

1. 当 $a > b > 0$ 时, 比较 $\frac{2a+b}{a+2b}$ 和 $\frac{a}{b}$ 的大小.

2. 已知 $a > 0, a \neq 1, m > n > 0$, 比较 $A = a^m + \frac{1}{a^m}$ 和 $B = a^n + \frac{1}{a^n}$ 的大小.

3. 若 $a > b$, 则下列各式中正确的是 ()

- A. $a \lg x > b \lg x (x > 0)$ B. $ax^2 > bx^2$ C. $a^2 > b^2$ D. $2^x \cdot a > 2^x \cdot b$

【训练题】

4. 设 $ab > 0$, 且 $\frac{c}{a} > \frac{d}{b}$, 则下列各式中, 恒成立的是 ().

- A. $bc < ad$ B. $bc > ad$ C. $\frac{a}{c} > \frac{b}{d}$ D. $\frac{a}{c} < \frac{b}{d}$

5. 下列命题中, 不正确的一个是 ().

- A. 若 $\sqrt[3]{a} > \sqrt[3]{b}$, 则 $a > b$ B. 若 $a > b, c > d$, 则 $a - d > b - c$ C. 若 $a > b > 0, c > d > 0$, 则 $\frac{a}{d} > \frac{b}{c}$ D. 若 $a > b > 0, ac > bd$, 则 $c > d$

6. 若 $x < y < 0$, 则有 ().

- A. $0 < x^2 < xy$ B. $y^2 < xy < x^2$ C. $xy < y^2 < x^2$ D. $y^2 > x^2 > 0$

7. 若 $a = \log_{0.2} 0.3, b = \log_{0.3} 0.2, c = 1$, 则 a, b, c 的大小关系是 ().

- A. $a > b > c$ B. $b > a > c$ C. $b > c > a$ D. $c > b > a$

8. 用不等号 (“>” 或 “<”) 填空: (1) 若 $a \neq b$, 则 $a^2 + 3b^2$ _____ $2b(a+b)$ (2) 若 $c > 1$, 则 $\sqrt{c+1} - \sqrt{c}$ _____ $\sqrt{c} - \sqrt{c-1}$. (3) 若 $a > b, c > d$, 且 a 与 d 都是负数, 则 ac _____ bd .

9. 若 “ $a > b, a - \frac{1}{a} > b - \frac{1}{b}$ ” 同时成立, 则 ab 应满足的条件是_____.

10. (1) 已知 $a > 0, b > 0$, 且 $a \neq b$, 比较 $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a}$ 与 $a+b$ 的大小. (2) 已知 $0 < \frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, 比较 $\frac{b}{a+b}$ 与 $\frac{d}{c+d}$ 的大小.

11. 若 $x > y > 1, 0 < a < 1$, 则下列各式中正确的一个是 ().

- A. $x^{-a} > y^{-a}$ B. $(\sin a)^x > (\sin a)^y$ C. $\log_{\frac{1}{a}} x < \log_{\frac{1}{a}} y$ D. $1 + a^{x+y} > a^x + a^y$

12. (1) 已知 $a \in \mathbf{R}$, 比较 $\frac{1}{1+a}$ 与 $1-a$ 的大小. (2) 设 $a > 0, a \neq 1, t > 0$, 比较 $\frac{1}{2} \log_a t$ 和 $\log_a \frac{t+1}{2}$ 的大小.

13. (1) 已知 $x > y > 0$, 比较 $\sqrt{\frac{y^2+1}{x^2+1}}$ 与 $\frac{y}{x}$ 的大小. (2) 已知 a, b, m, n 都是正实数, 且 $m+n=1$, 比较 $\sqrt{ma+nb}$ 和 $m\sqrt{a}+n\sqrt{b}$ 的大小. 二、一元二次不等式

14. 解下列不等式: (1) $6x^2 - 5x - 1 > 0$. (2) $6x^2 - 5x - 1 > 0$. (3) $5x^2 - 2x + 3 > 0$. (4) $9x^2 + 6x + 1 > 0$. (5) $3x^2 - 4x + 5 < 0$.

15. 已知关于 x 的不等式 $ax^2 + bx + c < 0$ 的解集是 $\{x | x < -2 \text{ 或 } x < -\frac{1}{2}\}$, 求 $ax^2 - bx + c > 0$ 的解集.

16. 已知集合 $A = \{x|x^2 + (a-1)x - a > 0\}$, $B = \{x|(x+a)(x+b) > 0\}$, $a \neq b$, $M = \{x|x^2 - 2x - 3 \leq 0\}$. (1) 若 $\complement_U B = M$, 求 a, b 的值. (2) 若 $-1 < b < a < 1$, 求 $A \cap B$. (3) 若 $-3 < a < -1$, 且 $a^2 - 1 \in \complement_U A$, 求实数 a 的取值范围.
17. 已知函数 $y = (k^2 + 4k - 5)x^2 + 4(1 - k)x + 3$ 的图象都在 x 轴的上方, 求实数 k 的取值范围. 【训练题】
18. 已知 $a < b$, 则下列各式中恒成立的是 ().
- A. $a^2 < b^2$ B. $c - a > c - b$ C. $|a| < |b|$ D. $a - 1 > b - 2$
19. 若 $|x| > 2$, 则 ().
- A. $x > 2$ B. $x > \pm 2$ C. $-2 < x < 2$ D. $x > 2$ 或 $x < -2$
20. 不等式 $|x| - 3 < 0$ 的解集是 ().
- A. $\{x|x < \pm 3\}$ B. $\{x|-3 < x < 3\}$ C. $\{x|x > 3\}$ D. $\{x|x < -3\}$
21. 已知集合 $M = \{x||x| > 2\}$, $N = \{x|x < 3\}$, 则下列结论正确的是 ().
- A. $M \cup N = M$ B. $M \cap N = \{x|2 < x < 3\}$ C. $M \cup N = R$ D. $M \cap N = \{x|x < -2\}$
22. 已知集合 $M = \{x||x+1| \leq 2\}$, $P = \{x|x \leq 2 \text{ 或 } x \geq 3\}$, 则 M, P 之间的关系是 ().
- A. $M \supseteq P$ B. $M \supset P$ C. $M \subseteq P$ D. $M \subset P$
23. 已知 $|1-x| + \sqrt{x^2 - 4x + 4} = 1$, 则 x 的取值范围是 ().
- A. $1 \leq x \leq 2$ B. $x \leq 1$ C. $x < 1$ 或 $x > 2$ D. $x \geq 2$
24. 不等式 $2x + 3 - x^2 > 0$ 的解集是 ().
- A. $\{x|-\frac{3}{2} \leq x < 1\}$ B. $\{x|-1 < x < 3\}$ C. $\{x|1 \leq x < 3\}$ D. $\{x|-\frac{3}{2} \leq x < 3\}$
25. 不等式 $6x^2 + 5x < 4$ 的解集是 ().
- A. $\{x|x < -\frac{4}{3} \text{ 或 } x > \frac{1}{2}\}$ B. $\{x|-\frac{4}{3} < x < \frac{1}{2}\}$ C. $\{x|-\frac{1}{2} < x < \frac{4}{3}\}$ D. $\{x|x < -\frac{1}{2} \text{ 或 } x > \frac{4}{3}\}$
26. 当 $a < 0$ 时, 关于 x 的不等式 $x^2 - 4ax - 5a^2 > 0$ 的解集是 ().
- A. $\{x|x > 5a \text{ 或 } x < -a\}$ B. $\{x|x < 5a \text{ 或 } x > -a\}$ C. $\{x|-a < x < 5a\}$ D. $\{x|5a < x < -a\}$
27. 若 x 为实数, 则下列命题正确的是 ().
- A. $x^2 \geq 2$ 的解集是 $\{x|x \geq \pm\sqrt{2}\}$. B. $(x-1)^2 < 2$ 的解集是 $\{x|1-\sqrt{2} < x < 1+\sqrt{2}\}$. C. $x^2 - 9 < 0$ 的解集是 $\{x|x < 3\}$. D. 设 x_1, x_2 为 $ax^2 + bx + c = 0$ 的两个实根, 且 $x_1 > x_2$, 则 $ax^2 + bx + c > 0$ 的解集是 $\{x|x_2 < x < x_1\}$.

28. 在“① $x^2 - 2x - 3 < 0$ 与 $\frac{x^2 - 2x}{x - 1} < \frac{3}{x - 1}$, ② $x^2 + 3x - 4 > 0$ 与 $x^2 + 3x + \sqrt{x} > 4 + \sqrt{x}$, ③ $\frac{(x + 2)(x^2 - 1)}{x + 2} > 0$ 与 $x^2 - 1 > 0$ ”三组不等式中, 解集相同的组数是 ().

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

29. 若 $x^2 + x < 0$, 则 $x^2, x, -x^2, -x$ 的大小关系是 ().

A. $x^2 > x > -x^2 > -x$. B. $-x > x^2 > -x^2 > x$. C. $-x > x^2 > x > -x^2$ D. $x^2 > -x > x > -x^2$

30. 直接写出下列不等式的解集: (1) $(x - 1)^2 > 0$: _____. (2) $(2 - x)(3x + 1) > 0$: _____. (3) $1 - 3x^2 > 2x$: _____. (4) $1 - 2x - x^2 \geq 0$: _____. (5) $x + \sqrt{x} - 6 < 0$: _____. (6) $\frac{3x + 4}{x - 2} \geq 0$: _____. (7) $\frac{4 - 2x}{1 + 3x} > 0$: _____. (8) $\frac{1}{x} > x$: _____. (9) $x^2 - 2|x| - 3 > 0$: _____. (10) $x^2 - x - 5 > |2x - 1|$: _____.

31. (1) 若 $\sqrt{x^2 - x - 6} \in \mathbf{R}$, 则 $x \in$ _____. (2) 要使代数式 $\frac{\sqrt{x - 3}}{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}$ 有意义, 实数 x 的取值范围是 _____. (3) 若代数式 $6x^2 + x - 2$ 的值恒取非负实数, 则实数 x 的取值范围是 _____.

32. (1) 不等式 $4 \leq x^2 - 3x < 18$ 的整数解集是 _____. (2) 已知实数 x 满足 $4x^2 - 4x - 15 \leq 0$, 化简 $\sqrt{x^2 - 8x + 16} - |x - 3|$.

33. 已知 $a > b$, 直接写出下列不等式的解集. (1) $\frac{x - a}{x - b} \geq 0$: _____. (2) $\frac{x - a}{x - b} < 0$: _____. (3) $x^2 - (a - b)x + ab > 0$: _____. (4) $x^2 - (a - b)x + ab < 0$: _____.

34. (1) 若关于 x 的方程 $2kx^2 + (8k + 1)x + 8k = 0$ 有两个不等实根, 则实数 k 的取值范围是 _____. (2) 若关于 x 的不等式 $ax^2 - 2ax + 2a + 3 > 0$ 无实数解, 则 a 的取值范围是 _____. ($a \neq 0$).

35. 不等式 $\frac{x - 1}{2x} \leq 1$ 的解集是 ().

A. $\{x | x \geq -1\}$

B. $\{x | x \leq -1\}$

C. $\{x | -1 \leq x < 0\}$

D. $\{x | x \leq -1 \text{ 或 } x > 0\}$

36. 若关于 x 的二次不等式 $mx^2 + 8mx + 21 < 0$ 的解集是 $\{x | -1 < x < -\frac{1}{2}\}$, 则实数 m 的值等于 ().

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

37. 若关于 x 的不等式 $(a^2 - 3)x^2 + 5x - 2 > 0$ 的解集是 $\{x | \frac{1}{2} < x < 2\}$, 则实数 a 的值等于 ().

A. 1

B. -1

C. ± 1

D. 0

38. 若关于 x 的不等式 $ax^2 + bx + c < 0$ ($a \neq 0$) 的解集是空集, 则 ().

A. $a < 0$ 且 $b^2 - 4ac > 0$ B. $a < 0$ 且 $b^2 - 4ac \leq 0$ C. $a > 0$ 且 $b^2 - 4ac \leq 0$ D. $a > 0$ 且 $b^2 - 4ac > 0$

39. 若对任何实数 x , 二次函数 $y = ax^2 - x + c$ 的值恒为负, 则 a, c 应满足 ().

40. 若对任意实数 x , 不等式 $x^2 + 2(1 + k)x + 3 + k > 0$ 恒成立, 则 k 的取值范围是 ().

A. $-1 < k < 2$

B. $-1 \leq k \leq 2$

C. $-2 < k < 1$

D. $-2 \leq k \leq 1$

41. 若关于 x 的二次方程 $2(k+1)x^2 + 4kx + 3k - 2 = 0$ 的两根同号, 则 k 的取值范围是 ().
- A. $-2 < k < 1$ B. $-2 \leq k < -1$ 或 $\frac{2}{3} < k \leq 1$ C. $k < -1$ 或 $k > \frac{2}{3}$ D. $-2 < k < 1$ 或 $\frac{2}{3} < k < 1$
42. 已知关于 x 的方程 $(m+3)x^2 - 4mx + 2m - 1 = 0$ 的两根异号, 且负根的绝对值比根大, 那么实数 m 的取值范围是 ().
- A. $-3 < m < 0$ B. $0 < m < 3$ C. $m < -3$ 或 $m > 0$ D. $m < 0$ 或 $m > 3$
43. 若 α, β 是关于 x 的方程 $x^2 - (k-2)x + k^2 + 3k + 5 = 0$ (k 为实数) 的两个实根, 则 $\alpha^2 + \beta^2$ 的最大值等于 ().
- A. 19 B. 18 C. $\frac{50}{9}$ D. -6
44. 不等式 $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) > 120$ 的解为 ().
- A. $x > 6$ B. $x < -1$ 或 $x > 6$ C. $x < -1$ D. $-1 < x < 6$
45. 在三个关于 x 的方程 $x^2 - ax + 4 = 0$, $x^2 + (a-1)x + 16 = 0$ 和 $x^2 + 2ax + 3a + 10 = 0$ 中, 已知至少有一个方程有实根, 则实数 a 的取值范围是 ().
- A. $-4 \leq a \leq 4$ B. $-2 < a < 4$ C. $a \leq -2$ 或 $a \geq 4$ D. $a < 0$
46. (1) 若关于 x 的二次方程 $x^2 - 2mx + 4x + 2m^2 - 4m - 2 = 0$ 有实根, 则其两根之积的最大值等于_____.
 (2) 使关于 x 的方程 $x^2 - kx + 2k - 3 = 0$ 的两实根的平方和取最小值, 实数 k 的值等于_____.
47. (1) 若关于 x 的不等式 $x^2 - mx + n \leq 0$ 的解集是 $\{x | -5 \leq x \leq 1\}$, 则实数 $m =$ _____, $n =$ _____.
 (2) 若关于 x 的不等式 $ax^2 + bx + 1 \geq 0$ 的解集是 $\{x | -5 \leq x \leq 1\}$, 则实数 $a =$ _____, $b =$ _____.
 (3) 若关于 x 的不等式 $ax^2 + bx + 2 > 0$ 的解集是 $\{x | -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{3}\}$, 则实数 $a =$ _____, $b =$ _____.
 (4) 若关于 x 的不等式 $ax^2 + bx - 6 > 0$ 的解集是 $\{x | 2 < x < 3\}$, 则实数 $a =$ _____, $b =$ _____.
48. (1) 若关于 x 的不等式 $(a+b)x + (2a-3b) < 0$ 的解集是 $\{x | x > 3\}$, 则不等式 $(a-3b)x + b - 2a > 0$ 的解集是_____. (2) 若关于 x 的不等式 $ax^2 + bx + c < 0$ 的解集是 $\{x | x < -2 \text{ 或 } x > -\frac{1}{2}\}$, 则关于 x 的不等式 $ax^2 - bx + c > 0$ 的解集是_____.
49. (1) 解不等式 $x^1 - 2x^2 + 1 > x^2 - 1$. (2) 已知关于 x 的不等式 $kx^2 - 2x + 6k < 0$ ($k \neq 0$). ① 若不等式的解集是 $\{x | x < -3 \text{ 或 } x > -2\}$, 求实数 k 的值; ② 若不等式的解集是 $\{x | x \neq \frac{1}{k}\}$, 求实数 k 的值; ③ 若不等式的解集是实数集, 求实数 k 的值.
50. (1) 已知关于 x 的方程 $m(x-1) = 3(x+2)$ 的解是正实数, 求实数 m 的取值范围. (2) 已知关于 x 的方程 $\frac{1}{4}x^2 - kx + 5k - 6 = 0$ 无实数解, 求实数 k 的取值范围. (3) 已知关于 x 的方程 $kx^2 - (3k-1)x + k = 0$ 有两个正实数根, 求实数 k 的取值范围.
51. (1) 已知集合 $M = \{x | x^2 - 7x + 10 \leq 0\}$, $N = \{x | x^2 - (2-m)x + 5 - m \leq 0\}$, 且 $N \subseteq M$, 求实数 m 的取值范围. (2) 已知集合 $A = \{x | x^2 + 4x + p < 0\}$, $B = \{x | x^2 - x - 2 > 0\}$, 且 $A \subseteq B$ 求实数 p 的取值范围. (3) 已知集合 $A = \{x | x^2 + ax + 1 \leq 0\}$, $B = \{x | x^2 - 3x + 2 \leq 0\}$, 且 $A \subseteq B$, 求实数 a 的取值范围.

52. (1) 已知集合 $A = \{x|x^2 - 2x - 3 \leq 0\}$, $B = \{x|x^2 + px + q < 0\}$, 且 $A \cap B = \{x|-1 \leq x < 2\}$, 求实数 p, q 的关系式及其取值范围. (2) 已知集合 $A = \{x|-2 < x < -1x > \frac{1}{2}\}$, $B = \{x|x^2 + ax + b \leq 0\}$, 且 $A \cup B = \{x|x + 2 > 0\}$, $A \cap B = \{x|\frac{1}{2} < x \leq 3\}$, 求 a, b 的值.
53. (1) 要使代数式 $mx^2 + (m-1)x + (m-1)$ 的值恒为负值, 求实数 m 的取值范围. (2) 已知关于 x 的不等式 $(a^2 - 4)x^2 + (a+2)x - 1 \geq 0$ 的解集是空集, 求实数 a 的取值范围. (3) 若关于 x 的不等式 $\frac{x^2 - 8x + 20}{mx^2 + 2(m+1)x + 9m + 4} < 0$ 的解集为 R , 求实数 m 的取值范围. (4) 当 $0^\circ < \varphi < 90^\circ$ 时, 要使 $\frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 + 2} = \sin \varphi$ 成立, 求实数 x 的取值范围. (5) 既要使关于 x 的不等式 $x^2 + (m - \frac{1}{2})x - \frac{7}{16} \leq 0$ 有实数解, 又要使关于 x 的方程 $(2m+3)x^2 + mx + \frac{m-2}{4} = 0$ 有实数解, 求实数 m 的取值范围.
54. 为长 80cm 、宽 60cm 的工作台做一块台布, 使台布的面积是台面面积的两倍以上, 并使台子四边垂下的长度相等, 问: 垂下的长度至少是多少 (精确到 0.1cm)?
55. 已知非零实数 x, y, z , 满足 $x + y + z = xyz$, $x^2 = yz$, 求证: $x^2 \geq 3$.
56. 已知 $a + b \geq 0$, 求证: $a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2$.
57. 设 $a, b \in \mathbf{R}^+$, 且 $a \neq b$, 求证: $a^ab^b > a^bb^a$.
58. (1) 已知 $a, b, c \in \mathbf{R}$, 求证: $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$. (2) 已知 $a, b, c > 0$, 求证: ① $(a+b)(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}) \geq 4$; ② $(a+b+c)(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}) \geq 9$.
59. 已知正数 a, b 满足 $a + b = 1$, 求证: $\sqrt{2a+1} + \sqrt{2b+1} \leq 2\sqrt{2}$.
60. 已知 $\alpha, \beta \in (0, \frac{\pi}{2})$, 且 $\alpha \neq \beta$, 求证: $\tan \alpha + \tan \beta > 2 \tan \frac{\alpha + \beta}{2}$.
61. 记 $f(x) = x^2 + ax + b$, 求证: $|f(1)|, |f(2)|, |f(3)|$ 中至少有一个不小于 $\frac{1}{2}$.
62. 已知 $-1 \leq x \leq 1$, $n \geq 2$, $n \in \mathbf{N}$, 求证: $(1-x)^n + (1+x)^n \leq 2^n$.
63. 已知 $x + 2y + 3z = 12$, 求证: $x^2 + 2y^2 + 3z^2 \geq 24$.
64. 已知 $a, b, c \in \mathbf{R}^+$, 求证: $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$ (当且仅当 $a = b = c$ 时取等号).
65. 已知 $a > 0$, 求证: $x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x + \frac{1}{x}} \geq \frac{5}{2}$.
66. 已知实数 a, b, c 满足 $a + b + c = 0$ 和 $abc = 2$, 求证: a, b, c 中至少有一个不小于 2 .
67. 已知 $0 < a < 1$, $0 < b < 1$, 求证: $\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{(a-1)^2 + b^2} + \sqrt{a^2 + (b-1)^2} + \sqrt{(a+1)^2 + (b-1)^2} \geq 2\sqrt{2}$.
68. 已知实数 x, y, z 不全为零, 求证: $\sqrt{x^2 + xy + y^2} + \sqrt{x^2 + yz + z^2} + \sqrt{z^2 + zx + x^2} > \frac{3}{2}(x + y + z)$.
69. 已知 $x \geq 0$, $y \geq 0$, 求证: $\frac{1}{2}(x+y)^2 + \frac{1}{4}(x+y) \geq x\sqrt{y} + y\sqrt{x}$.
70. 求证: $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{n^2} < \frac{7}{4} (n \in \mathbf{N})$.

71. 已知 $x > 0, y > 0, a, b$ 是正常数, 且满足 $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} = 1$, 求证: $x + y \geq (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$.
72. (1) 已知正数 a, b 满足 $a^2b = 1$, 求 $a + b$ 的最小值. (2) 求 $\sin^2\alpha \cos^2\alpha + \frac{1}{\sin^2\alpha \cos^2\alpha}$ 的最小值.
73. 已知直角三角形的周长为定值 l , 求它面积的最大值.
74. 已知圆柱的体积为定值 V , 求圆柱全面积的最小值.
75. 从半径为 R 的圆形铁片里剪去一个扇形, 然后把剩下部分卷成一个圆锥形漏斗, 要使漏斗有最大容量, 剪去扇形的圆心角 θ 应是多少弧度?
76. 在 $Rt\triangle ABC$, 已知 $\angle C = 90^\circ$, $\angle A, \angle B, \angle C$ 的对边 a, b, c 满足 $a + b = cx$. 设 $\triangle ABC$ 绕直线 AB 旋转一周所得的旋转体的侧面积为 S_1 , $\triangle ABC$ 的内切圆面积为 S_2 . 求: (1) 函数 $f(x) = \frac{S_1}{S_2}$ 的解析式和定义域. (2) 函数 $f(x)$ 的最小值. 【训练题】(一) 比较法
77. 用比较法证明以下各题: (1) 已知 $a > 0, b > 0$, 求证: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{2}{\sqrt{ab}}$. (2) 已知 $a > 0, b > 0$, 求证: $\frac{b}{\sqrt{a}} + \frac{a}{\sqrt{b}} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b}$. (3) 已知 $a > 0, b > 0$, 求证: $a^2 + b^2 \geq (a + b)\sqrt{ab}$. (4) 已知 $0 < x < 1$, 求证: $\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{1-x} \geq (a + b)^2$.
78. (1) 已知 $a \geq 0, b \geq 0$, 求证: $a^3 + b^3 \geq a^2b + b^2a$. (2) 已知 $x \in \mathbf{R}^+, y \in \mathbf{R}^+, n \in \mathbf{N}$, 求证: $x^{n+1} + y^{n+1} \geq x^n y + xy^n$.
79. (1) 已知 $a > 0, b > 0, c > 0$, 求证: $a(b^2 + c^2) + b(c^2 + a^2) + c(a^2 + b^2) \geq 6abc$. (2) 求证: $a^5 + b^5 \geq \frac{1}{2}(a^3 + b^3)(a^2 + b^2)(a > 0, b > 0)$.
80. (1) 求证: $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ (a, b, c 是实数). (2) 已知 $a > b > c$, 求证: $a^2b + b^2c + c^2a > ab^2 + bc^2 + ca^2$.
81. 在 $\triangle ABC$ 中, 记 a, b, c 分别是角 A, B, C 的对边, S 是 $\triangle ABC$ 的面积, 求证: $c^2 - a^2 - b^2 + 4ab \geq 4\sqrt{3}S$.
82. 设 $a, b \in \mathbf{N}$, 则 $\sqrt{2}$ 在 $\frac{b}{a}$ 与 $\frac{2a+b}{a+b}$ 之间.
83. 已知 a, b, c 都是正数, 求证: $a^{2a}b^{2b} \geq a^{b+c}b^{c+a}c^{a+b}$. (二) 综合法
84. 下列命题中, 正确的一个是 ().
- A. 若 $a, b, c \in \mathbf{R}$, 且 $a > b$, 则 $ac^2 > bc^2$ B. 若 $a, b \in \mathbf{R}$, 且 $a \cdot b \neq 0$, 则 $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ C. 若 $a, b \in \mathbf{R}$, 且 $a > |b|$, 则 $a^n > b^n (n \in \mathbf{N})$ D. 若 $a > b, c < d$, 则 $\frac{a}{c} > \frac{b}{d}$
85. 下列各式中, 对任何实数 x 都成立的一个是 ().
- A. $\lg(x^2 + 1) \geq \lg 2x$ B. $x^2 + 1 > 2x$ C. $\frac{1}{x^2 + 1} \leq 1$ D. $x + \frac{1}{x} \geq 2$
86. 已知, $a, b \in \mathbf{R}$, 且 $a, b \neq 0$, 则在 “① $\frac{a^2 + b^2}{2} \geq ab$, ② $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \geq 2$, ③ $ab \leq (\frac{a+b}{2})^2$, ④ $(\frac{a+b}{2})^2 \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$.” 这四个式子中, 恒成立的个数是 ().
- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

87. (1) 若 $a > 0, b > 0, c > 0, d > 0$, 则 $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \geq \underline{\hspace{2cm}}$, $\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} \geq \underline{\hspace{2cm}}$, $\frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c} \geq \underline{\hspace{2cm}}$, $(a+b)(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}) \geq \underline{\hspace{2cm}}$, $(\frac{b}{a} + \frac{d}{c})(\frac{c}{b} + \frac{a}{d}) \geq \underline{\hspace{2cm}}$. (2) 若 $x > 0$, 则 $x + \frac{1}{x} \geq \underline{\hspace{2cm}}$; 若 $x < 0$, 则 $(-x) + \frac{1}{-x} \geq \underline{\hspace{2cm}}$, $x + \frac{1}{x} \leq \underline{\hspace{2cm}}$. (3) 若 $a > 1, b > 1, c > 1$, 则 $\log_a b + \log_b a \geq \underline{\hspace{2cm}}$, $\log_a b + \log_b c + \log_c a \geq \underline{\hspace{2cm}}$. (4) 若 $0 < a < 1, 0 < b < 1$, 则 $\log_a b + \log_b a \geq \underline{\hspace{2cm}}$. (5) 若 $a > 1, 0 < b < 1$, 则 $\log_a b + \log_b a \leq \underline{\hspace{2cm}}$.

88. 设 a, b 为正数, 且 $a + b \leq 4$, 则下列各式中, 一定正确的是 ().

- A. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \leq \frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{4} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \leq \frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \leq 1$ D. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq 1$

89. 若 a, b, c 均大于 1, 且 $\log_a c \cdot \log_b c = 4$, 则下列各式中, 一定正确的是 ().

- A. $ac \geq b$ B. $ab \geq c$ C. $bc \geq a$ D. $ab \leq c$

90. 若 $a > 0, b > 0$, 且 $a \neq b$, 则下列各式恒成立的是 ().

- A. $\frac{2ab}{a+b} < \frac{a+b}{2} < \sqrt{ab}$ B. $\sqrt{ab} < \frac{2ab}{a+b} < \frac{a+b}{2}$ C. $\frac{2ab}{a+b} < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2}$ D. $\sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < \frac{2ab}{a+b}$

91. 利用公式 $a^2 + b^2 \geq 2ab$ 或 $a + b \geq 2\sqrt{ab} (a, b \geq 0)$, 求证: (1) 若 $x > 0, y > 0$, 则 $\sqrt{(1+x)(1+y)} \geq 1 + \sqrt{xy}$. (2) 若 $a > 0, b > 0, c > 0$, 则 $ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a) \geq 6abc$. (3) 若 $a > 0, b > 0$, 则 $a + b + \frac{1}{\sqrt{ab}} \geq 2\sqrt{2}$. (4) 若 $m = x\cos^2\theta + y\sin^2\theta, n = x\sin^2\theta + y\cos^2\theta$, 则 $mn \geq xy$. (5) 若 $x + 3y - 1 = 0$, 则 $2^x + 8^y \geq 2\sqrt{2}$. (6) $\log_{0.5}(\frac{1}{4^a} + \frac{1}{4^b}) \leq a + b - 1$.

92. 已知 $x > 0, y > 0, x + y = 1$, 求证: (1) $(1 + \frac{1}{x})(1 + \frac{1}{y}) \geq 9$. (2) $(\frac{1}{x^2} - 1)(\frac{1}{y^2} - 1) \geq 9$.

93. 已知 $a > 0, b > 0, c > 0, a + b + c = 1$, 求证: (1) $(1-a)(1-b)(1-c) \geq 8abc$. (2) $(\frac{1}{a} - 1)(\frac{1}{b} - 1)(\frac{1}{c} - 1) \geq 8$. (3) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 9$. (4) $\frac{1}{abc} \geq 27$. (5) $(1 + \frac{1}{a})(1 + \frac{1}{b})(1 + \frac{1}{c}) \geq 64$.

94. 利用公式 $\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ 或 $\frac{a+b+c}{3} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}$, 求证: (1) $\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{b^2+c^2} + \sqrt{c^2+a^2} \geq \sqrt{2}(a+b+c)$. (2) 若 $a+b=1 (a, b \geq 0)$, 则 $\sqrt{2a+1} + \sqrt{2b+1} \leq 2\sqrt{2}$. (3) 若 $a+b+c=1 (a, b, c \geq 0)$, 则 $\sqrt{13a+1} + \sqrt{13b+1} + \sqrt{13c+1} \leq 4\sqrt{3}$. (4) $a\cos\varphi + b\sin\varphi + c \leq \sqrt{2(a^2+b^2+c^2)}$.

95. 先证明 $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca (a, b, c \in \mathbf{R})$, 再利用此结论证明下列各题: (1) 若 $a > 0, b > 0, c > 0$, 则 $\frac{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}{a+b+c} \geq abc$. (2) 若半径为 1 的圆内接 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{1}{4}$, 二边长分别为 a, b, c , 则① $abc = 1$, ② $\sqrt{b} + \sqrt{c} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$. (3) 若 $a, b, c > 0, n \in \mathbf{N}, f(n) = \lg \frac{a^n + b^n + c^n}{3}$, 则 $2f(n) \leq f(2n)$.

96. 利用放缩法并结合公式 $ab \leq (\frac{a+b}{2})^2$ 证明下列各题: (1) $\lg 9 \cdot \lg 11 < 1$. (2) $\log_a(a-1) \cdot \log_a(a+1) < 1 (a > 1)$. (3) 若 $a > b > c$, 则 $\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{4}{c-a} \geq 0$.

97. 利用放缩法证明下列各题: (1) $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \frac{1}{n+4} + \cdots + \frac{1}{n^2} > 1 (n \in \mathbf{N}, n \geq 2)$. (2) $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} < 1 (n \in \mathbf{N})$. (3) 已知 $a > 0, b > 0, c > 0$, 且 $a^2 + b^2 = c^2$, 求证: $a^n + b^n < c^n (n \geq 3, n \in \mathbf{N})$.

98. 利用拆项法证明下列各题: (1) 若 $x > y$, $xy = 1$, 则 $\frac{x^2 + y^2}{x - y} \geq 2\sqrt{2}$. (2) $\frac{1}{2}(a^2 + b^2) + 1 \geq \sqrt{a^2 + 1} \cdot \sqrt{b^2 + 1}$. (3) 若 $a > 0, b > 0, c > 0$, 则 $2(\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab}) \leq 3(\frac{a+b+c}{3} - \sqrt[3]{abc})$. (4) $2(\sqrt{n+1} - 1) < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} (n \in \mathbf{N})$.
99. 利用迭代法证明下列各题: (1) 若正数 x, y 满足 $x + 2y = 1$, 则 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq 3 + 2\sqrt{2}$. (2) $\frac{1}{\sin^2 \alpha} + \frac{3}{\cos^2 \alpha} \geq 4 + 2\sqrt{3}$. (3) 若 $x, y > 0, a, b$ 为正常数, 且 $\frac{a}{x} + \frac{a}{y} = 1$, 则 $x + y \geq (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$.
100. 利用判别式法证明下列各题: (1) $\frac{1}{3} \leq \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1} \leq 3$. (2) 已知关于 x 的不等式 $(a^2 - 1)x^2 - (a - 1)x - 1 < 0 (a \in \mathbf{R})$ 对任意实数 x 恒成立, 求证: $-\frac{3}{5} < a \leq 1$.
101. 利用荫数的单调性证明下列各题: (1) 若 $x > 0, y > 0, x + y = 1$, 则 $(x + \frac{1}{x})(y + \frac{1}{y}) \geq \frac{25}{4}$. (2) 若 $0 < a < \frac{1}{k} (k \geq 2, k \in \mathbf{N})$, 且 $a^2 < a - b$, 则 $b < \frac{1}{k+1}$.
102. 利用三角换元法证明下列各题: (1) 若 $a^2 + b^2 = 1$, 则 $a \sin x + b \cos x \leq 1$. (2) 若 $|a| < 1, |b| < 1$, 则 $|ab \pm \sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}| \leq 1$. (3) 若 $x^2 + y^2 \leq 1$, 则 $-\sqrt{2} \leq x^2 + 2xy - y^2 \leq \sqrt{2}$. (4) 若 $|x| \leq 1$, 则 $(1+x)^n + (1-x)^n \leq 2^n$. (5) 若 $a > 0, b > 0$, 且 $a - b = 1$, 则 $0 < \frac{1}{a}(\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}})(\sqrt{b} + \frac{1}{\sqrt{b}}) < 1$. (6) $0 < \sqrt{1+x} - \sqrt{x} \leq 1$.
103. 试构造几何图形证明: (1) 若 $f(x) = \sqrt{1+x^2}, x > b > 0$, 则 $|f(a) - f(b)| < |a - b|$. (2) 若 $x, y, z > 0$, 则 $\sqrt{x^2 + y^2 + xy} + \sqrt{y^2 + z^2 + yz} > \sqrt{z^2 + x^2 + zx}$.
104. 利用均值换元或设差换元证明下列各题: (1) 若 $a > 0, b > 0$, 且 $a + b = 1$, 则 $\frac{4}{3} \leq \frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} < \frac{3}{2}$. (2) 若 $a + b + c = 1$, 则 $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{3}$. (3) 若 $x \geq y \geq 0$, 则 $\sqrt{2xy - y^2} + \sqrt{x^2 - y^2} \geq x$. 试选用适当的方法证明下列各题:
105. 已知 a, b, c 都是正数, 求证: $a^a b^b c^c \geq (abc)^{\frac{a+b+c}{3}}$.
106. 已知正数 a, b 满足 $a + b = 1$, 求证: (1) $(ax + by)(ay + bx) \geq xy$. (2) $(a + \frac{1}{a})^2 + (b + \frac{1}{b})^2 \geq \frac{25}{2}$. (3) $(a + \frac{1}{a})(b + \frac{1}{b}) \geq \frac{25}{4}$.
107. 已知正数 a, b, c 满足 $a + b + c = 1$, 求证: (1) $(a + \frac{1}{a}) + (b + \frac{1}{b}) + (c + \frac{1}{c}) \geq 10$. (2) $(a + \frac{1}{a})^2 + (b + \frac{1}{b})^2 + (c + \frac{1}{c})^2 \geq \frac{100}{3}$. (3) $\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{c}} \geq 3\sqrt{3}$.
108. 已知 $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, 求证: (1) $-\frac{1}{2} \leq ab + bc + ca \leq 1$. (2) $|abc| \leq \frac{\sqrt{3}}{9}$.
109. 已知 $x > 1$, 求证: $\sqrt{x} - \sqrt{x-1} > \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$.
110. 已知 $a > 0, b > 0, c > 0$, 求证: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 2(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a})$.
111. (1) 已知 $a > 0, b > 0, c > 0$, 求证: $\frac{c}{a+b} + \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} \geq \frac{3}{2}$. (2) 已知 $\alpha, \beta \in (0, \frac{\pi}{2})$, 求证: $\frac{1}{\cos^2 \alpha} + \frac{1}{\sin^2 \alpha \sin \beta \cos^2 \beta} \geq 9$. (3) 已知 $a > 0, b > 0, c > 0$, 求证: $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \geq \frac{9}{2(a+b+c)}$.

112. (1) 已知 $\tan \alpha, \tan \beta$ 是关于 x 的方程 $mx^2 + (2m-3)x + (m-2) = 0 (m \neq 0)$ 的两根, 求证: $\tan(\alpha + \beta) \geq -\frac{3}{4}$.
 (2) 已知长方体的对角线长为定长 l , 求证: 它的体积 $V \leq \frac{\sqrt{3}l^3}{9}$.
113. 在 $\triangle ABC$ 中, 求证: (1) $\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$. (2) $\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \leq \frac{1}{8}$. (3) $\tan A \tan B \tan C \geq 3\sqrt{3}$, 其中三内角 A, B, C 都是锐角. (4) $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S$, 其中三内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c 三角形的面积为 S .
114. 已知 $f(x) = \lg \frac{1+2^x+a \cdot 4^x}{3} (a \in \mathbf{R})$. (1) 如果 $x \leq 1$ 时 $f(x)$ 有意义, 求 a 的取值范围. (2) 如果 $0 < a \leq 1$, 求证: $x \neq 0$ 时, $2f(x) < f(2x)$. (三) 分析法和反证法利用分析法证明下列各题: (87~89)
115. 求证: (1) $2 + \sin \theta + \cos \theta \geq \frac{2}{2 - \sin \theta - \cos \theta}$. (2) $-1 < \frac{4 \sin \theta + 3}{\sin^2 \theta + 1} \leq 4$. (3) $\frac{x+b+c+abc}{1+ab+bc+ca} \leq 1$, 其中 $0 \leq a \leq 1, 0 \leq b \leq 1, 0 \leq c \leq 1$. (4) $2 \sin 2\alpha \leq c \cot \frac{\alpha}{2}$, 其中 $0 < \alpha < \pi$.
116. 求证下列各题: (1) 若 $x > -1$, 则 $(\frac{1}{3})^{x+\frac{3}{2}} < (\frac{1}{3})^{\sqrt{(x+1)(x+2)}}$. (2) 若 $a > b > 0, c > d > 0$, 则 $\sqrt{ac} - \sqrt{bd} > \sqrt{(a-b)(c-d)}$. (3) $ac + bd \leq \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{c^2 + d^2}$. (4) 若 $x > y > 0, \theta \in (0, \frac{\pi}{2})$, 则 $x \sec \theta - y \tan \theta \geq \sqrt{x^2 - y^2}$. (5) 若 $-1 < x < 1, -1 < y < 1$, 则 $|\frac{x+y}{1+xy}| < 1$.
117. 求证 F 列各题: (1) $16^{18} > 18^{16}$. (2) $(\sqrt{2})^{\sqrt{3}} < (\sqrt{3})^{\sqrt{2}}$. (3) 若 $a > 0, b > 0, a + b = 1$, 则 $3^a + 3^b < 4$. 注意分析法常在去分母或两边平方时采用需要注意的是: 若去分母, 则必须先说明分母的符号; 若两边平方, 则必须先说明两边都为非负数.
118. 利用反证法证明下列各题: (1) 若 $0 < a < 1, 0 < b < 1, 0 < c < 1$, 则 $(1-a)b, (1-b)c, (1-c)a$ 不能都大于 $\frac{1}{4}$. (2) 若 $0 < a < 2, 0 < b < 2, 0 < c < 2$, 则 $a(2-b), b(2-c), c(2-a)$ 不可能都大于 1. (3) 若 $x, y > 0$, 且 $x + y > 2$, 则 $\frac{1+y}{x}$ 和 $\frac{1+x}{y}$ 中至少有一个小于 2. (4) 若 $0 < a < 1, b > 0$, 且 $a^b = b^a$, 则 $a = b$.
119. 若 $a > 0, b > 0$, 且 $a^3 + b^3 = 2$, 试分别利用 $x^3 + y^3 + z^3 \geq 3xyz (x, y, z \geq 0)$ 构造方程. 并利用 $\Delta \geq 0$ 以及反证法证明: $a + b \leq 2$. (四) 函数的最大值和最小值
120. 下列函数中, 最小值为 2 的是 ().
 A. $x + \frac{1}{x}$ B. $\frac{x^2 + 2}{\sqrt{x^2 + 1}}$ C. $\log_a x + \log_x a (a > 0, x > 0, a \neq 1)$ D. $3^x + 3^{-x} (x > 0)$
121. 若 $\log_{\sqrt{2}} x + \log_{\sqrt{2}} y = 4$, 则 $x + y$ 的最小值是 ().
 A. 8 B. $4\sqrt{2}$ C. 4 D. 2
122. 若 a, b 均为大于 1 的正数, 且 $ab = 100$, 则 $\lg a \cdot \lg b$ 的最大值是 ().
 A. 0 B. 1 C. 2 D. $\frac{5}{2}$
123. 若实数 x 与 y 满足 $x + y - 4 = 0$, 则 $x^2 + y^2$ 的最小值是 ().
 A. 4 B. 6 C. 8 D. 10

124. 若非负实数 a, b 满足 $2a + 3b = 10$, 则 $\sqrt{3b} + \sqrt{2a}$ 的最大值是 ().

A. $\sqrt{10}$

B. $2\sqrt{5}$

C. 5

D. 10

125. 若 $x > 1$, 则 $\frac{x^2 - 2x + 2}{2x - 2}$ 有 ().

A. 最小值 1

B. 最大值 1

C. 最小值-1

D. 最大值-1

126. (1) 若 $x, y \in \mathbf{R}^+$, 且 $x^2 + y^2 = 1$, 则 $x + y$ 的最大值是_____. (2) 若 $x + 2y = 2\sqrt{2}a (x > 0, y > 0, a > 1)$, 则 $\log_a x + \log_a y$ 的最大值是_____. (3) 若 $x > 1$, 则 $2 + 3x + \frac{4}{x-1}$ 的最小值_____, 此时 $x =$ _____. (4) 若 $x > 0$, 则 $x + \frac{1}{x} + \frac{16x}{x^2 + 1}$ 的最小值是_____, 此时 $x =$ _____. (5) 若正数 a, b 满足 $a^2 + \frac{b^2}{2} = 1$, 则 $a\sqrt{1+b^2}$ 的最大值为_____, 此时 $a =$ _____, $b =$ _____.

127. (1) 若 $x > 0$, 则 $3x + \frac{12}{x^2}$ 的最小值是_____, 此时 $x =$ _____. (2) 若 $0 < x < \frac{1}{3}$, 则 $x^2(1-3x)$ 的最大值是_____, 此时 $x =$ _____. (3) 若 $xy > 0$, 且 $x^2y = 2$, 则 $xy + x^2$ 的最小值是_____. (4) $\sin^4\alpha \cos^2\alpha$ 的最大值是_____, 此时 $\sin\alpha =$ _____, $\cos\alpha =$ _____. (5) 若正数 x, y, z 满足 $5x + 2y + z = 100$, 则 $\lg x + \lg y + \lg z$ 的最大值是_____.

128. 若 $\frac{x^2}{4} + y^2 = x$, 则 $x^2 + y^2$ 有 ().

A. 最小值 0, 最大值 16

B. 最小值 $-\frac{1}{3}$, 最大值 0

C. 最小值 0, 最大值 1

D. 最小值 1, 最大值 2

129. $|\sin x| + |\cos x|$ 的最大值是 ().

A. 2

B. $\sqrt{2}$

C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

D. $\frac{1}{2}$

130. 若 $x > 0$, 则 $\frac{x}{x^3 + 2}$ 的最大值是 ().

A. 5

B. 3

C. 1

D. $\frac{1}{3}$

131. 若正数 a, b 满足 $ab - (a + b) = 1$, 则 $a + b$ 的最小值是 ().

A. $2 + 2\sqrt{2}$

B. $2\sqrt{2} - 2$

C. $\sqrt{5} + 2$

D. $\sqrt{5} - 2$

132. (1) 已知 $a > 1$ 且 $a^{\lg b} = \sqrt[4]{2}$, 求 $\log_2(ab)$ 的最小值. (2) 求函数 $y = \frac{x^4 + 3x^2 + 3}{x^2 + 1}$ 的最小值. (3) 求 $f(x) = 4x^2 + \frac{16}{(x^2 + 1)^2}$ 的最小值. (4) 求 $f(x) = x^2 - 3x - 2 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} (x > 0)$ 的最小值. (5) 若 $x, y > 0$, 求 $\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x+y}}$ 的最大值.

133. 已知正常数 a, b 和正变数 x, y 满足 $a + b = 10, \frac{a}{x} + \frac{b}{y} = 1$, $x + y$ 的最小值为 18, 求 a, b 的值.

134. (1) 已知 $x^2 + y^2 = 1$, 求 $(1 + xy)(1 - xy)$ 的最大值和最小值. _____ (2) 已知 $x^2 + y^2 = 3, a^2 + b^2 = 4$, 求 $ax + by$ 的最大值和最小值. _____ (3) 已知 $\sqrt{1 - y^2} + y\sqrt{1 - x^2} = 1$, 求 $x + y$ 的最大值和最小值.

135. 已知函数 $f(x) = \frac{2x+3}{4x+8}$. (1) 求 $f(x)$ 的最大值. (2) 对于任意实数 a, b , 求证: $f(a) < b^2 - 4b + \frac{11}{2}$.

136. (1) 若直角三角形的周长为 1, 求它的面积的最大值. (2) 若直角三角形的内切半径为 1, 求它的面积的最小值.

137. 若球半径为 R , 试求它的内接圆柱的最大体积, 请指出下向解法的错误, 并给出正确的解答. 解: 设圆柱底面半径为 r , 则 $4r^2 = 4R^2 - h^2$, 而 $V = \pi r^2 h = \frac{\pi}{4}(4R^2 - h^2)h = \frac{\pi}{4}(2R + h)(2R - h) = \frac{\pi}{8}(2R + h)(4R - 2h)h \leq \frac{\pi}{8}(\frac{2R + h + 4R - 2h + h}{3})^3 = \frac{\pi}{8}(2R)^3 = \pi R^3$.

138. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $BC = a, CA = b, AB = c, \angle ACB = \theta$. 现将 $\triangle ABC$ 分别以 BC, CA, AB 所在直线为轴旋转一周, 设所得三个旋转体的体积依次为 V_1, V_2, V_3 . (1) 设 $T = V_1 + V_2 + V_3$, 试用 a, b, c 表示 T . (2) 若 θ 为定值, 并令 $\frac{a+b}{c} = x$, 将 T 表示为 x 的函数, 写出这个函数的定义域, 并求这个函数的最大值 u . (3) 若 $\theta \in [\frac{\pi}{3}, \pi)$, 求 u 的最大值.

139. 已知 $A(0, \sqrt{3}a), B(-a, 0), C(a, 0)$ 是等边 $\triangle ABC$ 的顶点, 点 M, N 分别在边 AB, BC 上, 且将 $\triangle ABC$ 的面积两等分, 记 N 的横坐标为 $x, |MN| = y$. (1) 写出 $y = f(x)$ 的表达式. (2) 求 $y = f(x)$ 的最小值.

140. 已知 $\triangle ABC$ 内接于单位圆, 且 $(1 + \tan A)(1 + \tan B) = 2$. (1) 求证: 内角 C 为定值. (2) 求 $\triangle ABC$ 面积的最大值. 四、不等式的解法

141. 已知关于 x 的不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ 的解集是 $\{x | \alpha < x < \beta\}$, 其中 $0 < \alpha < \beta$, 求 $cx^2 + bx + a < 0$ 的解集.

142. 解不等式 $(x+1)^2(x-1)(x-4)^3 > 0$.

143. 解不等式 $\frac{3x^2 - 14x + 14}{x^2 - 6x + 8} \geq 1$.

144. 解不等式 $\sqrt{x^2 - 3x + 2} > x - 3$.

145. 解不等式 $\sqrt{2x - 1} < x - 2$.

146. 解不等式: (1) $|x^2 - 4| \leq x + 2$. (2) $|x^2 - \frac{1}{2}| > 2x$.

147. 解关于 x 的不等式 $|\log_a x| < |\log_a(ax^2)| - 2 (0 < a < 1)$. 【训练题】(一) 一次、二次、高次不等式

148. 若关于 x 的不等式 $2x - 1 > a(x - 2)$ 的解集是 R , 则实数 a 的取值范围是 ().

A. $a > 24$ B. $a > 14$ C. $a > -14$ D. $a > -24$

2. _____ (B) $a =$

2. _____ (C) $a <$

2. _____ (D) a 不存在.

149. 若关于 x 的不等式 $ax^2 +$

$bx - 2 > 0$ 的解集是

$(-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{3}, +\infty)$, 则

ab 等于 (). (A) -24

150. 若关于 x 的不等式 $(a - 2)x^2 + 2(a - 2)x - 4 < 0$ 对一切实数 x 恒成立, 则实数 a 的取值范围是 ().

A. $(-\infty, 2]$ B. $(\infty, -2)$ C. $(-2, 2]$ D. $(-2, 2)$

151. 若 $q < 0 < p$, 则不等式 $q < \frac{1}{x} < p$ 的解集为 ().

- A. $\{x | \frac{1}{q} < x < \frac{1}{p} \neq 0\}$ B. $\{x | x < \frac{1}{q} > \frac{1}{p}\}$ C. $\{x | -\frac{1}{p} < x < -\frac{1}{q} \neq 0\}$ D. $\{x | \frac{1}{p} < x < -\frac{1}{q}\}$

152. (1) 若关于 x 的不等式 $(a+b)x + 2a - 3b < 0$ 的解集是 $\{x | x < -\frac{1}{3}\}$, 则 $(a-3b)x + b - 2a > 0$ 的解集是_____. (2) 若不等式 $\frac{2x^2 + 2kx + k}{4x^2 + 6x + 3} < 1$ 对一切 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立, 则实数 k 的取值范围是_____. (3) 若关于 x 的不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ 的解集是 $\{x | 3 < x < 5\}$, 则不等式 $cx^2 + bx + a < 0$ 的解集是_____. (4) 若关于 x 的不等式 $\frac{x-a}{x^2-3x+2} \geq 0$ 的解集是 $\{x | 1 < x \leq a < 2\}$, 则实数 a 的取值范围是_____.

153. 写出下列不等式的解集: (1) $(x+2)(x+1)^2(x-1)^3(x-3) > 0$: _____. (2) $\frac{(x-1)^2(x+2)}{(x-3)(x-4)} \leq 0$: _____. (3) $x+1 \leq \frac{4}{x+1}$: _____.

154. 若不等式 $f(x) \geq 0$ 的解集为 $[1, 2]$, 不等式 $g(x) \geq 0$ 的解集为 \emptyset , 则不等式 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 的解集是 ().

- A. \emptyset B. $(-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$ C. $[1, 2)$ D. R

155. 若关于 x 的不等式 $ax^2 - bx + c < 0$ 的解集为 $(-\infty, \alpha) \cup (\beta, +\infty)$, 其中 $\alpha < \beta < 0$, 则不等式 $cx^2 + bx + a > 0$ 的解集为 ().

- A. $(\frac{1}{\beta}, \frac{1}{\alpha})$ B. $(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta})$ C. $(-\frac{1}{\beta}, -\frac{1}{\alpha})$ D. $(-\frac{1}{\alpha}, -\frac{1}{\beta})$

156. 解下列关于 x 的不等式: (1) $m^2x - 1 < x + m$. (2) $x^2 - ax - 2a^2 < 0$.

157. (1) 已知关于 x 的不等式 $\sqrt{x} > ax + \frac{3}{2}$ 的解集是 $\{x | 4 < x < b\}$, 求 a, b 的值. (2) 已知 $x = 3$ 是不等式 $ax > b$ 解集中的元素, 求实数 a, b 应满足的条件. (3) 已知集合 $\{x | x < -2x > 3\}$ 是集合 $\{x | 2ax^2 + (2-ab)x - b > 0\}$ 的子集, 求实数 a, b 的取值范围.

158. (1) 已知集合 $A = \{x | \frac{2x-1}{x^2+3x+2} > 0\}$, $B = \{x | x^2+ax+b \leq 0\}$, 且 $A \cap B = \{x | \frac{1}{2} < x \leq 3\}$, 求实数 a, b 的取值范围. (2) 已知集合 $A = \{x | (x+2)(x+1)(2x-1) > 0\}$, $B = \{x | x^2+ax+b \leq 0\}$, 且 $A \cup B = \{x | x+2 > 0\}$, $A \cap B = \{x | \frac{1}{2} < x \leq 3\}$, 求实数 a, b 的值.

159. (1) 已知关于 x 的不等式 $x^2 - ax - 6a \leq 0$ 有解, 且对于任意的解 x_1, x_2 恒有 $|x_1 - x_2| \leq 5$, 求实数 a 的取值范围. (2) 已知关于 x 的方程 $3x^2 + x \log_{\frac{1}{2}} a + 2 \log_{\frac{1}{2}} a = 0$ 的两根 x_1, x_2 满足条件 $-1 < x_1 < 0 < x_2 < 1$, 求实数 a 的取值范围. (3) 已知关于 x 的方程 $x^2 + (\frac{2}{m^2-1})x + m - 2 = 0$ 的一个根比-1小, 另一个根比1大, 求参数 m 的取值范围.

160. 已知集合 $A = \{x | x - a > 0\}$, $B = \{x | x^2 - 2ax - 3a^2 < 0\}$, 求 $A \cap B$ 与 $A \cup B$. (二) 无理不等式

161. 不等式 $\sqrt{x+3} > -1$ 的解集是 ().

- A. $\{x | x > -2\}$ B. $\{x | x \geq -3\}$ C. \emptyset D. R

162. 不等式 $(x-1)\sqrt{x+2} \geq 0$ 的解集是 ().

- A. $\{x|x > 1\}$ B. $\{x|x \geq 1\}$ C. $\{x|x \geq 1 \text{ 或 } x = -2\}$ D. $\{x|x > 1 \text{ 或 } x = -2\}$

163. 与不等式 $\sqrt{(x-4)(x+3)} \leq 1$ 的解完全相同的不等式是 ().

- A. $|(x-4)(x+3)| \leq 1$ B. $(x-4)(x+3) \leq 1$ C. $\lg[(x-4)(x+3)] \leq 0$ D. $0 \leq (x-4)(x+3) \leq 1$

164. 解下列不等式: (1) $\sqrt{x-5} + 4x - 3 > 3x + 1 + \sqrt{x-5}$: _____. (2) $\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2-x+3}$: _____.

(3) $(x-4)\sqrt{x^2-3x-4} \geq 0$: _____. (4) $\frac{x+1}{x+4}\sqrt{\frac{x+3}{1-x}} < 0$: _____. (5) $\sqrt{x+2} + \sqrt{x-5} \geq \sqrt{5-x}$: _____.

(6) $\sqrt{x-6} + \sqrt{x-3} \geq \sqrt{3-x}$: _____.

165. 解下列不等式: (1) $\sqrt{2-x} < x$. (2) $\sqrt{4-x^2} < x+1$. (3) $\sqrt{3-2x} > x$. (4) $\sqrt{(x-1)(2-x)} > 4-3x$.

166. 不等式 $\sqrt{4-x^2} + \frac{|x|}{x} \geq 0$ 的解集是 ().

- A. $[-2, 2]$ B. $[-\sqrt{3}, 0) \cup (0, 2]$ C. $[-2, 0] \cup (0, 2]$ D. $[-\sqrt{3}, 0) \cup (0, \sqrt{3}]$

167. 已知关于 x 的不等式 $\sqrt{2x-x^2} > kx$ 的解集是 $\{x|0 < x \leq 2\}$, 则实数 k 的取值范围是 ().

- A. $k < 0$ B. $k \geq 0$ C. $0 < k < 2$ D. $-\frac{1}{2} < k < 0$

168. 解下列不等式: (1) $\sqrt{2x-4} - \sqrt{x+5} < 1$. (2) $\sqrt{x^2-5x-6} < |x-3|$. (3) $|2\sqrt{x+3} - x + 1| < 1$.

169. 解下列关于 x 的不等式: (1) $\sqrt{a(a-x)} > a-2x (a > 0)$. (2) $\sqrt{4x-x^2} > ax (a < 0)$. (3) $\sqrt{1-ax} < x-1 (a > 0)$. (4) $\sqrt{a^2-x^2} > 2x-a$. (三) 指数不等式, 对数不等式

170. $\lg x^2 < 2$ 的解集是 ().

- A. $\{x|-10 < x < 0 \text{ 或 } 0 < x < 10\}$ B. $\{x|x < 10\}$ C. $\{x|0 < x < 10\}$ D. $\{x|-10 < x < 10\}$

171. 若 $f(x) = \log_2 x$, 则不等式 $[f(x)]^2 > f(x^2)$ 的解集是 ().

- A. $\{x|0 < x < \frac{1}{4}\}$ B. $\{x|\frac{1}{4} < x < 1\}$ C. $\{x|0 < x < 1 \text{ 或 } x > 4\}$ D. $\{x|\frac{1}{4} < x < 4\}$

172. 若 a, b 都是小于 1 的正数, 且 $a^{\log_b(x-5)} < 1$, 则 x 的取值范围是 ().

- A. $x > 5$ B. $x < 6$ C. $5 < x < 6$ D. $x < 5$ 或 $x > 6$

173. 不等式 $\log_x \frac{4}{5} < 1$ 的解集是 ().

- A. $\{x|0 < x < \frac{4}{5}\}$ B. $\{x|x > \frac{4}{5}\}$ C. $\{x|\frac{4}{5} < x < 1\}$ D. $\{x|0 < x < \frac{4}{5}\} \cup \{x|x > 1\}$

174. 若函数 $f(x) = \log_{a^2-1}(2x+1)$ 在区间 $(-\frac{1}{2}, 0)$ 内恒有 $f(x) > 0$, 则实数 a 的取值范围是 ().

- A. $0 < a < 1$ B. $a > 1$ C. $-\sqrt{2} < a < -1$ 或 $1 < a < \sqrt{2}$ D. $a < -\sqrt{2}$ 或 $a > \sqrt{2}$

175. 若不等式 $\log_a(x^2 - 2x + 3) \leq -1$ 对一切实数都成立, 则 a 的取值范围是 ().

- A. $a \geq 2$ B. $1 < a \leq 2$ C. $\frac{1}{2} \leq a < 1$ D. $0 < a \leq \frac{1}{2}$

176. 解下列关于 x 的不等式: (1) $\log_{\frac{1}{2}}(3x-2) > \log_{\frac{1}{2}}(x+1)$: _____. (2) $\log_{\frac{1}{3}}(x^2-x-2) > \log_{\frac{1}{3}}(2x^2-7x+3)$: _____. (3) $\log_x \frac{1}{2} < 1$: _____. (4) $\lg(x - \frac{1}{x}) < 0$: _____. (5) $\log_2|x - \frac{1}{2}| < -1$: _____.

177. 已知集合 $M = \{x | \log_3(x-m) > 1\}$ 与 $P = \{x | 3^{5-3x} \geq \frac{1}{3}\}$ 满足 $M \cap P \neq \emptyset$, 求实数 m 的取值范围.

178. 解下列不等式: (1) $\log_8(2-x) + \log_{61}(x+1) \geq \log_4 x$. (2) $\log_{0.5}(x+13) < \log_{0.5}(x^2-2x-15)$. (3) $\log_x(3\sqrt{x-1}-1) > 1$. (4) $\log_{x-1}(6-x-x^2) > 2$. (5) $\frac{1}{\log_2(x-1)} < \frac{1}{\log_2 \sqrt{x+1}}$. (6) $\frac{\log_3(1-\frac{3x}{2})}{\log_9(2x)} \geq 1$. (7) $\log_{0.5}(2^x-1) \cdot \log_{0.5}(2^{x-1}-\frac{1}{2}) \leq 2$.

179. 解关于 x 的不等式, 其中 $a > 0, a \neq 1$: (1) $\log_a(x+1-a) > 1$. (2) $\log_a(1-\frac{1}{x}) > 1$. (3) $\log_a(2x-1) > \log_a(x-1)$. (4) $\log_a^2 x < \log_x^2 a$. (5) $x^{\log_a x} > \frac{x^4 \cdot \sqrt{x}}{a^2}$. _____ (6) $\sqrt{\log_a x - 1} > 3 - \log_a x$.

180. 已知 x 满足不等式 $(\frac{1}{2})^{2x-4} - (\frac{1}{2})^x - (\frac{1}{2})^{x-2} + \frac{1}{4} \leq 0$, 且 $y = \log_{\frac{1}{a}}(a^2 x) \cdot \log_{\frac{1}{a^2}}(ax)$ 的最大值是 0, 最小值是 $-\frac{1}{8}$, 求实数 a 的值.

181. 已知关于 x 的方程 $x^2 - 5x \log_a k + 6 \log_a^2 k = 0$ 的两根中 ($k > 1$), 仅较小的根在区间 $(1, 2)$ 内, 试用 a 表示 k 的取值范围 ($a > 0$ 且 $a \neq 1$). (四) 绝对值不等式

182. 设 $x \in \mathbf{R}$, 则 $(1-|x|)(1+x) > 0$ 成立的充要条件是 ().

- A. $|x| < 1$ B. $x < 1$ C. $|x| > 1$ D. $x < 1$ 且 $x \neq 1$

183. 若函数 $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 8}$ 的定义域为 M , $g(x) = \frac{1}{\sqrt{1-|x-a|}}$ 的定义域为 N , 则使 $M \cap N = \emptyset$ 的实数 a 的取值范围为 ().

- A. $-1 < a < 3$ B. $-1 \leq a \leq 3$ C. $-2 < a < 4$ D. $-2 \leq a \leq 4$

184. 设 a, b 是满足 $ab < 0$ 的实数, 则下列不等式中正确的一个是 ().

- A. $|a+b| > |a-b|$ B. $|a+b| < |a-b|$ C. $|a-b| < ||a| - |b||$ D. $|a-b| < ||a| + |b||$

185. 不等式 $|x| < \frac{1}{x}$ 的解集为 ().

- A. \emptyset B. $\{x | x < 0\}$ C. $\{x | 0 < x < 1\}$ D. $\{x | x < 0 \text{ 或 } x \geq 1\}$

186. 若 $|a+b| < -c$, 则在 “① $a < -b-c$, ② $a+b > c$, ③ $a+c < b$, ④ $|a|+c < |b|$, ⑤ $|a|+|b| < -c$ ” 这五个式子中一定成立的个数是 ().

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

187. 若实数 a, b 满足 $ab > 0$, 则在 “① $|a+b| > |a|$, ② $|a+b| < |b|$, ③ $|a+b| < |a-b|$, ④ $|a+b| > |a-b|$ ” 这四个式子中, 正确的是 ().

A. ① ②

B. ① ③

C. ① ④

D. ② ④

188. 不等式 $|\frac{x}{1+x}| > \frac{x}{1+x}$ 的解集是 ().

A. $\{x|x \neq -1\}$

B. $\{x|x > -1\}$

C. $\{x|x < 0, x \neq -1\}$

D. $\{x|-1 < x < 0\}$

189. 解下列不等式. (1) $x^2 + |x| - 6 < 0$: _____. (2) $x^2 - 2|x| - 15 > 0$: _____. (3) $4 < |1 - 3x| \leq 7$: _____. (4) $|x - 3| < x - 1$: _____. (5) $\log_2 |x - \frac{1}{2}| < -1$: _____.

190. 若函数 $y = \log_a x$ 在 $x \in [2, +\infty]$ 上恒有 $|y| > 1$, 则实数 a 的取值范围是 _____. 156 解下列不等式: (1) $|x^2 - 5x + 10| > x^2 - 8$. (2) $|x^2 - 4| \leq x + 2$. (3) $|x + 1| < \frac{1}{x-1}$. (4) $|x + 2| - |x - 3| < 4$. (5) $|x + 3| - |2x - 1| < \frac{x}{2} + 1$.

191. (1) 已知当 $|x - 2| < a$ 成立时, $|x^2 - 4| < 1$ 也成立, 求正数 a 的取值范围. (2) 已知关于 x 的不等式 $|x - 4| + |x - 3| < a$ 在实数集 R 上的解集不是空集, 求正数 a 的取值范围.

192. 解下列不等式: (1) $\log_{\frac{1}{4}} |x| < \log_{\frac{1}{2}} |x + 1|$. (2) $|\lg(1 - x)| > |\lg(1 + x)|$. (3) $|\log_{\frac{1}{3}} x| + |\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3-x}| \geq 1$.

193. (1) 求函数 $f(x) = |x - \frac{1}{2}| - |x + \frac{1}{2}|$ 的最大值. (2) 已知 $|\lg x - \lg y| \leq 1$, 则 $\frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ 的取值范围是 _____.

194. 解下列关于 x 的不等式: (1) $|\log_{\sqrt{a}} x - 2| - |\log_a x - 2| < 2$. (2) $|\log_a x| < |\log_a(ax^2)| - 2$.

195. 解下列关于 z 的不等式: (1) $|3^x - 3| + 9^x - 3 > 0$. (2) $|a^x - 1| + |a^{2x} - 3| > 2(a > 0)$.

196. $\triangle ABC$ 三内角 A, B, C 对边长分别为 a, b, c , 外接圆半径记作 R . 求证: (1) $a^2 + b^2 + c^2 \geq 2ab \cos C + 2bc \cos A + 2ca \cos B$. (2) $(a + b - c)(b + c - a)(c + a - b) \leq abc$. (3) $\frac{1}{2}(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}) \leq \frac{\cos A}{a} + \frac{\cos B}{b} + \frac{\cos C}{c} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$. (4) $\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \geq \frac{1}{R^2}$.

197. 已知 $f(\log_a x) = \frac{a(x^2 - 1)}{x(a^2 - 1)}$ ($0 < a < 1, x > 0$). (1) 求 $f(x)$ ($x \in R$) 的表达式, 并判断它的单调性. (2) 若 $n \geq 2, n \in N$, 求证: $f(n) > n$.

198. 若正数 a, b, c 满足 $a + b > c$, 求证: $\frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} > \frac{c}{1+c}$.

199. 求证: (1) $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \cdots \frac{99}{100} < \frac{1}{10}$. (2) $(1 + \frac{1}{3})(1 + \frac{1}{5}) \cdots (1 + \frac{1}{2n-1}) > \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{2n+1}$ ($n \in N, n > 1$).

(3) $\frac{x_1^2}{x_2 - 1} + \frac{x_2^2}{x_3 - 1} + \cdots + \frac{x_{n-1}^2}{x_n - 1} + \frac{x_n^2}{x_1 - 1} \geq n + x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ (x_1, x_2, \cdots, x_n 都是大于 1 的实数).

200. (1) 若正数 a, b, c 满足 $a + b + c$, 求证: $(1+a)(1+b)(1+c) \geq 8(1-a)(1-b)(1-c)$. (2) 若 $0 \leq a \leq 1, 0 \leq b \leq 1, 0 \leq c \leq 1$, 求证: $\frac{a}{1+b+c} + \frac{b}{1+c+a} + \frac{c}{1+a+b} + (1-a)(1-b)(1-c) \leq 1$.

201. 已知三棱锥的三条侧棱两两互相垂直, 且六条棱之和为定值 m , 求证: 它的体积 $V \leq \frac{5\sqrt{2}-7}{162} m^3$.

202. 已知 $a + b + c > 0, ab + bc + ca > 0, abc > 0$ 求证: $a > 0, b > 0, c > 0$.

203. 求证: 任何面积等于 1 的凸四边形的周长及两条对角线的长度之和不小于 $4 + \sqrt{8}$.
204. 解下列关于 x 的不等式: (1) $2^{x+1} + x > 0$. (2) $\frac{a(x-1)}{x-2} > 1$. (3) $x^2 + (a-4)x + 4 - 2a > 0$, 其中 $-1 \leq a \leq 1$.
 (4) $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1-x^2}{1+x^2} > 0$. (5) $\frac{cx}{ac^2+b} - \frac{x}{2\sqrt{ab}} > x^2$, 其中 $a, b, c \in \mathbf{R}$, 且 $a > 0, b > 0$.
205. 已知函数 $f(x) = ax^2 - c$ 满足 $-4 \leq f(1) \leq -1, -1 \leq f(2) \leq 5$, 求证: $-1 \leq f(3) \leq 20$.
206. 已知关于 x 的方程 $a\sin^2 x + \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2} - a = 0$ 在 $0 \leq x < 2\pi$ 内有两个相异的实根, 求实数 a 的取值范围.
207. 已知 $|a| < 1, |b| < 1, |c| < 1$, 求证: (1) $|1 - abc| > |ab - c|$. _____ (2) $a + b + c < abc + 2$.