1. 已知复数 z 满足 $\dfrac{\sqrt{3}+\mathrm{i}}{z}=\mathrm{i}$, i 为虚数单位, 则 $z=$________.

2. 若双曲线方程为 $x^2-\dfrac{y^2}{16}=1$, 则该双曲线的渐近线方程为________.

3. 在 $(1+2x)^6$ 的二项展开式中, x^5 项的系数为________.

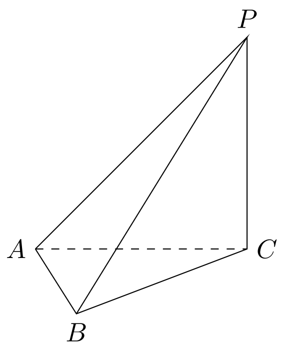
4. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{n+1}+3^n}{2^n+3^{n+1}}=$________.

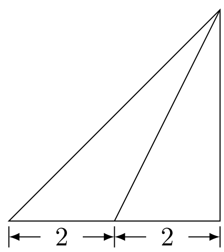
5. 若关于 x,y 的方程组 $\begin{cases}x+my-1=0,\\ 2x-4y+n=0,\end{cases}$ $(m,n\in\mathbf{R})$ 有无穷多组解, 则 mn 的值为________.

6. 某学生在上学的路上要经过 2 个路口, 假设在各路口是否遇到红灯是相互独立的, 遇到红灯概率都是 $\dfrac{1}{3}$, 则这名学生在上学路上到第二个路口时第一次遇到红灯的概率是________.

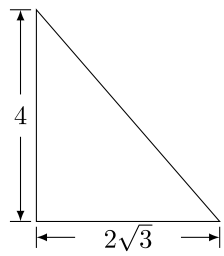
7. 若等差数列 $\{x_n\}$ 的公差 3, 则 $x_1,x_2,x_3,\cdots,x_9$ 的方差为________.

8. 三棱锥 $P-ABC$ 中, 底面 ABC 是锐角三角形, PC 垂直平面 ABC, 若其三视图中主视图和左视图如图所示, 则棱 PB 的长为________.





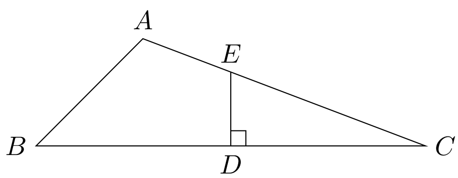
主视图



左视图

9. 设变量 x、y 满足条件 $\begin{cases}x\geq 1,\\ x-y+2\leq 0,\\ x+y-7\leq 0,\end{cases}$ 则 $z=-2x+y$ 的取值范围为________.

10. 如图所示在 $\triangle ABC$ 中, BC 边上的中垂线分别交 BC、AC 于点 D、E, 若 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BC}=6$, $|\overrightarrow{AB}|=2$, 则 $|\overrightarrow{AC}|=$________.



11. 设 $y=f^{-1}(x)$ 是函数 $f(x)=\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{8}\sin x+\dfrac{\pi}{8}$, $x\in[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}]$ 的反函数, 则函数 $y=f(x)+f^{-1}(x)$ 的最小值等于________.

12. 函数 $f(x)=x,g(x)=x^2-x+2$. 若存在 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in[0,\frac{9}{2}]$, 使得 $f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_{n-1})+g(x_n)=g(x_1)+g(x_2)+...+g(x_{n-1})+f(x_n)$, 则 n 的最大值为________.

13. 下列函数中既是奇函数, 又在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递减的函数为 (　　).

A. $y=\sqrt{x}$　　B. $y=\log_{\frac{1}{2}}x$　　C. $y=-x^3$　　D. $y=x+\dfrac{1}{x}$

14. 参数方程 $\begin{cases}x=3t^2+4,\\ y=t^2-2,\end{cases}$ (t 为参数, 且 $0\le t\le 3$) 所表示的曲线为 (　　).

A. 直线　　B. 圆弧　　C. 线段　　D. 双曲线的一支

15. 将函数 $y=\sin(2x-\frac{\pi}{3})$ 图像上的点 $P(\frac{\pi}{4},t)$ 向左平移 $s(s>0)$ 个单位长度得到点 P', 若 P' 位于函数 $y=\sin 2x$ 的图像上, 则 (　　).

A. $t=\frac{1}{2}$, s 的最小值为 $\frac{\pi}{6}$　　B. $t=\frac{\sqrt{3}}{2}$, s 的最小值为 $\frac{\pi}{6}$

C. $t=\frac{1}{2}$, s 的最小值为 $\frac{\pi}{3}$　　D. $t=\frac{\sqrt{3}}{2}$, s 的最小值为 $\frac{\pi}{3}$

16. 已知以下三个陈述句:

p: 存在 $a\in\mathbf{R}$ 且 $a\neq 0$, 对任意的 $x\in\mathbf{R}$, 均有 $f(2^{x+a})<f(2^x)+f(a)$ 恒成立;

q_1: 函数 $y=f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的减函数, 且对任意的 $x\in\mathbf{R}$, 都有 $f(x)>0$;

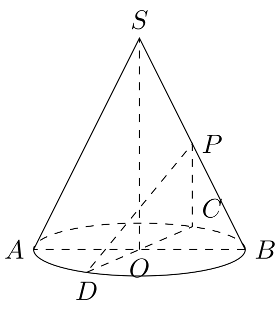
q_2: 函数 $y=f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的增函数, 存在 $x_0<0$, 使得 $f(x_0)=0$;

用这三个陈述句组成两个命题, 命题 S: "若 q_1, 则 p"; 命题 T: "若 q_2, 则 p". 关于 S,T 以下说法正确的是 (　　).

A. 只有命题 S 是真命题　　B. 只有命题 T 是真命题

C. 两个命题 S,T 都是真命题　　D. 两个命题 S,T 都不是真命题

17. 如图, S 是圆锥的顶点, O 是底面圆的圆心, AB、CD 是底面圆的两条直径, 且 $AB\perp CD$, $SO=4$, $OB=2$, P 为 SB 的中点.



(1) 求圆锥的体积;

(2) 求异面直线 SA 与 PD 所成角的大小 (结果用反三角函数值表示).

18. 已知函数 $f(x)=\cos x(\sin x+\cos x)-\frac{1}{2}$.

(1) 若 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, 且 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$, 求 $f(\alpha)$ 的值;

(2) 求函数 $f(x)$ 的最小正周期, 及函数 $f(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上的递减区间.

19. 新冠肺炎疫情造成医用防护服紧缺, 某地政府决定为防护服生产企业 A 公司扩大生产提供 $x(x \in [0,10])$(万元) 的专项补贴, 并以每套 80 元的价格收购其生产的全部防护服. A 公司在收到政府 x(万元) 补贴后, 防护服产量将增加到 $t = k \cdot (6 - \dfrac{12}{x+4})$(万套), 其中 k 为工厂工人的复工率 ($k \in [0.5, 1]$). A 公司生产 t 万件防护服还需投入成本 $20 + 8x + 50t$(万元).

(1) 将 A 公司生产防护服的利润 y(万元) 表示为补贴 x(万元) 的函数 (利润不包含政府补贴);

(2) 若对任意的 $x \in [0,10]$(万元), A 公司都不会产生亏损, 求复工率 k 的取值范围.

20. 已知抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点为 F, 直线 l 交抛物线于不同的 A、B 两点.

(1) 若直线 l 的方程为 $y = x - 1$, 求线段 AB 的长;

(2) 若直线 l 经过点 $P(-1, 0)$, 点 A 关于 x 轴的对称点为 A', 求证: A'、F、B 三点共线;

(3) 若直线 l 经过点 $M(8, -4)$, 抛物线上是否存在定点 N, 使得以线段 AB 为直径的圆恒过点 N? 若存在, 求出点 N 的坐标, 若不存在, 请说明理由.

21. 无穷数列 $\{a_n\}(n \in \mathbf{N}^*)$, 若存在正整数 t, 使得该数列由 t 个互不相同的实数组成, 且对于任意的正整数 n, $a_{n+1}, a_{n+2}, \cdots, a_{n+t}$ 中至少有一个等于 a_n, 则称数列 $\{a_n\}$ 具有性质 T, 集合 $P = \{p | p = a_n,\ n \in \mathbf{N}^*\}$.

(1) 若 $a_n = (-1)^n$, $n \in \mathbf{N}^*$, 判断数列 $\{a_n\}$ 是否具有性质 T;

(2) 数列 $\{a_n\}$ 具有性质 T, 且 $a_1 = 1$, $a_4 = 3$, $a_8 = 2$, $P = \{1, 2, 3\}$, 求 a_{11} 与 a_{14} 的值;

(3) 数列 $\{a_n\}$ 具有性质 T, 记集合 $B = \{m | a_m = a_1,\ m \in \mathbf{N}^*\}$, 将集合 B 中的所有元素按从小到大的顺序排列, 得到数列 $\{i_n\}$, 记 $b_n = i_{n+1} - i_n$, $n \in \mathbf{N}^*$. 证明: 若数列 $\{b_n\}$ 具有性质 T, 则数列 $\{b_n\}$ 是常数列.