f(n)$, 数列 $\{a_n\}$ 的前 15 项和为 $-\frac{31}{16}$, 数列 $\{c_n\}$ 满足 $c_n + c_{n+1} = [f(2019)]^n$, 若数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 S_n 的极限存在, 则 $c_1 =$ _____.
181. 关于 x 、 y 的二元一次方程组 $\begin{cases} 3x + 4y = 1, \\ x - 3y = 10 \end{cases}$ 的增广矩阵为 ().
- A. $\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & -3 & 10 \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & -3 & -10 \end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & -3 & 10 \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 10 \end{pmatrix}$
182. 已知函数 $f(x) = \cos(3x + \varphi)$ 满足 $f(x) \leq f(1)$ 恒成立, 则 ().
- A. 函数 $f(x-1)$ 一定是奇函数 B. 函数 $f(x+1)$ 一定是奇函数
C. 函数 $f(x-1)$ 一定是偶函数 D. 函数 $f(x+1)$ 一定是偶函数
183. 如果一个几何体绕着一条直线旋转 θ 角与原几何体重合, 其中 $0^\circ < \theta \leq 180^\circ$, 称该直线为该几何体的一条旋转轴. 正四面体的不同旋转轴有 () 条.
- A. 3 B. 4 C. 6 D. 7
184. 已知点 P 为椭圆 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$ 上的任意一点, 点 F_1 、 F_2 分别为该椭圆的上下焦点, 设 $\alpha = \angle PF_1F_2$, $\beta = \angle PF_2F_1$, 则 $\sin \alpha + \sin \beta$ 的最大值为 ().
- A. $\frac{3\sqrt{7}}{7}$ B. $\frac{4\sqrt{7}}{7}$ C. $\frac{8}{9}$ D. $\frac{3}{2}$
185. 如图, 四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 侧棱 $AA_1 \perp$ 底面 $ABCD$, $AB \parallel CD$, $AB \perp AD$, $AD = DC = 1$, $AA_1 = AB = 2$, E 为棱 AA_1 的中点.



(1) 求二面角 $B_1 - CE - C_1$ 的正弦值;

(2) 设点 M 为线段 C_1E 上, 且直线 AM 与平面 ADD_1A_1 所成角正弦值为 $\frac{\sqrt{2}}{6}$, 求线段 AM 的长.

186. 在锐角 $\triangle ABC$ 中, 已知 $\cos A = \frac{5}{13}$, $S_{\triangle ABC} = 6$, 若点 D 是线段 BC 上一点 (不含端点), 过 D 作 $DE \perp AB$ 于 E , $DF \perp AC$ 于 F .



(1) 求 BC 的取值范围;

(2) 问点 D 在何处时, $\triangle DEF$ 的面积最大, 最大值为多少?

187. 已知各项都不为零的无穷数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_{n+1}a_n + a_{n+1} - a_n = 0, n \in \mathbf{N}^*$.

(1) 证明 $\{\frac{1}{a_n}\}$ 为等差数列, 并求 $a_1 = 1$ 时数列 $\{a_n\}$ 中的最大项;

(2) 若 a_{2018} 为数列 $\{a_n\}$ 中的最小项, 求 a_1 的取值范围.

188. 已知曲线 $\Gamma: F(x, y) = 0$, 对坐标平面上任意一点 $P(x, y)$, 定义 $F[P] = F(x, y)$. 若两点 P, Q , 满足 $F[P] \cdot F[Q] > 0$, 称点 P, Q 在曲线 Γ 同侧; 若 $F[P] \cdot F[Q] < 0$, 称点 P, Q 在曲线 Γ 两侧.

(1) 直线 $l: kx - y = 0$ 过原点, 线段 AB 上所有点都在直线 l 同侧, 其中 $A(-1, 1), B(2, 3)$, 求直线 l 的倾斜角的取值范围;

(2) 已知曲线 $F(x, y) = (3x + 4y - 5) \cdot \sqrt{4 - x^2 - y^2} = 0$, O 为坐标原点, 求点集 $S = \{P | F[P] \cdot F[O] > 0\}$ 的面积;

(3) 记到点 $(0, 1)$ 与到 x 轴距离和为 5 的点的轨迹为曲线 C , 曲线 $\Gamma: F(x, y) = x^2 + y^2 - y - a = 0$, 若曲线 C 上总存在两点 M, N 在曲线 Γ 两侧, 求曲线 C 的方程与实数 a 的取值范围.

189. 设函数 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上有定义, 实数 a 和 b 满足 $1 \leq a < b$, 若 $f(x)$ 在区间 $(a, b]$ 上不存在最小值, 则称 $f(x)$ 在区间 $(a, b]$ 上具有性质 P .

(1) 当 $f(x) = x^2 + cx$, 且 $f(x)$ 在区间 $(1, 2]$ 上具有性质 P , 求实数 c 的取值范围;

(2) 已知 $f(x+1) = f(x) + 1 (x \geq 1)$, 且当 $1 \leq x < 2$ 时, $f(x) = 1 - x$, 判别 $f(x)$ 在区间 $(1, 4]$ 上是否具有性质 P ;

(3) 若对于满足 $1 \leq a < b$ 的任意实数 a 和 b , $f(x)$ 在区间 $(a, b]$ 上具有性质 P , 且对于任意 $n \in \mathbf{N}^*$, 当 $x \in (n, n+1)$ 时, 有 $|f(n) - f(x)| + |f(x) - f(n+1)| = |f(n) - f(n+1)|$, 证明: 当 $x \geq 1$ 时, $f(2x) > f(x)$.

190. 已知 $\tan \alpha = \frac{1}{2}$, 则 $\tan 2\alpha =$ _____.

191. 不等式 $\frac{1}{x-1} > 1$ 的解集为_____.

192. 在 $(x - \frac{1}{\sqrt[3]{x}})^6$ 的二项展开式中, x^2 项的系数为_____.

193. 已知球的体积为 $\frac{4}{3}\pi$, 则该球的左视图所表示图形的面积为_____.

194. 已知圆的方程为 $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0$, 则圆心到直线 $l: 3x + 4y + 4 = 0$ 的距离 $d =$ _____.

195. 若关于 x 的实系数一元二次方程 $x^2 - bx + c = 0$ 的一根为 $1 - i$ (i 为虚数单位), 则 $b + c =$ _____.

196. 已知 $m \in \mathbf{R}$, 若直线 $l_1: mx + y + 1 = 0$ 与直线 $l_2: 9x + my + 2m + 3 = 0$ 平行, 则 $m =$ _____.

197. 已知实数 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x + 2y \geq 3, \\ 2x + y \geq 3, \\ x \geq 0, y \geq 0, \end{cases}$ 则 $z = x + y$ 的最小值是_____.

198. 设 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的奇函数, 当 $x > 0$ 时, $f(x) = a^x + b (0 < a < 1, b \in \mathbf{R})$, 若 $f(x)$ 存在反函数, 则 b 的取值范围是_____.

199. 上海某高校哲学专业的 4 名研究生到指定的 4 所高级中学宣讲习近平新时代中国特色社会主义思想. 若他们每人都随机地从 4 所学校选择一所, 则 4 人中至少有 2 人选择到同一所学校的概率是_____ (结果用最简分数表示).

200. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $AB = 1, AC = 2, \angle A = 120^\circ$, 若点 P 是 $\triangle ABC$ 所在平面上一点, 且满足 $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \lambda \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{CP} = -1$, 则实数 λ 的值为_____.

201. 已知定义在 \mathbf{R} 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+1) = 2f(x) + 1$, 当 $x \in [0, 1)$ 时, $f(x) = x^3$. 设 $f(x)$ 在区间 $[n, n+1) (n \in \mathbf{N}^*)$ 上的最小值为 a_n , 若存在 $n \in \mathbf{N}^*$, 使得 $\lambda(a_n + 1) < 2n - 7$ 成立, 则实数 λ 的取值范围是_____.

202. 下列以 t 为参数的参数方程中, 其表示的曲线与方程 $xy = 1$ 表示的曲线完全一致的是 ().

A. $\begin{cases} x = t^{\frac{1}{2}}, \\ y = t^{-\frac{1}{2}} \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = |t|, \\ y = \frac{1}{|t|} \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sec t \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = \tan t, \\ y = \cot t \end{cases}$

203. 已知函数 $f(x) = \sin 2x, x \in [a, b]$, 则 “ $b - a \geq \frac{\pi}{2}$ ” 是 “ $f(x)$ 的值域为 $[-1, 1]$ ” 的 () 条件

A. 充分不必要

B. 必要不充分

C. 充要

D. 既不充分也不必要

204. 某高校举行科普知识竞赛, 所有参赛的 500 名选手成绩的平均数为 82, 方差为 0.82, 则下列四个数据中不可能是参赛选手成绩的是 ().

A. 60

B. 70

C. 80

D. 100

205. 设数列 $\{a_n\}$, 若存在常数 t , 对任意小的正数 s , 总存在正整数 n_0 , 当 $n \geq n_0$ 时, $|a_n - t| < s$, 则数列 $\{a_n\}$ 为收敛数列. 下列关于收敛数列说法正确的是 ().

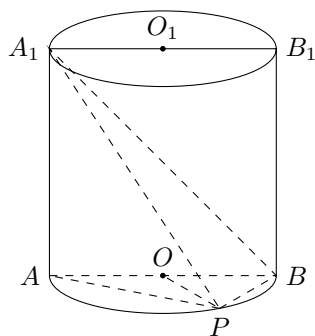
A. 若等比数列 $\{a_n\}$ 是收敛数列, 则公比 $q \in (0, 1)$

B. 等差数列不可能是收敛数列

C. 设公差不为 0 的等差数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和为 $S_n (S_n \neq 0)$, 则数列 $\{\frac{1}{S_n}\}$ 一定是收敛数列

D. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 满足 $a_1 = 1, S_{n+1} = a_n + 1$, 则数列 $\{a_n\}$ 是收敛数列

206. 如图, 已知 AB 为圆柱 OO_1 的底面圆 O 的一条直径, P 为圆周上的一点, $OA = 2, \angle BOP = 60^\circ$, 圆柱 OO_1 的表面积为 24π .



(1) 求三棱锥 $A_1 - APB$ 的体积;

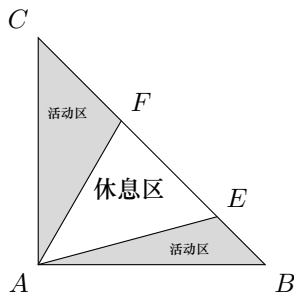
(2) 求直线 AP 与平面 A_1PB 所成的角的大小.

207. 已知 a 为实数, 函数 $f(x) = x|x - a| - a, x \in \mathbf{R}$.

(1) 当 $a = 2$ 时, 求函数 $f(x)$ 的单调递增区间;

(2) 若对任意 $x \in (0, 1), f(x) < 0$ 恒成立, 求 a 的取值范围.

208. 某动物园喜迎虎年的到来, 拟用一块形如直角三角形 ABC 的地块建造小老虎的休息区和活动区. 如图, $\angle BAC = 90^\circ, AB = AC = 20$ (单位: 米), E, F 为 BC 上的两点, 且 $\angle EAF = 45^\circ, \triangle AEF$ 区域为休息区, $\triangle ABE$ 和 $\triangle ACF$ 区域均为活动区. 设 $\angle EAB = \alpha (0 < \alpha < 45^\circ)$.



(1) 求 AE 、 AF 的长; (用 α 的代数式表示) (2) 为了使小老虎能健康成长, 要求所建造的活动区面积尽可能大 (即休息区尽可能小). 当 α 为多少时, 活动区的面积最大? 最大面积活动区为多少?

209. 在平面直角坐标系中, 已知点 $A(0, \sqrt{2})$ 、 $B(0, -\sqrt{2})$, 动点 $C(x, y)$ 关于直线 $y = x$ 的对称点为 D , 且 $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}x^2$, 动点 C 的轨迹为曲线 E .

(1) 求曲线 E 的方程;

(2) 已知动点 P 在曲线 E 上, 点 Q 在直线 $y = 2\sqrt{2}$ 上, 且 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = 0$, 求线段 PQ 长的最小值;

(3) 过点 $(-\sqrt{2}, 0)$ 且不垂直于 x 轴的直线交曲线 E 于 M 、 N 两点, 点 M 关于 x 轴的对称点为 M' , 试问: 在 x 轴上是否存在一定点 T , 使得 M' 、 N 、 T 三点共线? 若存在, 求出定点 T 的坐标; 若不存在, 说明理由.

210. 对于数列 $\{a_n\}$, 记 $V(n) = |a_2 - a_1| + |a_3 - a_2| + \cdots + |a_n - a_{n-1}| (n > 1, n \in \mathbf{N}^*)$.

(1) 若数列 $\{a_n\}$ 通项公式为: $a_n = \frac{1 + (-1)^n}{2} (n \in \mathbf{N}^*)$, 求 $V(5)$;

(2) 若数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1 = a$, $a_n = b$, 且 $a > b$, 求证: $V(n) = a - b$ 的充分必要条件是 $a_{i+1} \leq a_i (i = 1, 2, \cdots, n-1)$;

(3) 已知 $V(2022) = 2022$, 若 $y_t = \frac{1}{t}(a_1 + a_2 + \cdots + a_t)$, $t = 1, 2, \cdots, 2022$, 求 $|y_2 - y_1| + |y_3 - y_2| + \cdots + |y_{2022} - y_{2021}|$ 的最大值.

211. 函数 $f(x) = 3 \cos 2x + 1$ 的最小值为_____.

212. 函数 $f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{3+x}}$ 的定义域为_____.

213. 若集合 $A = \{2, 4, 6, 8\}$, $B = \{x | x^2 - 4x \leq 0\}$, 则 $A \cap B =$ _____.

214. 已知函数 $g(x)$ 的图像与函数 $f(x) = \log_2(3^x - 1)$ 的图像关于直线 $y = x$ 对称, 则 $g(3) =$ _____.

215. 设复数 $z = \begin{vmatrix} \cos \alpha & i \\ \sin \alpha & \sqrt{2} + i \end{vmatrix}$ (i 为虚数单位), 若 $|z| = \sqrt{2}$, 则 $\tan 2\alpha =$ _____.

216. 设 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 若 $b = 2\sqrt{3}$, $c = 8$, $A = 30^\circ$, 则 $\sin C =$ _____.

217. 已知点 $A(3, -2)$, 点 P 满足线性约束条件 $\begin{cases} x + 2 \geq 0, \\ y - 1 \leq 0, \\ x - 2y \leq 4, \end{cases}$ 设 O 为坐标原点, 则 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP}$ 的最大值为_____.

218. 若函数 $f(x) = \log_2(2^x + 1) + kx$ 是偶函数, 则 $k =$ _____.

219. 已知等边 $\triangle ABC$ 的边长为 $2\sqrt{3}$, 点 P 是其外接圆上的一个动点, 则 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ 的取值范围是_____.

220. 已知函数 $f(x) = \cos(2x - \frac{\pi}{6})$, 若对于任意的 $x_1 \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$, 总存在 $x_2 \in [m, n]$, 使得 $f(x_1) + f(x_2) = 0$, 则 $|m - n|$ 的最小值为_____.

221. 已知 AB 为单位圆 O 的一条弦, P 为单位圆 O 上的点, 若 $f(\lambda) = |\overrightarrow{AP} - \lambda \overrightarrow{AB}| (\lambda \in \mathbf{R})$ 的最小值为 m , 当点 P 在单位圆上运动时, m 的最大值为 $\frac{4}{3}$, 则线段 AB 长度为_____.

222. 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 3$, $a_{n+1} = 1 + a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_n$, 记 T_n 为数列 $\{\frac{1}{a_n}\}$ 的前 n 项和, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n =$ _____.

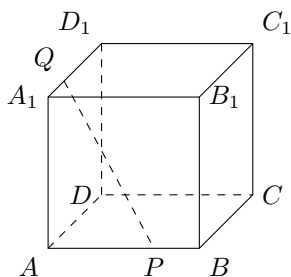
223. 若 O 为坐标原点, P 是直线 $x - y + 2 = 0$ 上的动点, 则 $|OP|$ 的最小值为 ().

- A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B. $\sqrt{2}$ C. $\sqrt{3}$ D. 2

224. 若 $|x - a| \leq 1$ 成立的一个充分不必要条件是 $1 \leq x \leq 2$, 则实数 a 的取值范围是 ().

- A. $1 \leq a \leq 2$ B. $a \geq 1$ C. $a \leq 2$ D. $a \geq 1$ 或 $a \leq 2$

225. 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, P 、 Q 两点分别从点 B 和点 A_1 出发, 以相同的速度在棱 BA 和 A_1D_1 上运动至点 A 和点 D_1 , 在运动过程中, 直线 PQ 与平面 $ABCD$ 所成角 θ 的变化范围为 ().



- A. $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}]$ B. $[\arctan \frac{\sqrt{2}}{2}, \arctan \sqrt{2}]$
C. $[\frac{\pi}{4}, \arctan \sqrt{2}]$ D. $[\arctan \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{2}]$

226. 已知函数 $f(x) = m \cdot 2^x + x^2 + nx$, 记集合 $A = \{x | f(x) = 0, x \in \mathbf{R}\}$, 集合 $B = \{x | f(f(x)) = 0, x \in \mathbf{R}\}$. 若 $A = B$, 且 A 、 B 都不是空集, 则 $m + n$ 的取值范围是 ().

- A. $[0, 4)$ B. $[-1, 4)$ C. $[-3, 5]$ D. $[0, 7)$

227. 已知函数 $f(x) = 2 \cos^2 x + 2\sqrt{3} \sin x \cos x$.

(1) 求 $f(x)$ 的最大值和最小正周期 T ;

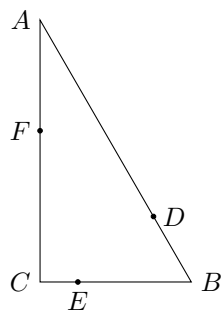
(2) 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A 、 B 、 C 所对的边分别为 a 、 B 、 C , 已知 $f(\frac{A}{2}) = 3$, 且 $a = 1$, 求 $\triangle ABC$ 面积的最大值.

228. 已知函数 $f(x) = a - \frac{4}{3^x + 1}$ (a 为实常数).

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的奇偶性, 并说明理由;

(2) 当 $f(x)$ 为奇函数时, 对任意的 $x \in [1, 5]$, 不等式 $f(x) \geq \frac{u}{3^x}$ 恒成立, 求实数 u 的最大值.

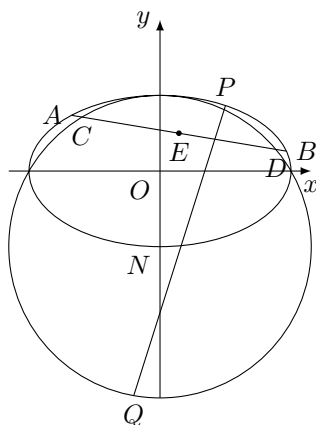
229. 如图, 某公园有三条观光大道 AB 、 BC 、 CA 围成直角三角形, 其中直角边 $BC = 200\text{m}$, 斜边 $AB = 400\text{m}$, 现有甲、乙、丙三位小朋友分别在 AB 、 BC 、 AC 大道上嬉戏, 所在位置分别记为点 D 、 E 、 F .



(1) 若甲乙都以每分钟 100m 的速度从点 B 出发在各自的大道上奔走, 到大道的另一端时即停, 乙比甲迟 2 分钟出发, 当乙出发 1 分钟后, 求此时甲乙两人之间的距离;

(2) 设 $\angle CEF = \theta$, 乙丙之间的距离是甲乙之间距离的 2 倍, 且 $\angle DEF = \frac{\pi}{3}$, 请将甲乙之间的距离 y 表示为 θ 的函数, 并求甲乙之间的最小距离.

230. 如图, 已知椭圆 $M: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 经过圆 $N: x^2 + (y+1)^2 = 4$ 与 x 轴的两个交点和与 y 轴正半轴的交点.



(1) 求椭圆 M 的方程;

(2) 若点 P 为椭圆 M 上的动点, 点 Q 为圆 N 上的动点, 求线段 PQ 长的最大值;

(3) 若不平行于坐标轴的直线 L 交椭圆 M 于 A 、 B 两点, 交圆 N 于 C 、 D 两点, 且满足 $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DB}$, 求证: 线段 AB 的中点 E 在定直线上.

231. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 若存在实常数 λ 及 $a (a \neq 0)$, 对任意 $x \in D$, 当 $x+a \in D$ 且 $x-a \in D$ 时, 都有 $f(x+a) + f(x-a) = \lambda f(x)$ 成立, 则称函数 $f(x)$ 具有性质 $M(\lambda, a)$.

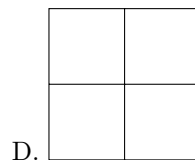
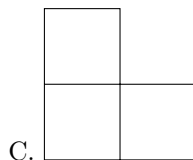
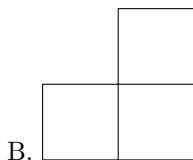
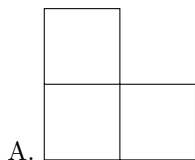
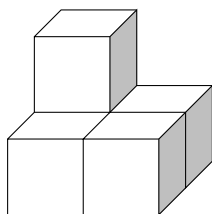
(1) 判断函数 $f(x) = x^2$ 是否具有性质 $M(\lambda, a)$, 并说明理由;

(2) 若函数 $g(x) = \sin 2x + \sin x$ 具有性质 $M(\lambda, a)$, 求 λ 及 a 应满足的条件;

(3) 已知定义域为 \mathbf{R} 的函数 $y = h(x)$ 不存在零点, 且具有性质 $M(t + \frac{1}{t}, t)$ (其中 $t > 0, t \neq 1$), 记 $a_n = h(n) (n \in \mathbf{N}^*)$, 求证: 数列 $\{a_n\}$ 为等比数列的充要条件是 $\frac{a_2}{a_1} = t$ 或 $\frac{a_2}{a_1} = \frac{1}{t}$.

232. 函数 $y = 3 \sin(2x + \frac{\pi}{3})$ 的最小正周期 $T =$ _____.

233. 函数 $y = \lg x$ 的反函数是_____.
234. 已知集合 $P = \{x | (x+1)(x-3) < 0\}$, $Q = \{x | |x| > 2\}$, 则 $P \cap Q =$ _____.
235. 函数 $y = x + \frac{9}{x}$, $x \in (0, +\infty)$ 的最小值是_____.
236. 计算: $\lim_{n \rightarrow \infty} [\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + (\frac{1}{2})^n] =$ _____.
237. 记球 O_1 和 O_2 的半径、体积分别为 r_1 、 V_1 和 r_2 、 V_2 , 若 $\frac{V_1}{V_2} = \frac{8}{27}$, 则 $\frac{r_1}{r_2} =$ _____.
238. 若某线性方程组对应的增广矩阵是 $\begin{pmatrix} m & 4 & 2 \\ 1 & m & m \end{pmatrix}$, 且此方程组有唯一的一组解, 则实数 m 的取值范围是_____.
239. 若一个布袋中有大小、质地相同的三个黑球和两个白球, 从中任取两个球, 则取出的两球中恰是一个白球和一个黑球的概率是_____.
240. $(1+2x)^n$ 的二项展开式中, 含 x^3 项的系数等于含 x 项的系数的 8 倍, 则正整数 $n =$ _____.
241. 平面上三条直线 $x-2y+1=0$, $x-1=0$, $x+ky=0$, 如果这三条直线将平面划分为六个部分, 则实数 k 的取值组成的集合 $A =$ _____.
242. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{8} = 1$, 左、右焦点分别为 F_1 、 F_2 , 过点 F_2 作一直线与双曲线 C 的右支交于 P 、 Q 两点, 使得 $\angle F_1 P Q = 90^\circ$, 则 $\triangle F_1 P Q$ 的内切圆的半径 $r =$ _____.
243. 已知点 $B(4,0)$, $C(2,2)$, 平面直角坐标系上的动点 P 满足 $\overrightarrow{OP} = \lambda \cdot \overrightarrow{OB} + \mu \cdot \overrightarrow{OC}$ (其中 O 是坐标原点, 且 $1 < \lambda \leq a$, $1 < \mu \leq b$), 若动点 P 组成的区域的面积为 8, 则 $a+b$ 的最小值是_____.
244. 若向量 $\vec{a} = (2,0)$, $\vec{b} = (1,1)$, 则下列结论中正确的是 ().
- A. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1$ B. $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ C. $(\vec{a} - \vec{b}) \perp \vec{b}$ D. $\vec{a} \parallel \vec{b}$
245. 椭圆的参数方程为 $\begin{cases} x = 5 \cos \theta, \\ y = 3 \sin \theta \end{cases}$ (θ 为参数), 则它的两个焦点坐标是 ().
- A. $(\pm 4, 0)$ B. $(0, \pm 4)$ C. $(\pm 5, 0)$ D. $(0, \pm 3)$
246. 如图几何体是由五个相同正方体叠成的, 其三视图中的左视图序号是 ().



247. 定义 $F(a, b) = \begin{cases} a, & a \leq b, \\ b, & a > b, \end{cases}$, 已知函数 $f(x)$ 、 $g(x)$ 定义域都是 \mathbf{R} , 给出下列命题:

- (1) 若 $f(x)$ 、 $g(x)$ 都是奇函数, 则函数 $F(f(x), g(x))$ 为奇函数;
- (2) 若 $f(x)$ 、 $g(x)$ 都是减函数, 则函数 $F(f(x), g(x))$ 为减函数;
- (3) 若 $f_{\min}(x) = m$, $g_{\min}(x) = n$, 则 $F_{\min}(f(x), g(x)) = F(m, n)$;
- (4) 若 $f(x)$ 、 $g(x)$ 都是周期函数, 则函数 $F(f(x), g(x))$ 是周期函数.

其中正确命题的个数为 ().

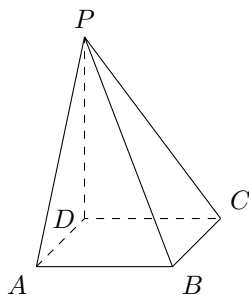
A. 1 个

B. 2 个

C. 3 个

D. 4 个

248. 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是边长为 6 的正方形, $PD \perp$ 平面 $ABCD$, $PD = 8$.

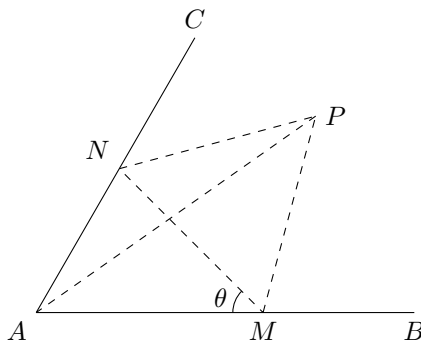


- (1) 求 PB 与平面 $ABCD$ 所成角的大小;
- (2) 求异面直线 PB 与 DC 所成角的大小.

249. 复数 $z = (\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i)^2$ 是一元二次方程 $mx^2 + nx + 1 = 0 (m, n \in \mathbf{R})$ 的一个根.

- (1) 求 m 和 n 的值;
- (2) 若 $(m + ni)\bar{u} + u = z (u \in \mathbf{C})$, 求 u .

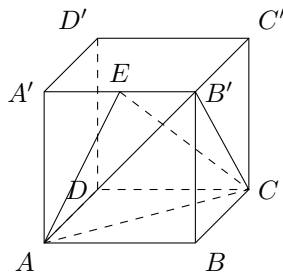
250. 如图, 经过村庄 A 有两条夹角为 60° 的公路 AB 、 AC , 根据规划拟在两条公路之间的区域内建一工厂 P , 分别在两条公路边上建两个仓库 M 、 N (异于村庄 A), 要求 $PM = PN = MN = 2$ (单位: 千米). 记 $\angle MN = \theta$.



- (1) 将 AN 、 AM 用含 θ 的关系式表示出来;
- (2) 如何设计 (即 AN 、 AM 为多长时), 使得工厂产生的噪声对居民的影响最小 (即工厂与村庄的距离 AP 最大)?

251. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 .
- (1) 点 P 在椭圆 C 上运动 (点 P 不在 x 轴上), 设 F_2 关于 $\angle F_1 P F_2$ 的外角平分线所在直线的对称点为 Q , 求 Q 的轨迹方程;
 - (2) 设 M, N 分别是曲线 C 上的两个不同点, 且点 M 在第一象限, 点 N 在第三象限, 若 $\overrightarrow{OM} + 2\overrightarrow{ON} = 2\overrightarrow{OF_1}$, O 为坐标原点, 求直线 MN 的斜率;
 - (3) 过点 $S(0, -\frac{1}{3})$ 的动直线 l 交曲线 C 于 A, B 两点, 在 y 轴上是否存在定点 T , 使以 AB 为直径的圆恒过这个点? 若存在, 求出点 T 的坐标; 若不存在, 请说明理由.
252. 已知无穷数列 $\{a_n\} (a_n \in \mathbf{Z})$ 的前 n 项和为 S_n , 记 S_1, S_2, \dots, S_n 中奇数的个数为 b_n .
- (1) 若 $a_n = n$, 请写出数列 $\{b_n\}$ 的前 5 项;
 - (2) 求证: “ a_1 为奇数, $a_i (i = 2, 3, 4, \dots)$ 均为偶数” 是 “数列 $\{b_n\}$ 是单调递增数列” 的充分不必要条件;
 - (3) 若 $a_i = b_i, i = 1, 2, 3, \dots$, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.
253. 设 $m \in \mathbf{R}$. 已知集合 $A = \{2, 3\}, B = \{1, m\}$. 若 $4 - m \in A$, 则 $m =$ _____.
254. 不等式 $|1 - x| > 1$ 的解集是_____.
255. 设 $a \in \mathbf{R}$. 若 a 使得函数 $f(x) = \sqrt{8 - ax - 2x^2}$ 是偶函数, 则函数 $y = f(x)$ 的定义域是_____.
256. 已知 $\triangle ABC$ 的三内角 A, B, C 所对的边长分别为 a, b, c , 若 $a^2 = b^2 + c^2 + 2bc \sin A$, 则内角 A 的大小是_____.
257. 已知向量 \vec{a} 在向量 \vec{b} 方向上的投影为 -2 , 且 $|\vec{b}| = 3$, 则 $\vec{a} \cdot \vec{b} =$ _____ (结果用数值表示).
258. 方程 $\log_3 \frac{1}{2^x + 4} + \log_3 (4^x - 2) = 0$ 的解 $x =$ _____.
259. 已知函数 $f(x) = \begin{vmatrix} \sin x \cos x \\ \cos x \cos x \end{vmatrix}$, 则函数 $y = f(x)$ 的最小正周期是_____.
260. 已知某市 A 社区 35 岁至 45 岁的居民有 450 人, 46 岁至 55 岁的居民有 750 人, 56 岁至 65 岁的居民有 900 人. 为了解该社区 35 岁至 65 岁居民的身体健康状况, 社区负责人采用分层抽样技术抽取若干人进行体检调查, 若从 46 岁至 55 岁的居民中随机抽取了 50 人, 试问这次抽样调查抽取的人数是_____ 人.
261. 已知 α 是实系数一元二次方程 $x^2 - (2m - 1)x + m^2 + 1 = 0$ 的一个虚数根, 且 $|\alpha| \leq 2$, 则实数 m 的取值范围是_____.
262. 设 $a \in \mathbf{R}$. 若函数 $y = f(x)$ 是奇函数, 且 $x > 0$ 时, $f(x) = a(x - 1) + 1$. 若 $y = f(x)$ 是单调增函数, 则 a 取值范围为_____.
263. 已知数列 $\{a_n\}$ 是共有 k 个项的有限数列, 且满足 $a_{n+1} = a_{n-1} - \frac{n}{a_n} (n = 2, \dots, k-1)$, 若 $a_1 = 24, a_2 = 51, a_k = 0$, 则 $k =$ _____.
264. 设 $\varphi \in (0, \pi)$. 若存在实数 a, b 使得关于 x 的方程 $a \sin(2x + \varphi) + b = 0$ 在 $[0, 2\pi]$ 时恰有 5 个解, 且解的和为 $\frac{63}{11}\pi$, 则 $\varphi =$ _____.

265. 设 $x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}$. 那么 “ $x > 0$ ” 是 “ $xy > 0$ ” 的 ().
- A. 充分非必要条件
B. 必要非充分条件
C. 充要条件
D. 既非充分又非必要条件
266. 在某段时间内, 甲地不下雨的概率为 $P_1 (0 < P_1 < 1)$, 乙地不下雨的概率为 $P_2 (0 < P_2 < 1)$. 若在这段时间内两地下雨相互独立, 则这段时间内两地都下雨的概率为 ().
- A. $P_1 P_2$
B. $1 - P_1 P_2$
C. $P_1 (1 - P_2)$
D. $(1 - P_1)(1 - P_2)$
267. 已知梯形 $ABCD$, $AB \parallel CD$, 设 $\overrightarrow{AB} = \vec{e}_1$, 向量 \vec{e}_2 的起点和终点分别是 A, B, C, D 中的两个点, 若对平面中任意的非零向量 \vec{a} , 都可以唯一表示为 \vec{e}_1, \vec{e}_2 的线性组合, 那么 \vec{e}_2 的个数为 ().
- A. 6
B. 8
C. 10
D. 12
268. 在 $\triangle ABC$ 中, $BC = a, CA = b, AB = c$, 对于下面两个说法: ① 对于任意 $\triangle ABC$, 以 $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}$ 为三边的三角形存在, 且总是一个锐角三角形; ② 存在一个 $\triangle ABC$, 以 $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ 为三边的三角形是一个钝角三角形. 下面判断正确的是 ().
- A. ①正确, ②错误
B. ①错误, ②正确
C. ①正确, ②正确
D. ①错误, ②错误
269. 如图, 在棱长为 2 的正方体 $ABCD - A'B'C'D'$ 中, E 为 AB 的中点.



- (1) 求证: 直线 AE 平行于平面 $CC'D'D$;
- (2) 求点 E 到平面 $AB'C$ 的距离.
270. 经济订货批量模型, 是目前大多数工厂、企业等最常采用的订货方式, 即某种物资在单位时间的需求量为某常数, 经过某段时间后, 存储量消耗下降到零, 此时开始订货并随即到货, 然后开始下一个存储周期. 该模型适用于整批间隔进货、不允许缺货的存储问题. 具体如下:
- 年存储成本费 T (元) 关于每次订货 x (单位: 吨) 的函数关系为 $T(x) = \frac{Bx}{2} + \frac{AC}{x}$, 其中 A 为年需求量, B 为每单位物资的年存储费, C 为每次订货费.
- 某化工厂需用甲醇作为原料, 年需求量为 6000 吨, 每吨存储费为 120 元/年, 每次订货费为 2500 元. (1) 若该化工厂每次订购 300 吨甲醇, 求年存储成本费;
- (2) 每次需订购多少吨甲醇, 可使该化工厂年存储成本费最少? 最少费用为多少?
271. 已知函数 $f(x) = \sin x$.
- (1) 设 $a \in \mathbf{R}$, 判断函数 $g(x) = a \cdot f(x) + f(x + \frac{\pi}{2})$ 的奇偶性, 并说明理由;
- (2) 设函数 $F(x) = 2f(x) - \sqrt{3}$. 对任意 $b \in \mathbf{R}$, 求 $y = F(x)$ 在区间 $[b, b + 100\pi]$ 上零点个数的所有可能值.

272. 双曲线 $\Gamma: x^2 - \frac{y^2}{b^2} = 1 (b > 0)$.

(1) 若 Γ 的一条渐近线方程为 $y = 2x$, 求 Γ 的方程;

(2) 设 F_1, F_2 是 Γ 的两个焦点, P 为 Γ 上一点, 且 $PF_1 \perp PF_2$, $\triangle PF_1F_2$ 的面积为 9, 求 b 的值;

(3) 已知斜率为 2 的直线与 Γ 交于 A, B 两点, 点 M 是线段 AB 的中点, 设点 M 的横坐标的集合为 Ω . 若 $\{x | x = 2n, n \in \mathbf{N}^*\} \subseteq \Omega$, 求正数 b 的取值范围.

273. 已知以 a_1 为首项的数列 $\{a_n\}$ 满足: $|a_{n+1}| = |a_n + 1| (n \in \mathbf{N}^*)$.

(1) 当 $a_1 = -\frac{1}{3}$ 时, 且 $-1 < a_n < 0$, 写出 a_2, a_3 ;

(2) 若数列 $\{|a_n|\} (1 \leq n \leq 10, n \in \mathbf{N}^*)$ 是公差为 -1 的等差数列, 求 a_1 的取值范围;

(3) 设 $a_1 = 0$. 记 S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 给定正整数 $m \geq 4$, 求 S_{m-1} 的最小值, 并证明取到最小值的数列 $\{a_n\}$ 不唯一.

274. 函数 $y = \log_2(x - 2)$ 的定义域为_____.

275. 设圆锥的底面半径为 1, 体积为 $\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi$, 则该圆锥的侧面积为_____.

276. 等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_3 + a_{10} = 25$, 则其前 12 项之和 S_{12} 的值为_____.

277. 幂函数 $y = x^k$ 的图像经过点 $(4, \frac{1}{2})$, 则它的单调减区间为_____.

278. 三角形 ABC 中, $A = 45^\circ, B = 75^\circ$, AB 边的长为 $2\sqrt{6}$, 则 BC 边的长为_____.

279. 已知 a 是实数, 方程 $x^2 + 2x + a = 0$ 的两根在复平面上对应的点分别为 P 和 Q . 若三角形 POQ 是等腰直角三角形, 则 $a =$ _____.

280. 设实数 x, y 满足 $|x| + |y| \leq 1$, 则 $2x + y$ 的最大值为_____.

281. 已知偶函数 $y = f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , 且当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = x - 4$, 则不等式 $xf(x) \leq 5$ 的解为_____.

282. 等比数列 $\{a_n\}$ 的首项为 1, 公比为 3, 则极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 a_2 + a_2 a_3 + \cdots + a_n a_{n+1}}{a_1 + a_2 + \cdots + a_{2n-1}}$ 的值为_____.

283. 甲乙两人分别投掷两颗骰子与一颗骰子, 设甲的两颗骰子的点数分别为 a 与 b , 乙的骰子的点数为 c . 则掷出的点数满足 $|a - b| = c$ 的概率为_____ (用最简分数表示).

284. 已知 a 是实数, 在 $(1 + ax)^8$ 的二项展开式中, 第 $k + 1$ 项的系数为 $c_{k+1} = C_8^k \cdot a^k (k = 0, 1, 2, 3, \cdots, 8)$. 若 $c_1 < c_2 < c_3 < \cdots < c_9$, 则 a 的取值范围为_____.

285. 设 $P_1 P_2 P_3 \cdots P_8$ 是平面直角坐标系中的一个正八边形, 点 P_i 的坐标为 $(x_i, y_i) (i = 1, 2, \cdots, 8)$. 集合 $A = \{y | \text{存在 } i \in \{1, 2, \cdots, 8\}, \text{ 使得 } y = y_i\}$, 则集合 A 的元素个数可能为_____ (写出所有可能的值).

286. 方程 $2 \sin(2x + \frac{\pi}{3}) - 1 = 0$ 在区间 $[0, 4\pi)$ 上的解的个数为 ().

A. 2

B. 4

C. 6

D. 8

287. 已知直线 l 平行于平面 α , 平面 β 垂直于平面 α . 则以下关于直线 l 与平面 β 的位置关系的表述, 正确的是 ().

A. l 与 β 不平行

B. l 与 β 不相交

C. l 不在平面 β 上

D. l 在 β 上, 与 β 平行, 与 β 相交都有可能

288. 设三角形 ABC 是位于平面直角坐标系 xOy 的第一象限中的一个不等边三角形. 该平面上的动点 P 满足: $|PA|^2 + |PB|^2 + |PC|^2 = |OA|^2 + |OB|^2 + |OC|^2$. 已知动点 P 的轨迹是一个圆, 则该圆的圆心位于三角形 ABC 的 ().

A. 内心

B. 外心

C. 重心

D. 垂心

289. 已知 $y = f(x)$ 与 $y = g(x)$ 皆是定义域、值域均为 \mathbf{R} 的函数. 若对任意 $x \in \mathbf{R}$, $f(x) > g(x)$ 恒成立, 且 $y = f(x)$ 与 $y = g(x)$ 的反函数 $y = f^{-1}(x)$ 、 $y = g^{-1}(x)$ 均存在. 命题 P : “对任意 $x \in \mathbf{R}$, $f^{-1}(x) < g^{-1}(x)$ 恒成立”; 命题 Q : “函数 $y = f(x) + g(x)$ 的反函数一定存在”. 以下关于这两个命题的真假判断, 正确的是 ().

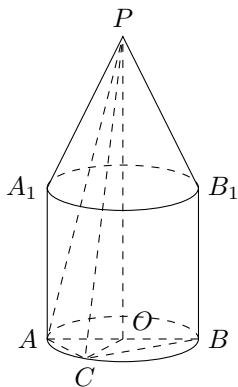
A. 命题 P 真, 命题 Q 真

B. 命题 P 真, 命题 Q 假

C. 命题 P 假, 命题 Q 真

D. 命题 P 假, 命题 Q 假

290. 如图, 空间几何体由两部分构成, 上部是一个底面半径为 1, 高为 2 的圆锥, 下部是一个底面半径为 1, 高为 2 的圆柱. 圆锥和圆柱的轴在同一直线上, 圆锥的下底面与圆柱的上底面重合. 点 P 是圆锥的顶点, AB 是圆柱下底面的一条直径, AA_1 、 BB_1 是圆柱的两条母线. C 是弧 AB 的中点.



(1) 求异面直线 PA_1 与 BC 所成的角的大小;

(2) 求点 B_1 到平面 PAC 的距离.

291. 已知 α, λ 是实常数, $f(x) = \begin{vmatrix} \lambda \cos x \sin(x - \alpha) \\ \sin(x + \alpha) \cos x \end{vmatrix}$.

(1) 当 $\lambda = 1$, $\alpha = \frac{\pi}{3}$ 时, 求函数 $y = f(x)$ 的最小正周期、单调增区间与最大值;

(2) 是否存在 λ , 使得 $f(x)$ 是与 α 有关的常数函数 (即 $f(x)$ 的值与 x 的取值无关)? 若存在, 求出所有满足条件的 λ ; 若不存在, 说明理由.

292. 已知 a 是实常数, $a > 0$, $f(x) = ax - 1 + \frac{1}{x^2}$.

(1) 当 $a = 2$ 时, 判断函数 $y = f(x)$ 在区间 $[1, +\infty)$ 上的单调性, 并说明理由;

(2) 写出一个 a 的值, 使得 $f(x) = 0$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上有至少两个不同的解, 并严格证明你的结论.

293. 设抛物线 Γ 的方程为 $y^2 = 2px$, 其中常数 $p > 0$. F 是抛物线 Γ 的焦点.

(1) 若直线 $x = 3$ 被抛物线 Γ 所截得的弦长为 6, 求 p 的值;

(2) 设 A 是点 F 关于顶点 O 的对称点. P 是抛物线 Γ 上的动点, 求 $\frac{|PA|}{|PF|}$ 的最大值;

(3) 设 $p = 2$, l_1, l_2 是两条互相垂直, 且均经过点 F 的直线. l_1 与抛物线 Γ 交于点 A, B , l_2 与抛物线交于点 C, D . 若点 G 满足 $4\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{FC} + \overrightarrow{FD}$, 求点 G 的轨迹方程.

294. 设各项均为整数的无穷数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1 = 1$, 且对所有 $n \in \mathbb{N}^*$, 均成立 $|a_{n+1} - a_n| = n$.

(1) 写出 a_4 的所有可能值 (不需要写计算过程);

(2) 若 $\{a_{2n-1}\}$ 是公差为 1 的等差数列, 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(3) 证明: 存在满足条件的数列 $\{a_n\}$, 使得在该数列中, 有无穷多项为 2019.