

1. (000010) 证明: 若梯形的对角线不相等, 则该梯形不是等腰梯形.

2. (000017) 证明: $\sqrt[3]{2}$ 是无理数.

3. (000038) 证明: 若 $x > -1$, 则 $x + \frac{1}{x+1} \geq 1$, 并指出等号成立的条件.

4. (000982) 模仿讲义中的真值表, 列出下列每组逻辑运算的真值表并回答各问题:

(1) “非 (P 且 Q)” 与 “($\text{非 } P$) 或 ($\text{非 } Q$)” (De Morgan 律之一);

P	Q	P 且 Q	非 (P 且 Q)	非 P	非 Q	(非 P) 或 (非 Q)
T	T					
T	F					
F	T					
F	F					

(2) “ P 且 (Q 且 R)” 与 “(P 且 Q) 且 R ”(模仿 (1) 完成); 你的结论是什么? 如果把两个运算中的 “且” 都换成 “或”, 结论 (毋需证明) 又是什么?

(3) “ P 且 (Q 或 R)” 与 “(P 且 Q) 或 (P 且 R)”(模仿 (1) 完成); 你的结论是什么? 如果把两个运算中的 “且” 都换成 “或”, 同时把 “或” 都换成 “且”, 结论 (毋须证明) 又是什么?

5. (000983) 用反证法证明如下命题:

(1) 已知 n 是整数. 如果 3 整除 n^3 , 则 3 整除 n (提示: 讨论 $n = 3k, 3k + 1, 3k + 2$, 其中 k 是整数);

(2) 如果实数 x 满足 $x^{101} - 4x^2 + 8x - 1 = 0$, 则 $x > 0$;

(3) $\sqrt[3]{3}$ 是无理数 (提示: 可借鉴讲义上 $\sqrt{6}$ 是无理数的证明方法);

(4*) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ 是无理数.

6. (000987) 已知实数 $t \neq 0$. 证明: “ $x = t$ 是方程 $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ 的根” 的充分必要条件是 “ $x = \frac{1}{t}$ 是方程 $dx^3 + cx^2 + bx + a = 0$ 的根”.

7. (000988) 已知 a, b, c 均为实数. 证明: 这三个数中 “任意两数之和大于第三个数” 的充分必要条件是 “任意两数之差小于第三个数”.

8. (001000) 设 $A = \{n \mid n = 3k + 1, k \in \mathbf{Z}^+\}$, $B = \{n \mid n = 3k - 2, k \in \mathbf{Z}^+\}$.

(1) 集合 A 与集合 B 是相等的还是有真包含关系还是没有任何包含关系?

(2) 证明你的结论.

9. (001001) 证明或否定: $\{y \mid y \geq 0\} = \{y \mid y = x^2, x \in \mathbf{R}\}$.

10. (001002) 设 a 是一个实数, 集合 $A = \{x \mid x < 2\}$, $B = \{x \mid x \leq a\}$, 且 $A \subseteq B$.

(1) 实数 a 的取值范围为_____;

(2) 试证明 (1) 的结论.

11. (001017) 设 A, B 是两个集合, 求证: “ $A \cap B = A$ ” 当且仅当 “ $A \subseteq B$ ”. (用文氏图画一下并不算证明)
12. (001087) 证明: 若 $a > b, c \in \mathbf{R}, d < 0$, 则 $(a - c)d < (b - c)d$.
13. (001088) 证明: 若 $a_1 > b_1 > 0, a_2 > b_2 > 0, a_3 > b_3 > 0$, 则 $a_1 a_2 a_3 > b_1 b_2 b_3$.
14. (001089) 证明: 若 $a > b > 0, c > d > 0$, 则 $\frac{1}{ac} < \frac{1}{bd}$.
15. (001091) 证明:
- (1) 若 $a > b$, 则 $a^3 > b^3$;
 - (2)(选做) 若 $a > b$, 则 $a^5 > b^5$.
16. (001094)(1) 证明或否定: “ $|f(x)| > g(x)$ ” 和 “ $f(x) > g(x)$ 且 $-f(x) > g(x)$ ” 等价;
- (2) 证明或否定: “ $|f(x)| < g(x)$ ” 和 “ $f(x) < g(x)$ 且 $-f(x) < g(x)$ ” 等价.
17. (001095) 证明或否定: “ $\sqrt{f(x)} > g(x)$ ” 和 “ $\begin{cases} f(x) > g^2(x), \\ g(x) \geq 0, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) < 0 \end{cases}$ ” 同解.
18. (001096) 利用绝对值的三角不等式 $|a + b| \leq |a| + |b|$, 证明:
- (1) 对任意 $x, y \in \mathbf{R}, |x - y| \geq |x| - |y|$;
 - (2) 对任意 $x, y \in \mathbf{R}, |x - y| \geq ||x| - |y||$.
19. (001099) 已知常数 $\varepsilon > 0$, 证明存在实常数 N , 使得当正整数 $n > N$ 时, $\left| \frac{n}{2n+3} - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon$.
20. (001123) 试确定实常数 k 使得 $a^2 + b^2 + c^2 \geq k(a + b + c)^2 \geq ab + bc + ca$ 对任意的 $a, b, c \in \mathbf{R}$ 成立, 并证明该不等式.
21. (001124) 设 $a, b, c, d > 0$.
- (1) 利用三元的基本不等式 “ $x, y, z > 0$ 时, $x^3 + y^3 + z^3 \geq 3xyz$ ”, 证明: $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 \geq abc + bcd + cda + dab$;
 - (2) 该不等式能否加强为 $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 \geq k(abc + bcd + cda + dab)$, 其中 $k = 1.0001$? 为什么?
 - (3) 利用三元的基本不等式 “ $x, y, z > 0$ 时, $x^3 + y^3 + z^3 \geq 3xyz$ ”, 证明: $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 \geq \frac{3\sqrt[3]{2}}{2}(abc + bcd)$.
22. (001134) 已知 $x, y \in \mathbf{R}$, 用比较法证明: $x^2 + y^2 \geq 4(x + y) - 8$.
23. (001135) 已知 $f(x) = x + \frac{1}{x}$, 利用比较法证明:
- (1) 若 $a > b \geq 1$, 证明: $f(a) > f(b)$;
 - (2) 若 $0 < a < b \leq 1$, 证明: $f(a) > f(b)$.
24. (001136) 已知 $a < b < 0$, 用分析法证明: $\frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} < \frac{a + b}{a - b}$.
25. (001137) 已知 $a, b, c \in \mathbf{R}^+$, 证明: $a^2(b + c) + b^2(c + a) + c^2(a + b) \geq 6abc$.
26. (001138) 已知 a, b, c 是不全相等的正数. 证明: $\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} > 6$.
27. (001139) 已知 $x, y \in \mathbf{R}^+$ 且 $x + y > 2$, 用反证法证明: $\frac{1+y}{x}$ 与 $\frac{1+x}{y}$ 中至少有一个小于 2.

28. (001141) 已知 $x, y \in \mathbf{R}$, 证明: $x^2 + 5y^2 + 4xy + 5 \geq 2x + 8y$.

29. (001142) 已知 $g(x) = x^3 - 3x$.

(1) 若 $a > b \geq 1$, 证明: $g(a) > g(b)$;

(2) 若 $-1 \leq a < b \leq 1$, 证明: $g(a) > g(b)$.

30. (001147) 已知 $n \in \mathbf{Z}$, $n \geq 3$. 证明: $3^n + 4^n + 5^n \leq 6^n$, 并求出等号成立的条件.

31. (001148) 已知 $a, b, c \in \mathbf{R}^+$, $a + b + c = 3$. 证明:

(1) $a^2 + b^2 + c^2 \geq 3$;

(2) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 3$;

(3) $a^4 + b^4 + c^4 \geq 3$;

(4) (选做) 对一切 $n \in \mathbf{N}$, $a^{2^n} + b^{2^n} + c^{2^n} \geq 3$.

32. (001150)(1) 设 $a + b + c = 6$, 且 $a, b, c \in (0, 3)$, 证明: $(3-a)(3-b)(3-c) \leq 1$;

(2) 已知三角形的面积可以用 Heron 公式 $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ 来计算, 其中 p 是半周长, 即 $p = \frac{a+b+c}{2}$. 据此求周长为 6 的三角形的面积的最大值.

33. (002700) 集合 $C = \{x | x = \frac{k}{2} \pm \frac{1}{4}, k \in \mathbf{Z}\}$, $D = \{x | x = \frac{k}{4}, k \in \mathbf{Z}\}$, 试判断 C 与 D 的关系, 并证明.

34. (002709) 设函数 $f(x) = \lg(\frac{2}{x+1} - 1)$ 的定义域为集合 A , 函数 $g(x) = \sqrt{1 - |x+a|}$ 的定义域为集合 B .

(1) 当 $a = 1$ 时, 求集合 B .

(2) 问: $a \geq 2$ 是 $A \cap B = \emptyset$ 的什么条件 (在 “充分非必要条件、必要非充分条件、充要条件、既非充分也非必要条件” 中选一)? 并证明你的结论.

35. (002758)(1) 比较 $1 + a^2$ 与 $\frac{1}{1-a}$ 的大小;

(2) 设 $a > 0$, $a \neq 1$, $t > 0$, 比较 $\frac{1}{2} \log_a t$ 和 $\log_a \frac{t+1}{2}$ 的大小, 证明你的结论.

36. (004997) 用比较法证明以下各题:

(1) 已知 $a > 0$, $b > 0$, 求证: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{2}{\sqrt{ab}}$;

(2) 已知 $a > 0$, $b > 0$, 求证: $\frac{b}{\sqrt{a}} + \frac{a}{\sqrt{b}} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b}$;

(3) 已知 $a > 0$, $b > 0$, 求证: $a^2 + b^2 \geq (a+b)\sqrt{ab}$;

(4) 已知 $0 < x < 1$, 求证: $\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{1-x} \geq (a+b)^2$.

37. (005034) 利用 $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ ($a, b, c \in \mathbf{R}$), 证明: 若 $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, 则 $\frac{a^2}{b^2} + b^2 c^2 + c^2 a^2 a + b + c \geq abc$.

38. (005035) 利用 $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ ($a, b, c \in \mathbf{R}$), 证明: 若半径为 1 的圆内接 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{1}{4}$, 二边长分别为 a, b, c , 则
- (1) $abc = 1$;
- (2) $\sqrt{b} + \sqrt{c} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.
39. (005036) 利用 $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ ($a, b, c \in \mathbf{R}$), 证明: 若 $a, b, c > 0$, $n \in \mathbf{N}$, $f(n) = \lg \frac{a^n + b^n + c^n}{3}$, 则 $2f(n) \leq f(2n)$.
40. (005037) 利用放缩法并结合公式 $ab \leq (\frac{a+b}{2})^2$, 证明: $\lg 9 \cdot \lg 11 < 1$.
41. (005038) 利用放缩法并结合公式 $ab \leq (\frac{a+b}{2})^2$, 证明: $\log_a(a-1) \cdot \log_a(a+1) < 1$ ($a > 1$).
42. (005039) 利用放缩法并结合公式 $ab \leq (\frac{a+b}{2})^2$, 证明: 若 $a > b > c$, 则 $\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{4}{c-a} \geq 0$.
43. (005040) 利用放缩法证明: $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \frac{1}{n+4} + \cdots + \frac{1}{n^2} > 1$ ($n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$).
44. (005041) 利用放缩法证明: $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} < 1$ ($n \in \mathbf{N}$).
45. (005042) 利用放缩法证明: 已知 $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, 且 $a^2 + b^2 = c^2$, 求证: $a^n + b^n < c^n$ ($n \geq 3$, $n \in \mathbf{N}$).
46. (005043) 利用拆项法证明: 若 $x > y$, $xy = 1$, 则 $\frac{x^2 + y^2}{x - y} \geq 2\sqrt{2}$.
47. (005044) 利用拆项法证明: $\frac{1}{2}(a^2 + b^2) + 1 \geq \sqrt{a^2 + 1} \cdot \sqrt{b^2 + 1}$.
48. (005045) 利用拆项法证明: 若 $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, 则 $2(\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab}) \leq 3(\frac{a+b+c}{3} - \sqrt[3]{abc})$.
49. (005046) 利用拆项法证明: $2(\sqrt{n+1} - 1) < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}$ ($n \in \mathbf{N}$).
50. (005047) 利用迭代法证明: 若正数 x, y 满足 $x + 2y = 1$, 则 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq 3 + 2\sqrt{2}$.
51. (005048) 利用迭代法证明: $\frac{1}{\sin^2 \alpha} + \frac{3}{\cos^2 \alpha} \geq 4 + 2\sqrt{3}$.
52. (005049) 利用迭代法证明: 若 $x, y > 0$, a, b 为正常数, 且 $\frac{a}{x} + \frac{a}{y} = 1$, 则 $x + y \geq (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$.
53. (005050) 利用判别式法证明: $\frac{1}{3} \leq \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1} \leq 3$.
54. (005051) 利用判别式法证明: 若关于 x 的不等式 $(a^2 - 1)x^2 - (a - 1)x - 1 < 0$ ($a \in \mathbf{R}$) 对任意实数 x 恒成立, 则 $-\frac{3}{5} < a \leq 1$.
55. (005052) 利用函数的单调性证明: 若 $x > 0$, $y > 0$, $x + y = 1$, 则 $(x + \frac{1}{x})(y + \frac{1}{y}) \geq \frac{25}{4}$.
56. (005053) 利用函数的单调性证明: 若 $0 < a < \frac{1}{k}$ ($k \geq 2, k \in \mathbf{N}$), 且 $a^2 < a - b$, 则 $b < \frac{1}{k+1}$.
57. (005054) 利用三角换元法证明: 若 $a^2 + b^2 = 1$, 则 $a \sin x + b \cos x \leq 1$.
58. (005055) 利用三角换元法证明: 若 $|a| < 1$, $|b| < 1$, 则 $|ab \pm \sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}| \leq 1$.

59. (005056) 利用三角换元法证明: 若 $x^2 + y^2 \leq 1$, 则 $-\sqrt{2} \leq x^2 + 2xy - y^2 \leq \sqrt{2}$.
60. (005057) 利用三角换元法证明: 若 $|x| \leq 1$, 则 $(1+x)^n + (1-x)^n \leq 2^n$.
61. (005058) 利用三角换元法证明: 若 $a > 0, b > 0$, 且 $a - b = 1$, 则 $0 < \frac{1}{a}(\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}})(\sqrt{b} + \frac{1}{\sqrt{b}}) < 1$.
62. (005059) 利用三角换元法证明: $0 < \sqrt{1+x} - \sqrt{x} \leq 1$.
63. (005060) 试构造几何图形证明: 若 $f(x) = \sqrt{1+x^2}$, $x > b > 0$, 则 $|f(a) - f(b)| < |a - b|$.
64. (005061) 试构造几何图形证明: 若 $x, y, z > 0$, 则 $\sqrt{x^2 + y^2 + xy} + \sqrt{y^2 + z^2 + yz} > \sqrt{z^2 + x^2 + zx}$.
65. (005062) 利用均值换元证明: 若 $a > 0, b > 0$, 且 $a + b = 1$, 则 $\frac{4}{3} \leq \frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} < \frac{3}{2}$.
66. (005063) 利用均值换元证明: 若 $a + b + c = 1$, 则 $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{3}$.
67. (005064) 利用设差换元证明: 若 $x \geq y \geq 0$, 则 $\sqrt{2xy - y^2} + \sqrt{x^2 - y^2} \geq x$.
68. (005098) 利用反证法证明: 若 $0 < a < 1, 0 < b < 1, 0 < c < 1$, 则 $(1-a)b, (1-b)c, (1-c)a$ 不能都大于 $\frac{1}{4}$.
69. (005099) 利用反证法证明: 若 $0 < a < 2, 0 < b < 2, 0 < c < 2$, 则 $a(2-b), b(2-c), c(2-a)$ 不可能都大于 1.
70. (005100) 利用反证法证明: 若 $x, y > 0$, 且 $x + y > 2$, 则 $\frac{1+y}{x}$ 和 $\frac{1+x}{y}$ 中至少有一个小于 2.
71. (005101) 利用反证法证明: 若 $0 < a < 1, b > 0$, 且 $a^b = b^a$, 则 $a = b$.
72. (005102) 若 $a > 0, b > 0$, 且 $a^3 + b^3 = 2$, 试分别利用 $x^3 + y^3 + z^3 \geq 3xyz (x, y, z \geq 0)$ 构造方程, 并利用判别式以及反证法证明: $a + b \leq 2$.
73. (007768) 证明: 如果 $a > b, c < 0$, 那么 $(a-b)c < 0$.
74. (007769) 证明: 如果 $a < b < 0$, 那么 $0 > \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.
75. (007818) 设 $ab \neq 0$, 利用基本不等式有如下证明: $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} = \frac{b^2 + a^2}{ab} \geq \frac{2ab}{ab} = 2$. 试判断这个证明过程是否正确. 若正确, 请说明每一步的依据; 若不正确, 请说明理由.
76. (007837) 证明: 如果 $a > b > 0, c > d > 0$, 那么 $a^2c > b^2d$.
77. (007838) 证明: $a^2 + b^2 + 2 \geq 2(a+b)$.
78. (007839) 证明: 如果 a, b, c 都是正数, 那么 $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$.
79. (009442) 设 $n \in \mathbf{Z}$. 证明: 若 n^3 是奇数, 则 n 是奇数.
80. (009443) 证明: 对于三个实数 a, b, c , 若 $a \neq c$, 则 $a \neq b$ 或 $b \neq c$.
81. (009464) 证明: 若 $x < 0$, 则 $x + \frac{1}{x} \leq -2$, 并指出等号成立的条件.

82. (009468) 已知实数 a, b 满足 $|a| < \frac{1}{2}, |b| < \frac{1}{2}$. 证明下列各式:
- (1) $|a + b| < 1$;
- (2) $|a - b| < 1$.
83. (010027) 已知集合 $A = \{x|x = 2n + 1, n \in \mathbf{Z}\}, B = \{x|x = 4n - 1, n \in \mathbf{Z}\}$. 判断集合 A 与 B 的包含关系, 并证明你的结论.
84. (010035) 证明: “四边形 $ABCD$ 是平行四边形” 是 “四边形 $ABCD$ 的对角线互相平分” 的充要条件.
85. (010050) 证明: “ $a > 0$ 且 $b > 0$ ” 是 “ $a + b > 0$ 且 $ab > 0$ ” 的充要条件.
86. (010060) 对一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$, 证明: $ac < 0$ 是该方程有两个异号实根的充要条件.
87. (010064) 设 $s = a + b, p = ab (a, b \in \mathbf{R})$, 写出 “ $a > 1$ 且 $b > 1$ ” 用 s, p 表示的一个充要条件, 并证明.
88. (010065) 原有酒精溶液 a (单位: g), 其中含有酒精 b (单位: g), 其酒精浓度为 $\frac{b}{a}$. 为增加酒精浓度, 在原溶液中加入酒精 x (单位: g), 新溶液的浓度变为 $\frac{b+x}{a+x}$. 根据这一事实, 可提炼出如下关于不等式的命题: 若 $a > b > 0, x > 0$, 则 $\frac{b}{a} < \frac{b+x}{a+x} < 1$. 试加以证明.
89. (010101) 证明: 对于正数 h , 如果 $|x - a| < \frac{h}{2}, |y - a| < \frac{h}{2}$, 那么 $|x - y| < h$.
90. (010104) 证明: $|x + 2| - |x - 1| \geq -3$, 对所有实数 x 均成立, 并求等号成立时 x 的取值范围.
91. (020014) 已知集合 $A = \{x|x = a + \sqrt{2}b, a, b \in \mathbf{Z}\}$, 若 $x_1, x_2 \in A$, 证明: $x_1 x_2 \in A$.
92. (020024) 证明: 集合 $A = \{1, 2, 3\}$ 是集合 $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 的子集.
93. (020026) 证明集合 $A = \{n|n = 2k - 1, k \in \mathbf{N}\}$ 不是集合 $B = \{n|n = 2m + 1, m \in \mathbf{N}\}$ 的子集, 且集合 A 真包含集合 B .
94. (020030) 设常数 $a \in \mathbf{R}$. 若集合 $A = (-\infty, 5)$ 与 $B = (-\infty, a]$ 满足 $A \subseteq B$, 则 a 的取值范围是_____.
- 证明: 1° 当 a _____ 时, 任取 $x \in A$, 则_____, 所以 $x \in B$, 即 $A \subseteq B$.
- 2° 当 a _____ 时, 取 $x_1 =$ _____, 则_____, 所以 $x_1 \in A$ 且 $x_1 \notin B$.
- 由 1°, 2° 可得结论.
95. (020035) 证明: 集合 $A = \{x|x = 6n - 1, n \in \mathbf{Z}\}$ 是 $B = \{x|x = 3n + 2, n \in \mathbf{Z}\}$ 的真子集.

96. (020041) 已知 $A = \{x|x = a + \sqrt{2}b, a, b \in \mathbf{N}\}$, 若集合 $B = \{x|x = \sqrt{2}x_1, x_1 \in A\}$, 证明 $B \subset A$.
97. (020083) 证明: $x_1 > 2$ 且 $x_2 > 2$ 是 $x_1 + x_2 > 4$ 且 $x_1 \cdot x_2 > 4$ 的充分非必要条件.
98. (020085) 设 α, β 是方程 $x^2 - ax + b = 0$ 的两个实数根. 试分析 $a > 2$ 且 $b > 1$ 是“两个实数根 α, β 均大于 1”的什么条件? 并证明你的结论.
99. (020092) 证明: 若 $x + 2y + z > 0$, 则 x, y, z 中至少有一个大于 0.
100. (020093) 证明: 对于三个实数 a, b, c , 若 $a \neq c$, 则 $a \neq b$ 或 $b \neq c$.
101. (020095) 证明: 若 $x^2 \neq y^2$, 则 $x \neq y$ 或 $x \neq -y$.
102. (020096) 若 $a^3 + b^3 = 2$, 证明: $a + b \leq 2$.