

(000001) 用列举法表示下列集合:

- (1) 十二生肖组成的集合;
- (2) 中国国旗上所有颜色组成的集合.

(000002) 用描述法表示下列集合:

- (1) 平面直角坐标系中第一象限的角平分线上的所有点组成的集合;
- (2) 3 的所有倍数组成的集合.

(000003)(1) 若 $\alpha: x^2 - 5x + 6 = 0$, $\beta: x = 2$, 则 α 是 β 的_____条件; (2) 若 α : 四边形 $ABCD$ 是正方形, β : 四边形 $ABCD$ 的两条对角线互相垂直平分, 则 α 是 β 的_____条件.

(000004) 已知方程 $x^2 + px + 4 = 0$ 的所有解组成的集合为 A , 方程 $x^2 + x + q = 0$ 的所有解组成的集合为 B , 且 $A \cap B = \{4\}$. 求集合 $A \cup B$ 的所有子集.

(000005) 已知集合 $A = (-2, 1)$, $B = (-\infty, -2) \cup [1, +\infty)$. 求: $A \cup B$, $A \cap B$.

(000006) 已知全集 $U = (-\infty, 1) \cup [2, +\infty)$, 集合 $A = (-1, 1) \cup [3, +\infty)$. 求 \bar{A} .

(000007) 已知集合 $A = \{x | x^2 + px + q = 0\}$, $B = \{x | x^2 - x + r = 0\}$, 且 $A \cap B = \{-1\}$, $A \cup B = \{-1, 2\}$. 求实数 p 、 q 、 r 的值.

(000008) 设 a 是实数. 若 $x = 1$ 是 $x > a$ 的一个充分条件, 则 a 的取值范围为_____.

(000009) 已知陈述句 α 是 β 的充分非必要条件. 若集合 $M = \{x | x \text{ 满足 } \alpha\}$, $N = \{x | x \text{ 满足 } \beta\}$, 则 M 与 N 的关系为 ().

- A. $M \subset N$ B. $M \supset N$ C. $M = N$ D. $M \cap N = \emptyset$

(000010) 证明: 若梯形的对角线不相等, 则该梯形不是等腰梯形.

(000011) 若集合 $M = \{a | a = x + \sqrt{2}y, x, y \in \mathbf{Q}\}$, 则下列结论正确的是 ().

- A. $M \subseteq \mathbf{Q}$ B. $M = \mathbf{Q}$ C. $M \supset \mathbf{Q}$ D. $M \subset \mathbf{Q}$

(000012) 若 α 是 β 的必要非充分条件, β 是 γ 的充要条件, γ 是 δ 的必要非充分条件, 则 δ 是 α 的_____条件, γ 是 α 的_____条件.

(000013) 已知全集 $U = \{x | x \text{ 为不大于 } 20 \text{ 的素数}\}$. 若 $A \cap \bar{B} = \{3, 5\}$, $\bar{A} \cap B = \{7, 19\}$, $\overline{A \cup B} = \{2, 17\}$, 则 $A =$ _____, $B =$ _____.

(000014) 已知集合 $P = \{x | -2 \leq x \leq 5\}$, $Q = \{x | x \geq k + 1 \text{ 且 } x \leq 2k - 1\}$, 且 $Q \subseteq P$. 求实数 k 的取值范围.

(000015) 已知全集 $U = \mathbf{R}$, 集合 $A = \{x | x \leq a - 1\}$, $B = \{x | x > a + 2\}$, $C = \{x | x < 0 \text{ 或 } x \geq 4\}$, 且 $\overline{A \cup B} \subseteq C$. 求实数 a 的取值范围.

(000016) 已知集合 $A = \{x | (a - 1)x^2 + 3x - 2 = 0\}$. 是否存在这样的实数 a , 使得集合 A 有且仅有两个子集? 若存在, 求出实数 a 的值及对应的两个子集; 若不存在, 说明理由.

(000017) 证明: $\sqrt[3]{2}$ 是无理数.

(000018) 设 a, b 是正整数. 求证: 若 $ab - 1$ 是 3 的倍数, 则 a 与 b 被 3 除的余数相同.

(000019) 已知非空数集 S 满足: 对任意给定的 $x, y \in S$ (x, y 可以相同), 有 $x + y \in S$ 且 $x - y \in S$.

(1) 哪个数一定是 S 中的元素? 说明理由;

(2) 若 S 是有限集, 求 S ;

(3) 若 S 中最小的正数为 5, 求 S .

(000020) 设一元二次方程 $2x^2 - 6x - 3 = 0$ 的两个实根为 x_1, x_2 , 求下列各式的值:

(1) $(x_1 + 1)(x_2 + 1)$;

(2) $(x_1^2 - 1)(x_2^2 - 1)$.

(000021) 设 $a > b > 0$, 比较 $\frac{b+2a}{a+2b}$ 与 $\frac{a}{b}$ 的值的大小.

(000022) 已知 $x > y$, 求证: $x^3 - y^3 > x^2y - xy^2$.

(000023) 若关于 x 的不等式 $(a+1)x - a < 0$ 的解集为 $(2, +\infty)$, 求实数 a 的值, 并求不等式 $(a-1)x + 3 - a > 0$ 的解集.

(000024) 解下列一元二次不等式:

(1) $-x^2 + 11 < -2x - 4$;

(2) $3x^2 < 13x + 10$;

(3) $6x + 2 \geq 5x^2$;

(4) $x^2 \leq 8(1 - x)$;

(5) $-x^2 \geq 9(9 - 2x)$;

(6) $3(x - 3) \leq x^2$.

(000025) 试写出一个二次项系数为 1 的一元二次不等式, 使它的解集分别为:

(1) $(-\infty, \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$;

(2) $[2 - \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3}]$.

(000026) 求不等式 $5 \leq x^2 - 2x + 2 < 26$ 的所有正整数解.

(000027) 解下列分式不等式:

(1) $\frac{2x+1}{x+7} > -3$;

(2) $\frac{3x}{x^2+2} \geq 1$.

(000028) 设关于 x 的不等式 $a_1x^2 + b_1x + c_1 > 0$ 与 $a_2x^2 + b_2x + c_2 > 0$ 的解集分别为 A 、 B , 试用集合运算表示下列不等式组的解集:

(1)
$$\begin{cases} a_1x^2 + b_1x + c_1 > 0, \\ a_2x^2 + b_2x + c_2 > 0; \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} a_1x^2 + b_1x + c_1 \leq 0, \\ a_2x^2 + b_2x + c_2 > 0; \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} a_1x^2 + b_1x + c_1 \leq 0, \\ a_2x^2 + b_2x + c_2 \leq 0. \end{cases}$$

(000029) 解下列含绝对值的不等式:

(1) $|2x - 1| \leq x$;

(2) $|2x + 1| + |x - 2| < 8$.

(000030) 已知 a, b 是正数, 求证: $\sqrt{(1+a)(1+b)} \geq 1 + \sqrt{ab}$.

(000031) 如图, 在直角三角形 ABC 中, AD 垂直于斜边 BC , 且垂足为 D . 设 BD 及 CD 的长度分别为 a 与 b .

(1) 求斜边上的高 AD 与中线 AE 的长;

(2) 用不等式表示斜边上的高 AD 与中线 AE 长度的大小关系.



(000032) 如图, 已知直角梯形 $ABCD$ 的顶点 $A(a, 0)$ 、 $B(b, 0)$ 位于 x 轴上, 顶点 C, D 落在函数 $y = |x|$ 的图像上, M, N 分别为线段 AB, CD 的中点, O 为坐标原点, Q 为线段 OC 与线段 MN 的交点.

(1) 求中点 M 的坐标, 以及线段 MQ, MN 的长度;

(2) 用不等式表示 MQ, MN 长度的大小关系.



(000033) 已知一元二次方程 $x^2 + px + p = 0$ 的两个实根分别为 α, β , 且 $\alpha^2 + \beta^2 = 3$, 求实数 p 的值.

(000034) 已知一元二次方程 $2x^2 - 4x + m + 3 = 0$ 有两个同号实根, 求实数 m 的取值范围.

(000035) 设 $a, b \in \mathbf{R}$, 已知关于 x 的不等式 $(a+b)x + (b-2a) < 0$ 的解集为 $(1, +\infty)$, 求不等式 $(a-b)x + 3b - a > 0$ 的解集.

(000036) 解下列不等式:

(1) $-2 < \frac{1}{2x+1} \leq 3$;

(2) $2 < |x+1| \leq 3$.

(000037) 已知集合 $A = \{x ||x-a| < 2\}$, $B = \{x | \frac{2x-1}{x+2} < 1\}$, 且 $A \subseteq B$. 求实数 a 的取值范围.

(000038) 证明: 若 $x > -1$, 则 $x + \frac{1}{x+1} \geq 1$, 并指出等号成立的条件.

(000039) 设 a 、 b 为正数, 且 $a+b=2$. 求 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ 的最小值.

(000040) 已知 a 、 b 、 c 都是正数, 求证: $\frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c} \geq 6$.

(000041) 设实数 x 、 y 满足 $|x+y|=1$, 求 xy 的最大值.

(000042) 已知 a 、 b 为实数, 求证: $|a| + |b| \leq |a+b| + |a-b|$, 并指出等号成立的条件.

(000043) 已知 a 、 b 是实数,

(1) 求证: $a^2 + ab + b^2 \geq 0$, 并指出等号成立的条件;

(2) 求证: 如果 $a > b$, 那么 $a^3 > b^3$.

(000044) 解下列不等式:

(1) $\frac{3x-11}{x^2-6x+9} \leq 1$;

(2) $|3-2x| \geq |x+1|$.

(000045) 已知集合 $A = \{x | x^2 - 2x - 3 > 0\}$, $B = \{x | x^2 + px + q \leq 0\}$. 若 $A \cup B = \mathbf{R}$, 且 $A \cap B = [-2, -1)$, 求实数 p 及 q 的值.

(000046) 已知实数 $0 < a < b$, 求证: $a < \frac{2ab}{a+b} < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} < b$.

(000047) 方程 $(x-1)(x-2)(x-3)=0$ 的三个根 1、2、3 将数轴划分为四个区间, 即 $(-\infty, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 3)$, $(3, +\infty)$. 试在这四个区间上分别考察 $(x-1)(x-2)(x-3)$ 的符号, 从而得出不等式 $(x-1)(x-2)(x-3) > 0$ 与 $(x-1)(x-2)(x-3) < 0$ 的解集.

一般地, 对 x_1 、 x_2 、 $x_3 \in \mathbf{R}$, 且 $x_1 \leq x_2 \leq x_3$, 试分别求不等式 $(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) > 0$ 与 $(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) < 0$ 的解集 (提示: x_1 、 x_2 、 x_3 相互之间可能相等, 需要分情况讨论).

(000048) 填空题:

(1) 若 $x^3 = 5$, 则 $x =$ _____ ; 若 $3^x = 5$, 则 $x =$ _____.

(2) 将 $\sqrt[4]{a^3 \sqrt{a}}$ ($a > 0$) 化成有理数指数幂的形式为_____.

(3) 若 $\log_8 x = -\frac{2}{3}$, 则 $x =$ _____.

(4) 若 $\log_a b \cdot \log_5 a = 3$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$), 则 $b =$ _____.

(000049) 选择题:

(1) 若 $\lg a$ 与 $\lg b$ 互为相反数, 则有 ().

- A. $a + b = 0$ B. $ab = 1$ C. $\frac{a}{b} = 1$ D. 以上答案均不对

(2) 设 $a > 0$, 下列计算中正确的是 ().

- A. $a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{3}{2}} = a$ B. $a^{\frac{2}{3}} \div a^{\frac{3}{2}} = a$
C. $a^{-4} \cdot a^4 = 0$ D. $(a^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}} = a$

(000050) 已知 $10^\alpha = 3$, $10^\beta = 4$. 求 $10^{\alpha+\beta}$ 及 $10^{\alpha-\frac{\beta}{2}}$ 的值.

(000051) 求下列各式的值:

- (1) $\frac{1}{4^x+1} + \frac{1}{4^{-x}+1}$;
(2) $4^{\sqrt{2}+1} \times 2^{3-2\sqrt{2}} \times 8^{-\frac{2}{3}}$.

(000052) 已知 $\lg a < 1$, 化简 $\sqrt{\lg^2 a - \lg \frac{a^2}{10}}$.

(000053) 已知 $m = \log_2 10$, 求 $2^m - m \lg 2 - 4$ 的值.

(000054) 填空题:

- (1) 若 $4^x = 2^{-\frac{1}{2}}$, $4^y = \sqrt[3]{32}$, 则 $2x - 3y =$ _____.
(2) 若 $\log_3(\log_4 x) = 1$, 则 $x =$ _____.
(3) 若 $3^a = 7^b = 63$, 则 $\frac{2}{a} + \frac{1}{b}$ 的值为_____.

(000055) 已知 $\log_{18} 9 = a$, $18^b = 5$, 则 $\log_{36} 45$ 等于 ().

- A. $\frac{a+b}{2+a}$ B. $\frac{a+b}{2-a}$ C. $\frac{a+b}{2a}$ D. $\frac{a+b}{a^2}$

(000056) 设 $\log_{0.2} a > 0$, $\log_{0.2} b > 0$, 且 $\log_{0.2} a \cdot \log_{0.2} b = 1$, 求 $\log_{0.2}(ab)$ 的最小值.

(000057) 化简 $\frac{(1+2^x)(1+2^{2x})(1+2^{4x})(1+2^{8x})(1+2^{16x})}{1-2^{32x}}$ (其中 $x \neq 0$).

(000058) 已知 $a > 1$, $b > 0$. 求证: 对任意给定的实数 k , $a^{2b+k} - a^{b+k} > a^{b+k} - a^k$.

(000059) 甲、乙两人同时解关于 x 的方程: $\log_2 x + b + c \log_x 2 = 0$. 甲写错了常数 b , 得两根 $\frac{1}{4}$ 及 $\frac{1}{8}$; 乙写错了常数 c , 得两根 $\frac{1}{2}$ 及 64 . 求这个方程的真正根.

(000060) 已知 a 、 b 及 c 是不为 1 的正数, 且 $\lg a + \lg b + \lg c = 0$. 求证: $a^{\frac{1}{\lg b} + \frac{1}{\lg c}} \cdot b^{\frac{1}{\lg c} + \frac{1}{\lg a}} \cdot c^{\frac{1}{\lg a} + \frac{1}{\lg b}} = \frac{1}{1000}$.

(000061) 填空题:

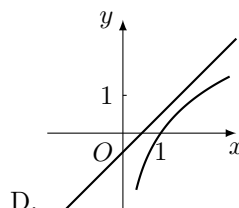
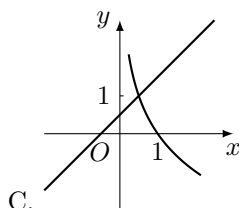
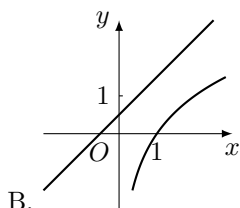
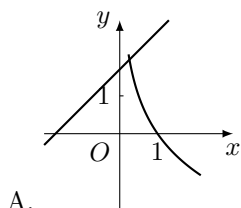
- (1) 若点 $(2, \sqrt{2})$ 在幂函数 $y = x^a$ 的图像上, 则该幂函数的表达式为_____; 若点 $(2, \sqrt{2})$ 在指数函数 $y = a^x$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 的图像上, 则该指数函数的表达式为_____; 若点 $(\sqrt{2}, 2)$ 在对数函数 $y = \log_a x$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 的图像上, 则该对数函数的表达式为_____.
- (2) 若幂函数 $y = x^k$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上是严格减函数, 则实数 k 的取值范围为_____.
- (3) 已知常数 $a > 0$ 且 $a \neq 1$, 假设无论 a 为何值, 函数 $y = a^{x-2} + 1$ 的图像恒经过一个定点. 则这个点的坐标为_____.

(000062) 选择题:

(1) 若指数函数 $y = a^x (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$ 在 \mathbf{R} 上是严格减函数, 则下列不等式中, 一定能成立的是 ().

- A. $a > 1$ B. $a < 0$ C. $a(a-1) < 0$ D. $a(a-1) > 0$

(2) 在同一平面直角坐标系中, 一次函数 $y = x + a$ 与对数函数 $y = \log_a x (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$ 的图像关系可能是 ().



(000063) 求下列函数的定义域:

(1) $y = (x-1)^{\frac{5}{2}};$

(2) $y = 3^{\sqrt{x-1}};$

(3) $y = \lg \frac{1+x}{1-x}.$

(000064) 比较下列各题中两个数的大小:

(1) $0.1^{0.7}$ 与 $0.2^{0.7};$

(2) $0.7^{0.1}$ 与 $0.7^{0.2};$

(3) $\log_{0.7} 0.1$ 与 $\log_{0.7} 0.2.$

(000065) 设点 $(\sqrt{2}, 2)$ 在幂函数 $y_1 = x^a$ 的图像上, 点 $(-2, \frac{1}{4})$ 在幂函数 $y_2 = x^b$ 的图像上. 当 x 取何值时, $y_1 = y_2$?

(000066) 设 $a = (\frac{2}{3})^x$, $b = x^{\frac{3}{2}}$ 及 $c = \log_{\frac{2}{3}} x$, 当 $x > 1$ 时, 试比较 a 、 b 及 c 之间的大小关系.

(000067) 设常数 $a > 0$ 且 $a \neq 1$, 若函数 $y = \log_a(x+1)$ 在区间 $[0, 1]$ 上的最大值为 1, 最小值为 0, 求实数 a 的值.

(000068) 如果光线每通过一块玻璃其强度要减少 10%, 那么至少需要将多少块这样的玻璃重叠起来, 才能使通过它们的光线强度低于原来的 $\frac{1}{3}$?

(000069) 填空题:

(1) 已知 $m \in \mathbf{Z}$, 设幂函数 $y = x^{m^2-4m}$ 的图像关于原点成中心对称, 且与 x 轴及 y 轴均无交点, 则 m 的值为_____.

(2) 设 a 、 b 为常数, 若 $0 < a < 1$, $b < -1$, 则函数 $y = a^x + b$ 的图像必定不经过第_____象限.

(000070) 选择题:

(1) 若 $m > n > 1$, 而 $0 < x < 1$, 则下列不等式正确的是 ().

- A. $m^x < n^x$ B. $x^m < x^n$ C. $\log_x m > \log_x n$ D. $\log_m x < \log_n x$

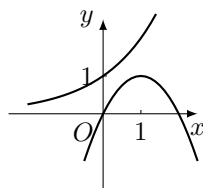
(2) 在同一平面直角坐标系中, 二次函数 $y = ax^2 + bx$ 与指数函数 $y = (\frac{b}{a})^x$ 的图像关系可能为 ().



A.



B.



C.



D.

(000071) 设 a 为常数且 $0 < a < 1$, 若 $y = (\log_a \frac{3}{5})^x$ 在 \mathbf{R} 上是严格增函数, 求实数 a 的取值范围.

(000072) 在同一平面直角坐标系中, 作出函数 $y = (\frac{1}{2})^x$ 及 $y = x^{\frac{1}{2}}$ 的大致图像, 并求方程 $(\frac{1}{2})^x = x^{\frac{1}{2}}$ 的解的个数.

(000073) 已知集合 $A = \{y | y = (\frac{1}{2})^x, x \in [-2, 0)\}$, 用列举法表示集合 $B = \{y | y = \log_3 x, x \in A \text{ 且 } y \in \mathbf{Z}\}$.

(000074) $\log_2 3$ 是有理数吗? 请证明你的结论.

(000075) 仅利用对数函数的单调性和计算器上的乘方功能来确定对数 $\log_2 3$ 第二位小数的值.

(000076) 求函数 $y = \frac{1}{2-x} + \sqrt{x^2-1}$ 的定义域.

(000077) 判断下列函数 $y = f(x)$ 的奇偶性, 并说明理由:

(1) $f(x) = |\frac{1}{2}x - 3| + |\frac{1}{2}x + 3|$;

(2) $f(x) = x^3 + \frac{2}{x}$;

(3) $f(x) = x^2, x \in (k, 2)$ (其中常数 $k < 2$).

(000078) 已知 m, n 是常数, 而函数 $y = (m-1)x^2 + 3x + (2-n)$ 为奇函数. 求 m, n 的值.

(000079) 求函数 $y = x + \frac{4}{x}$ 的单调区间.

(000080) 分别作出下列函数的大致图像, 并指出它们的单调区间:

(1) $y = |x^2 - 4x|$;

(2) $y = 2|x| - 3$.

(000081) 已知二次函数 $y = f(x)$, 其中 $f(x) = ax^2 - 2ax + 3 - a$ ($a > 0$). 比较 $f(-1)$ 和 $f(2)$ 的大小.

(000082) 已知 k 是常数, 设 α, β 是二次方程 $x^2 - 2kx + k + 20 = 0$ 的两个实根. 问: 当 k 为何值时, $(\alpha + 1)^2 + (\beta + 1)^2$ 取到最小值?

(000083) 邮局规定: 当邮件质量不超过 100g 时, 每 20g 邮费 0.8 元, 且不足 20g 时按 20g 计算; 超过 100g 时, 超过 100g 的部分按每 100g 邮费 2 元计算, 且不足 100g 按 100g 计算; 同时规定邮件总质量不得超过 2000g. 请写出邮费关于邮件质量的函数表达式, 并计算 50g 和 500g 的邮件分别收多少邮费.

(000084) 若函数 $y = (a^2 + 4a - 5)x^2 - 4(a - 1)x + 3$ 的图像都在 x 轴上方 (不含 x 轴), 求实数 a 的取值范围.

(000085) 已知 $y = f(x)$ 是奇函数, 其定义域为 \mathbf{R} ; 而 $y = g(x)$ 是偶函数, 其定义域为 D . 判断函数 $y = f(x)g(x)$ 的奇偶性, 并说明理由.

(000086) 设函数 $y = x^2 + 10x - a + 3$, 当 $x \in [-2, +\infty)$ 时, 其函数值恒大于等于零. 求实数 a 的取值范围.

(000087) 已知函数 $y = -x^2 + 2ax + 1 - a$, $x \in [0, 1]$ 的最大值为 2. 求实数 a 的值.

(000088) 设 $f(x) = x^2 + ax + 1$. 若对任意给定的实数 x , $f(2+x) = f(2-x)$ 恒成立, 求实数 a 的值.

(000089) 已知 $y = f(x)$ 是定义在 $(-1, 1)$ 上的奇函数, 在区间 $[0, 1)$ 上是严格减函数, 且 $f(1-a) + f(1-a^2) < 0$, 求实数 a 的取值范围.

(000090) 已知 $f(x) = 2 - x^2$ 及 $g(x) = x$. 定义 $h(x)$ 如下: 当 $f(x) \geq g(x)$ 时, $h(x) = g(x)$; 而当 $f(x) < g(x)$ 时, $h(x) = f(x)$. 求函数 $y = h(x)$ 的最大值.

(000091) 试讨论函数 $y = \frac{x}{1-x^2}$ 的单调性.

(000092) 作出函数 $y = (x^2 - 1)^2 - 1$ 的大致图像, 写出它的单调区间, 并证明你的结论.

(000093) 已知函数 $y = f(x)$ 为偶函数, $y = g(x)$ 为奇函数, 且 $f(x) + g(x) = x^2 + 2|x-1| + 3$. 求 $y = f(x)$ 及 $y = g(x)$ 的表达式.

(000094) 设函数 $y = f(x)$, $x \in \mathbf{R}$ 的反函数是 $y = f^{-1}(x)$.

(1) 如果 $y = f(x)$ 是奇函数, 那么 $y = f^{-1}(x)$ 的奇偶性如何?

(2) 如果 $y = f(x)$ 在定义域上是严格增函数, 那么 $y = f^{-1}(x)$ 的单调性如何?

(000095) 选择题:

(1) 与 $\sin(\theta - \frac{\pi}{2})$ 一定相等的是 ().

A. $\sin(\frac{3\pi}{2} - \theta)$ B. $\cos(\theta - \frac{\pi}{2})$ C. $\cos(2\pi - \theta)$ D. $\sin(\theta + \frac{\pi}{2})$

(2) 当 $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$ 时, 化简 $\sqrt{1 - \sin 2\alpha}$ 的结果是 ().

A. $\cos \alpha$ B. $\sin \alpha - \cos \alpha$ C. $\cos \alpha - \sin \alpha$ D. $\sin \alpha + \cos \alpha$

(000096) 填空题:

(1) 若 θ 为锐角, 则 $\log_{\sin \theta}(1 + \cot^2 \theta) =$ _____;

(2) 若 $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$, 则点 $(\cot \alpha, \cos \alpha)$ 必在第 _____ 象限;

(3) 若 $\sin(\pi - \alpha) = \frac{2}{3}$, $\alpha \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, 则 $\sin 2\alpha =$ _____.

(000097) 已知圆 O 上的一段圆弧长等于该圆的内接正方形的边长, 求这段圆弧所对的圆心角的弧度.

(000098) 已知角 α 的终边经过点 $P(3a, 4a)(a \neq 0)$, 求 $\sin \alpha$ 、 $\cos \alpha$ 和 $\tan \alpha$.

(000099) 化简:

(1) $\frac{\sin(\theta - 5\pi)}{\tan(3\pi - \theta)} \cdot \frac{\cot(\frac{\pi}{2} - \theta)}{\tan(\theta - \frac{3\pi}{2})} \cdot \frac{\cos(8\pi - \theta)}{\sin(-\theta - 4\pi)}$;

(2) $\sin(\theta - \frac{\pi}{4}) + \cos(\theta + \frac{\pi}{4})$.

(000100) 已知 $\tan \alpha = 3$, 求 $\frac{1}{\sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha}$ 的值.

(000101) 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $a = 5, b = 4, A = 2B$. 求 $\cos B$.

(000102) 已知 $\triangle ABC$ 的面积为 S , 求证:

(1) $S = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin(B+C)}$;

(2) $S = \frac{a^2}{2(\cot B + \cot C)}$.

(000103)(1) 已知 $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}, \sin \beta = \frac{\sqrt{10}}{10}$, 且 α 及 β 都是锐角. 求 $\alpha + \beta$ 的值;

(2) 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $\tan A$ 与 $\tan B$ 是方程 $x^2 - 6x + 7 = 0$ 的两个根, 求 $\tan C$.

(000104) 证明: $(\sin \alpha + \sin \beta)^2 + (\cos \alpha + \cos \beta)^2 = 4 \cos^2 \frac{\alpha - \beta}{2}$.

(000105) 选择题:

(1) 若 $0 < x < \frac{\pi}{4}$, 且 $\lg(\sin x + \cos x) = \frac{1}{2}(3 \lg 2 - \lg 5)$, 则 $\cos x - \sin x$ 的值为 ().

A. $\frac{\sqrt{6}}{3}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{10}}{5}$ D. $\frac{\sqrt{5}}{4}$

(2) 下列命题中, 真命题为 ().

A. 若点 $P(a, 2a)(a \neq 0)$ 为角 α 的终边上一点, 则 $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

B. 同时满足 $\sin \alpha = \frac{1}{2}, \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 的角 α 有且只有一个

C. 如果角 α 满足 $-3\pi < \alpha < -\frac{5}{2}\pi$, 那么角 α 是第二象限的角

D. $\tan x = -\sqrt{3}$ 的解集为 $\{x | x = k\pi - \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\}$

(000106) 填空题:

(1) 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $a^2 + b^2 + ab = c^2$, 则 $C =$ _____;

(2) 若 $\sin \theta = a, \cos \theta = -2a$, 且 θ 为第四象限的角, 则实数 $a =$ _____.

(000107) 已知 $\sin \alpha = a \sin \beta, b \cos \alpha = a \cos \beta$, 且 α 及 β 均为锐角, 求证: $\cos \alpha = \sqrt{\frac{a^2 - 1}{b^2 - 1}}$.

(000108) 已知 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2} < \beta < \pi$, 且 $\cos \beta = -\frac{1}{3}, \sin(\alpha + \beta) = \frac{7}{9}$, 求 $\sin \alpha$ 的值.

(000109) 已知 $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}, \pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$, 且 $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}, \cos \beta = -\frac{\sqrt{10}}{10}$. 求 $\alpha - \beta$ 的值.

(000110) 已知 $(1 + \tan \alpha)(1 + \tan \beta) = 2$, 且 α 及 β 都是锐角. 求证: $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$.

(000111) 已知 α 是第二象限的角, 且 $\sin \alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$. 求 $\frac{\sin(\alpha + \frac{\pi}{4})}{1 + \sin 2\alpha + \cos 2\alpha}$ 的值.

(000112) 证明:

(1) $\frac{2(1 + \sin 2\alpha)}{1 + \sin 2\alpha + \cos 2\alpha} = 1 + \tan \alpha$;

(2) $2 \sin \alpha + \sin 2\alpha = \frac{2 \sin^3 \alpha}{1 - \cos \alpha}$.

(000113) 根据下列条件, 分别判断三角形 ABC 的形状:

(1) $\sin C + \sin(B - A) = \sin 2A$;

(2) $\frac{\tan A}{\tan B} = \frac{a^2}{b^2}$.

(000114) 在 $\triangle ABC$ 中, 求证: $\tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{C}{2} \tan \frac{A}{2} = 1$.

(000115)(1) 完成下表 (θ 为弧度数):

θ	1	0.5	0.1	0.01	0.001
$\sin \theta$					
$\frac{\sin \theta}{\theta}$					

(2) 观察上表中的数据, 你能发现什么规律?

(3) 已知 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, 利用图形面积公式证明 $\sin \theta < \theta < \tan \theta$, 并应用该公式说明 (2) 中猜想的合理性.

(000116) 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $A = 30^\circ$, $b = 18$. 分别根据下列条件求 B :

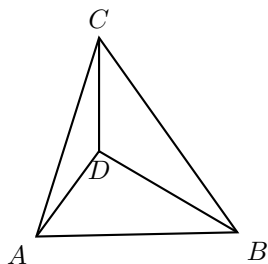
(1) ① $a = 6$, ② $a = 9$, ③ $a = 13$, ④ $a = 18$, ⑤ $a = 22$;

(2) 根据上述计算结果, 讨论使 B 有一解、两解或无解时 a 的取值情况.

(000117)(1) 根据 $\cos 54^\circ = \sin 36^\circ$ 和三倍角公式, 求 $\sin 18^\circ$ 的值;

(2) 你还能使用其他方法求 $\sin 18^\circ$ 的值吗? 若能, 请给出你的求法.

(000118) 如图, 要在 A 和 D 两地之间修建一条笔直的隧道, 现在从 B 地和 C 地测量得到: $\angle DBC = 24.2^\circ$, $\angle DCB = 35.4^\circ$, $\angle DBA = 31.6^\circ$, $\angle DCA = 17.5^\circ$. 试求 $\angle DAB$ 以确定隧道 AD 的方向 (结果精确到 0.1°).



(000119) 求下列函数的最小正周期:

(1) $y = \sin \frac{x}{2}$;

(2) $y = 2 \cos(3x - \frac{\pi}{4})$.

(000120) 判断下列函数的奇偶性, 并说明理由:

(1) $y = \sin |2x|$;

(2) $y = \tan 5x$;

(3) $y = \frac{1}{\cos x}$;

(4) $y = \sin(x + \frac{\pi}{6})$.

(000121) 已知 $2 \sin(2x) = \sqrt{3}$, $x \in (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$. 求 x 的值.

(000122) 求下列函数的单调区间:

(1) $y = -\sin 2x$;

(2) $y = 2\sin(x + \frac{\pi}{3})$;

(3) $y = \cos(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4})$;

(4) $y = 2\tan(2x + \frac{\pi}{4})$.

(000123) 作出函数 $y = 2\sin(2x + \frac{\pi}{3})$ 的大致图像.

(000124) 已知函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0$) 的振幅是 3, 最小正周期是 $\frac{2\pi}{3}$, 初始相位是 $\frac{\pi}{6}$. 求这个函数的表达式.

(000125) 求下列函数的最大值和最小值, 并求出取得最大值和最小值时所有 x 的值:

(1) $y = \cos^2 x + \cos x - 2$;

(2) $y = \sin 2x, x \in [-\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]$;

(3) $y = \sin^2 2x - 2\sin 2x$;

(4) $y = \cos(x - \frac{\pi}{6}), x \in [-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}]$.

(000126) 某实验室一天的温度 y (单位:°C) 随时间 t (单位:h) 的变化近似满足函数关系 $y = 10 - \sqrt{3}\cos\frac{\pi}{12}t - \sin\frac{\pi}{12}t, t \in [0, 24)$.

(1) 求实验室一天中的最大温差;

(2) 若要求实验室温度不高于 11°C , 则在哪段时间实验室需要降温?

(000127) 求函数 $y = \sin(2x - \frac{\pi}{4}) - 2\sqrt{2}\sin^2 x$ 的最小正周期.

(000128) 在 $(0, 2\pi)$ 内, 求使 $\sin x > \cos x$ 成立的 x 的取值范围.

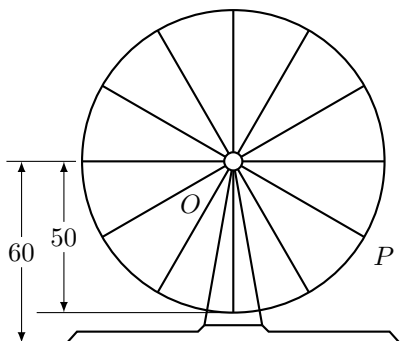
(000129) 求下列函数的最大值, 并求出取得最大值时所有 x 的值:

(1) $y = 2\sin^2 x + \sin 2x - 1$;

(2) $y = 1 - \sin x - 2\cos^2 x, x \in [\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}]$.

(000130) 若函数 $y = 2\sin\omega x$ (其中常数 ω 是小于 1 的正数) 在区间 $[0, \frac{\pi}{3}]$ 上的最大值是 $\sqrt{2}$, 求 ω 的值.

(000131) 如图, 摩天轮上一点 P 距离地面的高度 y 关于时间 t 的函数表达式为 $y = A\sin(\omega t + \varphi) + b, \varphi \in [-\pi, \pi]$. 已知摩天轮的半径为 50m, 其中心点 O 距地面 60m, 摩天轮以每 30 分钟转一圈的方式做匀速转动, 而点 P 的起始位置在摩天轮的最低点处.



- (1) 根据条件具体写出 $y(\text{m})$ 关于 $t(\text{min})$ 的函数表达式;
- (2) 在摩天轮转动的一圈内, 点 P 有多长时间距离地面超过 85m?

(000132) 说明: 用上一章 6.3 节给出的记号 \arcsin 与 \arccos (见必修第二册教材第 45 页), 可以定义函数 $y = \arcsin x$ ($x \in [0, 1]$) 与 $y = \arccos x$ ($x \in [0, 1]$).

验证:

- (1) 函数 $y = \sin x$ ($x \in [0, \frac{\pi}{2}]$) 与函数 $y = \arcsin x$ ($x \in [0, 1]$) 互为反函数;
- (2) 函数 $y = \cos x$ ($x \in [0, \frac{\pi}{2}]$) 与函数 $y = \arccos x$ ($x \in [0, 1]$) 互为反函数.

(000133) 把上题的记号略作推广: 对实数 $x \in [-1, 1]$, 若实数 $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 使得 $\sin y = x$, 则记 $y = \arcsin x$; 类似地, 对实数 $x \in [-1, 1]$, 若实数 $y \in [0, \pi]$ 使得 $\cos y = x$, 则记 $y = \arccos x$. 说明: 经过推广的记号 \arcsin 与 \arccos , 定义了函数 $y = \arcsin x$ ($x \in [-1, 1]$) 与 $y = \arccos x$ ($x \in [-1, 1]$).

- 验证: (1) 函数 $y = \sin x$ ($x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$) 与函数 $y = \arcsin x$ ($x \in [-1, 1]$) 互为反函数;
- (2) 函数 $y = \cos x$ ($x \in [0, \pi]$) 与函数 $y = \arccos x$ ($x \in [-1, 1]$) 互为反函数.

(000134) 对 $y = \tan x$ 与 $y = \arctan x$ 做类似的工作.

(000135) 定义在区间 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上的函数 $y = 6 \cos x$ 的图像与 $y = 5 \tan x$ 的图像的交点为 P , 过点 P 作垂直于 x 轴的垂线 PP_1 , 其垂足为 P_1 . 设直线 PP_1 与 $y = \sin x$ 的图像交于点 P_2 , 求线段 P_1P_2 的长.

(000136) 已知定义在 \mathbf{R} 上的偶函数 $y = f(x)$ 的最小正周期为 2, 当 $0 \leq x \leq 1$ 时, $f(x) = x$.

- (1) 求当 $5 \leq x \leq 6$ 时函数 $y = f(x)$ 的表达式;
- (2) 若函数 $y = kx$, $x \in \mathbf{R}$ 与函数 $y = f(x)$ 的图像恰有 7 个不同的交点, 求 k 的值.

(000137) 如图, 有一块边长为 3m 的正方形铁皮 $ABCD$, 其中阴影部分 ATN 是一个半径为 2m 的扇形. 设这个扇形已经腐蚀不能使用, 但其余部分均完好. 工人师傅想在未被腐蚀的部分截下一块其边落在 BC 与 CD 上的矩形铁皮 $PQCR$, 使点 P 在弧 TN 上. 设 $\angle TAP = \theta$, 矩形 $PQCR$ 的面积为 $S\text{m}^2$.



- (1) 求 S 关于 θ 的函数表达式;
- (2) 求 S 的最大值及 S 取得最大值时 θ 的值.

(000138) 如图, 在边长为 1 的小正方形组成的网格上, 求:



(1) $|\overrightarrow{AB}|$;

(2) $|\overrightarrow{CD}|$;

(3) $|\overrightarrow{EF}|$.

(000139) 已知 \vec{a} 、 \vec{b} 均为非零向量, 写出 $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$ 成立的充要条件.

(000140) 已知 \vec{a} 、 \vec{b} 为非零向量, 且 \vec{a} 、 \vec{b} 、 $5\vec{a} - 4\vec{b}$ 在同一起点上. 求证: 它们的终点在同一条直线上.

(000141) 在矩形 $ABCD$ 中, 边 AB 、 AD 的长分别为 2、1, 若 M 、 N 分别是边 BC 、 CD 上的点, 且满足 $\frac{|\overrightarrow{BM}|}{|\overrightarrow{BC}|} = \frac{|\overrightarrow{CN}|}{|\overrightarrow{CD}|}$, 则 $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN}$ 的取值范围是_____.

(000142) 已知两个向量 \vec{e}_1 、 \vec{e}_2 满足 $|\vec{e}_1| = 2$, $|\vec{e}_2| = 1$, $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle = 60^\circ$, 且向量 $2\lambda\vec{e}_1 + 7\vec{e}_2$ 与向量 $\vec{e}_1 + \lambda\vec{e}_2$ 的夹角为钝角. 求实数 λ 的取值范围.

(000143) 已知向量 $\vec{a} = (1, 0)$, $\vec{b} = (2, 1)$.

(1) 求 $|\vec{a} + 3\vec{b}|$;

(2) 当 k 为何实数时, $k\vec{a} - \vec{b}$ 与 $\vec{a} + 3\vec{b}$ 平行? 平行时它们是同向还是反向?

(000144) 已知在平面直角坐标系中, O 为原点, 点 $A(4, -3)$, $B(-5, 12)$.

(1) 求向量 \overrightarrow{AB} 的坐标及 $|\overrightarrow{AB}|$;

(2) 已知向量 $\overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} - 3\overrightarrow{OB}$, 求 \overrightarrow{OC} 及 \overrightarrow{OD} 的坐标;

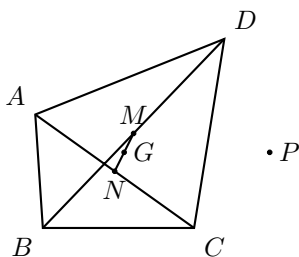
(3) 求 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$.

(000145) 已知向量 $\vec{a} = (3, -2)$, $\vec{b} = (-2, 1)$, $\vec{c} = (7, -4)$, 求 λ, μ , 使得 $\vec{c} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$.

(000146) 已知点 $M(3, -2)$ 、 $N(-5, -1)$, 且 $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{MN}$. 求点 P 的坐标.

(000147) 在等腰三角形 ABC 中, 已知 D 为底边 BC 的中点. 求证: $AD \perp BC$.

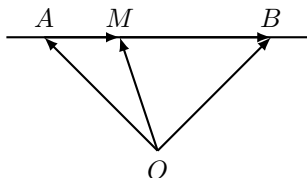
(000148) 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, G 为对角线 AC 与 BD 中点连线 MN 的中点, P 为平面上任意给定的点. 求证: $4\overrightarrow{PG} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD}$.



(000149) 在四边形 $ABCD$ 中, 向量 $\overrightarrow{AB} = \vec{i} + 2\vec{j}$, $\overrightarrow{BC} = -4\vec{i} - \vec{j}$, $\overrightarrow{CD} = -5\vec{i} - 3\vec{j}$. 求证: $ABCD$ 为梯形.

(000150) 已知 \vec{a} 、 \vec{b} 、 \vec{c} 均为非零向量, 其中的任意两个向量都不平行, 且 $\vec{a} + \vec{b}$ 与 \vec{c} 是平行向量, $\vec{a} + \vec{c}$ 与 \vec{b} 是平行向量. 求证: $\vec{b} + \vec{c}$ 与 \vec{a} 是平行向量.

(000151) 如图, 点 A 、 M 、 B 在同一条直线上, 点 O 不在该直线上, 且 $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$. 设 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OM} = \vec{c}$, 试用向量 \vec{a} 、 \vec{b} 表示 \vec{c} .

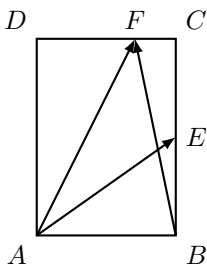


(000152) 设平面上有两个向量 $\vec{a} = (\cos \alpha, \sin \alpha)$ ($0^\circ \leq \alpha < 360^\circ$), $\vec{b} = (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$.

(1) 求证: 向量 $\vec{a} + \vec{b}$ 与 $\vec{a} - \vec{b}$ 垂直;

(2) 当向量 $\sqrt{3}\vec{a} + \vec{b}$ 与 $\vec{a} - \sqrt{3}\vec{b}$ 的模相等时, 求 α 的大小.

(000153) 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, $AB = \sqrt{2}$, $BC = 2$, E 为 BC 的中点, 点 F 在边 CD 上且 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AF} = \sqrt{2}$. 求 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BF}$ 的值.

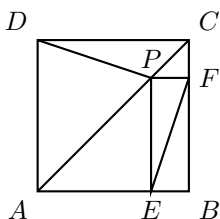


(000154) 已知等边三角形 ABC 的边长为 1, $\overrightarrow{BC} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CA} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{c}$. 求 $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}$.

(000155) 已知向量 $\overrightarrow{OA} = (k, 12)$, $\overrightarrow{OB} = (4, 5)$, $\overrightarrow{OC} = (-k, 10)$, 且 A 、 B 、 C 三点共线. 求实数 k 的值.

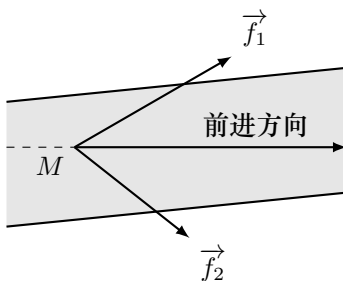
(000156) 已知向量 $\overrightarrow{OA} = (1, 7)$, $\overrightarrow{OB} = (5, 1)$, $\overrightarrow{OP} = (2, 1)$, K 为直线 OP 上的一个动点, 当 $\overrightarrow{KA} \cdot \overrightarrow{KB}$ 取最小值时, 求向量 \overrightarrow{OK} 的坐标.

(000157) 如图, 在正方形 $ABCD$ 中, P 是对角线 AC 上一点, PE 垂直 AB 于点 E , PF 垂直 BC 于点 F . 求证: $PD \perp EF$.



(000158) 证明: 三角形的三条高相交于一点.

(000159) 如图, 甲、乙分处河的两岸, 欲拉船 M 逆流而上, 需在正前方有 3000N 的力. 已知甲所用的力 \vec{f}_1 的大小为 2000N , 且与 M 的前进方向的夹角为 $\frac{\pi}{6}$, 求乙所用的力 \vec{f}_2 .



(000160) 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC = 5$, $BC = 6$, M 是边 AC 上靠近 A 的一个三等分点. 问: 在线段 BM 上是否存在点 P , 使得 $PC \perp BM$?

(000161) 在 $\triangle ABC$ 中, 已知点 O 、 G 、 H 分别是三角形的外心、重心和垂心. 求证: O 、 G 、 H 三点共线 (此直线称为欧拉线).

(000162) 选择题:

(1) 虚数的平方一定是 ().

- A. 正实数 B. 负实数 C. 虚数 D. 虚数或负实数

(2) 如果复平面上的向量 \overrightarrow{AB} 所对应的复数是 $-3 + 2i$, 那么向量 \overrightarrow{BA} 所对应的复数是 ().

- A. $3 - 2i$ B. $3 + 2i$ C. $-3 + 2i$ D. $-3 - 2i$

(000163) 填空题:

(1) 设 $z = 11 - 60i$, 则 $\operatorname{Re} z =$ _____; $\operatorname{Im} z =$ _____; $|z| =$ _____; $\bar{z} =$ _____.

(2) 下列三个命题中, 真命题是_____.

① 在复平面上, 表示实数的点都在实轴上, 表示虚数的点都在虚轴上;

② 任何一个表示虚数的点一定在某一个象限内;

③ 复数的模表示该复数在复平面上所对应的点到原点的距离.

(000164) 已知复数 $z = (a^2 - 2a - 3) + (a^2 - 4a + 3)i$, 其中 a 是实数.

(1) 若 $z \in \mathbf{R}$, 求 a 的值;

(2) 若 z 在复平面上所对应的点位于第一象限, 求 a 的取值范围.

(000165) 已知复数 $z_1 = (a^2 - a - 6) + (1 - 2a)i$, $z_2 = (a - 3) + (a^2 - 2a + 2)i$, 其中 $a \in \mathbf{R}$. 若 $\bar{z}_1 = z_2$, 求 a 的值.

(000166) 计算:

(1) $(4 + i)(3 + 2i)$;

(2) $(\sqrt{2} + \sqrt{3}i)(\sqrt{2} - \sqrt{3}i)(-\sqrt{3} + \sqrt{2}i)(-\sqrt{3} - \sqrt{2}i)$;

(3) $\frac{-3+29i}{1+2i}$;

(4) $\frac{(1+i)^4}{1+2i} + \frac{(1-i)^4}{1-2i}$;

(5) $[(\sqrt{3}+1) + (\sqrt{3}-1)i]^2$.

(000167) 已知复数 $z = \frac{(-3-i)^2(2-i)}{(1+2i)^3}$, 求 $|z|$.

(000168) 在复数范围内解下列方程:

(1) $x^2 - 4x + 8 = 0$;

(2) $3x^2 + 2x - 3 = 0$.

(000169) 选择题:

(1) 设 $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$, 则 “ $|z_1| = |z_2|$ ” 是 “ $z_1 = z_2$ ” 的 ().

A. 充分非必要条件

B. 必要非充分条件

C. 充要条件

D. 既非充分也非必要条件

(2) 设复数 $z = a + bi (a, b \in \mathbf{R})$, 则 z^2 是纯虚数的充要条件是 ().

A. $a^2 = b^2$

B. $a^2 + b^2 = 0$

C. $|a| = |b| \neq 0$

D. $ab \neq 0$

(000170) 若复数 z 满足 $z + \bar{z} = 2, (z - \bar{z})i = 2$, 求 $|z|$.

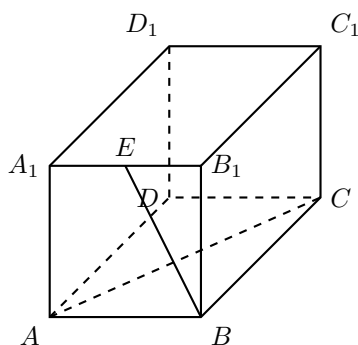
(000171) 若复数 z_1 和复数 z_2 满足 $z_1 z_2 = 3 - 4i, |z_1| = 2$, 求 $|z_2|$.

(000172) 若 x_1 和 x_2 是方程 $x^2 - 5x + 8 = 0$ 的两个根, 求 $|x_1| + |x_2|$ 的值.

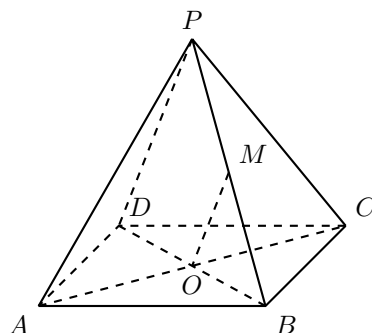
(000173) 若复数 z_1 和复数 z_2 满足 $|z_1| = 3, |z_2| = 4, |z_1 + z_2| = 5$, 求 $|z_1 - z_2|$.

(000174) 已知复数 z_1 和复数 z_2 满足 $z_1 + z_2 = 3 - 5i, \bar{z}_1 - \bar{z}_2 = -2 + 3i$. 求 $z_1^2 - z_2^2$.

(000175) 如图, 在长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, E 为 A_1B_1 的中点, $AB = BB_1 = 2, AC = 2\sqrt{5}$. 求异面直线 BE 与 AC 所成角的大小.

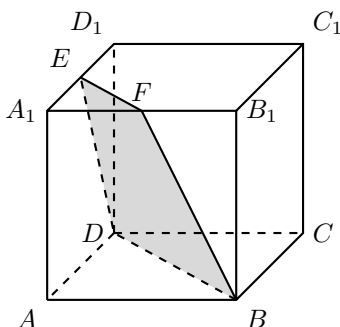


(000176) 如图, 设 P 为矩形 $ABCD$ 所在平面外的一点, 矩形对角线的交点为 O , M 为 PB 的中点. 判断下列结论是否正确, 并说明理由:



- (1) $OM \parallel PD$;
- (2) $OM \parallel \text{平面} PCD$;
- (3) $OM \parallel \text{平面} PDA$;
- (4) $OM \parallel \text{平面} PBA$;
- (5) $OM \parallel \text{平面} PBC$.

(000177) 如图, 正方体的棱长是 a , 点 E 、 F 分别是两条棱的中点.



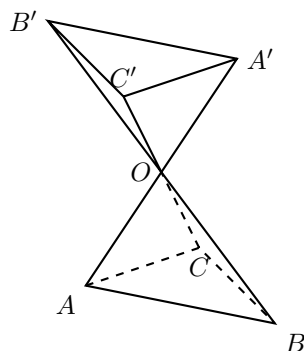
- (1) 求证: 四边形 $BDEF$ (图中阴影部分) 是一个梯形;
- (2) 求四边形 $BDEF$ 的面积.

(000178) 判断下列命题的真假, 并说明理由:

- (1) 若直线 l 与平面 M 斜交, 则 M 内不存在与 l 垂直的直线;
- (2) 若直线 $l \perp \text{平面} M$, 则 M 内不存在与 l 不垂直的直线;
- (3) 若直线 l 与平面 M 斜交, 则 M 内不存在与 l 平行的直线;
- (4) 若直线 $l \parallel \text{平面} M$, 则 M 内不存在与 l 不平行的直线.

(000179) 如果不在平面上的一条直线上有两点到这个平面的距离相等, 那么这条直线和这个平面有什么位置关系? 画示意图表示.

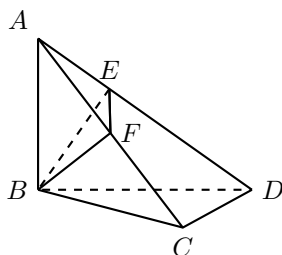
(000180) 如图, 直线 AA' 、 BB' 、 CC' 相交于点 O , 且 $AO = A'O$, $BO = B'O$, $CO = C'O$. 求证: 平面 $ABC \parallel \text{平面} A'B'C'$.



(000181) 已知直线 $l \perp$ 平面 α , 直线 $m \subset$ 平面 β , 判断下列命题的真假, 并说明理由:

- (1) 若 $\alpha \parallel \beta$, 则 $l \perp m$;
- (2) 若 $\alpha \perp \beta$, 则 $l \parallel m$;
- (3) 若 $l \parallel m$, 则 $\alpha \perp \beta$;
- (4) 若 $l \perp m$, 则 $\alpha \parallel \beta$.

(000182) 如图, 已知线段 AB 垂直于三角形 BCD 所在的平面, 且 $AB = BC = CD = 1$, $\angle BCD = 90^\circ$. $BE \perp AD$, E 为垂足, F 为 AC 的中点. 求 EF 的长.



(000183) 设正六边形 $ABCDEF$ 的边长为 a , 线段 PA 垂直于正六边形所在的平面, 且 $PA = 2a$. 分别求点 P 到 CD 、 DE 与 BC 所在直线的距离.

(000184) 已知直线 a 、 b 和平面 α 、 β , 判断下列命题的真假, 并说明理由:

- (1) 若 $a \parallel \alpha$, $b \perp a$, 则 $b \perp \alpha$;
- (2) 若 $a \parallel \alpha$, $\alpha \perp \beta$, 则 $a \perp \beta$;
- (3) 若 $a \parallel b$, $b \subset \alpha$, 则 $a \parallel \alpha$.

(000185) 证明: 如果平面 α 和不在这个平面上的直线 a 都垂直于平面 β , 那么直线 a 必平行于平面 α .

(000186) 三个平面两两相交, 得到三条交线. 求证: 这三条交线交于一点或两两平行.

(000187) 如图, 已知 $\triangle ABC$ 是正三角形, EA 、 CD 都垂直于平面 ABC , 且 $EA = AB = 2a$, $DC = a$, F 是 BE 的中点.

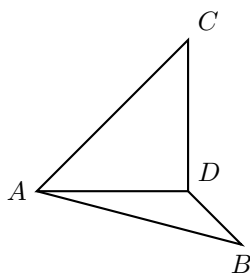


(1) 求证: $FD \parallel$ 平面 ABC ;

(2) 求证: $AF \perp$ 平面 EDB .

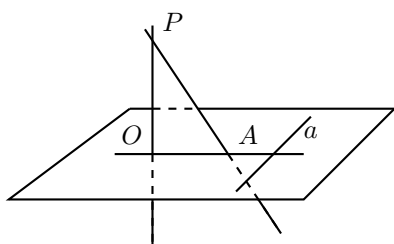
(000188) 证明: 如果一个平面的一条平行线垂直于另一个平面, 那么这两个平面互相垂直.

(000189) 如图, 以等腰直角三角形 ABC 斜边 BC 上的高 AD 为折痕, 使 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACD$ 折成互相垂直的两个面. 求证: $BD \perp CD$, 且 $\angle BAC = 60^\circ$.



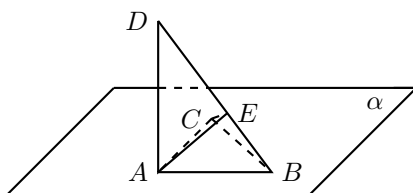
(000190) 证明: 如果共点的三条直线两两垂直, 那么它们中每两条直线所确定的平面也两两垂直.

(000191) 如图, P 是平面 α 外一点, 直线 PA 与平面 α 斜交于点 A , 从点 P 作平面 α 上的一条直线 OA 的垂线 PO , 垂足为 O . 又设 a 是平面 α 上的一条直线, 且 $a \perp OA$, $a \perp PA$.



求证: $PO \perp$ 平面 α , 从而 OA 是 PA 在平面 α 上的投影.

(000192) 如图, 直角三角形 ABC 在平面 α 上, 且 $\angle BAC = 90^\circ$. 以 A 为垂足作 $DA \perp \alpha$, 在 DB 上取一点 E , 使 $AE \perp DB$. 求证: $CE \perp DB$.



(000193) 设平面 α 与平面 β 平行, $A \in \alpha$, $B \in \beta$, C 是 AB 的中点. 当 A 、 B 分别在 α 、 β 上运动时, 所有的动点 C 是否保持在同一个平面上? 证明你的结论.

(000194) 在长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 如果对角线 AC_1 与过点 A 的相邻三个面所成的角分别为 α 、 β 、 γ , 那么 $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma =$ _____.



(000195) 如图, 该几何体是由哪个平面图形旋转得到的? 画出其余平面图形旋转得到的几何体.



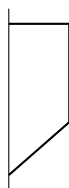
A.



B.



C.



D.



(000196) 判断下列命题是否正确, 并说明理由:

- (1) 以直角三角形的一直角边为轴旋转所形成的旋转体是圆锥;
- (2) 以直角梯形的一腰为轴旋转所形成的旋转体是圆台;
- (3) 圆柱、圆锥、圆台都有两个底面;
- (4) 圆锥的侧面展开图为扇形, 这个扇形所在圆的半径等于圆锥底面圆的半径.

(000197) 已知一个圆锥的侧面展开图恰是一个半圆. 用通过圆锥的轴的平面截此圆锥, 求截面三角形的顶角.

(000198) 过圆锥高的三等分点分别作平行于底面的截面, 求它们把圆锥侧面分成的三部分的面积之比.

(000199) 在棱长为 1 的正方体上, 用过同一顶点的三条棱中点的平面分别截该正方体, 截去 8 个三棱锥. 求剩下的几何体的体积.

(000200) 已知长方体一个顶点上的三条棱长分别是 3、4、5, 且它的 8 个顶点都在同一球面上. 求这个球的表面积.

(000201) 在等边圆柱 (底面直径等于高的圆柱)、球、正方体的体积相等的情况下, 讨论它们的表面积的大小关系.

(000202) 如图, 在三棱柱的侧棱 A_1A 和 B_1B 上分别取 P 、 Q 两点, 使 PQ 平分侧面 ABB_1A_1 的面积. 求平面 PQC 把棱柱所分成的两部分的体积之比.



(000203) 已知用通过圆锥的轴的平面去截一个圆锥, 得到的截面是面积为 $9\sqrt{3}\text{cm}^2$ 的正三角形. 求此圆锥内接球的半径.

(000204) 若一个长方体长、宽、高之比为 $2:1:3$, 表面积为 22 , 求它的体积.

(000205) 如果两个球的体积之比为 $8:27$, 求这两个球的表面积之比.

(000206) 设点 O_1 为圆锥的高靠近顶点的三等分点, 求过 O_1 与底面平行的截面面积与底面面积之比.

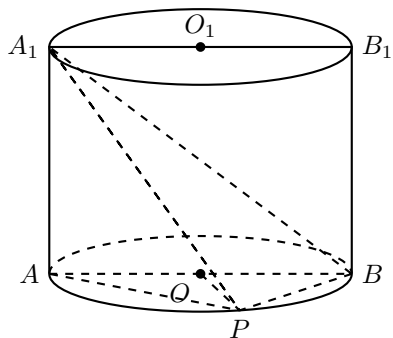
(000207) 若棱锥的高为 16 , 底面积为 256 , 平行于底面的截面面积为 50 , 求该截面与棱锥底面之间的距离.

(000208) 设圆锥的母线长为 1 , 高为 $\frac{1}{2}$, 过圆锥的任意给定的两条母线作一个截面. 求截面面积的最大值.

(000209) 将若干毫升水倒入底面半径为 2cm 的圆柱形器皿中, 量得水面高度为 6cm . 若将这些水倒入底面直径等于母线的倒圆锥形器皿中, 且恰好装满, 求圆锥形器皿的高.

(000210) 已知长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的三条棱长分别为 3cm 、 2cm 、 1cm , 求表面有一只蜘蛛从 A 爬行到 C_1 的最短距离.

(000211) 如图, 已知点 P 在圆柱 O_1O 的底面圆 O 的圆周上, AB 为圆 O 的直径, 圆柱的表面积为 20π , $OA = 2$, $\angle AOP = 120^\circ$.



- (1) 求三棱锥 $A_1 - ABP$ 的体积;
 (2) 求异面直线 A_1B 与 AP 所成角的大小.

(000212) 如图, 在圆柱中, 底面直径 AB 等于母线 AD , 点 E 在底面的圆周上, 且 $AF \perp DE$, F 是垂足.



- (1) 求证: $AF \perp DB$;
 (2) 若圆柱与三棱锥 $D - ABE$ 的体积的比等于 3π , 求直线 DE 与平面 ABD 所成角的大小.

(000213) 如图, 半球内有一内接正方体 (即正方体的一个面在半球的底面圆上, 其余顶点在半球面上). 若正方体的棱长为 $\sqrt{6}$, 求半球的表面积和体积.

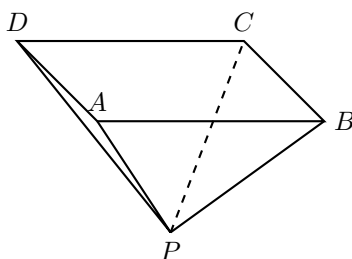


(000214) 已知圆锥的底面半径为 r , 高为 h , 正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 内接于该圆锥. 求这个正方体的棱长.

(000215) 如图, 一个圆锥形的空杯子上放着一个半球形的冰激凌, 如果冰激凌融化了, 会溢出来吗?

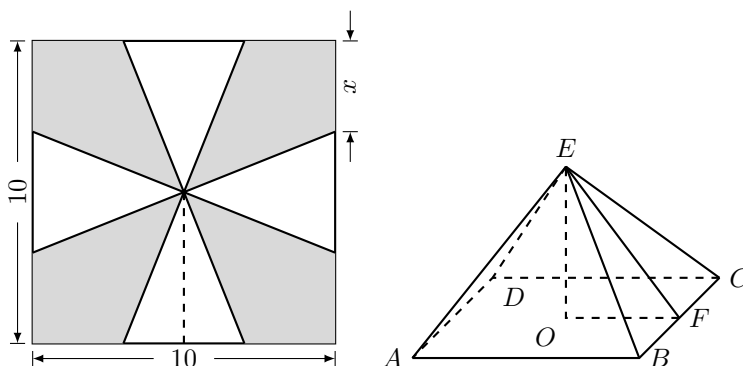


(000216) 如图, 用一块钢锭浇铸一个厚度均匀, 且表面积为 2m^2 的正四棱锥形有盖容器. 设容器的高为 $h\text{m}$, 盖子的边长为 $a\text{m}$.



- (1) 求 a 关于 h 的函数表达式;
- (2) 当 h 为何值时, 容器的容积 V 最大? 并求出 V 的最大值.

(000217) 将一块边长为 10cm 的正方形铁片裁下如图所示的阴影部分, 用余下的四个全等的等腰三角形加工成一个无盖的正四棱锥形容器罩.



- (1) 试把容器罩的表面积 S 表示为 x 的函数;
- (2) 试把容器罩的体积 V 表示为 x 的函数.

(000218) 从字母 a 、 b 、 c 、 d 、 e 中任取两个, 求取到字母 a 的概率.

(000219) 现有 5 根细木棍, 长度 (单位: cm) 分别为 1、3、5、7、9, 从中任取 3 根. 求能搭成一个三角形的概率.

(000220) 将 2 本不同的英语书和 1 本语文书在书架上随机排成一行, 求 2 本英语书相邻的概率.

(000221) 从编号分别为 1、2、3、4、5、6 的 6 个大小与质地相同的小球中随机取出 3 个, 求恰有 2 个小球编号相邻的概率.

(000222) 袋中装有大小与质地相同的 5 个球, 其中红色球 3 个, 标号分别为 1、2、3; 蓝色球 2 个, 标号分别为 1、2. 从袋中任取 2 个球, 求这 2 个球颜色不同且标号之和不小于 4 的概率.

(000223) 袋中装有大小与质地相同的 5 个球, 其中白球 3 个, 黑球 2 个, 从中一次摸出 2 个球.

- (1) 写出该随机试验的一个等可能的样本空间;
- (2) 求摸出来的 2 个球都是白球的概率;
- (3) 求摸出来的 2 个球颜色不同的概率.

(000224) 对某工厂生产的产品质量进行抽查, 数据如下表所示.

抽查件数	50	100	200	300	500
合格件数	47	95	192	285	478

根据上表所提供的数据, 问: 合格品的概率约为多少?(结果保留两位小数)

(000225) 射击队某选手命中环数的概率如下表所示.

命中环数	10	9	8	7
概率	0.32	0.28	0.18	0.12

该选手射击一次, 求:

- (1) 命中 9 环或 10 环的概率;
- (2) 至少命中 8 环的概率;
- (3) 命中不足 8 环的概率.

(000226) 某学生做两道选择题, 已知每道题均有 4 个选项, 其中有且只有一个正确答案. 该学生随意填写两个答案, 求两个答案都选错的概率.

(000227) 盒子中有标号为 1、2、3 的 3 个大小与质地相同的球, 随机地取 1 个球, 放回后再取 1 个球, 把这 2 个球对应的号码按照取的先后顺序组成一个两位数. 求个位数与十位数不相同的概率.

(000228) 一个盒子中装有 4 张卡片, 卡片上分别写有数字 1、2、3、4. 现从盒子中随机抽取卡片.

- (1) 若一次抽取 3 张卡片, 求 3 张卡片上数字之和大于 7 的概率;
- (2) 若第一次抽取 1 张卡片, 放回后再抽取 1 张卡片, 求两次抽取的卡片上数字之和大于 7 的概率.

(000229) 盒子中有散落的黑白棋子若干粒, 已知从中取出 2 粒都是黑子的概率是 $\frac{1}{7}$, 从中取出 2 粒都是白子的概率是 $\frac{1}{6}$. 问: 从中任意取出 2 粒恰好是同一颜色的概率是多少?

(000230) 社会调查人员总希望从对人群的随机抽样调查中得到对他们所提问题的诚实回答, 但是被采访者常常不愿意如实做出应答. 1965 年, 华纳 (Stanley L. Warner) 发明了一种应用概率知识来消除这种不愿意如实回答的情绪的方法. 华纳的随机化应答方法要求人们随机地回答所提两个问题中的一个, 而不必告诉采访者究竟回答的是哪个问题, 在这两个问题中有一个是敏感的或者令人为难的, 另一个则是无关紧要的. 这样, 应答者将乐意如实地回答问题, 因为只有他自己知道回答的是哪个问题. 例如, 在调查运动员是否服用兴奋剂的时候, 设计一个从袋中摸球的试验: 袋中放有 1 黑 1 白两个大小与质地相同的小球, 运动员从中随意摸出 1 个小球. 无关紧要的问题是: 你摸出的小球是白色的吗? 而敏感的问题是: 你服用过兴奋剂吗? 然后要求被调查的运动员抛掷一枚硬币, 如果出现正面, 就回答第一个问题, 否则回答第二个问题. 假设用这个方法调查了 200 名运动员, 得到 56 个“是”的回答, 请你估计这群运动员中大约有百分之几的人服用过兴奋剂.

(000231) 在一次知识竞赛中, 假设 A、B、C、D 四人独立答题, 且答对的概率分别为 $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{1}{4}$, $P(C) = \frac{1}{5}$, $P(D) = \frac{2}{3}$, 如果将 A、B、C 组成一组与 D 比赛, 且 A、B、C 三人中有一人答对即算该组答对, 那么哪一方答对的概率大?

(000232) 某高校研究人员希望调查该校大学生平均每天的自习时间. 他调查了 100 名大学生, 发现他们每天的平均自习时间是 3.5h. 这里的总体是 ().

- A. 该校的所有大学生
- B. 该校所有大学生的平均每天自习时间
- C. 所调查的 100 名大学生
- D. 所调查的 100 名大学生的平均每天自习时间

(000233) 某家大型超市的日客流量 (单位: 千人次) 分别为: 3.4、3.6、5.6、1.8、3.7、4.0、2.5、2.8、4.4、3.6. 下列图形中不利于描述这些数据的是 ().

- A. 散点图
- B. 条形图
- C. 茎叶图
- D. 扇形图

(000234) 某汽车销售商销售某品牌的 A、B、C 三类轿车, 每类轿车均有舒适型和经济型两种型号, 其某月的销量 (单位: 辆) 如下表所示.

	A	B	C
舒适型/辆	35	28	15
经济型/辆	50	72	40

试设计一个抽样方案, 从该月购买轿车的客户中抽取 20 位, 调查他们的满意度.

(000235) 某校 30 名高一女生的扔手球记录如下 (单位: m):

16.3 13.2 17.7 14.3 16.4 19.8 13.5 14.5 11.7 14.1
14.8 17.2 13.8 15.4 16.3 15.7 18.5 16.8 17.9 15.9
17.6 15.4 16.8 21.4 16.5 18.1 16.0 20.3 16.6 19.5

- (1) 选择适当的组距, 制作一张频率分布表;
- (2) 在 (1) 的基础上, 绘制一幅频率分布直方图.

(000236) 某公司对应聘人员进行能力测试, 测试成绩总分为 150 分, 下面是 50 位应聘人员的测试成绩:

64 67 70 72 74 76 76 79 80 81
82 82 83 85 86 88 91 91 92 93
93 93 95 96 96 97 97 99 100 100
102 104 106 106 107 108 108 112 112 114
116 118 119 119 122 123 125 126 128 133

试用这些数据绘制一幅茎叶图.

(000237) 某超市从一家食品有限公司购进一批茶叶, 每罐茶叶的标准质量是 125g, 为了解该批茶叶的质量情况, 从中随机抽取 20 罐, 称得各罐质量 (单位: g) 如下:

124.9 124.7 126.2 124.9 124.2 124.9 123.7
 121.4 126.4 127.7 121.9 124.4 125.2 123.7
 122.7 124.2 126.2 125.2 122.2 125.4

回答下列问题:

(1) 20 罐茶叶的平均质量 \bar{x} 是多少, 标准差 s 是多少? (2) 有多少罐茶叶的质量位于 $\bar{x} - s$ 与 $\bar{x} + s$ 之间, 所占的百分比是多少?

(000238) 数据 x_1, x_2, \dots, x_n 的方差为 s_x^2 , 数据 y_1, y_2, \dots, y_n 的方差为 s_y^2 , 若 $y_1 = ax_1 + b, y_2 = ax_2 + b, \dots, y_n = ax_n + b$ 成立, a, b 为常数, 求证: $s_y^2 = a^2 s_x^2$.

(000239) 下表是上海市 2007 年至 2016 年的月平均气温 (单位: $^{\circ}\text{C}$).

年份	1 月	2 月	3 月	4 月	5 月	6 月	7 月	8 月	9 月	10 月	11 月	12 月
2007	5.9	9.8	12.1	15.9	22.9	25	30.4	29.7	25.4	20.6	14.2	9.8
2008	4.5	4.2	11.6	16.1	21.8	24.2	30.4	28.6	26	21	13.3	7.9
2009	4.3	9.3	10.8	16.7	22.5	26.3	29	28.1	25.4	21.4	12.4	6.9
2010	5.7	7.7	9.6	13.3	20.9	24.1	28.8	30.9	26.2	19.3	14.2	8.1
2011	1.9	6.5	9.5	16.2	21.9	24.4	30.2	28.3	24.7	19.3	16.7	6.9
2012	5.1	4.8	9.8	17.6	21.6	24.7	29.9	29	23.9	20.1	12.6	6.6
2013	4.6	6.8	11	15.3	21.3	24.1	32	31	25	20	13.4	6.1
2014	6.6	6.1	11.5	15.7	21.7	23.3	27.4	26.3	24.2	20.2	14.8	5.7
2015	6	6.8	10.6	15.9	20.5	24.2	26.7	27.8	24.2	19.6	14	7.8
2016	4.4	6.9	11	16.7	20.6	24.2	29.9	29.5	24.9	20.8	13.6	9.1

数据来源: 上海统计年鉴.

回答下列问题:

- (1) 10 年中每年最冷的月份相同吗?
- (2) 10 年中哪个月份的气温波动最大?
- (3) 10 年中哪一年的气温波动最大?
- (4) 绘制 10 年中 7 月份与 8 月份气温的折线图, 比较气温的高低.

(000240) 某高校数学专业共有 850 名学生, 从中选取 20 名学生参加学生代表大会. 试写出具体抽样方案.

(000241) 某校高一年级学生进行了 4 次测验, 成绩 (单位: 分) 如下表所示. 根据 4 次测验的结果, 我们如何比较这 10 名学生的成绩? 下周有一场数学竞赛活动, 如果需要 1 名学生参赛, 那么推荐谁去最好? 如果需要 4 名学生参赛, 那么又该推荐谁去?

学生编号	第 1 次	第 2 次	第 3 次	第 4 次
1	90	82	97	100
2	103	86	101	92
3	77	83	106	87
4	94	93	99	99
5	89	97	93	90
6	101	79	87	95
7	91	92	91	93
8	82	94	100	106
9	88	78	95	78
10	83	88	104	89

(000242) 某客服部门计划根据员工每个月接通的电话数给予奖金奖励, 并且要保证 50% 的员工能拿到基本奖励, 拿到基本奖励的员工中至多 10% 的人能够拿到额外奖励. 该部门随机抽取了 30 名员工, 调查了他们上半个月与客户的通话数量, 数据如下:

1344 1428 1083 1239 1381 1099 1607 1041 1130 1610
1445 921 931 1100 1197 1282 1549 1463 901 1354
1378 1752 1032 968 902 1804 1051 1319 1223 1124

请利用百分位数来为该部门设计奖励方案.

(000243) 求直线 $\sqrt{2}x - 4y + 5 = 0$ 的倾斜角 (用 \arctan 表示).

(000244) 若直线 $ax + 2y + 6 = 0$ 和直线 $x + a(a+1)y + (a^2 - 1) = 0$ 互相垂直, 求实数 a 的值.

(000245) 直线 $x - y + 1 = 0$ 上一点 P 的横坐标是 3, 若该直线绕点 P 逆时针旋转 90° 得到直线 l , 求直线 l 的方程.

(000246) 设直线 $x - ay - 4 = 0$ 与直线 $y = -2x + 4$ 的夹角为 $\arccos \frac{2\sqrt{5}}{5}$, 求实数 a 的值.

(000247) 已知 $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2})$, 求直线 $x \cos \alpha + \sqrt{3}y + 2 = 0$ 的倾斜角的取值范围.

(000248) 求过点 $(3, -2)$ 且在 x 轴、 y 轴上截距相等的直线的方程.

(000249) 已知点 $P(1, 1)$ 到直线 $x + ay - 2 = 0$ 的距离为 1, 求实数 a 的值.

(000250) 已知平行四边形 $ABCD$ 中, 边 AB 所在直线的方程为 $x + y - 1 = 0$, 边 AD 所在直线的方程为 $3x - y + 4 = 0$.

(1) 求点 A 的坐标;

(2) 若点 C 的坐标为 $(3, 3)$, 分别求边 BC 与 DC 所在直线的方程.

(000251) 已知直线 $l_1: x + my + 6 = 0$, $l_2: (m-2)x + 3y + 2m = 0$, 求实数 m 的取值范围, 使得:

(1) l_1 与 l_2 相交;

(2) $l_1 \perp l_2$;

(3) $l_1 \parallel l_2$;

(4) l_1 与 l_2 重合.

(000252) 已知直线 l 与两坐标轴围成一个等腰直角三角形, 且此三角形的面积为 $\frac{49}{2}$. 求直线 l 的方程.

(000253) 在 $\triangle ABC$ 中, 边 AB 、 AC 上的高所在直线的方程分别为 $2x - 3y + 1 = 0$ 与 $x + y = 0$, 点 A 的坐标为 $(1, 2)$. 求边 BC 所在直线的方程.

(000254) 已知直线 l 垂直于直线 $3x + 4y - 9 = 0$, 点 $A(2, 3)$ 到直线 l 的距离为 1. 求直线 l 的方程.

(000255) 已知三条直线 $l_1: ax + by + 4 = 0$, $l_2: (a-1)x + y + b = 0$, $l_3: x + 2y + 3 = 0$.

(1) 若 $l_1 \perp l_2$ 且 l_1 经过点 $(-1, 1)$, 求 a 、 b 的值;

(2) 若 $l_1 \parallel l_2 \parallel l_3$, 求 a 、 b 的值.

(000256) 已知过点 $(0, -2)$ 且具有斜率 k 的直线 l 与以点 $A(3, 1)$ 和 $B(-2, 5)$ 为端点的线段 AB 相交, 求实数 k 的取值范围.

(000257) 已知两条直线 $l_1: y - x = 0$, $l_2: y = ax$, 其中 $a \in \mathbf{R}$. 当这两条直线的夹角在 $(0, \frac{\pi}{12})$ 内变化时, 求实数 a 的取值范围.

(000258) 直线 l 过原点且平分平行四边形 $ABCD$ 的面积, 若此平行四边形的两个顶点为 $B(1, 4)$ 、 $D(5, 0)$, 求直线 l 的方程.

(000259) 求直线 $l_1: 3x - 2y - 6 = 0$ 关于直线 $l_2: 2x - 3y + 1 = 0$ 对称的直线 l_3 的方程.

(000260) 已知动点 $M(a, b)$ 在直线 $3x + 4y - 15 = 0$ 上, 求 $\sqrt{a^2 + b^2}$ 的最小值.

(000261) 已知两条平行直线 l_1 与 l_2 分别过点 $P_1(1, 0)$ 与点 $P_2(0, 5)$, l_1 、 l_2 之间的距离为 d . 求 d 的最大值, 并指出此时 l_1 、 l_2 的方程.

(000262) 已知直线 l 经过点 $C(2, 1)$, 且与 x 轴、 y 轴的正半轴分别交于点 A 、点 B , O 是坐标原点.

(1) 当 $\triangle AOB$ 的面积最小时, 求直线 l 的方程;

(2) 当 $|CA| \cdot |CB|$ 取最小值时, 求直线 l 的方程, 并求此最小值.

(000263) 作出方程 $|x| + |y| = 1$ 所表示的图形, 并求该图形围成的区域的面积.

(000264) 给定直线 $l_1: y = k_1x + b_1$ 与 $l_2: y = k_2x + b_2$, 求证: 如果直线 l_1 与 l_2 不互相垂直, 那么它们的夹角 α 满足 $\tan \alpha = \left| \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2} \right|$.

(000265) 已知直线 $l_1: 4x + y = 4$, $l_2: mx + y = 0$, $l_3: 2x - 3my = 4$. 当 m 为何值时, 它们不能围成三角形?

(000266) 点到直线的距离是该点到直线上任意一点距离的最小值. 如果把一个给定点到线段上任意一点的距离的最小值定义为该点到该线段的距离, 试求点 $P(1,1)$ 到线段 $l: x-y-3=0 (3 \leq x \leq 5)$ 的距离.

(000267) 判断下列命题是否正确, 并说明理由:

(1) 到两坐标轴距离相等的点的轨迹方程为 $y=x$;

(2) 若 $\triangle ABC$ 的三个顶点的坐标分别为 $A(1,1)$ 、 $B(3,1)$ 、 $C(1,3)$, 则边 BC 上的中线所在直线的方程为 $y=x$;

(3) 与两点 $A(-1,0)$ 、 $B(1,0)$ 的连线的夹角为 90° 的动点的轨迹方程为 $x^2+y^2=1$.

(000268) 讨论圆 $x^2+y^2+6x-7=0$ 与抛物线 $y^2=-4x$ 准线的位置关系.

(000269) 对圆 $(x-a)^2+(y+b)^2=a^2+b^2 (a>0, b>0)$, 下列说法是否正确, 请说明理由:

(1) 该圆的圆心为 (a,b) ;

(2) 该圆过原点;

(3) 该圆与 x 轴相交于两个不同点.

(000270) 若椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{a^2}=1$ 与双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{2}=1$ 有相同的焦点, 求实数 a 的值.

(000271) 设椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 (a>b>0)$ 的焦距为 $2c$. 若 $b^2=ac$, 求该椭圆的离心率.

(000272) 已知圆 C 的半径为 3, 它与双曲线 $\frac{x^2}{4}-y^2=1$ 的两条渐近线均相切, 且与该双曲线的右支相交. 求圆 C 的方程.

(000273) 已知直线 $y=x+b$ 被曲线 $y=\frac{1}{2}x^2$ 截得的弦长为 $4\sqrt{2}$, 求实数 b 的值.

(000274) 点 P 是圆 $x^2+y^2=4$ 上的动点, 过点 P 作 x 轴的垂线, 垂足为 M . 若 $\overrightarrow{PQ}=2\overrightarrow{QM}$, 求点 Q 的轨迹方程.

(000275) 设 AB 是过抛物线 $y^2=2px$ 焦点 F 的一条弦, 过点 A 、 B 分别作该抛物线准线的垂线, 垂足分别为 A_1 、 B_1 . 求证: $\angle A_1FB_1=\frac{\pi}{2}$.

(000276) 已知圆 O 的方程是 $x^2+y^2=1$, 直线 l 与圆 O 相切.

(1) 若直线 l 的斜率等于 1, 求直线 l 的方程;

(2) 若直线 l 在 y 轴上的截距为 $\sqrt{2}$, 求直线 l 的方程.

(000277) 直线 $x-\sqrt{3}y=0$ 绕原点按逆时针方向旋转 30° 后所得的直线 l 与圆 $(x-2)^2+y^2=3$ 的位置关系是 ().

A. 直线 l 过圆心

B. 直线 l 与圆相交, 但不过圆心

C. 直线 l 与圆相切

D. 直线 l 与圆无公共点

(000278) 已知点 $A(-\frac{1}{2},0)$, B 是圆 $C:(x-\frac{1}{2})^2+y^2=4$ (C 是圆心) 上一动点, 线段 AB 的垂直平分线交 BC 于 M . 求动点 M 的轨迹方程.

(000279) 过抛物线 $y^2=4x$ 的焦点 F 作动直线交抛物线于 A 、 B 两点, 并从原点 O 作 AB 的垂线, 垂足为 M . 求动点 M 的轨迹方程.

(000280) 已知点 P 是双曲线 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ 右支上的一点, 点 M, N 分别是圆 $(x+5)^2 + y^2 = 4$ 和 $(x-5)^2 + y^2 = 1$ 上的点. 求 $|PM| - |PN|$ 的最大值.

(000281) 已知圆 $x^2 + y^2 + x - 6y + m = 0$ 与直线 $x + 2y - 3 = 0$ 相交于 P, Q 两点, O 为坐标原点. 若 $OP \perp OQ$, 求实数 m 的值.

(000282) 已知直线 $y = ax - 1$ 与曲线 $y^2 = 2x$ 只有一个公共点, 求实数 a 的值.

(000283) 对于实数 k 的不同取值范围, 讨论方程 $kx^2 + y^2 - 2 = 0$ 所表示的曲线的形状.

(000284) 过椭圆 $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ ($a > b > 0$) 的顶点 $B(0, -b)$ 引一条弦 BP , 求弦 BP 的最大长度.

(000285) 已知定点 $A(a, 0)$ ($0 < a < 3$) 到椭圆 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ 上的点的距离的最小值为 1, 求 a 的值.

(000286) 据气象预报, 在气象台 A 处向东 400km B 处的海面上有一个台风中心形成, 测得台风以 40km/h 的速度向西北方向移动, 距中心不超过 300km 的地方都会受到台风的影响. 从现在起, 多少时间后气象台受到台风影响? 气象台受到台风影响的时长大约是多少 (结果精确到 0.1h)?

(000287) 已知 $\triangle ABC$ 的两个顶点 A, B 的坐标分别是 $(-6, 0), (6, 0)$, 且边 AC, BC 所在直线的斜率之积等于 k . 讨论顶点 C 的轨迹方程.

(000288) 以 P 为圆心的动圆与圆 $C_1: (x+2)^2 + y^2 = 1$ 和圆 $C_2: (x-2)^2 + y^2 = r^2$ 均相切, 请分别写出 r 的某个值, 使点 P 的轨迹为椭圆和双曲线.

(000289) 求双曲线 $y = \frac{1}{x}$ 的焦点坐标与准线方程.

(000290) 请验证到点 $(1, \frac{1}{4})$ 的距离和到直线 $y = -\frac{1}{4}$ 的距离相等的动点的轨迹方程是二次函数 $y = x^2 - 2x + 1$, 并探究一般情况.

(000291) 求连接点 $A(x, y, z)$ 与点 $B(x', y', z')$ 的线段 AB 的中点 M 的坐标.

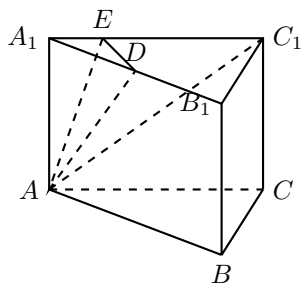
(000292) 设正四面体 $ABCD$ 的棱长为 a , E 为 BC 的中点, F 为 CD 的中点. 求 $\overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{AE}$.

(000293) 给定点 $A(1, 0, 0), B(3, 1, 1), C(2, 0, 1)$ 与点 $D(5, -4, 3)$.

(1) 求 \overrightarrow{AD} 在 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}$ 方向上的投影向量;

(2) 求点 D 到平面 ABC 的距离.

(000294) 如图, 在正三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $|AB| = \sqrt{2}|AA_1|$, D 是 A_1B_1 的中点, 点 E 在 A_1C_1 上, 且 $DE \perp AE$.



- (1) 求证: 平面 $ADE \perp$ 平面 ACC_1A_1 ;
 (2) 求直线 AD 和平面 ABC_1 所成角的大小.

(000295) 已知正四棱锥的体积为 12, 底面对角线的长为 $2\sqrt{6}$. 求侧面与底面所成二面角的大小.

(000296) 如图, 已知 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 是底面边长为 1 的正四棱柱, O_1 是 A_1C_1 和 B_1D_1 的交点.



- (1) 设 AB_1 与底面 $A_1B_1C_1D_1$ 所成角的大小为 α , 二面角 $A - B_1D_1 - A_1$ 的大小为 β . 求证: $\tan \beta = \sqrt{2} \tan \alpha$;
 (2) 若点 C 到平面 AB_1D_1 的距离为 $\frac{4}{3}$, 求此正四棱柱的高.

(000297) 如图, 在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $|AC| = |BC| = |CC_1| = 2$.



- (1) 求证: $AB_1 \perp BC_1$;
 (2) 求点 B 到平面 AB_1C_1 的距离.

(000298) 如图, 四棱锥 $P - ABCD$ 的底面 $ABCD$ 为梯形, $AD \parallel BC$, $AB \perp BC$, $|AB| = 1$, $|AD| = 3$, $\angle ADC = 45^\circ$, 且 $PA \perp$ 平面 $ABCD$, $|PA| = 1$.



- (1) 求异面直线 PB 与 CD 所成角的大小;
 (2) 求四棱锥 $P - ABCD$ 的体积.

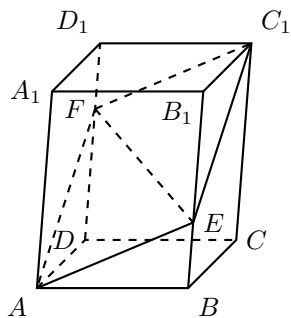
(000299) 如图, 在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $\angle BAC = 90^\circ$, $|AB| = |AC| = a$, $|AA_1| = 2a$, D 为 BC 的中点, E 为 CC_1 上的点, 且 $|CE| = \frac{1}{4}|CC_1|$.



- (1) 求证: $BE \perp$ 平面 ADB_1 ;
- (2) 求二面角 $B - AB_1 - D$ 的大小.

(000300) 在长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $|AB| = |BC| = 2$, A_1D 与 BC_1 所成的角为 $\frac{\pi}{2}$. 求 BC_1 与平面 BB_1D_1D 所成角的大小.

(000301) 如图, 在平行六面体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 点 E 、 F 分别在 B_1B 和 D_1D 上, 且 $|BE| = \frac{1}{3}|BB_1|$, $|DF| = \frac{2}{3}|DD_1|$.



- (1) 求证: A 、 E 、 C_1 、 F 四点共面;
- (2) 若 $\vec{EF} = \lambda \vec{AB} + \mu \vec{AD} + \nu \vec{AA_1}$, 求 $\lambda + \mu + \nu$ 的值.

(000302) 如图, 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, E 、 F 分别是 BC 、 A_1D_1 的中点.



- (1) 求证: 四边形 B_1EDF 是菱形;
 (2) 求异面直线 A_1C 与 DE 所成角的大小.

(000303) 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, E 、 F 分别是 BC 、 CC_1 的中点.

- (1) 求证: 点 D_1 在平面 AEF 上;
 (2) 求平面 $AEFD_1$ 与底面 $ABCD$ 所成二面角的大小.

(000304) 如图, $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 为正方体, 动点 P 在对角线 BD_1 上, 记 $\frac{|D_1P|}{|D_1B|} = \lambda$.



- (1) 求证: $AP \perp B_1C$;
 (2) 若异面直线 AP 与 D_1B_1 所成角为 $\frac{\pi}{4}$, 求 λ 的值;
 (3) 当 $\angle APC$ 为钝角时, 求 λ 的取值范围.

(000305) 如图, 平行六面体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的底面 $ABCD$ 是正方形, O 为底面的中心, $A_1O \perp$ 平面 $ABCD$, $|AB| = |AA_1| = \sqrt{2}$.



- (1) 求证: $A_1C \perp$ 平面 BB_1D_1D ;
 (2) 求平面 OCB_1 与平面 BB_1D_1D 所成二面角的大小.

(000306) 填空题:

(1) 已知数列 $\{a_n\}$ 是等差数列, 下面的数列中必为等差数列的序号是_____.

① $\{a_{2n}\}$ ② $\{a_n + a_{n+1}\}$ ③ $\{3a_n + 1\}$ ④ $\{|a_n|\}$

(2) 已知数列 $\{a_n\}$ 是等比数列, 下面的数列中必为等比数列的序号是_____.

① $\{a_n^2\}$ ② $\{a_n + a_{n+1}\}$ ③ $\{\frac{1}{a_n}\}$ ④ $\{2^{a_n}\}$

(000307) 选择题:

(1) 我国古代数学名著《算法统宗》中有如下问题: “远望巍巍塔七层, 红光点点倍加增, 共灯三百八十一, 请问

尖头几盏灯?”意思是:一座 7 层塔共挂了 381 盏灯,且相邻两层中的下一层灯的盏数是上一层灯的盏数的 2 倍,则塔的顶层灯的盏数是 ().

- A. 1 B. 3 C. 5 D. 9

(2) 已知数列 $\{a_n\}$, 若 $a_1 = 3$, $a_2 = 6$, 且 $a_{n+2} = a_{n+1} - a_n$ (n 为正整数), 则数列的第 35 项为 ().

- A. 6 B. -3 C. -12 D. -6

(000308) 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 已知公差 $d = \frac{1}{2}$, 且 $a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{99} = 60$. 求 $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{99} + a_{100}$ 的值.

(000309) 已知存在常数 t , 使得等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n = tn^2 + (t-9)n + t - \frac{3}{2}$. 求该数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(000310) 设 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 求证: 数列 $\{\frac{S_n}{n}\}$ 是等差数列.

(000311) 已知数列 $\{\log_3 a_n\}$ 是等差数列, 且 $\log_3 a_1 + \log_3 a_2 + \cdots + \log_3 a_{10} = 10$. 求 $a_5 a_6$.

(000312) 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且满足 $a_1 = 29$, $S_{10} = S_{20}$. 这个数列的前多少项和最大? 并求此最大值.

(000313) 在 2 与 9 之间插入两个数, 使前三个数成等差数列, 后三个数成等比数列. 试写出这个数列.

(000314) 已知数列 $\{a_n\}$ 是等比数列, 且 a_1, a_2, a_4 成等差数列. 求数列 $\{a_n\}$ 的公比.

(000315) 用数学归纳法证明: $\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots + \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$ (n 为正整数).

(000316)(1) 依次计算下列各式的值: $\frac{1}{1}, \frac{1}{1} + \frac{1}{1+2}, \frac{1}{1} + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3}, \frac{1}{1} + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \frac{1}{1+2+3+4}$.

(2) 根据 (1) 中的计算结果, 猜想 $S_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \cdots + \frac{1}{1+2+3+\cdots+n}$ (n 为正整数) 的表达式, 并用数学归纳法证明相应的结论.

(000317) 选择题:

(1) 已知 a, x, b 和 b, y, c 均为等差数列, 而 a, b, c 为等比数列, 且 $xy \neq 0$, 则 $\frac{a}{x} + \frac{c}{y}$ 的值等于 ().

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

(2) 已知两个等差数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的前 n 项和分别为 A_n 和 B_n , 且满足 $\frac{A_n}{B_n} = \frac{7n+45}{n+3}$, 则使得 $\frac{a_n}{b_n}$ 为整数的正整数 n 的个数为 ().

- A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

(000318) 已知 S_n 是等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 且 S_3, S_9, S_6 成等差数列. 求证: a_2, a_8, a_5 成等差数列.

(000319) 已知在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_{10} = 0$.

(1) 求证: $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{19-n}$ 对一切小于 19 的正整数 n 都成立;

(2) 类比上述性质, 在等比数列 $\{b_n\}$ 中, 若 $b_9 = 1$, 可以得到什么结论?

(000320) 已知数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数, $a_1 = \frac{1}{3}$, 且 $a_n = \frac{a_{n-1}}{2a_{n-1} + 1} (n \geq 2)$.

(1) 求证: 数列 $\{\frac{1}{a_n}\}$ 是等差数列;

(2) 若数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n = \begin{cases} 2, & n = 1, \\ na_n, & n \geq 2, \end{cases}$ 求数列 $\{b_n\}$ 中的最大项与最小项.

(000321) 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$. 求证: 数列 $\{a_n\}$ 为等差数列.

(000322) 用数学归纳法证明: $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} (n \text{ 为正整数})$.

(000323) 是否存在常数 a, b, c , 使等式 $1 \cdot (n^2 - 1^2) + 2 \cdot (n^2 - 2^2) + \cdots + n \cdot (n^2 - n^2) = an^4 + bn^2 + c$ 对任意正整数 n 都成立? 证明你的结论.

(000324) 如图所示, 有三根直杆和套在一根直杆上的若干金属片, 把金属片按下列规则从一根直杆上全部移到另一根直杆上:

- ① 每次只移动 1 个金属片;
- ② 较大的金属片不能放在较小的金属片上面.



试推测: 把 n 个金属片从 1 号直杆移到 3 号直杆, 最少需要移动多少次?

(000325) 如图, 将一个边长为 1 的正三角形的每条边三等分, 以中间一段为边向外作正三角形, 并擦去中间这一段, 如此继续下去得到的曲线称为科克雪花曲线. 将下面的图形依次记作 $M_1, M_2, M_3, \dots, M_n, \dots$.

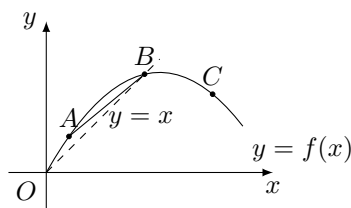


(1) 求 M_n 的周长;

(2) 求 M_n 的面积;

(3) 当 $n \rightarrow +\infty$ 时, 科克雪花曲线所围成的图形是周长无限增大而面积却有极限的图形吗? 若是, 请求出其面积的极限; 若不是, 请说明理由.

(004000) 请根据图中的函数图像, 将下列数值按从小到大的顺序排列: _____.



- ① 曲线在点 A 处切线的斜率;
- ② 曲线在点 B 处切线的斜率;
- ③ 曲线在点 C 处切线的斜率;
- ④ 割线 AB 的斜率;
- ⑤ 数值 0;
- ⑥ 数值 1.

(004001) 已知 $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = kx^x$.

- (1) 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(4, 2)$ 处的切线方程;
- (2) 若曲线 $y = g(x)$ 经过点 $(4, 2)$, 求它与 (1) 中切线的另一个交点.

(004002) 从桥上将一小球掷向空中, 小球相对于地面的高度 h (单位: m) 和时间 t (单位: s) 近似满足函数关系 $h = -5t^2 + 15t + 12$. 问:

- (1) 小球的初始高度是多少?
- (2) 小球在 $t = 0$ 到 $t = 1$ 这段时间内的平均速度是多少?
- (3) 小球在 $t = 1$ 时的瞬时速度是多少?
- (4) 小球所能达到的最大高度是多少? 何时达到?

(004003) 已知 $f(x) = \ln x$, $g(x) = e^x$, 计算下列函数 $y = h(x)$ 在点 $x = 1$ 处的导数值:

- (1) $h(x) = 3f(x) - 5g(x)$;
- (2) $h(x) = f(x)g(x)$;
- (3) $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$;
- (4) $h(x) = f(2x + 1) + g(3x - 1)$.

(004004) 计算下列函数 $y = f(x)$ 的导数, 其中:

- (1) $f(x) = \frac{\pi}{2} + \sin(-x)$;
- (2) $f(x) = \sqrt[3]{x} - \frac{1}{x^3}$;
- (3) $f(x) = (\frac{1}{2}x - 5)(3 - 4x)$;
- (4) $f(x) = \frac{\cos x}{x^2}$.

(004005) 求下列函数 $y = f(x)$ 的单调区间和极值点, 其中: (1) $f(x) = \frac{2}{3}x - 1$;

- (2) $f(x) = 2 + x - x^2$;
- (3) $f(x) = x^3 + x^2 - 8x + 7$.

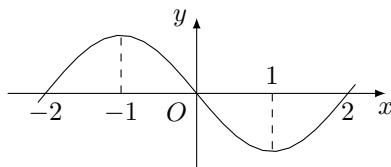
(004006) 借助求导数的结果, 求下列函数 $y = f(x)$ 在给定区间上的最大值和最小值, 其中:

(1) $f(x) = \frac{2}{3}x - 1, x \in [0, 3];$

(2) $f(x) = 2 + x - x^2, x \in [-1, 1];$

(3) $f(x) = x^3 + x^2 - 8x + 7, x \in [-3, 3].$

(004007) 已知 $y = f'(x)$ 的图像如图所示, 求函数 $y = f(x)$ 在 $(-2, 2)$ 上的单调区间和极值点.



(004008) 若直线 $y = x$ 是曲线 $y = x^3 - 3x^2 + ax$ 的切线, 求 a 的值.

(004009) 设函数 $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ 的图像与 $y = 0$ 在原点相切, 若函数的极小值为 -4 , 求函数的表达式与单调减区间.

(004010) 某种型号的汽车在匀速行驶中每小时的耗油量 y (单位: L) 关于行驶速度 x (单位: km/h) 满足函数关系 $y = \frac{1}{128000}x^3 - \frac{3}{80}x + 8$ ($0 < x \leq 120$). 已知甲、乙两地相距 100km. 问: 当汽车保持怎样的速度匀速行驶时, 从甲地到乙地的耗油量最小?

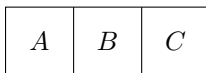
(004011) 要建造一个给定容积 V 的圆柱体蓄水池, 已知池底单位造价为池侧面单位造价的 2 倍. 问: 应如何选择蓄水池的底面半径 r 和高 h , 才能使总造价最低?

(004012) 已知某厂生产一种产品的总成本 C (单位: 万元) 与产品件数 x 满足函数关系 $C = 1200 + \frac{2}{75}x^3$, 产品单价 P (单位: 万元) 和产品件数 x 满足函数关系 $P^2 = \frac{250000}{x}$. 问: 产量为多少件时, 总利润最大?

(004013) 讨论函数 $y = x^3 + ax + b$ 的单调性(可借助信息技术工具).

(004014) 判断方程 $x^3 + ax + b = 0$ 有几个实根(可借助信息技术工具).

(004015) 如图, 用 6 种不同的颜色将 A 、 B 、 C 三个区域涂色, 每个区域涂一种颜色, 且有公共边的区域不能涂同一种颜色. 问: 不同的涂色方法共有多少种?



(004016) 5 个工程队分别承建某项工程的 5 个不同的子项目, 每个工程队各承建其中的 1 项, 且甲工程队不能承建 1 号子项目. 问: 不同的承建方案有多少种?

(004017) 从 0、1、2、3、4、5 六个数字中任取四个数字, 可以组成多少个没有重复数字、且为奇数的四位数?

(004018) 解关于正整数 x 的方程: $11C_x^3 = 24C_{x+1}^2$.

(004019) 已知 $(x^2 + \frac{1}{x})^n$ 的二项展开式的各项系数之和为 32, 求该二项展开式中 x 的系数.

(004020) 若 $(1-2x)^4 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$, 求 $|a_0| + |a_1| + |a_3|$ 的值.

(004021) 若 $(x^6 + \frac{1}{x\sqrt{x}})^n$ 的二项展开式中含有常数项, 求 n 的最小值.

(004022) 7 名学生站成一排拍毕业纪念照, 其中甲必须站在正中间, 并且乙、丙 2 名学生要站在一起. 问: 有多少种不同的排法?

(004023) 将 5 个不同的小球分别放到 3 个不同的盒子中, 要求每个盒子都不空. 问: 有多少种不同的放法?

(004024) 从 7 名男乒乓球队员、5 名女乒乓球队员中任选 4 名进行男女混合双打, 不同的分组方法有多少种?

(004025) 3 名男生、4 名女生排成一行. 在下列要求下, 分别求不同排列方法的种数:

- (1) 甲不在最左边, 乙不在最右边;
- (2) 男生必须排在一起;
- (3) 男生和女生相间排列;
- (4) 在甲、乙两人中间必须有 3 人.

(004026) 一个口袋内有 4 个不同的红球、6 个不同的白球.

- (1) 从中任取 4 个球, 红球的个数不比白球少的取法有多少种?
- (2) 若取一个红球记 2 分, 取一个白球记 1 分. 从中任取 5 个球, 使总分不少于 7 分的取法有多少种?

(004027) 设 $(2 - \sqrt{3}x)^{100} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{100}x^{100}$, 求下列各式的值:

- (1) a_0 ;
- (2) $a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{99}$;
- (3) $(a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{100})^2 - (a_1 + a_3 + \cdots + a_{99})^2$.

(004028) 利用二项式定理, 求 55^{55} 被 8 除所得的余数.

(004029) 设集合 A 是由所有满足下面条件的有序数组 $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ 构成的: 每一个元素 x_i 等于 0、1、-1 中之一, 其中 $i = 1, 2, 3, 4, 5$. 那么集合 A 中满足条件 “ $1 \leq |x_1| + |x_2| + |x_3| + |x_4| + |x_5| \leq 3$ ” 的元素有多少个?

(004030) 利用二项式定理证明: 对于任意正整数 n , $\frac{1}{\sqrt{5}}[(2 + \sqrt{5})^n - (2 - \sqrt{5})^n]$ 都是正整数.

(004031) 掷黄、白两颗骰子, 当黄色骰子的点数为 4 或 6 时, 求两颗骰子的点数之积大于 20 的概率.

(004032) 连续掷一颗骰子两次, 已知第一次掷出的是偶数点. 求第二次也掷出偶数点的概率.

(004033) 在 5 道题中有 3 道数学题和 2 道语文题. 如果不放回地依次抽取 2 道题, 求:

- (1) 第 1 次抽到数学题的概率;
- (2) 第 1 次和第 2 次都抽到数学题的概率;
- (3) 在第 1 次抽到数学题的条件下, 第 2 次也抽到数学题的概率.

(004034) 已知随机变量 X 的分布为 $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ a & b & c \end{pmatrix}$. 若 $E[X] = \frac{1}{3}$, $D[X] = \frac{5}{9}$, 求 a 、 b 、 c 的值.

(004035) 同时抛掷两枚相同的均匀硬币, 设随机变量 $X = 1$ 表示结果中有正面朝上, $X = 0$ 表示结果中没有正面朝上. 求 $E[X]$ 及 $D[X]$.

(004036) 从 4 名男生和 2 名女生中任选 3 人参加演讲比赛, 设随机变量 X 表示所选 3 人中女生的人数. 求:

(1) X 的分布;

(2) X 的期望与方差; (3) “所选 3 人中女生人数 $X \leq 1$ ” 的概率.

(004037) 一批产品的二等品率为 0.02. 从这批产品中每次随机取一件, 有放回地抽取 100 次. 用 X 表示抽到的二等品件数, 求 $D[X]$.

(004038) 袋中有 10 个大小与质地相同的球, 其中 7 个是红球. 从中任取 5 个球, 求取出的球中红球个数 X 的分布.

(004039) 某人提出一个问题, 甲先答, 答对的概率为 0.4. 若甲答错, 则由乙答, 乙答对的概率为 0.5. 求该问题由乙答对的概率.

(004040) 100 件产品中有 5 件次品, 不放回地抽取两次, 每次抽 1 件. 已知第一次抽出的是次品, 求第二次抽出正品的概率.

(004041) 盒中有大小与质地相同的 25 个球, 其中 10 个白球、5 个黄球、10 个黑球. 从盒中任意取出 1 个球, 已知它不是黑球, 求它是黄球的概率.

(004042) 在 1、2、3、 \dots 、9 这 9 个自然数中, 任取 3 个数.

(1) 求这 3 个数中恰有 1 个是偶数的概率;

(2) 设 X 为这 3 个数中两数相邻的组数 (例如, 若取出的数为 1、2、3, 则有两组相邻的数 1、2 和 2、3, 此时 X 的值为 2), 求随机变量 X 的分布及期望.

(004043) 口袋里装有大小与质地相同的 4 个红球和 8 个白球, 甲、乙两人依下面的规则从袋中有放回地摸球, 每次摸 1 个球. 规则如下: 若一方摸出 1 个红球, 则此人继续下一次摸球; 若一方摸出 1 个白球, 则由对方接替下一次摸球. 假设每次摸球相互独立, 且由甲进行第一次摸球. 求在前三次摸球中, 甲摸得红球的次数 X 的分布及期望.

(004044) 在一个游戏中, 每次输赢的概率都是 $\frac{1}{2}$. 甲的策略是: 第一次押 1 元, 如果赢, 就结束; 如果输, 押 2 元再来一次, 无论输赢都结束. 乙的策略是: 押 1 元, 无论输赢都结束.

(1) 求甲赢的概率与乙赢的概率;

(2) 用 X 、 Y 分别表示甲、乙最终赢得的金额 (即所押金额), 求它们的分布与期望;

(3) 比较甲与乙的策略.

(004045) 设有两个罐子, A 罐中放有 2 个白球、1 个黑球, B 罐中放有 3 个白球, 这些球的大小与质地相同. 现在从两个罐子中各摸 1 个球进行交换, 求这样交换 3 次后, 黑球还在 A 罐中的概率. 交换 n 次后呢?

(004046) 有一种骰子游戏, 某人掷两颗骰子, 若掷出的点数之和是 7 或 11, 则赢; 若掷出的点数之和是 2、3 或 12, 则输; 若掷出其他的点数和, 则记下这个数, 继续掷这两颗骰子, 直到掷出的点数和是这个记下的数或者 7 为止, 若是这个记下的数, 则赢, 若是 7, 则输. 求此人赢的概率是多少.

(004047) 在研究硝酸钠的可溶性程度时, 观测它在不同温度 (单位: $^{\circ}\text{C}$)100g 的水中的溶解度 (单位: g), 得到如下观测结果:

温度 $x/^{\circ}\text{C}$	10	25	40	50	55	60	65	75
溶解度 y/g	81	92	104	114	117	124	130	150

由此得到回归直线的斜率是_____.

(004048) 若对具有线性相关关系的两个变量建立的回归方程为 $y = -0.960x + 3.134$, 则当 $x = 50$ 时, y 的估计值为_____.

(004049) 某产品的广告费投入与销售额的统计数据如下表所示.

广告费 $x/\text{万元}$	4	2	3	5
销售额 $y/\text{万元}$	49	26	39	54

根据上表建立的回归方程 $y = \hat{a}x + \hat{b}$ 中, $\hat{a} = 9.4$. 9.4 的实际意义是什么?

(004050) 经过分层抽样得到 16 名学生高一和高二结束时的数学考试成绩 (满分: 100 分), 如下表所示.

学生编号	1	2	3	4	5	6	7	8
高一	84	85	71	74	60	58	51	82
高二	84	88	72	73	68	62	60	85
学生编号	9	10	11	12	13	14	15	16
高一	87	69	79	80	83	84	63	54
高二	88	73	84	82	83	83	66	67

- (1) 绘制这些成对数据的散点图;
- (2) 计算学生高一和高二数学成绩的相关系数. 根据此相关系数, 你能得出什么结论?

(004051) 通过随机询问 72 名大学生在购买食品时是否读营养说明, 得到如下列联表:

表头	男	女	总计
读营养说明	28	16	44
不读营养说明	8	20	28
总计	36	36	72

根据表中的数据回答: 是否有 95% 的把握判定性别与读营养说明之间有关系?

(004052) 某人对一地区近几年的年人均可支配收入 x (单位: 千元) 与年人均消费支出 y (单位: 千元) 进行统计调查, 发现 y 与 x 具有线性相关关系, 且得到回归方程 $y = 0.71x - 1.814$. 若该地区去年的年人均消费支出为 4 万 3 千元, 试估计该地区去年的年人均消费支出占人均可支配收入的百分比.

(004053) 某连锁日用品销售公司下属 5 个社区便利店某月的销售额与利润额如下表所示.

便利店编号	1	2	3	4	5
销售额 x / 万元	30	60	45	80	89
利润额 y / 万元	2.3	3.5	3.2	4.0	5.3

- (1) 绘制销售额和利润额的散点图;
- (2) 若销售额和利润额具有线性相关关系, 试计算利润额 y 与销售额 x 的回归方程.

(004054) 某一商品在某地区的年销售额与该地区的居民人数和平均每个家庭每年的总收入都有关系. 现有 16 个地区的统计数据, 如下表所示.

地区编号	销售 额/(万 元/年)	居民人 数/万人	平均家庭 总收 入/(万 元/年)	地区编号	销售 额/(万 元/年)	居民人 数/万人	平均家庭 总收 入/(万 元/年)
1	145	20.7	6.9	9	233	33.0	8.3
2	83	19.3	5.4	10	112	11.5	8.3
3	179	27.1	5.9	11	147	16.1	8.4
4	248	38.1	7.2	12	70	4.4	8.9
5	237	38.2	7.5	13	60	2.6	8.9
6	286	40.5	7.8	14	98	12.8	9.0
7	90	7.8	7.8	15	125	15.1	9.6
8	165	21.5	8.0	16	198	20.0	10.7

- (1) 试分别计算该商品年销售额与地区居民人数和平均每个家庭每年总收入的相关系数;
- (2) 选取 (1) 中相关系数较大的一对数据作回归分析.

(004055) 为了验证蔬菜植株感染红叶螨能否引起植株对枯萎病的抗性, 随机抽取 57 棵植株, 获得如下观察数据: 26 棵植株感染红叶螨, 其中 15 株无枯萎病, 11 株有枯萎病; 31 棵植株未感染红叶螨, 其中 17 株无枯萎病, 14 株有枯萎病.

- (1) 根据上述数据制作一张 2×2 列联表;
- (2) 这些数据能否说明感染红叶螨可引起植株对枯萎病的抗性这一结论?

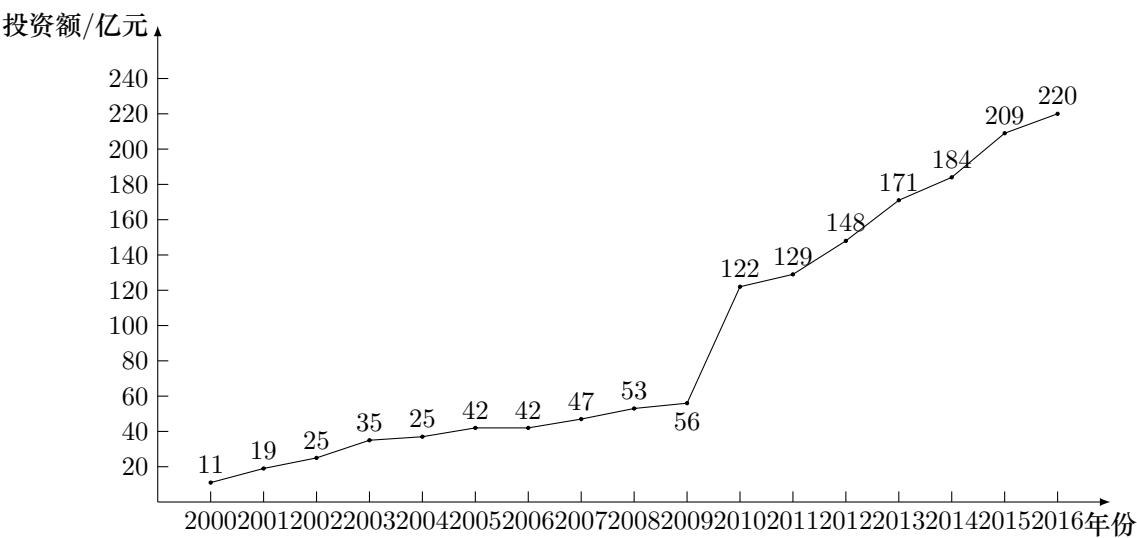
(004056) 某公司随机调查了 45 户家庭, 研究其一种产品的家庭人均消费量 y 与家庭人均月收入 x 之间的关系, 得到的数据如下表所示.

家庭编号	家庭人均月收入 x / 元	家庭人均消费量 y / 元
1	5432	6.32
2	2336	3.52
3	3944	6.32
4	4656	21.60
5	9246	29.12
6	17512	76.00
7	8776	42.72
8	16624	54.80
9	14544	46.72
10	13600	41.68
11	5976	26.00
12	13144	25.28
13	3312	4.00
14	2832	1.36
15	10208	15.04
16	5960	6.16
17	3480	11.12
18	4320	4.48
19	6992	12.48
20	12344	42.24
21	8232	5.12
22	5680	32.00
23	6696	33.60
24	13984	39.04
25	11048	27.84
26	10040	21.04
27	14216	39.92
28	2960	4.72
29	9040	38.32
30	3704	4.08
31	6160	13.92
32	5792	32.80
33	6464	31.52

家庭编号	家庭人均月收入 x / 元	家庭人均消费量 y / 元
34	6320	6.68
35	6264	26.32
36	3248	3.52
37	9936	25.92
38	5264	17.12
39	13968	45.68
40	3744	5.12
41	8912	15.20
42	3304	4.08
43	14296	66.64
44	11960	40.88
45	12208	31.44

- (1) 绘制变量 y 与 x 的散点图;
- (2) 计算 y 与 x 的相关系数;
- (3) 试分析研究 y 与 x 之间的线性回归关系.

(004057) 下图是某地区 2000 年至 2016 年环境基础设施投资额 y (单位: 亿元) 的折线图.



为预测该地区 2018 年的环境基础设施投资额, 建立了 y 与时间变量 t 的两个线性回归模型. 其中, 根据 2000 年至 2016 年的数据 (时间变量 t 的值依次为 $1, 2, \dots, 17$) 建立了模型①: $y = -30.4 + 13.5t$; 而根据 2010 年至 2016 年的数据 (时间变量 t 的值依次为 $1, 2, \dots, 7$) 建立了模型②: $y = 99 + 17.5t$.

(1) 分别利用这两个模型, 求该地区 2018 年环境基础设施投资额的预测值;

(2) 你认为用哪个模型得到的预测值更可靠? 请说明理由.

(004058) 某地区市场上有 80 种品牌的饼干, 它们近一段时间内的平均售价 (以下简称 “价格”) 和销售量的数据如下表所示.

品牌编号	价格/(元/千克)	销售量/千克	品牌编号	价格/(元/千克)	销售量/千克
1	14	1231.85	2	34.62	1465.89
3	30.86	1774.29	4	14	1892.91
5	36	2324.44	6	28.41	2480.04
7	9.09	2545.33	8	44.84	2568.11
9	31.68	2638.48	10	20	3233.99
11	14.67	3518.17	12	19.09	3566.58
13	26.67	4264.28	14	17.51	4672.33
15	13	4752.20	16	25.24	4865.42
17	31.1	5042.91	18	26.24	5108.73
19	25.88	5367.70	20	17.81	5465.26
21	29.56	5500.35	22	25	5655.53
23	31.41	5865.45	24	23.48	6103.94
25	23.6	6243.10	26	22.13	6509.67
27	21.48	6758.18	28	25.03	7100.93
29	19.55	7356.44	30	24.81	7439.63
31	20.92	7627.28	32	17.7	7740.45
33	20.79	7744.67	34	24.63	7989.30
35	13.59	7996.84	36	19.29	8151.09
37	20	8231.85	38	22.03	8289.18
39	20.08	8524.06	40	19.03	8689.36
41	16.67	8874.66	42	16.04	8888.74
43	14.12	9005.62	44	13.75	9046.93
45	19.87	9384.98	46	15.72	9414.11
47	25.04	9454.50	48	14	9731.32
49	11.26	9762.08	50	11.25	9809.51
51	20.92	9924.99	52	16.95	10101.74
53	15.38	10461.08	54	13.88	10561.53
55	13.04	10960.55	56	29.33	11627.43
57	4.9	11838.62	58	11.91	12303.55

品牌编号	价格/(元/千克)	销售量/千克	品牌编号	价格/(元/千克)	销售量/千克
59	13.9	12713.01	60	17.78	12830.94
61	17.31	13686.17	62	12.27	14181.94
63	11.89	15175.16	64	10.08	17658.74
65	6.13	18058.67	66	10.4	19937.88
67	12.7	23055.87	68	9.19	26508.14
69	8	29504.40	70	5.22	31693.07
71	9.23	32123.53	72	7.6	34732.28
73	8.33	36321.39	74	9.25	36898.25
75	9.36	38343.50	76	8.42	39033.51
77	6.25	43832.88	78	23.01	112827.40
79	8.7	139493.10	80	12.32	21134.65

试对这 80 种品牌饼干近一段时间内的价格和销售量进行回归分析.