1. (000010) 证明: 若梯形的对角线不相等, 则该梯形不是等腰梯形.

2. (000017) 证明: $\sqrt[3]{2}$ 是无理数.

3. (000038) 证明: 若 $x > -1$, 则 $x + \dfrac{1}{x+1} \geq 1$, 并指出等号成立的条件.

4. (000982) 模仿讲义中的真值表, 列出下列每组逻辑运算的真值表并回答各问题:

(1) "非 (P 且 Q)" 与 "(非 P) 或 (非 Q)" (De Morgan 律之一);

P	Q	P 且 Q	非 (P 且 Q)	非 P	非 Q	(非 P) 或 (非 Q)
T	T					
T	F					
F	T					
F	F					

(2) "P 且 (Q 且 R)" 与 "(P 且 Q) 且 R"(模仿 (1) 完成); 你的结论是什么? 如果把两个运算中的 "且" 都换成 "或", 结论 (毋需证明) 又是什么?

(3) "P 且 (Q 或 R)" 与 "(P 且 Q) 或 (P 且 R)"(模仿 (1) 完成); 你的结论是什么? 如果把两个运算中的 "且" 都换成 "或", 同时把 "或" 都换成 "且", 结论 (毋须证明) 又是什么?

5. (000983) 用反证法证明如下命题:

(1) 已知 n 是整数. 如果 3 整除 n^3, 则 3 整除 n(提示: 讨论 $n = 3k, 3k+1, 3k+2$, 其中 k 是整数);

(2) 如果实数 x 满足 $x^{101} - 4x^2 + 8x - 1 = 0$, 则 $x > 0$;

(3) $\sqrt[3]{3}$ 是无理数 (提示: 可借鉴讲义上 $\sqrt{6}$ 是无理数的证明方法);

(4*) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ 是无理数.

6. (000987) 已知实数 $t \neq 0$. 证明: "$x = t$ 是方程 $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ 的根" 的充分必要条件是 "$x = \dfrac{1}{t}$ 是方程 $dx^3 + cx^2 + bx + a = 0$ 的根".

7. (000988) 已知 a, b, c 均为实数. 证明: 这三个数中 "任意两数之和大于第三个数" 的充分必要条件是 "任意两数之差小于第三个数".

8. (001000) 设 $A = \{n|\ n = 3k+1, k \in \mathbf{Z}^+\}$, $B = \{n|\ n = 3k-2, k \in \mathbf{Z}^+\}$.

(1) 集合 A 与集合 B 是相等的还是有真包含关系还是没有任何包含关系?

(2) 证明你的结论.

9. (001001) 证明或否定: $\{y|y \geq 0\} = \{y|y = x^2, x \in \mathbf{R}\}$.

10. (001002) 设 a 是一个实数, 集合 $A = \{x|\ x < 2\}$, $B = \{x|\ x \leq a\}$, 且 $A \subseteq B$.

(1) 实数 a 的取值范围为____________________;

(2) 试证明 (1) 的结论.

11. (001017) 设 A, B 是两个集合, 求证: "$A \cap B = A$" 当且仅当 "$A \subseteq B$".(用文氏图画一下并不算证明)

12. (001087) 证明: 若 $a > b$, $c \in \mathbf{R}$, $d < 0$, 则 $(a-c)d < (b-c)d$.

13. (001088) 证明: 若 $a_1 > b_1 > 0, a_2 > b_2 > 0, a_3 > b_3 > 0$, 则 $a_1a_2a_3 > b_1b_2b_3$.

14. (001089) 证明: 若 $a > b > 0$, $c > d > 0$, 则 $\dfrac{1}{ac} < \dfrac{1}{bd}$.

15. (001091) 证明:

(1) 若 $a > b$, 则 $a^3 > b^3$;

(2)(选做) 若 $a > b$, 则 $a^5 > b^5$.

16. (001094)(1) 证明或否定: "$|f(x)| > g(x)$" 和 "$f(x) > g(x)$ 且 $-f(x) > g(x)$" 等价;

(2) 证明或否定: "$|f(x)| < g(x)$" 和 "$f(x) < g(x)$ 且 $-f(x) < g(x)$" 等价.

17. (001095) 证明或否定: "$\sqrt{f(x)} > g(x)$" 和 "$\begin{cases} f(x) > g^2(x), \\ g(x) \geq 0, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) < 0 \end{cases}$" 同解.

18. (001096) 利用绝对值的三角不等式 $|a+b| \leq |a| + |b|$, 证明:

(1) 对任意 $x, y \in \mathbf{R}$, $|x-y| \geq |x| - |y|$;

(2) 对任意 $x, y \in \mathbf{R}$, $|x-y| \geq ||x| - |y||$.

19. (001099) 已知常数 $\varepsilon > 0$, 证明存在实常数 N, 使得当正整数 $n > N$ 时, $\left|\dfrac{n}{2n+3} - \dfrac{1}{2}\right| < \varepsilon$.

20. (001123) 试确定实常数 k 使得 $a^2 + b^2 + c^2 \geq k(a+b+c)^2 \geq ab + bc + ca$ 对任意的 $a, b, c \in \mathbf{R}$ 成立, 并证明该不等式.

21. (001124) 设 $a, b, c, d > 0$.

(1) 利用三元的基本不等式 "$x, y, z > 0$ 时, $x^3 + y^3 + z^3 \geq 3xyz$", 证明: $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 \geq abc + bcd + cda + dab$;

(2) 该不等式能否加强为 $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 \geq k(abc + bcd + cda + dab)$, 其中 $k = 1.0001$? 为什么?

(3) 利用三元的基本不等式 "$x, y, z > 0$ 时, $x^3 + y^3 + z^3 \geq 3xyz$", 证明: $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 \geq \dfrac{3\sqrt[3]{2}}{2}(abc + bcd)$.

22. (001134) 已知 $x, y \in \mathbf{R}$, 用比较法证明: $x^2 + y^2 \geq 4(x+y) - 8$.

23. (001135) 已知 $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$, 利用比较法证明:

(1) 若 $a > b \geq 1$, 证明: $f(a) > f(b)$;

(2) 若 $0 < a < b \leq 1$, 证明: $f(a) > f(b)$.

24. (001136) 已知 $a < b < 0$, 用分析法证明: $\dfrac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} < \dfrac{a+b}{a-b}$.

25. (001137) 已知 $a, b, c \in \mathbf{R}^+$, 证明: $a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b) \geq 6abc$.

26. (001138) 已知 a, b, c 是不全相等的正数. 证明: $\dfrac{a+b}{c} + \dfrac{b+c}{a} + \dfrac{c+a}{b} > 6$.

27. (001139) 已知 $x, y \in \mathbf{R}^+$ 且 $x + y > 2$, 用反证法证明: $\dfrac{1+y}{x}$ 与 $\dfrac{1+x}{y}$ 中至少有一个小于 2.

28. (001141) 已知 $x, y \in \mathbf{R}$, 证明: $x^2+5y^2+4xy+5 \geq 2x+8y$.

29. (001142) 已知 $g(x)=x^3-3x$.

(1) 若 $a>b \geq 1$, 证明: $g(a)>g(b)$;

(2) 若 $-1 \leq a<b \leq 1$, 证明: $g(a)>g(b)$.

30. (001147) 已知 $n \in \mathbf{Z}$, $n \geq 3$. 证明: $3^n+4^n+5^n \leq 6^n$, 并求出等号成立的条件.

31. (001148) 已知 $a, b, c \in \mathbf{R}^+$, $a+b+c=3$. 证明:

(1) $a^2+b^2+c^2 \geq 3$;

(2) $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c} \geq 3$;

(3) $a^4+b^4+c^4 \geq 3$;

(4) (选做) 对一切 $n \in \mathbf{N}$, $a^{2^n}+b^{2^n}+c^{2^n} \geq 3$.

32. (001150)(1) 设 $a+b+c=6$, 且 $a, b, c \in(0,3)$, 证明: $(3-a)(3-b)(3-c) \leq 1$;

(2) 已知三角形的面积可以用 Heron 公式 $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ 来计算, 其中 p 是半周长, 即 $p=\dfrac{a+b+c}{2}$. 据此求周长为 6 的三角形的面积的最大值.

33. (002700) 集合 $C=\{x | x=\dfrac{k}{2} \pm \dfrac{1}{4},\ k \in \mathbf{Z}\}, D=\{x | x=\dfrac{k}{4},\ k \in \mathbf{Z}\}$, 试判断 C 与 D 的关系, 并证明.

34. (002709) 设函数 $f(x)=\lg (\dfrac{2}{x+1}-1)$ 的定义域为集合 A, 函数 $g(x)=\sqrt{1-|x+a|}$ 的定义域为集合 B.

(1) 当 $a=1$ 时, 求集合 B.

(2) 问: $a \geq 2$ 是 $A \cap B=\varnothing$ 的什么条件 (在 "充分非必要条件、必要非充分条件、充要条件、既非充分也非必要条件" 中选一)? 并证明你的结论.

35. (002758)(1) 比较 $1+a^2$ 与 $\dfrac{1}{1-a}$ 的大小;

(2) 设 $a>0,\ a \neq 1, t>0$, 比较 $\dfrac{1}{2} \log_a t$ 和 $\log_a \dfrac{t+1}{2}$ 的大小, 证明你的结论.

36. (004997) 用比较法证明以下各题:

(1) 已知 $a>0, b>0$, 求证: $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b} \geq \dfrac{2}{\sqrt{ab}}$;

(2) 已知 $a>0, b>0$, 求证: $\dfrac{b}{\sqrt{a}}+\dfrac{a}{\sqrt{b}} \geq \sqrt{a}+\sqrt{b}$;

(3) 已知 $a>0, b>0$, 求证: $a^2+b^2 \geq(a+b) \sqrt{ab}$;

(4) 已知 $0<x<1$, 求证: $\dfrac{a^2}{x}+\dfrac{b^2}{1-x} \geq(a+b)^2$.

37. (005034) 利用 $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca(a, b, c \in \mathbf{R})$, 证明: 若 $a>0, b>0, c>0$, 则 $\dfrac{a^2}{b^2}+b^2c^2+c^2a^2a+b+c \geq abc$.

38. (005035) 利用 $a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca(a,b,c\in\mathbf{R})$, 证明: 若半径为 1 的圆内接 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{1}{4}$, 二边长分别为 a,b,c, 则

(1) $abc=1$;

(2) $\sqrt{b}+\sqrt{c}<\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$.

39. (005036) 利用 $a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca(a,b,c\in\mathbf{R})$, 证明: 若 $a,b,c>0$, $n\in\mathbf{N}$, $f(n)=\lg\frac{a^n+b^n+c^n}{3}$, 则 $2f(n)\le f(2n)$.

40. (005037) 利用放缩法并结合公式 $ab\le(\frac{a+b}{2})^2$, 证明: $\lg 9\cdot\lg 11<1$.

41. (005038) 利用放缩法并结合公式 $ab\le(\frac{a+b}{2})^2$, 证明: $\log_a(a-1)\cdot\log_a(a+1)<1(a>1)$.

42. (005039) 利用放缩法并结合公式 $ab\le(\frac{a+b}{2})^2$, 证明: 若 $a>b>c$, 则 $\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}+\frac{4}{c-a}\ge 0$.

43. (005040) 利用放缩法证明: $\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\frac{1}{n+4}+\cdots+\frac{1}{n^2}>1(n\in\mathbf{N},\ n\ge 2)$.

44. (005041) 利用放缩法证明: $\frac{1}{2}\le\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}<1(n\in\mathbf{N})$.

45. (005042) 利用放缩法证明: 已知 $a>0$, $b>0$, $c>0$, 且 $a^2+b^2=c^2$, 求证: $a^n+b^n<c^n(n\ge 3,\ n\in\mathbf{N})$.

46. (005043) 利用拆项法证明: 若 $x>y$, $xy=1$, 则 $\frac{x^2+y^2}{x-y}\ge 2\sqrt{2}$.

47. (005044) 利用拆项法证明: $\frac{1}{2}(a^2+b^2)+1\ge\sqrt{a^2+1}\cdot\sqrt{b^2+1}$.

48. (005045) 利用拆项法证明: 若 $a>0$, $b>0$, $c>0$, 则 $2(\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab})\le 3(\frac{a+b+c}{3}-\sqrt[3]{abc})$.

49. (005046) 利用拆项法证明: $2(\sqrt{n+1}-1)<1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}(n\in\mathbf{N})$.

50. (005047) 利用逆代法证明: 若正数 x,y 满足 $x+2y=1$, 则 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\ge 3+2\sqrt{2}$.

51. (005048) 利用逆代法证明: $\frac{1}{\sin^2\alpha}+\frac{3}{\cos^2\alpha}\ge 4+2\sqrt{3}$.

52. (005049) 利用逆代法证明: 若 $x,y>0$, a,b 为正常数, 且 $\frac{a}{x}+\frac{a}{y}=1$, 则 $x+y\ge(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$.

53. (005050) 利用判别式法证明: $\frac{1}{3}\le\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}\le 3$.

54. (005051) 利用判别式法证明: 若关于 x 的不等式 $(a^2-1)x^2-(a-1)x-1<0(a\in\mathbf{R})$ 对任意实数 x 恒成立, 则 $-\frac{3}{5}<a\le 1$.

55. (005052) 利用函数的单调性证明: 若 $x>0$, $y>0$, $x+y=1$, 则 $(x+\frac{1}{x})(y+\frac{1}{y})\ge\frac{25}{4}$.

56. (005053) 利用函数的单调性证明: 若 $0<a<\frac{1}{k}(k\ge 2,k\in\mathbf{N})$, 且 $a^2<a-b$, 则 $b<\frac{1}{k+1}$.

57. (005054) 利用三角换元法证明: 若 $a^2+b^2=1$, 则 $a\sin x+b\cos x\le 1$.

58. (005055) 利用三角换元法证明: 若 $|a|<1$, $|b|<1$, 则 $|ab\pm\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}|\le 1$.

59. (005056) 利用三角换元法证明: 若 $x^2+y^2\le 1$, 则 $-\sqrt{2}\le x^2+2xy-y^2\le\sqrt{2}$.

60. (005057) 利用三角换元法证明: 若 $|x|\le 1$, 则 $(1+x)^n+(1-x)^n\le 2^n$.

61. (005058) 利用三角换元法证明: 若 $a>0$, $b>0$, 且 $a-b=1$, 则 $0<\dfrac{1}{a}(\sqrt{a}-\dfrac{1}{\sqrt{a}})(\sqrt{b}+\dfrac{1}{\sqrt{b}})<1$.

62. (005059) 利用三角换元法证明: $0<\sqrt{1+x}-\sqrt{x}\le 1$.

63. (005060) 试构造几何图形证明: 若 $f(x)=\sqrt{1+x^2}$, $x>b>0$, 则 $|f(a)-f(b)|<|a-b|$.

64. (005061) 试构造几何图形证明: 若 $x,y,z>0$, 则 $\sqrt{x^2+y^2+xy}+\sqrt{y^2+z^2+yz}>\sqrt{z^2+x^2+zx}$.

65. (005062) 利用均值换元证明: 若 $a>0$, $b>0$, 且 $a+b=1$, 则 $\dfrac{4}{3}\le\dfrac{1}{a+1}+\dfrac{1}{b+1}<\dfrac{3}{2}$.

66. (005063) 利用均值换元证明: 若 $a+b+c=1$, 则 $a^2+b^2+c^2\ge\dfrac{1}{3}$.

67. (005064) 利用设差换元证明: 若 $x\ge y\ge 0$, 则 $\sqrt{2xy-y^2}+\sqrt{x^2-y^2}\ge x$.

68. (005098) 利用反证法证明: 若 $0<a<1$, $0<b<1$, $0<c<1$, 则 $(1-a)b$, $(1-b)c$, $(1-c)a$ 不能都大于 $\dfrac{1}{4}$.

69. (005099) 利用反证法证明: 若 $0<a<2$, $0<b<2$, $0<c<2$, 则 $a(2-b)$, $b(2-c)$, $c(2-a)$ 不可能都大于 1.

70. (005100) 利用反证法证明: 若 $x,y>0$, 且 $x+y>2$, 则 $\dfrac{1+y}{x}$ 和 $\dfrac{1+x}{y}$ 中至少有一个小于 2.

71. (005101) 利用反证法证明: 若 $0<a<1$, $b>0$, 且 $a^b=b^a$, 则 $a=b$.

72. (005102) 若 $a>0$, $b>0$, 且 $a^3+b^3=2$, 试分别利用 $x^3+y^3+z^3\ge 3xyz(x,y,z\ge 0)$ 构造方程, 并利用判别式以及反证法证明: $a+b\le 2$.

73. (007768) 证明: 如果 $a>b$, $c<0$, 那么 $(a-b)c<0$.

74. (007769) 证明: 如果 $a<b<0$, 那么 $0>\dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{b}$.

75. (007818) 设 $ab\ne 0$, 利用基本不等式有如下证明: $\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}=\dfrac{b^2+a^2}{ab}\ge\dfrac{2ab}{ab}=2$. 试判断这个证明过程是否正确. 若正确, 请说明每一步的依据; 若不正确, 请说明理由.

76. (007837) 证明: 如果 $a>b>0$, $c>d>0$, 那么 $a^2c>b^2d$.

77. (007838) 证明: $a^2+b^2+2\ge 2(a+b)$.

78. (007839) 证明: 如果 a、b、c 都是正数, 那么 $(a+b)(b+c)(c+a)\ge 8abc$.

79. (009442) 设 $n\in\mathbf{Z}$. 证明: 若 n^3 是奇数, 则 n 是奇数.

80. (009443) 证明: 对于三个实数 a、b、c, 若 $a\ne c$, 则 $a\ne b$ 或 $b\ne c$.

81. (009464) 证明: 若 $x<0$, 则 $x+\dfrac{1}{x}\le -2$, 并指出等号成立的条件.

82. (009468) 已知实数 a、b 满足 $|a|<\dfrac{1}{2}$, $|b|<\dfrac{1}{2}$. 证明下列各式:

(1) $|a+b|<1$;

(2) $|a-b|<1$.

83. (010027) 已知集合 $A=\{x|x=2n+1,\ n\in\mathbf{Z}\}$, $B=\{x|x=4n-1,\ n\in\mathbf{Z}\}$. 判断集合 A 与 B 的包含关系, 并证明你的结论.

84. (010035) 证明: "四边形 $ABCD$ 是平行四边形" 是 "四边形 $ABCD$ 的对角线互相平分" 的充要条件.

85. (010050) 证明: "$a>0$ 且 $b>0$" 是 "$a+b>0$ 且 $ab>0$" 的充要条件.

86. (010060) 对一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$, 证明: $ac<0$ 是该方程有两个异号实根的充要条件.

87. (010064) 设 $s=a+b$, $p=ab(a$、$b\in\mathbf{R})$, 写出 "$a>1$ 且 $b>1$" 用 s、p 表示的一个充要条件, 并证明.

88. (010065) 原有酒精溶液 a(单位: g), 其中含有酒精 b(单位: g), 其酒精浓度为 $\dfrac{b}{a}$. 为增加酒精浓度, 在原溶液中加入酒精 x(单位: g), 新溶液的浓度变为 $\dfrac{b+x}{a+x}$. 根据这一事实, 可提炼出如下关于不等式的命题: 若 $a>b>0$, $x>0$, 则 $\dfrac{b}{a}<\dfrac{b+x}{a+x}<1$. 试加以证明.

89. (010101) 证明: 对于正数 h, 如果 $|x-a|<\dfrac{h}{2}$, $|y-a|<\dfrac{h}{2}$, 那么 $|x-y|<h$.

90. (010104) 证明: $|x+2|-|x-1|\geq -3$, 对所有实数 x 均成立, 并求等号成立时 x 的取值范围.

91. (020014) 已知集合 $A=\{x|x=a+\sqrt{2}b,\ a,b\in\mathbf{Z}\}$, 若 $x_1,x_2\in A$, 证明: $x_1x_2\in A$.

92. (020024) 证明: 集合 $A=\{1,2,3\}$ 是集合 $B=\{0,1,2,3,4,5,6\}$ 的子集.

93. (020026) 证明集合 $A=\{n|n=2k-1,\ k\in\mathbf{N}\}$ 不是集合 $B=\{n|n=2m+1,\ m\in\mathbf{N}\}$ 的子集, 且集合 A 真包含集合 B.

94. (020030) 设常数 $a\in\mathbf{R}$. 若集合 $A=(-\infty,5)$ 与 $B=(-\infty,a]$ 满足 $A\subseteq B$, 则 a 的取值范围是__________.

证明: 1° 当 a__________ 时, 任取 $x\in A$, 则__________, 所以 $x\in B$, 即 $A\subseteq B$.

2° 当 a__________ 时, 取 $x_1=$__________, 则__________, 所以 $x_1\in A$ 且 $x_1\notin B$.

由 1°、2° 可得结论.

95. (020035) 证明: 集合 $A=\{x|x=6n-1,\ n\in\mathbf{Z}\}$ 是 $B=\{x|x=3n+2,\ n\in\mathbf{Z}\}$ 的真子集.

96. (020041) **已知** $A=\{x|x=a+\sqrt{2}b,\ a,b\in\mathbf{N}\}$, **若集合** $B=\{x|x=\sqrt{2}x_1,\ x_1\in A\}$, **证明** $B\subset A$.

97. (020083) **证明**: $x_1>2$ **且** $x_2>2$ **是** $x_1+x_2>4$ **且** $x_1\cdot x_2>4$ **的充分非必要条件**.

98. (020085) **设** α,β **是方程** $x^2-ax+b=0$ **的两个实数根. 试分析** $a>2$ **且** $b>1$ **是"两个实数根** α,β **均大于** 1" **的什么条件? 并证明你的结论**.

99. (020092) **证明: 若** $x+2y+z>0$, **则** x,y,z **中至少有一个大于** 0.

100. (020093) **证明: 对于三个实数** a,b,c, **若** $a\neq c$, **则** $a\neq b$ **或** $b\neq c$.

101. (020095) **证明: 若** $x^2\neq y^2$, **则** $x\neq y$ **或** $x\neq -y$.

102. (020096) **若** $a^3+b^3=2$, **证明**: $a+b\leq 2$.