1. (001085) 判断题: (如果正确请在题目前面的横线上写 "T", 错误请在题目前面的横线上写 "F")

______(1) 若 $a>b$, $c=d$, 则 $ac>bd$;

______(2) 若 $\dfrac{a}{c^2}<\dfrac{b}{c^2}$, 则 $a<b$;

______(3) 若 $ac<bc$, 则 $a<b$;

______(4) 若 $a>b$, 则 $ac^2>bc^2$;

______(5) 若 $a>b, c<d$, 则 $ac>bd$;

______(6) 若 $a>b>0$, $c>d>0$, 则 $\dfrac{a}{c}>\dfrac{b}{d}$;

______(7) 若 $a>b$, $c\geq d$, 则 $a+c>b+d$;

______(8) 若 $a>b$, $c\geq d$, 则 $a+c\geq b+d$;

______(9) 若 $\sqrt[3]{a}>\sqrt[3]{b}$, 则 $a>b$.

______(10) 若 $ab^2\geq 0$, 则 $a\geq 0$.

2. (002750) 命题 (1) $a>b\Rightarrow ac^2>bc^2$; (2) $ac^2>bc^2\Rightarrow a>b$; (3) $a>b\Rightarrow \dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}$; (4) $a<b<0,\ c<d<0\Rightarrow ac>bd$; (5) $\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}\Rightarrow a>b$ $(n\in\mathbf{N}^*)$; (6) $a+c<b+d\Leftrightarrow\begin{cases}a<b,\\c<d;\end{cases}$ (7) $a<b<0\Rightarrow a^2>ab>b^2$. 其中真命题的序号是__________.

3. (001122) 在解不等式时, 有时我们可以用不等式的性质来求解. 例如解不等式 $x^2+x+1\geq 0$, 我们可以利用不等式的基本性质, 得到 $x^2+x+1=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}\geq\dfrac{3}{4}>0$ 恒成立, 因此解集为 $\mathbf{R}$. 请你用基本不等式的观点解以下两个不等式:

(1) $x+\dfrac{1}{x}>1$; (2) $x+\dfrac{1}{x}>2$.

4. (001138) 已知 a,b,c 是不全相等的正数. 证明: $\dfrac{a+b}{c}+\dfrac{b+c}{a}+\dfrac{c+a}{b}>6$.

5. (000022) 已知 $x>y$, 求证: $x^3-y^3>x^2y-xy^2$.

6. (001134) 已知 $x,y\in\mathbf{R}$, 用比较法证明: $x^2+y^2\geq 4(x+y)-8$.

7. (001139) 已知 $x,y\in\mathbf{R}^+$ 且 $x+y>2$, 用反证法证明: $\dfrac{1+y}{x}$ 与 $\dfrac{1+x}{y}$ 中至少有一个小于 2.

8. (001142) 已知 $g(x)=x^3-3x$.

(1) 若 $a>b\geq 1$, 证明: $g(a)>g(b)$;

(2) 若 $-1\leq a<b\leq 1$, 证明: $g(a)>g(b)$.

9. (002761) 设 $a,b\in\mathbf{R}$, 若 $a-|b|>0$, 则下列不等式中正确的是 (　　).

A. $b-a>0$　　B. $a^3+b^3<0$　　C. $b+a>0$　　D. $a^2-b^2<0$

10. (002812) 已知 $a,b\in\mathbf{R}^+$ 且 $a\neq b$, 求证: $|a^3+b^3-2ab\sqrt{ab}|>|a^2b+ab^2-2ab\sqrt{ab}|$.

11. (000046) 已知实数 $0<a<b$, 求证: $a<\dfrac{2ab}{a+b}<\sqrt{ab}<\dfrac{a+b}{2}<\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}<b$.

12. (001086) 设 $\{a,b,m,n\}\subseteq \mathbf{R}^+$ 且 $a>b$, 将 $\dfrac{a}{b},\dfrac{b}{a},\dfrac{a+m}{b+m},\dfrac{b+n}{a+n}$ 按由大到小的次序排列:

________>________>________>________.

13. (001120) 判断以下各不等式是否成立. 如果成立在前面的横线上写 "T", 如果不成立在前面的横线上写 "F".

______(1) 当 $x<0$ 时, $x+\dfrac{1}{x}\le -2$;

______(2) 当 $x>0$ 时, $x+\dfrac{1}{x}\ge 2$;

______(3) 当 $x>0$ 时, $x^2+\dfrac{1}{x}\ge 2\sqrt{x}$;

______(4) 当 $a,b\ge 0$ 时, $a+b\ge 2ab$;

______(5) 当 $a,b\ge 0$ 时, $2ab\ge a+b$;

______(6) 当 $x,y,z\in\mathbf{R}$ 时, $x^2+y^2+z^2\ge 2xy+yz$;

______(7) 当 $a,b\in\mathbf{R}$ 时, $a^2+b^2+4\ge ab+2a+2b$;

______(8) 当 $a,b\in\mathbf{R}$ 时, $a^3+b^3\ge 2a^2b$;

______(9) 当 $a,b\in\mathbf{R}$ 时, $a^3+b^3\ge a^2b+ab^2$;

______(10) 当 $a,b\in\mathbf{R}^+$ 时, $a^3+b^3\ge a^2b+ab^2$;

______(11) 当 $x,y>0$ 时, $x^2+y^2\ge (x+y)^2$;

14. (001123) 试确定实常数 k 使得 $a^2+b^2+c^2\ge k(a+b+c)^2\ge ab+bc+ca$ 对任意的 $a,b,c\in\mathbf{R}$ 成立, 并证明该不等式.

15. (001124) 设 $a,b,c,d>0$.

(1) 利用三元的基本不等式 "$x,y,z>0$ 时, $x^3+y^3+z^3\ge 3xyz$", 证明: $a^3+b^3+c^3+d^3\ge abc+bcd+cda+dab$;

(2) 该不等式能否加强为 $a^3+b^3+c^3+d^3\ge k(abc+bcd+cda+dab)$, 其中 $k=1.0001$? 为什么?

(3) 利用三元的基本不等式 "$x,y,z>0$ 时, $x^3+y^3+z^3\ge 3xyz$", 证明: $a^3+b^3+c^3+d^3\ge \dfrac{3\sqrt[3]{2}}{2}(abc+bcd)$.

16. (000371) 已知 $x,y\in\mathbf{R}^+$, 且 $x+2y=1$, 则 xy 的最大值为__________.

17. (000924) 已知 $x,y\in\mathbf{R}^+$, 且满足 $\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{4}=1$, 则 xy 的最大值为__________.

18. (000939) 若 $m>0$, $n>0$, $m+n=1$, 且 $\dfrac{t}{m}+\dfrac{1}{n}(t>0)$ 的最小值为 9, 则 $t=$__________.

19. (001127) 已知正实数 x,y 满足 $x+\dfrac{4}{y}=1$, 求 $\dfrac{1}{x}+y$ 的最小值.

20. (001128) 已知 $x>2$, 求代数式 $\dfrac{x^2-3x+3}{x-2}$ 的最小值.

21. (001151)(1) 已知 $f(x)=Ax^2+Bx$, 并且 $f(1)\in[0,1]$, $f(2)\in[0,1]$, 求 $f(5)$ 的最大值与最小值.

(2) 已知 $f(x)=Ax^2+Bx$, 并且 $f(1)\in[0,1]$, $f(2)\in[0,1]$, $f(3)\in(-\infty,0]$, 求 $f(-1)$ 的最大值与最小值.

22. (002753) 下列函数中, 最小值为 2 的函数有__________.

(1) $y=x+\dfrac{1}{x},\ x\in(0,+\infty)$; (2) $y=x+\dfrac{1}{x},\ x\in(1,+\infty)$; (3) $y=\dfrac{x^2+3}{\sqrt{x^2+2}}$; (4)$y=\log_3 x+\log_x 3$.

23. (002755) 若正实数 a,b 满足 $a+b=1$, 则 ( ).

A. $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$ 的最大值是 4 B. ab 的最小值是 $\dfrac{1}{4}$ C. $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ 有最大值 $\sqrt{2}$ D. a^2+b^2 有最小值 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

24. (002768)(1) 设 $x<2$, 则 $2x+\dfrac{8}{x-2}$ 有最__________ 值是__________, 此时 $x=$__________;

(2) 设 $0<x<\sqrt{2}$, 则 $x\sqrt{4-2x^2}$ 的最大值是__________, 此时 $x=$__________.

25. (001130) 已知直角三角形的面积为 8, 求斜边长的最小值.

26. (001131) 已知直角三角形的斜边长为 2, 求周长的最大值.

27. (001132) 用长为 $4L$ 的篱笆在一堵墙边上圈起一块矩形的地来 (只需要围三面), 问能圈到的地最大面积为多少? 如何圈?

28. (007826) 建造一个容积为 8 立方米、深为 2 米的长方形无盖水池. 如果池底和池壁的造价每平方米分别为 120 元和 80 元, 那么水池的最低造价是多少元?

29. (005225) 若实数 a,b 满足 $ab>0$, 则在① $|a+b|>|a|$; ② $|a+b|<|b|$; ③ $|a+b|<|a-b|$; ④ $|a+b|>|a-b|$ 这四个式子中, 正确的是 (　　).

A. ①②　　B. ①③　　C. ①④　　D. ②④

30. (010104) 证明: $|x+2|-|x-1|\geq -3$, 对所有实数 x 均成立, 并求等号成立时 x 的取值范围.

31. (001096) 利用绝对值的三角不等式 $|a+b|\leq|a|+|b|$, 证明:

(1) 对任意 $x,y\in\mathbf{R}$, $|x-y|\geq|x|-|y|$;

(2) 对任意 $x,y\in\mathbf{R}$, $|x-y|\geq||x|-|y||$.

32. (009468) 已知实数 a、b 满足 $|a|<\dfrac{1}{2}$, $|b|<\dfrac{1}{2}$. 证明下列各式:

(1) $|a+b|<1$;

(2) $|a-b|<1$.

33. (005239) 已知关于 x 的不等式 $|x-4|+|x-3|<a$ 在实数集 $\mathbf{R}$ 上的解集不是空集, 求正数 a 的取值范围.