

1. (000047) 方程 $(x-1)(x-2)(x-3) = 0$ 的三个根 1、2、3 将数轴划分为四个区间, 即 $(-\infty, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 3)$, $(3, +\infty)$. 试在这四个区间上分别考察 $(x-1)(x-2)(x-3)$ 的符号, 从而得出不等式 $(x-1)(x-2)(x-3) > 0$ 与 $(x-1)(x-2)(x-3) < 0$ 的解集.

一般地, 对 $x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{R}$, 且 $x_1 \leq x_2 \leq x_3$, 试分别求不等式 $(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) > 0$ 与 $(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) < 0$ 的解集 (提示: x_1, x_2, x_3 相互之间可能相等, 需要分情况讨论).

2. (000048) 填空题:

(1) 若 $x^3 = 5$, 则 $x =$ _____; 若 $3^x = 5$, 则 $x =$ _____.

(2) 将 $\sqrt[4]{a\sqrt[3]{a}}$ ($a > 0$) 化成有理数指数幂的形式为 _____.

(3) 若 $\log_8 x = -\frac{2}{3}$, 则 $x =$ _____.

(4) 若 $\log_a b \cdot \log_5 a = 3$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$), 则 $b =$ _____.

3. (000049) 选择题:

(1) 若 $\lg a$ 与 $\lg b$ 互为相反数, 则有 ().

A. $a + b = 0$

B. $ab = 1$

C. $\frac{a}{b} = 1$

D. 以上答案均不对

(2) 设 $a > 0$, 下列计算中正确的是 ().

A. $a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{3}{2}} = a$

B. $a^{\frac{2}{3}} \div a^{\frac{3}{2}} = a$

C. $a^{-4} \cdot a^4 = 0$

D. $(a^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}} = a$

4. (001286) $\frac{\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{\frac{1}{3}}}}}}{\sqrt{27\sqrt{\frac{1}{3}}}}$ 用 3 的有理数指数幂表示为 _____.

5. (001292) 已知 a, b 是实数, 函数 $f(x) = a \cdot b^x$, 且 $f(4) = 648$, $f(5) = 1944$, 求 $f(9/2)$.

6. (010110) 用有理数指数幂的形式表示下列各式 (其中 $a > 0, b > 0$):

(1) $a^{\frac{1}{3}} a^{\frac{1}{4}}$;

(2) $\sqrt[3]{a\sqrt{a}}$;

(3) $(a^{\frac{1}{4}} b^{-\frac{3}{8}})^8$;

(4) $(\frac{a^{-3}b^4}{\sqrt{b}})^{-\frac{1}{3}}$.

7. (001287) 已知 m, n 是有理数, 则以下各说法中, 正确的有 _____.

(1) 对一切 m, n 均成立 $2^m 2^n = 2^{m+n}$

(2) 存在 m, n 使得 $2^m 2^n = 2^{mn}$

(3) 存在 m, n 使得 $2^m + 2^n = 2^{m+n}$

(4) 存在 m, n 使得 $(2^m)^n = 2^{m^n}$

8. (000058) 已知 $a > 1, b > 0$. 求证: 对任意给定的实数 k , $a^{2b+k} - a^{b+k} > a^{b+k} - a^k$.

9. (003662) 已知常数 $a > 0$, 函数 $f(x) = \frac{2^x}{2^x + ax}$ 的图像经过点 $P(p, \frac{6}{5})$, $Q(q, -\frac{1}{5})$. 若 $2^{p+q} = 36pq$, 则 $a =$ _____.

10. (005621) 若 $x = t^{\frac{1}{t-1}}$, $y = t^{\frac{t}{t-1}}$ ($t > 0, t \neq 1$), 则 x, y 之间的关系是 ().

A. $y^x = x^{\frac{1}{y}}$

B. $y^{\frac{1}{x}} = x^y$

C. $y^x = x^y$

D. $x^x = y^y$

11. (010114) 设 $a > b > 0$, 求证: $a^a b^b > (ab)^{\frac{a+b}{2}}$.

12. (001296) 求值: $\log_2 0.5 =$ _____, $\log_9 27 =$ _____, $3^{1+\log_3 5} =$ _____.

13. (000053) 已知 $m = \log_2 10$, 求 $2^m - m \lg 2 - 4$ 的值.

14. (000054) 填空题:

(1) 若 $4^x = 2^{-\frac{1}{2}}$, $4^y = \sqrt[3]{32}$, 则 $2x - 3y =$ _____.

(2) 若 $\log_3(\log_4 x) = 1$, 则 $x =$ _____.

(3) 若 $3^a = 7^b = 63$, 则 $\frac{2}{a} + \frac{1}{b}$ 的值为 _____.

15. (000074) $\log_2 3$ 是有理数吗? 请证明你的结论.

16. (005610) 已知 $x = a^{\frac{1}{1-\log_a y}}$, $y = a^{\frac{1}{1-\log_a z}}$ 求证: $z = a^{\frac{1}{1-\log_a x}}$.

17. (005650) 已知不相等的两个正数 a, b 满足 $a^{\lg ax} = b^{\lg bx}$, 求 $(ab)^{\lg abx}$ 的值.

18. (001353) 解方程: $x^{\log_2 x} = 32x^4$.

19. (001300) 用不含对数的式子表示:

(1) 若 $\log_7 2 = a$, 则 $\log_7 14 =$ _____, $\log_7 \sqrt{3.5} =$ _____.

(2) 若 $\log_3 2 = a$, 则 $\log_3 4 =$ _____, $\log_3 \frac{2}{3} =$ _____.

(3) 若 $\lg 2 = a$, 则 $\lg 25 =$ _____.

20. (001305) 计算下列各式 (要有必要的过程):

(1) $\frac{1}{2} \log_{20} 45 - \log_{20} 30;$

(2) $\frac{\lg 3 + \frac{2}{5} \lg 9 + \frac{3}{5} \lg \sqrt{27} - \lg \sqrt{3}}{\lg 81 - \lg 27};$

(3) $\lg^2 2 + \lg^2 5 + 2 \lg 2 \lg 5;$

(4) $\lg^3 2 + \lg^3 5 + 3 \lg 2 \lg 5;$

(5) $\lg 4 + 2\sqrt{\lg^2 6 - \lg 6^2 + 1} + \lg 9.$

21. (001307) 已知 $a = \log_3 36$, $b = \log_4 36$. 求 $\frac{2}{a} + \frac{1}{b}$. (提示: 你学过实数指数幂的运算律的)

22. (003828) 已知正数 x, y 满足 $\ln x + \ln y = \ln(x+y)$, 则 $2x+y$ 的最小值是 _____.

23. (009482) 求下列各式的值:

(1) $\log_8 \frac{1}{4}$;

(2) $\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a$ (a, b, c 均为不等于 1 的正数);

(3) $3^{2+\log_9 4}$;

(4) $\frac{\log_5 2 \times \log_7 9}{\log_5 \frac{1}{3} \times \log_7 2}$.

24. (010125) 科学家以里氏震级来度量地震的强度, 若设 I 为地震时所散发出来的相对能量程度, 则里氏震级度量 r 可定义为 $r = \frac{2}{3} \lg I + 2$. 求 7.8 级地震和 6.9 级地震的相对能量比值. (结果精确到个位)

25. (001308) [证明对数的换底公式] 若 $a, b, N > 0, a \neq 1, b \neq 1$, 则

$$\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a}.$$

26. (000060) 已知 a, b 及 c 是不为 1 的正数, 且 $\lg a + \lg b + \lg c = 0$. 求证: $a^{\frac{1}{\lg b} + \frac{1}{\lg c}} \cdot b^{\frac{1}{\lg c} + \frac{1}{\lg a}} \cdot c^{\frac{1}{\lg a} + \frac{1}{\lg b}} = \frac{1}{1000}$.

27. (001309) (1) 若 $\lg 3 = a, \lg 2 = b$, 则 $\log_6 12 =$ _____.

(2) 若 $\log_{\sqrt{3}} 2 = a$, 则 $\log_{12} 3 =$ _____.

28. (001312) 计算下列各式 (要有必要的过程):

(1) $\log_3 5 \cdot \log_5 7 \cdot \log_7 9$;

(2) $(\log_4 3 + \log_8 3)(\log_3 2 + \log_9 2)$;

(3) $2\log_{100} 5 - \sqrt{1 - 2\lg 2 + \lg^2 2}$;

(4) $\frac{\log_5 \sqrt{2} \cdot \log_7 9}{\log_5 \frac{1}{3} \cdot \log_7 \sqrt[3]{4}}$;

(5) $2^{\log_4 (\sqrt{3}-2)^2} + 3^{\log_9 (\sqrt{3}+2)^2}$;

(6) $\frac{\log_{36} 4}{\log_{18} 6} + \log_6^2 3$.

29. (001314) 若 $2^a = 5^b = 100$, 求 $\frac{a+b}{ab}$ 的值.

30. (001316) 若 $\log_2 3 = a, \log_3 7 = b$, 试用 a, b 表示 $\log_{42} 56$.

31. (001317) 不相等的两个正数 a, b 与另一个正数 x 满足 $a^{\lg(ax)} = b^{\lg(bx)}$, 求 abx 的值.

32. (002963) 若 $\log_2 3 = a, 3^b = 7$, 用 a, b 表示 $\log_{3\sqrt{7}} 2$, 则 $\log_{3\sqrt{7}} 2 =$ _____.

33. (005013) 若 $0 < a < 1, 0 < b < 1$, 则 $\log_a b + \log_b a$ 的最小值为_____.

34. (005014) 若 $a > 1, 0 < b < 1$, 则 $\log_a b + \log_b a$ 的最大值为_____.

35. (005016) 若 a, b, c 均大于 1, 且 $\log_a c \cdot \log_b c = 4$, 则下列各式中, 一定正确的是 ().

A. $ac \geq b$

B. $ab \geq c$

C. $bc \geq a$

D. $ab \leq c$

36. (005123) 已知 $a > 1$ 且 $a^{\lg b} = \sqrt[4]{2}$, 求 $\log_2(ab)$ 的最小值.

37. (005678) 已知 $a^2 + b^2 = c^2$, 求证 $\log_{(c+b)} a + \log_{(c-b)} a = 2 \log_{(c+b)} a \cdot \log_{(c-b)} a$.