

- 用列举法表示下列集合:
 - 十二生肖名称的集合;
 - 10 以内的素数组成的集合;
 - $\{y|y = x^2 - 1, -1 < x < 3, x \in \mathbf{Z}\}$.
- 用描述法表示下列集合:
 - 被 3 除余数等于 1 的整数的集合;
 - 比 1 大又比 10 小的实数组成的集合;
 - 平面直角坐标系内横轴上的点的坐标组成的集合.
- 下面写法正确的是 ().

A. $0 \in \{(0, 1)\}$ B. $1 \in \{(0, 1)\}$ C. $(0, 1) \in \{(0, 1)\}$ D. $(0, 1) \in \{0, 1\}$
- 集合 $\{(x, y)|xy \geq 0, x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}\}$ 是指 ().

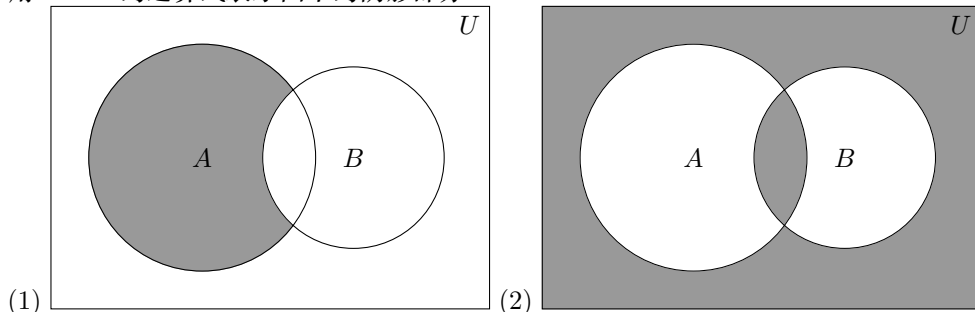
A. 第一象限内的所有点 B. 第三象限内的所有点
C. 第一象限和第三象限内的所有点 D. 不在第二象限、第四象限内的所有点
- 用适当的方法表示下列集合:
 - 方程 $x^2 - 2 = 0$ 的实数解组成的集合;
 - 两直线 $y = 2x + 1$ 和 $y = x - 2$ 的交点组成的集合.
- 已知集合 $A = \{2, (a + 1)^2, a^2 + 3a + 3\}$, 且 $1 \in A$, 求实数 a 的值.
- 指出下列各集合之间存在的关系:
 - $A = \{x|x^2 - 2x + 1 = 0\}$, $B = \{x|x^2 - 1 = 0\}$;
 - $A = \{1, 2, 4, 8\}$, $B = \{x|x \text{ 是 } 8 \text{ 的正约数}\}$.
- 下列写法正确的是 ().

A. $\emptyset \subsetneq \{0\}$ B. $0 \subsetneq \emptyset$ C. $\emptyset \in \{0\}$ D. $0 \in \emptyset$
- 若集合 $A = \{x|x = 2n + 1, n \in \mathbf{Z}\}$, 集合 $B = \{x|x = 4n - 1, n \in \mathbf{Z}\}$, 则 A 、 B 的关系是 ().

A. $A \subseteq B$ B. $A = B$ C. $A \subsetneq B$ D. $B \subsetneq A$
- 已知集合 $A = \{1\}$, 集合 $B = \{x|x^2 - 3x + a = 0\}$, 且 $A \subsetneq B$, 求实数 a 的值.
- 已知集合 $A = \{x, y\}$, 集合 $B = \{2x, 2x^2\}$, 且 $A = B$, 求集合 A .
- 已知集合 $S = \{1, 2\}$, 集合 $T = \{x|ax^2 - 3x + 2 = 0\}$, 且 $S = T$, 求实数 a 的值.
- 已知 a 是常数, 集合 $M = \{x|x^2 + x - 6 = 0\}$, 集合 $N = \{y|ay + 2 = 0\}$, 且 $N \subseteq M$, 求实数 a 的值.
- 已知所有菱形组成的集合为 A , 所有矩形组成的集合为 B , 求 $A \cap B$.
- 已知集合 $A = \{x|x \leq 7\}$, 集合 $B = \{x|x < 2\}$, 集合 $C = \{x|x > 5\}$, 求 $A \cap B$, $A \cap C$, $A \cap (B \cap C)$.

16. 已知集合 $A = \{(x, y) | u = -x + 1\}$, 集合 $B = \{(x, y) | y = x^2 - 1\}$, 求 $A \cap B$.
17. 已知集合 $A = \{x | x \text{ 是锐角三角形}\}$, 集合 $B = \{x | x \text{ 是钝角三角形}\}$, 求 $A \cap B$, $A \cup B$.
18. 已知集合 $A = \{x | x^2 + px + 15 = 0\}$, 集合 $B = \{x | x^2 - 5x + q = 0\}$, 且 $A \cap B = \{3\}$, 求 p, q 的值和 $A \cup B$.
19. 已知集合 $A = \{x | x \leq 1\}$, 集合 $B = \{x | x \geq a\}$, 且 $A \cup B = \mathbf{R}$, 求 a 的取值范围.
20. 已知集合 $A = \{x | x \text{ 是平行四边形}\}$, 集合 $U = \{x | x \text{ 是至少有一组对边平行的四边形}\}$, 求 $\complement_U A$.
21. 设 $U = \mathbf{R}$, 集合 $A = \{x | 4 - x > 2x + 1\}$, 求 $\complement_U A$.
22. 已知集合 $U = \{x | 0 < x \leq 10, x \in \mathbf{N}\}$, 集合 $A = \{1, 2, 4, 5, 9\}$, 集合 $B = \{4, 6, 7, 8, 10\}$, 求 $\complement_U A$, $\complement_U B$, $\complement_U A \cup \complement_U B$, $\complement_U A \cap \complement_U B$, $\complement_U (A \cap B)$, $\complement_U (A \cup B)$, 并指出其中相等的集合.

23. 用 A, B 的运算式表示图中的阴影部分:



24. 已知集合 $A = \{1, 4, x\}$, 集合 $B = \{1, x^2\}$, 且 $A \cup B = A$, 求 x 的值及集合 A, B .
25. 已知集合 $A = \{x | -2 \leq x \leq 4\}$, 集合 $B = \{x | -3 < x < 2\}$, 集合 $C = \{x | -3 \leq x < 0\}$, 求 $A \cup B$, $(A \cap B) \cup C$, $(A \cup C) \cap (B \cup C)$.
26. 已知集合 $U = \{x | x \geq 2\}$, 集合 $A = \{y | 3 \leq y < 4\}$, 集合 $B = \{z | 2 \leq z < 5\}$, 求 $\complement_U A \cap B$, $\complement_U B \cup A$.
27. 已知集合 $U = \{a, b, c, d, e, f\}$, 集合 $A = \{a, b, c, d\}$, $A \cap B = \{a\}$, $\complement_U (A \cup B) = \{f\}$, 求集合 B .
28. 判断下列语句是否为命题, 并在相应的括号内填入“是”或“否”.
- (1) 正方形是四边形; ____
 - (2) 0 是自然数吗; ____
 - (3) 交集和并集; ____
 - (4) $3 < \pi$. ____

29. 判断下列命题的真假, 并在相应的括号内填入“真命题”或“假命题”.

- (1) 如果 a, b 都是奇数, 那么 $a + b$ 是偶数; ____
- (2) 一组对边平行且两对角线相等的四边形是平行四边形; ____
- (3) 如果 $|a| < 2$, 那么 $a < 2$; ____
- (4) 如果 $A \cap B = A$, 那么 $A \cup B = B$. ____

30. 如果 a, b, c 为实数, 设 $A: a = b = c = 0$; $B: a, b, c$ 至少有一个为 0; $C: a^2 + \sqrt{b} + |c| = 0$, 那么 A ____ B ;
 A ____ C ; B ____ C .(用符号 “ \Rightarrow ”、“ \Leftarrow ” 或 “ \Leftrightarrow ” 填空)
31. 已知命题 A : 如果 $x < 3$, 那么 $x < 5$; 命题 B : 如果 $x \geq 3$, 那么 $x \geq 5$; 命题 C : 如果 $x \geq 5$, 那么 $x \geq 3$. 填写各命题之间的关系: A 与 B 互为____命题, B 与 C 互为____命题, C 与 A 互为____命题.
32. 写出命题 “在 $\triangle ABC$ 中, 如果 $\angle C > \angle B$, 那么 $AB > AC$ ” 的逆命题、否命题和逆否命题, 并判断其真假.
33. 写出命题 “如果 α , 那么 β ” 的逆命题、否命题和逆否命题.
34. 写出命题 “已知 a, b, c 是实数, 如果 $ac < 0$, 那么 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 有实数根” 的逆命题、否命题和逆否命题, 并判断其真假.
35. 命题 “若 $x \neq 3$ 且 $x \neq 4$, 则 $x^2 - 7x + 12 \neq 0$ ” 的逆否命题是 ().
- A. 若 $x^2 - 7x + 12 = 0$, 则 $x = 3$ 或 $x = 4$ B. 若 $x^2 - 7x + 12 = 0$, 则 $x \neq 3$ 或 $x \neq 4$
 C. 若 $x^2 - 7x + 12 \neq 0$, 则 $x \neq 3$ 且 $x \neq 4$ D. 若 $x^2 - 7x + 12 = 0$, 则 $x = 3$ 且 $x = 4$
36. 如果命题 A 的逆命题是 B , 命题 A 的否命题是 C , 那么命题 B 是命题 C 的 ().
- A. 逆命题 B. 否命题 C. 逆否命题 D. 以上都不正确
37. 试判断命题 A : “在 $\triangle ABC$ 中, $BC^2 = AC^2 + AB^2$ ” 与命题 B : “ $\triangle ABC$ 是直角三角形” 是否为等价命题, 并说明理由.
38. 试判断命题 A : “三角形任意两边之和大于第三边” 与命题 B : “三角形任意两边之差小于第三边” 是否为等价命题, 并说明理由.
39. 求证: 对角线不互相平分的四边形不是平行四边形.
40. 判断下列命题的真假, 并在相应的横线上填入 “真命题” 或 “假命题”.
- (1) 若 $A \cap B \neq \emptyset, B \subsetneq C$, 则 $A \cap C \neq \emptyset$ ____;
- (2) 方程 $(a+1)x + b = 0 (a, b \in \mathbf{R})$ 的解为 $x = -\frac{b}{a+1}$ ____;
- (3) 若命题 α, β, γ 满足 $\alpha \Rightarrow \beta, \beta \Rightarrow \gamma, \gamma \Rightarrow \alpha$, 则 $\alpha \Leftrightarrow \gamma$ ____.
41. 若 $\alpha: \{2\} \subsetneq B \subseteq \{2, 3, 4\}, \beta: B = \{2, 4\}$, 则 α 与 β 的推出关系是 ().
- A. $\alpha \Rightarrow \beta$ B. $\beta \Rightarrow \alpha$ C. $\alpha \Leftrightarrow \beta$ D. $\alpha \nRightarrow \beta$ 且 $\beta \nRightarrow \alpha$
- (2) 由命题甲成立, 可推出命题乙不成立, 下列说法一定正确的是 ().
- A. 命题甲不成立, 可推出命题乙成立 B. 命题甲不成立, 可推出命题乙不成立
 C. 命题乙成立, 可推出命题甲成立 D. 命题乙成立, 可推出命题甲不成立
42. 已知一个命题的否命题是 “两组对边分别相等的四边形是平行四边形”, 试写出原命题的逆命题, 并判断原命题的真假.
43. 已知一个命题的逆命题是 “若实数 a, b 满足 $a = 1$ 且 $b = 2$, 则 $a + b < 4$ ”, 试写出原命题的否命题, 并判断原命题的真假.

44. 类比 $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A$, 试再写出两个等价命题:

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \underline{\hspace{2cm}};$$

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \underline{\hspace{2cm}}.$$

45. 下列各题中命题 P 是命题 Q 的什么条件?

(1) P : 四边形的四条边相等, Q : 四边形是正方形;

(2) P : $\triangle ABC \cong \triangle DEF$, Q : $\triangle ABC$ 的面积 = $\triangle DEF$ 的面积;

(3) P : x 是 2 的倍数, Q : x 是 6 的倍数;

(4) P : 两个三角形全等, Q : 两个三角形的两角和一边对应相等.

46. 若 x 、 y 都是实数, 则 “ $xy = 0$ ” 是 “ $x = 0$ ” 的_____条件.

47. 若 x 、 y 、 z 都是实数, 则 “ $x \cdot y = y \cdot z$ ” 是 “ $x = z$ ” 的_____条件.

48. 若 x 、 y 、 z 都是实数, 则 “ $\frac{x}{y} = \frac{y}{z}$ ” 是 “ $xz = y^2$ ” 的_____条件.

49. 若 x 、 y 都是实数, 则 “ $|x| > |y|$ ” 是 “ $x > y > 0$ ” 的_____条件.

50. 已知 l 、 m 、 n 都是自然数, “ $l + m + n$ 为偶数” 是 “ l 、 m 、 n 都是偶数” 的什么条件? 为什么?

51. 有下列四组命题: ① P : 集合 $A \subseteq B$, $B \subseteq C$, $C \subseteq A$, Q : 集合 $A = B = C$; ② P : $A \cap B = A \cap C$, Q : $B = C$;

③ P : $(x-2)(x-3) = 0$, Q : $\frac{x-2}{x-3} = 0$; ④ P : 抛物线 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 过原点, Q : $c = 0$. 其中 P 是 Q 的充要条件的有 ().

A. ①、②

B. ①、④

C. ②、③

D. ②、④

52. 写出使实数 a 、 b 一正一负的充要条件.

53. 求证: 实数 a 、 b 均大于 0 的充要条件是
$$\begin{cases} a + b > 0, \\ ab > 0. \end{cases}$$

54. 命题 “ $x \in M$ 或 $x \in P$ ” 是命题 “ $x \in M \cap P$ ” 的什么条件?

55. 写出命题 “ $x > 3$ ” 的一个充分条件和一个必要条件.

56. 如果 α 是 β 的充分非必要条件, 那么 $\bar{\alpha}$ 是 $\bar{\beta}$ 的什么条件?

57. 如果 A 是 B 的必要条件, C 是 B 的充分条件, A 是 C 的充分条件, 那么 B 、 C 分别是 A 的什么条件?

58. 填空: 已知集合 $A = \{a | a \text{ 具有性质 } p\}$, $B = \{b | b \text{ 具有性质 } q\}$.

(1) 若 $A \subseteq B$, 则 p 是 q 的_____条件;

(2) 若 $A \supseteq B$, 则 p 是 q 的_____条件;

(3) 若 $A = B$, 则 p 是 q 的_____条件.

59. 试用子集与推出关系来判断命题 A 是命题 B 的什么条件.

(1) A : 该平面图形是四边形, B : 该平面图形是梯形;

(2) A : $x = 2$, B : $(x - 5)(x - 2) = 0$;

(3) A : $x^2 = y^2$, B : $x = y$;

(4) A : $a = 2$, B : $a \leq 2$.

60. 如果命题 p : $m < -3$, 命题 q : 方程 $x^2 - x - m = 0$ 无实数根, 那么 p 是 q 的什么条件?

61. 已知命题 α : $2 \leq x < 4$, 命题 β : $3m - 1 \leq x \leq -m$, 且 α 是 β 的充分条件, 求实数 m 的取值范围.

62. 如果命题 p : $A \subseteq B$, 命题 q : $A \subsetneq B$, 那么 p 是 q 的什么条件?

63. 已知 a 为实数, 写出关于 x 的方程 $ax^2 + 2x + 1 = 0$ 至少有一个实数根的一个充要条件、一个充分条件、一个必要条件.

64. 下列命题中正确的是 ().

A. 自然数集 \mathbf{N} 中最小的数是 1

B. 空集是任何集合的真子集

C. 如果 $A \subseteq B$, 且 $A \neq B$, 那么 A 是 B 的真子集

D. $\{y | y = x + 3, x \in \mathbf{N}\}$ 中的最小值是 4

65. 若 $A \cap B = A$, 则 ().

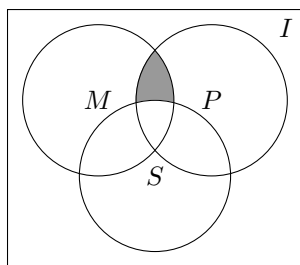
A. $\complement_B A \cup A = \emptyset$

B. $\complement_B A \cap A = \emptyset$

C. $\complement_B A \cup \complement_B B = \emptyset$

D. $\complement_B A \cap A = \emptyset$

66. 已知 I 是全集. 若 M 、 P 、 S 是 I 的 3 个子集, 则图中阴影部分所表示的集合是 ().



A. $(M \cap P) \cap S$

B. $(M \cap P) \cup S$

C. $(M \cap P) \cap \complement_I S$

D. $(M \cap P) \cup \complement_I S$

67. 若命题 p : $x^2 - 5x + 6 = 0$, 命题 q : $x = 2$, 则 p 是 q 的_____条件。

68. 若 p : 四边形是正方形, q : 四边形的两条对角线互相垂直平分, 则 p 是 q 的_____条件.

69. 若 p : 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 过原点, q : $c = 0$, 则 p 是 q 的_____条件.

70. 若 p : $a > b$, q : $a^2 > b^2$, 则 p 是 q 的_____条件.

71. 若方程 $x^2 + px + 4 = 0$ 的解集为 A , 方程 $x^2 + x + q = 0$ 的解集为 B , 且 $A \cap B = \{4\}$, 则集合 $A \cup B$ 的所有子集是_____.

72. 对上海市某校学生进行调查, 结果如下: 成语词典拥有率为 84%, 古汉语词典拥有率为 78%. 同时拥有上述两种词典的学生占全校学生的 66%, 求上述两种词典都没有的学生所占的比例.

73. 已知集合 $A = \{x | -2 < x \leq 1\}$, 集合 $B = \{x | x \geq 1 \text{ 或 } x < -2\}$, 求 $A \cup B$, $A \cap B$.
74. 已知集合 $A = \{x | -1 < x < 1 \text{ 或 } x \geq 3\}$, 集合 $U = \{x | x \geq 2 \text{ 或 } x < 1\}$, 求 $\complement_U A$.
75. 写出命题: 若 $x > 1$, 则 $x > 0$ 的逆命题、否命题、逆否命题, 并指出哪些是真命题.
76. 已知集合 $A = \{x | x^2 + px + q = 0\}$, 集合 $B = \{x | x^2 - x + r = 0\}$, 且 $A \cap B = \{-1\}$, $A \cup B = \{-1, 2\}$, 求 p 、 q 、 r 的值.
77. 已知全集 $U = \mathbf{R}$, 集合 $A = \{x | x \leq a - 1\}$, 集合 $B = \{x | x > a + 2\}$, 集合 $C = \{x | x < 0 \text{ 或 } x \geq 4\}$. 若 $\complement_U(A \cup B) \subseteq C$, 求实数 a 的取值范围.
78. 若集合 $M = \{a | a = x + \sqrt{2}y, x, y \in \mathbf{Q}\}$, 则下列结论正确的是 ().
- A. $M \subseteq \mathbf{Q}$ B. $M = \mathbf{Q}$ C. $M \supsetneq \mathbf{Q}$ D. $M \subsetneq \mathbf{Q}$
79. 若 A 是 B 的必要非充分条件, B 是 C 的充要条件, C 是 D 的必要非充分条件, 则 D 是 A 的 _____ 条件, C 是 A 的 _____ 条件.
80. 已知全集 $U = \{x | x \text{ 为不大于 } 20 \text{ 的素数}\}$. 若 $A \cap \complement_U B = \{3, 5\}$, $\complement_U A \cap B = \{7, 19\}$, $\complement_U(A \cup B) = \{2, 17\}$, 则 $A =$ _____, $B =$ _____.
81. 已知集合 $P = \{x | -2 \leq x \leq 5\}$, 集合 $Q = \{x | k + 1 \leq x \leq 2k - 1\}$, 且 $Q \subseteq P$, 求实数 k 的取值范围.
82. 已知集合 $A = \{x | (a - 1)x^2 + 3x - 2 = 0\}$, 是否存在这样的实数 a , 使得集合 A 有且仅有两个子集? 若存在, 求出实数 a 的值及对应的两个子集; 若不存在, 请说明理由.
83. 解不等式: $2(x + 1) - 3(x - 2) > 8$.
84. 解不等式组:
$$\begin{cases} 3x - 2(5 - 3x) > 8, \\ 2x \leq 2(2x + 3). \end{cases}$$
85. 判断下列语句是否正确, 并在相应的横线内填入“√”或“×”.
- (1) 若 $ax > b$, 则 $x > \frac{b}{a}$ ($a \neq 0$). _____;
- (2) 若 $a^2x > a^2y$, 则 $x > y$. _____;
- (3) 若 $a > b > 0$, $c > d > 0$, 则 $\frac{a}{c} > \frac{b}{d}$. _____;
- (4) 若 $a > b$, 则 $a^2 > ab$. _____.
86. 如果 $a^2 > b^2$, 那么下列不等式中正确的是 ().
- A. $a > 0 > b$ B. $a > b > 0$ C. $|a| > |b|$ D. $a > |b|$
87. 如果 $a < b < 0$, 那么下列不等式中正确的是 ().
- A. $\frac{-a}{-b} < 1$ B. $a^2 > ab$ C. $\frac{1}{b^2} < \frac{1}{a^2}$ D. $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

88. 如果 $a < 0 < b$, 那么下列不等式中正确的是 ().

A. $\sqrt{-a} < \sqrt{b}$

B. $a^2 < b^2$

C. $a^3 < b^3$

D. $ab > b^2$

89. 证明: 如果 $a > b, c < 0$, 那么 $(a - b)c < 0$.

90. 证明: 如果 $a < b < 0$, 那么 $0 > \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

91. 用 “>” 或 “<” 号填空: 如果 $a < b < 0$, 那么

(1) $\sqrt[n]{-a}$ _____ $\sqrt[n]{-b}$ ($n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*$);

(2) $\frac{1}{a^{2n}}$ _____ $\frac{1}{b^{2n}}$ ($n \in \mathbf{N}^*$).

92. 比较 $x(x - y)$ 与 $y(x - y)$ ($x \neq y$) 的大小.

93. 比较 $(3a + 1)(a + 1)$ 与 $2(a + 1)^2 - 3$ 的大小.

94. 比较 $(t + 1)(t - 5)$ 与 $(t - 2)^2$ 的大小.

95. 已知 $a > 2$, 解关于 x 的方程 $ax + 4 < 2x + a^2$.

96. 已知 $m < 1$, 解关于 x 的方程 $mx + 1 < x + m^3$.

97. 已知 $p \neq q$, 解关于 x 的方程 $(p - q)x < p^2 - q^2$.

98. 解关于 x 的方程 $mx + 4 < m^2 + 2x$.

99. 甲乙两个工厂今年的产值分别为 25000 万元、20000 万元. 如果甲工厂每年增加产值 500 万元, 乙工厂每年增加产值 1000 万元, 那么几年后乙工厂的产值超过甲工厂的产值?

100. 如果 $a > b$, 那么 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ 成立的充要条件是_____.

101. 解关于 x 的不等式: $a^2(x - 1) > b^2(1 + x) + 2ab$, 其中 $a, b \in \mathbf{R}^+$.

102. 已知 $x, y \in \mathbf{R}$, 比较 $x^2 + y^2$ 与 $2(2x - y) - 5$ 的大小.

103. 解不等式: $2x^2 - 3x + 1 < 0$.

104. 解不等式: $(x + 1)^2 - 6 > 0$.

105. 解不等式: $x(x - 1) < x(2x - 3) + 1$.

106. 解不等式: $-x^2 + 2x + 35 > 0$.

107. 解不等式: $(x - 2)(3 - x) \leq 0$.

108. 解不等式: $2x - 1 \geq x^2$.

109. 解关于 x 的不等式: $(x - a)(x - 1) < 0$ ($a > 1$).

110. 解关于 x 的不等式: $(x - a)(x - 2a) < 0$ ($a > 0$).

111. 写出一个解集只含一个元素的一元二次不等式.

112. 解不等式组:
$$\begin{cases} 6 - x - x^2 \leq 0, \\ x^2 + 3x - 4 < 0. \end{cases}$$

113. 解不等式组:
$$\begin{cases} 4x^2 - 27x + 18 > 0, \\ x^2 - 6x + 4 < 0. \end{cases}$$

114. 已知集合 $U = \mathbf{R}$, 且集合 $A = \{x|x^2 - 16 < 0\}$, 集合 $B = \{x|x^2 - 4x + 3 \geq 0\}$, 求:

(1) $A \cap B$;

(2) $A \cup B$;

(3) $\complement_U(A \cap B)$;

(4) $\complement_U A \cup \complement_U B$.

115. 已知不等式 $x^2 + ax + b < 0$ 的解集为 $(-3, -1)$, 求实数 a 、 b 的值.

116. 已知关于 x 的二次方程 $2x^2 + ax + 1 = 0$ 无实数解, 求实数 a 的取值范围.

117. 已知 $P(a, b)$ 为正比例函数 $y = 2x$ 的图像上的点, 且 P 与 $B(2, -1)$ 之间的距离不超过 3, 求 a 的取值范围.

118. 某船从甲码头沿河顺流航行 75 千米到达乙码头, 停留 30 分钟后再逆流航行 126 千米到达丙码头. 如果水流的速度为每小时 4 千米, 该船要在 5 小时内完成航行任务, 那么船的速度每小时至少为多少千米?

119. 解不等式组:
$$\begin{cases} 3x^2 + x - 2 \geq 0, \\ 4x^2 - 15x + 9 > 0. \end{cases}$$

120. 已知关于 x 的不等式组
$$\begin{cases} (2x - 3)(3x + 2) \leq 0, \\ x - a > 0 \end{cases}$$
 无实数解, 求实数 a 的取值范围.

121. 当 k 取何值时, 关于 x 的不等式 $2kx^2 + kx - \frac{3}{8} < 0$ 对于一切实数 x 都成立?

122. 已知关于 x 的不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ 的解集是 $\{x|x > 2 \text{ 或 } x < \frac{1}{2}\}$, 求关于 x 的不等式 $ax^2 - bx + c \leq 0$ 的解集.

123. 某商品每件成本为 80 元, 售价为 100 元, 每天售出 100 件. 若售价降低 x 成 (1 成即 10%), 售出商品的数量就增加 $\frac{8}{5}x$ 成. 若要求该商品一天的营业额至少为 10260 元, 且又不能亏本, 求 x 的取值范围.

124. 解不等式: $\frac{1}{x} < 1$.

125. 解不等式: $\frac{4x+3}{x-1} > 5$.

126. 解不等式: $\frac{2}{x} < \frac{2}{x-3}$.

127. 解不等式: $\frac{1}{x-4} \leq 1 - \frac{x}{4-x}$.

128. 求当 k 为何值时, 关于 x 的方程 $\frac{4k-3x}{k+2} = 2x$ 的解分别是:

(1) 正数;

(2) 负数.

129. 解不等式: $|x^2 - 3| < 2$.

130. 解不等式: $|\frac{1}{2-x}| \geq 2$.

131. 解不等式: $|x^2 - 3x + 2| \leq 0$.

132. 解不等式: $|\frac{x}{x+1}| > \frac{x}{x+1}$.

133. 解不等式: $|x-3| < x-1$.

134. 若 $a < b < 0$, 则不等式 $\frac{x+a}{x+b} > 0$ 的解集是_____.

135. 解不等式: $4 \leq |x^2 - 4x| < 5$.

136. 解不等式: $\frac{1}{|x|} > x$.

137. 已知不等式 $|ax+1| \leq b$ 的解集是 $[-1, 3]$, 求 a 、 b 的值.

138. 如果 $a, b \in \mathbf{R}$, 且 $ab > 0$, 那么下列不等式中正确的是 ().

A. $a^2 + b^2 > 2ab$

B. $a + b \geq 2\sqrt{ab}$

C. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} > \frac{2}{\sqrt{ab}}$

D. $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \geq 2$

139. 设 $ab \neq 0$, 利用基本不等式有如下证明: $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} = \frac{b^2 + a^2}{ab} \geq \frac{2ab}{ab} = 2$. 试判断这个证明过程是否正确. 若正确, 请说明每一步的依据; 若不正确, 请说明理由.

140. 已知 $a, b \in \mathbf{R}$, 比较 $|a| + \frac{|b|}{2}$ 与 $\sqrt{2} \cdot \sqrt{|ab|}$ 的大小.

141. 已知 $0 < x < \frac{1}{2}$, 求当 x 取何值时, $x(1-2x)$ 的值最大.

142. 已知 $a > 0$, 求证: $a + a^3 \geq 2a^2$.

143. 用一根长为 l 的铁丝制成一个矩形框架. 当长、宽分别为多少时, 框架的面积最大?

144. 已知 $x, y \in \mathbf{R}^+$, 且 $x + y = 1$, 求当 x, y 分别取何值时, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ 的值最小.

145. 已知 $x > -1$, 求当 x 取何值时, $x + \frac{4}{x+1}$ 的值最小.

146. 已知 $a + b = 1$, 求证: $a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}$.

147. 建造一个容积为 8 立方米、深为 2 米的长方形无盖水池. 如果池底和池壁的造价每平方米分别为 120 元和 80 元, 那么水池的最低造价是多少元?

148. 求证: $(ac + bd)^2 \leq (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$.

149. 已知 $x > y$, 求证: $x^3 - y^3 > x^2y - xy^2$.
150. 已知实数 $a \geq 3$, 求证: $\sqrt{a} - \sqrt{a-1} < \sqrt{a-2} - \sqrt{a-3}$.
151. 已知 a 、 b 、 c 是不全相等的整数, 求证: $(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1) > 8abc$.
152. 设 a 、 b 、 $c \in \mathbf{R}^+$, 求证: $\frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c} \geq 6$.
153. 已知 $a > 0$, $b > 0$, 求证: $\frac{a}{\sqrt{b}} + \frac{b}{\sqrt{a}} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.
154. 求证: $|\frac{a^2-1}{a^2+1}| \leq 1$.
155. 如果 $a \in \mathbf{R}$, 且 $a^2 + a < 0$, 那么 a 、 a^2 、 $-a$ 、 $-a^2$ 的大小关系是 ().
- A. $-a < -a^2 < a < a^2$ B. $a < -a^2 < a^2 < -a$ C. $-a^2 < a < a^2 < -a$ D. $-a^2 < a < -a < a^2$
156. 不等式 $\frac{x^2}{x-1} \geq 0$ 的解是 ().
- A. $(1, +\infty)$ B. $[1, +\infty)$ C. $(1, +\infty) \cup \{0\}$ D. $[1, +\infty) \cup \{0\}$
157. 不等式 $1 + |x+1| < 0$ 的解集是 ().
- A. $(-\infty, -2)$ B. $(-2, 0)$ C. \mathbf{R} D. \emptyset
158. 证明: 如果 $a > b > 0$, $c > d > 0$, 那么 $a^2c > b^2d$.
159. 证明: $a^2 + b^2 + 2 \geq 2(a+b)$.
160. 证明: 如果 a 、 b 、 c 都是正数, 那么 $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$.
161. 解不等式: $2(x+1)(x+2) > (x+3)(x+4)$.
162. 解不等式: $-3x^2 - 5x - 4 < 0$.
163. 解不等式: $4x^2 - 20x + 25 \leq 0$.
164. 解不等式: $x^2 - 16x + 64 > 0$.
165. 解不等式组: $\begin{cases} x^2 - 16 < 0, \\ x^2 - 4x + 3 \geq 0. \end{cases}$.
166. 解不等式组: $4 < x^2 - x - 2 < 10$.
167. 解不等式: $|\frac{3x-9}{2}| \leq 6$.
168. 解不等式: $3 < |x-2| < 5$.
169. 解不等式: $|\frac{1}{x}| < \frac{4}{5}$.

170. 下列四对不等式(组)中, 哪几对具有相同的解集?

(1) $-\frac{1}{2}x^2 + 3x + \frac{27}{2} > 0$ 与 $x^2 - 6x - 27 > 0$;

(2) $4 < x^2 - x + 2 < 10$ 与 $\begin{cases} x^2 - x + 2 < 10, \\ x^2 - x + 2 > 4; \end{cases}$

(3) $|2x + 1| < 5$ 与 $2x + 1 < 5$ 或 $2x + 1 > -5$;

(4) $\frac{x-1}{x+1} < 2$ 与 $x-1 < 2(x+1)$.

171. 已知关于 x 的不等式 $2x^2 - 2(a-1)x + (a+3) > 0$ 的解集是 \mathbf{R} , 求实数 a 的取值范围.

172. 已知函数 $y = (m-1)x^2 + (m-3)x + (m-1)$, m 取什么实数时, 函数图像与 x 轴

(1) 没有公共点?

(2) 只有一个公共点?

(3) 有两个不同的公共点?

173. 当 k 是什么实数时, 关于 x 的方程 $2x + k(x+3) = 4$ 的解是正数?

174. 已知直角三角形的周长为 4, 求这个直角三角形面积的最大值, 并求此时各边的长.

175. 求证: $(\frac{a+b}{2})^2 \leq \frac{a^2+b^2}{2}$.

176. 求不等式 $5 \leq x^2 - 2x + 2 < 26$ 的正整数解.

177. 已知 $x, y \in [a, b]$.

(1) 求 $x+y$ 的范围;

(2) 若 $x < y$, 求 $x-y$ 的范围.

178. 当 k 为什么实数时, 方程组 $\begin{cases} 3x - 6y = 1, \\ 5x - ky = 2 \end{cases}$ 的解满足 $x < 0$ 且 $y < 0$ 的条件?

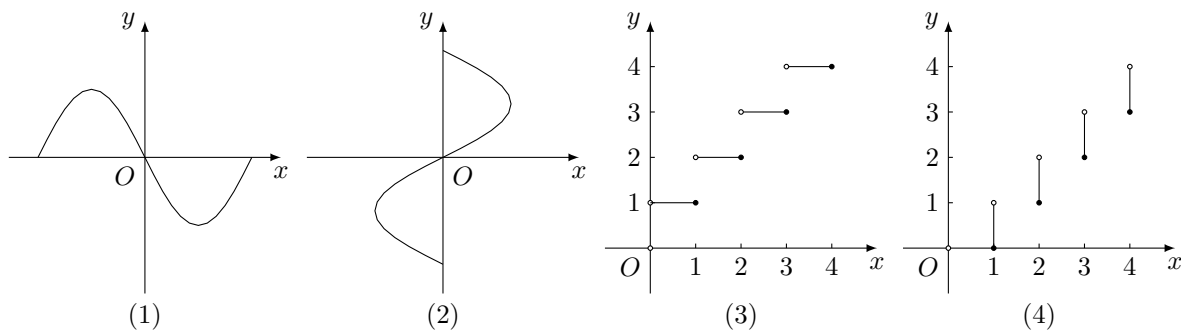
179. 当 k 为什么实数时, 方程组 $\begin{cases} 4x + 3y = 60, \\ kx + (k+2)y = 60 \end{cases}$ 的解满足 $x > y > 0$ 的条件?

180. 已知 $m < n$, 试写出一个形如 $ax^2 + bx + c > 0$ 的一元二次不等式, 使它的解集分别为:

(1) $(-\infty, m) \cup (n, +\infty)$;

(2) (m, n) .

181. 下列各图像中, 哪些是函数的图像, 哪些不是函数的图像? 为什么?



182. 选择题: 下列各组函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 表示同一个函数的是 ().

- A. $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}, g(x) = x - 1$
- B. $f(x) = |x|, g(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0 \end{cases}$
- C. $f(x) = x^0, g(x) = 1$
- D. $f(x) = (\sqrt{x})^2, g(x) = \sqrt{x^2}$

183. 求函数 $y = \frac{1}{x^2 + 2x - 3}$ 的定义域.

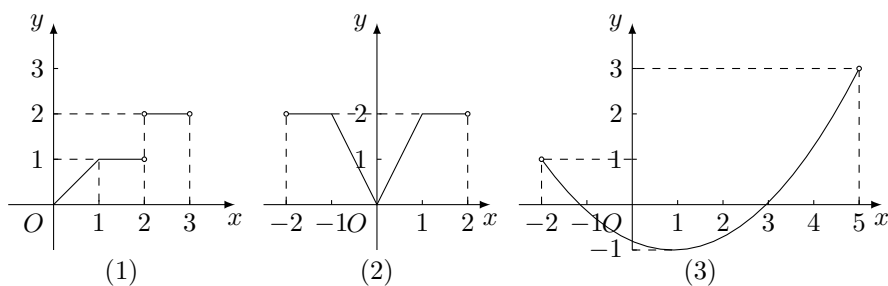
184. 求函数 $y = \sqrt{4 - 3x - x^2}$ 的定义域.

185. 求函数 $y = \sqrt{x - 2} + \sqrt{x + 3}$ 的定义域.

186. 求函数 $y = \frac{1}{x + 2} + \frac{1}{\sqrt{5 - x}}$ 的定义域.

187. 若 $f(x) = x^2 + px + q$, 且 $f(1) = 0, f(2) = 0$, 求 $f(-1)$ 的值.

188. 观察下列各函数, 并写出他们的值域:



189. 某企业去年四个季度生产某种型号机器的数量 y (万台) 与季度的函数关系是:

x (季度)	1	2	3	4
y (万台)	10	12	14	16

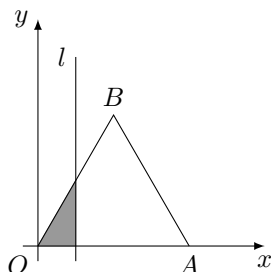
试写出函数的定义域, 并作出函数的图像.

190. 求函数 $y = \frac{1}{|x + 3| - 1}$ 的定义域.

191. 求函数 $y = \sqrt{(a-x)(x-1)}$ (x 为自变量) 的定义域.
192. 已知 $f(x) = \begin{cases} 2x(3+x), & x \geq 0, \\ 2x(3-x), & x < 0. \end{cases}$ 求 $f(2)$ 、 $f(-4)$ 、 $f(-a)$ 的值.
193. 试举出一个定义域为 $[-2, 2]$ 的函数例子.
194. 为分流短途乘客, 减缓轨道交通高峰压力, 上海地铁实行新的计费标准. 新标准的分段计程制度如下: 0—6 千米 (含 6 千米) 3 元; 6—16 千米 (含 16 千米) 4 元; 16 千米以上每 6 千米递增 1 元, 但总票价不超过 8 元.
- (1) 试作出票价 y (元) 关于路程 x (千米) 的函数图像;
- (2) 某人买了 5 元的车票, 他途经路程不能超过多少千米?
195. 试用解析式将圆的面积 S 表示成圆的周长 C 的函数.
196. 一个矩形的对角线长为 10 厘米, 试用解析式将它的一条边长 y (厘米) 表示成与这条边相邻的另一条边长 x (厘米) 的函数.
197. 已知上海到北京火车行驶路程为 1318 千米, 高速火车以每小时 300 千米的速度, 由上海开往北京. 试用解析式将行进中的火车到北京的路程 s (千米) 表示成行驶的时间 t (时) 的函数.
198. 某中学的高一学生进行野外生存训练, 从甲地步行到乙地. 已知甲乙两地相距 32 千米, 在前 3 小时内学生们每小时走 4 千米, 随后以每小时 5 千米的速度一直走到乙地. 设他们离开甲地的距离为 s (千米) 时, 所用的时间为 t (时), 试用解析式将 s (千米) 表示成 t (时) 的函数.
199. 某地区住宅电话费收取标准为: 接通后 3 分钟内 (含 3 分钟) 收费 0.20 元, 以后每分钟 (不足一分钟按一分钟计) 收费 0.18 元, 如果一次通话 t 分钟, 写出通话费: y (元) 关于通话时间 t (分) 的函数关系式.
200. 某商场对顾客实行购物优惠活动, 规定一次购物总额:
- (1) 如果不超过 500 元, 那么不予优惠;
- (2) 如果超过 500 元但不超过 1000 元, 那么按标价给予 9 折优惠;
- (3) 如果超过 1000 元, 那么其中的 1000 元按 (2) 给予优惠, 超过 1000 元的部分给予 7 折优惠.
- 设一次购物总额为 x 元, 优惠后实际付款额为 y 元, 试写出用 x (元) 表示 y (元) 的函数关系式.
201. 已知等腰三角形的周长为 12 厘米, 试将该三角形的一条腰长 y (厘米) 表示成底边长 x (厘米) 的函数.
202. 某物流公司在上海、杭州各有库存的某种机器 12 台和 6 台, 现销售给 A 市 10 台、 B 市 8 台. 已知上海调运一台机器到 A 市、 B 市的运费分别为 400 元、800 元; 杭州调运一台机器到 A 市、 B 市的运费分别为 300 元、500 元. 设从上海调往 A 市 x 台, 求总运费 W (元) 关于 x (台) 的函数关系式.
203. 某地区有一种上网服务项目, 收费方法为: 每个月付 75 元, 一年中 1、2、7、8 月为无限时包月上网, 其余月份为每月 30 小时有限包月, 超过 30 小时部分按 0.05 元/分计费. 设上网时间为 t 小时, 每月上网的费用为 y 元.

- (1) 写出一年中 1、2、7、8 月中每个月上网费用: y (元) 关于上网时间 t (时) 的函数解析式;
 (2) 写出一年中除 1、2、7、8 月以外的每个月上网费用 (元) 关于上网时间 y (时) 的函数解析式.

204. 如图, 在直角坐标系的第一象限内, $\triangle OAB$ 是边长为 2 的等边三角形, 设直线 $l: x = t (0 \leq t \leq 2)$ 截这个三角形. 图中阴影部分的面积为 S , 求函数 $S = f(t)$ 的解析式.



205. 已知函数 $f(x) = \sqrt{x+1} + \sqrt{1-x}$, 函数 $g(x) = \sqrt{2-x} - \sqrt{1-x}$, 求函数 $y = f(x) + g(x)$.

206. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{x}$, 函数 $g(x) = x^2 - x$, 求函数 $y = f(x) \cdot g(x)$.

207. 已知函数 $f(x) = 2x - \frac{1}{x^2 - 1}$, 函数 $g(x) = \frac{1}{x^2 - 1} - 1$.

- (1) 求函数 $y = f(x) + g(x)$;
 (2) 画出函数 $y = f(x) + g(x)$ 的图像.

208. 已知函数 $f(x) = x\sqrt{x-1}$, 函数 $g(x) = \sqrt{x-1}$, 设 $F(x) = f(x) \cdot g(x)$.

- (1) 写出 $F(x)$ 的解析式;
 (2) 画出 $F(x)$ 的图像.

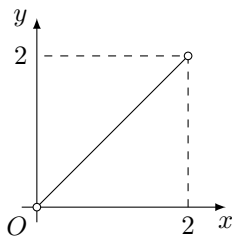
209. 已知函数 $f(x) = x^2 + x + 1$, 求函数 $y = g(x)$, 使 $f(x) + g(x) = 2x + 4$.

210. 已知函数 $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$, 函数 $g(x) = \frac{2x^2 + 1}{x}$, 函数 $h(x) = x^2 + 1$, 求 $F(x) = f(x) - g(x)$, $H(x) = \frac{f(x)}{h(x)}$.

211. 已知函数 $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}$, 函数 $g(x) = \sqrt{4-x^2}$.

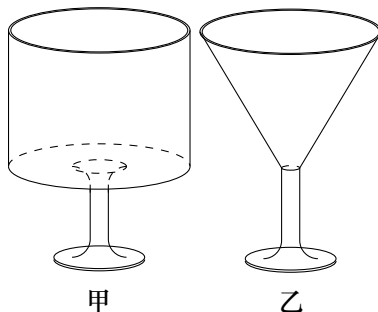
- (1) 求函数 $y = f(x) \cdot g(x)$;
 (2) 作出函数 $F(x) = \begin{cases} f(x) \cdot g(x), & x \leq 0, \\ x, & 0 < x \leq 2 \end{cases}$ 的图像.

212. 已知函数 $f(x) = x^2, x \in (0, 2)$, 函数 $y = f(x) + g(x)$ 的图像如图所示, 写出函数 $y = g(x)$ 的一个解析式.

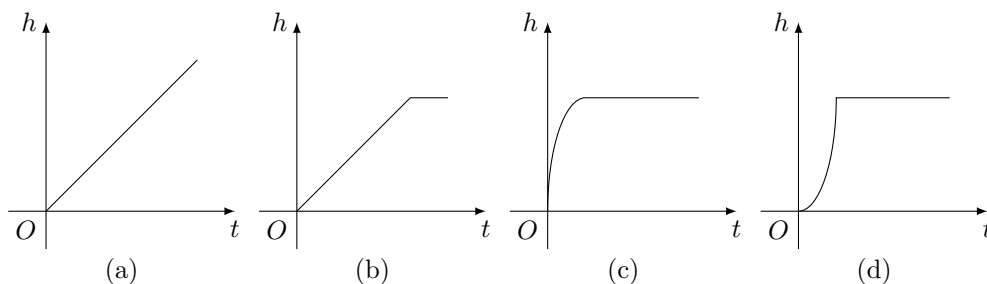


234. 已知函数 $f(x) = |x - a|$, 且 $f(1) = 0$.
- (1) 求函数 $y = f(x)$ 的解析式;
 - (2) 比较 $f(2)$ 与 $f(-3)$ 的大小.
235. 已知函数 $f(x) = x^2 + ax + 1, x \in [b, 2]$ 是偶函数, 求 a, b 的值.
236. 已知函数 $f(x)$ 为偶函数, $g(x)$ 为奇函数, 且 $f(x) + g(x) = x^2 + 2x + 3$, 求 $y = f(x)$ 、 $y = g(x)$ 的解析式.
237. 已知 $a \neq 0$, 试讨论函数 $f(x) = \frac{a}{1-x^2}$ 在区间 $(0, 1)$ 上的单调性.
238. 已知 α, β 是方程 $4x^2 - 4mx + m + 2 = 0$ 的两个实数根, 当 m 为何值时, $\alpha^2 + \beta^2$ 有最小值? 并求出这个最小值.
239. 求函数 $y = x^2 - 4x + 1$ 在 $x \in [t, 4]$ 上的最小值和最大值, 其中 $t < 4$.
240. 已知集合 $A = \{x | 1 \leq x \leq 4\}$, $f(x) = x^2 + px + q$ 和 $g(x) = x + \frac{4}{x}$ 是定义在 A 上的函数, 且在 x_0 处同时取到最小值, 并满足 $f(x_0) = g(x_0)$, 求 $f(x)$ 在 A 上的最大值.
241. 已知某气垫船的最大船速是 48 海里/时, 船每小时使用的燃料费用和船速的平方成正比, 若船速为 30 海里/时, 则船每小时的燃料费用为 600 元. 其余费用 (不论船速为多少) 都是每小时 864 元. 甲乙两地相距 100 海里, 船从甲地行驶到乙地.
- (1) 试把船每小时使用的燃料费用 P (元) 表示成船速 v (海里/时) 的函数;
 - (2) 试把船从甲地到乙地所需的总费用 y 表示成船速 v (海里/时) 的函数;
 - (3) 当船速为每小时多少海里时, 船从甲地到乙地所需的总费用最少?
242. 已知函数 $y = f(x)$, 定义 $F(x) = f(x+1) - f(x)$. 某公司每月最多生产 100 台报警系统装置, 生产 x 台 ($x > 0$) 的收入函数为 $R(x) = 3000x - 20x^2$ (单位: 元), 其成本函数为 $G(x) = 5000x + 4000$ (单位: 元), 利润是收入与成本之差.
- (1) 求利润函数 $y = f(x)$ 及相应的 $y = F(x)$;
 - (2) 利润函数 $y = f(x)$ 与 $y = F(x)$ 是否具有相等的最大值?
243. 求方程的近似解 $x^2 + 2 + \frac{1}{x} = 0$ (精确到 0.1).
244. 研究函数 $f(x) = x + \frac{a}{x} (a > 0)$ 的定义域、奇偶性、单调性.
245. 求函数 $y = \frac{1}{2-x} + \sqrt{x^2 - 1}$ 的定义域.
246. 判断函数 $f(x) = |\frac{1}{2}x - 3| + |\frac{1}{2}x + 3|$ 的奇偶性.
247. 判断函数 $f(x) = x^3 + \frac{2}{x}$ 的奇偶性.
248. 判断函数 $f(x) = x^2, x \in (k, 2)$ 的奇偶性.
249. 已知 $y = f(x)$ 是奇函数, 定义域为 \mathbf{R} , $y = g(x)$ 是偶函数, 定义域为 D . 设 $F(x) = f(x) \cdot g(x)$, 判断 $y = F(x)$ 奇偶性.

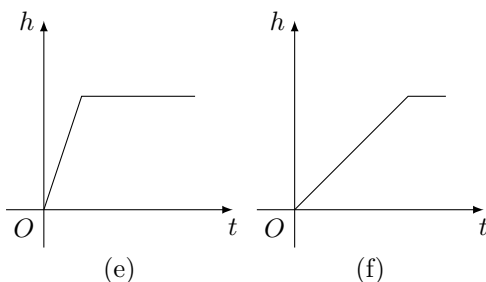
250. 已知函数 $f(x) = (m-1)x^2 + 3x + (2-n)$, 且此函数为奇函数, 求 m 、 n 的值.
251. 已知函数 $f(x) = x$, $g(x) = -\frac{4}{x}$, $p(x) = f(x) - g(x)$, 求 $y = p(x)$ 的函数表达式, 并写出 $y = p(x)$ 的单调递减区间.
252. 作出函数 $y = |x^2 - 4x|$ 的图像, 并指出其单调区间.
253. 作出函数 $y = 2|x| - 3$ 的图像, 并指出其单调区间.
254. 设函数 $f(x) = (a^2 + 4a - 5)x^2 - 4(a-1)x + 3$ 的图像都在 x 轴的上方, 求实数 a 的取值范围.
255. 已知函数 $f(x) = x^2 + 10x - a + 3$, 当 $x \in [-2, +\infty)$ 时, $f(x) \geq 0$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.
256. 设 α, β 是二次方程 $x^2 - 2kx + k + 20 = 0$ 的两个实数根, 当 k 为何值时, $(\alpha+1)^2 + (\beta+1)^2$ 有最小值?
257. 已知 $f(x) = x^2 + ax + 1$, 若对任意的实数 x , 均有 $f(2+x) = f(2-x)$ 恒成立, 求实数 a 的值.
258. 已知二次函数 $f(x) = ax^2 - 2ax + 3 - a (a > 0)$, 比较 $f(-1)$ 和 $f(2)$ 的大小.
259. 已知函数 $f(x) = -x^2 + 2ax + 1 - a$ 在 $[0, 1]$ 上有最大值 2, 求实数 a 的值.
260. 已知 $y = f(x)$ 是定义在 $(-1, 1)$ 上的奇函数, 在区间 $[0, 1)$ 上是减函数, 且 $f(1-a) + f(1-a^2) < 0$, 求实数 a 的取值范围.
261. 已知函数 $f(x) = 2 - x^2$, 函数 $g(x) = x$, 定义函数 $F(x)$ 如下: 当 $f(x) \geq g(x)$ 时, $F(x) = g(x)$; 当 $f(x) < g(x)$ 时, $F(x) = f(x)$. 求 $F(x)$ 的最大值.
262. 已知函数 $y = f(x)$ 具有如下性质:
 ① 定义在 \mathbb{R} 上的偶函数; ② 在 $(-\infty, 0)$ 上为增函数; ③ $f(0) = 1$; ④ $f(-2) = -7$; ⑤ 不是二次函数.
 求 $y = f(x)$ 的一个可能的解析式.
263. 打开水龙头, 让水匀速地注入一个杯子内, 随着时间的增加, 杯中水面的高度不断增加, 直至水满溢出. 在这个过程中, 杯中水面的高度 h 关于注水时间 t 的函数为 $h = f(t)$.



- (1) 如果甲杯、乙杯的形状分别如图所示, 那么下列草图中, 甲杯相应函数 $h = f(t)$ 的图像是_____, 乙杯相应函数 $h = f(t)$ 的图像是_____. (只有杯子的圆柱和圆锥形部分可以盛水)



(2) 下列是两个杯子相应函数 $h = f(t)$ 的图像, 试说明这两个杯子形状有何差别.



264. 已知幂函数 $f(x)$ 的图像经过 $(2, \frac{\sqrt{2}}{2})$, 试求出这个函数的解析式.

265. 幂函数 $y = x^s$ 与 $y = x^t$ 的图像在第一象限都通过定点_____, 若它们在第一象限的部分关于直线 $y = x$ 对称, 则 s, t 应满足的条件是_____.

266. 研究幂函数 $f(x) = x^{\frac{2}{5}}$ 的定义域、奇偶性、单调性、值域.

267. 作函数 $y = \frac{|x| + 1}{|x + 1|}$ 的大致图像.

268. 已知函数 $f(x) = x^3 - 3x$.

(1) 试求函数 $y = f(x)$ 的零点;

(2) 求证: 函数 $f(x) = x^3 - 3x$ 在 $[1, +\infty)$ 上是增函数;

(3) 是否存在自然数 n , 使 $f(n) = 1000$? 若存在, 求出一个满足条件的 n ; 若不存在, 请问明理由.

269. 在下列函数中, 哪一个既是奇函数, 又在区间 $(+\infty, 0)$ 内是减函数?

① $y = x^{\frac{1}{2}}$; ② $y = x^{\frac{1}{3}}$; ③ $y = x^{\frac{2}{3}}$; ④ $y = x^{-\frac{1}{3}}$.

270. 已知幂函数 $f(x)$ 的定义域是 $(+\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, 且它的图像关于 y 轴对称, 写出一个满足要求的幂函数 $f(x)$.

271. 已知函数 $f(x) = \frac{ax + 1}{x + 2}$, $a \in \mathbf{Z}$. 是否存在整数 a , 使函数 $f(x)$ 在 $x \in [-1, +\infty)$ 上递减, 并且 $f(x)$ 不恒为负? 若存在, 找出一个满足条件的 a ; 若不存在, 请说出理由.

272. 比较 $3^{0.8}, 3^{0.7}$ 两个值的大小.

273. 比较 $0.75^{0.1}, 0.75^{-0.1}$ 两个值的大小.

274. 设 $a^{2x} = 2$, 且 $a > 0, a \neq 1$, 求 $\frac{a^{3x} + a^{-3x}}{a^x + a^{-x}}$ 的值.

275. 已知 $f(x) = a \cdot b^x$, $f(4) = 648$, $f(5) = 1944$.

(1) 估算 $f(4.5)$;

(2) 计算 $f(4.5)$, 利用计算的结果评判你的估算.

276. 已知 $f(x) = 3^x, u, v \in \mathbf{R}$.

(1) 求证: 对任意的 u, v , 都有 $f(u) \cdot f(v) = f(u+v)$ 成立.

(2) 写出一个关于 $f(u) \div f(v)$ 类似上式的等式, 并证明你的结论.

277. 求证: $f(x) = \frac{a^x - a^{-x}}{2} (a > 0, a \neq 1)$ 是奇函数.

278. 求证: $f(x) = \frac{(a^x - 1) \cdot x}{a^x + 1} (a > 0, a \neq 1)$ 是偶函数.

279. 若指数函数 $y = a^x$ 是减函数, 则下列不等式中, 能够成立的是 ().

A. $a > 1$

B. $a < 1$

C. $a(a-1) < 0$

D. $a(a-1) > 0$

280. 若函数 $y = 2^x - m$ 的图像不经过第二象限, 则 m 的取值范围是 ().

A. $m \geq 1$

B. $m < 1$

C. $m > -1$

D. $m \leq -1$

281. 某地区的中小学 2003 年、2004 年共购置电脑 100 台, 为了加快中小学的电脑普及程度, 准备新购置的电脑数按每两年递增 10% 的比例增长, 从 2005 年至 2010 年, 该地区中小学新购置的电脑总数是多少?

282. 已知集合 $M = \{y|y = 2^x, x \in \mathbf{R}\}$, 集合 $N = \{y|y = x^2, x \in \mathbf{R}\}$, 求 $M \cap N$.

283. 作函数 $y = 2^{|x|}$ 的大致图像.

284. 作函数 $y = 2^{-|x|}$ 的大致图像.*****

285. 判断并证明下列函数的奇偶性: (1) $y = \frac{10^x - 10^{-x}}{10^x + 10^{-x}}$ (2) $y = x(\frac{1}{2^x - 1} + \frac{1}{2})$.

286. 选择题: 函数 $y = 4^x - 2^{x+1} + 1 (x < 0)$ 的值域是

A. $[0, +\infty)$

B. $(1, +\infty)$

C. $(0, 1)$

D. $(0, 1]$

复习题 A 组

287. 幂函数 $y = f(x)$, 当 $x = 2$ 时, $y = 16$. (1) 求函数 $f(x)$ 的解析式. (2) 比较 $f(2)$ 和 $f(-3)$ 的大小.

288. 填空: (1) 若关于 x 的方程 $5^x = \frac{a+3}{5-a}$ 有负数根, 则 a 的取值范围是_____. (2) 方程 $(\frac{1}{2})^x = x^{\frac{1}{2}}$ 的实数根个数为_____.

289. 设在海拔 x 米处的大气压强是 y 帕, y 与 x 之间的函数关系式是 $y = c \cdot e^{kx}$, 其中 c, k 常量. 已知某地某天在海平面的大气压强为 1.01×10^5 帕, 1 000 米高空的大气压强为 0.90×10^5 帕, 求 600 米高空的大气压强.(结果保留 3 位有效数字)

290. 2005 年 1 月 6 日, 我国人口总数为 13 亿, 称该天为“中国人口 13 亿日”, 如果 2005 年 1 月 6 日后我国人口的年自然增长率保持在 0.6
291. 当 x 充分大时, 试比较下列各函数: $y_1 = 10x, y_2 = 8x^2, y_3 = 4x^4, y_4 = 2 \times 3^x, y_5 = 5^x$ 值的大小. 你能从中归纳出一些规律性的结论吗? 复习题 B 组
292. 比较下列各题中两个值的大小 (其中 $a > 0$, 且 $a \neq 0$); (1) a^2 和 a^a (2) 2^a 和 a^a
293. 把物体放在温度为 $\theta_0^\circ\text{C}$ 的空气中冷却, 若物体原来的温度是 $\theta_1^\circ\text{C}$ ($\theta_1 > \theta_0$), t 分钟后物体温度 $\theta_t^\circ\text{C}$ 可由公式 $\theta = \theta_0 + (\theta_1 - \theta_0)e^{-kt}$ 求得, 其中 k 是一个随着物体与空气的接触状况而定的常量, 现有 62°C 的物体, 放在 15°C 的空气中冷却 1 分钟以后物体的温度是 52°C , 求上式中 k 的值 (精确到 0.01). 开始冷却 2 分钟后物体的温度是多少? 开始冷却 10 分钟后, 物体的温度是多少? (精确到 1°C). 总复习题 A 组
294. 填空: (1) 若集合 $A = \{y|y = x^2 + 2c + 3\}$, 集合 $B = \{y|y = x + \frac{4}{x}\}$, 则 $A \cup B =$. (2) 已知 $xy \in \mathbf{R}$, 集合 $\alpha = \{(x, y)|xy \geq 0\}$, 集合 $\beta = \{(x, y)|x + y = |x| + |y|\}$, 用推出关系表示 $\alpha\beta$ 的关系_____. (3) 若函数 $f(x) = 3x + 1$ 的定义域为 $\{1, 3, k\}$. 值域为 $\{4, a^4, a^2 + 3a\}$, 且 a, k 为自然数, 则 $a + k =$ _____.
- (4) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} -2^x - 1 & (x \leq 0), \\ \frac{1}{x^2} & (x > 0). \end{cases}$ 若 $f(x_0) = 1$, 则 x_0 的值为_____. (2) 选择题: (1) 下列图形中, 能作为某个函数的图像的只能是 (). (第 2(1) 题) (2) 若集合 $A = \{x|0.1 < \frac{1}{x} < 0.3, x \in \mathbf{N}\}$, 集合 $B = \{x||x| \leq 5, x \in \mathbf{Z}\}$, 则 $A \cup B$ 中的元素个数是 ().
- A. 11 B. 13 C. 15 D. 17
- (3)“ $x \neq 1$ 且 $y \neq 2$ ”是“ $x + y \neq 3$ ”的 ().
- A. 充分非必要条件 B. 必要非充分条件 C. 充要条件 D. 既非充分又非必要条件
295. 点 $(\sqrt{2}, 2)$ 在幂函数 $y = f(x)$ 的图像上, 点 $(-2, \frac{1}{4})$ 在幂函数 $y = g(x)$ 的图像上. 当 x 为何值时, $f(x) = g(x)$?
296. 已知集合 $A = \{x|3x^2 + x - 2 \geq 0, x \in \mathbf{R}\}$, 集合 $B = \{x|\frac{4x-3}{x-3} > 0, x \in \mathbf{R}\}$, 求 $A \cap B$.
297. 已知函数 $f(x) = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$) 在区间 $[1, 2]$ 上的最大值比最小值大 $\frac{1}{4}$, 求实数 a 的值.
298. 已知集合 $A = (-2, -1) \cup (0, +\infty)$, 集合 $B = \{x|x^2 + ax + b \leq 0\}$, 且 $A \cap B = (0, 2], A \cup B = (-2, +\infty)$, 求实数 a, b 的值.
299. 已知关于 x 的不等式 $ax^2 + 3ax - 2 < 0$ 的解集为 \mathbf{R} , 求实数 a 的取值范围.
300. 某地区某日海拔高度与气温的对照表为: 高度 h (米) 0 500 1 000 2 000 气温 t ($^\circ\text{C}$) 15.00 11.75 8.50 2.00 (1) 根据表中 t 与 h 的对应关系, 写出 t 关于 h 的函数解析式. (2) 根据 (1) 的结论, 求海拔高度 1 500 米处的气温.
301. (1) 指出函数 $f(x) = ax^2 + \frac{b}{x^2}$ (a, b 是正常数) 所具有的基本性质, 并加以说明. (2) 当 $a = \frac{1}{4}, b = 4$ 时, 画出函数 $f(x) = ax^2 + \frac{b}{x^2}$ 的简图.

302. 若 $2x + y = 1$, 求 $4^x + 2^y$ 的最小值. 总复习 B 组

303. 已知集合 $A = \{x | |x - a| < 2\}$, 集合 $B = \{x | \frac{2x - 1}{x - 2} < 1\}$, 且 $A \subseteq B$, 求实数 a 的取值范围.

304. 已知全集 $U = \mathbf{R}$, 集合 $A = \{x | x^2 + px + 12 = 0\}$, 集合 $B = \{x | x - 5x - q = 0\}$, 满足 $(\complement_U A) \cap B = \{2\}$. 求实数 p 与 q 的值.

305. 试讨论函数 $f(x) = \frac{x}{1 - x^2}$ 在区间 $(-1, 1)$ 上的单调性.

306. 甲乙两地的高速公路全长 166 千米, 在高速公路上最高行驶时速不得高于 120 千米/时, 假设汽车从甲地进入该高速公路以不低于 70 千米/时的速度匀速行驶到乙地, 已知汽车每小时的运输成本 (以元为单位) 由可变部分和固定部分组成: 可变部分与速度 v (千米/时) 的平方成正比, 比例系数为 0.02; 固定部分为 220 元. (1) 把全程运输成本 y (元) 表示为速度 v (千米/时) 的函数, 并指出这个函数的定义域. (2) 汽车应以多大速度行驶才能使全程运输成本最小? 最小运输成本约为多少元?

307. 某居民小区供水站的蓄水池现有水 40 吨, 自来水厂每小时可向蓄水池中注水 8 吨, 同时蓄水池又向居民小区供水, t 小时内供水总量为 $32\sqrt{t}$ 吨. 现在开始向池中注水并同时向居民小区供水, 若蓄水池中存水量少于 10 吨, 就会出现供水紧张现象. (1) 试建立蓄水池中存水量 S 与供水时间 t 之间的函数关系. (2) 供水多少时间开始出现供水紧张? 这一天内供水紧张的有几小时? . 第四章幂函数、指数函数和对数函数 (下)

308. 4 对数概念及其运算习题 4.4 A 组

309. 把下列指数式写成对数式: (1) $10^{-2} = 0.01$. (2) $(\frac{1}{2})^0 = 1$. (3) $5^x = 6$.

310. 把下列对数式写成指数式: (1) $x = \log_{16} 32$. (2) $\log_{\pi} x = 4$. (3) $\log_x 9 = 2$.

311. 求下列各式中的 x : (1) $\log_{\frac{1}{2}} x = 3$. (2) $\log_3 \frac{1}{27} = x$. (3) $\log_{100} 1000 = x$. (4) $\log_x 16 = 4$.

312. 计算: (1) $\log_5 5\sqrt{5} + \ln e$. (2) $\lg \sqrt{10} - \lg 0.01$. (3) $\log_{12} 6 + \log_{12} 2$ (4) $\log_3 48 - 4\log_3 2$.

313. 用 $\log_a M$ 、 $\log_a N$ 表示下列各式: (1) $\log_a MN^2$. (2) $\log_a \frac{\sqrt{M}}{N}$.

314. 计算: (1) $3^{\log_3 1} + \log_2 48 - \log_2 3$. (2) $2\log_7 \frac{35}{9} + 4\log_7 3 + 2\log_7 \frac{1}{10} + \log_7 4$.

315. 计算: (1) $\log_3 2 \times \log_5 3 \times \log_8 5$. (2) $(\log_4 3 + \log_8 3) \times \log_3 2$. (3) $\log_2 \frac{1}{49} \times \log_3 \frac{1}{16} \times \log_7 \frac{1}{27}$. (4) $\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a$. (5) $(\log_4 3 + \log_8 3)(\log_3 2 + \log_9 4)$.

316. 已知 $\log_3 2 = m$, 试用 m 表示 $\log_{32} 18$.

317. 已知 $\lg 2 = a$, $\lg 3 = b$. (1) 求 $\lg 5$. (2) 求 $\log_2 3$. (3) 求 $\log_{12} 25$. 习题 4.4 B 组

318. 求出下列各式中 x 的取值范围: ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) (1) $\log_a (x^2 + 1)$. (2) $\log_a (x - 2)$. (3) $\log_a \frac{1}{x + 2}$.

319. 在下列各式中的括号内填入适当的值, 使等式成立: (1) $\log_5 () = 1$. (2) $2^{\log_3 1} = ()$. (3) $(\frac{1}{5})^{\log_{0.2} 3} = ()$. (4) $\sqrt{3}^{\log_{\sqrt{3}} ()} = 7$.

320. 用 $\log_a x, \log_a y, \log_a(x+y), \log_a(x-y)$ 表示下列各式: (1) $\log_a(x^2-y^2)$. (2) $\log_4 \frac{x^3 y}{(x+y)^4}$. (3) $\log_a(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} - \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}})$.
321. 计算: (1) $\log_2(\log_2 16)$. (2) $2^{\log_6 5} \times 3^{\log_6 5}$. (3) $\sqrt{1g^2 5 - 2 \lg 5 + 1}$. (4) $\lg^2 5 + \lg^2 \times \lg 50$.
322. 设 $56^a = 14$, 试用 a 表示 $\log_7 56$.
323. 已知 $5.4^x = 3, 0.6^y = 3$, 求 $\frac{1}{x} - \frac{1}{y}$ 的值.
324. 5 反函数的概念习题 4.5 A 组
325. 已知函数 $f(x) = x^2 - 4x - 5, x \in [1, 3]$, 判断其是否存在反函数. 若存在, 求出反函数; 若不存在, 说明理由.
326. 求下列函数的反函数: (1) $y = -x^3$. (2) $y = \frac{x}{x+2}$. (3) $y = x^2 + 1 (x < 0)$.
327. 已知 $f(x) = 1 - x^2 (x < -1)$, 求 $f^{-1}(-3)$ 的值.
328. 已知函数 $y = \frac{a}{x+1}$ 的反函数的图像经过点 $(\frac{1}{2}, 1)$, 求实数 a 的值.
329. 已知函数 $y = f(x)$ 的图像与函数 $y = \frac{x-1}{x+1}$ 的图像关于直线 $y = x$ 对称, 求函数 $y = f(x)$ 的解析式. 习题 4.5 B 组
330. 判断题: (正确的在括号内用“√”表示, 错误的用“×”表示) (1) 存在反函数的函数一定是单调函数. ().
(2) 偶函数存在反函数. (). (3) 奇函数必存在反函数. ().
331. 一次函数 $y = -x$ 的图像与它的反函数的图像重合. 试写出一个非一次函数的函数, 使它的图像与其反函数的图像重合.
332. 如果函数 $y = f(x)$ 的图像过点 $(0, 1)$, 那么函数 $y = f^{-1}(x) + 2$ 的反函数的图像过点 ().
A. $(3, 0)$ B. $(0, 3)$ C. $(1, 2)$ D. $(2, 1)$
333. 如果 $y = -\sqrt{1-x^2}$ 的反函数是 $y = -\sqrt{1-x^2}$, 那么原来的函数的定义域是 ().
A. $(0, +\infty)$; B. $[-1, 1]$; C. $[-1, 0]$; D. $[0, 1]$
334. 求函数 $y = \begin{cases} -\sqrt{x} (0 \leq x \leq 1), \\ x^2 (-1 \leq x < 0) \end{cases}$ 的反函数.
335. 6 对数函数的图像与性质习题 4.6 A 组
336. 求下列函数的定义域: (1) $y = \lg(x^2 - 3x + 2)$. (2) $y = \frac{\sqrt{2x-1}}{\lg x}$. (3) $y = \sqrt{\lg x} + \lg(5-2x)$.
337. 求下列函数的反函数: (1) $y = 10^x + 1$. (2) $y = \log_2(x+1)$. (3) $y = \log_2 2x$.
338. 已知函数 $f(x) = a^x + b$ 的图像经过点 $(1, 7)$, 反函数 $f^{-1}(x)$ 的图像经过点 $(4, 0)$, 求函数 $f(x)$ 的表达式.
339. 根据下列不等式, 确定底数 a 的取值范围: (1) $\log_4 0.2 < \log_a 0.1$. (2) $\log_a \pi > \log_a e$. (3) $\log_a 3 < 0$.
340. 已知 $1 < x < 2, a = 2^x, b = \log_{0.5} x, c = \sqrt{x}$, 比较 a, b, c 的大小, 并说明理由.

341. 声音强度 D (分贝) 由公式 $D = 10 \lg(\frac{I}{10^{-16}})$ 给出, 其中 $I(W/cm^2)$ 为声音能量. 能量小于 $10^{-16}W/cm^2$ 时, 人听不见声音. 能量大于 60 分贝属于噪音, 其中 70 分贝开始损害听力神经, 90 分贝以上就会使听力受损, 而一般的人呆在 100 分贝-120 分贝的空间内, 一分钟就会暂时性失聪. (1) 求人低声说话 $I = 10^{-13}W/cm^2$ 的声音强度. (2) 求噪音的能量范围. (3) 当能量达到多少时, 人会暂时性失聪? 习题 4.6 B 组
342. 判断函数 $y = 1g \frac{x+1}{x-1}$ 的奇偶性.
343. 设 $a > 0$ 且 $a \neq 1$, 比较 $\log_a 2a$ 与 $\log_a 3a$ 的大小.
344. 求证: $y = 1g(1-x)$ 在定义域上单调递减.
345. 求函数 $y = \log_{\frac{1}{5}}(x^2 - 6x + 10)$ 在区间 $[1, 2]$ 上的最大值.
346. 7 简单的指数方程习题 4.7 A 组
347. 解下列方程: (1) $2^{1-x} = \frac{1}{32}$. (2) $3^{-x+2} = 9^x$. (3) $4^{2x-1} = 1$. (4) $0.38 \cdot 10^{x-3} = 0.5$ (精确到 0.01).
348. 解下列指数方程: (1) $2^{x^2+3} = (\frac{1}{4})^{\frac{2}{x}}$. (2) $9^x - 8 \cdot 3^x - 9 = 0$.
349. 已知关于 x 的方程 $2a^{2x-2} - 7a^{x-1} + 3 = 0$ 有一个根是 $x = 2$, 求 a 的值并求方程的其余的根.
350. 某种放射性物质不断衰减, 若每经过一年剩留的物质是原来的 $\frac{4}{5}$, 经过多少年, 剩留物质是原来的 $\frac{64}{125}$? 习题 4.7 B 组
351. 解方程: $9^x + 4^x = \frac{5}{2} \cdot 6^x$.
352. 解方程: $4^x + 4^{-x} - 6(2^x + 2^{-x}) + 10 = 0$.
353. 动物尸体内 ^{14}C 的含量每年衰减 0.12, 设动物死亡的时刻 $t = 0$ 时, ^{14}C 含量为 100%. (1) 写出 ^{14}C 含量 y 关于时间 t 的函数解析式. (2) ^{14}C 含量减少到 50% 需多少时间? (精确到 1 年)
354. 8 简单的对数方程习题 4.8 A 组
355. 解下列方程: (1) $\log_3(x-2) = 1$. (2) $\log_2(x^2 - 3x) = 2$. (3) $\log_2(\log_5 x) = 1$. (4) $\log_5(x+1) - \log_{\frac{1}{5}}(x-3) = 1$.
356. 解下列方程: (1) $\log_2^2 x + 3 \log_2 x + 2 = 0$. (2) $\log_x(x^2 - x) = \log_x 2$.
357. 解下列方程: (1) $\log_{\frac{1}{2}}(9^{x-1} - 5) = \log_{\frac{1}{2}}(3^{x-1} - 2) - 2$. (2) $(\lg x)^2 - \lg x^2 = 3$. 习题 4.8 B 组
358. 解方程: $x^{\log_2 x} = 32x^4$.
359. 求方程 $\log_2(x+4) = (\frac{1}{3})^x$ 根的个数, 并说明理由. 复习题 A 组
360. 填空: (1) 若 $x^5 = 3$, 则 $x =$ _____; 若 $5^x = 3$, 则 $x =$ _____. (2) 计算: $\log_2 36 - 2 \log_2 3 =$ _____. (3) 若 $\log_a b \cdot \log_5 a = 3$, 则 $b =$ _____. (4) 函数 $y = \log_2 x (x \geq 1)$ 的反函数是 _____. (5) 若点 (1, 7) 既在函数 $y = \sqrt{ax+b}$ 的图像上, 又在其反函数的图像上, 则数对 (a, b) 为 _____.

361. 选择题: (1) 若 $f(x) = 3^x + 5$, 则 $f^{-1}(x)$ 的定义域是 ().

- A. $(0, +\infty)$; B. $(5, +\infty)$; C. $(8, +\infty)$; D. $(-\infty, +\infty)$

(2) 若 $\log_{18} 9 = a$, $18^b = 5$, 则 $\log_{36} 45$ 等于 ().

- A. $\frac{a+b}{2+a}$; B. $\frac{a+b}{2-a}$; C. $\frac{a+b}{2a}$; D. $\frac{a+b}{a^2}$

362. 已知函数 $f(x) = \frac{ax+1}{x-3}$ 的反函数是 $f(x)$ 本身, 求实数 a 的值.

363. 作出下列函数的图像: (1) $y = \log_2(x-1)$. (2) $y = |\log_2(x-1)|$.

364. 已知 $\lg x + \lg y = 2$, 求 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ 的最小值.

365. 解下列方程: (1) $4^x + 2^{x+1} = 80$. (2) $\lg(2x+2) + \lg(15-x) = 1 + \lg 3$.

366. 已知函数 $f(x) = \log_a \frac{1+x}{1-x}$ ($a > 0, a \neq 1$). (1) 求 $f(x)$ 的定义域. (2) 判断 $f(x)$ 的奇偶性, 并加以证明. (3) 当 $a > 1$ 时, 求使 $f(x) > 0$ 的 x 的取值范围.

367. 如果光线每通过一块玻璃其强度要减少 10%, 求至少需要多少块这样的玻璃重叠起来, 才能使通过它们的光线强度为原来的强度的 $\frac{1}{3}$ 以下? 复习题 B 组

368. 填空: (1) 如果函数 $f(x) = \log_a(-x^2 + ax)$ 的定义域为 $(0, \frac{1}{2})$, 那么实数 $a =$ _____. (2) 如果 $45^x = 3$, $45^y = 5$, 那么 $2x + y =$ _____. (3) 若函数 $y = f(x)$ 的图像与函数 $y = 2^x - 1$ 的图像关于直线 $y = x$ 成轴对称图形, 则函数 $y = f(x)$ 的解析式为 _____.

369. 选择题: (1) 当 $a > 1$ 时, 在同一坐标系中, 函数 $y = a^{-x}$ 与 $y = \log_a x$ 的图像是 (). (2) 函数 $f(x) = 4 + \log_a(x-1)$ ($a > 0, a \neq 1$) 的图像恒经过定点 P , 则点 P 的坐标是 ().

- A. $(1, 4)$; B. $(4, 1)$; C. $(2, 4)$; D. $(4, 2)$

370. 已知 $0 < a < 1$, 化简 $\sqrt{\lg^2 a - \lg \frac{a^2}{10}}$.

371. 已知 α, β 是方程 $\lg^2 x - \lg x - 2 = 0$ 的两根, 求 $\log_\alpha \beta + \log_\beta \alpha$ 的值.

372. 判断命题“若函数 $y = f(x)$ 与 $y = f^{-1}(x)$ 的图像有公共点, 则公共点必在直线 $y = x$ 上”的真假, 并说明理由.

373. 如果 ^{237}U 在不断的裂变中, 每天所剩留质量与上一天剩留质量相比, 按同一比例减少, 经过 7 天裂变, 剩留的质量是原来的 50%, 计算它经过多少天裂变, 剩留质量是原来的 10%.