

1. (000077) 判断下列函数 $y = f(x)$ 的奇偶性, 并说明理由:
 - (1) $f(x) = \left|\frac{1}{2}x - 3\right| + \left|\frac{1}{2}x + 3\right|$;
 - (2) $f(x) = x^3 + \frac{2}{x}$;
 - (3) $f(x) = x^2, x \in (k, 2)$ (其中常数 $k < 2$).
2. (000078) 已知 m, n 是常数, 而函数 $y = (m-1)x^2 + 3x + (2-n)$ 为奇函数. 求 m, n 的值.
3. (000085) 已知 $y = f(x)$ 是奇函数, 其定义域为 \mathbf{R} ; 而 $y = g(x)$ 是偶函数, 其定义域为 D . 判断函数 $y = f(x)g(x)$ 的奇偶性, 并说明理由.
4. (000089) 已知 $y = f(x)$ 是定义在 $(-1, 1)$ 上的奇函数, 在区间 $[0, 1)$ 上是严格减函数, 且 $f(1-a) + f(1-a^2) < 0$, 求实数 a 的取值范围.
5. (000093) 已知函数 $y = f(x)$ 为偶函数, $y = g(x)$ 为奇函数, 且 $f(x) + g(x) = x^2 + 2|x-1| + 3$. 求 $y = f(x)$ 及 $y = g(x)$ 的表达式.
6. (000094) 设函数 $y = f(x), x \in \mathbf{R}$ 的反函数是 $y = f^{-1}(x)$.
 - (1) 如果 $y = f(x)$ 是奇函数, 那么 $y = f^{-1}(x)$ 的奇偶性如何?
 - (2) 如果 $y = f(x)$ 在定义域上是严格增函数, 那么 $y = f^{-1}(x)$ 的单调性如何?
7. (000120) 判断下列函数的奇偶性, 并说明理由:
 - (1) $y = \sin |2x|$;
 - (2) $y = \tan 5x$;
 - (3) $y = \frac{1}{\cos x}$;
 - (4) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$.
8. (000136) 已知定义在 \mathbf{R} 上的偶函数 $y = f(x)$ 的最小正周期为 2, 当 $0 \leq x \leq 1$ 时, $f(x) = x$.
 - (1) 求当 $5 \leq x \leq 6$ 时函数 $y = f(x)$ 的表达式;
 - (2) 若函数 $y = kx, x \in \mathbf{R}$ 与函数 $y = f(x)$ 的图像恰有 7 个不同的交点, 求 k 的值.
9. (000344) 定义在 \mathbf{R} 上的偶函数 $y = f(x)$, 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = \lg(x^2 - 3x + 3)$, 则 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上的零点个数
为_____个.
10. (000355) 有以下命题:
 - ① 若函数 $f(x)$ 既是奇函数又是偶函数, 则 $f(x)$ 的值域为 $\{0\}$;
 - ② 若函数 $f(x)$ 是偶函数, 则 $f(|x|) = f(x)$;
 - ③ 若函数 $f(x)$ 在其定义域内不是单调函数, 则 $f(x)$ 不存在反函数;
 - ④ 若函数 $f(x)$ 存在反函数 $f^{-1}(x)$, 且 $f^{-1}(x)$ 与 $f(x)$ 不完全相同, 则 $f(x)$ 与 $f^{-1}(x)$ 图像的公共点必在直线 $y = x$ 上;
 其中真命题的序号是_____ (写出所有真命题的序号).
11. (000361) 设 $m \in \mathbf{R}$, 若 $f(x) = (m+1)x^{\frac{2}{3}} + mx + 1$ 是偶函数, 则 $f(x)$ 的单调递增区间是_____.

12. (000445) 已知奇函数 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的增函数, 数列 $\{x_n\}$ 是一个公差为 2 的等差数列, 满足 $f(x_7) + f(x_8) = 0$, 则 x_{2017} 的值为_____.
13. (000474) 已知函数 $y = f(x)$ 是奇函数, 当 $x < 0$ 时, $f(x) = 2^x - ax$, 且 $f(2) = 2$, 则 $a =$ _____.
14. (000487) 已知 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的奇函数, 则 $f(-1) + f(0) + f(1) =$ _____.
15. (000585) 已知函数 $f(x) = \cos x(\sin x + \sqrt{3} \cos x) - \frac{\sqrt{3}}{2}$, $x \in \mathbf{R}$. 设 $\alpha > 0$, 若函数 $g(x) = f(x + \alpha)$ 为奇函数, 则 α 的值为_____.
16. (000594) 已知函数 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上且周期为 4 的偶函数. 当 $x \in [2, 4]$ 时, $f(x) = \left| \log_4(x - \frac{3}{2}) \right|$, 则 $f(\frac{1}{2})$ 的值为_____.
17. (000655) 若将函数 $f(x) = |\sin(\omega x - \frac{\pi}{8})|$ ($\omega > 0$) 的图像向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位后, 所得图像对应的函数为偶函数, 则 ω 的最小值是_____.
18. (000660) 设 $f(x)$ 为 \mathbf{R} 上的奇函数. 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = 2^x + 2x + b$ (b 为常数), 则 $f(-1)$ 的值为_____.
19. (000702) 设 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的奇函数, 当 $x > 0$ 时, $f(x) = 2^x - 3$. 则不等式 $f(x) < -5$ 的解为_____.
20. (000715) 设奇函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , 当 $x > 0$ 时, $f(x) = x + \frac{m^2}{x} - 1$ (这里 m 为正常数). 若 $f(x) \leq m - 2$ 对一切 $x \leq 0$ 成立, 则 m 的取值范围为_____.
21. (000724) 设 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上以 2 为周期的偶函数, 当 $x \in [0, 1]$ 时, $f(x) = \log_2(x + 1)$, 则函数 $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 上的解析式是_____.
22. (000734) 给出下列函数: ① $y = x + \frac{1}{x}$; ② $y = x^2 + x$; ③ $y = 2^{|x|}$; ④ $y = x^{\frac{2}{3}}$; ⑤ $y = \tan x$; ⑥ $y = \sin(\arccos x)$; ⑦ $y = \lg(x + \sqrt{x^2 + 4}) - \lg 2$. 从这 7 个函数中任取两个函数, 则其中一个是奇函数另一个是偶函数的概率是_____.
23. (000758) 若函数 $f(x) = \sqrt{8 - ax - 2x^2}$ 是偶函数, 则该函数的定义域是_____.
24. (000807) 若函数 $f(x) = \frac{1}{x - 2m + 1}$ 是奇函数, 则实数 $m =$ _____.
25. (000824) 已知 $f(x)$ 是定义在 $[-2, 2]$ 上的奇函数, 当 $x \in (0, 2]$ 时, $f(x) = 2^x - 1$, 函数 $g(x) = x^2 - 2x + m$. 如果对于任意的 $x_1 \in [-2, 2]$, 总存在 $x_2 \in [-2, 2]$, 使得 $f(x_1) \leq g(x_2)$, 则实数 m 的取值范围是_____.
26. (000863) 设定义在 \mathbf{R} 上的奇函数 $y = f(x)$, 当 $x > 0$ 时, $f(x) = 2^x - 4$, 则不等式 $f(x) \leq 0$ 的解集是_____.
27. (000913) 若函数 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的奇函数, 且满足 $f(x + 2) = -f(x)$, 则 $f(2016) =$ _____.
28. (000961) 已知函数 $f(x) = 2^x - a \cdot 2^{-x}$ 的反函数是 $f^{-1}(x)$, $f^{-1}(x)$ 在定义域上是奇函数, 则正实数 $a =$ _____.
29. (001204) 奇函数的图像是否都过原点? 偶函数的图像是否一定和 y 轴相交? 为什么?

30. (001205) 判断下列函数的奇偶性 (既奇又偶, 奇非偶, 偶非奇, 非奇非偶), 并说明理由.

(1) $f(x) = \frac{3}{4} - \frac{4}{3}x^2$;

(2) $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$;

(3) $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$;

(4) $f(x) = x^3 + 2|x|$;

(5) $f(x) = \begin{cases} -x + x^2, & x > 0, \\ x^2 + x, & x \leq 0. \end{cases}$

31. (001206) 已知 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的偶函数, 当 $x \in [0, +\infty)$ 时 $f(x) = x(1 + x^4)$.

(1) 求 $f(-2)$;

(2) 当 $x < 0$ 时, 求 $f(x)$.

32. (001207) 已知 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 的定义域均关于原点对称且交集非空, 且 f 与 g 一奇一偶, 证明: $y = f(x)g(x)$ 是奇函数.

33. (001208) 已知 $f(x) = x^2 + bx + c$ 是偶函数, 求 b, c 应满足的条件, 并说明理由.

34. (001209) 已知 $a > 0$ 且 $a \neq 1$, $f_a(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{a^x - 1}$, $x \in \mathbf{Z}^+ \cup \mathbf{Z}^-$. 对于每一个 a 分析 $f_a(x)$ 的奇偶性.

35. (001213) 已知函数 $y = f(x)$ 与 $y = g(x)$ 的定义域均为 \mathbf{R} .

____(1) 如果 $y = f(x)$ 是奇函数, 那么 $y = |f(x)|$ 是偶函数;

____(2) 如果 $y = f(x)$ 是奇函数, 那么 $y = \sqrt[3]{f(x)}$ 是奇函数;

____(3) 如果 $y = f(x)$ 是奇函数, 那么 $y = f(|x|)$ 是奇函数;

____(4) 如果 $y = f(x)$ 是奇函数, 那么 $y = f(|x|)$ 是偶函数;

____(5) 如果 $y = f(x)$ 是奇函数, $y = g(x)$ 是偶函数, 那么 $y = f(x)g(x)$ 是奇函数;

____(6) 如果 $y = f(x)$ 是奇函数, $y = g(x)$ 不是偶函数, 那么 $y = f(x) + 2g(x)$ 既非奇函数又非偶函数;

____(7) 如果 $y = f(x)$ 不是奇函数, $y = g(x)$ 也不是奇函数, 那么 $y = f(x) - g(x)$ 也不是奇函数;

____(8) 如果 $y = f(x)$ 是奇函数, $y = g(x)$ 不是偶函数, 那么 $y = f(x) + g(x)$ 不是偶函数;

____(9) 如果 $y = f(x) - g(x)$ 是奇函数, $y = g(x)$ 是奇函数, 那么 $y = f(x)$ 也是奇函数;

____(10) 如果 $y = (f(x))^2$ 是偶函数, 那么 $y = f(x)$ 是偶函数或者是奇函数;

____(11) 如果 $y = (f(x))^2$ 是奇函数, 那么 $y = f(x)$ 恒等于零, 因此是奇函数也是偶函数;

____(12) 如果 $y = (f(x))^3$ 是奇函数, 那么 $y = f(x)$ 是奇函数.

36. (001214) 已知函数 $y = f(x)$, $x \in D_f$ 与 $y = g(x)$, $x \in D_g$ 的定义域交集非空.

____(1) 如果 $y = f(x)$ 是奇函数, $y = g(x)$ 是奇函数, 那么 $y = f(x) + x^2g(x)$ 是奇函数;

____(2) 如果 $y = f(x)$ 是奇函数, $y = g(x)$ 是偶函数, 而且它们都不恒等于零, 那么 $y = f(x) + g(x)$ 既不是奇函数又不是偶函数;

____(3) 如果 $y = f(x)$ 是奇函数, $y = g(x)$ 是偶函数, 而且它们在 $D_f \cap D_g$ 上都不恒等于零, 那么 $y = f(x) + g(x)$ 既不是奇函数又不是偶函数;

____(4) 如果 $y = f(x)$ 不是奇函数, $y = g(x)$ 也不是奇函数, 那么 $y = f(x) - g(x)$ 也不是奇函数;

- ____(5) 如果 $y = |f(x)|$ 是奇函数, 那么 $f(x)$ 恒等于零;
- ____(6) 如果 $y = f(x)$ 不是奇函数, 那么 $y = |f(x)|$ 不是偶函数;
- ____(7) 如果 $y = f(x)$ 是偶函数, 且 $y = f(x) + g(x)$ 也是偶函数, 那么 $y = g(x)$ 也是偶函数.

37. (001215) 已知 $y = f(x)$, $x \in D$ 是偶函数.

- ____(1) $y = (f(x))^3 + f(x)$ 是偶函数;
- ____(2) $y = f(2x)$ 是偶函数;
- ____(3) $y = f(x-1)$ 的图像关于直线 $x = -1$ 对称;
- ____(4) $y = f(x-1)$ 的图像关于直线 $x = 1$ 对称;
- ____(5) $y = f(3x+1)$ 的图像关于直线 $x = -\frac{1}{3}$ 对称;
- ____(6) $y = f(3x+1)$ 的图像关于直线 $x = -1$ 对称;
- ____(7) $y = f(x^3+1)$ 是偶函数;
- ____(8) $y = f(x^3+x)$ 是偶函数.

38. (001216) 已知 $y = f(x)$ 是奇函数.

- ____(1) $y = f(3x)$ 是奇函数;
- ____(2) $y = f(x-1) + 2$ 的图像关于点 $(1, 2)$ 对称;
- ____(3) $y = 3f(2x-1) + 6$ 的图像关于点 $(1, 6)$ 对称;
- ____(4) $y = 3f(2x-1) + 6$ 的图像关于点 $(\frac{1}{2}, 6)$ 对称;
- ____(5) $y = 3f(2x-1) + 6$ 的图像关于点 $(\frac{1}{2}, 2)$ 对称;
- ____(6) $y = f(x^2)$ 是偶函数;
- ____(7) $y = f^{-1}(x)$ 一定存在;
- ____(8) $y = f^{-1}(x)$ 如果存在, 则必定是奇函数.

39. (001217) 已知 $y = f(x)$ 在 \mathbf{R} 上是增函数.

- ____(1) 如果 $y = g(x)$ 在区间 I 上递增, 则 $y = f(x) + g(x)$ 在区间 I 上递增;
- ____(2) 如果 $y = g(x)$ 在区间 I 上递增, 则 $y = f(x)g(x)$ 在区间 I 上递增;
- ____(3) 如果 $y = g(x)$ 在区间 I 上递增, 则 $y = f(g(x))$ 在区间 I 上递增;
- ____(4) 如果 $y = g(x)$ 在区间 I 上递增, 则 $y = g(f(x))$ 在 \mathbf{R} 上递增;
- ____(5) 如果 $y = g(x)$ 满足 $y = f(x) - g(x)$ 在 \mathbf{R} 上递增, 那么 $y = g(x)$ 在 \mathbf{R} 上递减;
- ____(6) 如果 $y = g(x)$ 满足 $y = f(x) - g(x)$ 在 \mathbf{R} 上递减, 那么 $y = g(x)$ 在 \mathbf{R} 上递减;
- ____(7) 如果定义在 \mathbf{R} 上的函数 $y = g(x)$ 满足 $y = g(f(x))$ 在 \mathbf{R} 上递增, 则 $y = g(x)$ 在 \mathbf{R} 上递增;
- ____(8) 如果定义在 \mathbf{R} 上的函数 $y = g(x)$ 满足 $y = g(f(x))$ 在 \mathbf{R} 上递减, 则 $y = g(x)$ 在 \mathbf{R} 上递减.

40. (001218) 判断下列各函数的单调性, 并证明.

- (1) $f(x) = \sqrt{1+x}$;
- (2) $f(x) = x + x^5, x \in [0, +\infty)$;
- (3) $f(x) = (\sqrt{x} + 1)(x^2 + 1)$;

41. (001219) 设 a, b 是实常数, 已知函数 $f(x) = ax^4 + bx^3 + 1, x \in [a, a+2]$ 是偶函数, 求 a, b 的值.

42. (001220) 将 $f(x) = |x+1|$ 表示为一个奇函数与一个偶函数的和的形式.

43. (001221) 判断下列函数的奇偶性, 并说明理由.

(1) $f(x) = |1+x| + |1-x|;$

(2) $f(x) = (1-x)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}};$

(3) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1} + x - 1}{\sqrt{x^2+1} + x + 1};$

44. (001222) 是非题, 在每个命题之前的横线上写上“T”或“F”即可, 不用写任何原因.

已知 $y = f(x)$ 是定义在区间 $[-1, 1]$ 上的函数.

____(1) 如果 $f(x)$ 是奇函数, 则 $f(x)$ 要么是增函数, 要么是减函数;

____(2) 如果 $f(x)$ 是偶函数, 则 $f(x)$ 既不是增函数, 又不是减函数;

____(3) 如果 $f(x)$ 是奇函数, 且在 $[0, 1]$ 上递增, 那么 $f(x)$ 在 $[-1, 0]$ 上也递增;

____(4) 如果 $f(x)$ 是奇函数, 且在 $[0, 1]$ 上递增, 那么 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上也递增;

____(5) 如果 $f(x)$ 在 $[-1, 0), [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}], (0, 1]$ 上都是递增的, 那么 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上也递增.

45. (001223) 是非题, 在每个命题之前的横线上写上“T”或“F”即可, 不用写任何原因.

已知 $y = f(x)$ 是定义在 $[-1, 1]$ 上的偶函数, 在 $[0, 1]$ 上递增.

____(1) $f(\frac{1}{2}) > f(-\frac{1}{3});$

____(2) $f(a) > f(b)$ 当且仅当 $a > b;$

____(3) $f(a) > f(b)$ 当且仅当 $|a| > |b|;$

____(4) $f(a) > f(b)$ 当且仅当 $1 \geq |a| > |b|.$

46. (001224) 已知函数 $f(x) = kx^2 - 4x + 5$ 在 $[1, 3]$ 上单调递减, 则实数 k 的取值范围为_____.

47. (001225)[选做] 写出函数 $f(x) = 2x + \frac{1}{x^2}$ 的单调区间, 并证明.

48. (001293)(1) 求证: 当 $a > 0$ 时, $f(x) = \frac{a^x - a^{-x}}{2}$ 是奇函数;

(2) 求证: 当 $a > 0$ 时, $f(x) = x \cdot \frac{a^x - 1}{a^x + 1}$ 是偶函数.

49. (001336)(1) 写出函数 $y = x^{-\frac{4}{3}}$ 的定义域, 奇偶性, 单调区间;

(2) 写出函数 $y = x^{-\frac{3}{4}}$ 的定义域, 奇偶性, 单调区间.

50. (001340) 在下列幂函数 (1) $y = x^{-\frac{3}{2}}$, (2) $y = x^{\frac{5}{4}}$, (3) $y = x^{-\frac{4}{3}}$, (4) $y = x^4$, (5) $y = x^{\frac{3}{7}}$, (6) $y = x^{-6}$ 中, 定义域关于原点对称的有_____, 值域为 \mathbf{R} 的有_____, 奇函数有_____, 在定义域上单调递增的有_____, 图像有一部分在第二象限的有_____.

51. (001491) 判断下列命题的真假, 真命题用“T”表示, 假命题用“F”表示.

- _____ (1) 设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , 若 1 是它的一个周期, 则 2 也是它的一个周期;
- _____ (2) 设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D , 若 1 是它的一个周期, 则 2 也是它的一个周期;
- _____ (3) 设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , 若 1 是它的一个周期, 则 -1 也是它的一个周期;
- _____ (4) 设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D , 若 1 是它的一个周期, 则 -1 也是它的一个周期;
- _____ (5) 设函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , 若 1 是它的一个周期, 则 $\sqrt{2}$ 一定不是它的周期;
- _____ (6) 设函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , 且 $f(x)$ 不是常数函数, 若 1 是它的一个周期, 则 $\sqrt{2}$ 一定不是它的周期;
- _____ (7) 定义在 \mathbf{R} 上的常数函数是周期函数;
- _____ (8) 奇函数一定是周期函数;
- _____ (9) 奇函数一定不是周期函数;
- _____ (10) 偶函数一定是周期函数;
- _____ (11) 偶函数一定不是周期函数;
- _____ (12) 单调函数一定不是周期函数;
- _____ (13) 一定不存在正实数 M , 使得周期函数 $y = f(x)$ 的定义域包含于区间 $[-M, M]$;
- _____ (14) 如果 1 是函数 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 的周期, 且 $f(x)$ 与 $g(x)$ 定义域的交集非空, 那么 1 也是 $y = f(x) + g(x)$ 的周期;
- _____ (15) 设 $f(x), g(x)$ 的定义域均为 \mathbf{R} , 若 1 是函数 $y = f(x)$ 的周期, 则 1 是函数 $y = f(g(x))$ 的周期;

_____(16) 设 $f(x), g(x)$ 的定义域均为 \mathbf{R} , 若 1 是函数 $y = g(x)$ 的周期, 则 1 是函数 $y = f(g(x))$ 的周期;

_____(17) $y = \sin x, x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 是周期函数;

_____(18) $y = \sin x, x \in (0, +\infty)$ 是周期函数;

_____(19) 周期函数一定有最大值和最小值;

_____(20) 定义域为 \mathbf{R} 的周期函数一定有最大值和最小值.

52. (001511) 写出下列函数的奇偶性 (奇非偶, 偶非奇, 非奇非偶, 既奇又偶)

(1) $y = \sin x + \cos x$ 是_____函数;

(2) $y = \ln(1 - \sin x) - \ln(1 + \sin x)$ 是_____函数.

53. (001512) 根据函数奇偶性的定义证明: $y = \frac{\sin x}{\cos x + \cos 2x + \cos 7x}$ 是奇函数.

54. (001539) 判断函数 $y = \frac{1 + \sin x - \cos x}{1 + \sin x + \cos x}$ 的奇偶性, 写出其最小正周期, 单调区间. (最小正周期与单调性不需要论证, 提示: 可先化简, 但必须注意定义域.)

55. (001567) 函数 $y = \sin x$ 与函数 $y = \arcsin x$ 都是_____.

A. 增函数

B. 周期函数

C. 奇函数

D. 单调函数

56. (002465)[选做] 已知曲线 $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t. \end{cases}$

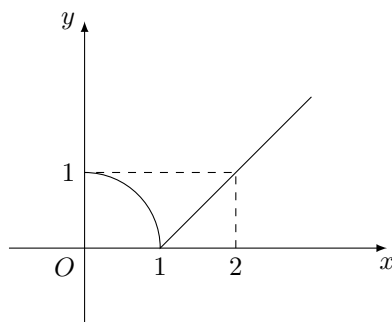
(1) 已知这是一个函数的图像, 求证: 这是一个偶函数的图像;

(2) 已知这是一个函数的图像, 求证: 这是一个周期函数的图像;

(3) 求证: 该曲线是一个函数的图像.

57. (002787)* 设 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的偶函数, 在区间 $(-\infty, 0)$ 上单调递增, 且满足 $f(-a^2 + 2a - 5) < f(2a^2 + a + 1)$, 求实数 a 的取值范围.

58. (002827) 已知 $y = f(x)$ 为偶函数, 且 $y = f(x)$ 的图像在 $x \in [0, 1]$ 时的部分是半径为 1 的圆弧, 在 $x \in [1, +\infty)$ 时的部分是过点 $(2, 1)$ 的射线, 如图.



(1) 写出函数 $y = f(x)$ 在 $x < 0$ 时的单调性:_____;

(2) 写出 $f(f(-2))$ 的值:_____;

(3) 写出方程 $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 的解集:_____.

59. (002842) 给定六个函数: ① $y = \frac{1}{x}$; ② $y = x^2 + 1$; ③ $y = x^{-\frac{1}{3}}$; ④ $y = 2^x$; ⑤ $y = \log_2 x$; ⑥ $y = \sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{1 - x^2}$.

在这六个函数中, 是奇函数但不是偶函数的是_____, 是偶函数但不是奇函数的是_____, 既不是奇函数也不是偶函数的是_____, 既是奇函数又是偶函数的是_____.

60. (002843) 设常数 $a, b \in \mathbf{R}$. 若定义在 $[a - 2, 2a]$ 上的 $f(x) = ax^2 + bx$ 是偶函数, 则 $a =$ _____, $b =$ _____.

61. (002844) 设常数 $a, b \in \mathbf{R}$. 若定义在 $[a - 1, a + 1]$ 上的 $f(x) = ax^2 + x + b$ 是奇函数, 则 $a =$ _____, $b =$ _____.

62. (002845) 若函数 $f(x) = \frac{(x+1)(x+a)}{x}$ 为奇函数, 则实数 $f(x)$ _____.

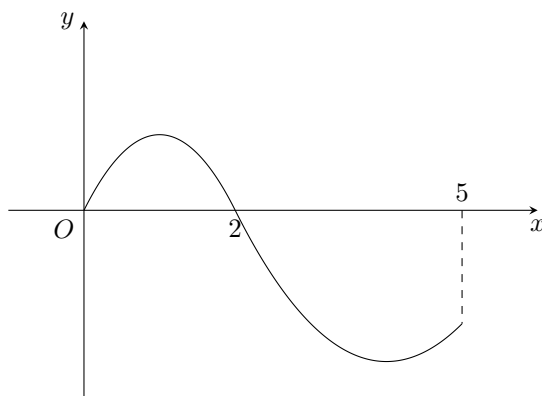
63. (002846) 设函数 $y = f(x)$ 为定义在 \mathbf{R} 上的函数, 则命题: “ $f(-1) \neq f(1)$ 且 $f(-1) \neq -f(1)$ ” 是命题 “ $y = f(x)$ 既不是奇函数也不是偶函数” 的_____条件 (填 “充分不必要”、“必要不充分”、“充要”、“既不充分也不必要” 之中一个).

64. (002847) 设 $y = f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的函数, 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = x^2 - 2x$.

(1) 当 $y = f(x)$ 为奇函数时, 则当 $x < 0$ 时, $f(x) =$ _____;

(2) 当 $y = f(x)$ 为偶函数时, 则当 $x < 0$ 时, $f(x) =$ _____.

65. (002848) 设奇函数 $y = f(x)$ 的定义域为 $[-5, 5]$. 若当 $x \in [0, 5]$ 时, $y = f(x)$ 的图像如图, 则不等式 $xf(x) < 0$ 的解是_____.



66. (002849) 若定义在 \mathbf{R} 上的两个函数 $y = f(x)$ 、 $y = g(x)$ 均为奇函数. 设 $F(x) = af(x) + bg(x) + 1$.
- (1) 若 $F(-2) = 10$, 则 $F(2) =$ _____;
- (2) 若函数 $y = F(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上存在最大值 4, 则 $y = F(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上的最小值为_____.

67. (002850) 判断下列函数 $y = f(x)$ 的奇偶性:

(1) $f(x) = (x-1) \cdot \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$;

(2) $f(x) = \begin{cases} x(1-x), & x < 0, \\ x(1+x), & x > 0. \end{cases}$

68. (002851) 已知函数 $f(x) = x^2 - 2a|x-1|$, $x \in \mathbf{R}$, 常数 $a \in \mathbf{R}$.

- (1) 求证: 函数 $y = f(x)$ 不是奇函数;
- (2) 若函数 $y = f(x)$ 是偶函数, 求实数 $f(x) = \log_3 |2x+a|$ 的值.

69. (002852) 判断下列函数 $y = f(x)$ 的奇偶性:

(1) $f(x) = \frac{1}{a^x - 1} + \frac{1}{2}$ (常数 $a > 0$ 且 $a \neq 1$);

(2) $f(x) = \frac{ax}{x^2 - a}$ (常数 $a \in \mathbf{R}$).

70. (002853) 设 $y = f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的函数, 则下列叙述正确的是 ().

- A. $y = f(x)f(-x)$ 是奇函数
- B. $y = f(x)|f(-x)|$ 是奇函数
- C. $y = f(x) - f(-x)$ 是偶函数
- D. $y = f(x) + f(-x)$ 是偶函数

71. (002854) 设函数 $y = f(x)$ 为定义在 \mathbf{R} 上的函数, 则 “ $f(0) \neq 0$ ” 是 “函数 $y = f(x)$ 不是奇函数” 的 ().

- A. 充分非必要条件
- B. 必要非充分条件
- C. 充要条件
- D. 既不是充分条件, 也不是必要条件

72. (002855) 设 $y = f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的奇函数, 当 $x < 0$ 时, $f(x) = \lg(2-x)$, 则 $x \in \mathbf{R}$ 时, $f(x) =$ _____.

73. (002856) 判断下列函数 $y = f(x)$ 的奇偶性, 并说明理由:

(1) $f(x) = x^3 - \frac{1}{x}$;

(2) $f(x) = \frac{|x+3| - 3}{\sqrt{4-x^2}}$.

74. (002857) 根据常数 a 的不同取值, 讨论下列函数 $y = f(x)$ 的奇偶性, 并说明理由:
- (1) $f(a) \geq f(0)$;
 - (2) $f(x) = x|x - a|$.
75. (002858) 设函数 $y = f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的奇函数. 若 $x > 0$ 时, $f(x) = \lg x$.
- (1) 求方程 $f(x) = 0$ 的解集;
 - (2) 求不等式 $f(x) > -1$ 的解集.
76. (002859) 是否存在实数 b , 使得函数 $g(x) = \frac{2^x}{4^x - b}$ 是奇函数? 若存在, 求 b 的值; 若不存在, 说明理由.
77. (002860) 常数 $a \in \mathbf{R}$. 若函数 $f(x) = \lg(10^x + 1) + ax$ 是偶函数, 则 $a =$ _____.
78. (002861) 已知 $y = f(x)$ 为定义在 \mathbf{R} 上的奇函数, $y = g(x)$ 为定义在 \mathbf{R} 上的偶函数, 且任意 $x \in \mathbf{R}$, 都有 $f(x) = g(x) + \frac{1}{x^2 + x + 1}$, 则 $f(1) + g(1) =$ _____.
79. (002862) 设常数 $a \neq 0$. 若函数 $f(x) = \lg \frac{x + 1 - 2a}{x + 1 + 3a}$. 是否存在实数 a , 使函数 $y = f(x)$ 为奇函数或偶函数? 若存在, 求出 a 的值, 并判断相应的 $y = f(x)$ 的奇偶性; 若不存在, 说明理由.
80. (002872) 设函数 $y = f(x)$ 为 \mathbf{R} 上的奇函数, 且对于任意 $x \in \mathbf{R}$ 都有 $f(x + 2) = -f(x)$.
- (1) 求证: 函数 $y = f(x)$ 为周期函数;
 - (2) 对于任意 $x \in \mathbf{R}$, 求证: $f(1 + x) = f(1 - x)$;
 - (3) 设 $0 \leq x \leq 1$ 时, $f(x) = \frac{1}{2}x$. 求函数 $y = f(x) + \frac{1}{2}$ 在 $-4 \leq x \leq 4$ 时的所有零点;
 - (4) 设 $-1 \leq x \leq 1$ 时, $f(x) = \sin x$.
- ① 写出 $1 \leq x \leq 5$ 时, $y = f(x)$ 的解析式;
 - ② 求 $y = f(x)$ 在 \mathbf{R} 上的解析式.
81. (002879) 已知定义域为 \mathbf{R} 的函数 $y = f(x)$ 是偶函数, 并且其图像关于直线 $x = 1$ 对称.
- (1) 若 $f(0) = 1$, $f(1) = 2$, 求 $f(15) + 2f(20)$ 的值;
 - (2) 设 $x \in [0, 1]$ 时, $f(x) = x^3$.
- ① $1 < x \leq 2$ 时, 求 $y = f(x)$ 的解析式;
 - ② $-2 \leq x < 0$ 时, 求 $y = f(x)$ 的解析式;
 - ③ 求函数 $y = f(x) - \frac{1}{8}$ 在 $[-2, 2]$ 上的所有零点;
 - ④ 求 $y = f(x)$ 在 \mathbf{R} 上的解析式.
82. (002880) 已知 $f(x)$ 是定义域为 $(-\infty, +\infty)$ 的奇函数, 满足 $f(1 - x) = f(1 + x)$. 若 $f(1) = 2$, 则 $f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(50) =$ ().
- A. -50 B. 0 C. 2 D. 50
83. (002881) 已知函数 $y = f(x)$ 对一切 $u, v \in \mathbf{R}$, 都有 $f(u + v) = f(u) + f(v)$.
- (1) 求证: $y = f(x)$ 是奇函数;
 - (2) 若 $f(-3) = a$, 用 a 表示 $f(6)$ 以及 $f(300)$.

84. (002882) 已知定义在 \mathbf{R} 上的函数 $y = f(x)$ 是奇函数, 且 $y = f(x)$ 也是以 4 为周期的一个周期函数.
- (1) 若 $f(1) = 1$, 则 $f(-1) + f(0) =$ _____; $f(10) + f(11) =$ _____;
- (2) * 若 $f(1) = 0$, 则在区间 $[-3, 3]$ 上的零点的个数的最小值为 _____.
85. (002883)* 设定义在 \mathbf{R} 上的函数 $y = f(x)$ 的满足: 对于任意 $x \in \mathbf{R}$, 恒有 $f(-x+1) = -f(x+1)$ 且 $f(-x-1) = -f(x-1)$. 则下面命题中, 正确的命题的序号是 _____.
- ① 函数 $y = f(x)$ 是偶函数; ② 2 是 $y = f(x)$ 的周期; ③ 函数 $y = f(x)$ 图像关于 $(1, 0)$ 对称; ④ 函数 $y = f(x)$ 图像关于 $(3, 0)$ 对称.
86. (002892) 若 $y = f(x)$ 为 \mathbf{R} 上的奇函数, 且在 $(-\infty, 0)$ 上是减函数, 又 $f(-2) = 0$, 则 $f(x) \leq 0$ 的解集为 _____.
87. (002896) 已知定义在区间 $(-1, 1)$ 上的函数 $y = f(x)$ 是奇函数, 也是减函数. 若 $f(1-a) + f(1-a^2) < 0$, 求实数 a 的取值范围.
88. (002899) 已知 $y = f(x)$ 是偶函数, 且在区间 $[0, 4]$ 上递减. 记 $a = f(2)$, $b = f(-3)$, $c = f(-4)$, 则将 a, b, c 按从小到大的顺序排列是 _____.
89. (002903) 设常数 $a, b \in \mathbf{R}$. 已知 $f(x) = \frac{ax^2 + 1}{x + b}$ 是奇函数, $f(1) = 5$.
- (1) 求 a, b 的值;
- (2) 求证: $y = f(x)$ 在区间 $(0, \frac{1}{2}]$ 上是减函数.
90. (002904) 求证: 函数 $f(x) = \frac{1}{x} - \lg \frac{1+x}{1-x}$ 是奇函数, 且在区间 $(0, 1)$ 上递减.
91. (002906) 已知定义 \mathbf{R} 上的函数 $y = f(x)$ 满足下面两个条件:
- (I) 对于任意 $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, 都有 $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$; (II) 当 $x > 0$ 时, $f(x) > 0$, 且 $f(1) = 1$.
- (1) 求证: $y = f(x)$ 是奇函数;
- (2) 求证: $y = f(x)$ 在 \mathbf{R} 上是增函数;
- (3) * 解不等式 $f(x^2 - 1) < 2$.
92. (002908) 下列命题中, 正确的命题的序号是 _____.
- ① 当 $\alpha = 0$ 时, 函数 $y = x^\alpha$ 的图像是一条直线;
- ② 幂函数的图像都经过 $(0, 0)$ 和 $(1, 1)$ 点;
- ③ 当 $\alpha < 0$ 且 $y = x^\alpha$ 是奇函数时, 它也是减函数;
- ④ 第四象限不可能有幂函数的图像.
93. (002911) 已知 $\alpha \in \{-2, -1, -\frac{1}{2}, 1, 2, 3\}$, 若幂函数 $f(x) = x^\alpha$ 为奇函数, 且在 $(0, +\infty)$ 上递减, 则 $\alpha =$ _____.
94. (002918) 设常数 $t \in \mathbf{Z}$. 已知幂函数 $y = (t^3 - t + 1)x^{\frac{1}{3}(1+2t-t^2)}$ 是偶函数, 且在区间 $(0, +\infty)$ 上是增函数, 求整数 t 的值, 并作出相应的幂函数的大致图像.
95. (002922) 设 $\alpha \in \{-3, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1, \frac{3}{2}, 2\}$. 已知幂函数 $y = x^\alpha$ 是奇函数, 且在区间 $(0, +\infty)$ 上是减函数, 则满足条件的 α 的值是 _____.

96. (002923) 下列关于幂函数图像及性质的叙述中, 正确的叙述的序号是_____.

- ① 对于一个确定的幂函数, 第二、三象限不可能同时有该幂函数的图像上的点;
- ② 若某个幂函数图像过 $(-1, -1)$, 则该幂函数是奇函数;
- ③ 若某个幂函数在定义域上递增, 则该幂函数图像必经过原点;
- ④ 幂函数图像不会经过点 $(-\frac{1}{2}, 8)$ 以及 $(-8, -4)$.

97. (002937) 已知定义在 \mathbf{R} 上的函数 $y = f(x)$ 是奇函数, 且有反函数 $y = f^{-1}(x)$. 若 a, b 是两个实数, 则下列点中, 必在 $y = f^{-1}(x)$ 的图像上的点的序号是_____.

- ① $(-f(a), a)$; ② $(-f(a), -a)$; ③ $(-b, -f(b))$; ④ $(b, -f^{-1}(-b))$.

98. (002942) 已知函数 $y = f(x)$ 是奇函数, 且 $y = g(x)$ 是 $y = f(x)$ 的反函数. 若 $x \geq 0$ 时, $f(x) = 3^x - 1$, 则 $g(-8) =$ _____.

99. (002962) 设常数 $a \in \mathbf{R}$. 若函数 $f(x) = \frac{1}{2^x - 1} + a$ 为奇函数, 则 $a =$ _____.

100. (002969) 已知定义域为 \mathbf{R} 的函数 $y = f(x)$ 为奇函数, 且满足 $f(x+2) = -f(x)$. 当 $x \in [0, 1]$ 时, $f(x) = 2^x - 1$.

- (1) 求 $y = f(x)$ 在区间 $[-1, 0]$ 上的解析式;
- (2) 求 $f(\log_{\frac{1}{2}} 24)$ 的值.

101. (002973) 设常数 $a \in \mathbf{R}$. 若二次函数 $f(x) = a(x - a^2)(x + a)$ 为偶函数, 则 $a =$ _____.

102. (003000) 已知函数 $f(x) = \log_a(x + \sqrt{x^2 + 1})$, $a > 1$.

- (1) 求 $f(x)$ 的定义域和值域;
- (2) 求 $f^{-1}(x)$;
- (3) 判断 $f^{-1}(x)$ 的奇偶性、单调性;
- (4) 若实数 m 满足 $f^{-1}(1 - m) + f^{-1}(1 - m^2) < 0$, 求 m 的范围.

103. (003171) 设常数 $\theta \in \mathbf{R}$. 函数 $f(x) = \cos(x + \theta)$ 是偶函数, 当且仅当 $\theta =$ _____.

104. (003180)* 设 $\omega > 0$, $0 < \varphi < \pi$, 若函数 $f(x) = \cos(\omega x + \varphi)$ 为奇函数, 且图像与直线 $y = \frac{1}{2}$ 的所有交点中, 距离最近的两个交点的距离为 π , 则 $\omega =$ _____, $\varphi =$ _____.

105. (003601) 下列函数中, 既是奇函数又是减函数的是 ().

- A. $y = -3x$
- B. $y = x^3$
- C. $y = \log_3 x$
- D. $y = 3^x$

106. (003645) 已知 $\omega \in \mathbf{R}$, 函数 $f(x) = (x - 6)^2 \cdot \sin(\omega x)$. 若存在常数 $a \in \mathbf{R}$, 使得 $f(x + a)$ 为偶函数, 则 ω 的值可能为 ().

- A. $\frac{\pi}{2}$
- B. $\frac{\pi}{3}$
- C. $\frac{\pi}{4}$
- D. $\frac{\pi}{5}$

107. (003658) 已知 $\alpha \in \left\{-2, -1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 2, 3\right\}$. 若幂函数 $f(x) = x^\alpha$ 为奇函数, 且在 $(0, +\infty)$ 上递减, 则 $\alpha =$ _____.

108. (003669) 设常数 $a \in \mathbf{R}$, 函数 $f(x) = a \sin 2x + 2 \cos^2 x$.

(1) 若 $f(x)$ 为偶函数, 求 a 的值;

(2) 若 $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3} + 1$, 求方程 $f(x) = 1 - \sqrt{2}$ 在区间 $[-\pi, \pi]$ 上的解.

109. (003680) 定义在 $(0, +\infty)$ 上的函数 $y = f(x)$ 的反函数为 $y = f^{-1}(x)$. 若 $g(x) = \begin{cases} 3^x - 1, & x \leq 0, \\ f(x), & x > 0 \end{cases}$ 为奇函数, 则 $f^{-1}(x) = 2$ 的解为_____.

110. (003726) 若函数 $f(x) = \frac{k - 2^x}{1 + k \cdot 2^x}$, ($k \neq 1, k \in \mathbf{R}$) 在定义域内为奇函数, 则 $k =$ _____.

111. (003783)(理科) 已知 $f(x)$ 是 \mathbf{R} 上的奇函数, $g(x)$ 是 \mathbf{R} 上的偶函数, 若函数 $f(x) + g(x)$ 的值域为 $[1, 3]$, 则 $f(x) - g(x)$ 的值域为_____.

(文科) 已知 $f(x)$ 是 \mathbf{R} 上的奇函数, $g(x)$ 是 \mathbf{R} 上的偶函数, 若函数 $f(x) + g(x)$ 的值域为 $[1, 3]$, 则 $f(-x) + g(x)$ 的值域为_____.

112. (003801) 下列函数中, 既是偶函数, 又是在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递减的函数为_____.

A. $y = \lg \frac{1}{|x|}$

B. $y = x^3$

C. $y = 3^{|x|}$

D. $y = x^2$

113. (003889) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} ax^2 - 2x - 1, & x \geq 0, \\ x^2 + bx + c, & x < 0 \end{cases}$ 是偶函数, 直线 $y = t$ 与函数 $y = f(x)$ 的图像自左向右依次交于四个不同点 A, B, C, D . 若 $AB = BC$, 则实数 t 的值为_____.

114. (003892) 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 上的偶函数, 当 $x > 0$ 时, $f(x) = \begin{cases} 2^{|x-1|} - 1, & 0 < x \leq 2, \\ \frac{1}{2}f(x-2), & x > 2, \end{cases}$ 则函数 $g(x) = 4f(x) - 1$ 的零点的个数为_____.

A. 4

B. 6

C. 8

D. 10

115. (003904) 设 $f(x) = a \sin 2x + b \cos 2x$, 其中 $a, b \in \mathbf{R}, ab \neq 0$. 若 $f(x) \leq \left|f\left(\frac{\pi}{6}\right)\right|$ 对一切 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立, 则 ① $f\left(\frac{11\pi}{12}\right) = 0$; ② $\left|f\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right| < \left|f\left(\frac{\pi}{5}\right)\right|$; ③ $f(x)$ 既不是奇函数也不是偶函数; ④ $\left[k\pi + \frac{\pi}{6}, k\pi + \frac{2\pi}{3}\right]$ ($k \in \mathbf{Z}$) 是 $f(x)$ 的单调区间; ⑤ 存在经过点 (a, b) 的直线与函数 $f(x)$ 的图像不相交. 以上结论正确的是_____ (写出所有正确结论的编号).

116. (003932) 若函数 $y = \cos(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, 0 < \varphi < \pi$) 为奇函数, A, B 分别为相邻的两个最高点, 并且两点间的距离为 4, 则该函数的图像的对称轴为_____.

117. (003935) 设函数 $f(x) = \cos^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \sin^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, $x \in \mathbf{R}$, 则函数 $f(x)$ 是_____.

A. 最小正周期为 π 的奇函数

B. 最小正周期为 π 的偶函数

C. 最小正周期为 $\frac{\pi}{2}$ 的奇函数

D. 最小正周期为 $\frac{\pi}{2}$ 的偶函数

118. (003966)(理科) 已知函数 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的单调递减函数且为奇函数, 数列 $\{a_n\}$ 是等差数列, $a_{1007} > 0$, 则 $f(a_1) + f(a_2) + f(a_3) + \cdots + f(a_{2012}) + f(a_{2013})$ 的值_____.

- A. 恒为正数 B. 恒为负数 C. 恒为 0 D. 可正可负

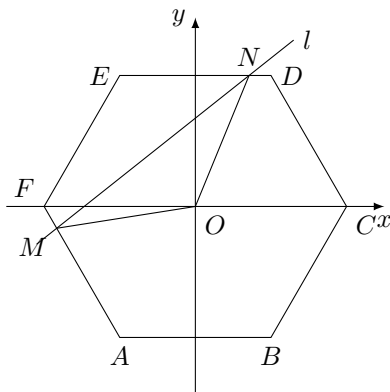
119. (003980)(理科) 在极坐标系中, “点 P 是极点” 是 “点 P 的极坐标是 $(0, 0)$ ” 成立的_____.

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

(文科) \vec{a}, \vec{b} 为非零向量, “函数 $f(x) = (x\vec{a} + \vec{b})^2$ 为偶函数” 是 “ $\vec{a} \perp \vec{b}$ ” 的_____.

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

120. (004074) 如图, 在直角坐标平面内有一个边长为 a , 中心在原点 O 的正六边形 $ABCDEF$, $AB \parallel Ox$. 直线 $l: y = kx + t$ (k 是常数) 与正六边形交于 M, N 两点, 记 $\triangle OMN$ 的面积为 S , 则函数 $S = f(t)$ 的奇偶性为 ().



- A. 偶函数 B. 奇函数
C. 不是奇函数, 也不是偶函数 D. 奇偶性与 k 有关

121. (004094) 已知 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的奇函数, 对任意两个不相等的正数 x_1, x_2 都有 $\frac{x_2 f(x_1) - x_1 f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$, 则

函数 $g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ ().

- A. 是偶函数, 且在 $(0, +\infty)$ 上单调递减 B. 是偶函数, 且在 $(0, +\infty)$ 上单调递增
C. 是奇函数, 且单调递减 D. 是奇函数, 且单调递增

122. (004097) 已知函数 $f(x) = 1 - \frac{6}{a^{x+1} + a}$ ($a > 0, a \neq 1$) 是定义在 \mathbf{R} 上的奇函数.

- (1) 求实数 a 的值及函数 $f(x)$ 的值域;
(2) 若不等式 $t \cdot f(x) \geq 3^x - 3$ 在 $x \in [1, 2]$ 上恒成立, 求实数 t 的取值范围.

123. (004108) 已知函数 $f(x) = g(x) + |2x - 1|$ 为奇函数, 若 $g(-2) = 7$, 则 $g(2) =$ _____.

124. (004130) 已知常数 $b, c \in \mathbf{R}$. 若函数 $f(x) = (x^2 + x - 2)(x^2 + bx + c)$ 为偶函数, 则 $b + c =$ _____.

125. (004202) 已知函数 $f(x) = \sqrt{2} \sin(\omega x + \varphi)$, $g(x) = \sqrt{2} \cos \omega x$, $\omega > 0$, $\varphi \in [0, \pi)$, 它们的最小正周期为 π .

(1) 若 $y = f(x)$ 是奇函数, 求 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上的公共递减区间 D ;

(2) 若 $h(x) = f(x) + g(x)$ 的一个零点为 $x = -\frac{\pi}{6}$, 求 $h(x)$ 的最大值.

126. (004203) 已知函数 $f(x) = ax + \log_2(2^x + 1)$, 其中 $a \in \mathbf{R}$.

(1) 根据 a 的不同取值, 讨论 $f(x)$ 的奇偶性, 并说明理由;

(2) 已知 $a > 0$, 函数 $f(x)$ 的反函数为 $f^{-1}(x)$, 若函数 $y = f(x) + f^{-1}(x)$ 在区间 $[1, 2]$ 上的最小值为 $1 + \log_2 3$, 求函数 $f(x)$ 在区间 $[1, 2]$ 上的最大值.

127. (004224) 对于两个定义域相同的函数 $f(x)$ 、 $g(x)$, 若存在实数 m 、 n , 使 $h(x) = mf(x) + ng(x)$, 则称函数 $h(x)$ 是由“基函数 $f(x)$ 、 $g(x)$ ”生成的.

(1) $f(x) = x^2 + 3x$ 和 $g(x) = 3x + 4$ 生成一个偶函数 $h(x)$, 求 $h(2)$ 的值;

(2) 若 $h(x) = 2x^2 + 3x - 1$ 由 $f(x) = x^2 + ax$, $g(x) = x + b$ ($a, b \in \mathbf{R}$ 且 $ab \neq 0$) 生成, 求 $a + 2b$ 的取值范围.

128. (004240) 已知函数 $f(x) = \cos(3x + \varphi)$ 满足 $f(x) \leq f(1)$ 恒成立, 则 ().

A. 函数 $f(x - 1)$ 一定是奇函数

B. 函数 $f(x + 1)$ 一定是奇函数

C. 函数 $f(x - 1)$ 一定是偶函数

D. 函数 $f(x + 1)$ 一定是偶函数

129. (004256) 设 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的奇函数, 当 $x > 0$ 时, $f(x) = a^x + b$ ($0 < a < 1$, $b \in \mathbf{R}$), 若 $f(x)$ 存在反函数, 则 b 的取值范围是_____.

130. (004276) 若函数 $f(x) = \log_2(2^x + 1) + kx$ 是偶函数, 则 $k =$ _____.

131. (004286) 已知函数 $f(x) = a - \frac{4}{3^x + 1}$ (a 为实常数).

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的奇偶性, 并说明理由;

(2) 当 $f(x)$ 为奇函数时, 对任意的 $x \in [1, 5]$, 不等式 $f(x) \geq \frac{u}{3^x}$ 恒成立, 求实数 u 的最大值.

132. (004305) 定义 $F(a, b) = \begin{cases} a, & a \leq b, \\ b, & a > b, \end{cases}$ 已知函数 $f(x)$ 、 $g(x)$ 定义域都是 \mathbf{R} , 给出下列命题:

(1) 若 $f(x)$ 、 $g(x)$ 都是奇函数, 则函数 $F(f(x), g(x))$ 为奇函数;

(2) 若 $f(x)$ 、 $g(x)$ 都是减函数, 则函数 $F(f(x), g(x))$ 为减函数;

(3) 若 $f_{\min}(x) = m$, $g_{\min}(x) = n$, 则 $F_{\min}(f(x), g(x)) = F(m, n)$;

(4) 若 $f(x)$ 、 $g(x)$ 都是周期函数, 则函数 $F(f(x), g(x))$ 是周期函数.

其中正确命题的个数为 ().

A. 1 个

B. 2 个

C. 3 个

D. 4 个

133. (004313) 设 $a \in \mathbf{R}$. 若 a 使得函数 $f(x) = \sqrt{8 - ax - 2x^2}$ 是偶函数, 则函数 $y = f(x)$ 的定义域是_____.

134. (004320) 设 $a \in \mathbf{R}$. 若函数 $y = f(x)$ 是奇函数, 且 $x > 0$ 时, $f(x) = a(x - 1) + 1$. 若 $y = f(x)$ 是单调增函数, 则 a 取值范围为_____.

135. (004329) 已知函数 $f(x) = \sin x$.
- (1) 设 $a \in \mathbf{R}$, 判断函数 $g(x) = a \cdot f(x) + f(x + \frac{\pi}{2})$ 的奇偶性, 并说明理由;
 - (2) 设函数 $F(x) = 2f(x) - \sqrt{3}$. 对任意 $b \in \mathbf{R}$, 求 $y = F(x)$ 在区间 $[b, b + 100\pi]$ 上零点个数所有可能值.
136. (004339) 已知偶函数 $y = f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , 且当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = x - 4$, 则不等式 $xf(x) \leq 5$ 的解为_____.
137. (004362) 已知常数 $b, c \in \mathbf{R}$. 若函数 $f(x) = (x^2 + x - 2)(x^2 + bx + c)$ 为偶函数, 则 $b + c =$ _____.
138. (004373) 已知函数 $f(x) = x|x - a|$, 其中 a 为常数.
- (1) 当 $a = 1$ 时, 解不等式 $f(x) < 2$;
 - (2) 已知 $g(x)$ 是以 2 为周期的偶函数, 且当 $0 \leq x \leq 1$ 时, 有 $g(x) = f(x)$. 若 $a < 0$, 且 $g(\frac{3}{2}) = \frac{5}{4}$, 求函数 $y = g(x)(x \in [1, 2])$ 的反函数;
 - (3) 若在 $[0, 2]$ 上存在 n 个不同的点 $x_i (i = 1, 2, \dots, n, n \geq 3)$, $x_1 < x_2 < \dots < x_n$, 使得 $|f(x_1) - f(x_2)| + |f(x_2) - f(x_3)| + \dots + |f(x_{n-1}) - f(x_n)| = 8$, 求实数 a 的取值范围.
139. (004375) 已知常数 $a \in \mathbf{R}$, 函数 $f(x) = x^2 (-1 \leq x \leq a)$ 是偶函数, 则 $a =$ _____.
140. (004386) 已知常数 $a \in \mathbf{R}$, 函数 $f(x) = ax^2 + \lg \frac{1+x}{1-x}$.
- (1) 若 $a = 0$, 判断 $f(x)$ 的单调性并证明;
 - (2) 问: 是否存在 a , 使得 $f(x)$ 为奇函数? 若存在, 求出所有 a 的值; 若不存在, 说明理由.
141. (004395) $f(x)$ 是偶函数, 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = 2^x - 1$, 则不等式 $f(x) > 1$ 的解集为_____.
142. (004407) 已知函数 $f(x) = \frac{ax^2 + 1}{bx + c}$ 是奇函数, a, b, c 为常数.
- (1) 求实数 c 的值;
 - (2) 若 $a, b \in \mathbf{Z}$, 且 $f(1) = 2, f(2) < 3$, 求 $f(x)$ 的解析式;
 - (3) 已知 $b > 0$, 若 $f(x) \geq f(1)$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立, 且 $\{x | f[f(x)] \geq x\} \cap [1, 2] \neq \emptyset$, 求 b 的取值范围.
143. (004436) 若定义在实数集 \mathbf{R} 上的奇函数 $y = f(x)$ 的图像关于直线 $x = 1$ 对称, 且当 $0 \leq x \leq 1$ 时, $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$, 则方程 $f(x) = \frac{1}{3}$ 在区间 $(-4, 10)$ 内的所有实根之和为_____.
144. (004456) 在高中阶段, 我们学习过函数的概念、性质和图像, 以下两个结论是正确的: ① 偶函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b] (a < b)$ 上的取值范围与在区间 $[-b, -a]$ 上的取值范围是相等的. ② 周期函数 $f(x)$ 在一个周期内的取值范围也就是 $f(x)$ 在定义域上的值域. 由此可求函数 $g(x) = 2|\sin x| + 19|\cos x|$ 的值域为_____.
145. (004457) 定义在实数集 \mathbf{R} 上的偶函数 $f(x)$ 满足 $f(x+1) = 1 + \sqrt{2f(x) - f^2(x)}$, 则 $f(\frac{2019}{2}) =$ _____.
146. (004464) 已知 a 是实常数, 函数 $f(x) = a \lg(1-x) - \lg(1+x)$.
- (1) 若 $a = 1$, 求证: 函数 $y = f(x)$ 是减函数;
 - (2) 讨论函数 $f(x)$ 的奇偶性, 并说明理由.

147. (004474) 已知 $\omega, t > 0$, 函数 $f(x) = \begin{vmatrix} \sqrt{3} & \sin \omega x \\ 1 & \cos \omega x \end{vmatrix}$ 的最小正周期为 2π , 将 $f(x)$ 的图像向左平移 t 个单位, 所得图像对应的函数为偶函数, 则 t 的最小值为_____.

148. (004525) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \text{ 为无理数}, \\ x, & x \text{ 为有理数}, \end{cases}$ 则以下 4 个命题: ① $f(x)$ 是偶函数; ② $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上是增函数; ③ $f(x)$ 的值域为 \mathbf{R} ; ④ 对于任意的正有理数 a , $g(x) = f(x) - a$ 存在奇数个零点. 其中正确命题的个数为 ().

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

149. (004540) 已知 $y = f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的奇函数, 且当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = -\frac{1}{4^x} + \frac{1}{2^x}$, 则此函数的值域为_____.

150. (004544) 设函数 $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbf{Q}, \\ \pi, & x \notin \mathbf{Q}. \end{cases}$ 下列结论不正确的是 ().

A. $f(x)$ 是偶函数

B. $f(x)$ 是周期函数

C. 该函数有最大值也有最小值

D. 方程 $f(f(x)) = 1$ 的解集为 $\{1\}$

151. (004622) 若 $f(x)$ 是奇函数, 且当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = x^2 + x$, 则当 $x < 0$ 时, $f(x) =$ _____.

152. (004671) 设 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的函数, 且满足 $f(1) = 0$. 若 $y = f(x) + a \cdot 2^x$ 是奇函数, $y = f(x) + 3^x$ 是偶函数, 则 a 的值为_____.

153. (004674) 下列函数中, 既是奇函数, 又是减函数的是 ().

A. $y = x^{-1}$

B. $y = -\arcsin x$

C. $y = \log_2 x$

D. $y = 2^x$

154. (004680) 已知函数 $f(x) = 2^x + \frac{a}{2^x}$, a 为实常数.

(1) 若函数 $f(x)$ 为奇函数, 求 a 的值;

(2) 若 $x \in [0, 1]$ 时 $f(x)$ 的最小值为 2, 求 a 的值;

(3) 若方程 $f(x) = 6$ 有两个不等的实根 x_1, x_2 , 且 $|x_1 - x_2| \leq 1$, 求 a 的取值范围.

155. (004697) 已知非空集合 A, B 满足: $A \cup B = \mathbf{R}$, $A \cap B = \emptyset$, 函数 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in A, \\ 2x - 1, & x \in B. \end{cases}$ 对于下列两个

命题: ① 存在唯一的非空集合对 (A, B) , 使得 $f(x)$ 为偶函数; ② 存在无穷多非空集合对 (A, B) , 使得方程 $f(x) = 2$ 无解. 下面判断正确的是 ().

A. ① 正确, ② 错误

B. ① 错误, ② 正确

C. ①、② 都正确

D. ①、② 都错误

156. (004731) 已知集合 $A = \{-2, -1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, 2, 3\}$, 从集合 A 中任取一个元素 a , 使函数 $y = x^a$ 是奇函数且在 $(0, +\infty)$ 上递增的概率为_____.

157. (004741) 已知函数 $f(x) = t \sin x + |\cos x|$, 其中常数 $t \in \mathbf{R}$.

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的奇偶性, 并说明理由;

(2) $\triangle ABC$ 中内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 且 $a = 2, b = \sqrt{5}, f(A) = 2$, 求当 $t = \sqrt{3}$ 时, $\triangle ABC$ 的面积.

158. (004757) 下列函数中既是奇函数, 又在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递减的函数为 ().

A. $y = \sqrt{x}$

B. $y = \log_{\frac{1}{2}} x$

C. $y = -x^3$

D. $y = x + \frac{1}{x}$

159. (005360) 已知奇函数 $y = f(x)$ 在 $x < 0$ 时是减函数, 求证: $y = f(x)$ 在 $x > 0$ 时也是减函数.

160. (005361) 已知 $f(x)$ 是奇函数, 且当 $x > 0$ 时 $f(x) = x(1 - x)$, 求 $f(x)$ 在 $x < 0$ 时的表达式.

161. (005491) 若 $f(x) = (m - 1)x^2 + 3mx + 3$ 为偶函数, 则 $f(x)$ 在区间 $(-4, 2)$ 上 ().

A. 是增函数

B. 是减函数

C. 先是增函数后是减函数

D. 先是减函数后是增函数

162. (005492) 函数 $f(x) = \begin{cases} 1 - x, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1 + x, & x < 0, \end{cases}$ 则该函数 ().

A. 是奇函数, 但不是偶函数

B. 是偶函数, 但不是奇函数

C. 既是奇函数, 也是偶函数

D. 既不是奇函数, 也不是偶函数

163. (005493) 下列函数中既是奇函数, 又在定义域上为增函数的是 ().

A. $f(x) = 3x + 1$

B. $f(x) = \frac{1}{x}$

C. $f(x) = 1 - \frac{1}{x}$

D. $f(x) = x^3$

164. (005494) 若 $f(x)$ 为定义在区间 $[-6, 6]$ 上的偶函数, 且满足 $f(3) > f(1)$, 则恒成立的是 ().

A. $f(-1) < f(3)$

B. $f(0) < f(6)$

C. $f(3) > f(2)$

D. $f(2) > f(0)$

165. (005495) 函数 $f(x) = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{2 - |x + 2|}$ ().

A. 是奇函数, 但不是偶函数

B. 是偶函数, 但不是奇函数

C. 既是奇函数, 又是偶函数

D. 既不是奇函数, 也不是偶函数

166. (005496) 已知 $f(x)$ 是奇函数, 则下列各点中在函数 $y = f(x)$ 的图像上的点的是 ().

A. $(a, f(-a))$

B. $(-a, -f(a))$

C. $(\frac{1}{a}, -f(\frac{1}{a}))$

D. $(-\sin a, -f(-\sin a))$

167. (005497) 若 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的偶函数, 且当 $x < 0$ 时, $f(x) = 2x - 3$, 则当 $x > 0$ 时, $f(x) =$ _____.

168. (005498) 若奇函数 $f(x)$ 的定义域是 \mathbf{R} , 则 $f(0) =$ _____.

169. (005499) 若奇函数 $f(x)$ 在区间 $[-3, -1]$ 上是增函数, 且有最大值 -2 , 则 $f(x)$ 在 $[1, 3]$ 上是_____ 函数 (填“增”或“减”), 且最小值等于_____.

170. (005500) 设 $f(x)$ 为定义在 \mathbf{R} 上的偶函数, 且 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上是增函数, 则 $f(-4), f(-2), f(3)$ 由小到大的排列顺序为_____.

171. (005502) 设 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上是奇函数, 且当 $x \in [0, +\infty)$ 时, $f(x) = x(1 + \sqrt[3]{x})$, 那么当 $x \in (-\infty, 0)$ 时, $f(x) =$ ().

- A. $-x(1 + \sqrt[3]{x})$ B. $x(1 + \sqrt[3]{x})$ C. $-x(1 - \sqrt[3]{x})$ D. $x(1 - \sqrt[3]{x})$

172. (005504) 函数 $f(x) = x|x| - 2x$ 是 ().

- A. 偶函数, 且在 $(-1, 1)$ 上是增函数 B. 奇函数, 且在 $(-1, 1)$ 上是减函数
C. 偶函数, 且在 $(-1, 1)$ 上是减函数 D. 奇函数, 且在 $(-1, 1)$ 上是增函数

173. (005505) 若函数 $y = f(x)$ 是偶函数, 其图像与 x 轴有四个交点, 则方程 $f(x) = 0$ 的所有实数根之和为 ().

- A. 4 B. 2 C. 1 D. 0

174. (005506) 函数 $f(x) = \frac{x}{2^{1+x} + 2^{1-x}}$ ().

- A. 是奇函数, 但不是偶函数 B. 是偶函数, 但不是奇函数
C. 既是奇函数, 又是偶函数 D. 既不是奇函数, 也不是偶函数

175. (005507) 已知奇函数 $f(x)$ 在 $x > 0$ 时的表达式为 $f(x) = 2x - \frac{1}{2}$, 则当 $x \leq -\frac{1}{4}$ 时, 恒有 ().

- A. $f(x) > 0$ B. $f(x) < 0$ C. $f(x) - f(-x) \leq 0$ D. $f(x) - f(-x) > 0$

176. (005509) 已知 $f(x), g(x)$ 都是定义在 \mathbf{R} 上的函数, $f(x)$ 为奇函数, $g(x)$ 为偶函数, 且 $f(x) \cdot g(x)$ 恒不为 0, 判断下列函数的奇偶性: (1) $f(x) + g(x)$:_____ ; (2) $f(x) \cdot g(x)$:_____ ; (3) $f[f(x)]$:_____ ; (4) $f[g(x)]$:_____ ; (5) $g[f(x)]$:_____ ; (6) $g[g(x)]$:_____ .

177. (005510) 判断函数 $f(x) = 5$ 的奇偶性:_____.

178. (005511) 判断函数 $f(x) = \sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{1 - x^2}$ 的奇偶性:_____.

179. (005512) 判断函数 $f(x) = x^2 - 2x^2 + 3$ 的奇偶性:_____.

180. (005513) 判断函数 $x \in [-4, 4)$ 的奇偶性:_____.

181. (005514) 判断函数 $f(x) = |3x + 2| - |3x - 2|$ 的奇偶性:_____.

182. (005515) 判断函数 $f(x) = \frac{x^2(x-1)}{x-1}$ 的奇偶性:_____.

183. (005516) 判断函数 $f(x) = \frac{1}{2}[g(x) - g(-x)]$ 的奇偶性:_____.

184. (005517) 求证: 函数 $f(x) = \frac{x+1+\sqrt{1+x^2}}{x-1+\sqrt{1+x^2}}$ 是奇函数.

185. (005518) 求证: 函数 $f(x) = \begin{cases} x(1-x), & x > 0, \\ x(1+x), & x < 0 \end{cases}$ 是奇函数.

186. (005519) 已知奇函数 $f(x)$ 在定义域 $(-l, l)$ 上是减函数, 求满足 $f(1-m) + f(1-m^2) < 0$ 的实数 m 的取值范围.
187. (005520) 已知偶函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上是增函数. 求不等式 $f(2x+5) < f(x^2+2)$ 的解集.
188. (005521) 是否存在既是奇函数又是偶函数的函数? 说明理由
189. (005522) 求证: 定义域为 $(-l, l)$ 的任何函数都能表示成一个奇函数与一个偶函数之和.
190. (005544) 若幂函数 $f(x)$ 是奇函数, 则 $f^{-1}(1) = \underline{\hspace{2cm}}$, $f^{-1}(-1) = \underline{\hspace{2cm}}$.
191. (005594) 若 $f(x) = a + \frac{1}{4^x + 1}$ 是奇函数, 求常数 a 的值.
192. (005595) 若 $f(x) = x^2(\frac{1}{a^x - 1} + m)$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 为奇函数, 求常数 m 的值.
193. (005596) 已知函数 $f(x) = (\frac{1}{2^x - 1} + \frac{1}{2})x^3$.
- (1) 求函数的定义域;
 - (2) 讨论 $f(x)$ 的奇偶性;
 - (3) 求证: $f(x) > 0$.
194. (005597) 已知 $f(x) = \frac{a^x - 1}{a^x + 1}$ ($a > 1$).
- (1) 判断函数 $f(x)$ 的奇偶性;
 - (2) 求函数 $f(x)$ 的值域;
 - (3) 求证: $f(x)$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上是增函数.
195. (005691) 设 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上的偶函数, 且它在 $[0, +\infty)$ 上是增函数, 记 $a = f(-\log_{\sqrt{2}} \sqrt{3})$, $b = f(-\log_{\sqrt{3}} \sqrt{2})$, $c = f(-2)$, 则 a, b, c 的大小关系是 ().
- A. $a > b > c$ B. $b > c > a$ C. $c > a > b$ D. $c > b > a$
196. (005713) 函数 $y = \lg \frac{1-x}{1+x}$ ().
- A. 是奇函数, 且在 $(-1, 1)$ 是增函数 B. 是奇函数, 且在 $(-1, 1)$ 上是减函数
- C. 是偶函数, 且在 $(-1, 1)$ 是增函数 D. 是偶函数, 且在 $(-1, 1)$ 上是减函数
197. (005714) 函数 $f(x) = \ln(e^x + 1) - \frac{x}{2}$ ().
- A. 是奇函数, 但不是偶函数 B. 是偶函数, 但不是奇函数
- C. 既是奇函数, 又是偶函数 D. 没有奇偶性
198. (005742) 实数 a 为何值时, 函数 $f(x) = 2^x - 2^{-x} \lg a$ 为奇函数?
199. (005750) 已知函数 $f(x) = \log_a \frac{x+b}{x-b}$ ($a > 0$, $b > 0$ 且 $a \neq 1$).
- (1) 求 $f(x)$ 的定义域;
 - (2) 讨论 $f(x)$ 的奇偶性;
 - (3) 讨论 $f(x)$ 的单调性;
 - (4) 求 $f(x)$ 的反函数 $f^{-1}(x)$.

200. (005830) 已知 $f(x+y) = f(x) + f(y)$ 对于任何实数 x, y 都成立.
- (1) 求证: $f(2x) = 2f(x)$;
 - (2) 求 $f(0)$ 的值;
 - (3) 求证: $f(x)$ 为奇函数.
201. (005831) 已知函数 $f(x)$ 对任何实数 x, y 满足 $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$, 且 $f(0) \neq 0$, 求证: $f(x)$ 是偶函数.
202. (005832) 已知函数 $f(x) (x \neq 0)$ 满足 $f(xy) = f(x) + f(y)$. (1) 求证: $f(1) = f(-1) = 0$;
- (2) 求证: $f(x)$ 为偶函数;
 - (3) 若 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数, 解不等式 $f(x) + f(x - \frac{1}{2}) \leq 0$.
203. (005847) 已知函数 $f(2x+1)$ 是偶函数, 求函数 $f(2x)$ 的图像的对称轴.
204. (005855) 已知 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有单调性, 且满足 $f(1) = 2$ 和 $f(x+y) = f(x) + f(y)$.
- (1) 求证: $f(x)$ 为奇函数;
 - (2) 若 $f(x)$ 满足 $f(k \log_2 t) + f(\log_2 t - \log_2^2 t - 2) < 0$, 求实数 k 的取值范围.
205. (005968) 函数 $y = \cos(\tan x)$ ().
- A. 是奇函数, 但不是偶函数
 - B. 是偶函数, 但不是奇函数
 - C. 既不是奇函数, 也不是偶函数
 - D. 奇偶性无法确定
206. (006000) 函数 $y = \lg(1 - \sin x) - \lg(1 + \sin x)$ ().
- A. 是奇函数, 但非偶函数
 - B. 是偶函数, 但非奇函数
 - C. 既不是奇函数, 也不是偶函数
 - D. 奇偶性无法确定
207. (006002) 若函数 $y = \cos(\sin x)$, 则下列结论正确的是 ().
- A. 它的定义域是 $[-1, 1]$
 - B. 它是奇函数
 - C. 它的值域是 $[\cos 1, 1]$
 - D. 它不是周期函数
208. (006003) 下列四个函数中, 是偶函数且在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上为增函数, 但不是周期函数的函数是 ().
- A. $y = |\sin x| (x \in \mathbf{R})$
 - B. $y = |\cos x| (x \in \mathbf{R})$
 - C. $y = \sin |x| (x \in \mathbf{R})$
 - D. $y = |\sin x| + |\cos x| (x \in \mathbf{R})$
209. (006004) 下列函数中, 既在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上是增函数, 又是以 π 为最小正周期的偶函数是 ().
- A. $y = x^2 |\cos x|$
 - B. $y = \cos 2x$
 - C. $y = |\sin x|$
 - D. $y = |\sin 2x|$
210. (006048) 将奇函数 $y = f(x) (x \in \mathbf{R})$ 的图像沿 x 轴正向平移 1 个单位长度后, 所得的图像为 C' , 而图像 C' 与 C 关于原点对称, 那么 C 所对应的函数应为_____.
211. (006051) 若函数 $f(x) = \sin(2x + \varphi) (-\pi < \varphi < 0)$ 是偶函数, 则 $\varphi =$ _____.
212. (006054) 若奇函数 $f(x)$ 是最小正周期为 3 的周期函数, 且 $f(1) = -1$, 则 $f(101) =$ _____.

213. (006055) 若偶函数 $y = f(x)$ 是最小正周期为 2 的周期函数. 且 $2 \leq x \leq 3$ 时, $f(x) = x$, 则当 $-2 \leq x \leq 0$ 时, $f(x)$ 的表达式为_____.
214. (006059) 下列函数中, 以 π 为最小正周期的偶函数是 ().
- A. $y = \sin x \cdot \cos x$ B. $y = \cot x$ C. $y = \cos \frac{x}{2}$ D. $y = \cos^2 x$
215. (006062) 下列函数中, 同时满足条件① 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 为增函数, ② 为奇函数, ③ 以 π 为最小正周期的函数是 ().
- A. $y = \tan x$ B. $y = \cot x$ C. $y = \tan \frac{x}{2}$ D. $y = |\sin x|$
216. (006072) 在① $y = |\sin 2x|$, ② $y = |\cos x|$, ③ $y = |\tan 2x|$, ④ $y = |\tan x| + |\cot x|$ 这四个函数中, 最小正周期为 $\frac{\pi}{2}$ 的偶函数有 ().
- A. 0 个 B. 1 个 C. 2 个 D. 3 个
217. (006096) 已知 $f(x)$ 为偶函数, 其图像关于直线 $x = a(a \neq 0)$ 对称, 求证: $f(x)$ 是一个以 $2a$ 为周期的周期函数.
218. (006097) 已知 $f(x), g(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的两个函数, 且 $g(x)$ 为奇函数. 并满足: ① $f(0) = 1$; ② 对任何 $x, y \in \mathbf{R}$ 都有 $f(x - y) = f(x)f(y) + g(x)g(y)$. 求证:
- (1) 对任何 $x \in \mathbf{R}$ 都有 $f^2(x) + g^2(x) = 1$;
- (2) $f(x)$ 是偶函数;
- (3) 若存在非零实数 a 满足 $f(a) = 1$, 则 $f(x)$ 是周期函数.
219. (006130) 函数 $y = \sin(x + \frac{\pi}{3}) - \sqrt{3} \cos(x + \frac{\pi}{3})$ ().
- A. 是奇函数, 但不是偶函数 B. 是偶函数, 但不是奇函数
- C. 既不是奇函数, 也不是偶函数 D. 奇偶性无法确定
220. (006201) 函数 $y = \sin^2 x$ 是 ().
- A. 最小正周期为 2π 的偶函数 B. 最小正周期为 2π 的奇函数
- C. 最小正周期为 π 的偶函数 D. 最小正周期为 π 的奇函数
221. (006259) 函数 $f(x) = \sin(x + \frac{5\pi}{12}) \cos(x - \frac{\pi}{12})$ 是 ().
- A. 最小正周期为 π 的奇函数 B. 最小正周期为 π 的偶函数
- C. 最小正周期为 2π 的函数, 没有奇偶性 D. 最小正周期为 π 的函数, 没有奇偶性
222. (006287) 函数 $y = \cos^2(x - \frac{\pi}{12}) + \sin^2(x + \frac{\pi}{12}) - 1$ 是 ().
- A. 最小正周期为 2π 的奇函数 B. 最小正周期为 2π 的偶函数
- C. 最小正周期为 π 的奇函数 D. 最小正周期为 π 的偶函数
223. (006531) 设 $f(x)$ 为奇函数, 且当 $x > 0$ 时, $f(x) = \pi - \arccos(\sin x)$, 则当 $x < 0$ 时, $f(x)$ 的解析式为 ().
- A. $\arccos(\sin x)$ B. $-\arccos(\sin x)$ C. $\pi + \arccos(\sin x)$ D. $-\pi - \arccos(\sin x)$

224. (006532) 下列四个命题中正确的是 ().

- A. 若 $\sin f(x)$ 是奇函数, 则 $f(x)$ 是奇函数
B. 若 $\cos f(x)$ 是奇函数, 则 $f(x)$ 是奇函数
C. 若 $\arcsin f(x)$ 是奇函数, 则 $f(x)$ 是奇函数
D. 若 $\arccos f(x)$ 是奇函数, 则 $f(x)$ 是奇函数

225. (006533) 函数 $f(x) = \frac{\arcsin x}{\frac{\pi}{2} - \arccos x}$ ().

- A. 是奇函数, 但不是偶函数
B. 是偶函数, 但不是奇函数
C. 即不是奇函数, 也不是偶函数
D. 奇偶性无法确定

226. (006534) 若函数 $f(x) = -\arccos x + \varphi$ 是奇函数, 则 φ 等于 ().

- A. π
B. $\frac{\pi}{2}$
C. $-\pi$
D. $-\frac{\pi}{2}$

227. (006553) 下列函数中, 同时满足条件① 定义域是 \mathbf{R} , ② 是奇函数, ③ 是周期函数的函数是 ().

- A. $y = \arcsin(\sin x)$
B. $y = \cos(\arcsin x)$
C. $y = \tan(\arctan x)$
D. $y = \arctan(\tan x)$

228. (006619) 设 $f(x) = \cos(x-a) + \sin(x+a)$ 是偶函数, 求 a 的值.

229. (007892) 若函数 $y = f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , 则 $y = f(x)$ 为奇函数的充要条件为 ().

- A. $f(0) = 0$
B. 对任意 $x \in \mathbf{R}, f(x) = 0$
C. 存在某个 $x_0 \in \mathbf{R}$, 使得 $f(x_0) + f(-x_0) = 0$
D. 对任意的 $x \in \mathbf{R}, f(x) + f(-x) = 0$ 都成立

230. (007893) 求证函数 $f(x) = x^{-3}$ 是奇函数.

231. (007894) 求证函数 $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$ 是奇函数.

232. (007895) 判断函数 $f(x) = 2x + \sqrt[3]{x}$ 的奇偶性.

233. (007896) 判断函数 $f(x) = 2x^4 - x^2$ 的奇偶性.

234. (007897) 判断函数 $f(x) = x^2 - x$ 的奇偶性.

235. (007898) 判断函数 $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ 的奇偶性.

236. (007903) 当函数 $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ 时, 函数 $f(x)$ 同时满足条件: ① 函数 $f(x)$ 不是偶函数; ② 在区间 $(-\infty, -1)$ 上是减函数; ③ 在区间 $(0, 1)$ 上是增函数 (写出一个你认为正确的函数解析式).

237. (007911) 画出函数 $y = x^2 - 2|x|$ 的图像, 并写出它的定义域、奇偶性、单调区间、最小值.

238. (007912) 研究函数 $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ 的定义域、奇偶性、单调性、最大值.

239. (007914) 已知函数 $f(x) = x^2 + ax + 1, x \in [b, 2]$ 是偶函数, 求 a, b 的值.

240. (007915) 已知函数 $f(x)$ 为偶函数, $g(x)$ 为奇函数, 且 $f(x) + g(x) = x^2 + 2x + 3$, 求 $y = f(x)$ 、 $y = g(x)$ 的解析式.

241. (007923) 研究函数 $f(x) = x + \frac{a}{x} (a > 0)$ 的定义域、奇偶性、单调性.

242. (007925) 判断函数 $f(x) = |\frac{1}{2}x - 3| + |\frac{1}{2}x + 3|$ 的奇偶性.
243. (007926) 判断函数 $f(x) = x^3 + \frac{2}{x}$ 的奇偶性.
244. (007927) 判断函数 $f(x) = x^2, x \in (k, 2)$ 的奇偶性.
245. (007928) 已知 $y = f(x)$ 是奇函数, 定义域为 \mathbf{R} , $y = g(x)$ 是偶函数, 定义域为 D . 设 $F(x) = f(x) \cdot g(x)$, 判断 $y = F(x)$ 奇偶性.
246. (007929) 已知函数 $f(x) = (m-1)x^2 + 3x + (2-n)$, 且此函数为奇函数, 求 m 、 n 的值.
247. (007939) 已知 $y = f(x)$ 是定义在 $(-1, 1)$ 上的奇函数, 在区间 $[0, 1)$ 上是减函数, 且 $f(1-a) + f(1-a^2) < 0$, 求实数 a 的取值范围.
248. (007941) 已知函数 $y = f(x)$ 具有如下性质:
 ① 定义在 \mathbf{R} 上的偶函数; ② 在 $(-\infty, 0)$ 上为增函数; ③ $f(0) = 1$; ④ $f(-2) = -7$; ⑤ 不是二次函数.
 求 $y = f(x)$ 的一个可能的解析式.
249. (007945) 研究幂函数 $f(x) = x^{\frac{2}{5}}$ 的定义域、奇偶性、单调性、值域.
250. (007948) 在下列函数中, 哪一个既是奇函数, 又在区间 $(+\infty, 0)$ 内是减函数?
 ① $y = x^{\frac{1}{2}}$; ② $y = x^{\frac{1}{3}}$; ③ $y = x^{\frac{2}{3}}$; ④ $y = x^{-\frac{1}{3}}$.
251. (007956) 求证: $f(x) = \frac{a^x - a^{-x}}{2} (a > 0, a \neq 1)$ 是奇函数.
252. (007957) 求证: $f(x) = \frac{(a^x - 1) \cdot x}{a^x + 1} (a > 0, a \neq 1)$ 是偶函数.
253. (007964) 判断并证明函数 $y = \frac{10^x - 10^{-x}}{10^x + 10^{-x}}$ 的奇偶性.
254. (007965) 判断并证明函数 $y = x(\frac{1}{2^x - 1} + \frac{1}{2})$ 的奇偶性.
255. (008034) 判断题: (正确的在括号内用“√”表示, 错误的用“×”表示)
 (1) 存在反函数的函数一定是单调函数.____;
 (2) 偶函数存在反函数.____;
 (3) 奇函数必存在反函数._____.
256. (008051) 判断函数 $y = \lg \frac{x+1}{x-1}$ 的奇偶性.
257. (008089) 已知函数 $f(x) = \log_a \frac{1+x}{1-x} (a > 0, a \neq 1)$. (1) 求 $f(x)$ 的定义域;
 (2) 判断 $f(x)$ 的奇偶性, 并加以证明;
 (3) 当 $a > 1$ 时, 求使 $f(x) > 0$ 的 x 的取值范围.
258. (008255) 判断函数 $y = |\sin x|$ 的奇偶性, 并说明理由.
259. (008256) 判断函数 $y = 3 \sin x + 1$ 的奇偶性, 并说明理由.

260. (008257) 判断函数 $y = \sin x + \sin 2x$ 的奇偶性, 并说明理由.

261. (008258) 判断函数 $y = \sin^2 x + \cos 2x$ 的奇偶性, 并说明理由.

262. (008276) 判断函数 $f(x) = -2 \tan 3x$ 的奇偶性, 并说明理由.

263. (008277) 判断函数 $f(x) = x \tan x$ 的奇偶性, 并说明理由.

264. (008331) 下列函数是奇函数的是 ().

① $y = \sin |x|$; ② $y = x \sin x$; ③ $y = x \cos x$; ④ $y = x |\sin x|$.

A. ①②

B. ①③

C. ②④

D. ③④

265. (008348) 若函数 $y = \sin(\frac{1}{2}x + \varphi)$ 是偶函数, 则 φ 的一个值为 ().

A. $\varphi = -\pi$

B. $\varphi = -\frac{\pi}{2}$

C. $\varphi = -\frac{\pi}{4}$

D. $\varphi = -\frac{\pi}{8}$

266. (008357) 已知下列四个命题:

① 函数 $y = \sin(\frac{5\pi}{2} - 2x)$ 是偶函数; ② 函数 $y = \tan x$ 在定义域内是增函数; ③ 函数 $y = \tan(ax - 1)$ 的最小正周期是 $\frac{\pi}{a}$; ④ $x = \frac{\pi}{8}$ 是函数 $y = \sin(2x + \frac{\pi}{4})$ 图像的一条对称轴方程. 其中正确命题的序号是_____.

267. (008392) 定义在 \mathbf{R} 上的偶函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上是增函数, 且 $f(\frac{1}{2}) = 0$, 则满足 $f(\log_{\frac{1}{4}} x) > 0$ 的 x 的值范围是_____.

268. (008394) 已知函数 $f(x) = \log_a \frac{x+b}{x-b} (a > 0, b > 0, a \neq 1)$.

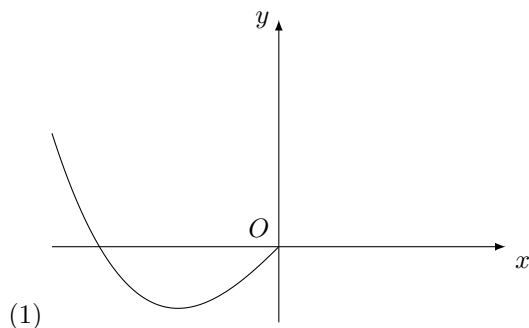
(1) 求 $f(x)$ 的定义域;

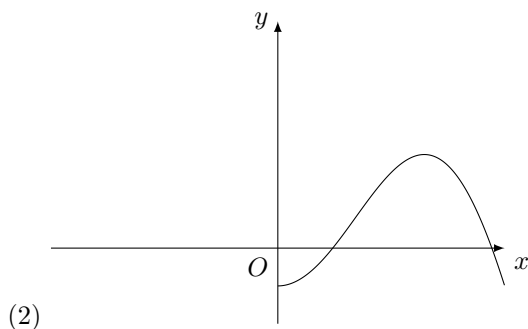
(2) 判断 $f(x)$ 的奇偶性;

(3) 求函数 $y = f^{-1}(x)$ 的解析式.

269. (009512) 奇函数的图像是不是一定通过原点? 偶函数的图像是不是一定与 y 轴相交? 请说明理由.

270. (009513) 如图, 已知偶函数 $y = f(x)$ 在 y 轴及 y 轴一侧的部分图像, 作出 $y = f(x)$ 的大致图像.





271. (009514) 证明下列函数是奇函数:

(1) $y = 2^x - 2^{-x}$;

(2) $y = \log_2(1+x) - \log_2(1-x)$.

272. (009515) 判断下列函数的奇偶性, 并说明理由:

(1) $y = |x|$;

(2) $y = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{1-x}$;

(3) $y = x^3 - x, x \in [-3, 3]$;

(4) $y = 0, x \in [-1, 1]$.

273. (009516) 已知 a 是实数, 而定义在 \mathbf{R} 上的函数 $y = f(x)$ 的表达式为 $f(x) = |x - a|$.

(1) 是否存在实数 a , 使得 $y = f(x)$ 是奇函数? 说明理由;

(2) 是否存在实数 a , 使得 $y = f(x)$ 是偶函数? 说明理由.

274. (009522) 设 $y = f(x)$ 是奇函数, 且它在区间 $(-3, 0]$ 上是严格增函数.

(1) 求证: 它在区间 $[0, 3)$ 上是严格增函数;

(2) $y = f(x)$ 是否在区间 $(-3, 3)$ 上是严格增函数? 说明理由.

275. (009536) 定义在 \mathbf{R} 上的偶函数存在反函数吗? 说明理由.

276. (009601) 判断下列函数的奇偶性, 并说明理由:

(1) $y = \sin 3x$;

(2) $y = |\sin x|$;

(3) $y = x \sin x$;

(4) $y = 2 \sin(x + \frac{\pi}{6})$.

277. (009605) 判断下列函数的奇偶性, 并说明理由:

(1) $y = x \cos x$;

(2) $y = \frac{\sin x}{1 - \cos x}$;

(3) $y = \frac{\cos x}{1 - \sin x}$.

278. (009991) 设 a 是常数, 若函数 $f(x) = \begin{cases} a^2x - 1, & x < 0, \\ x + a, & x > 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ 为奇函数, 则 a 的值为_____.

279. (010173) 若函数 $y = f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , 则 $y = f(x)$ 为奇函数的一个充要条件为 ().

A. $f(0) = 0$

B. 对任意 $x \in \mathbf{R}$, $f(x) = 0$ 都成立

C. 存在某个 $x_0 \in \mathbf{R}$, 使得 $f(x_0) + f(-x_0) = 0$

D. 对任意给定的 $x \in \mathbf{R}$, $f(x) + f(-x) = 0$ 都成立

280. (010174) 证明下列函数 $y = f(x)$ 为偶函数:

(1) $f(x) = x^2 + x^{-2}$;

(2) $f(x) = \frac{x(2^x - 1)}{2^x + 1}$.

281. (010175) 证明下列函数 $y = f(x)$ 为奇函数:

(1) $f(x) = x^{-3}$;

(2) $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

282. (010176) 判断下列函数 $y = f(x)$ 的奇偶性, 并说明理由:

(1) $f(x) = 2x + \sqrt[3]{x}$;

(2) $f(x) = 2x^4 - x^2$;

(3) $f(x) = x^2 - x$;

(4) $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$;

(5) $f(x) = \lg \frac{1-x}{1+x}$.

283. (010182) 已知实数 $b < 2$, 而函数 $y = x^2 + ax + 1$, $x \in [b, 2]$ 是偶函数. 求实数 a 、 b 的值.

284. (010183) 判断下列函数 $y = f(x)$ 的奇偶性, 并说明理由:

(1) $f(x) = \frac{10^x - 10^{-x}}{10^x + 10^{-x}}$;

(2) $f(x) = x\left(\frac{1}{2^x - 1} + \frac{1}{2}\right)$.

285. (010184) 当表达式 $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ 时, 函数 $y = f(x)$ 同时满足以下条件:

① 不是偶函数;

② 在区间 $(-\infty, -1)$ 上是严格减函数;

③ 在区间 $(0, 1)$ 上是严格增函数.

286. (010185) 作出函数 $y = x^2 - 2|x|$ 的大致图像, 并分别写出它的定义域、奇偶性、单调区间及最小值.

287. (010186) 研究函数 $y = \frac{1}{1+x^2}$ 的定义域、奇偶性、单调性及最大值.

288. (010277) 判断下列函数的奇偶性, 并说明理由:

(1) $y = -2 \sin x$;

(2) $y = \frac{\sin x}{x}$;

(3) $y = \frac{x}{1 + \sin x}$.

289. (010292) 判断下列函数的奇偶性, 并说明理由:

(1) $y = \sin^2 x + \cos x$;

(2) $y = 2 \sin x + \cos 2x$;

(3) $y = \frac{x}{1 + \cos x}$.

290. (010294) 函数 $y = 1 - 2 \sin^2(x - \frac{\pi}{4})$ 是 ().

A. 最小正周期为 π 的奇函数

B. 最小正周期为 π 的偶函数

C. 最小正周期为 $\frac{\pi}{2}$ 的奇函数

D. 最小正周期为 $\frac{\pi}{2}$ 的偶函数

291. (010295) 设函数 $y = \sin(\frac{x}{2} + \varphi)$ (其中常数 $\varphi \in [0, \pi]$) 是 \mathbf{R} 上的偶函数, 求 φ 的值.

292. (010308) 判断下列函数的奇偶性, 并说明理由:

(1) $y = \tan 2x$;

(2) $y = |\tan x|$;

(3) $y = \frac{1}{\tan x}$;

(4) $y = \frac{\tan x}{x}$.

293. (010839) 用 1、2、3、4、5、6 组成没有重复数字的六位数, 要求所有相邻两个数字的奇偶性都不同, 且 1 和 2 相邻. 问: 有多少个这样的六位数?

294. (010931) 将函数 $f(x) = \begin{vmatrix} \sqrt{3} & \cos 2x \\ 1 & \sin 2x \end{vmatrix}$ 的图像向左平移 $m(m > 0)$ 个单位, 所得图像对应的函数为偶函数, 则 m 的最小值为_____.

295. (010938) 已知函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D , $x_1, x_2 \in D$. 关于 $y = f(x)$ 的两个命题:

命题①: 若当 $f(x_1) + f(x_2) = 0$ 时, 都有 $x_1 + x_2 = 0$, 则函数 $y = f(x)$ 是 D 上的奇函数.

命题②: 若当 $f(x_1) < f(x_2)$ 时, 都有 $x_1 < x_2$, 则函数 $y = f(x)$ 是 D 上的增函数.

下列判断正确的是 ().

A. ① 和② 都是真命题

B. ① 是真命题, ② 是假命题

C. ① 和② 都是假命题

D. ① 是假命题, ② 是真命题

296. (010943) 已知函数 $f(x) = 2^x + k \cdot 2^{-x} (x \in \mathbf{R})$.

(1) 判断函数 $f(x)$ 的奇偶性, 并说明理由;

(2) 设 $k > 0$, 问函数 $f(x)$ 的图像是否关于某直线 $x = m$ 成轴对称图形, 如果是, 求出 m 的值; 如果不是, 请说明理由; (可利用真命题: “函数 $g(x)$ 的图像关于某直线 $x = m$ 成轴对称图形” 的充要条件为 “函数 $g(m+x)$ 是偶函数”)

(3) 设 $k = -1$, 函数 $h(x) = a \cdot 2^x - 2^{1-x} - \frac{4}{3}a$, 若函数 $f(x)$ 与 $h(x)$ 的图像有且只有一个公共点, 求实数 a 的取值范围.

297. (010960) 设常数 $a \in \mathbf{R}$, 函数 $f(x) = a \sin 2x + \cos(2\pi - 2x) + 1$.

(1) 若 $a = \sqrt{3}$, 求 $f(x)$ 的单调递增区间;

(2) 若 $f(x)$ 为偶函数, 求 $f(x)$ 的值域.

298. (010978) 下列关于函数 $y = \sin x$ 与 $y = \arcsin x$ 的命题中, 正确的是 ().

- A. 它们互为反函数 B. 都是增函数 C. 都是周期函数 D. 都是奇函数

299. (010982) 已知函数 $f(x) = \frac{a}{2^x - 1} + b$, 其中 $a, b \in \mathbf{R}$.

(1) 当 $a = 6, b = 0$ 时, 求满足 $f(|x|) = 2^x$ 的 x 的值;

(2) 若 $f(x)$ 为奇函数且非偶函数, 求 a 与 b 的关系式.

300. (010997) 已知函数 $f(x) = |x + \frac{1}{x}|$, 给出下列命题:

- ① 存在实数 a , 使得函数 $y = f(x) + f(x - a)$ 为奇函数;
② 对任意实数 a , 均存在实数 m , 使得函数 $y = f(x) + f(x - a)$ 关于 $x = m$ 对称;
③ 若对任意非零实数 a , $f(x) + f(x - a) \geq k$ 都成立, 则实数 k 的取值范围为 $(-\infty, 4]$;
④ 存在实数 k , 使得函数 $y = f(x) + f(x - a) - k$ 对任意非零实数 a 均存在 6 个零点.

其中的真命题是_____. (写出所有真命题的序号)

301. (011006) 现定义: 设 a 是非零实常数, 若对于任意的 $x \in D$, 都有 $f(a - x) = f(a + x)$, 则称函数 $y = f(x)$ 为“关于 a 的偶型函数”.

(1) 请以三角函数为例, 写出一个“关于 2 的偶型函数”的解析式, 并给予证明;

(2) 设定义域为 \mathbf{R} 的“关于 a 的偶型函数” $y = f(x)$ 在区间 $(-\infty, a)$ 上单调递增, 求证: $y = f(x)$ 在区间 $(a, +\infty)$ 上单调递减;

(3) 设定义域为 \mathbf{R} 的“关于 $\frac{1}{2}$ 的偶型函数” $y = f(x)$ 是奇函数. 若 $n \in \mathbf{N}^*$, 请猜测 $f(n)$ 的值, 并用数学归纳法证明你的结论.

302. (011027) 设 $f(x) = \frac{-2^x + a}{2^{x+1} + b}$, a, b 为实常数.

(1) 当 $a = b = 1$ 时, 证明: $f(x)$ 不是奇函数;

(2) 若 $f(x)$ 是奇函数, 求 a 与 b 的值.

303. (011031) 已知函数 $f(x)$ 是以 2 为周期的偶函数, 当 $0 \leq x \leq 1$ 时, $f(x) = \lg(x + 1)$, 令函数 $g(x) = f(x)(x \in [1, 2])$, 则 $g(x)$ 的反函数为_____.

304. (011036) 若偶函数 $y = f(x)(x \in \mathbf{R})$ 满足 $f(x + 2) = f(x - 2)$, 当 $x \in [-2, 0]$ 时, $f(x) = (\frac{1}{2})^x - 1$, 若 $g(x) = f(x) - \log_a(x + 2)(a > 1)$ 在区间 $(-2, 6]$ 上恰有 3 个不同的零点, 则实数 a 的取值范是_____.

305. (011041) 若 $f(x)$ 是 \mathbf{R} 上的奇函数, 且 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增, 则下列结论:

- ① $y = |f(x)|$ 是偶函数;
② 对任意 $x \in \mathbf{R}$ 都有 $f(-x) + |f(x)| = 0$;
③ $y = f(x)f(-x)$ 在 $(-\infty, 0]$ 上单调递增;
④ 反函数 $y = f^{-1}(x)$ 存在且在 $(-\infty, 0]$ 上单调递增.

其中正确结论的个数为 ().

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

306. (011097) 已知函数 $y = f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的偶函数, 且在 $[0, +\infty)$ 上是增函数, 若 $f(a+1) \leq f(4)$, 则实数 a 的取值范围是_____.

307. (011118) 若 $f(x) = \sin x \cos \theta + \cos x \sin \theta$ 是定义在 \mathbf{R} 上的偶函数, 其中 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, 则 $\theta =$ _____.

308. (011122) 已知 $f(x)$ 是定义域为 \mathbf{R} 的奇函数, 满足 $f(1+x) = f(1-x)$. 若 $f(1) = 2$, 则 $f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(2018) =$ _____.

309. (011131) 已知函数 $f(x) = \log_2(ax^2 + 2x - a)$.

(1) 当 $a = -1$ 时, 求该函数的定义域;

(2) 当 $a \leq 0$ 时, 如果 $f(x) \geq 1$ 对任何 $x \in [2, 3]$ 都成立, 求实数 a 的取值范围;

(3) 若 $a < 0$, 将函数 $f(x)$ 的图像沿 x 轴或其相反方向平移, 得到一个偶函数 $g(x)$ 的图像, 设函数 $g(x)$ 的最大值为 $h(a)$, 求 $h(a)$ 的最小值.

310. (011152) 已知函数 $f(x)$ 的定义域是 $\{x|x \in \mathbf{R}, x \neq \frac{k}{2}, k \in \mathbf{Z}\}$, 且 $f(x) + f(2-x) = 0$, $f(x+1) = -\frac{1}{f(x)}$, 当 $0 < x < \frac{1}{2}$ 时, $f(x) = 3^x$.

(1) 判断 $f(x)$ 的奇偶性, 并说明理由;

(2) 求 $f(x)$ 在区间 $(2k + \frac{1}{2}, 2k+1)(k \in \mathbf{Z})$ 上的解析式;

(3) 是否存在整数 k , 使得当 $x \in (2k + \frac{1}{2}, 2k+1)$ 时, 不等式 $\log_3 f(x) > x^2 - k - 1$ 有解? 证明你的结论.

311. (011185) 判断函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1-x}, & x \geq 0, \\ \frac{x}{1+x}, & x < 0 \end{cases}$ 的奇偶性.

312. (011186) 根据常数 a 的不同取值, 讨论函数 $f(x) = \frac{2^x + a}{2^x - a}$ 的奇偶性, 并说明理由.

313. (011187) 设常数 $a \in \mathbf{R}$. 已知函数 $y = f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的奇函数, 当 $x < 0$ 时, $f(x) = x + \frac{a^2}{x}$, 则 $x \geq 0$ 时, $f(x) =$ _____.

314. (011188) 设函数 $y = f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的奇函数, 当 $x > 0$ 时, $f(x) = 2^{\frac{1}{x}} - 3$. 求不等式 $f(x) > -1$ 的解集.

315. (011189) 设函数 $y = f(x)$ 为 \mathbf{R} 上的奇函数, 且对于任意 $x \in \mathbf{R}$, 都有 $f(x) = f(2-x)$. 当 $1 \leq x < 2$ 时, $f(x) = -2x + 4$.

(1) 求函数 $y = f(x)$ 在 $-1 \leq x < 1$ 时的解析式;

(2) 求函数 $y = f(x) - 1$ 在 $-100 \leq x \leq 100$ 时的所有零点的个数.

316. (011190) 已知定义在 \mathbf{R} 上的函数 $y = f(x)$ 是奇函数, 且 $y = f(x)$ 也是以 2 为周期的一个周期函数. 若 $f(\frac{3}{2}) = 0$, 则在区间 $[-2, 2]$ 上的零点的个数的最小值为_____.

317. (011192) 设常数 $a \in \mathbf{R}$. 已知函数 $y = f(x)$ 为 \mathbf{R} 上的奇函数, 且满足对于 $(-\infty, +\infty)$ 内的任意 x_1, x_2 , 当 $x_1 < x_2$ 时, 都有 $f(x_1) < f(x_2)$. 若 $x > 0$ 时, $f(x) = (x-a)^2 - 1$, 则 a 的取值范围为_____.

318. (011195) 下列命题中, 正确的命题的序号是_____.
- ① 一个幂函数或是奇函数, 或是偶函数;
 ② 当 $\alpha = 0$ 时, 函数 $y = x^\alpha$ 的图像是一条射线;
 ③ 当 $\alpha < 0$ 且 $y = x^\alpha$ 是奇函数时, 它的图像总是过 $(-1, -1)$;
 ④ 若一个幂函数的图像经过第二象限的点, 则这个幂函数是偶函数.
319. (011197) 设常数 $n \in \mathbf{Z}$. 若 $f(x) = x^{n^2+2n-3}$ 是偶函数, 且图像与两条坐标轴都无公共点, 则 $n =$ _____.
320. (011206) 已知函数 $f(x) = a \sin x + b \cos x (x \in [a^2 - 2, a])$ 是奇函数, 则 $a + b =$ _____.
321. (011228) 设常数 $\omega > 0, t > 0$, 函数 $f(x) = \begin{vmatrix} \sqrt{3} & \sin \omega x \\ 1 & \cos \omega x \end{vmatrix}$ 的最小正周期为 2π , 将 $f(x)$ 的图像向左平移 t 个单位, 所得图像对应的函数为偶函数, 则 t 的最小值为_____.
322. (011233) 下列函数中, 是奇函数, 且在 $(0, +\infty)$ 上递减的是 ().
- A. $y = x^2$ B. $y = x^3$ C. $y = x^{-\frac{1}{2}}$ D. $y = x^{-\frac{1}{3}}$
323. (011256) 已知函数 $f(x) (x \in D)$, 若对任意的 $x \in D$, 都存在 $t \in D$, 使 $f(t) = -f(x)$ 成立, 称 $f(x)$ 是“拟奇函数”. 下列函数是“拟奇函数”的个数是 ().
- ① $f(x) = x^2$; ② $f(x) = \ln x$; ③ $f(x) = x + \frac{1}{x}$; ④ $f(x) = \cos x$
- A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个
324. (011349) 已知奇函数 $y = f(x)$ 的周期为 2, 且当 $x \in (0, 1]$ 时, $f(x) = \log_2 x$. 则 $f(7.5)$ 的值为_____.
325. (011390) 若函数 $f(x) = \sqrt{8 - ax - 2x^2}$ 是偶函数, 则该函数的定义域是_____.
326. (011398) 已知 $f(x)$ 是定义在 $[-2, 2]$ 上的奇函数, 当 $x \in (0, 2]$ 时, $f(x) = 2^x - 1$, 函数 $g(x) = x^2 - 2x + m$, 如果对于任意的 $x_1 \in [-2, 2]$, 总存在 $x_2 \in [-2, 2]$, 使得 $f(x_1) \leq g(x_2)$, 则实数 m 的取值范围是_____.
327. (011421) 已知函数 $f(x) = |x + \frac{1}{x}|$, 给出下列命题:
- ① 存在实数 $a < 0$, 函数 $y = f(x) + f(x - a)$ 是偶函数;
 ② 存在实数 $a > 0$, 使得函数 $y = f(x) + f(x - a)$ 关于直线 $x = 1$ 对称;
 ③ 对于任意实数 a , 关于 x 的不等式 $f(x) + f(x - a) \leq 8$ 总有解.
- 其中的真命题是_____. (写出所有真命题的序号)
328. (011446) 函数 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的奇函数, 且 $f(x - 1)$ 为偶函数, 当 $x \in [0, 1]$ 时, $f(x) = \sqrt{x}$. 若函数 $g(x) = f(x) - x - m$ 有三个零点, 则实数 m 的取值范围是 ().
- A. $(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ B. $(1 - \sqrt{2}, \sqrt{2} - 1)$
 C. $\{m | 4k - \frac{1}{4} < m < 4k + \frac{1}{4}, k \in \mathbf{Z}\}$ D. $\{m | 4k + 1 - \sqrt{2} < m < 4k + \sqrt{2} - 1, k \in \mathbf{Z}\}$
329. (011524) 奇函数 $f(x)$ 定义域为 \mathbf{R} , 当 $x > 0$ 时, $f(x) = x + \frac{m^2}{x} - 1$ (这里 m 为正常数), 若 $f(x) \leq m - 2$ 对一切 $x \leq 0$ 成立, 则 m 的取值范围是_____.

330. (011529) 若函数 $f(x)(x \in \mathbf{R})$ 满足 $f(-1+x)$ 、 $f(1+x)$ 均为奇函数, 则下列四个结论正确的是 ().

- A. $f(-x)$ 为奇函数 B. $f(-x)$ 为偶函数 C. $f(x+3)$ 为奇函数 D. $f(x+3)$ 为偶函数

331. (011547) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = -2$, 且 $S_n = \frac{3}{2}a_n + n$ (其中 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和), $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的奇函数, 且满足 $f(2-x) = f(x)$, 则 $f(a_{2022}) =$ _____.

332. (011553) 已知函数 $f(x) = (a+1)x^2 + (a-1)x + (a^2-1)$, 其中 $a \in \mathbf{R}$

(1) 当 $f(x)$ 是奇函数时, 求实数 a 的值;

(2) 当函数 $f(x)$ 在 $[2, +\infty)$ 上单调递增时, 求实数 a 的取值范围.

333. (011564) 定义在 $(0, +\infty)$ 上的函数 $y = f(x)$ 的反函数为 $y = f^{-1}(x)$. 若 $g(x) = \begin{cases} 3^x - 1, & x \leq 0, \\ f(x), & x > 0 \end{cases}$ 为奇函数, 则 $f^{-1}(x) = 2$ 的解为_____.

334. (011616) 下列函数中, 既是偶函数, 又是在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递减的函数为 ().

- A. $y = \ln \frac{1}{|x|}$ B. $y = x^3$ C. $y = 2^{|x|}$ D. $y = \cos x$

335. (011632) 已知 $f(x) + x^2$ 是奇函数, 且 $f(1) = 1$, 若 $g(x) = f(x) + 2$, 则 $g(-1) =$ _____.

336. (011643) 已知函数 $f(x) = \lg(x+1)$.

(1) 若 $0 < f(1-2x) - f(x) < 1$, 求 x 的取值范围;

(2) 若 $g(x)$ 是以 2 为周期的偶函数, 且当 $0 \leq x \leq 1$ 时, 有 $g(x) = f(x)$, 求函数 $y = g(x)(x \in [1, 2])$ 的反函数.

337. (011658) 设 a 为实常数, $y = f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的奇函数, 当 $x < 0$ 时, $f(x) = 9x + \frac{a^2}{x} + 7$, 若 $f(x) \geq a+1$ 对一切 $x \geq 0$ 成立, 则 a 的取值范围为_____.

338. (011689) 设常数 $a \geq 0$, 函数 $f(x) = \frac{2^x + a}{2^x - a}$

(1) 若 $a = 4$, 求函数 $y = f(x)$ 的反函数 $y = f^{-1}(x)$;

(2) 根据 a 的不同取值, 讨论函数 $y = f(x)$ 的奇偶性, 并说明理由.