1. 用适当符号 ($\in$, $\notin$, $=$, $\subsetneqq$) 填空:π__$\mathbf{Q}$; $\{x|x=2k+1,\ k\in\mathbf{Z}\}$__$\{x|x=2k-1,k\in\mathbf{Z}\}$; $\{3.14\}$__$\mathbf{Q}$; $\{y|y=x^2\}$__$\{x|y=x^2\}$.

2. 已知 $P=\{y=x^2+1\}$, $Q=\{y|y=x^2+1,\ x\in\mathbf{R}\}$, $E=\{x|y=x^2+1,\ x\in\mathbf{R}\}$, $F=\{(x,y)|y=x^2+1,\ x\in\mathbf{R}\}$, $G=\{x|x\geq 1\}$, $H=\{x|x^2+1=0,\ x\in\mathbf{R}\}$, 则各集合间关系正确的有__________. (答案可能不唯一)
(A) $P=F$ (B) $Q=E$ (C) $E=F$ (D) $Q\subseteq G$ (E) $H\subsetneqq P$

3. 设全集是实数集 $\mathbf{R}$, $M=\{x|-2\leq x\leq 2\}$, $N=\{x|x<1\}$, 则 $\complement_U M\cap N=$__________.

4. 设 $A=\{x|-4<x<4,\ x\in\mathbf{R}\}$, $B=(-\infty,1]\cup[3,+\infty)$, 则 $\{x|x\in A,\ x\notin A\cap B\}$ =__________.

5. 设 $A=\{x|x=\sqrt{k},\ k\in\mathbf{N}\}$,$B=\{x|x\leq 3,\ x\in\mathbf{Q}\}$, 则 $A\cap B=$__________.

6. 设全集 $U=\{2,3,a^2+2a-3\}$, 集合 $A=\{|2a-1|,2\}$, $\complement_U A=\{5\}$, 则实数 $a=$__________.

7. (1) 设 $M=\{y|y=x^2,x\in\mathbf{R}\}$, $N=\{x|x=t,\ t\in\mathbf{R}\}$, 则 $M\cap N=$__________.
(2) 设 $M=\{(x,y)|y=x^2,\ x\in\mathbf{R}\}$, $N=\{(t,x)|x=t,\ t\in\mathbf{R}\}$, 则 $M\cap N=$__________.

8. 设全集 $U=\{1,2,3,4\}$, $\complement_U A\cap B=\{3\}$, $A\cap\complement_U B=\{2\}$, $\complement_U A\cup\complement_U B=\{2,3,4\}$, 则 $\complement_U A\cap\complement_U B=$__________.

9. 集合 $C=\{x|x=\dfrac{k}{2}\pm\dfrac{1}{4},\ k\in\mathbf{Z}\}$,$D=\{x|x=\dfrac{k}{4},\ k\in\mathbf{Z}\}$, 试判断 C 与 D 的关系, 并证明.

10. 集合 $A=\{x|x^2+4x=0\}$, $B=\{x|x^2+2(a+1)x+a^2-1=0,\ x\in\mathbf{R}\}$.
(1) 若 $A\cap B=A$, 求实数 a 的取值范围;
(2) 若 $A\cup B=A$, 求实数 a 的取值范围.

11. 若集合 $A=[2,3]$, 集合 $B=[a,2a+1]$.
(1) 若 $A\subsetneqq B$, 求实数 a 的取值范围;
(2) 若 $A\cap B\neq\varnothing$, 求实数 a 的取值范围.

12. 设全集 $U=\mathbf{R}$, 集合 $A=\{x|f(x)=0\}$, $B=\{x|g(x)=0\}$, $C=\{x|h(x)=0,\ x\in\mathbf{R}\}$, 则方程 $\dfrac{f^2(x)+g^2(x)}{h(x)}=0$ 的解集是__________(用 U,A,B,C 表示).

13. (1) 已知集合 $A=\{y|y=x^2,\ x\in\mathbf{R}\}$,$B=\{y|y=4-x^2,\ x\in\mathbf{R}\}$, 则 $A\cap B=$__________.
(2) 已知集合 $A=\{(x,y)|y=x^2,\ x\in\mathbf{R}\}$, $B=\{(x,y)|y=4-x^2,\ x\in\mathbf{R}\}$, 则 $A\cap B=$__________.

14. 设 $m\in\mathbf{R}$, 已知 $A=\{x|x^2-3x+2=0\}$, $B=\{x|mx+1=0\}$, 且 $B\subsetneqq A$, 则 $m=$__________.

15. (1) 集合 A 满足 $\{1\}\subseteq A\subsetneqq\{1,2,3,4\}$, 则满足条件的集合 A 有__________ 个. (2) 若 $A\cup B=\{1,2\}$, 将满足条件的集合 A, B 写成有序集合对 (A,B), 则有序集合对 (A,B) 有__________ 个.

16. 已知 $A=\{x|x^2-3x+2=0\}$, $B=\{x|x^2-ax+a=0,\ x\in\mathbf{R}\}$, 若 $B\subsetneqq A$, 求满足题意的实数 a.

17. 设集合 $A=\{x|x^2+px+1=0,\ x\in\mathbf{R}\}$, 若 $A\cap\mathbf{R}^+=\varnothing$. 求实数 p 的取值范围.

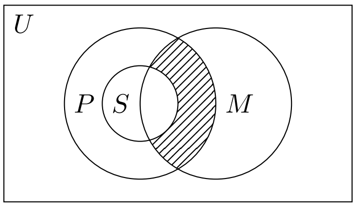
18. 设函数 $f(x)=\lg(\dfrac{2}{x+1}-1)$ 的定义域为集合 A, 函数 $g(x)=\sqrt{1-|x+a|}$ 的定义域为集合 B.

(1) 当 $a=1$ 时, 求集合 B.

(2) 问: $a\geq 2$ 是 $A\cap B=\varnothing$ 的什么条件 (在“充分非必要条件、必要非充分条件、充要条件、既非充分也非必要条件”中选一)? 并证明你的结论.

19. 如图, U 为全集, M,P,S 是 U 的三个子集, 则阴影部分所表示的集合是 (　　).

A. $(M\cap P)\cap S$　　B. $(M\cap P)\cup S$　　C. $(M\cap P)\cap \complement_U S$　　D. $(M\cap P)\cup \complement_U S$



20. 设集合 $A=\{5,\log_2(a+3)\}$, $B=\{a,b\}$, 若 $A\cap B=\{2\}$, 则 $A\cup B=$__________.

21. 设集合 $A\cap\{-2,0,1\}=\{0,1\}$, $A\cup\{-2,0,2\}=\{-2,0,1,2\}$, 则满足上述条件的集合 A 的个数为__________个.

22. 若集合 $A=\{x|x\leq 2\}$, $B=\{x|x\geq a\}$, 满足 $A\cap B=\{2\}$, 则实数 $a=$__________.

23. 若集合 $M=[a-1,a+1]$, $N=(-\infty,-1)\cup[2,+\infty)$, 且 $M\cap N=\varnothing$, 则实数 a 的取值范围为__________.

24. 集合 $A=\{(x,y)|x^2+y^2=25\}$, $B=\{(x,y)|x=3y=4\}$, 则 $A\cap B$ 的子集个数是__________ 个.

25. 已知集合 $M=\{x|x=3m+1,\ m\in\mathbf{Z}\}$, $N=\{y|y=3m+2,\ m\in\mathbf{Z}\}$, 若 $x_0\in M$, $y_0\in N$, 则 x_0y_0 与集合 M,N 的关系是 (　　).

A. $x_0y_0\in M$ 但 $x_0y_0\notin N$　　B. $x_0y_0\in N$ 但 $x_0y_0\notin M$

C. $x_0y_0\notin M$ 且 $x_0y_0\notin N$　　D. $x_0y_0\in M$ 且 $x_0y_0\in N$

26. 若 $A=\{x|x=2n,\ n\in\mathbf{Z}\}$, $B=\{x|x=4m,\ m\in\mathbf{Z}\}$, 求证:$B\subsetneqq A$.

27. 设常数 $a\in\mathbf{R}$, 集合 $A=\{x|\dfrac{3-2x}{x-1}+1\geq 0,\ x\in\mathbf{R}\}$, $B=\{x|2ax<a+x,\ x\in\mathbf{R}\}$. 若 $A\cup B=B$, 求 a 的取值范围.

28. 设常数 $m\in\mathbf{R}$, $A=\{(x,y)|x^2+mx-y+2=0,\ x\in\mathbf{R}\}$, $B=\{(x,y)|x-y+1=0,x\in M\}$, 且 $A\cap B\neq\varnothing$.

(1) 若 $M=\mathbf{R}$, 求实数 m 的取值范围;

(2) 若 $M=(\dfrac{1}{3},2]$, 求实数 m 的取值范围.

29. 设常数 $k\in\mathbf{R}$, 关于 x 的不等式组 $\begin{cases}x^2-x-2>0,\\ 2x^2+(2k+5)x+5k<0\end{cases}$ 整数解的集合为 $\{-2\}$, 求实数 k 的取值范围.

30. 设 $A=\{(x,y)|y=-4x+6,\ x\in\mathbf{R}\}$,$B=\{(x,y)|y=5x-3,\ x\in\mathbf{R}\}$, 则 $A\cap B=$__________.

31. 已知 $M=\{a|\frac{6}{5-a}\in\mathbf{N},\ a\in\mathbf{Z}\}$, 则用列举法表示 $M=$__________.

32. 定义集合运算: $A\odot B=\{z|z=xy(x+y),\ x\in A,\ y\in B\}$, 设集合 $A=\{0,1\}$, $B=\{2,3\}$, 则集合 $A\odot B$ 的所有元素之和为__________.

33. 已知全集 $U=\mathbf{R}$, $A=\{-1\}$, $B=\{x|\lg(x^2-2)=\lg x\}$, 则 (　　)

A. $A\subseteq B$　　B. $A\cup B=\varnothing$　　C. $A\supseteq B$　　D. $(\complement_U A)\cap B=\{2\}$

34. 集合 $A=\{(x,y)|y=|x|+1\}$, $B=\{(x,y)|y=\frac{1}{2}x+a\}$, 若 $A\cap B=\varnothing$, 则 a 的取值范围是__________.

35. 调查某班 50 名学生, 音乐爱好者有 40 人, 体育爱好者有 24 人, 则两方面都爱好的人数最少__________ 人, 最多__________ 人.

36. 已知集合 $A=\{x|ax^2-3x+2=0\}$ 至多有一个元素, 则 a 的取值范围是__________; 若至少有一个元素, 则 a 的取值范围是__________.

37. 设含有三个实数的集合既可以表示为 $\{a,\frac{b}{a},1\}$, 又可以表示为 $\{a^2,a+b,0\}$, 那么 $a+b=$__________.

38. 设 $f(x)=x^2-12x+36$, $A=\{a|1\le a\le 10,\ a\in\mathbf{N}\}$, $B=\{b|b=f(a),\ a\in A\}$, 又设 $C=A\cap B$. 求集合 C.

39. 设常数 $m\in\mathbf{R}$, $A=\{(x,y)|y=-x^2+mx-1,\ x\in\mathbf{R}\}$, $B=\{(x,y)|x+y=3,\ x\in M\}$, 且 $A\cap B$ 的子集有两个.

(1) 若 $M=\mathbf{R}$, 求实数 m 的值;

(2) 若 $M=[0,3]$, 求实数 m 的取值范围.

40. 填写下列命题的否定形式:

(1) $m\le 0$ 或 $n>0$: ____;

(2) 空间三条直线 l,m,n 两两相交: ____;

(3) 复数 z_1,z_2,z_3 中至多一个为纯虚数: ____.

41. 已知 a,b 是整数, 写出命题 "若 ab 为偶数, 则 $a+b$ 为偶数" 的逆命题、否命题、逆否命题, 并判断所写命题的真假.

逆命题:____, 真假: ____;

否命题:____, 真假: ____;

逆否命题:____, 真假: ____.

42. 设甲是乙的充分非必要条件, 乙是丙的充要条件, 丁是丙的必要非充分条件, 则丁是甲的 ()

A. 充分非必要条件　　B. 必要非充分条件

C. 充要条件　　D. 既非充分又非必要条件

43. 若 A 是 B 的必要非充分条件, 则 $\overline{A}$ 是 $\overline{B}$ 的__________ 条件.

44. 下列各组命题中互为等价命题的是 (　　).

A. $A \subseteq B$ 与 $A \cup B = B$

B. $x \in A$ 且 $x \in B$ 与 $x \in A \cup B$

C. $a \in A \cap B$ 与 $a \in A$ 或 $a \in B$

D. $m \in A \cap B$ 与 $m \in A \cup B$

45. 填空 (在 "充分不必要"、"必要不充分"、"充要"、"既不充分也不必要" 中选一种作答):

(1) "$\alpha \neq \beta$" 是 $\cos\alpha \neq \cos\beta$" 的__________ 条件;

(2) 在 $\triangle ABC$ 中, "$A = B$" 是 "$\sin A = \sin B$" 的__________ 条件.

46. "$a > 0 b > 0$" 的一个必要非充分条件是 (　　).

A. $a > 0$　　B. $b > 0$　　C. $a > 0 b > 0$　　D. $a, b \in \mathbf{R}$

47. "函数 $f(x)$ $(x \in \mathbf{R})$ 存在反函数" 是 "函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为增函数" 的 (　　).

A. 充分而不必要条件

B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

48. 填空: (填 "充分不必要"、"必要不充分"、"充要"、"既不充分也不必要")

(1) 对于实数 x, y, p: $xy > 1$ 且 $x + y > 2$ 是 q: $x > 1$ 且 $y > 1$ 的__________ 条件;

(2) 对于实数 x, y, p: $x + y \neq 8$ 是 q: $x \neq 2$ 或 $y \neq 6$ 的__________ 条件;

(3) 已知 $x, y \in \mathbf{R}$, p: $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 0$ 是 q: $(x-1)(y-2) = 0$ 的__________ 条件;

*(4) 设 $x, y \in \mathbf{R}$, 则 "$x^2 + y^2 < 2$" 是 "$|x| + |y| \leq \sqrt{2}$" 的__________ 条件; 又是 "$|x| + |y| < 2$" 的__________ 条件; 又是 "$|x| < \sqrt{2}$ 且 $|y| < \sqrt{2}$" 的__________ 条件.

(5) 设 $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ 均为非零实数, 方程 $a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0$ 和方程 $a_2x^2 + b_2x + c_2 = 0$ 的实数解集分别为 M 和 N, 则 "$\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$" 是 "$M = N$" 的__________ 条件.

49. (1) 是否存在实数 m, 使得 $2x + m < 0$ 是 $x^2 - 2x - 3 > 0$ 的充分条件? 说明理由.

(2) 是否存在实数 m, 使得 $2x + m < 0$ 是 $x^2 - 2x - 3 > 0$ 的必要条件? 说明理由.

50. 已知关于 x 的实系数二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ $(a > 0)$, 分别求下列命题的一个充要条件:

(1) 方程有一正根, 一根是零;

(2) 两根都比 2 小.

51. 设 $a, b \in \mathbf{R}$, 写出命题 "若 $a + b > 0$ 且 $ab > 0$, 则 $a > 0$ 且 $b > 0$" 的逆否命题.

52. 填空 (填 "充分不必要"、"必要不充分"、"充要"、"既不充分也不必要"):

(1) 若 $x, y \in \mathbf{R}$, 则 $x^2 + y^2 \neq 0$ 是 "x, y 不全为零" 的__________ 条件;

(2) 若 $x, y \in \mathbf{R}$, 则 "$xy > 0, x + y > 0$" 是 "$x > 0, y > 0$" 的__________ 条件;

(3) 设 $a, b \in \mathbf{R}$, 则 "$|a| + |b| = |a + b|$" 是 "$ab = 0$" 的__________ 条件;

(4) 若 a, b, c 是常数, 则 "$a > 0$ 且 $b^2 - 4ac < 0$" 是 "对任意 $x \in \mathbf{R}$, 有 $ax^2 + bx + c > 0$" 的__________ 条件;

(5) 设 $a, b \in \mathbf{R}$, 则 $b = \tan a$ 是 $a = \arctan b$ 的__________ 条件.

53. 已知 $x, y \in \mathbf{R}$, 有如下四个命题: ① $x^2 + y^2 < 1$; ② $|x| + |y| < 1$; ③ $|x| < 1$ 且 $y| < 1$; ④ $|x + y| < 1$. 则__________ 是__________ 的充分非必要条件 (答案可能不唯一).

54. 使不等式 $2x^2-5x-3\geq 0$ 成立的一个充分不必要条件是 (　　).

A. $x<0$　　B. $x\geq 0$　　C. $x\in\{-1,3,5\}$　　D. $x\leq\dfrac{1}{2}$ 或 x≥ 3

55. 已知 α:“$x\geq a$”, β:“$|x-1|\leq 1$”, 若 α 是 β 的必要非充分条件, 则实数 a 的取值范围是__________.

56. 命题甲: 关于 x 的方程 $x^2+x+m=0$ 有两个相异的负根; 命题乙: 关于 x 的方程 $4x^2+x+m=0$ 无实根, 若这两个命题有且只有一个是真命题, 求实数 m 的取值范围. *

57. 已知 $P=\{x|x^2-8x-20\leq 0\}$, $S=\{x||x-a|\leq m\}$, 求实数 a,m 的值, 使得 “$x\in P$” 是 “$x\in S$” 的充要条件. *

58. 设 $f(x)=ax^2+x+a$, 写出一个 a 的值,

(1) 使 $f(x)>0$ $(x\in\mathbf{R})$ 恒成立;

(2) 使 $f(x)>0$ $(x\in\mathbf{R})$ 恒不成立;

(3) 使 $f(x)>0$ $(x\in\mathbf{R})$ 不恒成立.

59. 命题 (1) $a>b\Rightarrow ac^2>bc^2$; (2) $ac^2>bc^2\Rightarrow a>b$; (3) $a>b\Rightarrow\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}$; (4) $a<b<0,\ c<d<0\Rightarrow ac>bd$; (5) $\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}\Rightarrow a>b$ $(n\in\mathbf{N}^*)$; (6) $a+c<b+d\Leftrightarrow\begin{cases}a<b,\\c<d;\end{cases}$ (7) $a<b<0\Rightarrow a^2>ab>b^2$. 其中真命题的序号是__________.

60. 已知 $a,b\in\mathbf{R}$, 则 $ab(a-b)<0$ 成立的一个充要条件是 (　　).

A. $\dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{b}>0$　　B. $\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}$　　C. $0<\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}$　　D. $\dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{b}$

61. “$\begin{cases}2<x+y<4,\\0<xy<3\end{cases}$” 是 “$\begin{cases}2<x<3,\\0<y<1\end{cases}$” 的__________ 条件.

62. 下列函数中, 最小值为 2 的函数有__________.

(1) $y=x+\dfrac{1}{x},\ x\in(0,+\infty)$; (2) $y=x+\dfrac{1}{x},\ x\in(1,+\infty)$; (3) $y=\dfrac{x^2+3}{\sqrt{x^2+2}}$; (4)$y=\log_3 x+\log_x 3$.

63. $z=(x+y)(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{4y}),\ (x,y>0)$ 的最小值是__________.

64. 若正实数 a,b 满足 $a+b=1$, 则 (　　).

A. $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$ 的最大值是 4　　B. ab 的最小值是 $\dfrac{1}{4}$　　C. $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ 有最大值 $\sqrt{2}$　　D. a^2+b^2 有最小值 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

65. 如果 $0<a<b$, $t>0$, 设 $M=\dfrac{a}{b}$, $N=\dfrac{a+t}{b+t}$, 那么 (　　).

A. $M>N$　　B. $M<N$

C. $M=N$　　D. M 与 N 的大小随 t 的变化而变化

66. 将一根铁丝切割成三段做一个面积为 2 平方米、形状为直角三角形的框架, 则至少需要__________ 米的铁丝 (不计损失, 精确到 0.1 米).

67. (1) 比较 $1+a^2$ 与 $\dfrac{1}{1-a}$ 的大小;

(2) 设 $a>0,\ a\neq 1$, $t>0$, 比较 $\dfrac{1}{2}\log_a t$ 和 $\log_a\dfrac{t+1}{2}$ 的大小, 证明你的结论.

68. 已知 $x,y\in\mathbf{R}^+$ 且 $x+y=4$, 求 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}$ 的最小值. 某学生给出如下解法: 由 $x+y=4$ 得, $4\geq 2\sqrt{xy}$①, 即 $\dfrac{1}{\sqrt{xy}}\geq\dfrac{1}{2}$②, 又因为 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}\geq 2\sqrt{\dfrac{2}{xy}}$③, 由②③得 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}\geq\sqrt{2}$④, 即所求最小值为 $\sqrt{2}$⑤. 请指出这位同学错误的步骤, 并给出正确的解法.

69. 已知 $x,y\in\mathbf{R}^+$, $xy=x+y+1$, 求 $x+y$ 的取值范围 (试用两种方法求解).

70. 设 $a,b\in\mathbf{R}$, 若 $a-|b|>0$, 则下列不等式中正确的是 (　　).

A. $b-a>0$　　B. $a^3+b^3<0$　　C. $b+a>0$　　D. $a^2-b^2<0$

71. 已知 $0<x<y<a<1$, 则 (　　).

A. $\log_a(xy)<0$　　B. $0<\log_a(xy)<1$　　C. $1<\log_a(xy)<2$　　D. $\log_a(xy)>2$

72. 设 $a>1>b>-1$, 则下列不等式中恒成立的是 (　　).

A. $\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}$　　B. $\dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{b}$　　C. $a>b^2$　　D. $a^2>2b$

73. 若 $1<a<3$, $-4<b<2$, 则 $\dfrac{1}{2}a-b$ 的取值范围是__________.

74. 已知 $x,y\in\mathbf{R}^+$, 且 $x+4y=1$, 则 $x\cdot y$ 的最大值为__________.

75. 函数 $y=\log_a(x+3)-1$ $(a>0,\ a\neq 1)$ 的图像恒过定点 A, 若点 A 在直线 $mx+ny+1=0$ 上, 其中 $mn>0$, 则 $\dfrac{1}{m}+\dfrac{2}{n}$ 的最小值为__________.

76. * 如果正数 a,b,c,d 满足 $a+b=cd=4$, 那么 (　　).

A. $ab\leq c+d$ 且等号成立时, $abcd$ 的取值唯一

B. $ab\geq c+d$ 且等号成立时, $abcd$ 的取值唯一

C. $ab\leq c+d$ 且等号成立时, $abcd$ 的取值不唯一

D. $ab\geq c+d$ 且等号成立时, $abcd$ 的取值不唯一

77. (1) 设 $x<2$, 则 $2x+\dfrac{8}{x-2}$ 有最__________ 值是__________, 此时 $x=$__________;

(2) 设 $0<x<\sqrt{2}$, 则 $x\sqrt{4-2x^2}$ 的最大值是__________, 此时 $x=$__________.

78. 在等差数列 $\{a_n\}$ 和等比数列 $\{b_n\}$ 中, $a_1=b_1>0$, $a_3=b_3>0$, $a_1\neq a_3$, 试比较 a_5 与 b_5 的大小.

79. 下列不等式中解集为 $\mathbf{R}$ 的是 (　　).

A. $x^2-6x+9>0$　　B. $4x^2+12x+9<0$　　C. $3x^2-x+2>0$　　D. $3x^2-x+2<0$

80. 不等式 $(x-1)^2(2-x)\leq 0$ 的解集是__________; $(x-1)^2(2-x)>0$ 的解集是__________.

81. 已知关于 x 的不等式 $x^2+ax+b<0$ 的解集为 $(-1,2)$, 则 $a+b=$__________.

82. 不等式 $-1 < x^2+2x-1 \le 2$ 的解集是__________.

83. 用一根长为 100 米的绳子能否围成一个面积大于 600 平方米的矩形?__________(用 “能” 或 “不能” 填空).

84. 已知关于 x 的不等式 $ax^2-bx+c>0$ 的解集是 $(-\frac{1}{2},2)$, 对于 a,b,c 有以下结论: ① $a>0$; ② $b>0$; ③ $c>0$; ④ $a+b+c>0$; ⑤ $a-b+c>0$. 其中正确的序号有__________.

85. 若关于 x 的不等式 $(a-2)x^2+2(a-2)x-4<0$ 对一切 $x\in\mathbf{R}$ 成立, 则实数 a 的取值范围是__________.

86. 已知关于 x 的不等式 $(2a-b)x+a-5b>0$ 的解集是 $(-\infty,\frac{10}{7})$, 则关于 x 的不等式 $ax>b$ 的解集是__________.

87. 已知关于 x 的不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集为 $\{x|2<x<4\}$, 求关于 x 的不等式 $cx^2+bx+a<0$ 的解集.

88. 解关于 x 的不等式: $(ax+4)(x-1)>0(a\in\mathbf{R})$.

89. 已知 $f(x)=x^2+2(a-2)x+4$.

(1) 如果对一切 $x\in\mathbf{R}$, $f(x)>0$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围;

(2) 如果对 $x\in[-3,1]$, $f(x)>0$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.

90. 不等式 $-6x^2-x+2\le 0$ 的解集是__________.

91. 解关于 x 的不等式 $x^2-3(a+1)x+2(3a+1)\le 0(a\in\mathbf{R})$.

92. 解关于 x 的不等式组: $\begin{cases} ax>-1, \\ x+a>0 \end{cases}$ $(a\in\mathbf{R})$.

93. 若关于 x 的不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集为 $(-1,2)$, 求关于 x 的不等式 $a(x^2+1)+b(x-1)+c>2ax$ 的解集.

94. 若关于 x 的不等式 $(a^2-4)x^2+(a+2)x-1\ge 0$ 的解集为 $\varnothing$, 求实数 a 的取值范围.

95. 若关于 x 的不等式 $(a^2-4)x^2+(a+2)x+1\ge 0$ 对一切 $x\in\mathbf{R}$ 均成立, 求实数 a 的取值范围.

96. * 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 在区间 $(-\infty,0)$ 上单调递增, 且满足 $f(-a^2+2a-5)<f(2a^2+a+1)$, 求实数 a 的取值范围.

97. * 已知 $A=\{x|x^2-3x+2\le 0\}$, $B=\{x|x^2-(a+1)x+a\le 0\}$.

(1) 若 $A\subsetneqq B$, 求 a 的取值范围;

(2) 若 $B\subseteq A$, 求 a 的取值范围.

98. 下列不等式中, 与 $x^2>2$ 同解的不等式的序号为__________.

(1) $x^2+\frac{1}{x-3}>2+\frac{1}{x-3}$; (2) $x^2+\sqrt{x-4}>2+\sqrt{x-4}$; (3) $x^2-(x-1)>2-(x-1)$; (4) $x^2(x-2)>2(x-2)$.

99. 不等式 $\frac{3x+4}{5-x}\ge 6$ 的解集是__________.

100. 若不等式 $\dfrac{2x+a}{x+b} \leq 1$ 的解集为 $\{x|1 < x \leq 3\}$, 则 $a+b$ 的值是__________.

101. 不等式 $(x-1)^2(2-x)(x+1) \leq 0$ 的解集是__________.

102. 不等式 $2 < |x+1| < 3$ 的解集是__________.

103. 不等式 $|x-2| > 9x$ 的解集是__________.

104. 不等式 $4^{x-\frac{5}{x}+1} \leq 2$ 的解集是__________.

105. 不等式 $\log_{\frac{1}{4}} 4x^2 > \log_{\frac{1}{4}}(3-x)$ 的解集是__________.

106. 解下列不等式:

(1) $|x-5| - |2x+3| < 1$;

(2) $\dfrac{2x^2+x-3}{x^2+x+1} \geq 1$;

(3) $4^{2x} - 2^{2x+2} + 3 < 0$;

(4) $\log_2(x-1) < \log_4(2-x) + 1$.

107. (1) 关于 x 的不等式 $|x-1| - |x-2| < a^2 + a - 1$ 的解集是 $\mathbf{R}$, 求实数 a 取值范围;

(2) 关于 x 的不等式 $|x-1| - |x-2| < a^2 + a - 1$ 有实数解, 求实数 a 的取值范围.

108. * 设全集 $U = \mathbf{R}$, 已知关于 x 的不等式 $|x-1| + a - 1 > 0(a \in \mathbf{R})$ 的解集为 A, 若 $\complement_U A \cap \mathbf{Z}$ 恰有 3 个元素, 求 a 的取值范围.

109. 不等式 $|\dfrac{x}{1+x}| > \dfrac{x}{1+x}$ 的解集是__________.

110. 不等式 $\dfrac{2x}{1-x} \leq 1$ 的解集是__________.

111. 不等式 $\dfrac{1+|x|}{|x|-1} \geq 3$ 的解集是__________.

112. 设函数 $f(x) = \begin{cases} 2^{-x} - 1, & x \leq 0, \\ x^{\frac{1}{2}}, & x > 0, \end{cases}$ 若 $f(x_0) > 1$, 则 x_0 的取值范围是__________.

113. 已知 $a > 0$ 且 $a \neq 1$, 关于 x 的不等式 $a^x > \dfrac{1}{2}$ 的解集是 $(-\infty, 1)$, 则 $a =$__________.

114. 关于 x 的不等式 $\log_{\frac{1}{2}}(x - \dfrac{1}{x}) > 0$ 的解集是__________.

115. 若不等式 $|3x-b| < 4$ 的解集中的整数有且仅有 1, 2, 3, 则 b 的取值范围为__________.

116. 已知关于 x 的不等式 $\dfrac{ax-5}{x^2-a} < 0$ 的解集为 M.

(1) 当 $a = 5$ 时, 求集合 M;

(2) 若 $2 \in M$ 且 $5 \notin M$, 求实数 a 的取值范围.

117. (1) 对任意实数 x, $|x-1| - |x+3| > a$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围;

(2) * 对任意实数 x, $|x-1| - |x+3| > a$ 恒不成立, 求实数 a 的取值范围.

118. (1) 若关于 x 的不等式 $x^2-kx+1>0$ 的解集为 $\mathbf{R}$, 求实数 k 的取值范围;

(2) * 若关于 x 的不等式 $x^2-kx+1>0$ 在 $[1,2]$ 上有解, 求实数 k 的取值范围.

119. 已知 $a,b\in\mathbf{R}^+$, 求证: $\dfrac{a}{\sqrt{b}}+\dfrac{b}{\sqrt{a}}\geq\sqrt{a}+\sqrt{b}$.

120. 已知 $x,y\in\mathbf{R}$, 求证: $x^2+y^2+1\geq x+y+xy$.

121. 已知 $a,b\in\mathbf{R}^+$ 且 $a\neq b$, 求证: $|a^3+b^3-2ab\sqrt{ab}|>|a^2b+ab^2-2ab\sqrt{ab}|$.

122. 已知 $0<a<1$,$0<b<1$, $0<c<1$, 求证: $(1-a)b,(1-b)c,(1-c)a$ 中至少有一个小于等于 $\dfrac{1}{4}$.

123. a、b、c 是互不相等的正数, 则下列不等式中不正确的序号是__________.

(1) $|a-b|\leq|a-c|+|c-b|$; (2) $a^2+\dfrac{1}{a^2}\geq a+\dfrac{1}{a}$; (3) $|a-b|+\dfrac{1}{a-b}\geq 2$; (4) $\sqrt{a+3}-\sqrt{a+1}\leq\sqrt{a+2}-\sqrt{a}$.

124. 已知 $a>b>c>0$, 试比较 $\dfrac{a-c}{b}$ 与 $\dfrac{b-c}{a}$ 的大小.

125. 已知 $a>0$, 试比较 a 与 $\dfrac{1}{a}$ 的大小.

126. 若 x,y,m,n 均为正数, 求证: $\sqrt{(m+n)(x+y)}\geq\sqrt{mx}+\sqrt{ny}$.

127. 已知 $a,b,c\in\mathbf{R}^+$, 求证: $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\geq a^2bc+ab^2c+abc^2$.

128. 设 $f(x)=\sqrt{1+x}$ $(x>0)$. 若 $x_1\neq x_2$, 求证: $|f(x_1)-f(x_2)|<|x_1-x_2|$.

129. 若实数 x、y、m 满足 $|x-m|>|y-m|$, 则称 x 比 y 远离 m.

(1) 若 x^2-1 比 1 远离 0, 求 x 的取值范围;

(2) 定义: 在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 等于 x^2 和 $x+2$ 中远离 0 的那个值. 求证: $f(x)\geq 1$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立.

130. 函数 $y=\dfrac{\sqrt{2x+1}}{x-3}+(x-1)^0$ 的定义域为__________.

131. 若函数 $y=f(x)$ 的定义域是 $[-2,4]$, 则函数 $g(x)=f(x)+f(-x)$ 的定义域是__________.

132. 下列各组中, 两个函数是同一个函数的组的序号是__________.

(1) $y=\lg x$ 与 $y=\dfrac{1}{2}\lg x^2$; (2) $f(x)=2^x$, $D=\{0,1,2,3\}$ 与 $g(x)=\dfrac{1}{6}x^3+\dfrac{5}{6}x+1$, $D=\{0,1,2,3\}$;

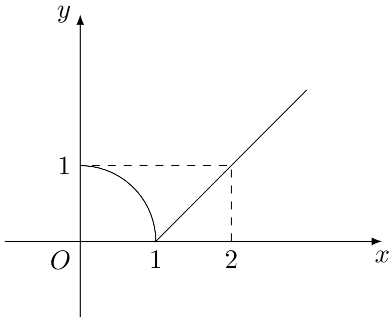
(3) $f(x)=x^2-2x-1$, $g(t)=t^2-2t-1$; (4) $y=\sqrt{x^2}-1$, $y=\sqrt[3]{x^3}-1$.

133. 已知函数 $f(x)=6+5x-x^2$, 函数 $g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-5x-6}}$, 则 $f(x)\cdot g(x)=$ __________.

134. 函数 $y=f(x)$ 满足对于任意 $x>0$, 恒有 $f(x+1)=\lg x$, 则 $y=f(x)$ 在 $x>1$ 时的解析式为__________.

135. 函数 $y=f(x)$ 满足对于任意 $x\neq 0$, 恒有 $f(x-\dfrac{1}{x})=x^3-\dfrac{1}{x^3}$. 若存在 x_0 使得 $f(x_0)=0$, 则 $x_0=$__________.

136. 已知 $y=f(x)$ 为偶函数, 且 $y=f(x)$ 的图像在 $x\in[0,1]$ 时的部分是半径为 1 的圆弧, 在 $x\in[1,+\infty)$ 时的部分是过点 $(2,1)$ 的射线, 如图.



(1) 写出函数 $y=f(x)$ 在 $x<0$ 时的单调性:__________;

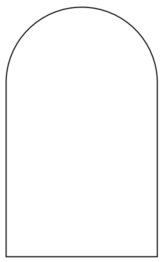
(2) 写出 $f(f(-2))$ 的值:__________;

(3) 写出方程 $f(x)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 的解集:__________.

137. 某工厂生产一种仪器的元件, 由于受生产能力和技术水平等因素的限制, 会产生较多次品, 根据经验知道, 次品数 p(万件) 与日产量 x(万件) 之间满足关系: $p=\begin{cases}\dfrac{x^2}{6}, & 1\leq x<4,\\ x+\dfrac{3}{x}-\dfrac{25}{12}, & x\geq 4.\end{cases}$ 已知每生产 1 万件合格的元件可以盈利 20 万元, 但每产生 1 万件次品将亏损 10 万元. (实际利润 = 合格产品的盈利 − 生产次品的亏损), 试将该工厂每天生产这种元件所获得的实际利润 T(万元) 表示为日产量 x(万件) 的函数.

138. 设常数 a、b 满足 $1<a<b$, 函数 $f(x)=\lg(a^x-b^x)$, 求函数 $y=f(x)$ 的定义域.

139. 如图, 用长为 l 的铁丝弯成下部为矩形, 上部为半圆形的空心框架, 若矩形底边长为 $2x$, 试用解析式将此框架围成的面积 y 表示 x 的函数.



140. 已知函数 $f(x)=\sqrt{ax^2+x+1}$.

(1) 若函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$, 求实数 a 的取值范围;

(2) 若函数 $y=f(x)$ 的值域为 $[0,+\infty)$, 求实数 a 的取值范围.

141. 已知函数 $f(x)=\sqrt{x}$, 函数 $g(x)=\sqrt{1-x}-\sqrt{x}$, 则函数 $y=f(x)+g(x)$ 的定义域为__________.

142. 已知函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $[1,4]$, 则函数 $y=\dfrac{f(2x)}{x-2}$ 的定义域是__________.

143. (1) 设函数 $D(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbf{Q},\\ 0, & x\notin\mathbf{Q}.\end{cases}$ 令 $F(x)=D(\sqrt{2}x)$, 则 $F(1)=$__________;

(2) 已知函数 $f(x)=\begin{cases}2-x, & x<-2,\\ x^2, & -2\le x<1,\\ x, & x\ge 1.\end{cases}$ 若 $f(x)=2$, 则 x=__________.

144. 已知 $f(x)=\begin{cases}x-2, & x>8,\\ f(x+3), & x\le 8,\end{cases}$ 则 $f(2)=$__________.

145. 设常数 $a\in\mathbf{R}$, $f(x)=\begin{cases}x+a, & x<a,\\ \dfrac{1}{x}+a, & x\ge a.\end{cases}$ 若 $f(2)=2$, 则 $a=$__________.

146. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}, & x>1,\\ x, & x\le 1,\end{cases}$ 函数 $g(x)=1-\sqrt{x}$. 求函数 $y=f(x)+g(x)$ 的解析式及定义域.

147. * 设 D 是含数 1 的有限实数集, $f(x)$ 是定义在 D 上的函数, 若 $f(x)$ 的图像绕原点逆时针旋转 $\dfrac{\pi}{6}$ 后与原图像重合, 则在以下各项中, $f(1)$ 的可能取值只能是 (　　)

A. $\sqrt{3}$　　B. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　C. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　D. 0

148. 设常数 $p\in\mathbf{R}$, 设函数 $f(x)=\log_2\dfrac{x+1}{x-1}+\log_2(x-1)+\log_2(p-x)$.

(1) 求 p 的取值范围以及函数 $y=f(x)$ 的定义域;

(2) 若 $y=f(x)$ 存在最大值, 求 p 的取值范围, 并求出最大值.

149. 已知 $xy<0$, 且 $4x^2-9y^2=36$. 问: 能否由此条件将 y 表示成 x 的函数? 若能, 求出该函数的解析式; 若不能, 说明理由.

150. 已知常数 $a\in\mathbf{R}$, 函数 $g(x)=\dfrac{x}{x+2}$, 函数 $h(x)=\dfrac{1}{x+a}$. 设函数 $F(x)=g(x)\cdot h(x)$, D_F 是其定义域; $f(x)=g(x)-h(x)$, D_f 是其定义域.

(1) 设 $a=2$, 求函数 $F(x)$ 的值域;

(2) 对于给定的常数 a, 是否存在实数 t, 使得 $f(t)=0$ 成立? 若存在, 求出这样的所有 t 的值; 若不存在, 说明理由;

(3) * 是否存在常数 a 的值, 使得对于任意 $x\in D_f\cap\mathbf{R}^+$, 有 $f(x)\ge 0$ 恒成立? 若存在, 求出所有这样的 a 的值; 若不存在, 说明理由.

151. 给定六个函数: ① $y=\dfrac{1}{x}$; ② $y=x^2+1$; ③ $y=x^{-\frac{1}{3}}$; ④ $y=2^x$; ⑤ $y=\log_2 x$; ⑥ $y=\sqrt{x^2-1}+\sqrt{1-x^2}$. 在这六个函数中, 是奇函数但不是偶函数的是__________, 是偶函数但不是奇函数的是__________, 既不是奇函数也不是偶函数的是__________, 既是奇函数又是偶函数的是__________.

152. 设常数 a、$b\in\mathbf{R}$. 若定义在 $[a-2,2a]$ 上的 $f(x)=ax^2+bx$ 是偶函数, 则 $a=$__________, $b=$__________.

153. 设常数 a、$b\in\mathbf{R}$. 若定义在 $[a-1,a+1]$ 上的 $f(x)=ax^2+x+b$ 是奇函数, 则 $a=$__________, $b=$__________.

154. 若函数 $f(x)=\dfrac{(x+1)(x+a)}{x}$ 为奇函数, 则实数 $f(x)$__________.

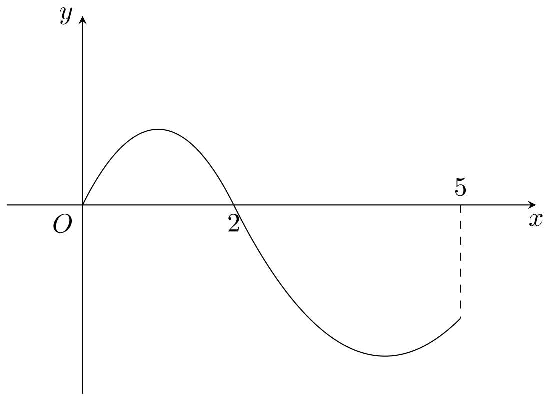
155. 设函数 $y=f(x)$ 为定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数, 则命题: "$f(-1)\neq f(1)$ 且 $f(-1)\neq -f(1)$" 是命题 "$y=f(x)$ 既不是奇函数也不是偶函数" 的__________ 条件 (填 "充分不必要"、"必要不充分"、"充要"、"既不充分也不必要" 之中一个).

156. 设 $y=f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数, 当 $x\geq 0$ 时, $f(x)=x^2-2x$.

(1) 当 $y=f(x)$ 为奇函数时, 则当 $x<0$ 时, $f(x)$=__________;

(2) 当 $y=f(x)$ 为偶函数时, 则当 $x<0$ 时, $f(x)$=__________.

157. 设奇函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $[-5,5]$. 若当 $x\in[0,5]$ 时, $y=f(x)$ 的图像如图, 则不等式 $xf(x)<0$ 的解是__________.



158. 若定义在 $\mathbf{R}$ 上的两个函数 $y=f(x)$、$y=g(x)$ 均为奇函数. 设 $F(x)=af(x)+bg(x)+1$.

(1) 若 $F(-2)=10$, 则 $F(2)=$__________;

(2) 若函数 $y=F(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上存在最大值 4, 则 $y=F(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上的最小值为__________.

159. 判断下列函数 $y=f(x)$ 的奇偶性:

(1) $f(x)=(x-1)\cdot\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$;

(2)$f(x)=\begin{cases}x(1-x), & x<0,\\ x(1+x), & x>0.\end{cases}$.

160. 已知函数 $f(x)=x^2-2a|x-1|$, $x\in\mathbf{R}$, 常数 $a\in\mathbf{R}$.

(1) 求证: 函数 $y=f(x)$ 不是奇函数;

(2) 若函数 $y=f(x)$ 是偶函数, 求实数 $f(x)=\log_3|2x+a|$ 的值.

161. 判断下列函数 $y=f(x)$ 的奇偶性:

(1) $f(x)=\dfrac{1}{a^x-1}+\dfrac{1}{2}$(常数 $a>0$ 且 $a\neq 1$);

(2) $f(x)=\dfrac{ax}{x^2-a}$(常数 $a\in\mathbf{R}$).

162. 设 $y=f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数, 则下列叙述正确的是 (　　) .

A. $y=f(x)f(-x)$ 是奇函数　　B. $y=f(x)|f(-x)|$ 是奇函数

C. $y=f(x)-f(-x)$ 是偶函数　　D. $y=f(x)+f(-x)$ 是偶函数

163. 设函数 $y=f(x)$ 为定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数, 则 "$f(0)\neq 0$" 是 "函数 $y=f(x)$ 不是奇函数" 的 (　　).

A. 充分非必要条件　　B. 必要非充分条件

C. 充要条件　　D. 既不是充分条件, 也不是必要条件

164. 设 $y=f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 当 $x<0$ 时, $f(x)=\lg(2-x)$, 则 $x\in\mathbf{R}$ 时, $f(x)=$__________.

165. 判断下列函数 $y=f(x)$ 的奇偶性, 并说明理由:

(1) $f(x)=x^3-\dfrac{1}{x}$;

(2) $f(x)=\dfrac{|x+3|-3}{\sqrt{4-x^2}}$.

166. 根据常数 a 的不同取值, 讨论下列函数 $y=f(x)$ 的奇偶性, 并说明理由:

(1) $f(a)\geq f(0)$;

(2) $f(x)=x|x-a|$.

167. 设函数 $y=f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数. 若 $x>0$ 时, $f(x)=\lg x$.

(1) 求方程 $f(x)=0$ 的解集;

(2) 求不等式 $f(x)>-1$ 的解集.

168. 是否存在实数 b, 使得函数 $g(x)=\dfrac{2^x}{4^x-b}$ 是奇函数? 若存在, 求 b 的值; 若不存在, 说明理由.

169. 常数 $a\in\mathbf{R}$. 若函数 $f(x)=\lg(10^x+1)+ax$ 是偶函数, 则 $a=$__________.

170. 已知 $y=f(x)$ 为定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, $y=g(x)$ 为定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 且任意 $x\in\mathbf{R}$, 都有 $f(x)=g(x)+\dfrac{1}{x^2+x+1}$, 则 $f(1)+g(1)=$__________.

171. 设常数 $a\neq 0$. 若函数 $f(x)=\lg\dfrac{x+1-2a}{x+1+3a}$. 是否存在实数 a, 使函数 $y=f(x)$ 为奇函数或偶函数? 若存在, 求出 a 的值, 并判断相应的 $y=f(x)$ 的奇偶性; 若不存在, 说明理由.

172. 函数 $y=\dfrac{1}{x^2-4x+5}$ 的图像关于 (　　).

A. y 轴对称　　B. 原点对称　　C. 直线 $x=2$ 对称　　D. 点 $(2,1)$ 对称

173. 函数 $y=x+\dfrac{1}{x-1}$ 的图像关于 (　　).

A. 点 $(1,1)$ 对称　　B. 点 $(-1,1)$ 对称　　C. 点 $(1,-1)$ 对称　　D. 点 $(-1,-1)$ 对称

174. 若函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 且 $f(x-1)=-f(3-x)$, 则 $y=f(x)$ 的图像关于 (　　).

A. 原点中心对称　　B. 点 $(1,0)$ 中心对称　　C. 点 $(2,0)$ 中心对称　　D. 点 $(4,0)$ 中心对称

175. 设常数 $a,b\in\mathbf{R}$. 若函数 $y=x^2+ax$ 在区间 $[a,b]$ 上的图像关于直线 $x=1$ 对称, 则 $b=$__________.

176. 已知函数 $y=f(x)$ 满足: 对于任意 $x\in\mathbf{R}$, 都有 $f(x+1)=-f(x)$. 若 $f(1)=1$, 则 $f(4)=$__________; $f(2015)=$__________.

177. 已知函数 $y=f(x)$ 图像关于 $(1,0)$ 对称. 若 $x\le 1$ 时, $f(x)=x^2-1$, 则 $f(x)=$__________.

178. 已知函数 $y=f(x)$ 满足: 对于任意 $x\in\mathbf{R}$, 都有 $f(x+3)=f(x)$. 若 $x\in[0,3)$ 时, $f(x)=x-1$, 则 $x\in[6,9)$ 时, $f(x)=$__________.

179. 设常数 $a\in\mathbf{R}$. 已知函数 $y=f(x)$ 满足: 对于任意 $x\in\mathbf{R}$, 都有 $f(x-1)=f(1-x)$. 若函数 $y=f(x)$ 图像总是关于直线 $x=a$ 对称, 则 a=__________.

180. 设常数 $a\in\mathbf{R}$. 若直线 $x=2$ 是函数 $f(x)=\log_3|2x+a|$ 的图像的一条对称轴, 则 a=__________.

181. 设函数 $y=f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 且对于任意 $x\in\mathbf{R}$ 都有 $f(x+2)=-f(x)$.

(1) 求证: 函数 $y=f(x)$ 为周期函数;

(2) 对于任意 $x\in\mathbf{R}$, 求证: $f(1+x)=f(1-x)$;

(3) 设 $0\le x\le 1$ 时, $f(x)=\dfrac{1}{2}x$. 求函数 $y=f(x)+\dfrac{1}{2}$ 在 $-4\le x\le 4$ 时的所有零点;

(4) 设 $-1\le x\le 1$ 时, $f(x)=\sin x$.

① 写出 $1\le x\le 5$ 时, $y=f(x)$ 的解析式;

② 求 $y=f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上的解析式.

182. 常数 a、$b\in\mathbf{R}$. 函数 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{3}}+\dfrac{1}{x+a}+b$ 的图像关于点 $(1,2)$ 对称.

(1) 求 $y=f(x)$ 的解析式;

(2) * 若 $y=f(x)$ 的图像关于某一条直线对称, 写出这样的一条对称轴直线的方程 (无需证明).

183. 函数 $y=\log_2\dfrac{2-x}{2+x}$ 的图像关于 (　　).

A. 原点对称　　B. y 轴对称　　C. 直线 $y=x$ 对称　　D. 直线 $y=-x$ 对称

184. 函数 $y=\log_2(2-2^x)$ 的图像关于 (　　).

A. 原点对称　　B. y 轴对称　　C. 直线 $y=x$ 对称　　D. 直线 $y=-x$ 对称

185. 设常数 a、$b\in\mathbf{R}$. 若二次函数 $f(x)=ax^2+bx+1$ 满足: 对任意 $t\in\mathbf{R}$, $f(2+t)=f(2-t)$, 则 $\dfrac{b}{a}=$__________.

186. 设定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $y=f(x)$ 的图像关于直线 $x=1$ 对称. 若 $x\ge 1$ 时, $f(x)=1-3^{x-1}$, 则 $x<1$ 时, $f(x)=$__________.

187. 设函数 $y=\log_2(x+3)$ 的图像与函数 $y=f(x)$ 的图像关于直线 $x=1$ 对称. ① $f(1)$=__________; ② 若 $f(a)$ 有意义, 则 $f(a)=$__________(结果用 a 的表达式表示).

188. 已知定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $y=f(x)$ 是偶函数, 并且其图像关于直线 $x=1$ 对称.

(1) 若 $f(0)=1$, $f(1)=2$, 求 $f(15)+2f(20)$ 的值;

(2) 设 $x\in[0,1]$ 时, $f(x)=x^3$.

① $1<x\le 2$ 时, 求 $y=f(x)$ 的解析式;

② $-2\le x<0$ 时, 求 $y=f(x)$ 的解析式;

③ 求函数 $y=f(x)-\frac{1}{8}$ 在 $[-2,2]$ 上的所有零点;

④ 求 $y=f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上的解析式.

189. 已知 $f(x)$ 是定义域为 $(-\infty,+\infty)$ 的奇函数, 满足 $f(1-x)=f(1+x)$. 若 $f(1)=2$, 则 $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(50)=($ $)$.

A. -50 B. 0 C. 2 D. 50

190. 已知函数 $y=f(x)$ 对一切 $u,v\in\mathbf{R}$, 都有 $f(u+v)=f(u)+f(v)$.

(1) 求证: $y=f(x)$ 是奇函数;

(2) 若 $f(-3)=a$, 用 a 表示 $f(6)$ 以及 $f(300)$.

191. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $y=f(x)$ 是奇函数, 且 $y=f(x)$ 也是以 4 为周期的一个周期函数.

(1) 若 $f(1)=1$, 则 $f(-1)+f(0)=$__________; $f(10)+f(11)=$__________;

(2) * 若 $f(1)=0$, 则在区间 $[-3,3]$ 上的零点的个数的最小值为__________.

192. * 设定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $y=f(x)$ 的满足: 对于任意 $x\in\mathbf{R}$, 恒有 $f(-x+1)=-f(x+1)$ 且 $f(-x-1)=-f(x-1)$. 则下面命题中, 正确的命题的序号是__________.

① 函数 $y=f(x)$ 是偶函数; ② 2 是 $y=f(x)$ 的周期; ③ 函数 $y=f(x)$ 图像关于 $(1,0)$ 对称; ④ 函数 $y=f(x)$ 图像关于 $(3,0)$ 对称.

193. 下列函数中, 在其定义域上是单调函数的序号为__________.

① $y=\frac{2-x}{x}$; ② $y=x-\frac{1}{x}$; ③ $y=3^{x-1}$; ④ $y=ln\frac{1}{x}$; ⑤ $y=tanx$.

194. 函数 $y=|x-1|$ 递减区间的是__________.

195. 函数 $y=x+\frac{2}{x}(x>0)$ 的递减区间是__________.

196. 函数 $y=(\frac{1}{2})^{x^2}$ 的递减区间是__________.

197. 函数 $y=\frac{1}{\sqrt{x^2+2x-3}}$ 的递增区间是__________.

198. 设常数 $a\in\mathbf{R}$. 若 $y=\frac{ax}{x+1}$ 在区间 $(-1,+\infty)$ 上递增, 则 a 的取值范围是__________.

199. 设常数 $a\in\mathbf{R}$. 若函数 $y=x^2+ax+1$ 在 $(-\infty,2]$ 上递减, 则 a 的取值范围是__________.

200. 若函数 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 均为 $\mathbf{R}$ 上增函数, 则下列命题中, 正确的命题的序号是__________.

① $y=f(x)+g(x)$ 为增函数; ② $y=f(x)\cdot g(x)$ 为增函数; ③ $y=f(g(x))$ 为增函数.

201. 若 $y=f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 且在 $(-\infty,0)$ 上是减函数, 又 $f(-2)=0$, 则 $f(x)\le 0$ 的解集为__________.

202. 设常数 $a\in\mathbf{R}$. 若函数 $f(x)=\begin{cases}x+a, & x<1,\\ x^2, & x\ge 1\end{cases}$ 在 $\mathbf{R}$ 上递增, 则 a 的取值范围为__________.

203. 设函数 $f(x)=\mathrm{e}^x+\dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$.

(1) 求证: $y=f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上不是增函数;

(2) 求证: $y=f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上是增函数.

204. 设常数 $a\in\mathbf{R}$. 若 $y=\log_{\frac{1}{2}}(x^2-ax+2)$ 在 $[-1,+\infty)$ 上是减函数, 求 a 的取值范围.

205. 已知定义在区间 $(-1,1)$ 上的函数 $y=f(x)$ 是奇函数, 也是减函数. 若 $f(1-a)+f(1-a^2)<0$, 求实数 a 的取值范围.

206. 下列函数中, 在区间 $(0,+\infty)$ 上递增的函数的序号为__________.

① $y=|x+1|$; ② $y=x-\dfrac{1}{x}$; ③ $y=x^{\frac{1}{2}}$; ④ $y=\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}$; ⑤ $y=\lg x$.

207. 函数 $y=\log_{0.7}(x^2-3x+2)$ 的单调减区间为__________.

208. 已知 $y=f(x)$ 是偶函数, 且在区间 $[0,4]$ 上递减. 记 $a=f(2)$, $b=f(-3)$, $c=f(-4)$, 则将 a,b,c 按从小到大的顺序排列是 __________.

209. 设常数 $a\in\mathbf{R}$. “$a=1$” 是 “$f(x)=|x-a|$ 在区间 $[1,+\infty)$ 上为增函数” 的__________ 条件 (填: “充分不必要”、“必要不充分”、“充要”、“既不充分也不必要” 之一).

210. (1) 设常数 $a\in\mathbf{R}$. 若函数 $y=\dfrac{1}{x-a}$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调, 则 a 的取值范围为__________.

(2) 设常数 $k\in\mathbf{R}$. 若函数 $f(x)=kx^2-4x+8$ 在区间 $[5,20]$ 上单调递减, 则 k 的取值范围是__________.

211. * 设 $f(x)$、$g(x)$、$h(x)$ 是定义域为 R 的三个函数, 对于下列命题:

① 若 $f(x)+g(x)$、$f(x)+h(x)$、$g(x)+h(x)$ 均为增函数, 则 $f(x)$、$g(x)$、$h(x)$ 中至少有一个是增函数;

② 若 $f(x)+g(x)$、$f(x)+h(x)$、$g(x)+h(x)$ 均是以 T 为周期的函数, 则 $f(x)$、$g(x)$、$h(x)$ 均是以 T 为周期的函数, 下列判断正确的是 (　　).

A. ①和②均为真命题

B. ①和②均为假命题

C. ①为真命题, ②为假命题

D. ①为假命题, ②为真命题

212. 设常数 $a,b\in\mathbf{R}$. 已知 $f(x)=\dfrac{ax^2+1}{x+b}$ 是奇函数, $f(1)=5$.

(1) 求 a,b 的值;

(2) 求证: $y=f(x)$ 在区间 $(0,\dfrac{1}{2}]$ 上是减函数.

213. 求证: 函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}-\lg\dfrac{1+x}{1-x}$ 是奇函数, 且在区间 $(0,1)$ 上递减.

214. 设常数 $a\in\mathbf{R}$. 若函数 $f(x)=\log_a(2-ax)$ 在 $[0,1]$ 上是减函数, 求 a 的取值范围.

215. 已知定义 $\mathbf{R}$ 上的函数 $y=f(x)$ 满足下面两个条件:

(I) 对于任意 $x_1,x_2\in\mathbf{R}$, 都有 $f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)$; (II) 当 $x>0$ 时, $f(x)>0$, 且 $f(1)=1$.

(1) 求证: $y=f(x)$ 是奇函数;

(2) 求证: $y=f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数;

(3) * 解不等式 $f(x^2-1)<2$.

216. 函数 $y=x^{-\frac{3}{2}}$ 的定义域为__________.

217. 下列命题中, 正确的命题的序号是__________.

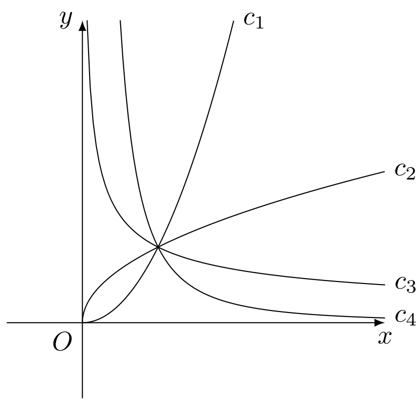
① 当 $\alpha=0$ 时, 函数 $y=x^{\alpha}$ 的图像是一条直线;

② 幂函数的图像都经过 $(0,0)$ 和 $(1,1)$ 点;

③ 当 $\alpha<0$ 且 $y=x^{\alpha}$ 是奇函数时, 它也是减函数;

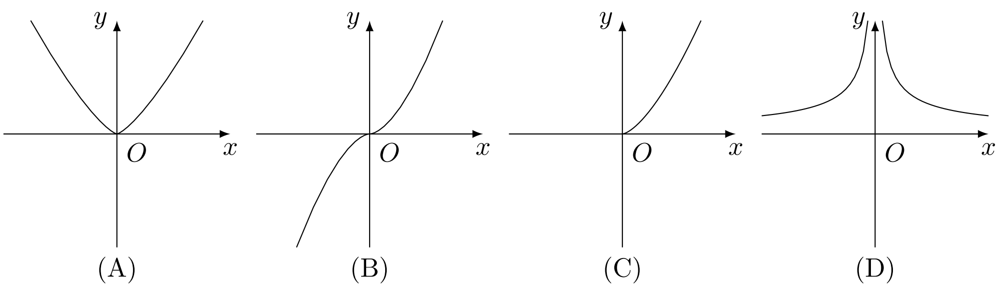
④ 第四象限不可能有幂函数的图像.

218. 图中曲线是幂函数 $y=x^{n}$ 在第一象限的图像, 已知 n 取 $\pm 2, \pm\dfrac{1}{2}$ 四个值, 则相应于曲线 c_1, c_2, c_3, c_4 的 n 依次为 (　　).



A. $-2,-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},2$　　B. $2,\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2},-2$　　C. $-\dfrac{1}{2},-2,2,\dfrac{1}{2}$　　D. $2,\dfrac{1}{2},-2,-\dfrac{1}{2}$

219. 下列函数的图像为 (A)、(B)、(C)、(D) 之一, 试将正确的字母标号填在相应函数后面的横线上.



(1) $y=x^{\frac{3}{2}}$__________; (2) $y=x^{\frac{4}{3}}$__________; (3) $y=x^{\frac{5}{3}}$__________; (4) $y=x^{-\frac{2}{3}}$__________.

220. 已知 $\alpha\in\{-2,-1,-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},1,2,3\}$, 若幂函数 $f(x)=x^{\alpha}$ 为奇函数, 且在 $(0,+\infty)$ 上递减, 则 $\alpha=$__________.

221. 函数 $y=f(x)$ 满足两个条件: ① $y=f(x)$ 是两个幂函数的和函数; ② $y=f(x)$ 的最小值为 2, 则 $y=f(x)$ 的解析式可以是__________.

222. 若集合 $A=\{y|y=x^{\frac{1}{3}},\ -1\le x\le 1\}$, $B=\{y|y=x^{-\frac{1}{2}}\}$, 则 $A\cap B$ 等于 (　　).

A. $(0,1]$　　B. $[-1,1]$　　C. $\{1\}$　　D. $\{0,1\}$

223. 设常数 $m\in\mathbf{R}$. 若幂函数 $y=(m^2-m-1)x^{m^2-2m-1}$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数, 则 m 的值为__________.

224. 设常数 $n\in\mathbf{Z}$. 若函数 $y=x^{n^2-2n-3}$ 的图像与两条坐标轴都无公共点, 且图像关于 y 轴对称, 则 n 的值为__________.

225. 函数 $y=1-(x+2)^{-2}$ 可以先将幂函数 $y=x^{-2}$ 的图像向__________ 平移 2 个单位, 再以__________ 轴为对称轴作对称变换, 最后向__________ 平移 1 个单位.

226. 在 $f(x)=(2m^2-7m-9)x^{m^2-9m+19}$ 中, 当实数 m 为何值时,

(1) $y=f(x)$ 是正比例函数, 且它的图像的倾斜角为钝角?

(2) $y=f(x)$ 是反比例函数, 且它的图像在第一, 三象限?

227. 设常数 $t\in\mathbf{Z}$. 已知幂函数 $y=(t^3-t+1)x^{\frac{1}{3}(1+2t-t^2)}$ 是偶函数, 且在区间 $(0,+\infty)$ 上是增函数, 求整数 t 的值, 并作出相应的幂函数的大致图像.

228. 设 $a\in\mathbf{R}$.

(1) 若 $(a+2)^{\frac{2}{3}}>(1-2a)^{\frac{2}{3}}$, 求 a 的取值范围;

(2) 若 $(a+2)^{-\frac{1}{3}}>(1-2a)^{-\frac{1}{3}}$, 求 a 的取值范围.

229. 已知函数: ① $y=\dfrac{1}{x}$; ② $y=x^{\frac{1}{2}}$; ③ $y=x^{-\frac{1}{2}}$; ④ $y=x^{\frac{2}{3}}$; ⑤ $y=x^{-\frac{2}{3}}$, 填写分别具有下列性质的函数序号:

(1) 图像与 x 轴有公共点的:__________;

(2) 图像关于原点对称的:__________;

(3) 定义域内递减的:__________;

(4) 在定义域内有反函数的:__________.

230. 函数 $y=-(x+1)^{-3}$ 的图像可以先将幂函数 $y=x^{-3}$ 的图像向__________ 平移 1 个单位, 再以__________ 轴为对称轴作对称变换.

231. 设 $\alpha\in\{-3,-\dfrac{2}{3},-\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3},1,\dfrac{3}{2},2\}$. 已知幂函数 $y=x^{\alpha}$ 是奇函数, 且在区间 $(0,+\infty)$ 上是减函数, 则满足条件的 α 的值是__________.

232. 下列关于幂函数图像及性质的叙述中, 正确的叙述的序号是__________.

① 对于一个确定的幂函数, 第二、三象限不可能同时有该幂函数的图像上的点;

② 若某个幂函数图像过 $(-1,-1)$, 则该幂函数是奇函数;

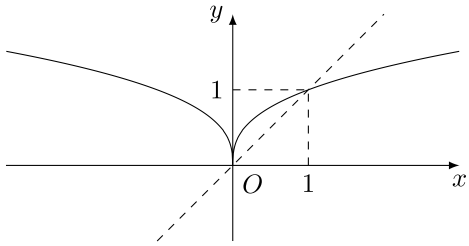
③ 若某个幂函数在定义域上递增, 则该幂函数图像必经过原点;

④ 幂函数图像不会经过点 $(-\dfrac{1}{2},8)$ 以及 $(-8,-4)$.

233. 设 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 是两个不同的幂函数, 集合 $M=\{x|f(x)=g(x)\}$, 则集合 M 中的元素是 (　　).

A. 1 或 2　　B. 1 或 3　　C. 1 或 2 或 3　　D. 1 或 2 或 3 或 4

234. 已知幂函数 $y=x^{\frac{q}{p}}(p\in\mathbf{N}^*,\ q\in\mathbf{N}^*,\ p,q$ 互质$)$ 的图像如图所示, 则 (　　).



A. p,q 均为奇数

B. p 是奇数, q 是偶数, 且 $0<\frac{q}{p}<1$

C. p 是偶数, q 是奇数

D. p 是奇数, q 是偶数, 且 $\frac{q}{p}>1$

235. 若 $(x+1)^{-\frac{1}{3}}<(3-2x)^{-\frac{1}{3}}$, 求实数 x 的取值范围.

236. 设常数 a,b 满足 $a>b>0$. 已知函数 $f(x)=\frac{x+a}{x+b}$. (1) 写出函数 $y=f(x)$ 的单调性;

(2) 写出函数 $y=f(x)$ 图像的一个对称中心的坐标.

237. 已知函数 $f(x)=\frac{x^{\frac{1}{3}}-x^{-\frac{1}{3}}}{5}$, $g(x)=\frac{x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{1}{3}}}{5}$.

(1) 分别计算 $f(4)-5f(2)g(2)$ 和 $f(9)-5f(3)g(3)$ 的值;

(2) 由 (1) 概括出涉及函数 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 的, 对所有不等于零的实数 x 都成立的一个等式, 并加以证明.

238. * 设常数 a,b 满足 $a>b>0$. 已知函数 $f(x)=\frac{x+a}{x+b}$. 证明: 该函数图像的对称中心是唯一的.

239. 函数 $y=\log_2\frac{1}{x-1}$ 的反函数是__________.

240. 函数 $y=x^2(x\le 0)$ 的反函数是__________.

241. 函数 $y=\frac{2^x}{2^x-1}(x>0)$ 的反函数是__________.

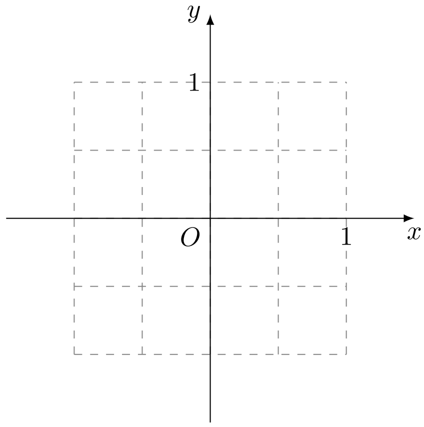
242. 已知函数 $y=f(x)$ 的反函数是 $f^{-1}(x)=\frac{4x+3}{2x-1}$, 则 $f(x)$=__________.

243. 记 $y=f^{-1}(x)$ 是 $y=f(x)$ 的反函数. 若函数 $f(x)=\log_3 x$, 则 $f^{-1}(-\log_9 2)$=__________.

244. 若命题 "函数 $y=x+\frac{a}{x}$ 在区间 $[1,2]$ 上存在反函数" 为真命题, 则在下列值中, 能作为实数 a 的值的序号是__________.

① $a=-1$; ② $a=1$; ③ $a=\sqrt{2}$; ④ $a=\sqrt{5}$.

245. 若函数 $f(x)=1-\sqrt{1-x^2}$ $(-1\le x\le 0)$, 请画出函数 $y=f^{-1}(x)$ 的大致图像.



246. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $y=f(x)$ 是奇函数, 且有反函数 $y=f^{-1}(x)$. 若 a,b 是两个实数, 则下列点中, 必在 $y=f^{-1}(x)$ 的图像上的点的序号是__________.

① $(-f(a),a)$; ② $(-f(a),-a)$;③ $(-b,-f(b))$; ④ $(b,-f^{-1}(-b))$.

247. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $y=f(x)$ 的反函数为 $y=f^{-1}(x)$. 若 $y=f(x+1)$ 的图像过点 $(-\frac{1}{2},1)$, 则 $y=f^{-1}(x+1)$ 的图像必过 (　　).

A. $(1,-\frac{1}{2})$　　B. $(1,\frac{1}{2})$　　C. $(0,-\frac{1}{2})$　　D. $(0,\frac{1}{2})$

248. 设常数 $a\neq 0$. 若函数 $f(x)=\dfrac{1-ax}{1+ax}$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称, 求实数 a 的值以及 $y=f(x)$ 的反函数 $y=f^{-1}(x)$.

249. 记 $y=f^{-1}(x)$ 是 $y=f(x)$ 的反函数.

(1) 若函数 $f(x+1)=\dfrac{x}{x+1}$, 求函数 $y=f^{-1}(x+1)$ 的解析式;

(2) 设函数 $f(x)=\dfrac{1-2x}{1+x}$. 若 $y=g(x)$ 的图像与 $y=f^{-1}(x+1)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称, 求 $y=g(x)$ 的解析式.

250. (1) 函数 $y=x^2+2x-3\ (x\geq 0)$ 的反函数为__________;

(2) 函数 $y=\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+1}$ 的反函数为__________;

(3) 函数 $y=x|x|$ 的反函数为__________.

251. 已知函数 $y=f(x)$ 是奇函数, 且 $y=g(x)$ 是 $y=f(x)$ 的反函数. 若 $x\geq 0$ 时, $f(x)=3^x-1$, 则 $g(-8)$=__________.

252. 设常数 $a\in\mathbf{R}$. 若函数 $y=x+\dfrac{a}{x}$ 在区间 $[1,2]$ 上存在反函数, 求 a 的取值范围.

253. 求函数 $y=\begin{cases} x^2-2x+2, & x\leq 1, \\ (\frac{1}{2})^x, & x>1 \end{cases}$ 的反函数.

254. 设常数 $a>0$ 且 $a\neq 1$. 求函数 $f(x)=\log_a(x+\sqrt{x^2-1})$ 的反函数.

255. 已知函数 $y=f(x)$ 的图像经过点 $(0,-1)$. 若函数 $y=f(x+4)$ 存在反函数 $y=g(x)$, 则 $y=g(x)$ 的图像总经过的定点的坐标为__________.

256. 设 $y=f^{-1}(x)$, $y=g^{-1}(x)$ 分别是定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 的反函数. 若函数 $y=f(x-1)$ 和 $y=g^{-1}(x-3)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称, 且 $g(5)=2018$, 则 $f(4)$ 的值为__________.

257. 设 $a>0$, 函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+a\cdot 2^x}$.

(1) 若 $a=1$, 求 $f(x)$ 的反函数 $f^{-1}(x)$;

(2) 求函数 $y=f(x)\cdot f(-x)$ 的最大值 (用 a 表示);

(3) * 设 $g(x)=f(x)-f(x-1)$. 若对任意 $x\in(-\infty,0]$, $g(x)\geq g(0)$ 恒成立, 求 a 的取值范围.

258. 已知函数 $y=f^{-1}(x)$ 是 $y=f(x)$ 的反函数. 定义: 若对给定的实数 $a(a\neq 0)$, 函数 $y=f(x+a)$ 与 $y=f^{-1}(x+a)$ 互为反函数, 则称 $y=f(x)$ 满足 "a 和性质".

(1) 判断函数 $g(x)=x^2+1(x>0)$ 是否满足 "1 和性质", 并说明理由;

(2) * 求所有满足 "2 和性质" 的一次函数.

259. 若 $\log_3 5=a$, $\log_5 7=b$, 用 a,b 表示 $\log_{75} 63=$__________.

260. 若 $3^a=4^b=6^c$, 且 a,b,c 都是正数, 则 $\dfrac{-2ab+2bc+ac}{abc}$ 的值为__________.

261. 若不等式 $(a-1)^x<1$ 的解集为 $(-\infty,0)$, 则实数 a 的取值范围是__________.

262. 函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{\lg|x-1|}$ 的定义域为__________.

263. 为了得到函数 $y=\lg\dfrac{x+3}{10}$ 的图像, 只需把函数 $y=\lg x$ 的图像上所有的点 (　　).

A. 向左平移 3 个单位长度, 再向上平移 1 个单位长度

B. 向右平移 3 个单位长度, 再向上平移 1 个单位长度

C. 向左平移 3 个单位长度, 再向下平移 1 个单位长度

D. 向右平移 3 个单位长度, 再向下平移 1 个单位长度

264. 设常数 $a>0$, $a\neq 1$. 函数 $f(x)=a^x$ 在 $[0,1]$ 上的最大值和最小值之和为 a^2, 则 $a=$__________.

265. 若集合 $A=\{y|y=2\cdot(\dfrac{1}{3})^{|x|}\}$, $B=\{a|\log_a(3a-1)>0\}$, 则 $A\cap B=$__________.

266. * 已知函数 $f(x)=|3^x-1|$, $c<b<a$, 且 $f(b)<f(a)<f(c)$, 在下列关系式中, 一定成立的关系式的序号是__________. ① $3^a+3^b>2$; ② $3^a+3^b<2$; ③ $3^c<1$; ④ $3^a+3^c<2$.

267. 已知函数 $f(x)=\dfrac{3^x-3^{-x}}{3^x+3^{-x}}$.

(1) 证明 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是增函数;

(2) 求 $f(x)$ 的值域.

268. 已知函数 $y=(\log_2\dfrac{x}{2^a})(\log_2\dfrac{x}{4})$, $x\in[\sqrt{2},4]$, 试求该函数的最大值 $g(a)$.

269. 已知函数 $f(x)=a\cdot 2^x+b\cdot 3^x$, 其中常数 a,b 满足 $ab\neq 0$.

(1) 若 $ab>0$, 判断函数 $y=f(x)$ 的单调性;

(2) 若 $ab<0$, 求 $f(x+1)>f(x)$ 时 x 的取值范围.

270. 不等式 $\log_{\frac{1}{2}}(x-1)\geq 1$ 的解集为__________.

271. 设常数 $a\in\mathbf{R}$. 若函数 $f(x)=\dfrac{1}{2^x-1}+a$ 为奇函数, 则 a=__________.

272. 若 $\log_2 3=a$, $3^b=7$, 用 a,b 表示 $\log_{3\sqrt{7}}2$, 则 $\log_{3\sqrt{7}}2$=__________.

273. 对于函数 $y=f(x)$ 的定义域中的任意的 $x_1,x_2(x_1\neq x_2)$, 有如下结论:

① $f(x_1+x_2)=f(x_1)\cdot f(x_2)$; ② $f(x_1\cdot x_2)=f(x_1)+f(x_2)$;
③ $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$; ④ $f(\dfrac{x_1+x_2}{2})<\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$.
当 $y=\ln x$ 时, 上述结论中, 正确结论的序号是__________.

274. (1) * 函数 $y=\log_a|x-b|$ 在 $(0,+\infty)$ 上递增, 则 a、b 满足 (　　).

A. $a>1$ 且 $b\geq 0$　　B. $a>1$ 且 $b\leq 0$　　C. $0<a<1$ 且 $b\geq 0$　　D. $0<a<1$ 且 $b\leq 0$

(2) 函数 $f(x)=\log_a|ax^2-x|$ $(a>0,\ a\neq 1)$ 在区间 $[3,4]$ 上是增函数, 则实数 a 的范围是__________.

275. * 已知常数 $a>1$, 函数 $y=|\log_a x|$ 的定义域为区间 $[m,n]$, 值域为区间 $[0,1]$. 若 $n-m$ 的最小值为 $\dfrac{5}{6}$, 则 a=__________.

276. * 设常数 $a>0$,$a\neq 1$. 已知函数 $f(x)=\log_a x$. 若对于任意 $x\in[3,+\infty)$ 都有 $|f(x)|\geq 1$ 成立, 则 a 的取值范围为__________.

277. * 已知函数 $f(x)=2+\log_3 x$ $(3\leq x\leq 27)$.

(1) 求函数 $y=f(x^2)$ 的定义域;

(2) 求函数 $g(x)=[f(x)]^2+f(x^2)$ 的值域.

278. 已知定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $y=f(x)$ 为奇函数, 且满足 $f(x+2)=-f(x)$. 当 $x\in[0,1]$ 时, $f(x)=2^x-1$.

(1) 求 $y=f(x)$ 在区间 $[-1,0)$ 上的解析式;

(2) 求 $f(\log_{\frac{1}{2}}24)$ 的值.

279. * 已知函数 $f(x)=1+a\cdot(\dfrac{1}{2})^x+(\dfrac{1}{4})^x$.

(1) 当 $a=1$ 时, 求函数 $y=f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上的值域;

(2) 对于定义在集合 D 上的函数 $y=f(x)$, 如果存在常数 $M>0$, 满足: 对任意 $x\in D$, 都有 $|f(x)|\leq M$ 成立, 则称 $f(x)$ 是 D 上的有界函数, 其中 M 称为函数 $f(x)$ 的一个上界. 若函数 $y=f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上是以 3 为一个上界的有界函数, 求实数 a 的取值范围.

280. 二次函数图像的顶点是 $(-1,2)$, 且图像经过点 $(1,6)$, 则此二次函数的解析式为__________.

281. 二次函数 $y=f(x)$ 满足 $f(2-x)=f(2+x)$, 且 $y=f(x)$ 的图像在 y 轴的截距为 3, 被 x 轴截得的线段长为 2, 则 $y=f(x)$ 的解析式为__________.

282. 设常数 $a\in\mathbf{R}$. 若二次函数 $f(x)=a(x-a^2)(x+a)$ 为偶函数, 则 $a=$__________.

283. 设常数 $b\in\mathbf{R}$. 若函数 $y=x+\dfrac{2^b}{x}$ $(x>0)$ 在 $(0,4]$ 上是减函数, 在 $[4,+\infty)$ 上是增函数, 则 $b=$__________.

284. 设常数 $a \in \mathbf{R}$. 若函数 $y=-x^2+2ax(0 \le x \le 1)$ 的最小值用 $g(a)$ 表示, 则 $g(a)=$__________.

285. 设常数 $m>0$. 若二次函数 $f(x)=x^2-2x$ 在区间 $[0,m]$ 上的最大值为 0、最小值为 -1, 则 m 的取值范围为__________.

286. 若函数 $f(x)=x+\dfrac{4}{x}(1 \le x \le 5)$, 则函数 $y=f(x)$ 的递减区间是__________, 递增区间是__________, 最小值是__________, 最大值是__________.

287. 已知 $g(x)=-x^2-3$, $y=f(x)$ 是二次函数, 且 $y=f(x)+g(x)$ 为正比例函数.

(1) 若 $0 \le x \le 1$ 时, $y=f(x)$ 的最大值为 6, 则 $y=f(x)$ 的表达式是__________;

(2) 若 $0 \le x \le 1$ 时, $y=f(x)$ 的最小值为 $2\sqrt{2}$, 则 $y=f(x)$ 的表达式是__________.

288. 已知 $a>0$, 函数 $f(x)=x-\dfrac{a}{x}$, 求函数 $y=f(x)$ 的递增区间.

289. 已知函数 $y=x+\dfrac{a}{x}$ 有如下性质: 如果常数 $a>0$, 那么该函数在 $(0,\sqrt{a}]$ 上是减函数, 在 $[\sqrt{a},+\infty)$ 上是增函数.

(1) 设常数 $c \in [1,+\infty)$, 求函数 $f(x)=x+\dfrac{c}{x}$ $(1 \le x \le 2)$ 的最大值和最小值;

(2) * 设常数 $c>0$. 当 n 是正整数时, 研究函数 $g(x)=x^n+\dfrac{c}{x^n}$ 的单调性, 并说明理由.

290. 已知函数 $f(x)=|x-\dfrac{1}{x}|,\ x>0$.

(1) 画出函数 $y=f(x)$ 的草图;

(2) 当 $0<a<b$, 且 $f(a)=f(b)$ 时, 求证: $ab=1$.

291. 函数 $y=2x+\dfrac{1}{x}(x<0)$ 的递增区间是__________.

292. 设 $x<1$, 则 $\dfrac{2x^2-2x+1}{x-1}$ 的最大值为__________.

293. 函数 $y=(x-3)(x-1)(x+1)(x+3)$ 的最小值为__________.

294. 函数 $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2-x+\dfrac{3}{2}$ 的定义域、值域都是区间 $[1,b]$, 则实数 b=__________.

295. 设常数 $m \in \mathbf{R}$. 若函数 $f(x)=x^2-(m-2)x+m-4$ 的图像与 x 轴交于 A, B 两点, 且 $|AB|=2$, 则函数 $y=f(x)$ 的最小值为__________.

296. 函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 与函数 $g(x)=cx^2+bx+a(ac \ne 0,\ a \ne c)$ 的值域分别为 M、N, 则下列结论正确的是__________.

A. $M=N$　　B. $M \subseteq N$　　C. $M \supseteq N$　　D. $M \cap N \ne \varnothing$

297. 函数 $f(x)=x^2-2a|x-a|-2ax+1$ 的图像与 x 轴有且只有三个不同的公共点, 则 $a=$__________.

298. 设常数 $a \in \mathbf{R}$. 已知函数 $f(x)=x^2-2ax+1(1 \le x \le 3)$ 存在反函数. 若函数 $y=f(x)$ 的最大值为 4, 求实数 a 的值.

299. 设常数 $a,m\in\mathbf{R}$. 已知函数 $f(x)=\dfrac{x^2+2x+a}{x}\ (x\geq m)$.

(1) 设 $a=\dfrac{1}{2}$, 求函数 $y=f(x)$ 的值域;

(2) 设 $m=1$, 求函数 $y=f(x)$ 的值域.

300. 设常数 $a\in\mathbf{R}$, 并将函数 $f(x)=1-2a-2a\cos x-2\sin^2 x$ 的最小值记为 $g(a)$.

(1) 写出 $g(a)$ 的表达式;

(2) 是否存在 a 的值, 使得 $g(a)=\dfrac{1}{2}$? 若存在, 求出 a 的值以及此时函数 $y=f(x)$ 的最大值; 若不存在, 说明理由.

301. 函数 $y=\dfrac{1}{x^2-2x+3}$ 的最大值是__________.

302. 函数 $y=\dfrac{3^x-1}{3^x-2}$ 的值域是__________.

303. 函数 $y=\log_{\frac{1}{2}}(-x^2+2x+3)$ 的值域是__________.

304. 函数 $y=|x-1|+|x-3|$ 的值域是__________.

305. (1) 函数 $y=x^2+\dfrac{8}{x^2+1}(1\leq x\leq 7)$ 的最小值是__________, 此时 x=__________;

(2) 函数 $y=\dfrac{3x}{x^2+4}$ 的值域是__________;

(3) 函数 $y=x+\dfrac{m}{x+3}$, $x\in[0,+\infty)$ 的最小值为__________;

(4) 设常数 $m\in\mathbf{R}$. 若函数 $y=\dfrac{mx}{x^2+1}$ 的最大值为 1, 则 m 的值为__________.

306. (1) 函数 $y=x-\sqrt{1-2x}$ 的最大值为__________, 此时 x=__________;

(2) 函数 $y=2x+\sqrt{1-2x}$ 的值域是__________.

307. 函数 $y=\dfrac{2x-3}{x^2-2x+3}$ 的值域是__________.

308. 设 $x,y\in\mathbf{R}$. 若 $x^2+y^2=1$, 则 $3x^2-4y^2$ 的取值范围是__________.

309. 已知函数 $f(x)=\log_a(x+\sqrt{x^2+1}),\ a>1$.

(1) 求 $f(x)$ 的定义域和值域;

(2) 求 $f^{-1}(x)$;

(3) 判断 $f^{-1}(x)$ 的奇偶性、单调性;

(4) 若实数 m 满足 $f^{-1}(1-m)+f^{-1}(1-m^2)<0$, 求 m 的范围.

310. * 设常数 $m,n\in\mathbf{R}$. 若函数 $y=\dfrac{mx^2+4x+n}{x^2+1}$ 的值域为 $[1,6]$, 求 m,n 的值.

311. 设常数 $a\in\mathbf{R}$, 区间 $E\subseteq(0,+\infty)$. 已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{x}$, $x\in E$.

(1) 求证: $y=f(x)$ 在区间 E 上递增;

(2) 是否存在 a, 使得对于这样的 a, 总是存在 $E=[m,n](m<n)$, 使得 $y=f(x)$ 在区间 E 上的值域也是 E? 若存在, 求出 a 的取值范围; 若不存在, 说明理由.

312. 函数 $y=2x+\dfrac{4}{x}(\dfrac{1}{2}<x\leq 2)$ 的值域是__________.

313. 函数 $y=|x-3|-|x+2|$ 的值域是__________.

314. 函数 $y=(\frac{1}{2})^{x^2-x}$ 的值域是__________.

315. 函数 $y=\frac{\sqrt{x}}{x+1}$ 的值域是__________.

316. 设 $x,y\in\mathbf{R}$, 且 $2x+3y=1$. 若 $x^2+y^2\geq t$ 恒成立, 则实数 t 的最大值是__________.

317. 设 $x,y\in[0,+\infty)$, $2x+y=6$, 求 $z=5x^2-y^2-2x+13y+35$ 的最值.

318. 求函数 $y=\frac{2x^2-4x-1}{x^2-2x-1}$ 的值域.

319. 求函数 $y=\frac{x^2+4x-1}{x^2-2x+1}(2\leq x\leq 3)$ 的值域.

320. 记 $\max\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ 为 $a_1,\cdots,a_n$ 中的最大值. 已知 $f(x)=\max\{x,x^2\}(-1\leq x\leq 3)$.

(1) 求函数 $y=f(x)$ 的值域;

(2) 设 PAB 三点的坐标分别为 $(x,f(x))$, $(0,-1)$, $(2,0)$, 且 PAB 三点可以构成三角形, 求 $\triangle PAB$ 的面积的取值范围.

321. 是否存在实数 $m,n(m<n)$, 使得函数 $f(x)=-x^2+2$ 的定义域、值域分别是区间 $[m,n]$、$[2m,2n]$. 若存在, 求出 m,n 的值; 若不存在, 说明理由.

322. 函数 $f(x)=3ax-2a+1$ 在 $[-1,1]$ 上存在一个零点, 则实数 a 的取值范围是__________.

323. 用二分法, 可以计算得方程 $6-x=\lg x$ 的解是__________(结果精确到 0.01).

324. 方程 $6-x=\log_2 x$ 的解集是__________.

325. 方程 $3^{x+1}=5^{x^2+x}$ 的解集是__________.

326. 若方程 $2^x=(\frac{1}{2})^{-\frac{1}{x}+1}$ 的两个实数解为 x_1,x_2, 则 x_1+x_2=__________.

327. 设常数 $a\in\mathbf{R}$. 若关于 x 的方程 $\lg^2 x-\lg x^2+a-2=0$ 有两个不同的实数解 x_1,x_2, 则

(1) $x_1\cdot x_2$=__________;

(2) a 的取值范围是__________.

328. (1) 设常数 $a\in\mathbf{R}$. 若关于 x 的方程 $9^x-(a+2)\cdot 3^x+4=0$ 有实数解, 则 a 的取值范围是__________;

(2) 设常数 $a\in\mathbf{R}$. 若关于 x 的方程 $9^x-3^x+a=0$ 有两个不同的实数解 x_1,x_2, 则 a 的取值范围是__________.

329. 设常数 $a\in\mathbf{R}$. 若方程 $ax^2+2x+1=0$ 至少有一个负实根, 则 a 的取值范围是__________.

330. 设常数 $k\in\mathbf{R}$, 试根据 k 的值, 分别讨论下列关于 x 的方程的根的个数.

(1) $x^2-k|x|+1=0$;

(2) $x^2-|x|+k=0$.

331. 设常数 $m,n\in\mathbf{R}$. 已知 $f(x)=(x-m)(x-n)-2$, 且 α,β 是方程 $f(x)=0$ 的两个根, 则实数 m, n, α, β 的大小关系可能是 ( ).

A. $\alpha<m<n<\beta$ B. $m<\alpha<\beta<n$ C. $m<\alpha<n<\beta$ D. $\alpha<m<\beta<n$

332. 设常数 $m\in\mathbf{R}$. 已知函数 $f(x)=x^2+mx+2$.

(1) 若函数 $y=f(x)$ 在区间 $(0,2)$ 上有且仅有一个零点, 求 m 的取值范围;

(2) 在区间 $[0,2]$ 上, 函数 $y=f(x)$ 是否存在两个不同的零点? 若存在, 求出 m 的取值范围, 若不存在, 说明理由.

333. 方程 $4^{x+1}-13\cdot 2^x+3=0$ 的解集是__________.

334. 方程 $\log_2(x-1)=\log_4(2-x)$ 的解集是__________.

335. 方程 $2\log_2(x-1)=2+\log_2 x$ 的解集是__________.

336. 方程 $\log_3(3^{x-1}-3^{-1})\cdot\log_3(3^{x-2}-3^{-2})=2$ 的解集是__________.

337. 方程 $3^{x+1}+2^{x+1}=7\cdot 5^{x-1}$ 的解集是__________.

338. 方程 $2(4^x+4^{-x})-3(2^x-2^{-x})-4=0$ 的解集是__________.

339. 设常数 $a\in\mathbf{R}$. 若关于 x 的方程 $ax-\sqrt{x}+1=0$ 有实数解, 则 m 的取值范围是__________.

340. 设常数 $m\in\mathbf{R}$. 若关于 x 的方程 $\sqrt{2x}=x+m$ 有两个不同的实数解, 则 m 的取值范围是__________.

341. 设常数 $a\in\mathbf{R}$. 已知函数 $f(x)=4^x-a\cdot 2^x+a+3$.

(1) 若函数 $y=f(x)$ 有且仅有一个零点, 求 a 的取值范围;

(2) 若函数 $y=f(x)$ 有零点, 求 a 的取值范围.

342. 设常数 $m\in\mathbf{R}$. 已知 $f(x)=x^2+(m-1)x-m^2+1$.

(1) 若函数 $y=f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内有两个不同的零点, 求 m 的取值范围;

(2) 若函数 $y=f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内有零点, 求 m 的取值范围;

(3) 若函数 $y=f(x)$ 在区间 $(0,3)$ 内有零点, 求 m 的取值范围.

343. (1) 设常数 $a\in\mathbf{R}$. 已知函数 $f(x)=ax$. 若对于任意 $x\in[-3,-1]$, 不等式 $f(x)\geq 5$ 恒成立, 则 a 的取值范围为__________;

(2) 设常数 $a\in\mathbf{R}$. 已知函数 $f(x)=ax$, 若存在 $x_0\in[-3,1]$, 使得不等式 $f(x)+5<0$ 成立, 则 a 的取值范围为__________;

(3) 设常数 $a\in\mathbf{R}$. 已知函数 $f(x)=ax$. 若对于任意 $x\in(-3,1)$, 不等式 $f(x)+5\geq 0$ 恒成立, 则 a 的取值范围为__________.

344. 设常数 $a\in\mathbf{R}$. 已知函数 $f(x)=x+a$. 若存在 $x_0\in(-1,2)$, 使得 $f(x_0)>1$ 成立, 则 a 的取值范围为__________.

345. 设常数 $a \in \mathbf{R}$. 已知函数 $f(x)=x^2-x-a$. 若不等式 $f(x)>0$ 恒成立, 则 a 的取值范围为__________.

346. 设常数 $a \in \mathbf{R}$. 已知函数 $f(x)=x^2-x-a$, $-2<x<-1$. 若不等式 $f(x)>0$ 恒成立, 则 a 的取值范围为__________.

347. 已知函数 $f(x)=x^2$. 若常数 a 满足: 存在 $x \in (-2,a)$, 使得 $f(x)>5$, 则 a 的取值范围为__________.

348. 设常数 $a \in \mathbf{R}$. 已知函数 $f(x)=(a-1)x^2+(a-1)x-1$. 若关于 x 的不等式 $f(x) \geq 0$ 解集为 $\varnothing$, 则 a 的取值范围为__________.

349. 设常数 $a \in \mathbf{R}$. 若关于 x 的不等式 $a|x|>x+2$ 有实数解, 则 a 的取值范围为__________.

350. 已知实数 ab 满足等式 $(\dfrac{1}{2})^a=(\dfrac{1}{3})^b$, 下列五个关系式:

① $0<b<a$; ② $a<b<0$; ③ $0<a<b$; ④ $b<a<0$; ⑤ $a=b=0$. 其中不可能成立的关系式的序号为__________.

351. 设常数 $k \in \mathbf{R}$. 已知函数 $f(x)=kx^2+kx+k+1$.

(1) 对于任意的 $x \in [-1,1]$, 不等式 $f(x) \geq 0$ 恒成立, 求 k 的取值范围;

(2) 存在 $x_0 \in [-1,1]$, 使得不等式 $f(x_0)<0$ 成立, 求 k 的取值范围.

352. 设常数 $k \in \mathbf{R}$. 已知关于 x 的不等式 $k \cdot 4^x - 2^{x+1}+6k<0$.

(1) 若不等式的解集为开区间 $(1,\log_2 3)$, 求 k 的取值范围;

(2) 若不等式对一切 $x \in (1,\log_2 3)$ 都成立, 求 k 的取值范围;

(3) * 若不等式的解集为开区间 $(1,\log_2 3)$ 的子集, 求 k 的取值范围;

(4) * 若不等式在开区间 $(1,\log_2 3)$ 内存在解, 求 k 的取值范围.

353. 设常数 $a \in \mathbf{R}$. 已知不等式 $2a-1>(a^2-1)x$ 对于满足 $-1 \leq x \leq 1$ 的任意 x 恒成立, 则 a 的取值范围为__________.

354. 设常数 $a \in \mathbf{R}$. 已知函数 $f(x)=ax^2-ax+1$. 若不等式 $f(x)>0$ 恒成立, 则 a 的取值范围为__________.

355. 设常数 $a \in \mathbf{R}$. 已知不等式 $x^2-mx+3 \geq 0$ 对于满足 $1 \leq x \leq 2$ 的任意 x 恒成立, 则 a 的取值范围为__________.

356. 设常数 $a \in \mathbf{R}$. 已知函数 $f(x)=|x-a|$, $0 \leq x \leq 1$. 若 $f(x) \leq 2$ 恒成立, 则 a 的取值范围为__________.

357. 设常数 $a \in \mathbf{R}$. 已知函数 $f(x)=|x-a|$. 若存在 $x_0 \in (0,1)$, 使得 $f(x_0)>2$ 成立, 则 a 的取值范围为__________.

358. 设常数 $a \in \mathbf{R}$. 关于 x 的不等式 $a|x|>x^2-2$ 的解集为 E. 若区间 $(1,2) \subseteq E$, 则 a 的取值范围为__________.

359. 设常数 $m \in \mathbf{R}$, $m \leq -2$, 函数 $f(x)=x^2+mx+4$. 问: 是否存在这样的 m, 使对于任意 $x \in [-1,1]$, 使得 $f(x)+m \geq 0$ 都成立? 若存在, 求出所有这样的 m; 若不存在, 说明理由.

360. 设常数 $a \in \mathbf{R}$. 若对于任意实数 $x \in [-2,2]$, 不等式 $x^2+ax+3 \geq a$ 恒成立, 求 a 的取值范围.

361. 设常数 $a \in \mathbf{R}$. 若对于任意实数 $x \in (-\infty, -1]$, 不等式 $1 + 2^x + (a - a^2) \cdot 4^x > 0$ 恒成立, 求 a 的取值范围.

362. 已知常数 $m, n \in \mathbf{R}$, $m < -2$, 函数 $f(x) = x^2 + mx + n$. 问: 是否存在 $x_0 \in [-1, 1]$, 使得 $|f(x_0)| \geq |m|$ 成立?

363. 若 $\alpha = 2022^\circ$, 则与 α 具有相同终边的最小正角 $\beta =$__________.

364. 下列用弧度制表示的各角中, 是第二象限角的是 (　　).

A. $\dfrac{12\pi}{5}$　　B. $-\dfrac{12\pi}{5}$　　C. 2　　D. -2

365. 若角 α 的终边与角 $\dfrac{\pi}{3}$ 的终边垂直, 则 $\alpha =$__________.

366. 若角 α 与角 β 的正弦值相等, 则 β 可用 α 表示为__________.

367. 若点 $P(-2, y)$ 在角 α 的终边上, $\sin\alpha = -\dfrac{2}{3}$, 则 $\cos\alpha =$__________.

368. 若 $0 < \alpha < 2\pi$, 且 $|\cos\alpha| < |\sin\alpha|$, 则 α 的取值范围是__________.

369. 一动点 P 从 $(1, 0)$ 出发, 沿单位圆 $x^2 + y^2 = 1$ 按逆时针方向运动, 到达点 $Q(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2})$, 则圆 $x^2 + y^2 = 1$ 上的劣弧 PQ 的长为__________.

370. 函数 $f(x) = \dfrac{\sin x}{|\sin x|} + \dfrac{|\cos x|}{\cos x} + \dfrac{\tan x}{|\tan x|} + \dfrac{|\cot x|}{\cot x}$ 的值域是__________.

371. 求周长为 c 的扇形面积的最大值, 并求面积取到最大值时扇形圆心角 α 的弧度数.

372. 若 α 是第二象限的角, 试分别确定 $2\alpha, \dfrac{\alpha}{2}, \dfrac{\alpha}{3}$ 的终边与象限、坐标轴的位置关系.

373. 在单位圆中分别画出适合下列条件的角 α 的终边的范围, 并写出角 α 的集合.

(1) $\sin\alpha \geq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

(2) $\cos\alpha \leq -\dfrac{1}{2}$;

(3) $\tan\alpha < -1$.

374. 与 -45° 角终边相同的角的集合是__________.

375. 设角 α 的终边与角 $\dfrac{7\pi}{5}$ 的终边关于 y 轴对称, 且 $\alpha \in (0, 2\pi)$, 则 $\alpha =$__________.

376. 如图, 已知扇形 OAB 的圆心角为 $\dfrac{5\pi}{6}$, 面积为 $\dfrac{5\pi}{3}$, 则扇形内以 AB 为弦的弓形面积为__________.

377. 若 $\sin\alpha \cdot \cos\alpha > 0$, 则 α 的值的集合是__________.

378. 若角 α 的终边不在坐标轴上, $\sin\dfrac{\alpha}{2} > 0$, $\cos\dfrac{\alpha}{2} < 0$, 则关于角 α, 以下命题正确的有__________(填序号).

① 不在第一象限; ② 不在第二象限; ③ 不在第三象限; ④ 不在第四象限.

379. 若角 α 终边上一点 P 为 $(2\sin 3, -2\cos 3)$, 则 $\sin\alpha =$(　　).

A. $\sin 3$　　B. $\cos 3$　　C. $-\sin 3$　　D. $-\cos 3$

380. 设 θ 为第三象限角.

(1) 判断 $\dfrac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}$ 的符号, 并说明理由;

(2) 判断 $\dfrac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}+1$ 的符号, 并说明理由.

381. 设常数 $a\neq 0$, 角 α 终边上的点 P 与点 $A(a,2a)$ 关于 x 轴对称, 角 β 终边上的点 Q 与 A 关于直线 $y=x$ 对称, 求 $\sin\alpha\cdot\cos\alpha+\sin\beta\cdot\cos\beta+\tan\alpha\cdot\tan\beta$ 的值.

382. 若 $\sin(\pi+\alpha)=\dfrac{3}{5}$, α 是第四象限角, 则 $\cos(\alpha-2\pi)=$__________.

383. 若 $\cos(\pi+\alpha)=-\dfrac{1}{3}$, α 是第四象限角, 则 $\sin(2\pi-\alpha)=$__________.

384. 如果 $\cot(\pi-\alpha)=\dfrac{2}{3}$, $\alpha\in(0,\pi)$, 则 $\tan\alpha$ 的值为__________.

385. 若 $\cos(\dfrac{\pi}{6}-\alpha)=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, 则 $\cos(\dfrac{5\pi}{6}+\alpha)=$__________.

386. 已知 $-\dfrac{\cos\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}+\dfrac{\sin\alpha}{\sqrt{1+\cot^2\alpha}}=-1$, 则 α 的终边在第__________ 象限.

387. 若 $\tan\alpha=-\dfrac{3}{5}$, 则 $\dfrac{2\sin\alpha-3\cos\alpha}{3\sin\alpha+4\cos\alpha}=$__________.

388. 设常数 m 满足 $m^2\neq 1$, 若 $\sin\theta+\cos\theta=m$, 则 $\sec\theta\cdot\csc\theta=$__________.

389. 已知 $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$, $\pi<\theta<2\pi$, 求下列各式的值:

(1) $\tan\theta+\cot\theta$;

(2) $\sin\theta-\cos\theta$;

(3) $\sin^3\theta-\cos^3\theta$.

390. 设 k 为整数, 化简: $\dfrac{\sin(k\pi-\alpha)\cos[(k-1)\pi-\alpha]}{\sin[(k+1)\pi+\alpha]\cos(k\pi+\alpha)}$.

391. 已知 $\sin(3\pi-\alpha)=\sqrt{2}\cos(\dfrac{3\pi}{2}+\beta)$, $\sqrt{3}\cos(-\alpha)=-\sqrt{2}\cos(\pi+\beta)$, 且 $0<\alpha<\pi$, $0<\beta<\pi$, 求 α,β 的值.

392. 化简: $\dfrac{\cot(\frac{\pi}{2}+\alpha)\sin(\frac{3\pi}{2}+\alpha)}{\sin(\pi-\alpha)}=$__________.

393. 设 $k\in\mathbf{Z}$, 若 $\sin(k\pi-\alpha)=-\sin\alpha$, 则 $\cos(k\pi-\alpha)=($ $)$.

A. $\sin\alpha$ B. $\cos\alpha$ C. $-\sin\alpha$ D. $-\cos\alpha$

394. 若角 α 在第三象限, 化简: $\dfrac{2\tan\alpha}{\sqrt{\sec^2\alpha-1}}+\dfrac{1}{\sin\alpha\cdot\sqrt{1+\tan^2\alpha}}=$__________.

395. 若 $\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\dfrac{1}{8}$, $\alpha\in(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2})$, 则 $\cos\alpha-\sin\alpha=$__________.

396. 已知 $\tan\alpha=-3$, 求值:

(1) $4\sin^2\alpha-3\sin\alpha\cdot\cos\alpha$;

(2) $\dfrac{5\sin^3\alpha+\cos\alpha}{2\cos^3\alpha+\sin^2\alpha\cdot\cos\alpha}$.

397. 已知 $m\in(0,1)$. 若 $\cos\alpha=m$, 求 $\csc\alpha,\cot\alpha$ 的值.

398. 设常数 $k\in\mathbf{R}$. 若 $\tan\alpha,\cot\alpha$ 是方程 $2x^2-2kx+k^2-3=0$ 的两个实根, 且 $\pi<\alpha<\dfrac{5\pi}{4}$.

(1) 求 k 的值;

(2) 求 $\cos\alpha-\sin\alpha$ 的值.

399. 设常数 $a\in(0,1)$. 若 $\tan\theta=\sqrt{\dfrac{1-a}{a}}$, 求证: 无论 a 为何值, $\dfrac{\sin^2\theta}{a+\cos\theta}+\dfrac{\sin^2\theta}{a-\cos\theta}$ 总是与 a 无关的常数, 并求出该常数.

400. 已知 $\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$, $\alpha\in(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2})$, 则 $\sin2\alpha=$__________.

401. 求值: $\cos(31^\circ-\alpha)\cos(29^\circ+\alpha)-\sin(31^\circ-\alpha)\sin(29^\circ+\alpha)=$__________.

402. 将 $\sin\alpha-\sqrt{3}\cos\alpha$ 化为 $A\sin(\alpha+\varphi)$ 的形式 $(A>0,\ \varphi\in[0,2\pi))$: $\sin\alpha-\sqrt{3}\cos\alpha=$__________.

403. 若 $\sin\alpha=\dfrac{7}{8}$, $\cos\beta=-\dfrac{1}{4}$, α,β 在同一象限, 则 $\cos(\alpha-\beta)=$__________.

404. 已知 $\cos\theta=-\dfrac{3}{5}$, $\theta\in(\dfrac{\pi}{2},\pi)$, 则 $\sin(\theta+\dfrac{\pi}{4})=$__________.

405. 若 α 为锐角, 且 $\sin(\alpha-\dfrac{\pi}{6})=\dfrac{1}{6}$, 则 $\sin\alpha=$__________.

406. 已知 $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{2}{3}$, $\tan(\beta-\dfrac{\pi}{4})=\dfrac{1}{4}$, 则 $\tan(\alpha+\dfrac{\pi}{4})=$__________.

407. 若 $\tan\alpha$ 与 $\tan\beta$ 是方程 $3x^2+5x-2=0$ 的两个根, 且 $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{\pi}{2}<\beta<\pi$, 则 $\alpha+\beta$ 的值为__________.

408. 设 $\alpha,\alpha+\beta$ 均为象限角. 若 $2\sin\beta=\sin(2\alpha+\beta)$, 求 $\dfrac{\tan(\alpha+\beta)}{\tan\alpha}$ 的值.

409. * 已知 $\tan\alpha=-\dfrac{1}{7}$, $\tan\beta=-\dfrac{1}{3}$, 且 α,β 均为钝角, 求 $\alpha+2\beta$ 的值.

410. * 是否存在锐角 α,β,θ, 使得 $\sin\theta=\sin\beta-\sin\alpha$, $\cos\theta=\cos\alpha-\cos\beta$? 若存在, 求出 $\alpha-\beta$ 的所有可能值; 若不存在, 说明理由.

411. 若 $\sin\alpha-\sin\beta=-\dfrac{1}{3}$, $\cos\alpha-\cos\beta=\dfrac{1}{2}$, 则 $\cos(\alpha-\beta)=$__________.

412. 若 $\dfrac{\pi}{2}<\beta<\alpha<\dfrac{3\pi}{4}$, $\cos(\alpha-\beta)=\dfrac{12}{13}$, $\sin(\alpha+\beta)=-\dfrac{3}{5}$, 则 $\sin2\alpha=$__________.

413. 若 $\sin(\alpha+\beta)=\dfrac{1}{2}$, $\sin(\alpha-\beta)=\dfrac{1}{3}$, 则 $\dfrac{\tan\alpha}{\tan\beta}=$__________.

414. 若 $\sin A=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$, $\sin B=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$, 且 A,B 均为钝角, 则 $A+B=$__________.

415. 若定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $y=f(x)$ 满足对任意给定的 $\alpha\in\mathbf{R}$, 都有 $f(\sin\alpha)=\cos2\alpha$, 则 $f(\dfrac{1}{2})=$__________, $f(1)$ 的值能否确定? $f(2)$ 呢?

416. 设常数 $m\neq0$, 若关于 x 的方程 $mx^2+(2m-3)x+m-2=0$ 的两实数根为 $\tan\alpha,\tan\beta$, 求 $\tan(\alpha+\beta)$ 的取值范围.

417. 是否存在锐角 α,β, 使得 $\alpha+2\beta=\dfrac{2\pi}{3}$, 且 $\tan\beta=(2-\sqrt{3})\cot\dfrac{\alpha}{2}$? 若存在, 求出所有的 α,β 的值; 若不存在, 说明理由.

418. $\sqrt{\dfrac{1+\cos 4}{2}}=(\qquad)$.

A. $\sin 2$ B. $-\sin 2$ C. $\cos 2$ D. $-\cos 2$

419. 设 α 是第二象限角, 且 $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, 则 $\cos\dfrac{\alpha}{2}(\qquad)$.

A. 一定等于 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ B. 一定等于 $\dfrac{1}{2}$ C. 可能等于 $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ D. 可能等于 $-\dfrac{1}{2}$

420. 若 $\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$, $\alpha\in(0,\dfrac{\pi}{2})$, 则 $\tan\dfrac{\alpha}{2}=$__________.

421. 若 $\tan\theta=2$, 则 $3\cos 2\theta+4\sin 2\theta=$__________.

422. 若 $\cos(\alpha+\dfrac{\pi}{4})=\dfrac{3}{5}$, $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\dfrac{3\pi}{2}$, 则 $\cos 2\alpha=$__________.

423. 化简: $\dfrac{\tan(45^\circ-\alpha)}{1-\tan^2(45^\circ-\alpha)}\cdot\dfrac{\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}=$__________.

424. 若 $\tan\dfrac{\alpha}{2}+\cot\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{5}{2}$, 则 $\sin\alpha=$__________.

425. 下列命题中, 是 $\tan\dfrac{\alpha}{2}=m$ 的充要条件的是__________(填序号).

① $\dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$ 有意义且值为 m; ② $\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$ 有意义且值为 m; ③ $\sin\alpha=\dfrac{2m}{1+m^2}$.

426. 化简: $\dfrac{2\tan(\dfrac{\pi}{4}-\theta)\sin^2(\dfrac{\pi}{4}+\theta)}{\dfrac{1}{2}-\cos^2\theta}$.

427. 设 $\dfrac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$, $\beta\in\mathbf{R}$, 已知 $\cos(\alpha+\beta)\cos\beta+\sin(\alpha+\beta)\sin\beta=\dfrac{1}{3}$, 求 $\cot(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2})$ 的值.

428. 若存在 $\theta\in[0,\dfrac{\pi}{2})$, 使得 $\cos\theta+t\sin\theta=t$, 求实数 t 的取值范围.

429. 若 $\tan\theta=\dfrac{1}{3}$, 则 $\dfrac{\sin\theta}{1-\cos\theta}=$__________.

430. 当 $\alpha\in(0,\dfrac{\pi}{2})$ 时, 化简: $2\sqrt{1-\sin\alpha}-\sqrt{2+2\cos\alpha}=$__________.

431. 已知 $\sin(\alpha-\beta)=\dfrac{36}{85}$, $\cos\beta=\dfrac{4}{5}$, α,β 都是锐角. 则 $\tan(\dfrac{\alpha}{2}+\dfrac{\pi}{4})=$__________.

432. * 若 $\pi<\alpha<\dfrac{3\pi}{2}$, 化简 $\dfrac{1+\sin\alpha}{\sqrt{1+\cos\alpha}-\sqrt{1-\cos\alpha}}+\dfrac{1-\sin\alpha}{\sqrt{1+\cos\alpha}+\sqrt{1-\cos\alpha}}=$__________.

433. * 若 $\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}=6$, 且 $(\dfrac{1}{4})^{\sin\alpha}>1$, 则 $\tan\dfrac{\alpha}{2}=$__________.

434. * 求证: $\dfrac{2\cos\alpha}{1+\sin\alpha+\cos\alpha}=1-\tan\dfrac{\alpha}{2}$.

435. 化简: $\sin^2\alpha\sin^2\beta+\cos^2\alpha\cos^2\beta-\dfrac{1}{2}\cos 2\alpha\cos 2\beta$.

436. 已知 $0<\alpha<\dfrac{\pi}{4}$, 且 $\dfrac{2\sin^2\alpha+\sin 2\alpha}{1+\tan\alpha}=k$, 分别用 k 表示 $\sin\alpha\cdot\cos\alpha$ 及 $\sin\alpha-\cos\alpha$.

437. 在三角形 ABC 中, (1) 用三个角 A, B, C 及外接圆半径 R 表示三角形的面积 S, 得 $S=$________;

(2) 用三条边 a, b, c 及外接圆半径 R 表示三角形的面积 S, 得 $S=$________;

(3) 用内切圆半径 r, 周长 $2p$ 表示三角形面积 S, 得 $S=$________.

438. 在以 A 为顶角的等腰三角形 ABC 中,

(1) 若 $\sin A=\dfrac{3}{5}$, 则这样的三角形有________ 种不同的形状, $\cos B=$________;

(2) 若 $\sin B=\dfrac{3}{5}$, 则这样的三角形有________ 种不同的形状, $\cos A=$________.

439. 在三角形 ABC 中, 若 $a^2+c^2-b^2=\dfrac{1}{2}ac$, 则角 $B=$________.

440. 在三角形 ABC 中,

(1) 若 $\cos B=\dfrac{4}{5}$, $\sin C=\dfrac{5}{13}$, 则 $\sin A=$________;

(2) 若 $\cos B=\dfrac{4}{5}$, $\sin C=\dfrac{12}{13}$, 则 $\sin A=$________.

441. 在三角形 ABC 中, $a=3$, $b=2$, $\sin B=\dfrac{1}{3}$.

(1) 若 A 是钝角, 则角 $A=$________;

(2) 若三角形 ABC 是钝角三角形, 则角 $A=$________.

442. 在三角形 ABC 中, $\tan A\tan B>1$, 则以下命题正确的是________(填序号).

① 三角形 ABC 一定是锐角三角形; ② 三角形 ABC 可能是钝角三角形; ③ 三角形 ABC 可能是直角三角形.

443. 在三角形 ABC 中, 若 $\sin A=\sqrt{3}\sin C$, $B=\dfrac{\pi}{6}$, $b=2$, 则三角形 ABC 的面积为________.

444. 在锐角三角形 ABC 中, 已知 $a=1$, $b=2$, 则 c 的取值范围为________.

445. 解下列三角形 (S 表示面积, R 表示外接圆半径):

(1) $A=30^\circ$, $b=2$, $a=2\sqrt{3}$, 求 C;

(2) $S=15$, $ab=60$, $\sin A=\cos B$, 求 A, B, c;

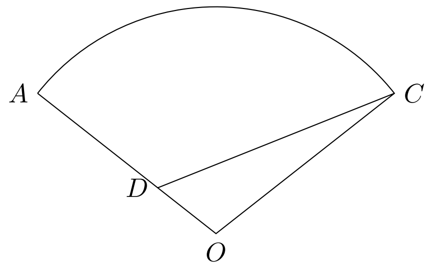
(3) $a=30$, $S=105$, $R=17$, 求 b, c.

446. 判断下列三角形的形状:

(1) $2\sin A\sin B=1+\cos C$;

(2) $a\sin A=b\cos C+c\cos B$.

447. 如图, 某居民小区的平面图呈扇形 AOC. 小区的两个出入口设置在点 A 及点 C 处. 小区里有两条笔直的小路 AD, DC, 且 $\angle ADC$ 的大小为 120°. 已知某人从 C 沿 CD 走到 D 用了 10 分钟, 从 D 沿 DA 走到 A 用了 6 分钟. 若此人步行的速度为每分钟 50 米, 求该扇形的半径 OA 的长 (精确到 1 米).



448. 在三角形 ABC 中, $A=120^\circ$, $c=5$, $a=7$, 则 $b=$__________.

449. 在三角形 ABC 中, $A=60^\circ$, $a=1$, 则 $\dfrac{a+b+c}{\sin A+\sin B+\sin C}=$__________.

450. 在三角形 ABC 中, $(a+b)^2-c^2=4$, $C=\dfrac{\pi}{3}$, 则面积 $S=$__________.

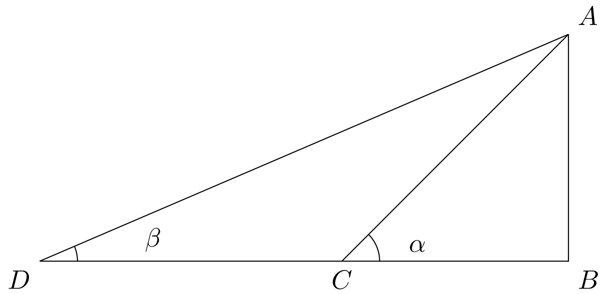
451. 在三角形 ABC 中, $\sin^2 A=\sin(B+C)\sin(B-C)$, 则 (　　).

A. $A=90^\circ$　　B. $B=90^\circ$　　C. $C=90^\circ$　　D. $A=B=C$

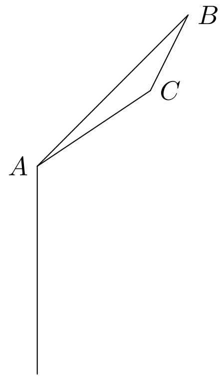
452. 在三角形 ABC 中, $a=\sqrt{3}$, $b=\sqrt{5}$, $c=\sqrt{7}$, 则 $bc\cos A+ca\cos B+ab\cos C=$__________.

453. 在三角形 ABC 中, $\sin A\sin C=\sin^2 B$, 求角 B 的取值范围.

454. 已知 D,C,B 三点在地面同一直线上, $DC=a$, 从 C,D 两点测得 A 点的仰角分别为 $\alpha,\beta(\alpha>\beta)$, 则点 A 离地面的高 $AB=$__________.



455. 在一个特定时段内, 以点 E 为中心的 7 海里以内海域被设为警戒水域. 点 E 正北 55 海里处有一个雷达观测站 A. 某时刻测得一艘匀速直线行驶的船只位于点 A 北偏东 45° 且与点 A 相距 $40\sqrt{2}$ 海里的位置 B, 经过 40 分钟又测得该船已行驶到点 A 北偏东 $45^\circ+\arcsin\dfrac{\sqrt{26}}{26}$ 且与点 A 相距 $10\sqrt{13}$ 海里的位置 C. (1) 求该船的行驶速度 (单位: 海里 / 小时); (2) 若该船不改变航行方向继续行驶, 判断它是否会进入警戒水域, 并说明理由.



456. 函数 $y=\lg\sin x$ 的值域为__________.

457. 函数 $y=\sqrt{-\cos x}$ 的定义域为__________.

458. 函数 $y=\sin x+\sqrt{3}\cos x\ (-\dfrac{\pi}{2}\le x\le\dfrac{\pi}{2})$ 的值域为__________.

459. 函数 $y=2\cos^2 x+5\sin x-2$ 的值域为__________.

460. 下列函数中, 在区间 $[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}]$ 上是减函数的是 (　　).

A. $y=\sin x$　　B. $y=\cos x$　　C. $y=-\sin x$　　D. $y=-\cos x$

461. 已知函数 $f(x)=a\sin 2x+b\tan x+1$. 若实数 t 满足 $f(t)=7$, 则 $f(\pi-t)=$__________.

462. 若函数 $f(x)=\dfrac{\cos^2 x}{1+\sin x}$, 则函数 $f(x)$(　　).

A. 有最大值, 也有最小值　　B. 有最大值, 但无最小值

C. 无最大值, 但有最小值　　D. 无最大值, 也无最小值

463. 已知 $T>0$. 下列命题中, 能成为命题 "函数 $f(x)$ 的一个周期为 T" 的必要不充分条件的是 (　　).

A. 函数 $f(x)$ 的一个周期是 $-T$　　B. 函数 $f(x)$ 的一个周期是 $2T$

C. 函数 $f(x)$ 的一个周期是 $\dfrac{T}{2}$　　D. 函数 $f(x)$ 存在最小正周期

464. 求下列函数的定义域:

(1) $y=\log_{\sin x}(1+2\cos x)$;

(2) $y=\sqrt{\sin x}+\dfrac{1}{\sqrt{16-x^2}}$.

465. 求下列函数的最大值与最小值:

(1) $y=2\sin x(\sin x+\cos x)$;

(2) $y=\sin(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{x}{2})\sin(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{x}{2})$, $\dfrac{\pi}{4}\le x\le\dfrac{5\pi}{4}$;

(3) $y=1+\sin x+\cos x+\sin x\cos x$, $x\in[-\pi,0]$.

466. 实数 x,y 满足 $x^2+y^2=1$, 用三角代换求下列表达式的取值范围:

(1) x^2+y;

(2) $2x+y$.

467. 函数 $y=2\cos x$, $\dfrac{\pi}{3}\le x\le\dfrac{4\pi}{3}$ 的值域为__________.

468. 函数 $y=2\cos 2x$, $0<x<\pi$ 的增区间为__________.

469. 设常数 $a\in\mathbf{R}$, 关于 x 的方程 $\cos^2 x+4\sin x-a=0$ 有实数解, 则 a 的取值范围为__________.

470. 实数 x,y 满足 $x^2-2y+y^2=0$, 用三角代换求下列表达式的取值范围:

(1) x^2+y;

(2) $2x+y$.

471. 求函数 $f(x)=\dfrac{\cos^2 x}{\cos x\sin x-\sin^2 x}$, $0<x<\dfrac{\pi}{4}$ 的值域.

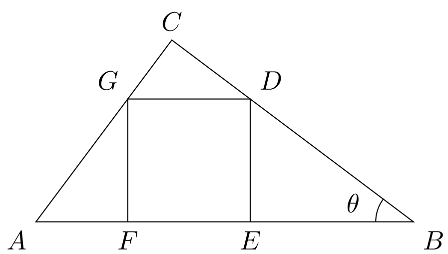
472. 求函数 $y=\dfrac{\cos^2 x-2}{1-\sin x}$, $0\le x<\dfrac{\pi}{2}$ 的最大值.

473. * 设函数 $f(x)=\dfrac{2\sin x\cos x+\dfrac{5}{2}}{\sin x+\cos x}$,$0\le x\le\dfrac{\pi}{2}$, 求 $f(x)$ 的最大值与最小值.

474. * 如图, 在直角三角形 ABC 中, $\angle C=90^\circ$, $\angle CBA=\theta$, $BC=1$, 正方形 $DEFG$ 的顶点 D,G 在斜边 BA 上, 顶点 E,F 分别在边 BC,CA 上.

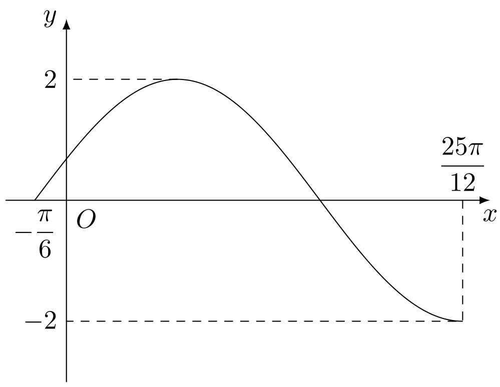
(1) 试用 θ 表示三角形 ABC 的面积 S_1, 与正方形 $DEFG$ 的面积 S_2;

(2) 设 $f(\theta)=\dfrac{S_2}{S_1}$, 求 $f(\theta)$ 的最大值, 并判断取到最大值时三角形 ABC 的形状.



475. 函数 $y=2\sin(3x-\dfrac{\pi}{4})$ 的图像的相邻两对称中心的距离是__________.

476. 设 $A>0$, $\omega>0$, $0\le\varphi<2\pi$. 如图为定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图像的一部分, 则 $f(x)$ 的解析式为__________.



477. 要得到 $y=\sin(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})$ 的图像, 可以将 $y=\sin\frac{x}{2}$ 的图像 (　　).

A. 向左平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位　　B. 向右平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位　　C. 向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位　　D. 向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位

478. 把函数 $y=\sin x$ 的图像上所有点向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度, 再把所得图像上所有点的横坐标变为原来的 $\frac{1}{2}$(纵坐标不变), 得到的图像是函数__________ 的图像.

479. 若直线 $x=a$ 与 $f(x)=2\sin x$ 和 $g(x)=3\cos x$ 的图像分别交于 M,N 两点, 则 $|MN|$ 的最大值是__________.

480. 设常数 $\theta\in\mathbf{R}$. 函数 $f(x)=\cos(x+\theta)$ 是偶函数, 当且仅当 $\theta=$__________.

481. 若函数 $y=\tan\omega x$ 在 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 上是减函数, 则实数 ω 的取值范围是__________.

482. * 设常数 $t\in\mathbf{R}^+$. 若函数 $y=-\sin(\frac{\pi}{3}x)$ 在区间 $[0,t]$ 上恰好取得两次最大值, 则 t 的取值范围为__________.

483. 设 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$ $(A>0,\ \omega>0,\ -\pi<\varphi<\pi)$, $D(2,\sqrt{2})$ 是图像的一个最高点, 一动点从 D 出发, 沿函数图像运动至相邻的最低点. 若 P 经过点 $E(6,0)$, 求 $f(x)$ 的解析式.

484. 已知函数 $f(x)=(2\sin(x+\frac{\pi}{3})+\sin x)\cos x-\sqrt{3}\sin^2 x$.

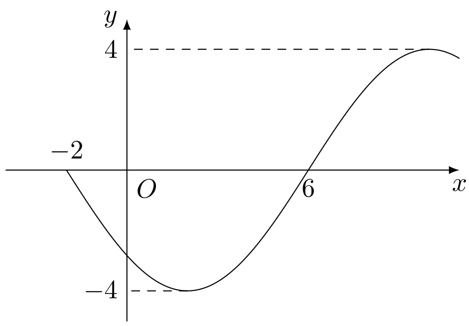
(1) 求函数 $f(x)$ 的值域与周期;

(2) 若 $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$, 求 $f(x)$ 的单调递减区间;

(3) * 设常数 $a>0$, 若函数 $y=f(x)$ 的图像关于直线 $x=a$ 对称, 求 a 的最小值;

(4) 设常数 $m\in\mathbf{R}$, 若存在 $x_0\in[0,\frac{5\pi}{12}]$, 使得 $mf(x_0)-2=0$ 成立, 求 m 的取值范围.

485. 设 $A\neq 0$, $\omega>0$, $-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$, 函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的部分图像如右图所示, 则 $f(x)$ 的解析式为__________.



486. 函数 $f(x)=\tan 2x$ 的图像的对称中心是__________.

487. 函数 $y=\sin(2x+\frac{\pi}{4})$ 图像的对称轴可以是 (　　).

A. $x=-\frac{3\pi}{4}$　　B. $x=-\frac{3\pi}{8}$　　C. $x=\frac{3\pi}{8}$　　D. $x=\frac{3\pi}{4}$

488. 与函数 $y=\tan(2x+\frac{\pi}{4})$ 没有公共点的直线可以是 (　　).

A. $x=-\frac{\pi}{2}$　　B. $x=-\frac{\pi}{4}$　　C. $x=\frac{\pi}{8}$　　D. $x=\frac{\pi}{4}$

489. * 设 $\omega > 0$, $0 < \varphi < \pi$, 若函数 $f(x) = \cos(\omega x + \varphi)$ 为奇函数, 且图像与直线 $y = \dfrac{1}{2}$ 的所有交点中, 距离最近的两个交点的距离为 π, 则 $\omega =$__________, $\varphi =$__________.

490. * 设常数 $a \in \mathbf{R}$. 若函数 $y = \sin 2x + a\cos 2x$ 的图像关于直线 $x = -\dfrac{\pi}{6}$ 对称, 则 $a =$__________.

491. * 设常数 $a \in \mathbf{R}$. 若关于 x 的方程 $3\sin x + 4\cos x = a$ 在区间 $(0, 2\pi)$ 内恰有两个相异实根 α, β, 求 a 的取值范围及 $\alpha + \beta$ 的值.

492. 求函数 $y = \sin^4 x + 2\sqrt{3}\sin x\cos x - \cos^4 x$ 的最小正周期和值域, 写出该函数在 $[0, \pi]$ 上的递增区间.

493. 求值: $\arcsin\dfrac{1}{2} =$__________; $\arccos(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}) =$__________; $\arctan(-\sqrt{3}) =$__________.

494. 用含反三角函数的表达式表示下列各式中的角 x:

(1) $\sin x = -\dfrac{1}{3},\ x \in [-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}]$, $x =$__________;

(2) $\sin x = \dfrac{1}{4},\ x \in [0, \pi]$, $x =$__________;

(3) $\cos x = -\dfrac{1}{4},\ x \in [0, \pi]$, $x =$__________;

(4) $\cos x = \dfrac{1}{5},\ x \in [-\pi, 0]$, $x =$__________;

(5) 三角形 ABC 中, $\sin A = \dfrac{1}{4}$, $\tan B = -2$, 则 $A =$__________, $B =$__________.

495. 设 $|a| \le 1$, 则 $\arccos a + \arccos(-a) =$__________.

496. 化简下列各式: $\sin(\arcsin\dfrac{1}{a^2+1}) =$__________; $\cos(\arcsin(-\sqrt{1-a^4})) =$__________; $\cot(\arctan\dfrac{1}{a}) =$__________.

497. 函数 $y = \sin x,\ x \in [-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{4}]$ 的反函数是__________.

498. 满足不等式 $\arccos(1-x) \ge \arccos x$ 的 x 的取值范围是__________.

499. 函数 $y = (\arctan x)^2 + \arctan x - 1$ 的最小值是__________.

500. 方程 $2\sin x = 1,\ x \in [-2\pi, 2\pi]$ 的解集是__________.

501. 研究函数 $y = \arccos(x - x^2)$ 的定义域, 值域, 单调性, 并给出单调性的严格证明.

502. 解下列三角方程:

(1) $\sin 2x = \sin 5x$;

(2) $\sin 2x - \sqrt{3}\cos 2x = 1,\ x \in [-\pi, \pi]$;

(3) $\dfrac{\sin 2x}{\cos x + \sin x} = 4$;

(4) $\tan 2x = \tan 6x$;

(5) $\sin^2 x - 4\sin x\cos x + 2\cos^2 x = -\dfrac{1}{2}$.

503. 下列等式成立的是__________(填序号).

① $\arccos 0 = 1$; ② $\cos(\arccos\dfrac{\pi}{2}) = \dfrac{\pi}{2}$; ③ $\sin(\arcsin\dfrac{\pi}{4}) = \dfrac{\pi}{4}$; ④ $\arctan\dfrac{\pi}{3} = \sqrt{3}$; ⑤ $\tan(\arctan\dfrac{\pi}{2}) = \dfrac{\pi}{2}$.

504. 若 $\cos\alpha = -\dfrac{3}{4}$, $\alpha \in (\pi, \dfrac{3\pi}{2})$, 则 $\alpha =$__________.

505. 设 $x=\sin\alpha$, $\alpha\in(-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{5\pi}{6}]$, 则 $\arccos x$ 的取值范围为________.

506. 方程 $2\sin^2 x+5\sin x+2=0$ 在 $(-2\pi,0)$ 上的解集为________.

507. 方程 $2\sin^2 x-3\sin x\cos x-2\cos^2 x=0$ 的解集为________.

508. 若 $\tan x=a$, $x\in(\dfrac{\pi}{2},\pi)$, 则 $x=$________.

509. 若 $-\pi<x<-\dfrac{\pi}{2}$, 则 $\arcsin(\sin x)=$________.

510. 设常数 $m\in\mathbf{R}$, 关于 x 的方程 $2-\sin 2x=m(2+\sin 2x)$, $x\in[0,\pi)$ 的解集为 A.

(1) 若 $A\neq\varnothing$, 求 m 的取值范围;

(2) 若 $A\subseteq(0,\pi)$, 且 A 中至少有两个元素, 求 m 的取值范围.

511. 写出下列数列的一个通项公式:

(1) $-3,1,5,9,13,\cdots$: $a_n=$________; (2)$\dfrac{2}{7},\dfrac{4}{11},\dfrac{1}{2},\dfrac{4}{5},2$: $a_n=$________.

512. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_n=n+\dfrac{6}{n}$, 则数列 $\{a_n\}$ 中最小项为第________ 项.

513. (1) 数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=8$, 则 $a_n=$________;

(2) 数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdots a_n=8$, 则 $a_n=$________.

514. 已知 $a_1=1$, $a_2=3$, $a_{n+2}=a_{n+1}-a_n$, 则 $a_{2030}=$________.

515. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}=\begin{cases}2a_n, & 0\le a_n<\dfrac{1}{2},\\ 2a_n-1, & \dfrac{1}{2}\le a_n<1.\end{cases}$ 若 $a_1=\dfrac{6}{7}$, 则 $a_2=$________; $a_3=$________; $a_{2021}=$________.

516. 已知数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$, 其中 $a_n=n^2$, $n\in\mathbf{N}^*$, $\{b_n\}$ 的项是互不相等的正整数, 若对于任意 $n\in\mathbf{N}^*$, $\{b_n\}$ 的第 a_n 项等于 $\{a_n\}$ 的第 b_n 项, 则 $\dfrac{\lg(b_1b_4b_9b_{16})}{\lg(b_1b_2b_3b_4)}=$________.

517. 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项 $a_n=n+\mathrm{e}^n$.

(1) 把该数列的前 10 项去掉, 得到新数列 $\{b_n\}$, 则通项 $b_n=$________;

(2) 将该数列的奇数项按原来的先后顺序排列, 得到新数列 $\{c_n\}$, 则通项 $c_n=$________.

518. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和是 $S_n=2\cdot 3^n+3$, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项 a_n.

519. 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项 $a_n=(n+1)(\dfrac{10}{11})^n$, 试问该数列有没有最大项? 若有, 求出最大项; 若没有, 说明理由.

520. 已知 $\{a_n\}$ 是递增数列, 且 $a_n=n^2+\lambda n$, 求实数 λ 的取值范围.

521. 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项 $a_n=2^n$. 对任意的 $k\in\mathbf{N}^*$, 在 a_{2k} 与 a_{2k+1} 中间插入一项 k, 构成新数列 $\{b_n\}$: $2,4,1,8,16,2,32,64,3,128,\cdots$. 求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式.

522. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+2}=a_n$, $a_1=1$, $a_2=2$, 则通项 $a_n=$________.

523. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}=a_n^2-k$, $a_1=1$, $a_3=-1$, 则常数 $k=$________.

524. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_n = \dfrac{1}{n-5.5}$, 则此数列中最大项的值为__________, 最小项的值为__________.

525. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_n = 2^n$, 删去数列中第 $1, 4, \cdots, 3n-2, \cdots$ 项, 得到新数列的通项 $b_n =$__________.

526. 无穷数列 $\{a_n\}$ 由 k 个不同的数组成, S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若对任意 $n \in \mathbf{N}*$, $S_n \in \{2, 3\}$, , 则 k 的最大值为__________.

527. 设 λ 是实常数, 数列 $\{a_n\}$ 的通项 $a_n = n + \dfrac{\lambda}{n}$.

(1) 若数列 $\{a_n\}$ 递增, 求 λ 的取值范围;

(2) 若数列 $\{a_n\}$ 中, 唯一最小项为 a_4, 求 λ 的取值范围.

528. 已知正项数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n - \dfrac{1}{a_n} = -2n$, 求证: 数列 $\{a_n\}$ 是递减数列.

529. 等差数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_1 = 3$, $d = 2$, 则通项 $a_n =$__________, 前 n 项和 $S_n =$__________.

530. 等差数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_1 = 3$, $a_2 + a_5 = -4$, $a_n = -11$, 则 $n =$__________.

531. 记等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 若 $a_3 = 0$, $a_7 + a_8 = 0$, 则 $S_7 =$__________.

532. 等差数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_1 = 1$, $a_1 + a_2 + a_5 = 13$, 则前 n 项和 $S_n =$__________.

533. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项之和为 S_n, 若 S_{15} 为一确定常数, 则下列各式也为确定常数的是 ( )

A. $a_2 + a_{13}$　　B. $a_2 \cdot a_{13}$　　C. $a_1 + a_8 + a_{15}$　　D. $a_1 \cdot a_8 \cdot a_{15}$

534. 在 a 和 $b(a < b)$ 之间插入 n 个数, 使这 $n+2$ 个数组成递增的等差数列, 则该数列的公差为__________.

535. 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项为 $a_n = \sqrt{99} - n$, 前 n 项和为 S_n, 则

(1) $\{a_n\}$ 中最后一个为正数的项是第__________ 项;

(2) 数列 $\{S_n\}$ 中, 第__________ 项最大.

536. 设数列 $\{a_n\}$ 中, a, b 为常数. 在下列三个条件中: ① $a_{n+1} - a_n = a$; ② $2a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$; ③ $a_n = an + b$, 可推出 $\{a_n\}$ 是等差数列的条件为__________(填入序号).

537. 已知数列 $\{a_n\}$ 为等差数列, 公差为 d. 求证: 数列 $\{2a_{2n}\}$ 也是等差数列.

538. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和是 $S_n = an^2 + bn + c$, 其中 a, b, c 为常数, 若数列 $\{a_n\}$ 为等差数列, 求实数 a, b, c 应满足的条件.

539. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 已知 $a_2 = 6$, $S_6 > 0$, $S_7 < 0$.

(1) 求公差 d 的取值范围;

(2) 数列 $\{S_n\}$ 是否有最大项? 若有, 求出该项为第几项; 若无, 说明理由.

540. 等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 + a_4 + a_7 = 9$, $a_2 + a_5 + a_8 = 3$, 则 $a_3 + a_6 + a_9 =$__________.

541. 设 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $S_5 = 10$, $S_{10} = -5$, 则 $S_{15} =$__________.

542. 设 a 是实数, 若等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=n+a$, 则 $a=$__________.

543. 已知等差数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 的前 n 项和分别为 S_n,T_n, 若 $\dfrac{S_n}{T_n}=\dfrac{n-1}{n+1}$, 则 $\dfrac{a_8}{b_8}=$__________.

544. 等差数列 $\{a_n\}$ 中, S_n 为前 n 项和, 且 $S_6<S_7,S_7>S_8$, 给出下列命题:

(1) 数列 $\{a_n\}$ 中前 7 项是递增的, 从第 8 项开始递减; (2) S_9 一定小于 S_6; (3) a_1 是 $\{a_n\}$ 各项中的最大的;

(4) S_7 不一定是 $\{S_n\}$ 中最大项. 其中正确的序号是__________.

545. 设等比数列 $\{b_n\}$ 各项为正, 数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_n=\dfrac{\lg b_1+\lg b_2+\cdots+\lg b_n}{n}$, 证明: 数列 $\{a_n\}$ 为等差数列.

546. 设数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=pn+q(n\in\mathbf{N}^*,\ p>0)$. 数列 $\{b_n\}$ 定义如下: 对于正整数 m, b_m 是使得不等式 $a_n>m$ 成立的所有 n 中的最小值.

(1) 若 $p=\dfrac{1}{2}$, $q=-\dfrac{1}{3}$ 求 b_3;

(2) 若 $p=2$, $q=-1$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 $2m$ 项和公式.

547. 实数组成的等比数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_1=2$, $a_4=54$, 则通项 $a_n=$__________.

548. 等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=4$, $a_2=2$, 则 $a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_na_{n+1}=$__________.

549. 已知数列 $\{a_n\}$ 是等比数列, 且 $a_n>0$, 若 $b_n=\log_2 a_n$, 则 (　　)

A. $\{b_n\}$ 一定是递增的等差数列　　B. $\{b_n\}$ 不可能是等比数列

C. $\{b_n+1\}$ 一定是等差数列　　D. $\{3^b_n\}$ 不是等比数列

550. 等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$, $a_3=81$, 则 $a_2=$__________.

551. 若实数 a、b、c、d、e 依次构成等比数列, 且 $a=-1$, $e=-81$, 则 c=__________.

552. 若等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n=3^n+a$, 则实数 $a=$__________.

553. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 则 $S_4,S_8-S_4,S_{12}-S_8,S_{16}-S_{12}$ 成等差数列. 类比以上结论有: 设等比数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项积为 T_n, 则 T_4,__________, __________, $\dfrac{T_{16}}{T_{12}}$ 成等比数列.

554. 几位大学生响应国家的创业号召, 开发了一款应用软件. 为激发大家学习数学的兴趣, 他们推出了“解数学题获取软件激活码”的活动. 这款软件的激活码为下面数学问题的答案: 已知数列 $1,1,2,1,2,4,1,2,4,8,1,2,4,8,16,\cdots$, 其中第一项是 2^0, 接下来的两项是 $2^0,2^1$, 再接下来的三项是 $2^0,2^1,2^2$, 依此类推. 求满足如下条件的最小整数 $N(N>100)$, 且该数列的前 N 项和为 2 的整数幂. 那么该款软件的激活码是 ( ).

A. 440　　B. 330　　C. 220　　D. 110

555. 已知由实数组成的数列 $\{a_n\}$, 前 n 项和记为 S_n, 若数列 $\{a_n\}$ 为等比数列, $S_{100}=100S_{50}$, 求 $\dfrac{a_{100}}{a_{50}}$ 的值.

556. 已知数列 $\{c_n\}$, 其中 $c_n=2^n+3^n$, 是否存在实数 p 使得数列 $\{c_{n+1}-pc_n\}$ 为等比数列, 若存在, 求出 p; 若不存在, 说明理由.

557. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 中每一项均为实数, 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n.

(1) 证明: $(S_{2n}-S_n)^2=S_n(S_{3n}-S_{2n})$;

(2) 试给出一个例子使得 $S_n,S_{2n}-S_n,S_{3n}-S_{2n}$ 依次不构成等比数列;

(3) 若 $S_{10}=2$, $S_{30}=14$, 求 S_{20}.

558. 等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=2$, $a_2=1$, 则通项 $a_n=$__________.

559. 若等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 3, 则等比数列 $\{a_n\cdot a_{n+3}\}$ 的公比为__________.

560. 若实数 a 使得 a,a^2,a 依次构成等比数列, 则 $a=$__________.

561. 若数列 $\{a_n\}$ 为等差数列, 则 $a_9=4a_3-3a_1$. 类比以上结论有: 若数列 $\{b_n\}$ 为等比数列, 则 $b_9=$__________.

562. 设 $\{a_n\}$ 是各项为正数的无穷数列, A_i 是边长为 a_i、a_{i+1} 的矩形的面积 $(i=1,2,\cdots)$, 则 $\{a_n\}$ 为等比数列的充要条件是 (　　).

A. $\{a_n\}$ 是等比数列

B. $a_1,a_3,\cdots,a_{2n-1},\cdots$ 或 $a_2,a_4,\cdots,a_{2n},\cdots$ 是等比数列

C. $a_1,a_3,\cdots,a_{2n-1},\cdots$ 和 $a_2,a_4,\cdots,a_{2n},\cdots$ 均是等比数列

D. $a_1,a_3,\cdots,a_{2n-1},\cdots$ 和 $a_2,a_4,\cdots,a_{2n},\cdots$ 均是等比数列, 且公比相同

563. 设 $p\in\mathbf{R}$, 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$, $a_{n+1}=a_n^2-p$, 是否存在 p 使得 $\{a_n\}$ 是等比数列? 若存在, 求出 p 的值; 若不存在, 说明理由.

564. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 已知 $a_1=1$, $S_{n+1}=4a_n+2$.

(1) 设 $b_n=a_{n+1}-2a_n$, 证明数列 $\{b_n\}$ 是等比数列;

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

565. 求和: $\sin^2 1^\circ+\sin^2 2^\circ+\sin^2 3^\circ+\cdots+\sin^2 88^\circ+\sin^2 89^\circ=$__________.

566. 设 $f(x)=\dfrac{1}{3^x+\sqrt{3}}$, 利用课本中推导等差数列前 n 项和的公式的方法, 可求得 $f(-5)+f(-4)+\cdots+f(0)+\cdots+f(5)+f(6)$ 的值为__________.

567. 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项 $a_n=1+2+2^2+\cdots+2^n$, 则其前 n 项和 $S_n=$__________.

568. 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项 $a_n=\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$, 则其前 n 项和 $S_n=$__________.

569. 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项 $a_n=\dfrac{3}{n(n+3)}$, 则其前 n 项和 S_n=__________.

570. 等比数列 $\{a_n\}$ 中前 n 项和为 S_n, $n\in\mathbf{N}^*$, 若 $S_n=48$, $S_{2n}=60$, 则 $S_{4n}=$__________.

571. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 满足 $3a_4=7a_7$, 且 $a_1>0$, S_n 是数列 $\{a_n\}$ 前 n 项的和, 若 S_n 取得最大值, 则 $n=$__________.

572. 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项 $a_n=n\cdot 2^n$, 求其前 n 项和 S_n.

573. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n=n^2-20n$, 求数列 $\{|a_n|\}$ 的前 n 项和 T_n.

574. 求数列 $\{\dfrac{(n+1)^2+1}{(n+1)^2-1}\}$ 的前 n 项和 S_n.

575. (1) 设 n 为正整数, 求和: $1-3+5-7+9+\cdots+(-1)^{n-1}\cdot(2n-1)$;

(2) 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项 $a_n=\begin{cases}3n+1, & n\text{为奇数},\\ 2^{\frac{n}{2}}, & n\text{为偶数},\end{cases}$ 求其前 n 项和 S_n.

576. 数列 $\{a_n\}$ 的通项 $a_n=2^n\cdot 3^n$, 则其前 n 项和 $S_n=$__________.

577. 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项 $a_n=\dfrac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}$, 则其前 n 项和 $S_n=$__________.

578. 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, $a_3=3$, $S_4=10$, 则数列 $\{S_n\}$ 的前 n 项和为__________.

579. 求数列 $\{\dfrac{n}{2^n}\}$ 的前 n 项和 S_n.

580. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n=\begin{cases}n, & n\text{是奇数},\\ 2^n, & n\text{是偶数}.\end{cases}$ 试求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n.

581. 如果有穷数列 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_m$(m 为正整数) 满足条件 $a_1=a_m$, $a_2=a_{m-1}$, $\cdots$, $a_m=a_1$, 即 $a_i=a_{m-i+1}(i=1,2,\cdots,m)$, 我们称其为 "对称数列". 例如数列 $1,2,5,2,1$ 与数列 $8,4,2,2,4,8$ 都是 "对称数列".

(1) 设 $\{c_n\}$ 是 49 项的 "对称数列", 其中 $c_{25},c_{26},\cdots,c_{49}$ 是首项为 1, 公比为 2 的等比数列, 求 $\{c_n\}$ 各项的和 S;

(2) 设 $\{d_n\}$ 是 100 项的 "对称数列", 其中 $d_{51},d_{52}\cdots,d_{100}$ 是首项为 2, 公差为 3 的等差数列. 求 $\{d_n\}$ 前 n 项的和 $S_n(n=1,2,\cdots,100)$.

582. 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=0$ 且 $\dfrac{1}{1-a_{n+1}}-\dfrac{1}{1-a_n}=1$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $b_n=\dfrac{1-\sqrt{a_{n+1}}}{\sqrt{n}}$, 记 $S_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$, 求 $\{S_n\}$ 的通项公式.

583. 数学归纳法证明 $1+a+a^2+\cdots+a^{n+1}=\dfrac{1-a^{n+2}}{1-a}$ $(a\neq 1)$, 在验证 $n=1$ 时, 左边计算所得项为__________.

584. 用数学归纳法证明 "对于任意正偶数 n, a^n-b^n 能被 $a+b$ 整除" 时, 其第二步论证应该是 (　　).

A. 假设 $n=k$, $k\in\mathbf{N}^*$ 时命题成立, 证明 $n=k+1$ 时, 命题也成立

B. 假设 $n=2k$, $k\in\mathbf{N}^*$ 时命题成立, 证明 $n=2k+1$ 时, 命题也成立

C. 假设 $n=k$, $k\in\mathbf{N}^*$ 时命题成立, 证明 $n=k+2$ 时, 命题也成立

D. 假设 $n=2k$, $k\in\mathbf{N}^*$ 时命题成立, 证明 $n=2k+2$ 时, 命题也成立

585. 用数学归纳法证明: $1^2-2^2+3^2-4^2+\cdots+(2n-1)^2-(2n)^2=-n(2n+1)$, n 从 k 到 $k+1$ 时, 等式左边增加的项为__________.

586. 根据 $1=1$, $1-4=-(1+2)$, $1-4+9=1+2+3$, $1-4+9-16=-(1+2+3+4)$, $\cdots$, 请写一个能体现其一般规律的数学表达式:__________.

587. 设 $f(x)$ 是定义在正整数集上的函数, 且 $f(x)$ 满足: "当 $f(k) \geq k^2$ 成立时, 总可推出 $f(k+1) \geq (k+1)^2$ 成立". 那么, 下列说法中正确的是 (　　).

A. 若 $f(3) \geq 9$ 成立, 则当 $k \geq 1$ 时, 均有 $f(k) \geq k^2$ 成立

B. 若 $f(5) \geq 25$ 成立, 则当 $k \leq 5$ 时, 均有 $f(k) \geq k^2$ 成立

C. 若 $f(7) < 49$ 成立, 则当 $k \geq 8$ 时, 均有 $f(k) < k^2$ 成立

D. 若 $f(4) = 25$ 成立, 则当 $k \geq 4$ 时, 均有 $f(k) \geq k^2$ 成立

588. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \dfrac{1-a_n}{1+a_n}$, 则 $\{a_n\}$ 的通项 $a_n =$__________.

589. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = n + \dfrac{2}{a_n - n + 2}$, 猜测 $\{a_n\}$ 的通项, 并用数学归纳法证明.

590. 是否存在实数 a, 使得等式 $\dfrac{1}{1^2} + \dfrac{1}{2^2} + \cdots + \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{an}{3n-1}$ 对一切正整数 n 成立? 请说明理由.

591. 用数学归纳法证明: 对一切正整数 n, $5^n + 12n - 1$ 是 16 的倍数.

592. 正数数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和为 S_n, 若 $S_n = \dfrac{1}{2}(a_n + \dfrac{1}{a_n})$.

(1) 求 a_1, a_2, a_3 的值;

(2) 猜测通项 a_n, 并用数学归纳法加以证明.

593. 数学归纳法证明: $1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \cdots + \dfrac{1}{2n-1} - \dfrac{1}{2n} = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \cdots + \dfrac{1}{2n}$ 时, 当 n 从 k 到 $k+1$ 时等式右边增加与减少的项分别为__________, __________.

594. 若 $S_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n}$, 用数学归纳法证明: $S_{2^n} > 1 + \dfrac{n}{2}$ $(n \geq 2)$, n 从 k 到 $k+1$ 时, 不等式左边增加的项为__________.

595. 根据 $1 = 1$, $2+3+4 = 9$, $3+4+5+6+7 = 25$, $\cdots$, 请写一个能体现其一般规律的数学表达式:__________.

596. (1) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 3$, $a_{n+1} = a_n^2 - 2$ $(n \in \mathbf{N}^*)$. 求证: 当 $n \in \mathbf{N}^*$ 时, $a_n \geq 3$;

(2) * 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n \geq 0$, $a_1 = 0$, $a_{n+1}^2 + a_{n+1} - 1 = a_n^2$ $(n \in \mathbf{N}^*)$. 求证: 当 $n \in \mathbf{N}^*$ 时, $a_n < a_{n+1}$.

597. 在数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 中, $a_1 = 2$, $b_1 = 4$, 且 a_n, b_n, a_{n+1} 成等差数列, b_n, a_{n+1}, b_{n+1} 成等比数列 $(n \in \mathbf{N}^*)$. 写出 a_2, a_3, a_4 及 b_2, b_3, b_4 的值, 由此猜测 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 的通项公式, 并证明你的结论.

598. (1) 用数学归纳法证明: 对一切正整数 n, $2^{n+2} \cdot 3^n + 5n + 21$ 能被 25 整除;

(2) * 是否存在大于 1 的正整数 m, 使得对于任意正整数 n, $f(n) = (2n+7) \cdot 3^n + 9$ 都能被 m 整除? 若存在, 求出 m 的最大值, 并证明你的结论; 若不存在, 说明理由.