

1. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n = pn + q$ (p, q 为常数, $n \in \mathbf{N}^*$), 求证: $\{a_n\}$ 是等差数列.

解答在这里因为 $a_{n+1} - a_n = [p(n+1) + q] - (pn + q) = p$ ($n \in \mathbf{N}^*$), 所以 $\{a_n\}$ 是等差数列, 显然, 常数 p 是它的公差.

2. 已知数列前 n 项和 $S_n = An^2 + Bn + C$, 试证明此数列从第二项起, 构成一个等差数列.

解答在这里由已知, $a_n = S_n - S_{n-1} = An^2 + Bn + C - [A(n-1)^2 + B(n-1) + C] = A(2n-1) + B = 2An + (B-A)$ ($n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*$). 于是 $a_{n+1} - a_n = [2A(n+1) + (B-A)] - [2An + (B-A)] = 2A$ ($n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*$), 故 $\{a_n\}$ 从第二项起, 构成一个等差数列.

3. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1, S_n = \frac{(n+1)a_n}{2}$ ($n \in \mathbf{N}^*$), 求通项 a_n 的表达式.

解答在这里由已知, 得 $2S_n = (n+1)a_n$ ($n \in \mathbf{N}^*$), $2S_{n-1} = na_{n-1}$ ($n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*$), 两式相减, 得 $2a_n = (n+1)a_n - na_{n-1}$, 即 $(n-1)a_n = na_{n-1}$, 所以 $\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{n}{n-1}$ ($n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*$), 于是有 $\frac{a_2}{a_1} = \frac{2}{1}, \frac{a_3}{a_2} = \frac{3}{2}, \frac{a_4}{a_3} = \frac{4}{3}, \dots, \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{n}{n-1}$ ($n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*$). 以上诸式相乘, 得 $a_n = na_1 = n$ ($n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*$). 又 $a_1 = 1$, 所以 $a_n = n$ ($n \in \mathbf{N}^*$).

4. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_2 + a_7 + a_8 + a_{13} = 6$, 求 $a_6 + a_9$.

解答在这里因为 $a_2 + a_{13} = a_7 + a_8 = a_6 + a_9$, 所以 $a_6 + a_9 = 3$.

5. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $S_{11} = 66$, 求 a_6 . 解答在这里因为 $S_{11} = \frac{11(a_1 + a_{11})}{2} = \frac{11 \times 2a_6}{2} = 11a_6 = 66$, 所以 $a_6 = 6$.

6. 项数为奇数的等差数列 $\{a_n\}$ 中, 已知奇数项之和为 12, 偶数项之和为 10, 求它的项数和中间项.

解答在这里设有 $2n-1$ 项, 则由题意, 得 $\frac{S_{\text{奇}}}{S_{\text{偶}}} = \frac{\frac{(a_1 + a_{2n-1})n}{2}}{\frac{(a_2 + a_{2n-2})(n-1)}{2}} = \frac{n}{n-1} = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}$, 所以 $n = 6$, 故此数列共有 11 项. 又 $S_{\text{奇}} - S_{\text{偶}} = (a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{11}) - (a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{10}) = a_1 + (a_3 - a_2) + (a_5 - a_4) + \dots + (a_{11} - a_{10}) = a_1 + 5d = a_6 = 12 - 10 = 2$, 所以中间项 $a_6 = 2$.

7. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, 已知前 10 项和为 5, 前 20 项和为 15, 求前 30 项和.

解答在这里记 $A = a_1 + a_2 + \dots + a_{10}$, $B = a_{11} + a_{12} + \dots + a_{20}$, $C = a_{21} + a_{22} + \dots + a_{30}$, 则 $A = 5$, $B = S_{20} - S_{10} = 10$. 因为 A, B, C 成等比, 所以 $C = \frac{B^2}{A} = \frac{100}{5} = 20$, 故 $S_{30} = A + B + C = 35$.

8. 求数列 $1, 1+a, 1+a+a^2, 1+a+a^2+a^3, \dots, 1+a+a^2+\dots+a^{n-1}, \dots$ 的前 n 项和 S_n .

解答在这里 (1) 若 $a = 1$, 则 $a_n = n$, 于是 $S_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

(2) 若 $a \neq 1$, 则 $a_n = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$, 于是 $S_n = \frac{1-a}{1-a} + \frac{1-a^2}{1-a} + \frac{1-a^3}{1-a} + \dots + \frac{1-a^{n+1}}{1-a} = \frac{1}{1-a} [n - (a + a^2 + a^3 + \dots + a^{n+1})] = \frac{1}{1-a} [n - \frac{a(1-a^{n+1})}{1-a}]$.

9. 求和: $1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \dots + \frac{1}{1+2+\dots+n}$ ($n \in \mathbf{N}^*$).

解答在这里因为 $a_k = \frac{1}{1+2+\dots+k} = \frac{2}{k(k+1)}$. 所以 $S_n = 2[\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}] = 2[(1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + \dots + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1})] = 2(1 - \frac{1}{n+1}) = \frac{2n}{n+1}$.

10. 求和: $a + 2a^2 + 3a^3 + \cdots + na^n (n \in \mathbf{N}^*)$.

解答在这里记 $S_n = a + 2a^2 + 3a^3 + \cdots + (n-1)a^{n-1} + na^n$, 则 $aS_n = 2a^2 + 3a^3 + \cdots + (n-2)a^{n-1} + (n-1)a^n + na^{n+1}$, 两式相减, 得 $(1-a)S_n = (a + 2a^2 + 3a^3 + \cdots + a^n) - na^{n+1}$. 若 $a = 1$, 则 $S_n = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$; 若 $a \neq 1$, 则 $S_n = \frac{a(1-a^n)}{(1-a)^2} - \frac{na^{n+1}}{1-a}$.

11. 已知数列 $6, 9, 14, 21, 30, \cdots$, 其中相邻两项之差成等差数列, 求它的通项.

解答在这里因为 $a_2 - a_1 = 3, a_3 - a_2 = 5, a_4 - a_3 = 7, \cdots, a_n - a_{n-1} = 2n - 1$, 各项相加得 $a_n - a_1 = 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n - 1)$, 所以 $a_n = 6 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n - 1) = n^2 + 5 (n \in \mathbf{N}^*)$.

12. 若 $1 \times 2^2 + 2 \times 3^2 + 3 \times 4^2 + \cdots + n(n+1)^2 = \frac{n(n+1)}{12}(an^2 + bn + c)$ 对 $n \in \mathbf{N}^*$ 恒成立, 求 a, b, c 的值.

解答在这里左边 $= \sum_{k=1}^n k(k+1)^2 = \sum_{k=1}^n k^3 + 2 \sum_{k=1}^n k^2 + \sum_{k=1}^n k = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{3} + \frac{n(n+1)}{2}$
 $= \frac{n(n+1)}{12}[3n(n+1) + 4(2n+1) + 6] = \frac{n(n+1)}{12}(3n^2 + 11n + 10)$, 所以 $a = 3, b = 11, c = 10$.

13. 若数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 2, a_{n+1} - a_n + 1 = 0 (n \in \mathbf{N}^*)$, 则此数列的通项 a_n 等于 ().

- A. $n^2 + 1$ B. $n + 1$ C. $1 - n$ D. $3 - n$

14. 若数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是 $a_n = 2(n+1) + 3$, 则此数列 ().

- A. 是公差为 2 的等差数列 B. 是公差为 3 的等差数列
C. 是公差为 5 的等差数列 D. 不是等差数列

15. 若 m, a_1, a_2, n 和 $m, b_1, b_2, n (m \neq n)$ 分别是两个等差数列, 则 $\frac{a_2 - a_1}{b_2 - b_1}$ 的值为 ().

- A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{3}{4}$ C. $\frac{3}{2}$ D. $\frac{4}{3}$

16. 若等差数列 $\{a_n\}$ 的前三项依次为 $a - 1, a + 1, 2a + 3$, 则此数列的通项 a_n 等于 ().

- A. $2n - 5$ B. $2n - 3$ C. $2n - 1$ D. $2n + 1$

17. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 = 450$, 则 $a_2 + a_8$ 等于 ().

- A. 45 B. 75 C. 180 D. 320

18. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_1 + a_4 + a_7 = 39, a_2 + a_5 + a_8 = 33$, 则 $a_3 + a_6 + a_9$ 的值是 ().

- A. 30 B. 27 C. 24 D. 21

19. 在递增的等差数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_3 + a_6 + a_9 = 12, a_3 a_6 a_9 = 28$, 则通项 a_n 等于 ().

- A. $n - 2$ B. $16 - n$ C. $n - 2$ 或 $16 - n$ D. $2 - n$

20. 若等差数列 $\{a_n\}$ 的公差 d 不为零, 且 $a_1 \neq d$, 前 20 项之和 $S_{20} = 10M$, 则 M 等于 ().

- A. $a_6 + a_5$ B. $a_2 + 2a_{10}$ C. $2a_{10} + d$ D. $10a_2 + d$

21. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 已知前 4 项和是 1, 前 8 项和是 4, 则 $a_{17} + a_{18} + a_{19} + a_{20}$ 的值等于 ().

- A. 7 B. 8 C. 9 D. 10

22. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 若前 15 项的和 $S_{15} = 90$, 则 a_8 等于 ().
- A. 6 B. $\frac{45}{4}$ C. 12 D. $\frac{45}{2}$
23. 若数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} = \frac{3a_n + 2}{3}$, 且 $a_1 = 0$, 则 $a_7 =$ _____.
24. 若等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_7 = p$, $a_{14} = q(p \neq q)$, 则 $a_{21} =$ _____.
25. 首项为 -24 的等差数列从第 10 项开始为正数, 则公差 d 的取值范围是_____.
26. 若等差数列 $\{a_n\}$ 的公差 $d \neq 0$, 且 a_1, a_2 为关于 x 的方程 $x^2 - a_3x + a_4 = 0$ 的两根, 则 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n =$ _____.
27. 若 $a, x, b, 2x$ 依次成等差数列, 则 $a : b =$ _____.
28. 若 $a, b, \lg 6, 2\lg 2 + \lg 3$ 依次成等差数列, 则 $a =$ _____, $b =$ _____.
29. 等差数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $a_1 + a_3 + a_5 = -1$, 则 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 =$ _____.
30. 等差数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $a_3 + a_{11} = 10$, 则 $a_2 + a_4 + a_{15} =$ _____.
31. 等差数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 34$, $a_2a_5 = 52$, 且 $a_4 > a_2$, 则 $a_5 =$ _____.
32. 等差数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $a_1 - a_4 - a_8 - a_{12} + a_{15} = 2$, 则 $a_3 + a_{13} =$ _____.
33. 等差数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 30$, $a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} = 80$, 则 $a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} + a_{15} =$ _____.
34. 等差数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $a_2 + a_7 + a_{12} = 21$, 则前 13 项和 $S_{13} =$ _____.
35. 等差数列 $\{a_n\}$ 中, 若前 10 项和 $S_{10} = 100$, 前 20 项和 $S_{20} = 400$, 则前 30 项和 $S_{30} =$ _____.
36. 等差数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $a_{11} = 20$, 则前 21 项和 $S_{21} =$ _____.
37. 若一个等差数列的前 10 项和是前 5 项和的 4 倍, 则其首项与公差之比等于_____.
38. 等差数列 $\{a_n\}$ 中, 若前 100 项之和等于前 10 项和的 100 倍, 则 $\frac{a_{100}}{a_{10}} =$ _____.
39. 若 100 个连续整数之和在 13400 与 13500 之间, 则此连续整数中最小的一个等于_____.
40. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_m = p$, $a_n = q(m \neq n)$, 求 a_{m+n} .
41. 若 $\{a_n\}$ 是等差数列, 数列 $\{b_n\}$ 满足: $b_n = (\frac{1}{2})^{a_n}$, $b_1 + b_2 + b_3 = \frac{21}{8}$, $b_1b_2b_3 = \frac{1}{8}$, 求通项公式 a_n .
42. 已知等差数列的第 1 项和第 4 项之和为 10, 且第 2 项减去第 3 项的差为 2, 求此数列的前 n 项之和.
43. 求所有能被 7 整除且被 11 除余 2 的三位数之和.
44. 首项 $a_1 \neq 0$ 的等差数列 $\{a_n\}$ 中, 已知前 9 项和与前 4 项和之比 $S_9 : S_4 = 81 : 16$, 求 $a_9 : a_4$ 的值.

45. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 已知公差 $d = 1$, 前 98 项和 $S_{98} = 137$, 求 $a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + \cdots + a_{94} + a_{96} + a_{98}$.
46. 若等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 = \frac{25}{2}$, $a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10} = 15$, 求前 20 项之和 S_{20} .
47. 若三角形三边长成等差数列, 周长为 36, 内切圆周长为 6π , 则此三角形是 ().
- A. 正三角形
B. 等腰三角形, 但不是直角三角形
C. 直角三角形, 但不是等腰三角形
D. 等腰直角三角形
48. 若 a, b, c 的倒数依次成等差数列, 且 a, b, c 互不相等, 则 $\frac{a-b}{b-c}$ 等于 ().
- A. $\frac{c}{a}$
B. $\frac{a}{b}$
C. $\frac{a}{c}$
D. $\frac{b}{c}$
49. 若等差数列 $\{a_n\}$ 的公差 $d = \frac{1}{2}$, $a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 + \cdots + a_{95} + a_{97} + a_{99} = 60$, 则前 100 项之和 S_{100} 等于 ().
- A. 120
B. 145
C. 150
D. 170
50. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $S_m = S_n = l (m \neq n)$, 则 $a_1 + a_{m+n}$ 等于 ().
- A. $mn l$
B. $(m+n)l$
C. 0
D. $(m+n-1)l$
51. 若等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $3a_8 = 5a_{13}$, 且 $a_1 > 0$, 则前 n 项之和 S_n 的最大值是 ().
- A. S_{10}
B. S_{11}
C. S_{20}
D. S_{21}
52. 若一个等差数列共有 $2n+1$ 项, 其中奇数项之和为 290, 偶数项之和为 261, 则第 $n+1$ 项为 ().
- A. 30
B. 29
C. 28
D. 27
53. 记两个等差数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的前 n 项和分别为 S_n 和 T_n , 且 $\frac{S_n}{T_n} = \frac{7n+1}{4n+27} (n \in \mathbf{N}^*)$, 则 $\frac{a_{11}}{b_{11}}$ 等于 ().
- A. $\frac{7}{4}$
B. $\frac{3}{2}$
C. $\frac{4}{3}$
D. $\frac{78}{71}$
54. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 若前三项之和为 12, 最后三项之和为 75, 各项之和为 145, 则 $n =$ _____, $a_1 =$ _____, 公差 $d =$ _____.
55. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 若前四项之和为 21, 末四项之和为 67, 前 n 项之和为 286, 则该数列的项数为_____.
56. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{15} = a$, $a_{n-11} + a_{n-13} + \cdots + a_n = b$, 则 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n =$ _____.
57. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 若前 9 项和为 18, 前 n 项和为 240, 且 $a_{n-4} = 30$, $n > 9$, 则 $n =$ _____.
58. 若等差数列 18, 15, 12, \cdots 的前 n 项和最大, 则 $n =$ _____.
59. 若等差数列 $-21, -19, -17, \cdots$ 的前 n 项和最小. 则 $n =$ _____.
60. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $a_9 + a_{10} = a$, $a_{29} + a_{30} = b$, 则 $a_{99} + a_{100} =$ _____.

61. 两个等差数列: $2, 5, 8, \dots, 197$ 和 $2, 7, 12, \dots, 197$ 中,
 (1) 有多少相同的项?
 (2) 求这些相同项之和.
62. 求和: $100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + \dots + 4^2 - 3^2 + 2^2 - 1^2$.
63. 若 $\{a_n\}$ 是等差数列, 求证: $a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 - a_4^2 + \dots + a_{2n-1}^2 - a_{2n}^2 = \frac{n}{2n-1}(a_1^2 - a_{2n}^2)$.
64. 若四个数依次成等差数列, 且四个数的平方和为 94, 首尾两数之积比中间两数之积少 18, 求此四数.
65. 已知 $\lg a, \lg b, \lg c$ 与 $\lg a - \lg 2b, \lg 2b - \lg 3c, \lg 3c - \lg a$ 都是等差数列, 试求 a, b, c 之比.
66. 已知 $\triangle ABC$ 的三边成等差数列, 且最大角与最小角之差为 90° , 求证: 其三边之比为 $(\sqrt{7}+1) : \sqrt{7} : (\sqrt{7}-1)$.
67. 在 $\triangle ABC$ 中. 已知 $\lg \tan A, \lg \tan B, \lg \tan C$ 依次成等差数列, 求 $\angle B$ 的取值范围.
68. 若等差数列的第 p 项是 q , 第 q 项是 $p(p \neq q)$, 求它的第 $p+q$ 项及前 $p+q$ 项的和.
69. 在等差数列中, 若前 p 项的和与前 q 项的和相等求前 $p+q$ 项的和.
70. 一等差数列共有奇数项, 且奇数项之和为 80, 偶数项之和为 75, 求此数列的中间项与项数.
71. 已知一个等差数列的项数 n 为奇数, 求其奇数项之和与偶数项之和的比.
72. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = -60, a_{17} = -12$, 记 $b_n = |a_n|$, 求数列 $\{b_n\}$ 前 30 项之和.
73. 若等差数列 $\{a_n\}$ 的通项为 $a_n = 10 - 3n$, 求 $|a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|$.
74. 求关于 x 的方程 $x^2 - (3n+2)x + 3n^2 - 74 = 0 (n \in \mathbf{Z})$ 的所有实数根之和.
75. 若一等差数列 $\{a_n\}$ 的前 m 项、前 n 项之和分别为 S_m 和 S_n , 且 $S_m : S_n = m^2 : n^2 (m \neq n)$, 求证:
 $a_m : a_n = (2m-1) : (2n-1)$.
76. 已知等差数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的前 $2n-1$ 项之和分别为 S_{2n-1} 和 S'_{2n-1} . ① 求证: $a_n : b_n = S_{2n-1} : S'_{2n-1}$; ②
 如果 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 的前 n 项之和的比为 $\frac{5n+1}{3n-1}$, 求 $a_{15} : b_{15}$.
77. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 首项是 a , 公差为 $d, a_4 = 84$, 且前 10 项之和 S_{10} 与前 11 项之和 S_{11} 分别满足 $S_{10} > 0, S_{11} < 0$.
 (1) 求公差 d 的取值范围;
 (2) 求使 $a_n < 0$ 的最小的 n 值;
 (3) 记 $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n, \dots$ 中的最大值为 M , 求 M 的取值范围.
78. 已知一个数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = 2n(n+1)$, 求此数列的第 100 项.
79. 已知数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和 $S_n = na_n - n^2 + n$, 求 $a_{100} - a_{99}$.
80. 已知数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和 $S_n = 2n^2 - 3n - 1$, 求此数列的通项公式.

81. 已知 $\{a_n\}$ 是首项为 a 的等差数列, 记 $b_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$, 求证: 数列 $\{b_n\}$ 是等差数列.
82. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 及关于 x 的方程 $a_i x^2 + 2a_{i+1}x + a_{i+2} = 0 (i = 1, 2, \cdots, n, n \in \mathbf{N}^*)$, 其中 a_1 及公差 d 均为非零实数.
- (1) 求证: 这些方程有公共根;
- (2) 若方程的另一根为 a_i , 求证: $\frac{1}{a_1 + 1}, \frac{1}{a_2 + 1}, \cdots, \frac{1}{a_n + 1}$ 依次成等差数列.
83. 已知 $a_{n+1} = \frac{2a_n}{a_n + 2}, a_1 = 2$.
- (1) 求证: 数列 $\{\frac{1}{a_n}\}$ 是等差数列;
- (2) 求 a_5 ;
- (3) 求 $\{a_n\}$.
84. 若一个首项为 1 的等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和与之后的 $2n$ 项和之比是与 n 无关的定值, 试求此数列的通项公式.
85. 若公差不为零的等差数列的第 2, 3, 6 项依次是一等比数列的连续三项, 则这个等比数列的公比等于 ().
- A. $\frac{3}{4}$ B. $-\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{3}$ D. 3
86. 若自然数 m, n, p, r 满足 $m + n = p + r$, 则等比数列 $\{a_n\}$ 必定满足 ().
- A. $\frac{a_m}{a_p} = \frac{a_r}{a_n}$ B. $\frac{a_m}{a_n} = \frac{a_r}{a_p}$ C. $a_m + a_n = a_p + a_r$ D. $a_m - a_n = a_p - a_r$
87. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_9 = -2$, 则此数列前 17 项之积等于 ().
- A. 2^{16} B. -2^{16} C. 2^{17} D. -2^{17}
88. 已知数列 $\{a_n\}$ 是公比 $q \neq 1$ 的等比数列, 则在① $\{a_n a_{n+1}\}$, ② $\{a_{n+1} - a_n\}$, ③ $\{a_n^3\}$, ④ $\{n a_n\}$ 这四个数列中, 成等比数列的个数是 ().
- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4
89. 某商品欲分两次提价, 提价方案有三种: 方案甲是先提价 $a\%$, 再提价 $b\%$; 方案乙是先提价 $b\%$, 再提价 $a\%$; 方案丙是两次均提价 $\frac{a+b}{2}\% (a > b > 0)$, 则提价最多的方案是 ().
- A. 甲 B. 乙 C. 丙 D. 三种方案一样
90. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, 若公比为 $q, a_n = a_m \cdot x$, 则 $x =$ _____.
91. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $a_5 = 2, a_{10} = 10$, 则 $a_{15} =$ _____.
92. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $a_4 = 5, a_8 = 6$, 则 $a_2 a_{10} =$ _____.
93. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $a_1 a_2 \cdots a_9 = 512$, 则 $a_5 =$ _____.
94. 若 $\{a_n\}$ 是等比数列, 且 $a_n > 0, a_2 \cdot a_4 + 2a_3 \cdot a_5 + a_4 \cdot a_6 = 25$, 则 $a_3 + a_5 =$ _____.
95. 已知数列 $\{a_n\}$ 成等差数列, 且公差 $d \neq 0$, 又 a_1, a_3, a_9 依次成等比数列, 则 $\frac{a_1 + a_3 + a_9}{a_2 + a_4 + a_{10}} =$ _____.

96. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $a_1 + a_2 + a_3 = -3$, $a_1 a_2 a_3 = 8$, 则 $a_4 =$ _____.
97. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, 若连续四项之积为 16, 中间两项之和为 5, 则公比 $q =$ _____.
98. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, 若数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, $\frac{a_n}{a_n + a_{n+1}} = 2 (n \in \mathbf{N}^*)$, 则它的通项 $a_n =$ _____.
99. 若依次成等差数列的三实数 a, b, c 之和为 12, 而 $a, b, c + 2$ 又依次成等比数列, 则 a 的值等于_____.
100. 在 2 和 30 之间插入两个正数, 使三个数成等比数列, 后三个数成等差数列, 则这插入的两数是_____.
101. 若 a, b, c 依次成等差数列 (公差非零), c, a, b 又依次成等比数列, 则 $a : b : c =$ _____.
102. 一等比数列 $\{a_n\}$ 的前三项依次为 $a, 2a + 2, 3a + 3$, 且 $a_n = -\frac{27}{2}$, 则 $n =$ _____.
103. 已知各项都为正数的等比数列的任何一项都等于它后面两项的和, 则公比 $=$ _____.
104. 某工厂在 1997 年底制订计划要使 2010 年的总产值在 1997 年总产值基础上翻三番, 则年总产值的平均增长率为 ().
- A. $3^{\frac{1}{12}} - 1$ B. $3^{\frac{1}{13}} - 1$ C. $8^{\frac{1}{12}} - 1$ D. $8^{\frac{1}{13}} - 1$
105. 若 $\{a_n\}$ 是各项都大于零的等比数列, 且公比 $q \neq 1$, 则 $(a_1 + a_4)$ 与 $(a_2 + a_3)$ 的大小关系是 ().
- A. $a_1 + a_4 < a_2 + a_3$ B. $a_1 + a_4 > a_2 + a_3$ C. $a_1 + a_4 = a_2 + a_3$ D. 不能确定的
106. 若正数 a, b, c 依次成公比大于 1 的等比数列, 则当 $x > 1$ 时, $\log_a x, \log_b x, \log_c x$ ().
- A. 依次成等差数列 B. 依次成等比数列
C. 各项的倒数依次成等差数列 D. 各项的倒数依次成等比数列
107. 若 $2^a = 3$, $2^b = 6$, $2^c = 12$, 则 a, b, c 依次 ().
- A. 成等差数列, 但不成等比数列 B. 成等比数列, 但不成等差数列
C. 成等差数列, 又成等比数列 D. 不成等差数列, 也不成等比数列
108. 在三棱台 $EFG - E_1F_1G_1$ 中, 分别过点 E, F_1, G 和点 G, E_1, F_1 作两个截面, 将此棱台截成三个棱锥, 则这三个棱锥的体积 ().
- A. 成等差数列, 但不成等比数列 B. 成等比数列, 但不成等差数列
C. 成等差数列, 也成等比数列 D. 不成等差数列, 也不成等比数列
109. 某厂去年产值为 a , 计划在今后五年内每年比上年产值增长 10%, 则从今年起到第五年, 这个厂的总产值为 ().
- A. $1.1^4 a$ B. $1.1^5 a$ C. $11(1.1^5 - 1)a$ D. $10(1.1^6 - 1)a$
110. 某人从 2006 年起, 每年 1 月 1 日到银行新存人 a 元 (一年定期), 若年利率为 r 保持不变, 且每平到期存款均自动转为新的一年定期, 到 2010 年 1 月 1 日将所有存款及利息全部取回, 他可取回的钱数 (单位为元) 为 ().
- A. $a(1 + r)^5$ B. $\frac{a}{r}[(1 + r)^5 - (1 + r)]$ C. $a(1 + r)^6$ D. $\frac{a}{r}[(1 + r)^6 - (1 + r)]$

111. 若数列前 n 项的和 $S_n = 2^n - 1$, 则此数列奇数项的前 n 项的和是 ().
- A. $\frac{1}{3}(2^{n+1} - 1)$ B. $\frac{1}{3}(2^{n+1} - 2)$ C. $\frac{1}{3}(2^{2n} - 1)$ D. $\frac{1}{3}(2^{2n} - 2)$
112. 若等比数列的前 n 项和 $S_n = 4^n + a$, 则 a 的值等于 ().
- A. -4 B. -1 C. 0 D. 1
113. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_1 + a_2 + a_3 = 6$, $a_2 + a_3 + a_4 = -3$, 则 $a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8$ 等于 ().
- A. $\frac{21}{16}$ B. $\frac{19}{16}$ C. $\frac{9}{8}$ D. $\frac{3}{4}$
114. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, 已知对任意自然数 n , $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = 2^n - 1$, 则 $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \cdots + a_n^2$ 等于 ().
- A. $(2^n - 1)^2$ B. $\frac{1}{3}(2^n - 1)$ C. $4^n - 1$ D. $\frac{1}{3}(4^n - 1)$
115. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, 若前 n 项和为 S_n , 且 $a_3 = 3S_2 + 2$, $a_4 = 3S_3 + 2$, 则公比等于_____.
116. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, 若公比等于 2, 且前 4 项之和等于 1, 那么前 8 项之和等于_____.
117. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, 若第一、二、三这三项之和为 168, 第四、五、六这三项之和为 21, 则公比 $q =$ _____, 首项 $a_1 =$ _____.
118. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 31$, $a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 62$, 则其通项公式 $a_n =$ _____.
119. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 各项均为正数, 数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n = \log_2 a_n$, 且 $b_1 + b_2 + b_3 = 3$, $b_1 b_2 b_3 = -3$, 求通项 a_n .
120. 已知 a, b 为两个不等的正数, 且 a, x, y, b 依次成等差数列, a, m, n, b 依次成等比数列, 试比较 $x + y$ 与 $m + n$ 的大小.
121. 若 $\sin 2x$ 与 $\sin x$ 分别是 $\sin \theta$ 与 $\cos \theta$ 的等差中项和等比中项, 求 $\cos 2x$ 的值.
122. 已知 a, b, c 依次成等比数列, 且 x, y 分别是 a, b 与 b, c 的等差中项, 求 $\frac{a}{x} + \frac{c}{y}$ 的值.
123. 某工厂产量第一年比上一年增加 $a\%$, 第二年又增加 $b\%$, 为使连续二年的平均增产率为 $c\%$, 问: 第三年比第二年应再增加百分之几?
124. 从盛满 a 升纯酒精的容器里倒出 b 升, 然后用水加满, 再倒出 b 升, 再用水加满, 这样连续倒了 n 次, 问: 此时容器里还有多少纯酒精?
125. 某市人口 1997 年底预计为 20 万, 人均住房面积 8m^2 , 在 2001 年底达到人均住房面积 10m^2 . 如果该市计划将每年人口平均增长率控制在 1% , 那么要实现上述计划, 这个城市平均每年至少要新增住房面积多少万平方米? (以万平方米为单位, 保留两位小数)
126. 有四个数, 其中前三个数成等差数列, 后三个数成等比数列, 且第一个数与第四个数的和是 16, 第二个数与第三个数的和是 12, 求这四个数.
127. 有四个数, 其中前三个成等比数列, 其积为 216, 后三个成等差数列, 其和为 12, 求这四个数.

128. 七个实数排成一排, 奇数项成等差数列, 偶数项成等比数列, 且奇数项的和减去偶数项的积, 其差为 42, 首项、尾项与中间项之和为 27, 求中间项.
129. 已知公差为零的等差数列 $\{a_n\}$ 与递增的等比数列 $\{b_n\}$ 有如下关系: $a_1 = b_1 = 1$, $a_3 = b_3$, $a_7 = b_5$. 求:
- (1) $\{a_n\}$ 前 n 项之和 S_n ;
 - (2) $\{b_n\}$ 的通项公式.
130. 已知数列 $\{a_n\}$ 是等比数列, 其首项为 10, 又 $b_n = \lg a_n$, 且数列 $\{b_n\}$ 的前 7 项之和 S_7 最大, $S_7 \neq S_8$, 求 $\{a_n\}$ 的公比 q 的取值范围.
131. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 与等差数列 $\{b_n\}$ 满足 $a_1 > 0$, $\frac{a_2}{a_1} > 0$, $b_2 - b_1 > 0$, 求证: 一定存在实数 a , 使 $\log_a a_n - b_n$ 与 n 无关.
132. 求数列 $1, 1 - 2, 1 - 2 + 4, 1 - 2 + 4 - 8, 1 - 2 + 4 - 8 + 16, \dots$ 的一个通项公式.
133. 求数列 $\frac{1}{2}, 2\frac{3}{4}, 4\frac{7}{8}, 6\frac{15}{16}, \dots$ 前 n 项的和 S_n .
134. 求和: $4^n + 3 \times 4^{n-1} + 3^2 \times 4^{n-2} + \dots + 3^{n-1} \times 4 + 3^n (n \in \mathbf{N}^*)$.
135. 求和: $S = a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \dots + a^{n-r}b^r + \dots + ab^{n-1} + b^n (a \neq 0, b \neq 0, n \in \mathbf{N}^*)$.
136. 若 $\lg x + \lg x^2 + \dots + \lg x^{10} = 110$, 求 $\lg x + \lg^2 x + \dots + \lg^{10} x$ 的值.
137. 已知一个等比数列的前项和为 10, 前 20 项和为 30, 求其前 50 项的和.
138. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_1 = 1$, 且有偶数项. 若其奇数项之和为 85, 偶数项之和为 170, 求公比 q 及项数.
139. 各项为正的等比数列 $\{a_n\}$ 中, 已知其项数为偶数, 且它的所有项之和等于它的偶数项之和的 4 倍, 又第二项与第四项之积等于第三项与第四项之和的 9 倍. 求:
- (1) a_1 及 q ;
 - (2) 使 $\{\lg a_n\}$ 的前 n 项之和最大时的 n 值.
140. 已知等比数列各项均为正数, 前 n 项和为 80, 其中数值最大的项为 54, 前 $2n$ 项和为 6560, 求此数列的公比.
141. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的公比 $q > 1$, 其第 17 项的平方等于第 24 项, 求使 $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n > \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}$ 成立的自然数 n 的取值范围.
142. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = 4 - 4 \times 2^{-n} (n \in \mathbf{N}^*)$, 求证: $\{a_n\}$ 成等比数列.
143. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 2$, $a_{n+1} = 2(a_1 + a_2 + \dots + a_n) (n \in \mathbf{N}^*)$, 求证: a_2, a_3, \dots 成等比数列.
144. 已知数列 $\{a_n\}$ 的首项为 1, 从第二项起每项都是它前面各项之和, 求 $\{a_n\}$ 的通项公式及其前 n 项之和.
145. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 3$, $a_n a_{n+1} = (\frac{1}{2})^n (n \in \mathbf{N}^*)$, 求此数列前 $2n$ 项之和.
146. 在数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_1 = b (b \neq 0)$, 且前 n 项和 $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$ 成公比为 q 的等比数列 ($q \neq 1$), 求证: 数列 $a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, \dots$ 也是一个等比数列, 并求其公比.

147. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项之和 $S_n = p^n + q$ (p, q 为常数且 $p \neq 0$), 求证: 当 $q = -1$ 且 $p \neq 1$ 时, $\{a_n\}$ 成等比数列, 反之亦真.

148. 已知关于 x 的二次方程 $a_n x^2 - a_{n+1} x + 1 = 0$ ($n \in \mathbb{N}^*$) 的两根 α, β 满足 $6\alpha - 2\alpha\beta + 6\beta = 3$, 且 $a_1 = \frac{2}{3}$.

(1) 试 a_n 用表示 a_{n+1} ;

(2) 求证: $\{a_n - \frac{2}{3}\}$ 是等比数列;

(3) 当 $a_1 = \frac{7}{6}$ 时, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

149. 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是 $a_n = a^n + \lg b^n$ ($a \neq 0, b > 0$), 求此数列的前 n 项之和 S_n .

150. 求数列 $1, (1+2), (1+2+3), (1+2+3+4), (1+2+3+4+5), \dots$ 的前 n 项之和.

151. 求数列 $1, (1+2), (1+2+2^2), \dots, (1+2+2^2+\dots+2^{n-1}), \dots$ 的前 n 项之和.

152. 已知数列 $1, 1+a, 1+a+a^2, 1+a+a^2+a^3, \dots$. 求: (1) 其通项 a_n ;

(2) 前 n 项之和 S_n .

153. 已知数列 $2, 2^2+2^3, 2^4+2^5+2^6, 2^7+2^8+2^9+2^{10}, \dots$. 求:

(1) 前 n 项和 S_n ;

(2) 通项公式 a_n .

154. 给出数表

1	2	3	\dots	n
2	4	6	\dots	$2n$
3	6	9	\dots	$3n$
n	$2n$	$3n$	\dots	n^2

已知表中所有数之和为 36100, 求 n .

155. 给出数表

1				
2	3			
4	5	6		
7	8	9	10	
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots

(1) 前 n 行共有几个数?

(2) n 行的第一个数和最后一个数各是多少?

(3) 求第 n 行各数之和;

(4) 求前 n 行各数之和;

(5) 数 100 是第几行的第几个数?

156. 求和: $\frac{1}{2^2-1} + \frac{1}{4^2-1} + \frac{1}{6^2-1} + \dots + \frac{1}{(2n)^2-1}$.

157. 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}$, 它的前 n 项之和 $S_n = 9$, 求项数 n .
158. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数, 求证: $\frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{a_{n-1}} + \sqrt{a_n}} = \frac{n-1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_n}}$.
159. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的各项均不为零, 求证: $\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \cdots + \frac{1}{a_{n-1} a_n} = \frac{n-1}{a_1 a_n}$.
160. 求数列 $\frac{2^2+1}{2^2-1}, \frac{3^2+1}{3^2-1}, \frac{4^2+1}{4^2-1}, \cdots$ 的前 n 项之和.
161. 求和: $\frac{1}{1 \times 2 \times 3} + \frac{1}{2 \times 3 \times 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} (n \in \mathbf{N}^*)$.
162. 求和: $1 \times 2 + 4 \times 2^2 + 7 \times 2^3 + \cdots + (3n-2) \times 2^n$.
163. 求数列 $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{8}, \frac{7}{16}, \frac{9}{32}, \cdots$ 的前 n 项之和 S_n .
164. 求证: $\sqrt{2} \times \sqrt[4]{4} \times \sqrt[8]{8} \cdots \sqrt[2^n]{2^n} < 4 (n \in \mathbf{N}^*)$.
165. 已知 $a > 0, a \neq 1$, 数列 $\{a_n\}$ 是首项为 a , 公比也为 a 的等比数列, 令 $b_n = a_n \lg a_n (n \in \mathbf{N}^*)$.
- (1) 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项之和 S_n ;
- (2) 若数列 $\{b_n\}$ 中的每一项总小于它后面的项, 求 a 的取值范围.
166. 计算: $1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \cdots + n(n+1)$.
167. 计算: $1 \times 2 + 3 \times 4 + 5 \times 6 + \cdots + (2n-1)(2n)$.
168. 计算: $1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2$.
169. 计算: $1 \times 2 \times 3 + 2 \times 3 \times 4 + 4 \times 5 \times 6 + \cdots + n(n+1)(n+2)$.
170. 若 $1 \times 2^2 + 2 \times 3^2 + 3 \times 4^2 + \cdots + n(n+1)^2 = \frac{n(n+1)}{12}(an^2 + bn + c)$ 对任何自然数 n 恒成立, 求 a, b, c 的值.
171. 已知数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 满足 $b_n = \frac{a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + na_n}{1 + 2 + \cdots + n}$, 求证: 若 $\{a_n\}$ 为等差数列, 则 $\{b_n\}$ 也为等差数列, 反之亦真.
172. 已知 $f(x) = \sqrt{x^2 - 4} (x \leq -2)$.
- (1) 求 $f(x)$ 的反函数 $f^{-1}(x)$;
- (2) 记 $a_1 = 1, a_n = -f^{-1}(a_{n-1})$, 求 a_n ;
- (3) 如果 $b_1 = \frac{1}{a_1 + a_2}, b_2 = \frac{1}{a_2 + a_3}, b_3 = \frac{1}{a_3 + a_4}, \cdots, b_n = \frac{1}{a_n + a_{n+1}}, \cdots$, 求数列 $\{b_n\}$ 前 n 项的和 S_n .
173. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1, a_{n+1} = S_n + (n+1) (n \in \mathbf{N}^*)$.
- (1) 用 a_n 表示 a_{n+1} ;
- (2) 求证: 数列 $\{a_n + 1\}$ 是等比数列;
- (3) 求和 S_n .

174. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{n^2 + 2n + 2}{n + 1} - an + b)$, 其中 a, b 为常数.

解答在这里因为原式 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1-a)n^2 + (2-a+b)n + b + 2}{n + 1}$, 所以若 $a \neq 1$, 则极限不存在; 若 $a = 1$, 则原式 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(b+1)n + b + 2}{n + 1} = b + 1$.

175. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{n^2 + 1} + \frac{2}{n^2 + 1} + \cdots + \frac{n}{n^2 + 1})$.

解答在这里原式 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + \cdots + n}{n^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)}{2(n^2 + 1)} = \frac{1}{2}$.

176. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1})$. 解答在这里原式 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} =$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{\sqrt{n}}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n}}} = \frac{0}{1 + 1} = 0.$$

177. 若 $a \neq -1$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - a^n}{1 + a^n}$. 解答在这里若 $|a| < 1$, 则原式 $= \frac{1 - \lim_{n \rightarrow \infty} a^n}{1 + \lim_{n \rightarrow \infty} a^n} = 1$; 若 $a = 1$, 则原式 $= 0$.

若 $|a| > 1$, 则原式 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\frac{1}{a})^n - 1}{(\frac{1}{a})^n + 1} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{a})^n - 1}{\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{a})^n + 1} = -1$.

178. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 + a_2 + a_3 = 18$, $a_2 + a_3 + a_4 = -9$, 记 $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$.

解答在这里设分比为 q , 则由已知, $a_1(1 + q + q^2) = 18$, $a_2(1 + q + q^2) = -9$, 故 $\frac{a_2}{a_1} = -\frac{1}{2}$, 于是 $q = -\frac{1}{2}$,

$$a_1 = 24, \text{ 所以 } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{24 \times [1 - (-\frac{1}{2})^n]}{1 - (-\frac{1}{2})} = \frac{24}{1 - (-\frac{1}{2})} = 16.$$

179. 用定义证明数列 $\{\frac{n^2 - 1}{n^2 + 1}\}$ 的极限为 1. 解答在这里设 ε 是任意小的正数, 要使 $|\frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} - 1| < \varepsilon$, 只要

$|\frac{2}{n^2 + 1}| < \varepsilon$, 即 $\frac{2}{n^2 + 1} < \varepsilon$, 即 $n^2 > \frac{2}{\varepsilon} - 1$, 所以 $n > \sqrt{\frac{2 - \varepsilon}{\varepsilon}}$. 取 $N = [\sqrt{\frac{2 - \varepsilon}{\varepsilon}}]$, 则当 $n > N$ 时, 必有 $|\frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} - 1| < \varepsilon$, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} = 1$.

180. 用极限的定义证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0 (|q| < 1)$. 解答在这里设 ε 是任意小的正数, 要使 $|q^n - 0| < \varepsilon$, 即 $|q|^n < \varepsilon$,

即 $n \lg |q| < \lg \varepsilon$. 因为 $\lg |q| < 0$, 所以 $n > \frac{\lg \varepsilon}{\lg |q|}$. 取 $N = [\frac{\lg \varepsilon}{\lg |q|}]$, 则当 $n > N$ 时, 必有 $|q^n - 0| < \varepsilon$, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$.

181. 若非常数的数列 $\{a_n\}$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时的极限是 M , 则在区间 $(M - \varepsilon, M + \varepsilon)$ (ε 为任意小的正数) 内, 这个数列的项数为 ().

A. 无限多项

B. 有限项

C. 零项

D. 有限项与无限多项都有可能

182. 无穷数列 $\{a_n\}$ 的极限为 A , 指的是: 对任意的 $\varepsilon > 0$, 总能在 $\{a_n\}$ 中找到一项 a_N , 使 ().

A. a_N 以后至少有一项满足 $|a_n - A| < \varepsilon$

B. a_N 以后有有限项满足 $|a_n - A| < \varepsilon$

C. a_N 以后有无限项满足 $|a_n - A| < \varepsilon$

D. a_N 以后的所有项都满足 $|a_n - A| < \varepsilon$

183. 记 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = S_n$, 则数列 $\{a_n\}$ 有极限是数列 $\{S_n\}$ 有极限的 ().

- A. 充分不必要条件
B. 必要不充分条件
C. 充分必要条件
D. 既不充分也不必要条件

184. 观察下面四个数列:

- ① $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \cdots, (-1)^{n-1}\frac{1}{n}, \cdots$;
② $\frac{1}{a}, \frac{1}{a+d}, \frac{1}{a+2d}, \frac{1}{a+3d}, \cdots, \frac{1}{a+(n-1)d}, \cdots$ (分母均不为零);
③ $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \cdots, \frac{n+1}{n}, \cdots$;
④ $-2, \frac{3}{2}, -\frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \cdots, (-1)^n \frac{n+1}{n}, \cdots$.

其中存在极限的数列的个数为 ().

- A. 4
B. 3
C. 2
D. 1

185. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 存在, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - 3}{a_n + 2} = \frac{4}{9}$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n =$ _____.

186. 若数列 $\{a_n\}$ 、 $\{b_n\}$ 均存在极限, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} (3a_n + 4b_n) = 8$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (6a_n - b_n) = 1$. 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} (3a_n + b_n) =$ _____.

187. 在数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $a_n = \frac{n+2}{2n}$, 则 $|a_n - \frac{1}{2}| =$ _____; 要使 $n > N$ 时, 有 $|a_n - \frac{1}{2}| < 0.001$, 则 N 的最小值是_____.

188. 若数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = \sqrt{6}$, $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 6}$ ($n \in \mathbf{N}^*$), 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 存在, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

189. 用极限定义证明: 数列 $\{\frac{n}{2n+1}\}$ 的极限为 $\frac{1}{2}$.

190. 用极限定义证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \frac{1}{2^n}) = 1$.

191. 用极限定义证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0$.

192. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{n^2+1}{n^3} + \frac{n^2+2}{n^3} + \cdots + \frac{n^2+n}{n^3})$ 的值为 ().

- A. 0
B. 1
C. 2
D. 不存在

193. 若 $f(n) = 1 + 2 + \cdots + n$ ($n \in \mathbf{N}^*$), 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n^2)}{[f(n)]^2}$ 值是 ().

- A. 2
B. 0
C. 1
D. $\frac{1}{2}$

194. 若 S_n 是无穷等差数列 $1, 3, 5, \cdots$ 的前 n 项之和, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{S_{2n}}$ 的值等于 ().

- A. $\frac{1}{4}$
B. 1
C. 2
D. 4

195. 若数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n = (1 + \frac{1}{2})(1 + \frac{1}{3})(1 + \frac{1}{4}) \cdots (1 + \frac{1}{n+1})$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n}$ 的值等于 ().

- A. 0
B. $\frac{1}{2}$
C. 1
D. 不存在

196. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(k-2)n^2 + 4n}{2(n^2 + 7)} = 2$, 则实数 k 的值等于 ().

- A. 4
B. 6
C. 8
D. 0

197. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an^2 + cn}{bn^2 + c} = 2$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{bn + c}{cn + a} = 3$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an^2 + bn + c}{cn^2 + an + b} =$ ().
 A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{3}{2}$ D. 6
198. 数列极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} (n + 1 - \sqrt{n^2 + n})$ 是 ().
 A. 不存在 B. $\frac{1}{2}$ C. 1 D. $\frac{3}{2}$
199. 以下各式中, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 极限值为 $\frac{1}{2}$ 的是 ().
 A. $\frac{n-2}{2n(n+1)}$ B. $\frac{2n+1}{3n+2}$ C. $(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})\sqrt{n}$ D. $\frac{1+4+7+\cdots+(3n-2)}{2n^2}$
200. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{2n^2 + 5n - 1}{3n^3 - 2n^2} + \frac{3 + 5n}{3n - 1}) =$ _____.
201. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+3+5+7+\cdots+(2n-1)}{1+4+7+11+\cdots+(3n-2)} =$ _____.
202. 若 $\{a_n\}$ 是公差不为零的等差数列, S_n 是它的前 n 项之和, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{na_n}{S_n} =$ _____.
203. $\lim_{n \rightarrow \infty} [\frac{1}{(3n+1)(2n-1)} + \frac{5}{(3n+1)(2n-1)} + \frac{9}{(3n+1)(2n-1)} + \cdots + \frac{4n-3}{(3n+1)(2n-1)}] =$ _____.
204. $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{3})(1 - \frac{1}{4}) \cdots (1 - \frac{1}{n}) =$ _____.
205. $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \frac{1}{2^2})(1 - \frac{1}{3^2})(1 - \frac{1}{4^2}) \cdots (1 - \frac{1}{n^2}) =$ _____.
206. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} (2n - \sqrt{4n^2 + an + 3}) = 1$, 则 a 等于 ().
 A. -7 B. -4 C. 0 D. 4
207. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} [1^2 + (1 + \frac{1}{n})^2 + (1 + \frac{2}{n})^2 + (1 + \frac{3}{n})^2 + \cdots + (1 + \frac{n+1}{n})^2]$ 的值为 ().
 A. 2 B. $\frac{7}{3}$ C. $\frac{9}{5}$ D. $\frac{3}{7}$
208. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{n^2 + 1}{n + 1} - an - b) = 0$, 则 $a =$ _____, $b =$ _____.
209. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3a^n + pb^n + c}{7a^n - 3b^n + c^2} = -5$ ($1 < a < b$, c, p 为常数), 则 p _____.
210. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{4n^2 + p} - pn) = q$, 则 $p =$ _____, $q =$ _____.
211. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{n^2 + 2n} - \sqrt{n^2 + 1}} =$ _____.
212. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2 - n\sqrt{n^2 + 1}} =$ _____.
213. $\lim_{n \rightarrow \infty} [\sqrt{1+2+3+\cdots+n} - \sqrt{1+2+3+\cdots+(n-1)}] =$ _____.
214. $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \cdots + \frac{1}{1+2+3+\cdots+n}) =$ _____.
215. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2 + 3k + 2} =$ _____.

216. 已知 $y = f(x)$ 是一次函数, $f(8) = 15$, 又 $f(2), f(5), f(4)$ 依次成等比数列, 记 $S_n = f(1) + f(2) + \cdots + f(n)$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n^2}$.
217. 已知数列 $\{a_n\}$ 前 n 项的和 $S_n = n^2$, 记 $p_n = \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \cdots + \frac{1}{a_n a_{n+1}}$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n$.
218. 已知二次函数 $f(x) = n(n+1)x^2 - (2n+1)x + 1$, 当 n 取所有自然数时, 求它的图象在 x 轴上截得的所有线段长度的总和.
219. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} (1-2x)^n$ 存在, 则 x 的取值范围是 ().
- A. $0 < x < 1$ B. $0 \leq x \leq 1$ C. $0 \leq x < 1$ D. $x \geq 1$ 或 $x \leq 0$
220. 已知四个无穷数列 $\{(-1)^n \frac{1}{n}\}$, $\{(-1)^n (\frac{1}{2})^n\}$, $\{\frac{3^{n-1}}{2^n}\}$, $\{\frac{10^{10}}{n^2 + 2n}\}$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 这四个数列中极限为零的个数是 ().
- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4
221. 已知四个数列的通项公式分别是 $a_n = 1 + (-1)^n$, $b_n = 2 + (-\frac{\sqrt{2}}{2})^n$, $c_n = (-1)^n \tan(\frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4})$, $d_n = (-1)^n \frac{n+1}{n}$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 这四个数列中极限为 -1 的是数列 ().
- A. $\{a_n\}$ B. $\{b_n\}$ C. $\{c_n\}$ D. $\{d_n\}$
222. 首项为 1、公比为 q ($|q| > 1$) 的等比数列前 n 项之和为 S_n , 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{S_{n+1}}$ 的值为 ().
- A. 1 B. q C. $\frac{1}{q}$ D. 不存在
223. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1-a}{2a})^n = 0$, 则 a 的取值范围是_____.
224. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} [2 - (\frac{q}{1-q})^n] = 2$, 则 q 的取值范围是_____.
225. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n+1}}{1+x^{2n}} = x$ ($x \neq 0$), 则 x 的取值范围是_____.
226. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + a^n}{3^{n+1} + a^{n+1}} = \frac{1}{3}$, 则 a 的取值范围是_____.
227. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{2n-1} + 1}{4^n - 3^n} =$ _____.
228. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^{n+1} - 10^{n-1}}{10^{n+1} - 5^{n-1}} =$ _____.
229. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-2)^{n+1}}{1 - 2 + 4 - \cdots + (-2)^{n-1}} =$ _____.
230. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1}}{1 - 2^{n-1}} =$ _____.
231. 若 $|p| < 3$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p^n + 3^n}{1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^n} =$ _____.
232. 若 $|a| < 1$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} [(1+a)(1+a^2)(1+a^4) \cdots (1+a^{2^n})] =$ _____.

233. 在正数数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_1 = 2$, a_{n-1} 与 a_n 满足关系式 $\lg a_n = \lg a_{n-1} + \lg t$, 其中 t 为大于零的常数. 求:
- (1) 数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
 - (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n + 1}{a_n - 1}$ 的值.
234. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项之和 S_n 满足 $S_n = 1 + ra_n (r \neq 1)$.
- (1) 求证: $\{s_n - 1\}$ 是公比为 $\frac{r}{r-1}$ 的等比数列;
 - (2) 求适合 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1$ 的 r 的取值范围.
235. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的首项为 1, 公差为 d , 前 n 项和为 A_n ; 等比数列 $\{b_n\}$ 的首项为 1, 公比为 $q (|q| < 1)$, 前 n 项和为 B_n . 记 $S_n = B_1 + B_2 + \cdots + B_n$, 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{A_n}{n} - S_n) = 1$, 求 d 和 q .
236. 无穷数列 $\frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{2}, \frac{1}{2^2} \sin \frac{2\pi}{2}, \frac{1}{2^3} \sin \frac{3\pi}{2}, \cdots, \frac{1}{2^n} \sin \frac{n\pi}{2}, \cdots$ 的各项之和为 ().
- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{2}{7}$ C. $\frac{2}{5}$ D. 不存在
237. 将循环小数 $0.\dot{3}\dot{6}$ 化成最简分数后, 分子与分母的和等于 ().
- A. 15 B. 45 C. 126 D. 135
238. 记 $b = \cos 30^\circ$, 又无穷数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 2$, $\log_b a_{n+1} = \log_b a_n + 2$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_2 + a_3 + \cdots + a_n)$ 等于 ().
- A. 8 B. 6 C. $\frac{8}{3}$ D. 2
239. 无穷等比数列 (公比 q 满足 $|q| < 1$) 中, 若任何一项都等于该项后所有项的和, 则等比数列的公比是 ().
- A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $-\frac{1}{2}$ D. $-\frac{1}{4}$
240. 一个公比的绝对值小于 1 的无穷等比数列中, 已知各项的和为 15, 各项的平方和为 45, 则此数列的首项为 ().
- A. 6 B. 5 C. 3 D. 2
241. 连接三角形三边中点得第二个三角形, 再连接第二个三角形三边中点得第三个三角形, 如此不断地作下去, 则所得的一切三角形 (不包括第一个三角形) 的面积之和与第一个三角形面积之比为 ().
- A. 1 B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{4}$
242. 设 a 是方程 $\log_2 x + \log_2 (x + \frac{3}{4}) + \log_2 4 = 0$ 的根, 则无穷数列 a, a^2, a^3, \cdots 的各项之和等于_____.
243. 已知 $S_n = \frac{1}{5} + \frac{2}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \frac{2}{5^4} + \cdots + \frac{1}{5^{2n-1}} + \frac{2}{5^{2n}}$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n =$ _____.
244. 无穷数列 $0.1\dot{5}, 0.01\dot{5}, 0.001\dot{5}, \cdots$ 所有项的和等于_____.
245. 若 θ 是一个定锐角, θ_1 是 $\frac{\theta}{2}$ 的余角, θ_2 是 $\frac{\theta_1}{2}$ 的余角, θ_3 是 $\frac{\theta_2}{2}$ 的余角, \cdots , θ_n 是 $\frac{\theta_{n-1}}{2}$ 的余角, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n =$ _____.
246. $\frac{1}{3} + \frac{3}{3^2} + \frac{7}{3^3} + \cdots + \frac{2^n - 1}{3^n} + \cdots =$ _____.

247. 记 $S_n = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \frac{1}{64} - \frac{1}{128} - \frac{1}{256} + \cdots + \frac{1}{2^{3n-3}} - \frac{1}{2^{3n-2}} - \frac{1}{2^{3n-1}}$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n =$ _____.

248. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = \frac{1}{2}$, 求 a_1 的取值范围.

249. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_1 + a_2 + a_3 = 18$, $a_2 + a_3 + a_4 = -9$, 且 $S_n = a_1 + 2a_2 + 3(a_3 + a_4 + \cdots + a_n) (n \geq 3)$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$.

250. 已知 $\{a_n\}$ 是公比为正数的等比数列, 且 $\frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4} = 117$, $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = \frac{1}{3^6}$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$.

251. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项之和 S_n 满足 $S_n = 1 - \frac{2}{3}a_n (n \in \mathbf{N}^*)$.

(1) 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$;

(2) 若记数列 $\{a_n S_n\}$ 的前 n 项之和为 U_n , 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n$.

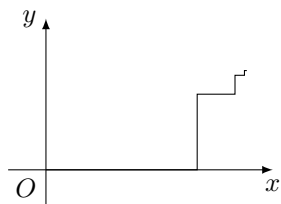
252. 已知数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1 = b (b \neq 0)$, 它的前 n 项和 S_n 组成的数列 $\{S_n\} (n \in \mathbf{N}^*)$ 是一个公比为 $q (q \neq 0, |q| < 1)$ 的等比数列.

(1) 求证: $a_2, a_3, a_4, \cdots, a_n, \cdots$ 是一个等比数列;

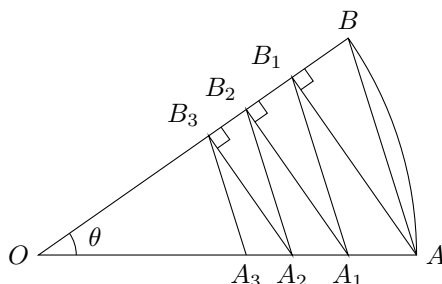
(2) 设 $W_n = a_1 S_1 + a_2 S_2 + \cdots + a_n S_n$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} W_n$ (用 b, q 表示).

253. 在 45° 角的一边上, 取距离顶点为 a 的一点, 由这点向另一边作垂线, 然后再由这个垂线的垂足向另一边作垂线, \cdots , 如此无限地继续下去, 求所有这些垂线长的和.

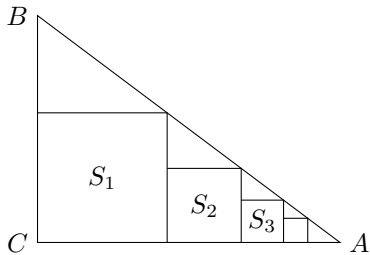
254. 如图, 在直角坐标平面上, 点 P 从原点出发沿 x 轴的正方向前进 a 后向左转 90° , 前进 $\frac{a}{2}$ 后又向右转 90° , 前进 $\frac{1}{2^2}a$ 后再左转 90° , 无限地继续下去, 点 P 最后到达哪一点.



255. 设扇形 AOB 的半径为 R , 中心角为 $\theta (0 < \theta < \frac{\pi}{2})$, 由 A 向半径 OB 作垂线 AB_1 , 由垂足 B_1 引弦 AB 的平行线交 OA 于点 A_1 , 再由 A_1 向 OB 作垂线 $A_1 B_2$, 由垂足 B_2 引弦 AB 的平行线交 OA 于点 A_2 (如图), 这样无限地继续下去, 在 OA, OB 上得到的点列 $\{A_n\}, \{B_n\}$, 设 $\triangle ABB_1, \triangle A_1 B_1 B_2, \cdots, \triangle A_n B_n B_{n+1}, \cdots$ 的面积为 $S_1, S_2, \cdots, S_{n+1}, \cdots$, 求 $S = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n S_k$.



256. 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中排列着无限个正方形 $S_1, S_2, S_3, S_4, \dots$, 且已知直角边 $BC = a$, 这无限个正方形的面积之和正好是这个直角三角形面积的一半, 求另一直角边 AC 的长.



257. 在半径为 r 的球内作正方体, 然后在正方体内再作内切球, 在内切球内再作内接正方体, 然后再作它的内切球, 如此无限地作下去, 求所有这些球的表面积之和 (包括半径为 r 的球).

258. 用数学归纳法证明: $1 + 2 + \dots + 2n = n(2n + 1) (n \in \mathbf{N}^*)$.

259. 用数学归纳法证明: $\sqrt{1 \times 2} + \sqrt{2 \times 3} + \dots + \sqrt{n(n+1)} > \frac{n(n+1)}{2} (n \in \mathbf{N}^*)$.

260. 用数学归纳法证明: $1 \times n + 2(n-1) + \dots + n \times 1 = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} (n \in \mathbf{N}^*)$.

261. 记 $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} (n > 1, n \in \mathbf{N}^*)$, 求证: $S_{2^n} > 1 + \frac{n}{2} (n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*)$.

解答在这里 (1) 当 $n = 2$ 时, $S_{2^2} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{25}{12} > 1 + \frac{2}{2}$, 所以当 $n = 2$ 时, 命题成立.

(2) 设 $n = k$ 时, 命题成立, 即 $S_{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^k} > 1 + \frac{k}{2}$, 则 $n = k + 1$ 时, $S_{2^{k+1}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k+1} + \frac{1}{2^k+2} + \dots + \frac{1}{2^{k+1}}$

$$1 + \frac{k}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{k+1}{2}.$$

故当 $n = k + 1$ 时, 命题也成立. 由 (1), (2) 可知, 对 $n \in \mathbf{N}^*, n \geq 2, S_{2^n} > 1 + \frac{n}{2}$.

262. 求证: $a^{n+1} + (a+1)^{2n-1} (n \in \mathbf{N}^*)$ 能被 $a^2 + a + 1$ 整除.

解答在这里 (1) 当 $n = 1$ 时, $a^{1+1} + (a+1)^{2 \times 1 - 1} = a^2 + a + 1$, 命题显然成立.

(2) 假设当 $n = k$ 时, $a^{k+1} + (a+1)^{2k-1}$ 能被 $a^2 + a + 1$ 整除, 则当 $n = k + 1$ 时, $a^{k+2} + (a+1)^{2k+1} = a \cdot a^{k+1} + (a+1)^2(a+1)^{2k-1} = a[a^{k+1} + (a+1)^{2k-1}] + (a+1)^2(a+1)^{2k-1} - a(a+1)^{2k-1} = a[a^{k+1} + (a+1)^{2k-1}] + (a^2 + a + 1)(a+1)^{2k-1}$. 由归纳假设, 以上两项均能被 $a^2 + a + 1$ 整除, 故 $n = k + 1$ 时, 命题也成立.

由 (1), (2) 可知, 对 $n \in \mathbf{N}^*$ 命题成立.

263. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = a, a_{n+1} = \frac{1}{2 - a_n}$.

(1) 求 a_2, a_3, a_4 ;

(2) 推测通项 a_n 的表达式, 并用数学归纳法加以证明.

解答在这里 (1) 由 $a_{n+1} = \frac{1}{2 - a_n}$, 可得 $a_2 = \frac{1}{2 - a}, a_3 = \frac{1}{2 - \frac{1}{2 - a}} = \frac{2 - a}{3 - 2a}, a_4 = \frac{1}{2 - \frac{2 - a}{3 - 2a}} = \frac{3 - 2a}{4 - 3a}$.

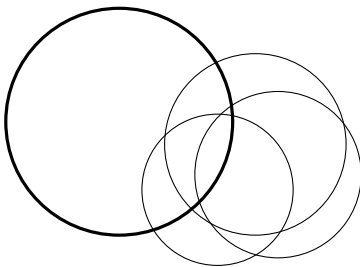
(2) 推测 $a_n = \frac{(n-1) - (n-2)a}{n - (n-1)a}$, 证明如下: ① 当 $n = 1$ 时, 左边 $= a_1 = a$, 右边 $= \frac{(1-1) - (1-2)a}{1 - (1-1)a} =$

a , 结论成立. ② 设 $n = k$ 时, 有 $a_k = \frac{(k-1) - (k-2)a}{k - (k-1)a}$, 则当 $n = k+1$ 时, $a_{k+1} = \frac{1}{2 - a_k} = \frac{1}{2 - \frac{(k-1) - (k-2)a}{k - (k-1)a}} = \frac{k - (k-1)a}{2[k - (k-1)a] - [(k-1) - (k-2)a]} = \frac{k - (k-1)a}{(k+1) - ka}$. 故当 $n = k+1$ 时, 结论成立.

由①, ②可知, 对 $n \in \mathbf{N}^*$, 都有 $a_n = \frac{(n-1) - (n-2)a}{n - (n-1)a}$.

264. 平面内有 n 个圆, 其中每两个圆都交于两点, 且无任何三个圆交于一点, 求证: 这 n 个圆将平面分成 $n^2 - n + 2$ 个部分.

解答在这里设 $n = k$ 时, k 个圆将平面分成 $k^2 - k + 2$ 个部分 (如图), 则当 $n = k+1$ 时, 第 $k+1$ 个圆 C_{k+1} 交前面 k 个圆于 $2k$ 个点, 这 $2k$ 个点将圆 C_{k+1} 分成 $2k$ 段, 每段将各自所在区域一分为二, 因此增加了 $2k$ 个区域, 于是这 $k+1$ 个圆将平面分成 $k^2 - k + 2 + 2k$ 个部分, 即 $(k+1)^2 - (k+1) + 2$ 个部分.



265. 利用数学归纳法证明 “ $1 + a + a^2 + \cdots + a^{n+1} = \frac{1 - a^{n+2}}{1 - a} (a \neq 1, n \in \mathbf{N}^*)$ ” 时, 在验证 $n = 1$ 成立时, 左边应该是 ().

A. 1 B. $1 + a$ C. $1 + a + a^2$ D. $1 + a + a^2 + a^3$

266. 欲用数学归纳法证明 “对于足够大的自然数 n , 总有 $2^n > n^3$ ”, 则验证不等式成立所取的第一个 n 值, 最小应当是 ().

A. 1 B. 大于 1 且小于 6 的某个自然数
C. 10 D. 大于 5 且小于 10 的某个自然数

267. 利用数学归纳法证明 “对任意偶数 n , $a^n - b^n$ 能被 $a + b$ 整除” 时, 其第二步论证, 应该是 ().

A. 假设 $n = k$ 时命题成立, 再证 $n = k+1$ 时命题也成立
B. 假设 $n = 2k$ 时命题成立, 再证 $n = 2k+1$ 时命题也成立
C. 假设 $n = k$ 时命题成立, 再证 $n = k+2$ 时命题也成立
D. 假设 $n = 2k$ 时命题成立, 再证 $n = 2(k+1)$ 时命题也成立

268. 利用数学归纳法证明 “ $(n+1)(n+2)(n+3) \cdots (n+n) = 2^n \times 1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1) (n \in \mathbf{N}^*)$ ” 时, 从 “ $n = k$ ” 变到 “ $n = k+1$ ” 时, 左边应增添的因式是 ().

A. $2k+1$ B. $\frac{2k+1}{k+1}$ C. $\frac{(2k+1)(2k+2)}{k+1}$ D. $\frac{2k+3}{k+1}$

269. 利用数学归纳法证明 “ $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24} (n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*)$ ” 的过程中, 由 “ $n = k$ ” 变到 “ $n = k+1$ ” 时, 不等式左边的变化是 ().

A. 增加 $\frac{1}{2(k+1)}$

B. 增加 $\frac{1}{2k+1}$ 和 $\frac{1}{2k+2}$

C. 增加 $\frac{1}{2k+2}$ 并减少 $\frac{1}{k+1}$

D. 增加 $\frac{1}{2k+1}$ 和 $\frac{1}{2k+2}$, 并减少 $\frac{1}{k+1}$.

270. 利用数学归纳法证明不等式 “ $\sqrt{n^2+n} < n+1$ ” 时, 由 “假设 $n=k$ 时命题成立” 到 “当 $n=k+1$ 时”, 正确的步骤是 ().

A. $\sqrt{(k+1)^2+(k+1)} = \sqrt{k^2+3k+2} < \sqrt{k^2+4k+4} = k+2$

B. $\sqrt{(k+1)^2+(k+1)} = \sqrt{k^2+3k+2} = \sqrt{(k+2)^2-(k+2)} < k+2$

C. $\sqrt{(k+1)^2+(k+1)} = \sqrt{k^2+3k+2} < \sqrt{(k+2)^2} = k+2$

D. $\sqrt{(k+1)^2+(k+1)} = \sqrt{k^2+3k+2} = \sqrt{(k^2+k)+2k+2} < \sqrt{(k+1)^2+2k+2} = \sqrt{(k+2)^2-1} < \sqrt{(k+2)^2} = k+2$

271. 利用数学归纳证明不等式 “ $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2^n-1} < n (n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*)$ ” 的过程中, 由 “ $n=k$ ” 变到 “ $n=k+1$ ” 时, 左边增加了 ().

A. 1 项

B. k 项

C. 2^{k-1} 项

D. 2^k 项

272. 利用数学归纳法证明: $1+2+3+\cdots+2n=n(2n+1) (n \in \mathbf{N}^*)$.

273. 利用数学归纳法证明: $1^2-2^2+3^2-4^2+\cdots+(-1)^{n-1}n^2=(-1)^{n-1} \cdot \frac{n(n+1)}{2} (n \in \mathbf{N}^*)$.

274. 利用数学归纳法证明: $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} (n \in \mathbf{N}^*)$.

275. 利用数学归纳法证明: $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\frac{1}{4}[n(n+1)]^2 (n \in \mathbf{N}^*)$.

276. 利用数学归纳法证明: $(1 \times 2^2 - 2 \times 3^2) + (3 \times 4^2 - 4 \times 5^2) + \cdots + [(2n-1)(2n)^2 - 2n(2n+1)^2] = -n(n+1)(4n+3) (n \in \mathbf{N}^*)$.

277. 对于 $n \in \mathbf{N}^*$, 求证: $\frac{1}{2} \tan \frac{x}{2} + \frac{1}{2^2} \tan \frac{x}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} \tan \frac{x}{2^n} = \frac{1}{2^n} \cot \frac{x}{2^n} - \cot x (x \neq k\pi, n \in \mathbf{Z})$.

278. 对于 $n \in \mathbf{N}^*$, 求证: $\frac{1}{\cos \alpha \cos(\alpha+\beta)} + \frac{1}{\cos(\alpha+\beta) \cos(\alpha+2\beta)} + \cdots + \frac{1}{\cos[\alpha+(n-1)\beta] \cos(\alpha+n\beta)} = \frac{\sin n\beta}{\sin \beta \cos \alpha(\alpha+n\beta)}$.

279. 对于 $n \in \mathbf{N}^*$, 求证: $(2 \cos \theta - 1)(2 \cos 2\theta - 1)(2 \cos 2^2\theta - 1) \cdots (2 \cos 2^{n-1}\theta - 1) = \frac{2 \cos 2^n\theta + 1}{2 \cos \theta + 1}$ (其中 $\theta \neq 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}, k \in \mathbf{Z}$).

280. 对于 $n \in \mathbf{N}^*$, 求证: $\frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\sin 4x} + \cdots + \frac{1}{\sin 2^n x} = \cot x - \cot 2^n x (x \neq \frac{m\pi}{2^p}, m \in \mathbf{Z}, p \in \mathbf{N}^*)$.

281. 在数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_1=1, a_{n+1}=6(1+2+\cdots+n)+1 (n \in \mathbf{N}^*)$, 求证: $a_1+a_2+\cdots+a_n=n^3$.

282. 设 x_1, x_2 是关于 x 的方程 $2x^2+2nx-n=0 (n \in \mathbf{N}^*)$ 的两个根, 数列 $\{a_n\}$ 的通项 $a_n=x_1^2+x_2^2$, 试用数学归纳法证明: 对任何自然数 n , 都有 $\frac{1}{1+a_1} + \frac{1}{2+a_2} + \frac{1}{3+a_3} + \cdots + \frac{1}{n+a_n} = \frac{n(3n+5)}{4(n+1)(n+2)}$.

283. 利用数学归纳法证明: $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24} (n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*)$.

284. 利用数学归纳法证明: $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{3n+2} > 1 (n \in \mathbf{N}^*)$.
285. 利用数学归纳法证明: $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n^2} > 1 (n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*)$.
286. 利用数学归纳法证明: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2^n - 1} < n (n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*)$.
287. 已知 $n \in \mathbf{N}^*$, 求证: $|\sin \theta| \leq n |\sin \theta|$.
288. 已知 $n \in \mathbf{N}^*$, 求证: $\cot \frac{\theta}{2^n} - \cot \theta \geq n (0 < \theta < \pi)$.
289. 利用数学归纳法证明: $(1 + \frac{1}{n})^n < n (n \geq 3, n \in \mathbf{N}^*)$.
290. 利用数学归纳法证明: $\frac{2^n - 1}{2^n + 1} > \frac{n}{n+1} (n \geq 3, n \in \mathbf{N}^*)$.
291. 利用数学归纳法证明: $\frac{2^n + 4^n}{2} \geq 3^n (n \in \mathbf{N}^*)$.
292. 利用数学归纳法证明: $\frac{a^n + b^n}{2} \geq (\frac{a+b}{2})^n (a, b \in \mathbf{R}^+, n \in \mathbf{N}^*)$.
293. 利用数学归纳法证明: $(2n+1)(1-x)x^n < 1 - x^{2n+1} (0 < x < 1, n \in \mathbf{N}^*)$.
294. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 2, a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n}$, 求证: $\sqrt{2} < a_n < \sqrt{2} + \frac{1}{n}$.
295. 求证: $49^n + 16n - 1$ 能被 64 整除 ($n \in \mathbf{N}^*$).
296. 求证: $6^{2n} + 3^{n+2} + 3^n$ 是 11 的倍数 ($n \in \mathbf{N}^*$).
297. 求证: $7^n + 1$ 能被 8 整除, 其中 n 为正奇数.
298. 求证: $(3n+1) \times 7^n - 1$ 是 9 的倍数 ($n \in \mathbf{N}^*$).
299. 求证: $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{5n-1}$ 能被 31 整除 ($n \in \mathbf{N}^*$).
300. 求证: $(x+3)^n - 1$ 能被 $x+2$ 整除 ($n \in \mathbf{N}^*$).
301. 求证: $x^n - na^{n-1}x + (n-1)a^n$ 能被 $(x-a)^2$ 整除 ($n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*$).
302. 当 $n \in \mathbf{N}^*$ 时, 试用数学归纳法证明 $f(n) = n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n - 1$ 一定是整数.
303. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{a_n}{1+a_n}$.
- (1) 计算 a_2, a_3, a_4 ;
 - (2) 猜测 a_n 的表达式, 并用数学归纳法加以证明.
304. 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是 $a_n = \frac{1}{(n+1)^2} (n \in \mathbf{N}^*)$, 记 $b_n = (1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_n)$.
- (1) 写出数列 $\{b_n\}$ 的前三项;
 - (2) 猜想数列 $\{b_n\}$ 的通项公式, 并用数学归纳法加以证明;
 - (3) 令 $p_n = b_n - b_{n+1}$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} (p_1 + p_2 + \cdots + p_n)$ 的值.

305. 已知 $a > 0, b > 0$, 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = \frac{1}{2}(a + \frac{b}{a}), a_2 = \frac{1}{2}(a_1 + \frac{b}{a_1}), a_3 = \frac{1}{2}(a_2 + \frac{b}{a_2}), \dots, a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + \frac{b}{a_{n-1}})$.

(1) 求证: $\frac{a_n - \sqrt{b}}{a_n + \sqrt{b}} = (\frac{a - \sqrt{b}}{a + \sqrt{b}})^{2n}$;

(2) 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

306. 已知正数数列 $\{a_n\}$ 满足 $2\sqrt{S_n} = a_n + 1 (n \in \mathbf{N}^*)$.

(1) 求 a_1, a_2, a_3 ;

(2) 猜测 a_n 的表达式, 并证明你的结论.

307. 已知正数数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足 $S_n = \frac{1}{2}(a_n + \frac{1}{a_n})$, 求 a_n .

308. 已知正数数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = \frac{1}{2}(a_n + \frac{1}{a_n})$.

(1) 求 S_1, S_2, S_3 ;

(2) 写出 S_n 的表达式, 并证明你的结论;

(3) 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

309. 已知正数数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且对任何自然数 n , a_n 与 2 的等差中项等于 S_n 与 2 的正的等比中项.

(1) 写出数列 $\{a_n\}$ 的前三项;

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 (写出证明过程).

310. 已知 $n \in \mathbf{N}^*$, 比较 $\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \dots \times \frac{2n-1}{2n}$ 与 $\frac{1}{2\sqrt{n}}$ 的大小.

311. 已知 $n \in \mathbf{N}^*$, 比较 $(n+1)^2$ 与 3^n 的大小.

312. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 2, a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 3}{2a_n}$, 数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n = 3 - a_n^2$. 求证:

(1) $b_n < 0$;

(2) $|\frac{b_{n+1}}{b_n}| < \frac{1}{2}$;

(3) $|b_n| < (\frac{1}{2})^{n-1} (n \geq 2)$.

313. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足条件 $a_1 = 1, a_2 = r (r > 0)$, 且 $\{a_n a_{n+1}\}$ 是公比为 $q (q > 0)$ 的等比数列, 记 $b_n = a_{2n-1} + a_{2n} (n \in \mathbf{N}^*)$.

(1) 求出使不等式 $a_n a_{n+1} + a_{n+1} a_{n+2} > a_{n+2} a_{n+3}$ 成立的 q 的取值范围;

(2) 求 b_n 和 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{S_n}$, 其中 $S_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$.

314. 平面上有 n 条直线, 其中任何两条都不平行, 任何三条不共点, 求证这 n 条直线:

(1) 被分割成 n^2 段.

(2) 把平面分成 $\frac{1}{2}(n^2 + n + 2)$ 个部分.

315. 已知一个圆内有 n 条弦, 这 n 条弦中每两条都相交于圆内的一点, 且任何三条不共点, 求证: 这 n 条弦将圆面分割成 $f(n) = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n + 1$ 个区域.

316. 数列 $2, 0, 4, 0, 6, 0, \dots$ 的一个通项公式是 ().

- A. $a_n = \frac{n[1 + (-1)^n]}{2}$ B. $a_n = \frac{(n+1)[1 + (-1)^n]}{2}$
 C. $a_n = \frac{n[1 + (-1)^{n+1}]}{2}$ D. $a_n = \frac{(n+1)[1 + (-1)^{n+1}]}{2}$

317. 在数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_1 = 2$, $a_{n+1} = a_n + 2n$, 则 a_{100} 等于 ().

- A. 9900 B. 9902 C. 9904 D. 10100

318. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 4$, $a_2 = 2$, $a_3 = 1$, 又数列 $\{a_{n+1} - a_n\}$ 成等差数列, 则 a_n 等于 ().

- A. $n - 3$ B. $\frac{1}{2}(n^3 - 8n^2 + 13n + 2)$
 C. $\frac{1}{2}(2n^3 - 17n^2 + 33n - 10)$ D. $\frac{1}{2}(n^2 - 7n + 14)$

319. 求数列 $23, 2323, 232323, \dots$ 的通项公式 a_n .

320. 求数列 $\sqrt{11-2}, \sqrt{1111-22}, \dots, \sqrt{\underbrace{11\dots 11}_{2n} - \underbrace{22\dots 22}_n}, \dots$ 的前 n 项和 S_n .

321. 求证: $12, 1122, 111222, \dots$ 的每一项都是两个相邻整数之积.

322. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} = 2a_n + 3$, 且 $a_1 \neq -3$.

(1) 求证: 数列 $\{a_n + 3\}$ 成等比数列;

(2) 若 $a_1 = 5$, 求 a_n .

323. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = S_n + (n+1)$.

(1) 用 a_n 表示 a_{n+1} ;

(2) 求证: 数列 $\{a_n + 1\}$ 成等比数列;

(3) 求 a_n 和 S_n .

324. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = \frac{5}{6}$, 且关于 x 的二次方程 $a_{k-1}x^2 - a_kx + 1 = 0$ 的两根 α, β 满足 $3\alpha - \alpha\beta + 3\beta = 1$ ($k \geq 2, k \in \mathbb{N}^*$), 求证: 数列 $\{a_n - \frac{1}{2}\}$ 是等比数列, 并求出通项 a_n .

325. 求和: $\frac{1}{2} + (\frac{1}{3} + \frac{2}{3}) + (\frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4}) + \dots + (\frac{1}{100} + \frac{2}{100} + \frac{3}{100} + \dots + \frac{99}{100})$.

326. 将自然数按下表排列:

1	2	5	10	17	...
4	3	6	11	18	...
9	8	7	12	19	...
16	15	14	13	20	...
25	24	23	22	21	...
...

(1) 第 1 列中第 m 个数是多少? 第 1 行中第 n 个数是多少?

(2) 若 $m \geq n$, 则第 m 行 (自上而下)、第 n 列 (自左而右) 的数是多少? 若 $m < n$ 呢?

(3) 99 在上起第几行、左起第几列?

327. 已知数列 $1, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{1}{3}, \frac{2}{2}, \frac{3}{1}, \frac{2}{4}, \frac{3}{3}, \frac{4}{2}, \frac{3}{1}, \dots$.

- (1) 试按照规律, 将此数列分组;
- (2) 分数 $\frac{n}{m} (m, n \in \mathbf{N}^*, m, n \text{ 互质})$ 属于第几组第几项?
- (3) $\frac{17}{30}$ 是此数列的第几项?
- (4) 数列的第 50 项是多少?

328. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项之和 S_n 与 a_n 之间满足 $2S_n^2 = 2a_n S_n - a_n (n \geq 2)$, 且 $a_1 = 2$.

- (1) 求证: 数列 $\{\frac{1}{S_n}\}$ 是以 2 为公差的等差数列;
- (2) 求 S_n 和 a_n .

329. 在数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_1 = 1, a_n = \frac{2S_n^2}{2S_n - 1} (n \geq 2)$.

- (1) 求证: $\{\frac{1}{S_n}\}$ 成等差数列;
- (2) 求通项 a_n 的表达式.

330. 已知数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的通项公式分别是 $a_n = 2^n, b_n = 3n + 2$, 将它们的公共项由小到大排成数列 $\{c_n\}$, 求数列 $\{c_n\}$ 的通项公式.

331. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} = 3^n a_n$, 且 $a_1 = 1$, 求 a_n .

332. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = \frac{1}{2}, S_n = n^2 a_n (S_n \text{ 是前 } n \text{ 项之和})$, 求 a_n .

333. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1, a_n + a_{n+1} = -2n$.

- (1) 求证: 数列 $\{a_{2n}\}$ 与 $\{a_{2n-1}\}$ 均是以 -2 为公差的等差数列;
- (2) 试用 n 表示和式 $M = a_1 a_2 - a_2 a_3 + \dots + (-1)^{k+1} \cdot a_k a_{k+1} + \dots + a_{2n-1} a_{2n} - a_{2n} a_{2n+1}$.

334. 是否可找到 $2n + 1$ 个连续自然数 ($n \in \mathbf{N}^*$), 使得前 $n + 1$ 个数的平方和等于末 n 个数的平方和? 此时中间数可取什么?

335. 是否存在常数 k 和等差数列 $\{a_n\}$, 使得 $ka_n^2 - 1 = S_{2n} - S_{n+1}$ 对任何 $n \in \mathbf{N}^*$ 都成立 (S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 前 n 项之和)?

336. 在直角 $\triangle ABC$ 中, 已知 $\angle C = 90^\circ, AC = b, AB = c$, 将斜边 AB 分成 $n + 1$ 等份, 记分点为 P_1, P_2, \dots, P_n , 连接 CP_1, CP_2, \dots, CP_n , 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} [(CP_1)^2 + (CP_2)^2 + \dots + (CP_n)^2]$.

337. 已知各项为正数的数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n^2 \leq a_n - a_{n+1}$, 求证 $a_n < \frac{1}{n}$.

338. 已知各项为正数的数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1$, 求证: $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 \geq \frac{1}{n} (n \geq 2)$.

339. 已知 $\frac{1}{2} \leq a_k \leq 1 (k \in \mathbf{N}^*)$, 求证: $a_1 a_2 \dots a_n + (1 - a_1)(1 - a_2) \dots (1 - a_n) \geq \frac{1}{2^{n-1}}$.

340. 已知 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 是满足 $(1 + \sqrt{2})^n = a_n + b_n \sqrt{2}$ 的两个无穷数列.

- (1) 推测用 a_n, b_n 表示 $(1 - \sqrt{2})^n$ 的表达式, 并加以证明;
- (2) 求: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n}$.