

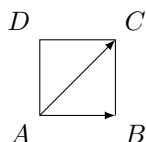
2021 年秋考

1. 已知 $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 2 + 3i$ (i 是虚数单位), 则 $z_1 + z_2 =$ _____.

2. 已知 $A = \{x | 2x \leq 1\}$, $B = \{-1, 0, 1\}$, 则 $A \cap B =$ _____.

3. 已知圆 $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$, 则该圆的圆心坐标为_____.

4. 如图, 正方形 $ABCD$ 的边长为 3, 则 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} =$ _____.



5. 已知 $f(x) = \frac{3}{x} + 2$, 则 $f^{-1}(1) =$ _____.

6. 已知二项式 $(x + a)^5$ 展开式中, x^2 项的系数为 80, 则 $a =$ _____.

7. 已知实数 x, y 满足 $\begin{cases} x \leq 3, \\ 2x - y - 2 \geq 0, \\ 3x + y - 8 \geq 0, \end{cases}$ 则 $z = x - y$ 的最大值为_____.

8. 已知无穷等比数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$, 满足 $a_1 = 3$, $b_n = a_{2n}$, a_n 的各项和为 9, 则数列 $\{b_n\}$ 的各项和为_____.

9. 已知圆柱的底面半径为 1, 高为 2, AB 为上底面圆的一条直径, C 为下底面圆周上的一个动点, 则 $\triangle ABC$ 的面积取值范围为_____.

10. 已知花博会有四个不同的场馆 A、B、C、D, 甲、乙两人每人选 2 个去参观, 则他们的选择中, 恰有一个场馆相同的概率为_____.

11. 已知抛物线: $y^2 = 2px$ ($p > 0$), 若第一象限的 A, B 两点在抛物线上, 焦点为 F , $|AF| = 2$, $|BF| = 4$, $|AB| = 3$, 则直线 AB 的斜率为_____.

12. 已知 $a_i \in \mathbb{N}^*$ ($i = 1, 2, \dots, 9$), 若对任意的 $k \in \mathbb{N}^*$ ($2 \leq k \leq 8$), $a_k = a_{k-1} + 1$ 或 $a_k = a_{k+1} - 1$ 中有且仅有一个成立, 且 $a_1 = 6$, $a_9 = 9$, 则 $a_1 + a_2 + \dots + a_9$ 的最小值为_____.

13. 下列函数中, 既是奇函数又是减函数的是 ().

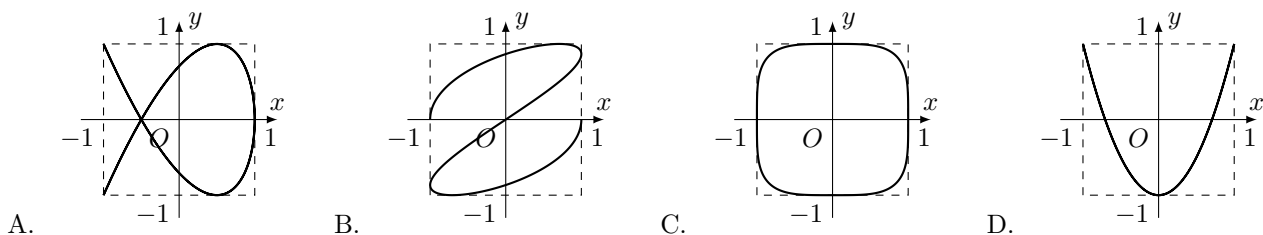
A. $y = -3x$

B. $y = x^3$

C. $y = \log_3 x$

D. $y = 3^x$

14. 已知参数方程 $\begin{cases} x = 3t - 4t^3, \\ y = 2t\sqrt{1-t^2}, \end{cases}$ ($t \in [-1, 1]$), 下列选项的图中, 该参数方程对应的曲线为 ().



15. 已知 $f(x) = 3\sin x + 2$, 对任意的 $x_1 \in [0, \frac{\pi}{2}]$, 都存在 $x_2 \in [0, \frac{\pi}{2}]$, 使得 $f(x_1) + 2f(x_2 + \theta) = 3$ 成立, 则在下列选项中 θ 可能的值为 ().

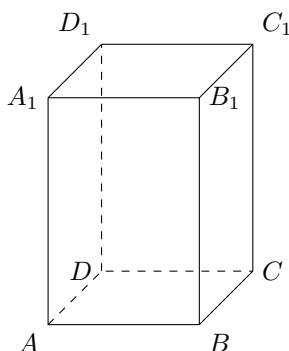
- A. $\frac{3\pi}{5}$ B. $\frac{4\pi}{5}$ C. $\frac{6\pi}{5}$ D. $\frac{7\pi}{5}$

16. 已知两两不等的实数 $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3$ 同时满足: ① $x_1 < y_1, x_2 < y_2, x_3 < y_3$; ② $x_1 + y_1 = x_2 + y_2 = x_3 + y_3$; ③ $x_1y_1 + x_3y_3 = 2x_2y_2 > 0$, 则下列选项中恒成立的是 ().

- A. $2x_2 < x_1 + x_3$ B. $2x_2 > x_1 + x_3$ C. $x_2^2 < x_1x_3$ D. $x_2^2 > x_1x_3$

17. 如图, 在长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 已知 $AB = BC = 2, AA_1 = 3$.

- (1) 若点 P 是棱 A_1D_1 上的动点, 求三棱锥 $C - PAD$ 的体积;
(2) 求直线 AB_1 与平面 ACC_1A_1 的夹角大小.



18. 已知在 $\triangle ABC$ 中, A, B, C 所对边分别为 a, b, c , 且 $a = 3, b = 2c$.

- (1) 若 $A = \frac{2\pi}{3}$, 求 $\triangle ABC$ 的面积;
(2) 若 $2\sin B - \sin C = 1$, 求 $\triangle ABC$ 的周长.

19. 已知某企业今年 (2021 年) 第一季度的营业额为 1.1 亿元, 以后每个季度的营业额比上个季度增加 0.05 亿元, 该企业第一季度的利润为 0.16 亿元, 以后每季度比前一季度增长 4%.

- (1) 求 2021 年起前 20 季度营业额的总和;
(2) 请问哪一季度的利润首次超过该季度营业额的 18%?

20. 已知椭圆 $\Gamma: \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$, F_1, F_2 是其左右焦点, 直线 l 过点 $P(m, 0)$ ($m < -\sqrt{2}$), 交椭圆 Γ 于 A, B 两点, 且 A, B 都在 x 轴上方, 点 A 在线段 BP 上.

- (1) 若 B 是上顶点, $|\overrightarrow{BF_1}| = |\overrightarrow{PF_1}|$, 求 m 的值;
(2) 若 $\overrightarrow{F_1A} \cdot \overrightarrow{F_2A} = \frac{1}{3}$, 且原点 O 到直线 l 的距离为 $\frac{4\sqrt{15}}{15}$, 求直线 l 的方程;

(3) 对于任意点 P , 是否存在唯一直线 l , 使得 $\overrightarrow{F_1A} \parallel \overrightarrow{F_2B}$ 成立? 若存在, 求出直线 l 的斜率; 若不存在, 请说明理由.

21. 已知 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的函数, 若对任意的 $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, $x_1 - x_2 \in S$, 均有 $f(x_1) - f(x_2) \in S$, 则称 $f(x)$ 是“ S -关联”的.

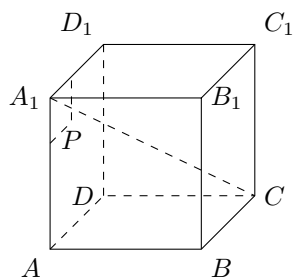
(1) 判断和证明 $f(x) = 2x + 1$ 是否是“ $[0, +\infty)$ -关联”的? 是否是“ $[0, 1]$ -关联”的?

(2) 若 $f(x)$ 是“ $\{3\}$ -关联”的, 且当 $x \in [0, 3)$ 时, $f(x) = x^2 - 2x$, 解不等式 $2 \leq f(x) \leq 3$;

(3) 证明: “ $f(x)$ 是 ‘ $\{1\}$ -关联’ 的, 且是 ‘ $[0, +\infty)$ -关联’ 的” 当且仅当 “ $f(x)$ 是 ‘ $[1, 2]$ -关联’ 的”.

2020 年秋考

- 已知集合 $A = \{1, 2, 4\}, B = \{2, 4, 5\}$, 则 $A \cap B =$ _____.
- 计算: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{3n-1} =$ _____.
- 已知复数 $z = 1 - 2i$ (i 为虚数单位), 则 $|z| =$ _____.
- 已知函数 $f(x) = x^3$, 则其反函数为_____.
- 已知 x, y 满足 $\begin{cases} x+y-2 \geq 0, \\ x+2y-3 \leq 0, \\ y \geq 0, \end{cases}$ 则 $z = y - 2x$ 的最大值为_____.
- 已知行列式 $\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 2 & c & d \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 6$, 则行列式 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} =$ _____.
- 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1 \neq 0$, 且满足 $a_1 + a_{10} = a_9$, 则 $\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_9}{a_{10}} =$ _____.
- 已知有四个数 $1, 2, a, b$, 这四个数的中位数为 3, 平均数为 4, 则 $ab =$ _____.
- 从 6 个人选 4 个人去值班, 每人值班一天, 第一天安排 1 个人, 第二天安排 1 个人, 第三天安排 2 个人, 则共有_____种安排情况.
- 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$, 直线 l 经过椭圆右焦点 F , 交椭圆 C 于 P, Q 两点 (点 P 在第二象限), 若 Q 关于 x 轴对称的点为 Q' , 且满足 $PQ \perp FQ'$, 则直线 l 的方程为_____.
- 已知 $a \in \mathbf{R}$, 若存在定义域为 \mathbf{R} 的函数 $f(x)$ 同时满足下列两个条件, ① 对任意 $x_0 \in \mathbf{R}$, $f(x_0)$ 的值为 x_0 或 x_0^2 ; ② 关于 x 的方程 $f(x) = a$ 无实数解; 则 a 的取值范围为_____.
- 已知 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_k$ ($k \in \mathbf{N}^*$) 是平面内两两互不相等的向量, 满足 $|\vec{a}_1 - \vec{a}_2| = 1$, 且 $|\vec{a}_i - \vec{b}_j| \in \{1, 2\}$ (其中 $i = 1, 2, j = 1, 2, \dots, k$), 则 k 的最大值为_____.
- 下列不等式恒成立的是 ().
 A. $a^2 + b^2 \leq 2ab$ B. $a^2 + b^2 \geq -2ab$ C. $a + b \geq 2\sqrt{|ab|}$ D. $a + b \geq -2\sqrt{|ab|}$
- 已知直线方程 $3x + 4y + 1 = 0$ 的一个参数方程可以是 ().
 A. $\begin{cases} x = 1 + 3t, \\ y = -1 + 4t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = 1 - 4t, \\ y = -1 - 3t \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = 1 - 3t, \\ y = -1 + 4t \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = 1 + 4t, \\ y = -1 - 3t \end{cases}$
- 在棱长为 10 的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, P 为左侧面 ADD_1A_1 上一点, 已知点 P 到 A_1D_1 的距离为 3, P 到 AA_1 的距离为 2, 则过点 P 且与 A_1C 平行的直线相交的正方体的面是 ().



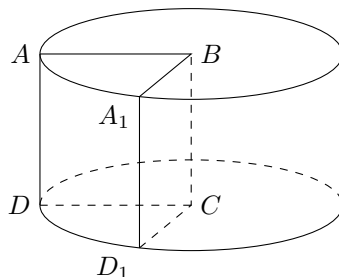
- A. $ABCD$ B. BB_1C_1C C. CC_1D_1D D. AA_1B_1B

16. 命题 p : 存在 $a \in \mathbf{R}$ 且 $a \neq 0$, 对任意的 $x \in \mathbf{R}$, 均有 $f(x+a) < f(x) + f(a)$ 恒成立. 已知命题 q_1 : $f(x)$ 单调递减, 且 $f(x) > 0$ 恒成立; 命题 q_2 : $f(x)$ 单调递增, 且存在 $x_0 < 0$ 使得 $f(x_0) = 0$. 则下列说法正确的是 ().

- A. q_1 、 q_2 都是 p 的充分条件 B. 只有 q_1 是 p 的充分条件
C. 只有 q_2 是 p 的充分条件 D. q_1 、 q_2 都不是 p 的充分条件

17. 已知边长为 1 的正方形 $ABCD$, 正方形 $ABCD$ 绕 BC 旋转形成一个圆柱.

- (1) 求圆柱的表面积;
(2) 正方形 $ABCD$ 绕 BC 逆时针旋转 $\frac{\pi}{2}$ 到 A_1BCD_1 , 求 AD_1 与平面 $ABCD$ 所成的角.



18. 已知 $f(x) = \sin \omega x (\omega > 0)$.

- (1) $f(x)$ 的周期是 4π , 求 ω , 并求此时 $f(x) = \frac{1}{2}$ 的解集;
(2) 已知 $\omega = 1$, $g(x) = f^2(x) + \sqrt{3}f(-x)f(\frac{\pi}{2} - x)$, $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$, 求 $g(x)$ 的值域.

19. 在研究某市交通情况时, 道路密度是指该路段上一定时间内通过的车辆数除以时间, 车辆密度是该路段一定时间内通过的车辆数除以该路段的长度, 现定义交通流量为 $v = \frac{q}{x}$, x 为道路密度, q 为车辆密度, $v = f(x) =$

$$\begin{cases} 100 - 135(\frac{1}{3})^{\frac{80}{x}}, & 0 < x < 40, \\ -k(x - 40) + 85, & 40 \leq x \leq 80, \end{cases} \quad k > 0.$$

- (1) 若交通流量 $v > 95$, 求道路密度 x 的取值范围;
(2) 若道路密度 $x = 80$ 时, 测得交通流量 $v = 50$, 求车辆密度 q 的最大值.
20. 双曲线 $C_1: \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 与圆 $C_2: x^2 + y^2 = 4 + b^2$ ($b > 0$) 交于点 $A(x_A, y_A)$ (第一象限), 曲线 Γ 由所有在 C_1 或 C_2 上, 且满足 $|x| > x_A$ 的点组成, C_2 与 x 轴的左、右交点分别记作 F_1, F_2 .
- (1) 若 $x_A = \sqrt{6}$, 求 b 的值;

- (2) 若 $b = \sqrt{5}$, 点 P 在曲线 Γ 上, 且在第一象限, $|PF_1| = 8$, 求 $\angle F_1PF_2$;
- (3) 点 $D(0, \frac{b^2}{2} + 2)$, 过该点的直线斜率为 $-\frac{b}{2}$ 的 l 和 Γ 有且只有两个交点, 记作 M, N , 用 b 表示 $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON}$, 并求 $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON}$ 的取值范围.

21. 已知有限数列 $\{a_n\}$, 若满足 $|a_1 - a_2| \leq |a_1 - a_3| \leq \cdots \leq |a_1 - a_m|$, m 是项数, 则称 $\{a_n\}$ 满足性质 P .

- (1) 判断数列 $3, 2, 5, 1$ 和 $4, 3, 2, 5, 1$ 是否具有性质 P , 请说明理由;
- (2) 若首项 $a_1 = 1$, 公比为 q 的等比数列, 项数为 10 , 具有性质 P , 求 q 的取值范围;
- (3) 若 $\{a_n\}$ 是 $1, 2, \cdots, m$ 的一个排列 ($m \geq 4$), $\{b_n\}$ 符合 $b_k = a_{k+1} (k = 1, 2, \cdots, m-1)$, $\{a_n\}, \{b_n\}$ 都具有性质 P , 求所有满足条件的 $\{a_n\}$.

2019 年秋考

1. 已知集合 $A = (-\infty, 3)$, $B = (2, +\infty)$, 则 $A \cap B =$ _____.
2. 已知 $z \in \mathbf{C}$. 若 $\frac{1}{z-5} = i$ (i 为虚数单位), 则 $z =$ _____.
3. 已知向量 $\vec{a} = (1, 0, 2)$, $\vec{b} = (2, 1, 0)$, 则 \vec{a} 与 \vec{b} 的夹角为_____.
4. 在二项式 $(2x+1)^5$ 的展开式中, x^2 的系数是_____.
5. 已知 x, y 满足 $\begin{cases} x \geq 0, \\ y \geq 0, \\ x+y \leq 2, \end{cases}$ 则 $2x-3y$ 的最小值为_____.
6. 已知函数 $f(x)$ 的周期为 1, 当 $0 < x \leq 1$ 时, $f(x) = \log_2 x$, 则 $f\left(\frac{3}{2}\right)$ 的值为_____.
7. 已知 $x, y \in \mathbf{R}^*$, 且满足 $\frac{1}{x} + 2y = 3$, 则 $\frac{y}{x}$ 的最大值为_____.
8. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且满足 $S_n + a_n = 2$, 则 $S_5 =$ _____.
9. 过曲线 $y^2 = 4x$ 的焦点 F 并垂直于 x 轴的直线分别与曲线 $y^2 = 4x$ 交于 A, B , A 在 B 的上方, M 为抛物线上一点, $\vec{OM} = \lambda \vec{OA} + (\lambda - 2)\vec{OB}$, 则 $\lambda =$ _____.
10. 某三位数密码, 每位数字可在 0 至 9 这 10 个数字中任选一个, 则该三位数密码中, 恰有两位数字相同的概率是_____.
11. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n < a_{n+1}$ ($n \in \mathbf{N}^*$), 若 $P_n(n, a_n)$ ($n \geq 3$) 均在双曲线 $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{6} = 1$ 上, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} |P_n P_{n+1}| =$ _____.
12. 已知 $f(x) = \left| \frac{2}{x-1} - a \right|$ ($x > 1, a > 0$), $f(x)$ 的图像与 x 轴的交点为 A , 若对于 $f(x)$ 的图像上任意一点 P , 在其图像上总存在另一点 Q (P, Q 异于 A), 满足 $AP \perp AQ$, 且 $|AP| = |AQ|$, 则 $a =$ _____.
13. 已知直线 l 的方程为 $2x - y + c = 0$, 则 l 的一个方向向量 \vec{d} 可以是 ().
 A. $(2, -1)$ B. $(2, 1)$ C. $(-1, 2)$ D. $(1, 2)$
14. 一个直角三角形的两直角边长分别为 1 和 2, 将该三角形分别绕其两直角边所在直线旋转, 得到的两个圆锥的体积之比为 ().
 A. 1 B. 2 C. 4 D. 8
15. 已知 $\omega \in \mathbf{R}$, 函数 $f(x) = (x-6)^2 \cdot \sin(\omega x)$. 若存在常数 $a \in \mathbf{R}$, 使得 $f(x+a)$ 为偶函数, 则 ω 的值可能为 ().
 A. $\frac{\pi}{2}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{\pi}{4}$ D. $\frac{\pi}{5}$

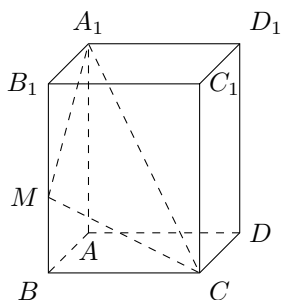
16. 已知 $\tan \alpha \tan \beta = \tan(\alpha + \beta)$, 有下列两个结论: ① 存在 α 在第一象限, β 在第三象限; ② 存在 α 在第二象限, β 在第四象限; 则 ().

A. ①②均正确 B. ①②均错误 C. ①对②错 D. ①错②对

17. 如图, 在长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, M 为 BB_1 上一点, 已知 $BM = 2$, $CD = 3$, $AD = 4$, $AA_1 = 5$.

(1) 求直线 A_1C 与平面 $ABCD$ 的夹角;

(2) 求点 A 到平面 A_1MC 的距离.



18. 已知 $f(x) = ax + \frac{1}{x+1}$, $a \in \mathbf{R}$.

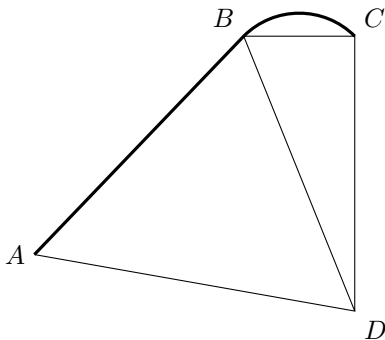
(1) 已知 $a = 1$ 时, 求不等式 $f(x) + 1 < f(x+1)$ 的解集;

(2) 若 $f(x)$ 在 $x \in [1, 2]$ 时有零点, 求 a 的取值范围.

19. 如图, $A - B - C$ 为海岸线, AB 为线段, \widehat{BC} 为四分之一圆弧. $BD = 39.2\text{km}$, $\angle BDC = 22^\circ$, $\angle CBD = 68^\circ$, $\angle BDA = 58^\circ$.

(1) 求 \widehat{BC} 的长度;

(2) 若 $AB = 40\text{km}$, 求 D 到海岸线 $A - B - C$ 的最短距离 (精确到 0.001km).



20. 已知椭圆 $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$, F_1 、 F_2 为左、右焦点, 直线 l 过 F_2 , 交椭圆于 A 、 B 两点.

(1) 若直线 l 垂直于 x 轴, 求 $|AB|$;

(2) 当 $\angle F_1AB = 90^\circ$, A 在 x 轴上方时, 求 A 、 B 的坐标;

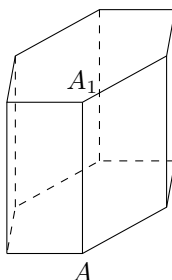
(3) 若直线 AF_1 交 y 轴于 M , 直线 BF_1 交 y 轴于 N , 是否存在直线 l , 使得 $S_{\triangle F_1AB} = S_{\triangle F_1MN}$? 若存在, 求出直线 l 的方程; 若不存在, 说明理由.

21. 数列 $\{a_n\}$ ($n = 1, 2, 3, \dots, 100$) 有 100 项, $a_1 = a$, 且对任意 $n = 2, 3, \dots, 100$, 存在 $a_n = a_i + d$, $i = 1, 2, \dots, n-1$. 若 a_k 与前 $k-1$ 项中某一项相等, 则称 a_k 具有性质 P .

- (1) 若 $a_1 = 1$, $d = 2$, 求 a_4 的所有可能的值;
- (2) 若 $\{a_n\}$ 不是等差数列, 求证: 数列 $\{a_n\}$ 中存在某些项具有性质 P ;
- (3) 若 $\{a_n\}$ 中恰有三项具有性质 P , 这三项之和为 c , 请用 a, d, c 表示 $a_1 + a_2 + \cdots + a_{100}$.

2018 年秋考

- 行列式 $\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$ 的值为_____.
- 双曲线 $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ 的渐近线方程为_____.
- 在 $(1+x)^7$ 的二项展开式中, x^2 项的系数为_____ (结果用数值表示).
- 设常数 $a \in \mathbf{R}$, 函数 $f(x) = \log_2(x+a)$. 若 $f(x)$ 的反函数的图像经过点 $(3, 1)$, 则 $a =$ _____.
- 已知复数 z 满足 $(1+i)z = 1 - 7i$ (i 是虚数单位), 则 $|z| =$ _____.
- 记等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n . 若 $a_3 = 0$, $a_6 + a_7 = 14$, 则 $S_7 =$ _____.
- 已知 $\alpha \in \left\{-2, -1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 2, 3\right\}$. 若幂函数 $f(x) = x^\alpha$ 为奇函数, 且在 $(0, +\infty)$ 上递减, 则 $\alpha =$ _____.
- 在平面直角坐标系中, 已知点 $A(-1, 0)$ 、 $B(2, 0)$, E 、 F 是 y 轴上的两个动点, 且 $|EF| = 2$, 则 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BF}$ 的最小值为_____.
- 有编号互不相同的五个砝码, 其中 5 克、3 克、1 克砝码各一个, 2 克砝码两个. 从中随机选取三个, 则这三个砝码的总质量为 9 克的概率是_____ (结果用最简分数表示).
- 设等比数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = q^{n-1}$ ($n \in \mathbf{N}^*$), 前 n 项和为 S_n . 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{a_{n+1}} = \frac{1}{2}$, 则 $q =$ _____.
- 已知常数 $a > 0$, 函数 $f(x) = \frac{2^x}{2^x + ax}$ 的图像经过点 $P\left(p, \frac{6}{5}\right)$, $Q\left(q, -\frac{1}{5}\right)$. 若 $2^{p+q} = 36pq$, 则 $a =$ _____.
- 已知实数 x_1 、 x_2 、 y_1 、 y_2 满足: $x_1^2 + y_1^2 = 1$, $x_2^2 + y_2^2 = 1$, $x_1x_2 + y_1y_2 = \frac{1}{2}$, 则 $\frac{|x_1 + y_1 - 1|}{\sqrt{2}} + \frac{|x_2 + y_2 - 1|}{\sqrt{2}}$ 的最大值为_____.
- 设 P 是椭圆 $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{3} = 1$ 上的动点, 则 P 到该椭圆的两个焦点的距离之和为 ().
 A. $2\sqrt{2}$ B. $2\sqrt{3}$ C. $2\sqrt{5}$ D. $4\sqrt{2}$
- 已知 $a \in \mathbf{R}$, 则 “ $a > 1$ ” 是 “ $\frac{1}{a} < 1$ ” 的 ().
 A. 充分非必要条件 B. 必要非充分条件
 C. 充要条件 D. 既非充分又非必要条件
- 《九章算术》中, 称底面为矩形而有一侧棱垂直于底面的四棱锥为阳马. 设 AA_1 是正六棱柱的一条侧棱, 如图. 若阳马以该正六棱柱的顶点为顶点、以 AA_1 为底面矩形的一边, 则这样的阳马的个数是 ().



A. 4

B. 8

C. 12

D. 16

16. 设 D 是含数 1 的有限实数集, $f(x)$ 是定义在 D 上的函数. 若 $f(x)$ 的图像绕原点逆时针旋转 $\frac{\pi}{6}$ 后与原图像重合, 则在以下各项中, $f(1)$ 的可能取值只能是 ().

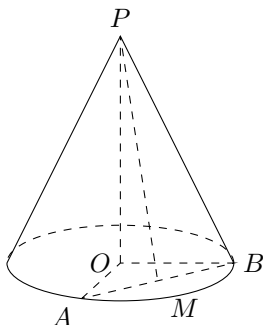
A. $\sqrt{3}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

D. 0

17. 已知圆锥的顶点为 P , 底面圆心为 O , 半径为 2.

(1) 设圆锥的母线长为 4, 求圆锥的体积;

(2) 设 $PO = 4$, OA 、 OB 是底面半径, 且 $\angle AOB = 90^\circ$, M 为线段 AB 的中点, 如图, 求异面直线 PM 与 OB 所成的角的大小.



18. 设常数 $a \in \mathbf{R}$, 函数 $f(x) = a \sin 2x + 2 \cos^2 x$.

(1) 若 $f(x)$ 为偶函数, 求 a 的值;

(2) 若 $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3} + 1$, 求方程 $f(x) = 1 - \sqrt{2}$ 在区间 $[-\pi, \pi]$ 上的解.

19. 某群体的人均通勤时间, 是指单日内该群体中成员从居住地到工作地的平均用时. 某地上班族 S 中的成员仅以自驾或公交方式通勤. 分析显示: 当 S 中 $x\%$ ($0 < x < 100$) 的成员自驾时, 自驾群体的人均通勤时间为

$$f(x) = \begin{cases} 30, & 0 < x \leq 30, \\ 2x + \frac{1800}{x} - 90, & 30 < x < 100 \end{cases} \quad (\text{单位: 分钟}),$$

而公交群体的人均通勤时间不受 x 影响, 恒为 40 分钟. 试根据上述分析结果回答下列问题:

(1) 当 x 在什么范围内时, 公交群体的人均通勤时间少于自驾群体的人均通勤时间;

(2) 求该地上班族 S 的人均通勤时间 $g(x)$ 的表达式; 讨论 $g(x)$ 的单调性, 并说明其实际意义.

20. 设常数 $t > 2$. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知点 $F(2, 0)$, 直线 $l: x = t$, 曲线 $\Gamma: y^2 = 8x$ ($0 \leq x \leq t, y \geq 0$). l 与 x 轴交于点 A 、与 Γ 交于点 B . P 、 Q 分别是曲线 Γ 与线段 AB 上的动点.

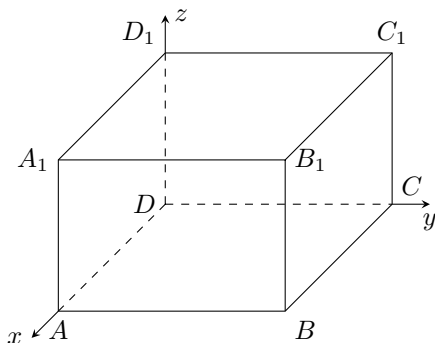
(1) 用 t 表示点 B 到点 F 的距离;

(2) 设 $t = 3$, $|FQ| = 2$, 线段 OQ 的中点在直线 FP 上, 求 $\triangle AQP$ 的面积;

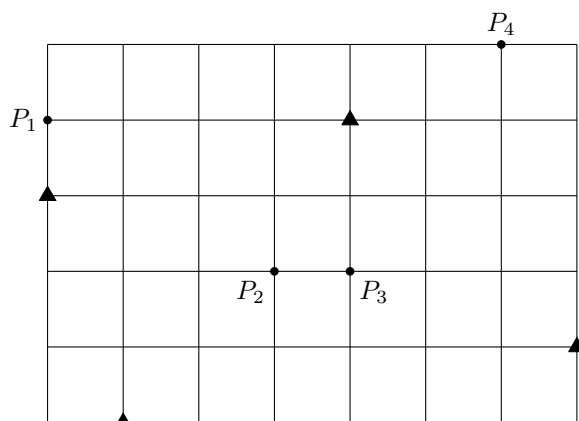
(3) 设 $t = 8$, 是否存在以 FP 、 FQ 为邻边的矩形 $FPEQ$, 使得点 E 在 Γ 上? 若存在, 求点 P 的坐标; 若不存在, 说明理由.

21. 给定无穷数列 $\{a_n\}$, 若无穷数列 $\{b_n\}$ 满足: 对任意 $n \in \mathbf{N}^*$, 都有 $|b_n - a_n| \leq 1$, 则称 $\{b_n\}$ 与 $\{a_n\}$ “接近”.
- (1) 设 $\{a_n\}$ 是首项为 1, 公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列, $b_n = a_{n+1} + 1$, $n \in \mathbf{N}^*$. 判断数列 $\{b_n\}$ 是否与 $\{a_n\}$ 接近, 并说明理由;
- (2) 设数列 $\{a_n\}$ 的前四项为: $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 4$, $a_4 = 8$, $\{b_n\}$ 是一个与 $\{a_n\}$ 接近的数列, 记集合 $M = \{x | x = b_i, i = 1, 2, 3, 4\}$, 求 M 中元素的个数 m ;
- (3) 已知 $\{a_n\}$ 是公差为 d 的等差数列. 若存在数列 $\{b_n\}$ 满足: $\{b_n\}$ 与 $\{a_n\}$ 接近, 且在 $b_2 - b_1, b_3 - b_2, \dots, b_{201} - b_{200}$ 中至少有 100 个为正数, 求 d 的取值范围.

1. 已知集合 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5\}$, 则 $A \cap B =$ _____.
2. 若排列数 $P_6^m = 6 \times 5 \times 4$, 则 $m =$ _____.
3. 不等式 $\frac{x-1}{x} > 1$ 的解集为_____.
4. 已知球的体积为 36π , 则该球主视图的面积等于_____.
5. 已知复数 z 满足 $z + \frac{3}{z} = 0$, 则 $|z| =$ _____.
6. 设双曲线 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($b > 0$) 的焦点为 F_1, F_2 , P 为该双曲线上的一点, 若 $|PF_1| = 5$, 则 $|PF_2| =$ _____.
7. 如图, 以长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的顶点 D 为坐标原点, 过 D 的三条棱所在的直线为坐标轴, 建立空间直角坐标系. 若 $\overrightarrow{DB_1}$ 的坐标为 $(4, 3, 2)$, 则 $\overrightarrow{AC_1}$ 的坐标是_____.



8. 定义在 $(0, +\infty)$ 上的函数 $y = f(x)$ 的反函数为 $y = f^{-1}(x)$. 若 $g(x) = \begin{cases} 3^x - 1, & x \leq 0, \\ f(x), & x > 0 \end{cases}$ 为奇函数, 则 $f^{-1}(x) = 2$ 的解为_____.
9. 已知四个函数: ① $y = -x$, ② $y = -\frac{1}{x}$, ③ $y = x^3$, ④ $y = x^{\frac{1}{2}}$. 从中任选 2 个, 则事件“所选 2 个函数的图像有且仅有一个公共点”的概率为_____.
10. 已知数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$, 其中 $a_n = n^2$, $n \in \mathbf{N}^*$, $\{b_n\}$ 的项是互不相等的正整数. 若对于任意 $n \in \mathbf{N}^*$, $\{b_n\}$ 的第 a_n 项等于 $\{a_n\}$ 的第 b_n 项, 则 $\frac{\lg(b_1 b_4 b_9 b_{16})}{\lg(b_1 b_2 b_3 b_4)} =$ _____.
11. 设 $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{R}$, 且 $\frac{1}{2 + \sin \alpha_1} + \frac{1}{2 + \sin(2\alpha_2)} = 2$, 则 $|10\pi - \alpha_1 - \alpha_2|$ 的最小值等于_____.
12. 如图, 用 35 个单位正方形拼成一个矩形, 点 P_1, P_2, P_3, P_4 以及四个标记为“▲”的点在正方形的顶点处, 设集合 $\Omega = \{P_1, P_2, P_3, P_4\}$, 点 $P \in \Omega$. 过 P 作直线 l_P , 使得不在 l_P 上的“▲”的点分布在 l_P 的两侧. 用 $D_1(l_P)$ 和 $D_2(l_P)$ 分别表示 l_P 一侧和另一侧的“▲”的点到 l_P 的距离之和. 若过 P 的直线 l_P 中有且只有一条满足 $D_1(l_P) = D_2(l_P)$, 则 Ω 中所有这样的 P 为_____.



13. 关于 x, y 的二元一次方程组 $\begin{cases} x + 5y = 0, \\ 2x + 3y = 4 \end{cases}$ 的系数行列式 D 为 ().

A. $\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$

B. $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$

C. $\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$

D. $\begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$

14. 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$, $n \in \mathbf{N}^*$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ ().

A. 等于 $-\frac{1}{2}$

B. 等于 0

C. 等于 $\frac{1}{2}$

D. 不存在

15. 已知 a, b, c 为实常数, 数列 $\{x_n\}$ 的通项 $x_n = an^2 + bn + c$, $n \in \mathbf{N}^*$, 则“存在 $k \in \mathbf{N}^*$, 使得 $x_{100+k}, x_{200+k}, x_{300+k}$ 成等差数列”的一个必要条件是 ().

A. $a \geq 0$

B. $b \leq 0$

C. $c = 0$

D. $a - 2b + c = 0$

16. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知椭圆 $C_1: \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{4} = 1$ 和 $C_2: x^2 + \frac{y^2}{9} = 1$. P 为 C_1 上的动点, Q 为 C_2 上的动点, w 是 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}$ 的最大值. 记 $\Omega = \{(P, Q) | P \text{ 在 } C_1 \text{ 上, } Q \text{ 在 } C_2 \text{ 上, 且 } \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = w\}$, 则 Ω 中的元素有 ().

A. 2 个

B. 4 个

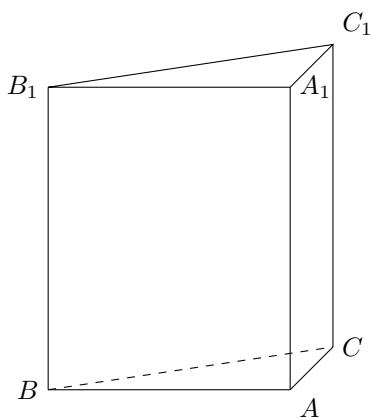
C. 8 个

D. 无穷个

17. 如图, 直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 的底面为直角三角形, 两直角边 AB 和 AC 的长分别为 4 和 2, 侧棱 AA_1 的长为 5.

(1) 求三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 的体积;

(2) 设 M 是 BC 中点, 求直线 A_1M 与平面 ABC 所成角的大小.



18. 已知函数 $f(x) = \cos^2 x - \sin^2 x + \frac{1}{2}$, $x \in (0, \pi)$.
- (1) 求 $f(x)$ 的单调递增区间;
 - (2) 设 $\triangle ABC$ 为锐角三角形, 角 A 所对的边 $a = \sqrt{19}$, 角 B 所对的边 $b = 5$, 若 $f(A) = 0$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.
19. 根据预测, 某地第 n ($n \in \mathbf{N}^*$) 个月共享单车的投放量和损失量分别为 a_n 和 b_n (单位: 辆), 其中 $a_n = \begin{cases} 5n^4 + 15, & 1 \leq n \leq 3, \\ -10n + 470, & n \geq 4, \end{cases}$ $b_n = n + 5$, 第 n 个月底的共享单车的保有量是前 n 个月的累计投放量与累计损失量的差.
- (1) 求该地区第 4 个月底的共享单车的保有量;
 - (2) 已知该地共享单车停放点第 n 个月底的单车容纳量 $S_n = -4(n - 46)^2 + 8800$ (单位: 辆). 设在某月底, 共享单车保有量达到最大, 问该保有量是否超出了此时停放点的单车容纳量?
20. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知椭圆 $\Gamma: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, A 为 Γ 的上顶点, P 为 Γ 上异于上、下顶点的动点. M 为 x 正半轴上的动点.
- (1) 若 P 在第一象限, 且 $|OP| = \sqrt{2}$, 求 P 的坐标;
 - (2) 设 $P\left(\frac{8}{5}, \frac{3}{5}\right)$. 若以 A, P, M 为顶点的三角形是直角三角形, 求 M 的横坐标;
 - (3) 若 $|MA| = |MP|$, 直线 AQ 与 Γ 交于另一点 C , 且 $\overrightarrow{AQ} = 2\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{PQ} = 4\overrightarrow{PM}$, 求直线 AQ 的方程.
21. 设定义在 \mathbf{R} 上的函数 $f(x)$ 满足: 对于任意的 $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, 当 $x_1 < x_2$ 时, 都有 $f(x_1) \leq f(x_2)$.
- (1) 若 $f(x) = ax^3 + 1$, 求 a 的取值范围;
 - (2) 若 $f(x)$ 是周期函数, 证明: $f(x)$ 是常值函数;
 - (3) 设 $f(x)$ 恒大于零. $g(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的、恒大于零的周期函数, M 是 $g(x)$ 的最大值. 函数 $h(x) = f(x)g(x)$. 证明: “ $h(x)$ 是周期函数” 的充要条件是 “ $f(x)$ 是常值函数”.