1. 已知集合 $A=\{y|y=\sin x,\ x\in\mathbf{R}\}$, 集合 $B=\{y|y=\sqrt{x},\ x\in\mathbf{R}\}$, 则 $A\cap B=$__________.

2. 已知 $1+\mathrm{i}$ 是实系数一元二次方程 $x^2+ax+b=0$ 的根 (i 为虚数单位), 则 $2a+b=$__________.

3. 已知关于 x,y 的二元一次方程组的增广矩阵为 $\begin{pmatrix}2 & 1 & 5\\ 1 & -2 & 0\end{pmatrix}$, 则 $xy=$__________.

4. 已知球的主视图的面积为 $\dfrac{\pi}{4}$, 则该球的体积为__________.

5. 在平面直角坐标系 xOy 中, 直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=t-1,\\ y=t,\end{cases}$ (t 为参数) 圆 O 的参数方程为 $\begin{cases}x=\cos\theta,\\ y=\sin\theta,\end{cases}$ (θ 为参数) 则直线 l 与圆 O 的位置关系是__________.

6. 已知实数 x、y 满足条件 $\begin{cases}x-y\geq 0,\\ y\geq 0,\\ x+y\leq 1,\end{cases}$ 则目标函数 $z=2x-y$ 的最大值为__________.

7. 方程 $(\log_3 x)^2+\log_9 3x=2$ 的解集为__________.

8. 某校高一、高二、高三共有 200 名学生, 为调查他们的体育锻炼情况, 通过分层抽样获得了 20 名学生一周的锻炼时间, 数据如下表 (单位: 小时):

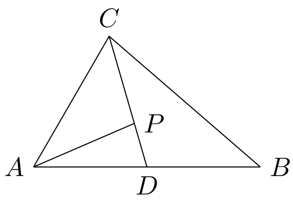
高一	6	6.5	7	7.5	8			
高二	6	7	8	9	10	11	12	
高三	3	4.5	6	7.5	9	10.5	12	13.5

则根据上述样本数据估计该校学生一周的锻炼时间不小于 7 小时的人数为__________.

9. 从 $m(m\in\mathbf{N}^*,\ m\geq 4)$ 个男生、6 个女生中任选 2 个人当发言人, 假设事件 A 表示选出的 2 个人性别相同, 事件 B 表示选出的 2 个人性别不同. 如果 A 的概率和 B 的概率相等, 则 $m=$__________.

10. 将函数 $f(x)=2\sin 2x$ 的图像向左平移 $\dfrac{\pi}{6}$ 个单位, 再向下平移 1 个单位, 得到函数的 $y=g(x)$ 图像. 若 $y=g(x)$ 在 $[0,b](b>0)$ 上至少含有 2021 个零点, 则 b 的最小值为__________.

11. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC=\dfrac{\pi}{3}$, D 为 AB 中点, P 为 CD 上一点, 且满足 $\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AC}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, 若 $\triangle ABC$ 的面积为 $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$, 则 $|\overrightarrow{AP}|$ 的最小值为__________.



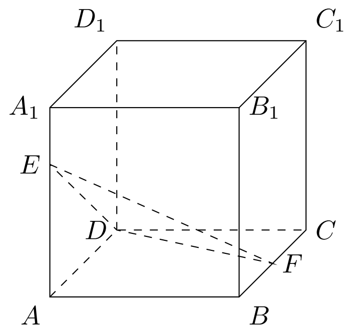
12. 已知数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 满足 $a_1=b_1=1$, 对任何正整数 n 均有 $a_{n+1}=a_n+b_n+\sqrt{a_n^2+b_n^2}$, $b_{n+1}=a_n+b_n-\sqrt{a_n^2+b_n^2}$, 设 $c_n=3^n(\frac{1}{a_n}+\frac{1}{b_n})$, 则数列 $\{c_n\}$ 的前 2020 项之和为__________.

13. 已知实数 $a\neq 0$, 则 "$a<1$" 是 "$\frac{1}{a}>1$" 的__________(　　)

A. 充分非必要条件　　B. 必要非充分条件

C. 充要条件　　D. 既非充分又非必要条件

14. 如图, 正方体 $A_1B_1C_1D_1-ABCD$ 中, E、F 分别为棱 A_1A、BC 上的点, 在平面 ADD_1A_1 内且与平面 DEF 平行的直线 (　　).



A. 有一条　　B. 有二条　　C. 有无数条　　D. 不存在

15. 已知函数 $f(x)(x\in D)$, 若对任意的 $x\in D$, 都存在 $t\in D$, 使 $f(t)=-f(x)$ 成立, 称 $f(x)$ 是 "拟奇函数". 下列函数是 "拟奇函数" 的个数是 (　　).

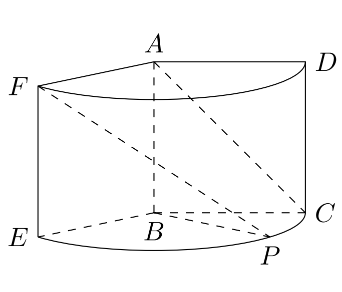
① $f(x)=x^2$; ② $f(x)=\ln x$; ③ $f(x)=x+\frac{1}{x}$; ④ $f(x)=\cos x$

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

16. 设集合 $S=\{1,2,3,\cdots,2020\}$, 设集合 A 是集合 S 的非空子集, A 中的最大元素和最小元素之差称为集合 A 的直径. 那么集合 S 所有直径为 71 的子集的元素个数之和为 (　　).

A. $71\cdot 1949$　　B. $2^{70}\cdot 1949$　　C. $2^{70}\cdot 37\cdot 1949$　　D. $2^{70}\cdot 72\cdot 1949$

17. 如图所示的几何体是圆柱的一部分, 它是由边长为 2 的正方形 $ABCD$(及其内部) 以 AB 边所在直线为旋转轴顺时针旋转 120° 得到的.



(1) 求此几何体的体积;

(2) 设 P 是弧 EC 上的一点, 且 $BP\perp BE$, 求异面直线 FP 与 CA 所成角的大小. (结果用反三角函数值表示)

18. 已知锐角 α、β 的顶点与坐标原点重合, 始边与 x 轴正方向重合, 终边与单位圆分别交于 P、Q 两点, 若 P、Q 两点的横坐标分别为 $\frac{3\sqrt{10}}{10}$、$\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

(1) 求 $\cos(\alpha+\beta)$ 的大小;

(2) 在 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 为三个内角 A, B, C 对应的边长, 若已知角 $C=\alpha+\beta$, $\tan A=\frac{3}{4}$, 且 $a^2=\lambda bc+c^2$, 求 λ 的值.

19. 疫情后, 为了支持企业复工复产, 某地政府决定向当地企业发放补助款, 其中对纳税额在 3 万元至 6 万元 (包括 3 万元和 6 万元) 的小微企业做统一方案. 方案要求同时具备下列两个条件: ① 补助款 $f(x)$(万元) 随企业原纳税额 x(万元) 的增加而增加; ② 补助款不低于原纳税额 x(万元) 的 50%. 经测算政府决定采用函数模型 $f(x)=\frac{x}{4}-\frac{b}{x}+4$(其中 b 为参数) 作为补助款发放方案.

(1) 判断使用参数 $b=12$ 是否满足条件, 并说明理由;

(2) 求同时满足条件①、②的参数 b 的取值范围.

20. 在平面直角坐标系 xOy 中, F_1, F_2 分别是椭圆 $\Gamma: \frac{x^2}{a^2}+y^2=1(a>0)$ 的左、右焦点, 直线 l 与椭圆交于不同的两点 A, B, 且 $|AF_1|+|AF_2|=2\sqrt{2}$.

(1) 求椭圆 Γ 的方程;

(2) 已知直线 l 经过椭圆的右焦点 F_2, P, Q 是椭圆上两点, 四边形 $ABPQ$ 是菱形, 求直线 l 的方程;

(3) 已知直线 l 不经过椭圆的右焦点 F_2, 直线 AF_2, l, BF_2 的斜率依次成等差数列, 求直线 l 在 y 轴上截距的取值范围.

21. 若数列 $\{a_n\}$ 对任意连续三项 a_i, a_{i+1}, a_{i+2}, 均有 $(a_i-a_{i+2})(a_{i+2}-a_{i+1})>0$, 则称该数列为 “跳跃数列”.

(1) 判断下列两个数列是否是跳跃数列:

① 等差数列: $1, 2, 3, 4, 5, \cdots$; ② 等比数列: $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \cdots$;

(2) 若数列 $\{a_n\}$ 满足对任何正整数 n, 均有 $a_{n+1}=a_1^{a_n}(a_1>0)$. 证明: 数列 $\{a_n\}$ 是跳跃数列的充分必要条件是 $0<a_1<1$;

(3) 跳跃数列 $\{a_n\}$ 满足对任意正整数 n 均有 $a_{n+1}=\frac{19-a_n^2}{5}$, 求首项 a_1 的取值范围.

22. 已知集合 $A=\{y|y=10^x,\ x\in\mathbf{R}\}$, $B=\{y|y=x^2,\ 1\le x\le 2\}$, 则 $A\cap B=$__________.

23. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^n-1}{3^n+1}=$__________.

24. 若关于 x, y 的方程组 $\begin{cases} x+y=m, \\ x+ny=1 \end{cases}$ 有无穷多组解, 则 $m+n$ 的值为__________.

25. 若 $-1+2\mathrm{i}$(i 为虚数单位) 是方程 $x^2+bx+c=0$(b、$c\in\mathbf{R}$) 的一个根, 则 $c-b=$__________.

26. 已知 P 为抛物线 $C: y^2=2px(p>0)$ 上一点, 点 P 到抛物线 C 的焦点的距离为 7, 到 y 轴的距离为 5, 则 $p=$__________.

27. 设复数 $z=\begin{vmatrix} \cos\alpha & \mathrm{i} \\ \sin\alpha & \sqrt{2}+\mathrm{i} \end{vmatrix}$($\mathrm{i}$ 为虚数单位), 若 $|z|=\sqrt{2}$, 则 $\tan 2\alpha=$__________.

28. 若 $(ax^2+\frac{1}{\sqrt{x}})^5$ 的展开式中的常数项为 $-\frac{5}{2}$, 则实数 a 的值为__________.

29. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D. 若对于 D 内的任意 $x_1, x_2(x_1 \neq x_2)$, 都有 $(x_2-x_1)[f(x_2)-f(x_1)]>0$, 则称函数 $f(x)$ 为 "Z 函数". 有下列函数: ① $f(x)=1$; ② $f(x)=-2x+1$; ③ $f(x)=x^3$; ④ $f(x)=\lg x$. 其中 "Z 函数" 的序号是__________(写出所有的正确序号).

30. 已知直三棱柱的各棱长都相等, 体积等于 $18(\mathrm{cm}^3)$. 若该三棱柱的所有顶点都在球 O 的表面上, 则球 O 的体积等于__________(cm^3).

31. 已知 F_1, F_2 是椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{3}=1(a>\sqrt{3})$ 的左、右焦点, 过原点 O 且倾斜角为 60° 的直线与椭圆 C 的一个交点为 M. 若 $|\overrightarrow{MF_1}+\overrightarrow{MF_2}|=|\overrightarrow{MF_1}-\overrightarrow{MF_2}|$, 则椭圆 C 的长轴长为__________.

32. 已知无穷等比数列 $a_1, a_2, a_3, \cdots$ 各项的和为 $\frac{9}{2}$, 且 $a_2=-2$, 若 $|S_n-\frac{9}{2}|<10^{-4}$, 则 n 的最小值为__________.

33. 若同一平面上不共线的四个点 P, Q, R, S 满足: $mn\overrightarrow{RP}=n(1-3m)\overrightarrow{QP}+m(n-1)\overrightarrow{SP}(m>0$、$n>0)$, 则当 $\triangle PRS$ 的面积是 $\triangle PQR$ 的面积的 $\frac{1}{3}$ 倍时, $\frac{1}{m+n}$ 的最大值为__________.

34. 设 $x \in \mathbf{R}$, 则 "$x>3$" 是 "$x^2>9$" 的 (　　).

A. 充分非必要条件　　B. 必要非充分条件

C. 充要条件　　D. 既非充分条件又非必要条件

35. 某班有学生 40 人, 将这 40 人编上 1 到 40 的号码, 用系统抽样的方法抽取一个容量为 4 的样本. 已知编号为 3、23、33 的学生在样本中, 则另一学生在样本中的编号为 (　　).

A. 12　　B. 13　　C. 14　　D. 15

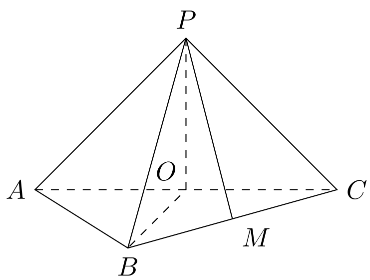
36. 已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\frac{\pi}{6})+\frac{1}{2}(\omega>0)$ 在区间 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上有且仅有两个零点, 则实数 ω 的取值范围为 (　　).

A. $(2, \frac{14}{3}]$　　B. $[2, \frac{14}{3})$　　C. $[\frac{10}{3}, 4)$　　D. $(\frac{10}{3}, 6]$

37. 如果数列 $u_1, u_2, \cdots, u_{10}$ 同时满足以下四个条件: ① $u_i \in \mathbf{Z}(i=1,2,\cdots,10)$; ② 点 $(u_5, 2^{u_2+u_8})$ 在函数 $y=4^x$ 的图像上; ③ 向量 $\overrightarrow{a}=(1, u_1)$ 与 $\overrightarrow{b}=(3, u_{10})$ 互相平行; ④ $u_{i+1}-u_i$ 与 $\frac{2}{u_{i+1}-u_i}$ 的等差中项为 $\frac{3}{2}(i=1,2,\cdots,9)$. 那么, 这样的数列 $u_1, u_2, \cdots, u_{10}$ 的个数为 (　　).

A. 78　　B. 80　　C. 82　　D. 90

38. 在三棱锥 $P-ABC$ 中, $PA=PB=PC=AC=2\sqrt{2}$, $BA=BC=2$, O 是线段 AC 的中点, M 是线段 BC 的中点.



(1) 求证: $PO \perp$ 平面 ABC;

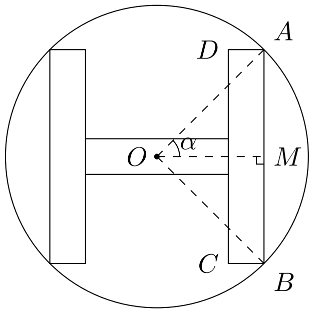
(2) 求直线 PM 与平面 PBO 所成的角的大小.

39. 将关于 x 的函数 $y=\dfrac{m(x+2)^2}{x}(m\in\mathbf{R})$ 的图像向右平移 2 个单位后得到的函数图像记为 C, 并设 C 所对应的函数为 $f(x)$.

(1) 当 $m>0$ 时, 试直接写出函数 $f(x)$ 的单调递减区间;

(2) 设 $f(4)=8$, 若函数 $g(x)=x^2-2ax+5(a>1)$ 对于任意 $t_1\in[0,1]$, 总存在 $t_2\in[0,1]$, 使得 $g(t_2)=f(t_1)$ 成立, 求 a 的取值范围.

40. 某工厂制作如图所示的一种标识, 在半径为 R 的圆内作一个关于圆心对称的 “H” 型图形, “H” 型图形由两竖一横三个等宽的矩形组成, 两个竖直的矩形全等且它们的长边是横向矩形长边的 $\dfrac{3}{2}$ 倍, 设 O 为圆心, $\angle AOB=2\alpha$, 记 “H” 型图形的面积为 S.



(1) 将 AB, AD 用 R,α 表示, 并将 S 表示成 α 的函数;

(2) 为了突出 “H” 型图形, 设计时应使 S 尽可能大, 则当 α 为何值时, S 最大? 并求出 S 的最大值.

41. 已知椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$.、、(1) 设 $M(x_M,y_M)$ 是椭圆 C 上的点, 证明: 直线 $\dfrac{x_Mx}{2}+y_My=1$ 与椭圆 C 有且只有一个公共点;

(2) 过点 $N(1,\sqrt{2})$ 作两条与椭圆只有一个公共点的直线, 公共点分别记为 A、B, 点 N 在直线 AB 上的射影为点 Q, 求点 Q 的坐标;

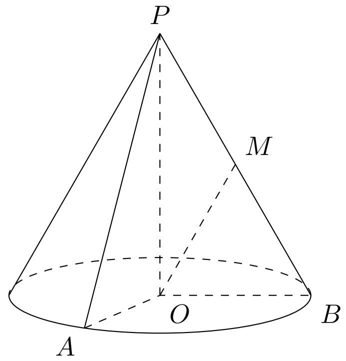
(3) 互相垂直的两条直线 l_1 与 l_2 相交于点 P, 且 l_1、l_2 都与椭圆 C 只有一个公共点, 求证点 P 落在 $x^2+y^2=3$ 上.

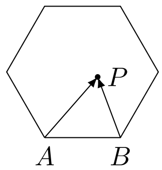
42. 若数列 $\{a_n\}$ 满足 “对任意正整数 i, j, $i\neq j$, 都存在正整数 k, 使得 $a_k=a_i\cdot a_j$”, 则称数列 $\{a_n\}$ 具有 “性质 P”.

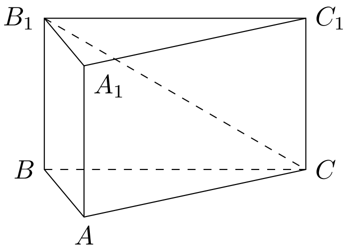
(1) 判断各项均等于 a 的常数列是否具有 “性质 P”, 并说明理由;

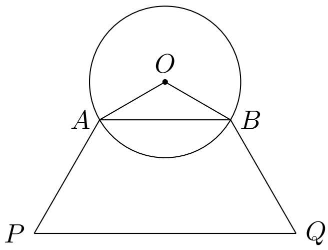
(2) 若公比为 2 的无穷等比数列 $\{a_n\}$ 具有 “性质 P”, 求首项 a_1 的值;

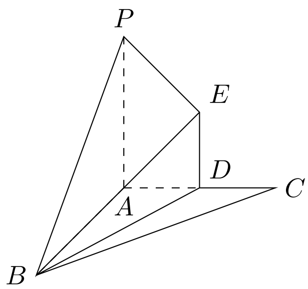
(3) 若首项 $a_1=2$ 的无穷等差数列 $\{a_n\}$ 具有 “性质 P”, 求公差 d 的值.

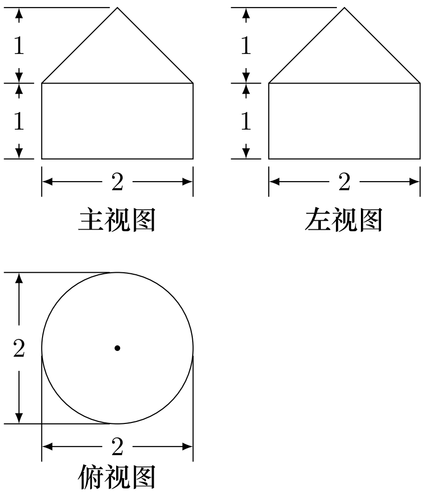

P
M
O
B
A

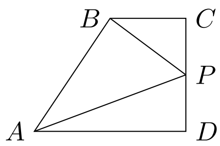

P
A
B

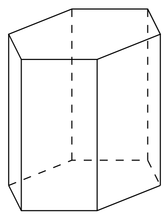

B_1
C_1
A_1
B
C
A

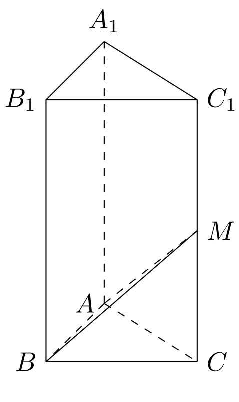

O
A
B
P
Q

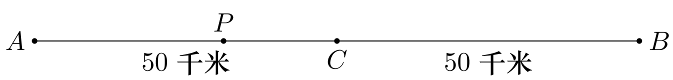

P
E
D
C
A
B

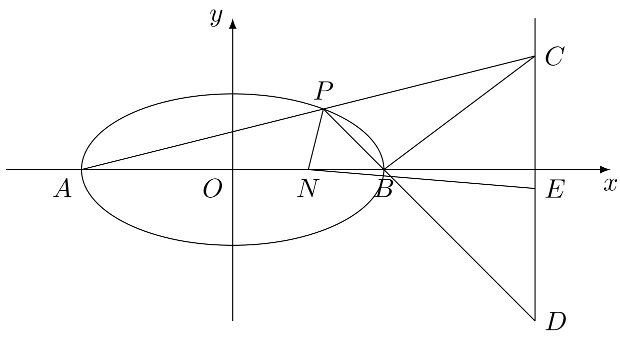

1
1
2
主视图
1
1
2
左视图
2
2
俯视图

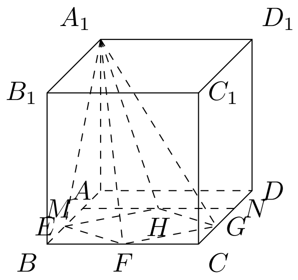

B
C
P
A
D



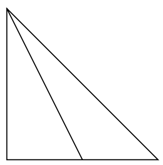

A1
B1
C1
M
A
B
C


A
P
B
50 千米
C
50 千米

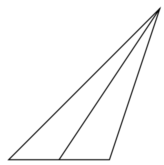

y
C
P
A
O
N
B
E
x
D



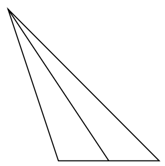
A.



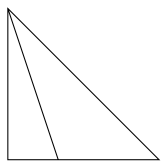
B.

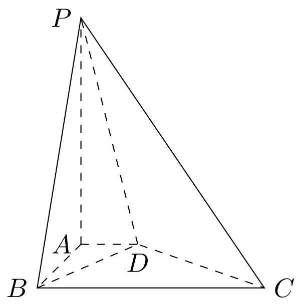


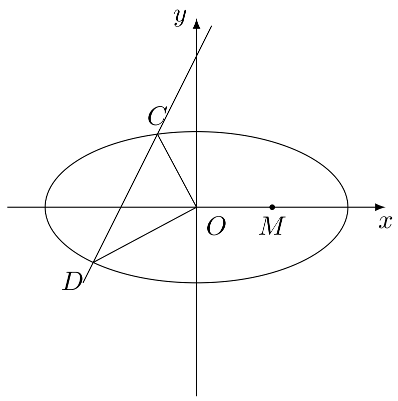
C.

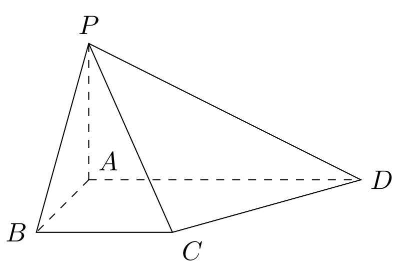


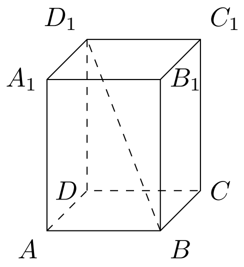
D.

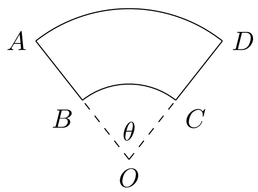


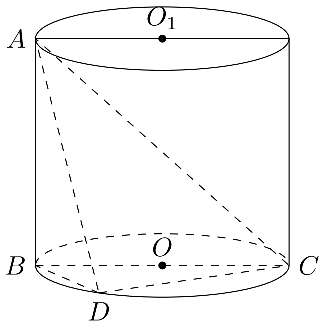




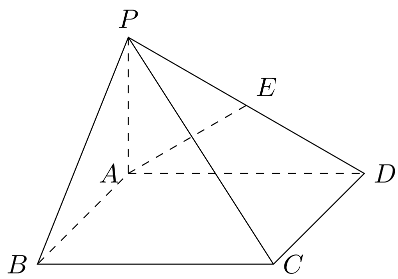


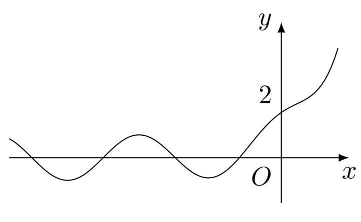


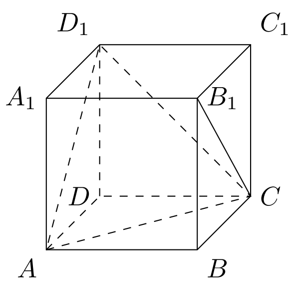




x	1	2	3	4	5
y	2.2	1	2	4.6	7







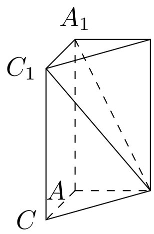

A_1
B_1
C_1
A
B
C

图 1

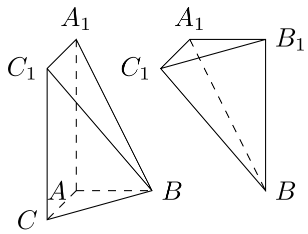
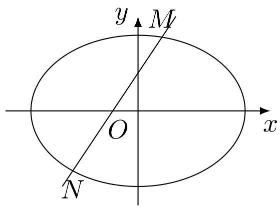
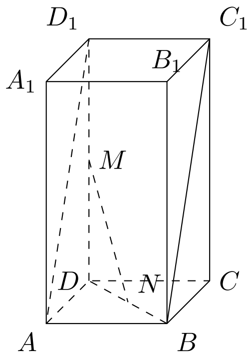
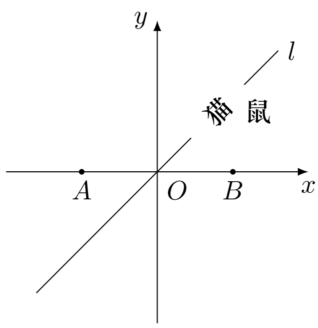
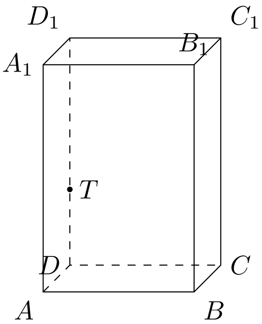

A_1
C_1
A
B
C
A_1
B_1
C_1
B

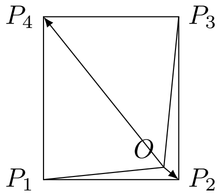
图 2


y
M
O
x
N

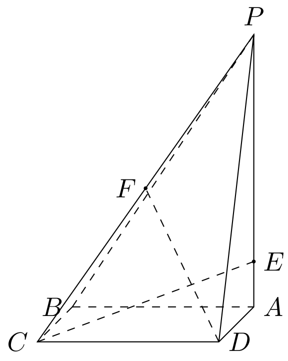

D_1
C_1
B_1
A_1
M
D
N
C
A
B


y
l
猫
鼠
A
O
B
x

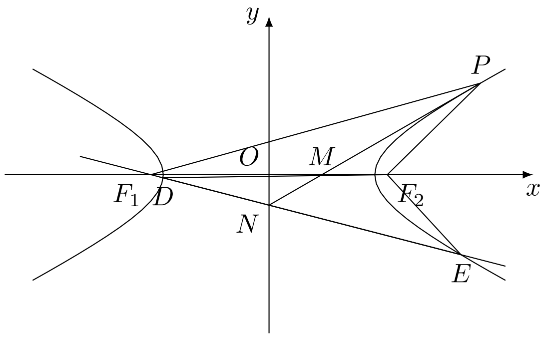

D_1
C_1
B_1
A_1
T
D
C
A
B



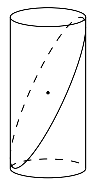
P_4
P_3
O
P_1
P_2

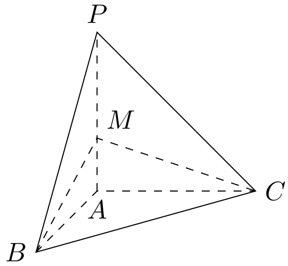


P
F
E
B
A
C
D

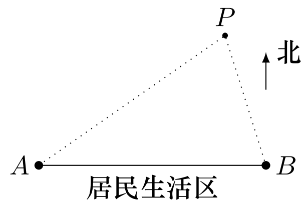


y
P
O
M
F_1
D
F_2
x
N
E





P
M
C
A
B


P
北
A
B
居民生活区