1. 函数 $y=\log_2(x-2)$ 的定义域为__________.

2. 设圆锥的底面半径为 1, 体积为 $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\pi$, 则该圆锥的侧面积为__________.

3. 等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_3+a_{10}=25$, 则其前 12 项之和 $S_{12}$ 的值为__________.

4. 幂函数 $y=x^k$ 的图像经过点 $(4,\dfrac{1}{2})$, 则它的单调减区间为__________.

5. 三角形 $ABC$ 中, $A=45°$, $B=75°$, $AB$ 边的长为 $2\sqrt{6}$, 则 $BC$ 边的长为__________.

6. 已知 $a$ 是实数, 方程 $x^2+2x+a=0$ 的两根在复平面上对应的点分别为 $P$ 和 $Q$. 若三角形 $POQ$ 是等腰直角三角形, 则 $a=$__________.

7. 设实数 $x,y$ 满足 $|x|+|y|\le 1$, 则 $2x+y$ 的最大值为__________.

8. 已知偶函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 且当 $x\ge 0$ 时, $f(x)=x-4$, 则不等式 $xf(x)\le 5$ 的解为__________.

9. 等比数列 $\{a_n\}$ 的首项为 1, 公比为 3, 则极限 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_na_{n+1}}{a_1+a_2+\cdots+a_{2n-1}}$ 的值为__________.

10. 甲乙两人分别投掷两颗骰子与一颗骰子, 设甲的两颗骰子的点数分别为 $a$ 与 $b$, 乙的骰子的点数为 $c$. 则掷出的点数满足 $|a-b|=c$ 的概率为__________(用最简分数表示).

11. 已知 $a$ 是实数, 在 $(1+ax)^8$ 的二项展开式中, 第 $k+1$ 项的系数为 $c_{k+1}=\mathrm{C}_8^k\cdot a^k$ $(k=0,1,2,3,\cdots,8)$. 若 $c_1<c_2<c_3<\cdots<c_9$, 则 $a$ 的取值范围为__________.

12. 设 $P_1P_2P_3\cdots P_8$ 是平面直角坐标系中的一个正八边形, 点 $P_i$ 的坐标为 $(x_i,y_i)$ $(i=1,2,\cdots,8)$. 集合 $A=\{y|存在i\in\{1,2,\cdots,8\}, 使得y=y_i\}$, 则集合 $A$ 的元素个数可能为__________(写出所有可能的值).

13. 方程 $2\sin(2x+\dfrac{\pi}{3})-1=0$ 在区间 $[0,4\pi)$ 上的解的个数为 (　　).

A. 2　　B. 4　　C. 6　　D. 8

14. 已知直线 $l$ 平行于平面 $\alpha$, 平面 $\beta$ 垂直于平面 $\alpha$. 则以下关于直线 $l$ 与平面 $\beta$ 的位置关系的表述, 正确的是 (　　).

A. $l$ 与 $\beta$ 不平行　　B. $l$ 与 $\beta$ 不相交

C. $l$ 不在平面 $\beta$ 上　　D. $l$ 在 $\beta$ 上, 与 $\beta$ 平行, 与 $\beta$ 相交都有可能

15. 设三角形 $ABC$ 是位于平面直角坐标系 $xOy$ 的第一象限中的一个不等边三角形. 该平面上的动点 $P$ 满足: $|PA|^2+|PB|^2+|PC|^2=|OA|^2+|OB|^2+|OC|^2$. 已知动点 $P$ 的轨迹是一个圆, 则该圆的圆心位于三角形 $ABC$ 的 (　　).

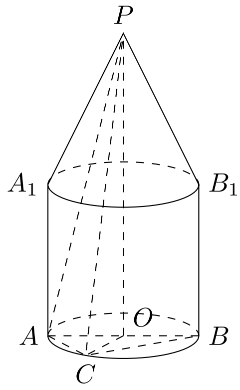
A. 内心　　B. 外心　　C. 重心　　D. 垂心

16. 已知 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 皆是定义域、值域均为 $\mathbf{R}$ 的函数. 若对任意 $x\in\mathbf{R}$, $f(x)>g(x)$ 恒成立, 且 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 的反函数 $y=f^{-1}(x)$、$y=g^{-1}(x)$ 均存在. 命题 $P$: "对任意 $x\in\mathbf{R}$, $f^{-1}(x)<g^{-1}(x)$ 恒成立"; 命题 $Q$: "函数 $y=f(x)+g(x)$ 的反函数一定存在". 以下关于这两个命题的真假判断, 正确的是 (　　).

A. 命题 $P$ 真, 命题 $Q$ 真　　B. 命题 $P$ 真, 命题 $Q$ 假

C. 命题 $P$ 假, 命题 $Q$ 真　　D. 命题 $P$ 假, 命题 $Q$ 假

17. 如图, 空间几何体由两部分构成, 上部是一个底面半径为 1, 高为 2 的圆锥, 下部是一个底面半径为 1, 高为 2 的圆柱. 圆锥和圆柱的轴在同一直线上, 圆锥的下底面与圆柱的上底面重合. 点 $P$ 是圆锥的顶点, $AB$ 是圆柱下底面的一条直径, $AA_1$、$BB_1$ 是圆柱的两条母线. $C$ 是弧 $AB$ 的中点.




(1) 求异面直线 $PA_1$ 与 $BC$ 所成的角的大小;

(2) 求点 $B_1$ 到平面 $PAC$ 的距离.

18. 已知 $\alpha, \lambda$ 是实常数, $f(x) = \begin{vmatrix} \lambda \cos x & \sin(x-\alpha) \\ \sin(x+\alpha) & \cos x \end{vmatrix}$.

(1) 当 $\lambda = 1$, $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$ 时, 求函数 $y = f(x)$ 的最小正周期、单调增区间与最大值;

(2) 是否存在 $\lambda$, 使得 $f(x)$ 是与 $\alpha$ 有关的常数函数 (即 $f(x)$ 的值与 $x$ 的取值无关)? 若存在, 求出所有满足条件的 $\lambda$; 若不存在, 说明理由.

19. 已知 $a$ 是实常数, $a > 0$, $f(x) = ax - 1 + \dfrac{1}{x^2}$.

(1) 当 $a = 2$ 时, 判断函数 $y = f(x)$ 在区间 $[1, +\infty)$ 上的单调性, 并说明理由;

(2) 写出一个 $a$ 的值, 使得 $f(x) = 0$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上有至少两个不同的解, 并严格证明你的结论.

20. 设抛物线 $\Gamma$ 的方程为 $y^2 = 2px$, 其中常数 $p > 0$. $F$ 是抛物线 $\Gamma$ 的焦点.

(1) 若直线 $x = 3$ 被抛物线 $\Gamma$ 所截得的弦长为 6, 求 $p$ 的值;

(2) 设 $A$ 是点 $F$ 关于顶点 $O$ 的对称点. $P$ 是抛物线 $\Gamma$ 上的动点, 求 $\dfrac{|PA|}{|PF|}$ 的最大值;

(3) 设 $p = 2$, $l_1, l_2$ 是两条互相垂直, 且均经过点 $F$ 的直线. $l_1$ 与抛物线 $\Gamma$ 交于点 $A$、$B$, $l_2$ 与抛物线交于点 $C$、$D$. 若点 $G$ 满足 $4\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{FC} + \overrightarrow{FD}$, 求点 $G$ 的轨迹方程.

21. 设各项均为整数的无穷数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1 = 1$, 且对所有 $n \in \mathbf{N}^*$, 均成立 $|a_{n+1} - a_n| = n$.

(1) 写出 $a_4$ 的所有可能值 (不需要写计算过程);

(2) 若 $\{a_{2n-1}\}$ 是公差为 1 的等差数列, 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(3) 证明: 存在满足条件的数列 $\{a_n\}$, 使得在该数列中, 有无穷多项为 2019.

22. 设 $m \in \mathbf{R}$. 已知集合 $A = \{2, 3\}$, $B = \{1, m\}$. 若 $4 - m \in A$, 则 $m =$__________.

23. 不等式 $|1-x|>1$ 的解集是__________.

24. 设 $a\in\mathbf{R}$. 若 $a$ 使得函数 $f(x)=\sqrt{8-ax-2x^2}$ 是偶函数, 则函数 $y=f(x)$ 的定义域是__________.

25. 已知 $\triangle ABC$ 的三内角 $A,B,C$ 所对的边长分别为 $a,b,c$, 若 $a^2=b^2+c^2+2bc\sin A$, 则内角 $A$ 的大小是__________.

26. 已知向量 $\overrightarrow{a}$ 在向量 $\overrightarrow{b}$ 方向上的投影为 $-2$, 且 $|\overrightarrow{b}|=3$, 则 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=$__________(结果用数值表示).

27. 方程 $\log_3\dfrac{1}{2^x+4}+\log_3(4^x-2)=0$ 的解 $x=$__________.

28. 已知函数 $f(x)=\begin{vmatrix}\sin x & \cos x\\ \cos x & \cos x\end{vmatrix}$, 则函数 $y=f(x)$ 的最小正周期是__________.

29. 已知某市 $A$ 社区 35 岁至 45 岁的居民有 450 人, 46 岁至 55 岁的居民有 750 人, 56 岁至 65 岁的居民有 900 人. 为了解该社区 35 岁至 65 岁居民的身体健康状况, 社区负责人采用分层抽样技术抽取若干人进行体检调查, 若从 46 岁至 55 岁的居民中随机抽取了 50 人, 试问这次抽样调查抽取的人数是__________ 人.

30. 已知 $\alpha$ 是实系数一元二次方程 $x^2-(2m-1)x+m^2+1=0$ 的一个虚数根, 且 $|\alpha|\le 2$, 则实数 $m$ 的取值范围是__________.

31. 设 $a\in\mathbf{R}$. 若函数 $y=f(x)$ 是奇函数, 且 $x>0$ 时, $f(x)=a(x-1)+1$. 若 $y=f(x)$ 是单调增函数, 则 $a$ 取值范围为__________.

32. 已知数列 $\{a_n\}$ 是共有 $k$ 个项的有限数列, 且满足 $a_{n+1}=a_{n-1}-\dfrac{n}{a_n}$ $(n=2,\cdots,k-1)$, 若 $a_1=24$, $a_2=51$, $a_k=0$, 则 $k=$__________.

33. 设 $\varphi\in(0,\pi)$. 若存在实数 $a,b$ 使得关于 $x$ 的方程 $a\sin(2x+\varphi)+b=0$ 在 $[0,2\pi]$ 时恰有 5 个解, 且解的和为 $\dfrac{63}{11}\pi$, 则 $\varphi=$__________.

34. 设 $x\in\mathbf{R}$, $y\in\mathbf{R}$. 那么 "$x>0$" 是 "$xy>0$" 的 (　　).

A. 充分非必要条件　　B. 必要非充分条件

C. 充要条件　　D. 既非充分又非必要条件

35. 在某段时间内, 甲地不下雨的概率为 $P_1(0<P_1<1)$, 乙地不下雨的概率为 $P_2(0<P_2<1)$. 若在这段时间内两地下雨相互独立, 则这段时间内两地都下雨的概率为 (　　).

A. $P_1P_2$　　B. $1-P_1P_2$　　C. $P_1(1-P_2)$　　D. $(1-P_1)(1-P_2)$

36. 已知梯形 $ABCD$, $AB\parallel CD$, 设 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{e_1}$, 向量 $\overrightarrow{e_2}$ 的起点和终点分别是 $A$, $B$, $C$, $D$ 中的两个点, 若对平面中任意的非零向量 $\overrightarrow{a}$, 都可以唯一表示为 $\overrightarrow{e_1}$、$\overrightarrow{e_2}$ 的线性组合, 那么 $\overrightarrow{e_2}$ 的个数为 (　　).

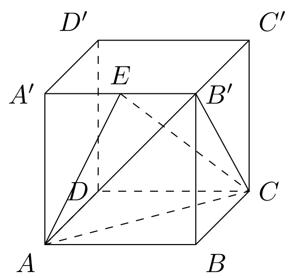
A. 6　　B. 8　　C. 10　　D. 12

37. 在 $\triangle ABC$ 中, $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$, 对于下面两个说法: ① 对于任意 $\triangle ABC$, 以 $\sqrt{a},\sqrt{b},\sqrt{c}$ 为三边的三角形存在, 且总是一个锐角三角形; ② 存在一个 $\triangle ABC$, 以 $\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c}$ 为三边的三角形是一个钝角三角形. 下面判断正确的是 (　　).

A. ①正确, ②错误　　B. ①错误, ②正确

C. ①正确, ②正确　　D. ①错误, ②错误

38. 如图, 在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中, $E$ 为 $AB$ 的中点.




(1) 求证: 直线 $AE$ 平行于平面 $CC'D'D$;

(2) 求点 $E$ 到平面 $AB'C$ 的距离.

39. 经济订货批量模型, 是目前大多数工厂、企业等最常采用的订货方式, 即某种物资在单位时间的需求量为某常数, 经过某段时间后, 存储量消耗下降到零, 此时开始订货并随即到货, 然后开始下一个存储周期. 该模型适用于整批间隔进货、不允许缺货的存储问题. 具体如下:

年存储成本费 $T$(元) 关于每次订货 $x$(单位: 吨) 的函数关系为 $T(x)=\frac{Bx}{2}+\frac{AC}{x}$, 其中 $A$ 为年需求量, $B$ 为每单位物资的年存储费, $C$ 为每次订货费.

某化工厂需用甲醇作为原料, 年需求量为 6000 吨, 每吨存储费为 120 元/年, 每次订货费为 2500 元. (1) 若该化工厂每次订购 300 吨甲醇, 求年存储成本费;

(2) 每次需订购多少吨甲醇, 可使该化工厂年存储成本费最少? 最少费用为多少?

40. 已知函数 $f(x)=\sin x$.

(1) 设 $a\in\mathbf{R}$, 判断函数 $g(x)=a\cdot f(x)+f(x+\frac{\pi}{2})$ 的奇偶性, 并说明理由;

(2) 设函数 $F(x)=2f(x)-\sqrt{3}$. 对任意 $b\in\mathbf{R}$, 求 $y=F(x)$ 在区间 $[b,b+100\pi]$ 上零点个数的所有可能值.

41. 双曲线 $\Gamma$: $x^2-\frac{y^2}{b^2}=1(b>0)$.

(1) 若 $\Gamma$ 的一条渐近线方程为 $y=2x$, 求 $\Gamma$ 的方程;

(2) 设 $F_1$、$F_2$ 是 $\Gamma$ 的两个焦点, $P$ 为 $\Gamma$ 上一点, 且 $PF_1\perp PF_2$, $\triangle PF_1F_2$ 的面积为 9, 求 $b$ 的值;

(3) 已知斜率为 2 的直线与 $\Gamma$ 交于 $A$、$B$ 两点, 点 $M$ 是线段 $AB$ 的中点, 设点 $M$ 的横坐标的集合为 $\Omega$. 若 $\{x|x=2n,\ n\in\mathbf{N}^*\}\subseteq\Omega$, 求正数 $b$ 的取值范围.

42. 已知以 $a_1$ 为首项的数列 $\{a_n\}$ 满足: $|a_{n+1}|=|a_n+1|(n\in\mathbf{N}^*)$.

(1) 当 $a_1=-\frac{1}{3}$ 时, 且 $-1<a_n<0$, 写出 $a_2$, $a_3$;

(2) 若数列 $\{|a_n|\}(1\le n\le 10,\ n\in\mathbf{N}^*)$ 是公差为 $-1$ 的等差数列, 求 $a_1$ 的取值范围;

(3) 设 $a_1=0$. 记 $S_n$ 为 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和, 给定正整数 $m\geq 4$, 求 $S_{m-1}$ 的最小值, 并证明取到最小值的数列 $\{a_n\}$ 不唯一.

43. 函数 $y=3\sin(2x+\dfrac{\pi}{3})$ 的最小正周期 $T=$__________.

44. 函数 $y=\lg x$ 的反函数是__________.

45. 已知集合 $P=\{x|(x+1)(x–3)<0\}$, $Q=\{x||x|>2\}$, 则 $P\cap Q=$__________.

46. 函数 $y=x+\dfrac{9}{x}$, $x\in(0,+\infty)$ 的最小值是__________.

47. 计算: $\lim\limits_{n\to\infty}[\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}+\ldots+(\dfrac{1}{2})^n]$=__________.

48. 记球 $O_1$ 和 $O_2$ 的半径、体积分别为 $r_1$、$V_1$ 和 $r_2$、$V_2$, 若 $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{8}{27}$, 则 $\dfrac{r_1}{r_2}=$__________.

49. 若某线性方程组对应的增广矩阵是 $\begin{pmatrix} m & 4 & 2 \\ 1 & m & m \end{pmatrix}$, 且此方程组有唯一的一组解, 则实数 m 的取值范围是__________.

50. 若一个布袋中有大小、质地相同的三个黑球和两个白球, 从中任取两个球, 则取出的两球中恰是一个白球和一个黑球的概率是__________.

51. $(1+2x)^n$ 的二项展开式中, 含 $x^3$ 项的系数等于含 $x$ 项的系数的 8 倍, 则正整数 $n=$__________.

52. 平面上三条直线 $x-2y+1=0$, $x-1=0$, $x+ky=0$, 如果这三条直线将平面划分为六个部分, 则实数 $k$ 的取值组成的集合 $A=$__________.

53. 已知双曲线 $C:\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{8}=1$, 左、右焦点分别为 $F_1$、$F_2$, 过点 $F_2$ 作一直线与双曲线 $C$ 的右支交于 $P$、$Q$ 两点, 使得 $\angle F_1PQ=90^\circ$, 则 $\triangle F_1PQ$ 的内切圆的半径 $r=$__________.

54. 已知点 $B(4,0)$, $C(2,2)$, 平面直角坐标系上的动点 $P$ 满足 $\overrightarrow{OP}=\lambda\cdot\overrightarrow{OB}+\mu\cdot\overrightarrow{OC}$(其中 $O$ 是坐标原点, 且 $1<\lambda\leq a$, $1<\mu\leq b$), 若动点 $P$ 组成的区域的面积为 8, 则 $a+b$ 的最小值是__________.

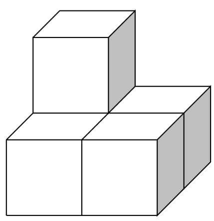
55. 若向量 $\overrightarrow{a}=(2,0)$, $\overrightarrow{b}=(1,1)$, 则下列结论中正确的是 (    ).

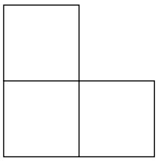
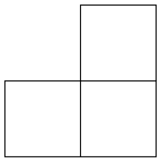
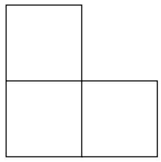
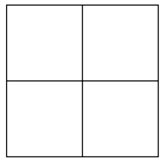
A. $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=1$  B. $|\overrightarrow{a}|=|\overrightarrow{b}|$  C. $(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b})\perp\overrightarrow{b}$  D. $\overrightarrow{a}\parallel\overrightarrow{b}$

56. 椭圆的参数方程为 $\begin{cases} x=5\cos\theta, \\ y=3\sin\theta \end{cases}$ ($\theta$ 为参数), 则它的两个焦点坐标是 (    ).

A. $(\pm4,0)$  B. $(0,\pm4)$  C. $(\pm5,0)$  D. $(0,\pm3)$

57. 如图几何体是由五个相同正方体叠成的, 其三视图中的左视图序号是 (    ).



A.  B.  C.  D. 

58. 定义 $F(a,b)=\begin{cases} a, & a \le b, \\ b, & a > b, \end{cases}$ 已知函数 $f(x)$、$g(x)$ 定义域都是 $\mathbf{R}$, 给出下列命题:

(1) 若 $f(x)$、$g(x)$ 都是奇函数, 则函数 $F(f(x),g(x))$ 为奇函数;

(2) 若 $f(x)$、$g(x)$ 都是减函数, 则函数 $F(f(x),g(x))$ 为减函数;

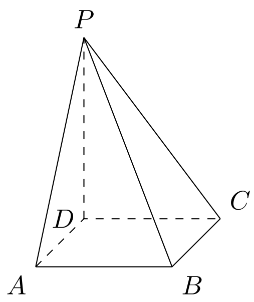
(3) 若 $f_{\min}(x)=m$, $g_{\min}(x)=n$, 则 $F_{\min}(f(x),g(x))=F(m,n)$;

(4) 若 $f(x)$、$g(x)$ 都是周期函数, 则函数 $F(f(x),g(x))$ 是周期函数.

其中正确命题的个数为 (　　).

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

59. 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是边长为 6 的正方形, $PD \perp$ 平面$ABCD$, $PD=8$.




(1) 求 $PB$ 与平面 $ABCD$ 所成角的大小;

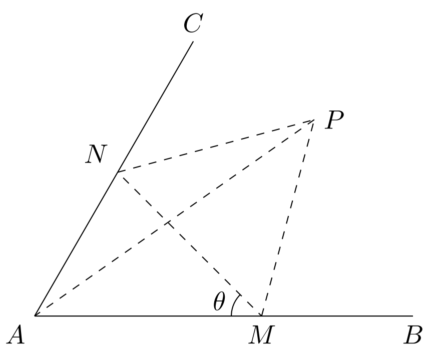
(2) 求异面直线 $PB$ 与 $DC$ 所成角的大小.

60. 复数 $z=(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i})^2$ 是一元二次方程 $mx^2+nx+1=0(m,n\in\mathbf{R})$ 的一个根.

(1) 求 $m$ 和 $n$ 的值;

(2) 若 $(m+n\mathrm{i})\overline{u}+u=z(u\in\mathbf{C})$, 求 $u$.

61. 如图, 经过村庄 $A$ 有两条夹角为 $60^\circ$ 的公路 $AB$、$AC$, 根据规划拟在两条公路之间的区域内建一工厂 $P$, 分别在两条公路边上建两个仓库 $M$、$N$(异于村庄 $A$), 要求 $PM=PN=MN=2$(单位: 千米). 记 $\angle MN=\theta$.



(1) 将 $AN$、$AM$ 用含 $\theta$ 的关系式表示出来;

(2) 如何设计 (即 $AN$、$AM$ 为多长时), 使得工厂产生的噪声对居民的影响最小 (即工厂与村庄的距离 $AP$ 最大)?

62. 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$ 的左、右焦点分别为 $F_1$、$F_2$.

(1) 点 $P$ 在椭圆 $C$ 上运动 (点 $P$ 不在 $x$ 轴上), 设 $F_2$ 关于 $\angle F_1PF_2$ 的外角平分线所在直线的对称点为 $Q$, 求 $Q$ 的轨迹方程;

(2) 设 $M$、$N$ 分别是曲线 $C$ 上的两个不同点, 且点 $M$ 在第一象限, 点 $N$ 在第三象限, 若 $\overrightarrow{OM}+2\overrightarrow{ON}=2\overrightarrow{OF_1}$, $O$ 为坐标原点, 求直线 $MN$ 的斜率;

(3) 过点 $S(0,-\dfrac{1}{3})$ 的动直线 $l$ 交曲线 $C$ 于 $A$、$B$ 两点, 在 $y$ 轴上是否存在定点 $T$, 使以 $AB$ 为直径的圆恒过这个点? 若存在, 求出点 $T$ 的坐标; 若不存在, 请说明理由.

63. 已知无穷数列 $\{a_n\}(a_n\in\mathbf{Z})$ 的前 $n$ 项和为 $S_n$, 记 $S_1$、$S_2$、$\cdots$、$S_n$ 中奇数的个数为 $b_n$.

(1) 若 $a_n=n$, 请写出数列 $\{b_n\}$ 的前 5 项;

(2) 求证: "$a_1$ 为奇数, $a_i(i=2,3,4,\cdots)$ 均为偶数" 是 "数列 $\{b_n\}$ 是单调递增数列" 的充分不必要条件;

(3) 若 $a_i=b_i$, $i=1,2,3,\cdots$, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

64. 函数 $f(x)=3\cos 2x+1$ 的最小值为__________.

65. 函数 $f(x)=\sqrt{\dfrac{1-x}{3+x}}$ 的定义域为__________.

66. 若集合 $A=\{2,4,6,8\}$, $B=\{x|x^2-4x\le 0\}$, 则 $A\cap B=$__________.

67. 已知函数 $g(x)$ 的图像与函数 $f(x)=\log_2(3^x-1)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称，则 $g(3)=$__________.

68. 设复数 $z=\begin{vmatrix}\cos\alpha & \mathrm{i}\\ \sin\alpha & \sqrt{2}+\mathrm{i}\end{vmatrix}$(i 为虚数单位)，若 $|z|=\sqrt{2}$，则 $\tan 2\alpha=$__________.

69. 设 $\triangle ABC$ 的内角 $A,B,C$ 的对边分别为 $a,b,c$，若 $b=2\sqrt{3}$, $c=8$, $A=30^\circ$，则 $\sin C=$__________.

70. 已知点 $A(3,-2)$，点 $P$ 满足线性约束条件 $\begin{cases}x+2\ge 0,\\ y-1\le 0,\\ x-2y\le 4,\end{cases}$ 设 $O$ 为坐标原点，则 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}$ 的最大值为__________.

71. 若函数 $f(x)=\log_2(2^x+1)+kx$ 是偶函数, 则 $k=$__________.

72. 已知等边 $\triangle ABC$ 的边长为 $2\sqrt{3}$, 点 $P$ 是其外接圆上的一个动点, 则 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ 的取值范围是__________.

73. 已知函数 $f(x)=\cos(2x-\dfrac{\pi}{6})$, 若对于任意的 $x_1\in[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}]$, 总存在 $x_2\in[m,n]$, 使得 $f(x_1)+f(x_2)=0$, 则 $|m-n|$ 的最小值为__________.

74. 已知 $AB$ 为单位圆 $O$ 的一条弦, $P$ 为单位圆 $O$ 上的点, 若 $f(\lambda)=|\overrightarrow{AP}-\lambda\overrightarrow{AB}|(\lambda\in\mathbf{R})$ 的最小值为 $m$, 当点 $P$ 在单位圆上运动时, $m$ 的最大值为 $\dfrac{4}{3}$, 则线段 $AB$ 长度为__________.

75. 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=3$, $a_{n+1}=1+a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdots a_n$, 记 $T_n$ 为数列 $\{\dfrac{1}{a_n}\}$ 的前 $n$ 项和, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}T_n=$__________.

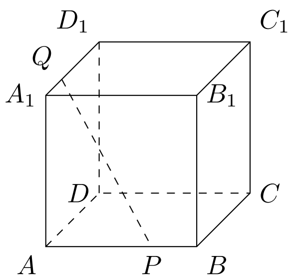
76. 若 $O$ 为坐标原点, $P$ 是直线 $x-y+2=0$ 上的动点, 则 $|OP|$ 的最小值为 (　　).

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　B. $\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. 2

77. 若 $|x-a|\le 1$ 成立的一个充分不必要条件是 $1\le x\le 2$, 则实数 $a$ 的取值范围是 (　　).

A. $1\le a\le 2$　　B. $a\ge 1$　　C. $a\le 2$　　D. $a\ge 1$ 或 $a\le 2$

78. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $P$、$Q$ 两点分别从点 $B$ 和点 $A_1$ 出发, 以相同的速度在棱 $BA$ 和 $A_1D_1$ 上运动至点 $A$ 和点 $D_1$, 在运动过程中, 直线 $PQ$ 与平面 $ABCD$ 所成角 $\theta$ 的变化范围为 (　　).




A. $[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{3}]$　　B. $[\arctan\dfrac{\sqrt{2}}{2},\arctan\sqrt{2}]$

C. $[\dfrac{\pi}{4},\arctan\sqrt{2}]$　　D. $[\arctan\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\pi}{2}]$

79. 已知函数 $f(x)=m\cdot 2^x+x^2+nx$, 记集合 $A=\{x|f(x)=0,\ x\in\mathbf{R}\}$, 集合 $B=\{x|f(f(x))=0,\ x\in\mathbf{R}\}$. 若 $A=B$, 且 $A$、$B$ 都不是空集, 则 $m+n$ 的取值范围是 (　　).

A. $[0,4)$　　B. $[-1,4)$　　C. $[-3,5]$　　D. $[0,7)$

80. 已知函数 $f(x)=2\cos^2 x+2\sqrt{3}\sin x\cos x$.

(1) 求 $f(x)$ 的最大值和最小正周期 $T$;

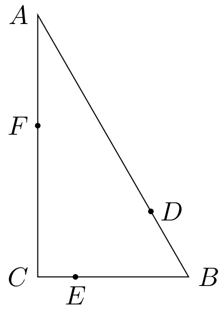
(2) 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 $A$、$B$、$C$ 所对的边分别为 $a$、$B$、$C$, 已知 $f(\dfrac{A}{2})=3$, 且 $a=1$, 求 $\triangle ABC$ 面积的最大值.

81. 已知函数 $f(x)=a-\dfrac{4}{3^x+1}$($a$ 为实常数).

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的奇偶性, 并说明理由;

(2) 当 $f(x)$ 为奇函数时, 对任意的 $x\in[1,5]$, 不等式 $f(x)\ge\dfrac{u}{3^x}$ 恒成立, 求实数 $u$ 的最大值.

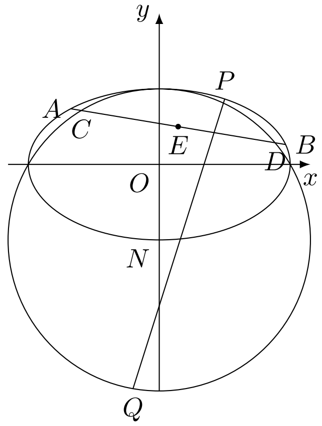
82. 如图, 某公园有三条观光大道 $AB$、$BC$、$CA$ 围成直角三角形, 其中直角边 $BC=200\text{m}$, 斜边 $AB=400\text{m}$, 现有甲、乙、丙三位小朋友分别在 $AB$、$BC$、$AC$ 大道上嬉戏, 所在位置分别记为点 $D$、$E$、$F$.




(1) 若甲乙都以每分钟 100m 的速度从点 $B$ 出发在各自的大道上奔走, 到大道的另一端时即停, 乙比甲迟 2 分钟出发, 当乙出发 1 分钟后, 求此时甲乙两人之间的距离;

(2) 设 $\angle CEF=\theta$, 乙丙之间的距离是甲乙之间距离的 2 倍, 且 $\angle DEF=\dfrac{\pi}{3}$, 请将甲乙之间的距离 $y$ 表示为 $\theta$ 的函数, 并求甲乙之间的最小距离.

83. 如图, 已知椭圆 $M:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 经过圆 $N:x^2+(y+1)^2=4$ 与 $x$ 轴的两个交点和与 $y$ 轴正半轴的交点.




(1) 求椭圆 $M$ 的方程;

(2) 若点 $P$ 为椭圆 $M$ 上的动点, 点 $Q$ 为圆 $N$ 上的动点, 求线段 $PQ$ 长的最大值;

(3) 若不平行于坐标轴的直线 $L$ 交椭圆 $M$ 于 $A$、$B$ 两点, 交圆 $N$ 于 $C$、$D$ 两点, 且满足 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DB}$, 求证: 线段 $AB$ 的中点 $E$ 在定直线上.

84. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $D$, 若存在实常数 $\lambda$ 及 $a(a\neq 0)$, 对任意 $x\in D$, 当 $x+a\in D$ 且 $x-a\in D$ 时, 都有 $f(x+a)+f(x-a)=\lambda f(x)$ 成立, 则称函数 $f(x)$ 具有性质 $M(\lambda,a)$.

(1) 判断函数 $f(x)=x^2$ 是否具有性质 $M(\lambda,a)$, 并说明理由;

(2) 若函数 $g(x)=\sin 2x+\sin x$ 具有性质 $M(\lambda,a)$, 求 $\lambda$ 及 $a$ 应满足的条件;

(3) 已知定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $y=h(x)$ 不存在零点, 且具有性质 $M(t+\dfrac{1}{t},t)$(其中 $t>0$, $t\neq 1$), 记 $a_n=h(n)(n\in\mathbf{N}^*)$, 求证: 数列 $\{a_n\}$ 为等比数列的充要条件是 $\dfrac{a_2}{a_1}=t$ 或 $\dfrac{a_2}{a_1}=\dfrac{1}{t}$.

85. 已知 $\tan\alpha=\dfrac{1}{2}$, 则 $\tan 2\alpha=$__________.

86. 不等式 $\dfrac{1}{x-1}>1$ 的解集为__________.

87. 在 $(x-\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}})^6$ 的二项展开式中, $x^2$ 项的系数为__________.

88. 已知球的体积为 $\dfrac{4}{3}\pi$, 则该球的左视图所表示图形的面积为__________.

89. 已知圆的方程为 $x^2+y^2-2x-4y+4=0$, 则圆心到直线 $l:3x+4y+4=0$ 的距离 $d=$__________.

90. 若关于 $x$ 的实系数一元二次方程 $x^2-bx+c=0$ 的一根为 $1-\mathrm{i}$(i 为虚数单位), 则 $b+c=$__________.

91. 已知 $m\in\mathbf{R}$, 若直线 $l_1:mx+y+1=0$ 与直线 $l_2:9x+my+2m+3=0$ 平行, 则 $m=$__________.

92. 已知实数 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}x+2y\geq 3,\\ 2x+y\geq 3,\\ x\geq 0,\ y\geq 0,\end{cases}$ 则 $z=x+y$ 的最小值是__________.

93. 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 当 $x>0$ 时, $f(x)=a^x+b(0<a<1,\ b\in\mathbf{R})$, 若 $f(x)$ 存在反函数, 则 b 的取值范围是__________.

94. 上海某高校哲学专业的 4 名研究生到指定的 4 所高级中学宣讲习近平新时代中国特色社会主义思想. 若他们每人都随机地从 4 所学校选择一所, 则 4 人中至少有 2 人选择到同一所学校的概率是__________(结果用最简分数表示).

95. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $AB=1$, $AC=2$, $\angle A=120^\circ$, 若点 $P$ 是 $\triangle ABC$ 所在平面上一点, 且满足 $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{CP}=-1$, 则实数 $\lambda$ 的值为__________.

96. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+1)=2f(x)+1$, 当 $x\in[0,1)$ 时, $f(x)=x^3$. 设 $f(x)$ 在区间 $[n,n+1)(n\in\mathbf{N}^*)$ 上的最小值为 $a_n$, 若存在 $n\in\mathbf{N}^*$, 使得 $\lambda(a_n+1)<2n-7$ 成立, 则实数 $\lambda$ 的取值范围是__________.

97. 下列以 $t$ 为参数的参数方程中, 其表示的曲线与方程 $xy=1$ 表示的曲线完全一致的是 (　　).

A. $\begin{cases}x=t^{\frac{1}{2}},\\ y=t^{-\frac{1}{2}}\end{cases}$　　B. $\begin{cases}x=|t|,\\ y=\dfrac{1}{|t|}\end{cases}$　　C. $\begin{cases}x=\cos t,\\ y=\sec t\end{cases}$　　D. $\begin{cases}x=\tan t,\\ y=\cot t\end{cases}$

98. 已知函数 $f(x)=\sin 2x$, $x\in[a,b]$, 则 “$b-a\geq\dfrac{\pi}{2}$” 是 “$f(x)$ 的值域为 $[-1,1]$” 的 (　　) 条件

A. 充分不必要　　B. 必要不充分　　C. 充要　　D. 既不充分也不必要

99. 某高校举行科普知识竞赛, 所有参赛的 500 名选手成绩的平均数为 82, 方差为 0.82, 则下列四个数据中不可能是参赛选手成绩的是 (　　).

A. 60　　B. 70　　C. 80　　D. 100

100. 设数列 $\{a_n\}$, 若存在常数 $t$, 对任意小的正数 $s$, 总存在正整数 $n_0$, 当 $n \geq n_0$ 时, $|a_n - t| < s$, 则数列 $\{a_n\}$ 为收敛数列. 下列关于收敛数列说法正确的是 (　　).

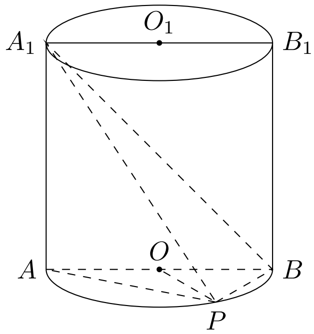
A. 若等比数列 $\{a_n\}$ 是收敛数列, 则公比 $q \in (0,1)$

B. 等差数列不可能是收敛数列

C. 设公差不为 0 的等差数列 $\{a_n\}$ 前 $n$ 项和为 $S_n(S_n \neq 0)$, 则数列 $\{\frac{1}{S_n}\}$ 一定是收敛数列

D. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和为 $S_n$, 满足 $a_1 = 1$, $S_{n+1} = a_n + 1$, 则数列 $\{a_n\}$ 是收敛数列

101. 如图, 已知 $AB$ 为圆柱 $OO_1$ 的底面圆 $O$ 的一条直径, $P$ 为圆周上的一点, $OA = 2$, $\angle BOP = 60°$, 圆柱 $OO_1$ 的表面积为 $24\pi$.




(1) 求三棱锥 $A_1 - APB$ 的体积;

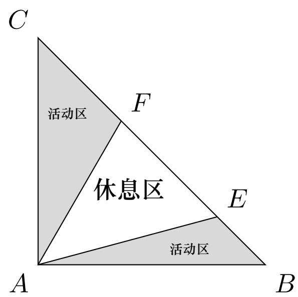
(2) 求直线 $AP$ 与平面 $A_1PB$ 所成的角的大小.

102. 已知 a 为实数, 函数 $f(x) = x|x-a| - a$, $x \in \mathbf{R}$.

(1) 当 $a = 2$ 时, 求函数 $f(x)$ 的单调递增区间;

(2) 若对任意 $x \in (0,1)$, $f(x) < 0$ 恒成立, 求 a 的取值范围.

103. 某动物园喜迎虎年的到来, 拟用一块形如直角三角形 $ABC$ 的地块建造小老虎的休息区和活动区. 如图, $\angle BAC = 90°$, $AB = AC = 20$(单位: 米), $E$、$F$ 为 $BC$ 上的两点, 且 $\angle EAF = 45°$, $\triangle AEF$ 区域为休息区, $\triangle ABE$ 和 $\triangle ACF$ 区域均为活动区. 设 $\angle EAB = \alpha(0 < \alpha < 45°)$.




(1) 求 $AE$、$AF$ 的长; (用 $\alpha$ 的代数式表示) (2) 为了使小老虎能健康成长, 要求所建造的活动区面积尽可能大 (即休息区尽可能小). 当 $\alpha$ 为多少时, 活动区的面积最大? 最大面积活动区为多少?

104. 在平面直角坐标系中, 已知点 $A(0,\sqrt{2})$、$B(0,-\sqrt{2})$, 动点 $C(x,y)$ 关于直线 $y = x$ 的对称点为 $D$, 且 $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}x^2$, 动点 $C$ 的轨迹为曲线 $E$.

(1) 求曲线 $E$ 的方程;

(2) 已知动点 $P$ 在曲线 $E$ 上, 点 $Q$ 在直线 $y=2\sqrt{2}$ 上, 且 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=0$, 求线段 $PQ$ 长的最小值;

(3) 过点 $(-\sqrt{2},0)$ 且不垂直于 $x$ 轴的直线交曲线 $E$ 于 $M$、$N$ 两点, 点 $M$ 关于 $x$ 轴的对称点为 $M'$, 试问: 在 $x$ 轴上是否存在一定点 $T$, 使得 $M'$、$N$、$T$ 三点共线? 若存在, 求出定点 $T$ 的坐标; 若不存在, 说明理由.

105. 对于数列 $\{a_n\}$, 记 $V(n)=|a_2-a_1|+|a_3-a_2|+\cdots+|a_n-a_{n-1}|(n>1,\ n\in\mathbf{N}^*)$.

(1) 若数列 $\{a_n\}$ 通项公式为: $a_n=\dfrac{1+(-1)^n}{2}(n\in\mathbf{N}^*)$, 求 $V(5)$;

(2) 若数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1=a$, $a_n=b$, 且 $a>b$, 求证: $V(n)=a-b$ 的充分必要条件是 $a_{i+1}\le a_i(i=1,2,\cdots,n-1)$;

(3) 已知 $V(2022)=2022$, 若 $y_t=\dfrac{1}{t}(a_1+a_2+\cdots+a_t)$, $t=1,2,\cdots,2022$, 求 $|y_2-y_1|+|y_3-y_2|+\cdots+|y_{2022}-y_{2021}|$ 的最大值.

106. 已知集合 $A=\{1,3,m\}$, $B=\{3,5\}$, 且 $B\subseteq A$, 则实数 $m$ 的值是__________.

107. 函数 $f(x)=\sqrt{1-\dfrac{2}{x}}$ 的定义域是__________.

108. 函数 $y=2^x(x\ge 2)$ 的反函数是__________.

109. 如果圆锥的底面积为 $\pi$, 母线长为 2, 那么该圆锥的高为__________.

110. 二项式 $(\sqrt[3]{x}-\dfrac{2}{x})^8$ 的展开式中的常数项为__________.

111. 某班从 4 位男生和 3 位女生志愿者选出 4 人参加校运会的点名签到工作, 则选出的志愿者中既有男生又有女生的概率的是__________(结果用最简分数表示).

112. 在复平面内, 三点 $A$、$B$、$C$ 分别对应复数 $z_A$、$z_B$、$z_C$, 若 $\dfrac{z_B-z_A}{z_C-z_A}=1+\dfrac{4}{3}\mathrm{i}$, 则 $\triangle ABC$ 的三边长之比为__________.

113. 已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\dfrac{\pi}{6})$, $\omega>0$, 若函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=f(x+12)$, $x\in\mathbf{R}$ 恒成立, 且在 "任意两个相邻奇数所形成的闭区间" 内总存在至少两个零点, 则 $\omega$ 的最小值为__________.

114. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 $A$、$B$、$C$ 所对的边分别为 $a$、$b$、$c$, 如果对任意的实数 $\lambda$, $|\overrightarrow{BA}-\lambda\overrightarrow{BC}|\ge|\overrightarrow{BC}|$ 恒成立, 则 $\dfrac{c}{b}+\dfrac{b}{c}$ 的最大值是__________.

115. 在边长为 1 的正方形 $ABCD$ 中, $P$、$Q$ 分别为边 $BC$、$CD$ 上的动点, 如果 $\triangle PCQ$ 的周长为定值 2, 那么 $\triangle PAQ$ 的外接圆直径的最小值为__________.

116. 已知平面直角坐标系中两点 $A(a_1,a_2)$、$B(b_1,b_2)$, 有 $S_{\triangle AOB}=\dfrac{1}{2}|a_1b_2-a_2b_1|$. 设 $(x_1,y_1)$、$(x_2,y_2)$、$(x_3,y_3)$ 是平面曲线 $x^2+y^2=2x-4y$ 上任意三点, 则 $T=x_1y_2-x_2y_1+x_2y_3-x_3y_2$ 的最大值为__________.

117. 对实数 $x\in\mathbf{R}$, 函数 $f(x)$ 满足: $f(x+1)=\sqrt{f(x)-f^2(x)}+\dfrac{1}{2}$, $a_n=f^2(n)-f(n)$, 数列 $\{a_n\}$ 的前 15 项和为 $-\dfrac{31}{16}$, 数列 $\{c_n\}$ 满足 $c_n+c_{n+1}=[f(2019)]^n$, 若数列 $\{c_n\}$ 的前 $n$ 项和 $S_n$ 的极限存在, 则 $c_1=$__________.

118. 关于 $x$、$y$ 的二元一次方程组 $\begin{cases}3x+4y=1,\\ x-3y=10\end{cases}$ 的增广矩阵为 (　　).

A. $\begin{pmatrix}3 & 4 & -1\\ 1 & -3 & 10\end{pmatrix}$　　B. $\begin{pmatrix}3 & 4 & -1\\ 1 & -3 & -10\end{pmatrix}$　　C. $\begin{pmatrix}3 & 4 & 1\\ 1 & -3 & 10\end{pmatrix}$　　D. $\begin{pmatrix}3 & 4 & 1\\ 1 & 3 & 10\end{pmatrix}$

119. 已知函数 $f(x)=\cos(3x+\varphi)$ 满足 $f(x)\le f(1)$ 恒成立, 则 (　　).

A. 函数 $f(x-1)$ 一定是奇函数　　B. 函数 $f(x+1)$ 一定是奇函数

C. 函数 $f(x-1)$ 一定是偶函数　　D. 函数 $f(x+1)$ 一定是偶函数

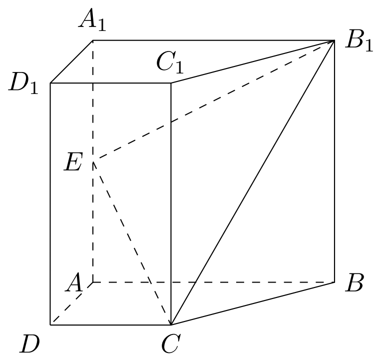
120. 如果一个几何体绕着一条直线旋转 $\theta$ 角与原几何体重合, 其中 $0^\circ<\theta\le 180^\circ$, 称该直线为该几何体的一条旋转轴. 正四面体的不同旋转轴有 (　　) 条.

A. 3　　B. 4　　C. 6　　D. 7

121. 已知点 $P$ 为椭圆 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{16}=1$ 上的任意一点, 点 $F_1$、$F_2$ 分别为该椭圆的上下焦点, 设 $\alpha=\angle PF_1F_2$, $\beta=\angle PF_2F_1$, 则 $\sin\alpha+\sin\beta$ 的最大值为 (　　).

A. $\dfrac{3\sqrt{7}}{7}$　　B. $\dfrac{4\sqrt{7}}{7}$　　C. $\dfrac{8}{9}$　　D. $\dfrac{3}{2}$

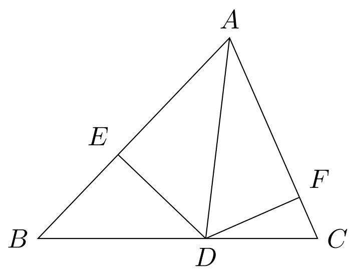
122. 如图, 四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 侧棱 $AA_1\perp$ 底面 $ABCD$, $AB\parallel CD$, $AB\perp AD$, $AD=DC=1$, $AA_1=AB=2$, $E$ 为棱 $AA_1$ 的中点.




(1) 求二面角 $B_1-CE-C_1$ 的正弦值;

(2) 设点 $M$ 为线段 $C_1E$ 上, 且直线 $AM$ 与平面 $ADD_1A_1$ 所成角正弦值为 $\dfrac{\sqrt{2}}{6}$, 求线段 $AM$ 的长.

123. 在锐角 $\triangle ABC$ 中, 已知 $\cos A=\dfrac{5}{13}$, $S_{\triangle ABC}=6$, 若点 $D$ 是线段 $BC$ 上一点 (不含端点), 过 $D$ 作 $DE\perp AB$ 于 $E$, $DF\perp AC$ 于 $F$.



(1) 求 $BC$ 的取值范围;

(2) 问点 $D$ 在何处时, $\triangle DEF$ 的面积最大, 最大值为多少?

124. 已知各项都不为零的无穷数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_{n+1}a_n + a_{n+1} - a_n = 0.n \in \mathbf{N}^*$.

(1) 证明 $\{\dfrac{1}{a_n}\}$ 为等差数列, 并求 $a_1 = 1$ 时数列 $\{a_n\}$ 中的最大项;

(2) 若 $a_{2018}$ 为数列 $\{a_n\}$ 中的最小项, 求 $a_1$ 的取值范围.

125. 已知曲线 $\Gamma : F(x,y) = 0$, 对坐标平面上任意一点 $P(x,y)$, 定义 $F[P] = F(x,y)$. 若两点 $P$、$Q$, 满足 $F[P] \cdot F[Q] > 0$, 称点 $P$、$Q$ 在曲线 $\Gamma$ 同侧; 若 $F[P] \cdot F[Q] < 0$, 称点 $P$、$Q$ 在曲线 $\Gamma$ 两侧.

(1) 直线 $l : kx - y = 0$ 过原点, 线段 $AB$ 上所有点都在直线 $l$ 同侧, 其中 $A(-1,1)$、$B(2,3)$, 求直线 $l$ 的倾斜角的取值范围;

(2) 已知曲线 $F(x,y) = (3x+4y-5) \cdot \sqrt{4-x^2-y^2} = 0$, $O$ 为坐标原点, 求点集 $S = \{P|F[P] \cdot F[O] > 0\}$ 的面积;

(3) 记到点 $(0,1)$ 与到 $x$ 轴距离和为 5 的点的轨迹为曲线 $C$, 曲线 $\Gamma : F(x,y) = x^2 + y^2 - y - a = 0$, 若曲线 $C$ 上总存在两点 $M$、$N$ 在曲线 $\Gamma$ 两侧, 求曲线 $C$ 的方程与实数 $a$ 的取值范围.

126. 设函数 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上有定义, 实数 $a$ 和 $b$ 满足 $1 \le a < b$, 若 $f(x)$ 在区间 $(a,b]$ 上不存在最小值, 则称 $f(x)$ 在区间 $(a,b]$ 上具有性质 $P$.

(1) 当 $f(x) = x^2 + cx$, 且 $f(x)$ 在区间 $(1,2]$ 上具有性质 $P$, 求实数 $c$ 的取值范围;

(2) 已知 $f(x+1) = f(x) + 1 (x \ge 1)$, 且当 $1 \le x < 2$ 时, $f(x) = 1 - x$, 判别 $f(x)$ 在区间 $(1,4]$ 上是否具有性质 $P$;

(3) 若对于满足 $1 \le a < b$ 的任意实数 $a$ 和 $b$, $f(x)$ 在区间 $(a,b]$ 上具有性质 $P$, 且对于任意 $n \in \mathbf{N}^*$, 当 $x \in (n,n+1)$ 时, 有 $|f(n) - f(x)| + |f(x) - f(n+1)| = |f(n) - f(n+1)|$, 证明: 当 $x \ge 1$ 时, $f(2x) > f(x)$.

127. 在复平面内, 复数 $\dfrac{2}{1+\mathrm{i}}$ 对应的点与原点的距离是__________.

128. 将参数方程 $\begin{cases} x = \cos\theta, \\ y = 2\sin\theta \end{cases}$ $(\theta \in [0,\pi])$ 化为普通方程, 所得方程是__________.

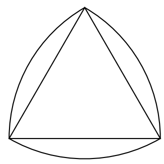
129. 已知向量 $\overrightarrow{a} = (1,4,-5)$, $\overrightarrow{b} = (1,1,4)$, 则 $\overrightarrow{a}$ 在 $\overrightarrow{b}$ 方向上的投影是__________.

130. 若函数 $y = \tan 2x \cdot (2\cos^2 x - 1)$ 的定义域是__________.

131. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_4 + a_8 = 16$, 则该数列前 11 项和 $S_{11} =$__________.

132. 在 $(\sqrt[3]{x} + \dfrac{2}{x})^n$ 的二项展开式中, 所有项的系数之和为 81, 则其常数项为__________.

133. 在均匀分布的条件下, 某些概率问题可转化为几何图形的面积比来计算, 勒洛三角形是由德国机械工程专家勒洛首先发现, 作法为: 以等边三角形的每个顶点为圆心, 以边长为半径, 在另两个顶点间作一段弧, 三段弧围成的曲边三角形就是勒洛三角形, 在勒洛三角形中随机取一点, 此点取自正三角形的概率为__________.



134. 平面上整点 (横、纵坐标都为整数的点) 到直线 $y=\dfrac{5}{3}x+\dfrac{4}{5}$ 的距离的最小值是__________.

135. 设定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $f(x)$、$g(x)$ 都有反函数, 且函数 $f(x-1)$ 和 $g^{-1}(x-3)$ 图像关于直线 $y=x$ 对称, 若 $g(5)=2015$, 则 $f(4)=$__________.

136. 在 $\triangle ABC$ 中, $\dfrac{\sin A}{a}=\dfrac{\sqrt{3}\cos B}{b}$, 如果 $b=2$, 则 $\triangle ABC$ 面积的最大值为__________.

137. 数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=2$, $a_2=7$, $a_{n+2}$ 等于 $a_n\cdot a_{n+1}$ 的个位数, 则 $a_{2019}=$__________.

138. 已知函数 $f(x)$ 满足: ① 对任意 $x\in(0,+\infty)$ 恒有 $f(2x)=2f(x)$ 成立; ② $x\in(1,2]$ 时, $f(x)=2-x$; 若 $f(a)=f(2020)$, 则满足条件的最小的正实数 $a$ 是__________.

139. 给出下列命题, 其中正确的命题为 (　　).

A. 若直线 $a$ 和 $b$ 共面, 直线 $b$ 和 $c$ 共面, 则 $a$ 和 $c$ 共面

B. 直线 $a$ 与平面 $\alpha$ 不垂直, 则 $a$ 与平面 $\alpha$ 内的所有直线都不垂直

C. 直线 $a$ 与平面 $\alpha$ 不平行, 则 $a$ 与平面 $\alpha$ 内的所有直线都不平行

D. 异面直线 $a$、$b$ 不垂直, 则过 $a$ 的任何平面与 $b$ 都不垂直

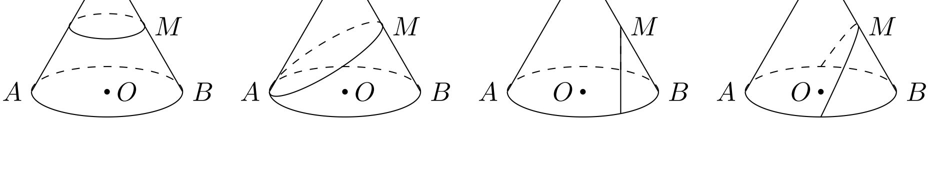
140. 已知平面向量 $\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$、$\overrightarrow{OC}$ 为三个单位向量, 且 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$, 若 $\overrightarrow{OC}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}(x,y\in\mathbf{R})$, 则 $x+y$ 的最大值为 (　　).

A. 1　　B. $\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. 2

141. 已知函数① $f(x)=3\ln x$; ② $f(x)=3\mathrm{e}^{\cos x}$; ③ $f(x)=3\mathrm{e}^{x}$; ④ $f(x)=3\cos x$; 其中对于 $f(x)$ 定义域内的任意一个自变量 $x_1$ 都存在唯一一个自变量 $x_2$, 使 $\sqrt{f(x_1)f(x_2)}=3$ 成立的函数是 (　　).

A. ③　　B. ②③　　C. ①②④　　D. ④

142. 在圆锥 $PO$ 中, 已知高 $PO=2$, 底面圆的直径 $AB=8$, $M$ 为母线 $PB$ 的中点. 根据圆锥曲线的定义, 下列四个图中的截面边界曲线分别为圆 (截面平行于底面)、椭圆 (椭圆长轴为线段 $AM$)、双曲线的一部分 (双曲线所在平面垂直于 $AB$) 及抛物线的一部分 (抛物线对称轴为 $MO$ 所在直线), 下面四个命题:
① 圆的面积为 $4\pi$; ② 椭圆的长轴为 $\sqrt{37}$; ③ 双曲线两渐近线的夹角为 $\arcsin\dfrac{3}{5}$; ④ 抛物线中焦点到准线的距离为 $\dfrac{8\sqrt{5}}{5}$ 中, 正确的个数为 (　　).



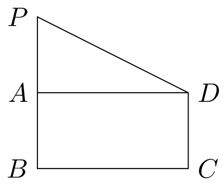
A. 1 个　　　　B. 2 个　　　　C. 3 个　　　　D. 4 个

143. 已知复数 $z_1=\sin 2x+\lambda\mathrm{i}$, $z_2=m+(m-\sqrt{3}\cos 2x)\mathrm{i}(\lambda,m,x\in\mathbf{R})$, 且 $z_1=z_2$.

(1) 若 $\lambda=0$ 且 $0<x<\pi$, 求 $x$ 的值;

(2) 设 $\lambda=f(x)$, 求 $f(x)$ 的最小正周期和单调递减区间.

144. 如图, 在直角梯形 $PBCD$ 中, $PB\parallel DC$, $DC\perp BC$, $PB=BC=2CD=2$, 点 $A$ 是 $PB$ 的中点, 现沿 $AD$ 将平面 $PAD$ 折起, 设 $\angle PAB=\theta$.




(1) 当 $\theta$ 为直角时, 求异面直线 $PC$ 与 $BD$ 所成角的大小;

(2) 当 $\theta$ 为多少时, 三棱锥 $P-ABD$ 的体积为 $\dfrac{\sqrt{2}}{6}$.

145. 对于两个定义域相同的函数 $f(x)$、$g(x)$, 若存在实数 $m$、$n$, 使 $h(x)=mf(x)+ng(x)$, 则称函数 $h(x)$ 是由“基函数 $f(x)$、$g(x)$” 生成的.

(1) $f(x)=x^2+3x$ 和 $g(x)=3x+4$ 生成一个偶函数 $h(x)$, 求 $h(2)$ 的值;

(2) 若 $h(x)=2x^2+3x-1$ 由 $f(x)=x^2+ax$, $g(x)=x+b(a,b\in\mathbf{R}$ 且 $ab\neq 0)$ 生成, 求 $a+2b$ 的取值范围.

146. 设抛物线 $y^2=4px\ (p>0)$ 的准线与 $x$ 轴的交点为 $M$, 过 $M$ 作直线 $l$ 交抛物线于 $A$、$B$ 两点.

(1) 求线段 $AB$ 中点的轨迹方程;

(2) 若线段 $AB$ 的垂直平分线交对称轴于 $N(x_0,0)$, 求 $x_0$ 的取值范围;

(3) 若直线 $l$ 的斜率依次取 $p,p^2,p^3,\cdots,p^n,\cdots$ 时, 线段 $AB$ 的垂直平分线与对称轴的交点依次为 $N_1,N_2,N_3,\cdots,N_n,\cdots$, 当 $0<p<1$ 时, 求: $S=\dfrac{1}{|N_1N_2|}+\dfrac{1}{|N_2N_3|}+\dfrac{1}{|N_3N_4|}+\cdots+\dfrac{1}{|N_nN_{n+1}|}+\cdots$ 的值.

147. 给定无穷数列 $\{a_n\}$, 若无穷数列 $\{b_n\}$ 满足: 对任意 $n\in\mathbf{N}^*$, 都有 $|b_n-a_n|\le 1$, 则称 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ “接近”.

(1) 设 $\{a_n\}$ 是首项为 1, 公比为 $\dfrac{1}{2}$ 的等比数列, $b_n=a_{n+1}+1$, $n\in\mathbf{N}^*$, 判断数列 $\{b_n\}$ 是否与 $\{a_n\}$ 接近, 并说明理由;

(2) 设数列 $\{a_n\}$ 的前四项为: $a_1=1$, $a_2=2$, $a_3=4$, $a_4=8$ , $\{b_n\}$ 是一个与 $\{a_n\}$ 接近的数列, 记集合 $M=\{x|x=b_i,\ i=1,2,3,4\}$, 求 $M$ 中元素的个数 $m$ 的所有可能值;

(3) 已知 $\{a_n\}$ 是公差为 $d$ 的等差数列, 若存在数列 $\{b_n\}$ 满足: $\{b_n\}$ 与 $\{a_n\}$ 接近, 且在 $b_2-b_1,b_3-b_2,\cdots,b_{201}-b_{200}$ 中至少有 100 个为正数, 求 $d$ 的取值范围.

148. 已知复数 $z$ 满足 $z(1+\mathrm{i}^{2020})=2-4\mathrm{i}$(其中, i 为虚数单位), 则 $z=$__________.

149. 函数 $y=\arcsin(x+1)$ 的定义域是__________.

150. 计算行列式的值, $\begin{vmatrix}0&1\\2&3\end{vmatrix}=$__________.

151. 已知双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,\,b>0)$ 的实轴与虚轴长度相等, 则 $C$ 的渐近线方程是__________.

152. 已知无穷数列 $a_n=\dfrac{2}{(-3)^n}$, $n\in\mathbf{N}^*$, 则数列 $\{a_n\}$ 的各项和为__________.

153. 一个圆锥的表面积为 $\pi$, 母线长为 $\dfrac{5}{6}$, 则其底面半径为__________.

154. 某种微生物的日增长率为 $r$, 经过 $n$ 天后其数量由 $p_0$ 变化为 $p$, 并且满足方程 $p=p_0\mathrm{e}^{rn}$. 实验检测, 这种微生物经过一周数量由 2.58 个单位增长到 14.86 个单位, 则增长率 $r=$__________(精确到 1%).

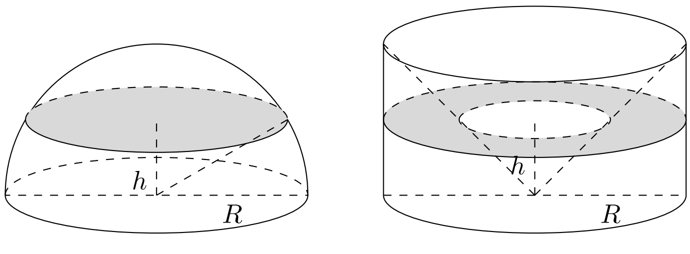
155. 已知 $(x-\dfrac{1}{2x})^n$ 的展开式的常数项为第 6 项, 则常数项为__________.

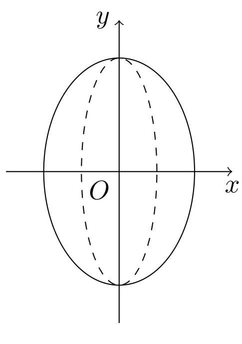
156. 某医院 ICU 从 3 名男医生和 2 名女医生中任选 2 位赴武汉抗疫, 则选出的 2 位医生中至少有 1 位女医生的概率是__________.

157. 已知方程 $x^2+tx+1=0(t\in\mathbf{R})$ 的两个根是 $x_1,x_2$, 若 $|x_1-x_2|=2\sqrt{2}$, 则 $t=$__________.

158. 已知 $O$ 是坐标原点, 点 $A(-1,1)$, 若点 $M(x,y)$ 为平面区域 $\begin{cases}x+y\ge 2,\\ x\le 1,\\ y\le 2,\end{cases}$ 上的一个动点, 则 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OM}$ 的取值范围是__________.

159. 课本中介绍了应用祖暅原理推导棱锥体积公式的做法. 祖暅原理也可用来求旋转体的体积. 现介绍用祖暅原理求球体体积公式的做法: 可构造一个底面半径和高都与球半径相等的圆柱, 然后在圆柱内挖去一个以圆柱下底面圆心为顶点, 圆柱上底面为底面的圆锥, 用这样一个几何体与半球应用祖暅原理 (左图), 即可求得球的体积公式. 请研究和理解球的体积公式求法的基础上, 解答以下问题: 已知椭圆的标准方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{25}=1$, 将此椭圆绕 $y$ 轴旋转一周后, 得一橄榄状的几何体 (右图), 其体积等于__________.




160. 抛物线 $y=4x^2$ 的准线方程是 (　　).

A. $x=-2$　　B. $x=-1$　　C. $y=-\dfrac{1}{8}$　　D. $y=-\dfrac{1}{16}$

161. 若函数 $f(x)=\sin x+a\cos x$ 的图像关于直线 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 对称, 则 $a$ 的值为 (　　).

A. 1　　B. $-1$　　C. $\sqrt{3}$　　D. $-\sqrt{3}$

162. 已知 $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ 是平面内两个互相垂直的单位向量, 若向量 $\overrightarrow{c}$ 满足 $(\overrightarrow{c}-\overrightarrow{a})\cdot(\overrightarrow{c}-\overrightarrow{b})=0$, 则 $|\overrightarrow{c}|$ 的最大值是 (　　).

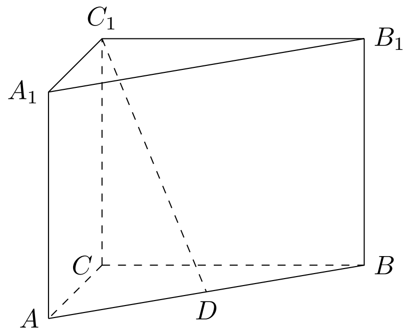
A. 1　　B. 2　　C. $\sqrt{2}$　　D. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

163. 已知命题: "若 $a,b$ 为异面直线, 平面 $\alpha$ 过直线 $a$ 且与直线 $b$ 平行, 则直线 $b$ 与平面 $\alpha$ 的距离等于异面直线 $a,b$ 之间的距离" 为真命题. 根据上述命题, 若 $a,b$ 为异面直线, 且它们之间的距离为 $d$, 则空间中与 $a,b$ 均异面且距离也均为 $d$ 的直线 $c$ 的条数为 (　　).

A. 0 条　　B. 1 条

C. 多于 1 条, 但为有限条　　D. 无数多条

164. 如图, 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $\angle ACB=90°$, $AB=2AC=2$, $D$ 是 $AB$ 的中点.




(1) 若三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积为 $3\sqrt{3}$, 求三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的高;

(2) 若 $C_1C=2$, 求二面角 $D-B_1C_1-A_1$ 的大小.

165. 已知函数 $f(x)=\sqrt{2}\sin(\omega x+\varphi)$, $g(x)=\sqrt{2}\cos\omega x$, $\omega>0$, $\varphi\in[0,\pi)$, 它们的最小正周期为 $\pi$.

(1) 若 $y=f(x)$ 是奇函数, 求 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上的公共递减区间 $D$;

(2) 若 $h(x)=f(x)+g(x)$ 的一个零点为 $x=-\dfrac{\pi}{6}$, 求 $h(x)$ 的最大值.

166. 已知函数 $f(x)=ax+\log_2(2^x+1)$, 其中 $a\in\mathbf{R}$.

(1) 根据 $a$ 的不同取值, 讨论 $f(x)$ 的奇偶性, 并说明理由;

(2) 已知 $a>0$, 函数 $f(x)$ 的反函数为 $f^{-1}(x)$, 若函数 $y=f(x)+f^{-1}(x)$ 在区间 $[1,\ 2]$ 上的最小值为 $1+\log_2 3$, 求函数 $f(x)$ 在区间 $[1,2]$ 上的最大值.

167. 设椭圆 $\Gamma$: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右焦点为 $F(1,0)$, 短轴的一个端点 $B$ 到 $F$ 的距离等于焦距. (1) 求椭圆 $\Gamma$ 的标准方程;

(2) 设 $C$、$D$ 是四条直线 $x=\pm a$, $y=\pm b$ 所围成的矩形在第一、第二象限的两个顶点, $P$ 是椭圆 $\Gamma$ 上任意一点, 若 $\overrightarrow{OP}=m\overrightarrow{OC}+n\overrightarrow{OD}$, 求证: $m^2+n^2$ 为定值;

(3) 过点 $F$ 的直线 $l$ 与椭圆 $\Gamma$ 交于不同的两点 $M$、$N$, 且满足 $\triangle BFM$ 与 $\triangle BFN$ 的面积的比值为 2, 求直线 $l$ 的方程.

168. 定义: 设 $\{a_n\}$ 是无穷数列, 若存在正整数 $k$ 使得对任意 $n\in\mathbf{N}*$, 均有 $a_{n+k}>a_n(a_{n+k}<a_n)$, 则称 $\{a_n\}$ 是近似递增 (减) 数列, 其中 $k$ 叫近似递增 (减) 数列 $\{a_n\}$ 的间隔数.

(1) 若 $a_n=n+(-1)^n$, $\{a_n\}$ 是不是近似递增数列, 并说明理由;

(2) 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=\frac{1}{(-2)}^{n-1}+a$, 其前 $n$ 项的和为 $S_n$, 若 2 是近似递增数列 $\{S_n\}$ 的间隔数, 求 $a$ 的取值范围;

(3) 已知 $a_n=-\frac{n}{2}+\sin n$, 证明 $\{a_n\}$ 是近似递减数列, 并且 4 是它的最小间隔数.