1. 用反三角函数的形式表示一个角. 这是学习反三角函数内容的一个难点, 解此类问题的关键是正确理解反三角函数的定义, 熟练掌握反三角函数的定义域和值域, 把握角的范围. (1) 只有在 $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ 时, 才可由 $\sin x = a(|a| \le 1)$ 直接得到 $x = \arcsin a$. 若 $x \notin [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, 则可利用公式 $\sin(2k\pi + x) = \sin x$ 或 $\sin[2k\pi + (\pi - x)] = \sin x(k \in \mathbf{Z})$ 确定一个角, 使这个角在 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 范围内, 然后用反正弦形式表示.

2. 已知 $\sin x = -\frac{1}{3}(\pi < x < \frac{3\pi}{2})$, 用反正弦形式表示 x. 解 $\sin(\pi - x) = \sin x = -\frac{1}{3}$, 且由 $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ 知, $-\frac{\pi}{2} < \pi - x < 0$, $\pi - x = \arcsin(-\frac{1}{3}) = -\arcsin\frac{1}{3}$, 于是 $x = \pi + \arcsin\frac{1}{3}$. (2) 只有在 $0 \le x \le \pi$ 时, 才可由 $\cos x = a(|a| \le 1)$ 直接得到 $x = \arccos a$. 若 $x \in [0, \pi]$, 则可利用公式 $\cos(2k\pi \pm x) = \cos x(k \in \mathbf{Z})$ 确定一个角, 使这个角在 $[0, \pi]$ 范围内, 然后用反余弦形式表示.

3. 若 $\cos x = \frac{1}{3}(-\frac{\pi}{2} < x < 0)$, 用反余弦形式表示 x. 解 $\cos(-x) = \cos x = \frac{1}{3}$, 且由 $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ 知, $0 < -x < \frac{\pi}{2}$, $-x = \arccos\frac{1}{3}$, 故 $x = -\arccos\frac{1}{3}$. (3) 只有在 $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ 时, 才可由 $\tan x = a(a \in \mathbf{R})$ 直接得到 $x = \arctan a$. 若 $x \notin (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, 则可利用公式 $\tan(k\pi + x) = \tan x(k \in \mathbf{Z})$ 确定一个角, 使这个角在 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 内, 然后用反正切形式表示. (4) 只存在 $0 < x < \pi$ 时, 才可由 $\cot x = a(a \in \mathbf{R})$ 直接得到 $x = arc\cot a$. 若 $x \in (0, \pi)$, 则可利用公式 $\cot(k\pi + x) = \cot x(k \in \mathbf{Z})$ 确定一个角. 使这个角在 $(0, \pi)$ 内, 然后用反余切形式表示.

4. 求含反三角形式的角的三角函数值. 解此类问题的要点可以概括为 "一令、二则、三范围". 例如, 求 $\cot[\arcsin(-\frac{\sqrt{3}}{3})]$ 的值. "一令"——令 $\alpha = \arcsin(-\frac{\sqrt{3}}{3})$, "二则"——则 $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, "三范围"——$\alpha \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$. 有了以上三步之后, 余下的问题就不难解决了.

5. 求值: (1)$\tan[\frac{1}{2}\arcsin(\frac{-2\sqrt{6}}{5})]$. (2)$\cos[\arctan\frac{3}{4} + \arccos(-\frac{2}{3})]$. 解 (1) 令 $\alpha = \arcsin(\frac{-2\sqrt{6}}{5})$, 则 $\sin\alpha = \frac{-2\sqrt{6}}{5}$, $\alpha \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$, 于是 $\cos\alpha = \frac{1}{5}$.. 原式 $= \tan\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1 - \frac{1}{5}}{-\frac{2\sqrt{6}}{5}} = -\frac{\sqrt{6}}{3}$. (2) 令 $\alpha = \arctan\frac{3}{4}$, 则 $\tan\alpha = \frac{3}{4}$, $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$, 于是 $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $\cos\alpha = \frac{4}{5}$. 再 $\beta = \arccos(-\frac{2}{3})$, 则 $\cos\beta = -\frac{2}{3}$, $\beta \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, 于是 $\sin\beta = \frac{\sqrt{5}}{3}$. 原式 $= \cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = \frac{4}{5} \times (-\frac{2}{3}) - \frac{3}{5} \times \frac{\sqrt{5}3 = -\frac{8}{+}3\sqrt{5}}{15}$. 注意一般地, 对于含有反三角形式的计算问题, 都可利用 "一令、二则、三范围" 的方法来解决.

6. 两组重要的恒等式. 根据反三角函数的定义, 可以得到下列两组重要的恒等式: (1)$\sin(\arcsin x) = x$, $x \in [-1, 1]$; $\cos(\arccos x) = x, x \in [-1, 1]$; $\tan(\arctan x) = x, x \in \mathbf{R}$; $\cot(arc\cot x) = x, x \in \mathbf{R}$. (2)$\arcsin(\sin x) = x$, $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$; $\arccos(\cos x) = x$, $x \in [0, \pi]$; $\arctan(\tan x) = x$, $x \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$; $arc\cot(\cot x) = x$, $x \in (0, \pi)$. 第 (1) 组恒等式是不难掌握的, 它们在各自定义域内成立. 如何运用第 (2) 组恒等式是一个难点, 以 $y = \arcsin(\sin x)$ 为例, 它的定义域为 R, 值域为 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, 周期是 2π, 只有在 $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 时, 才有 $\arcsin(\sin x) = x$, 当 $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 时, 求 $\arcsin(\sin x)$ 的值是一类必须掌握但又有一定难度的问题.

7. 求值: (1)$\arcsin(\sin 2)$. (2)$\arccos(\cos\frac{6}{5}\pi)$. (3)$\arctan(\cot\sqrt{3})$. (4)$arc\cot(-\cot\frac{\pi}{7})$. 解 (1) $\sin 2 = \sin(\pi - 2)$, 且 $\pi - 2 \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, 原式 $= \arcsin[\sin(\pi - 2)] = \pi - 2$. (2) $\cos\frac{6}{5}\pi = \cos\frac{4}{5}\pi$, 且 $\frac{4}{5}\pi \in [0, \pi]$, 原式 $= \arccos(\cos\frac{4}{5}\pi) = \frac{4}{5}\pi$. (3) $\cot\sqrt{3} = \tan(\frac{\pi}{2} - \sqrt{3})$, 且 $\frac{\pi}{2} - \sqrt{3} \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, 原式 $= \arctan[\tan(\frac{\pi}{2} - \sqrt{3})] =$

$\frac{\pi}{2}-\sqrt{3}$. (4) $-\cot\frac{\pi}{7}=\cot(-\frac{\pi}{7})=\cot[\pi+(-\frac{\pi}{7})]=\cot\frac{6}{7}\pi$, 且 $\frac{6}{7}\pi\in(0,\pi)$, 原式 $=arc\cot(\cot\frac{6}{7}\pi)=\frac{6}{7}\pi$ 注意解此类问题的关键是: (1) 恒等变形, 即利用诱导公式, 使 $\arcsin(\sin x)$ 恒等变形为 $\arcsin(\sin\alpha)$. (2) 紧扣 α 的范围, 即选用诱导公式时, 必须使 $\alpha\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$. 满足了以上两个要求, α 便是所要求的值. 对于解 $\arccos(\cos x)$, $\arctan(\tan x)$, $arc\cot(\cot x)$ 的问题, 方法雷同. 有兴趣的读者不妨对 $y=\arcsin(\sin x)$ 等四个函数的性质 (定义域、值域、单调性、奇偶性、周期性) 及图象、一般表达式作进一步研究.

8. 有关反三角恒等式的证明.

9. 若 $|x|\le 1$, 求证: $\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$. 证法一 $\sin(\frac{\pi}{2}-\arccos x)=\cos(\arccos x)=x$, 其中 $-1\le x\le 1$, 又由 $\arccos x\in[0,\pi]$, 得 $(\frac{\pi}{2}-\arccos x)\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$, 根据反正弦函数的定义, 得 $\frac{\pi}{2}-\arccos x=\arcsin x$, 即 $\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$. 证法二设 $\arcsin x=\alpha$, 则 $\sin\alpha=x$, $\alpha\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$.. 再设 $\arccos x=\beta$, 则 $\cos\beta=x$, $\beta\in[0,\pi]$. $\sin\alpha=x$, $\sin(\frac{\pi}{2}-\beta)=\cos\beta=x$, $\sin\alpha=\sin(\frac{\pi}{2}-\beta)$. $-\frac{\pi}{2}\le\alpha\le\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2}\le\frac{\pi}{2}-\beta\le\frac{\pi}{2}$, $\alpha=\frac{\pi}{2}-\beta$, 即 $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$, $\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$.

10. 求证: $\arctan\frac{1}{3}+\arctan\frac{1}{5}+\arctan\frac{1}{7}+\arctan\frac{1}{8}=\frac{\pi}{4}$. 证明设 $\alpha=\arctan\frac{1}{3}$, $\beta=\arctan\frac{1}{5}$, $\gamma=\arctan\frac{1}{7}$, $\delta=\arctan\frac{1}{8}$, 则 $\tan\alpha=\frac{1}{3}$, $\tan\beta=\frac{1}{5}$, $\tan\gamma=\frac{1}{7}$, $\tan\delta=\frac{1}{8}$ 且 $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in(0,\frac{\pi}{4})$. 于是 $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{3}\times\frac{1}{5}}=\frac{4}{7}$, $\tan(\gamma+\delta)=\frac{\tan\gamma+\tan\delta}{1-\tan\gamma\tan\delta}=\frac{\frac{1}{7}+\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{7}\times\frac{1}{8}}=\frac{3}{11}$. $\tan(\alpha+\beta+\gamma+\delta)=\frac{\frac{4}{7}+\frac{3}{11}}{1-\frac{4}{7}\times\frac{3}{11}}=1$. $0<\alpha+\beta+\gamma+\delta<\pi$, $\alpha+\beta+\gamma+\delta=\frac{\pi}{4}$, 原命题得证. 注意有关反三角恒等式的证明需掌握两点: (1) 证明等式两边 (或先作恒等变形) 的同一个三角函数值相等. (2) 证明等式两边都在所取三角函数的同一个一一对应的区间内 (千万不能忽视这一点). 5, 解简单的反三角不等式. 只要依据反三角函数的单调性, 并切记反三角函数的定义域, 解此类不等式就不会感到困难.

11. 求下列不等式中 x 的取值范围: (1)$\arcsin x<1$. (2)$\arccos(2x^2-1)<\arccos x$. 解 (1) 由已知条件, 得 $\begin{cases}-1\le x\le 1,\\ \arcsin x<\arcsin(\sin 1),\end{cases}$ 于是 $\begin{cases}-1\le x\le 1,\\ x<\sin 1,\end{cases}$ $-1\le x<\sin 1$. (2) 由已知条件, 得 $\begin{cases}-1\le 2x^2-1\le 1,\\ -1\le x\le 1,\\ 2x^2-1>x,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-1\le x\le 1,\\ 2x^2-x-1>0,\end{cases}$ 也即 $\begin{cases}-1\le x\le 1,\\ x<-\frac{1}{2}x>1,\end{cases}$ $-1\le x<-\frac{1}{2}$. 【训练题】(一) 反正弦函数

12. 若 $\pi\le\alpha\le\frac{3\pi}{2}$, 且 $\sin\alpha=-\frac{1}{4}$, 则用反三角形式表示 α 是 ()

A. $\pi-\arcsin\frac{1}{4}$　B. $\pi+\arcsin\frac{1}{4}$　C. $\frac{3\pi}{2}-\arcsin\frac{1}{4}$　D. $\frac{3\pi}{2}+\arcsin\frac{1}{4}$

13. 函数 $y=\arcsin(\cot x)$ 的定义域是 ()

A. [-1, 1]　B. $[k\pi+\frac{\pi}{4},k\pi+\frac{3\pi}{4}](k\in\mathbf{Z})$　C. $[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}]$　D. $[k\pi-\frac{\pi}{4},k\pi+\frac{\pi}{4}](k\in\mathbf{Z})$

14. 函数 $y=\sin(\arcsin x)$ 的图象是 () __________

A. B. C. D.

15. 函数 $f(x)=2\arcsin(x-1)$ 的反函数是 ()

A. $y=\frac{1}{2}\sin(x-1)(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2})$ B. $y=1+\sin\frac{x}{2}(-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2})$ C. $y=1+\sin\frac{x}{2}(-\pi\le x\le\pi)$ D. $y=\sin(\frac{x}{2}+1)(-\pi\le x\le\pi)$

16. 函数 $y=\arcsin(x^2-x)$ 为减函数的区间是 ()

A. [-1, 1] B. $[\frac{1}{2},\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})]$ C. $(-\frac{\pi}{4},+\infty)$ D. $[\frac{1}{2}(1-\sqrt{5}),\frac{1}{2}]$

17. 若 $0<a<1$, 则在 $[0,2\pi]$ 内满足 $\sin x\ge a$ 的 x 的取值范围是 ()

A. $[0,\arcsin a]$ B. $[\arcsin a,\pi-\arcsin a]$ C. $[\pi\arcsin a,\pi]$ D. $[\arcsin a,\frac{\pi}{2}+\arcsin a]$

18. 若 $\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{3\pi}{2}$, 则 $\arcsin(\sin x)$ 的值等于 ()

A. x B. $\pi-x$ C. $x-\pi$ D. $x+\pi$

19. 已知 $\arcsin x\ge 1$, 则 x 的取值范围是 ()

A. [0, 1] B. $[0,\sin 1]$ C. $[\sin 1,1]$ D. [-1, 1]

20. 若函数 $y=\arcsin(\cos x)$ 的定义域是 $(-\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3})$, 则值域是 ()

A. $(-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}]$ B. $(-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}]$ C. $(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}]$ D. $[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}]$

21. 求下列函数的定义域与值域: (1)$y=\sqrt{\arcsin x}$, $x\in$__________, $y\in$__________. (2)$y=\arcsin(\lg\frac{x}{2})$, $x\in$__________, $y\in$__________.. (3)$y=\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{x-2}$, $x\in$__________, $y\in$__________. (4)$y=\arcsin(x-x^2)$, $x\in$__________, $y\in$__________. (5)$f(x)=\log_2(\arcsin\frac{x}{2})$, $x\in$__________, $y\in$__________.

22. 计算下列各式: (1)$\arcsin[\sin(-\frac{5\pi}{4})]=$__________. (2)$\arcsin(\sin 3)=$__________. (3)$\arcsin(\cos 2)=$__________. (4)$\arcsin(\cos 5)=$__________. (5)$\arcsin(\sin\pi^2)=$__________.

23. 求函数 $y=(\arcsin x)^2-2\arcsin x-2$ 的最大值与最小值, 并求取得最大值、最小值时的 x 值.

24. 已知 a,b,c 依次为直角三角形的两直角边和斜边, 且满足 $\arcsin\frac{1}{a}+\arcsin\frac{1}{b}=\frac{\pi}{2}$, 求证: $c=ab$.

25. (1) 已知 $\alpha=\frac{9\pi}{8}$, 求 $\arcsin(\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sqrt{2}})$ 的值. (2) 已知 $\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{5\pi}{4}$, 求证 $\arcsin(\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sqrt{2}})=\frac{3\pi}{4}-\theta$.

26. 根据条件求函数 $f(x)=\sin(x-\frac{\pi}{4})\cos(x+\frac{\pi}{4})$ 的反函数: (1)$-\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{\pi}{4}$. (2)$\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{\pi}{2}$. (二) 反余弦函数

27. 下列各式正确的是 ()

A. $\arcsin(-\frac{\pi}{3})=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\sin(\arcsin\frac{\pi}{3})=\frac{\pi}{3}$ C. $\arcsin(\sin\frac{5\pi}{4})=\frac{\pi}{4}$ D. $\sin[\arccos(-\frac{\sqrt{2}}{2})]=\frac{\sqrt{2}}{2}$

28. 在 $[-1,\frac{3}{2}]$ 上与函数 $y=x$ 相同的函数是 ()

A. $y=\arccos(\cos x)$ B. $y=\arcsin(\sin x)$ C. $y=\sin(\arcsin x)$ D. $y=\cos(\arccos x)$

29. 若 $f(\cos x)=\frac{x}{2}$, $x\in[0,\pi]$, 则 $f(-\frac{1}{2})$ 等于 ()

A. $\cos\frac{1}{2}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{\pi}{4}$ D. $\frac{2\pi}{3}$

30. 函数 $y=\arccos(-x)$ 的图象与 $y=\arccos x$ 的图象 ()

A. 关于 x 轴对称 B. 关于 y 轴对称 C. 关于原点对称 D. 关于直线 $y=x$ 对称

31. 函数 $y=\arccos(x^2-2x)$ 为减函数的区间是 ()

A. $[1,+\infty]$ B. $[-1,1+\sqrt{2}]$ C. $[1-\sqrt{2},1+\sqrt{2}]$ D. $[1,1+\sqrt{2}]$

32. 求下列函数的定义域与值域: (1)$y=\sqrt{\arccos x}$, $x\in$__________, $y\in$__________. (2)$y=\arccos(\sqrt{2}\sin x)$, $x\in$__________, $y\in$__________. (3)$y=\arccos\frac{2}{x}$, $x\in$__________, $y\in$__________. (4)$y=\arccos(2x^2-x)$, $x\in$__________, $y\in$__________. (5)$y=\sqrt{\frac{2\pi}{3}-\arccos(\frac{1}{2}x-1)}$, $x\in$__________, $y\in$__________.

33. (1) 已知 $\cos x=-\frac{1}{3}$, $\pi\le x\le 2\pi$ 则 $x=$__________. (2) 函数 $f(x)=\frac{1}{2}\arccos(x+2)$ 的反函数是__________.

34. 根据条件填空: (1)$\sin(\arccos x)=\frac{\sqrt{3}}{2}$, 则 $x=$__________. (2) 已知 $\arccos(\cos x)=\frac{\pi}{6}$, 则 $x=$__________. (3) 已知 $\cos[\arccos(x+1)]=x+1$, 则 x 的取值范围是__________.

35. 计算下列各式: (1)$\arcsin(\sin\frac{3\pi}{4})+\arccos(\cos\frac{3\pi}{4})=$__________. (2)$\arccos[\cos(-\frac{\pi}{6})]=$__________. (3)$\arccos(\sin\frac{\pi}{7})=$_____ (4)$\arccos(\cos\pi^2)=$__________. (5)$\tan(\frac{1}{2}\arccos\frac{2\sqrt{2}}{3})=$__________. (6)$\cos[\frac{1}{2}\arccos(-\frac{3}{5})]=$__________.

36. 根据下列条件求 x 的取值范围: (1)$2\arccos x-\arccos(-x)>0$:__________. (2)$\arccos 3x<\arccos(2-5x)$:__________. (3)$\arccos(2x^2-1)<\arccos x$:__________. (4)$\arccos x>\arcsin x$:__________.

37. 已知 $f(x)=\arccos x+1$, 且 $f(a)=a$, 求 $f(-a)$ 的值.

38. 设 $f(x)$ 为奇函数, 且当 $x>0$ 时, $f(x)=\pi-\arccos(\sin x)$, 则当 $x<0$ 时, $f(x)$ 的解析式为 ()

A. $\arccos(\sin x)$ B. $-\arccos(\sin x)$ C. $\pi+\arccos(\sin x)$ D. $-\pi-\arccos(\sin x)$

39. 下列四个命题中正确的是 ()

A. 若 $\sin f(x)$ 是奇函数, 则 $f(x)$ 是奇函数 B. 若 $\cos f(x)$ 是奇函数, 则 $f(x)$ 是奇函数 C. 若 $\arcsin f(x)$ 是奇函数, 则 $f(x)$ 是奇函数 D. 若 $\arccos f(x)$ 是奇函数, 则 $f(x)$ 是奇函数

40. 函数 $f(x)=\dfrac{\arcsin x}{\frac{\pi}{2}-\arccos x}$()

A. 是奇函数, 但不是偶函数 B. 是偶函数, 但不是奇函数 C. 即不是奇函数, 也不是偶函数 D. 奇偶性无法确定

41. 若函数 $f(x)=-\arccos x+\varphi$ 是奇函数, 则 φ 等于 ()

A. π　　B. $\frac{\pi}{2}$　　C. $-\pi$　　D. $-\frac{\pi}{2}$

42. (1) 用一个反正弦形式表示 $\arcsin\frac{12}{13}+\arccos\frac{4}{5}$. (2) 用一个反余弦形式表示 $\arccos\frac{15}{17}-\arcsin\frac{4}{5}$.

43. 求值: (1)$\arcsin\frac{2\sqrt{2}}{3}+\arcsin\frac{1}{3}$. (2)$\arccos(-\frac{11}{14})-\arccos\frac{1}{7}$.

44. 已知 $\arccos\frac{x}{a}=2\arcsin\frac{y}{a}$, 求证: $a^2=ax+2y^2$.

45. 求值: (1)$\sin(\arcsin\frac{3}{5}+\arcsin\frac{8}{17})$. (2)$\tan[\arcsin\frac{1}{3}+\arccos(-\frac{1}{5})]$. (3)$\cos[\arccos\frac{4}{5}-\arccos(-\frac{5}{13})]$. (4)$\arcsin(\cos 4)-\arccos(\sin 5)$.

46. (1) 已知 $-\frac{\pi}{3}<\theta<\frac{2\pi}{3}$, 求证: $\arccos\frac{\sqrt{3}\sin\theta-\cos\theta}{2}+\theta=\frac{2\pi}{3}$. (2) 若 $\arcsin(\sin\alpha+\sin\beta)+\arcsin(\sin\alpha-\sin\beta)$ 是 $\frac{\pi}{2}$ 的奇数倍, 求证: $\sin^2\alpha+\sin^2\beta=\frac{1}{2}$.

47. (1) 求函数 $y=(\arccos x)^2-5\arccos x(|x|\leq 1)$ 的值域. (2) 已知函数 $f(x)=\cos(2\arccos x)+4\sin(\arcsin\frac{x}{2})$, 求它的最大值与最小值. (三) 反正切函数与反余切函数

48. 记 $M=\arcsin(-\frac{1}{3})$, $P=\arctan(-\sqrt{2})$, $Q=\arccos(-\frac{2}{3})$, 则 M,P,Q 的大小关系是 ()

A. $M<P<Q$　　B. $M<Q<P$　　C. $P<M<Q$　　D. $P<Q<M$

49. 计算 $\arctan(\tan\frac{3}{5}\pi)$ 的值是 ()

A. $-\frac{3}{5}\pi$　　B. $\frac{2}{5}\pi$　　C. $-\frac{2}{5}\pi$　　D. $\frac{3}{5}\pi$

50. 若 $x<0$, 则 $\arctan x$ 等于 ()

A. $arc\cot\frac{1}{x}$　　B. $-arc\cot\frac{1}{x}$　　C. $\pi-arc\cot\frac{1}{x}$　　D. $arc\cot\frac{1}{x}-\pi$

51. 函数 $f(x)=\frac{\pi}{2}+\arctan x$ 的反函数是 ()

A. $f^{-1}(x)=\tan(x-\frac{\pi}{2})(0<x<\pi)$　　B. $f^{-1}(x)=-\cot x(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2})$　　C. $f^{-1}(x)=-\frac{1}{\tan x}(0<x<\pi)$　　D. $f^{-1}(x)=\tan x(0<x<\pi)$

52. 若 $\arctan(x+1)-\arctan(x-1)=\frac{\pi}{4}$, 则 $\arcsin\frac{1}{x^2}$ 等于 ()

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{4}$　　C. $\frac{\pi}{3}$. (1))$\frac{4\pi}{3}$.　　D. $y=\arctan(\tan x)$

53. 下列函数中, 同时满足条件“① 定义域是 R, ② 是奇函数, ③ 是周期函数”的函数是 ()(A)$y=\arcsin(\sin x)$. (B)$y=\cos(\arcsin x)$. (C)$y=\tan(\arctan x)$

54. 在 “① $\arcsin(\sin\frac{5}{6}\pi)=\frac{5}{6}\pi$, ② $\arctan(\tan\frac{7}{6}\pi)=\frac{\pi}{6}$, ③ $\cos(\arccos\pi)=\pi$, ④ $\tan(arc\cot 0)=0$” 这四个式子中, 正确的有 ()

A. 0 个　　B. 1 个　　C. 2 个　　D. 3 个

55. 计算下列各式: (1)$\arctan\frac{1}{3}+\arctan 3+\arcsin\frac{1}{5}-\arccos(-\frac{1}{5})=$__________. (2)$\arctan(\cot 1)=$__________. (3)$art\cot(\cot\frac{10}{7}\pi)=$__________. (4)$\arctan\frac{1-\tan 25^\circ}{1+\tan 25^\circ}=$__________. (5)$\arctan 7+arc\cot\frac{3}{4}=$__________. (6)$\arctan(3+2\sqrt{2})-\arctan\frac{\sqrt{2}}{2}=$__________. (7)$\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{5}+\arctan\frac{1}{8}=$__________. (8)$\arcsin(\sin 4)+\arccos(\cos 3)+\arctan(\tan 2)+arc\cot(\cot 1)=$__________.

56. 求下列各式的值: (1)$\sin[\frac{1}{2}\arctan(-2\sqrt{2})]=$__________. (2)$\sin[\frac{1}{2}arc\cot(-\frac{3}{4})]=$__________. (3)$\tan(\arctan\frac{1}{5}+\arctan 3)=$__________. (4)$\sin[2\arctan(-6)]=$__________. (5)$\cos(2arc\cot\frac{1}{2})+\tan[\frac{1}{2}\arccos(-\frac{3}{5})]=$__________.

57. 在下列各组函数中, 图象不相同的是 ()

A. $y=\sin(\arccos x)$ 与 $y=\cos(\arcsin x)$　　B. $y=\tan(arc\cot x)$ 与 $y=\cot(\arctan x)$　　C. $y=\arcsin(\sin x)$ 与 $y=\arccos(\cos x)$, $x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$　　D. $y=\arctan(\tan x)$ 与 $y=\arctan(\cot x)$, $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$

58. 若将函数 $y=\arctan x$ 的图象沿 x 轴正方向平移 2 个单位长度所得到的图象记为 C, 又图象 C' 与 C 关于原点对称, 则与 C' 对应的函数是 ()

A. $y=-\arctan(x-2)$　　B. $y=\arctan(x-2)$　　C. $y=-\arctan(x+2)$　　D. $y=\arctan(x+2)$

59. 若 $\arctan x+arc\cot y=\pi$, 则点 (x,y) 组成的图象是 () __________

A.　　B.　　C.　　D.

60. 求下列函数的定义域与值域: (1)$y=\arctan(\sin x)$, $x\in$__________, $y\in$__________. (2)$y=\frac{1}{3}\arcsin 3x+\arctan\sqrt{3}x$, $x\in$__________, $y\in$__________. (3)$y=arc\cot\sqrt{\cos x}$, $x\in$__________, $y\in$__________. (4)$y=\arctan\frac{1}{x^2-1}$, $x\in$__________, $y\in$__________.

61. (1) 已知方程 $x^2+3\sqrt{3}x+4=0$ 的两个实根为 x_1 与 x_2, 记 $\alpha=\arctan x_1$, $\beta=\arctan x_2$, 求 $\alpha+\beta$ 的值. (2) 已知实数 a,b 满足 $(a+1)(b+1)=2$, 求 $\arctan a+\arctan b$ 的值. (3) 已知 $|x|\le 1$, 求 $\csc^2(\arctan x)-\tan^2(\arccos x)$ 的值. 二、简单三角方程【典型题型和解题技巧】

62. 主要的三角方程类型. (1)$a\sin^2 x+b\sin x+c=0(a\ne 0)$ 型.

63. 解方程 $2\sin^2 x+3\sin x-2=0$. 解原方程即 $(2\sin x-1)(\sin x+2)=0$, $\sin x=\frac{1}{2}$ 或 $\sin x=-2$(舍去). $x=k\pi+(-1)^k\frac{\pi}{6}(k\in\mathbf{Z})$. (2)$a\sin x+b\cos x+c=0(a^2+b^2\ne 0,\ c\ne 0)$ 型. 此类方程可将两边同除以 $\sqrt{a^2+b^2}$, 变形为 $\sin(x+\varphi)=\frac{-c}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

64. 解方程 $2\sin x-\cos x=1$. 解原方程即 $\sin x\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}-\cos x\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$, 即 $\sin(x-\varphi)=\frac{1}{\sqrt{5}}$(其中 $\varphi=\arctan\frac{1}{2}$), $x=k\pi+(-1)^k\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}+\arctan\frac{1}{2}(k\in\mathbf{Z})$. 注意方程 $\sin x=a$, $\cos x=a$ 有解的条件是 $|a|\le 1$. (3) 齐次

型. $a\sin x+b\cos x=0$, $a\sin^2 x+b\sin x\cos x+c\cos^2 x=0$. 此类方程可将两边同除以 $\cos x$ 或 $\cos^2 x$, 转化为 $\tan x$ 的一次或二次方程. 后者也可采用“降次”, 转化为 $A\sin 2x+B\cos 2x=C$ 的形式.

65. 解方程 $\sin^2 x-3\sin x\cos x+1=0$. 解法一原方程即 $2\sin^2 x-3\sin x\cos x+\cos^2 x=0$. 显然 $\cos^2 x\neq 0$, 则有 $2\tan^2 x-3\tan x+1=0$, 即 $(2\tan x-1)(\tan x-1)=0$, $\tan x=\dfrac{1}{2}$ 或 $\tan x=1$, $x=k\pi+\arctan\dfrac{1}{2}$ 或 $x=k\pi+\dfrac{\pi}{4}(k\in\mathbf{Z})$. 解法二原方程即 $\dfrac{1-\cos 2x}{2}-\dfrac{3}{2}\sin 2x+1=0$. 整理, 得 $3\sin 2x+\cos 2x=3$, 于是 $\sin(2x+\varphi)=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$(其中 $\varphi=\arctan\dfrac{1}{3}$), $2x+\varphi=k\pi+(-1)^k\arcsin\dfrac{3}{\sqrt{10}}$, 故 $x=\dfrac{k\pi}{2}+\dfrac{1}{2}(-1)^k\arcsin\dfrac{3}{\sqrt{10}}-\dfrac{1}{2}\arctan\dfrac{1}{3}(k\in\mathbf{Z})$. (4) 同名三角函数相等型. ① $\sin f(x)=\sin\varphi(x)$; ② $\cos f(x)=\cos\varphi(x)$; ③ $\tan f(x)=\tan\varphi(x)$; ④ $\cot f(x)=\cot\varphi(x)$. 在这四种类型的方程中, ① 可化为 $f(x)=2k\pi+\varphi(x)$ 或 $f(x)=2k\pi+\pi-\varphi(x)$; ② 可化为 $f(x)=2k\pi\pm\varphi(x)$; ③ , ④ 可化为 $f(x)=k\pi+\varphi(x)(k\in\mathbf{Z})$.

66. 解方程 $\tan 5x=\tan 4x$. 解由已知, 得 $\begin{cases}5x\neq m\pi+\dfrac{\pi}{2},\\ 4x\neq n\pi+\dfrac{\pi}{2},\\ 5x=k\pi+4x\end{cases}$ $(m,n,k\in\mathbf{Z})$, $x=k\pi(k\in\mathbf{Z})$. (5) 含 $\sin x\pm\cos x$, $\sin x\cos x$ 的三角方程. 此类方程宜用换元法, 即令 $\sin x\pm\cos x=t(|t|\leq\sqrt{2})$, 则 $\sin x\cos x=\pm\dfrac{t^2-1}{2}$.

67. 解方程 $\sin 2x-12(\sin x-\cos x)+12=0$. 解令 $\sin x-\cos x=t(|t|\leq\sqrt{2})$, 则 $\sin 2x=1-t^2$, 原方程可化为 $1-t^2-12t+12=0$, 即 $t^2+12t-13=0$, 也即 $(t+13)(t-1)=0$. $t=-13$(舍去), 或 $t=1$. $\sin x-\cos x=1$, 即 $\sin(x-\dfrac{\pi}{4})=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, 故 $x=k\pi+(-1)^k\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{4}(k\in\mathbf{Z})$. (4) 其他.

68. 解方程 $\sin^2 x+\sin^2 2x=\sin^2 3x$. 解原方程即 $(\sin^2 3x-\sin^2 x)-\sin^2 2x=0$, $(\sin 3x+\sin x)(\sin 3x-\sin x)-\sin^2 2x=0$, 即 $4\sin 2x\cos x\cos 2x\sin x-\sin^2 2x=0$, $2\sin^2 2x\cos 2x-\sin^2 2x=0$. 于是 $\sin^2 2x(2\cos 2x-1)=0$, $\sin 2x=0$ 或 $\cos 2x=\dfrac{1}{2}$, 故 $x=\dfrac{k\pi}{2}$ 或 $x=k\pi\pm\dfrac{\pi}{6}(k\in\mathbf{Z})$. 注意因式分解以及和差与积的互化, 是解三角方程的重要手段.

69. 三角方程解的讨论. (1) 利/用 $|\sin x|\leq 1$ 与 $|\cos x|\leq 1$. . 例 7 求实数 m 的取值范围, 使关于 x 的方程 $2\sin^2 x+2\sin x\cos x-\cos^2 x-1-m=0$ 有解. 解原方程即 $\sin^2 x+2\sin x\cos x-2\cos^2 x=m$, $\dfrac{1-\cos 2x}{2}+\sin 2x-2\cdot\dfrac{1+\cos 2x}{2}=m$, 即 $2\sin 2x-3\cos 2x=2m+1$, $\sin(2x-\varphi)=\dfrac{2m+1}{\sqrt{13}}$(其中 $\varphi=\arctan\dfrac{3}{2}$). 欲使方程有解, 只需 $-\sqrt{13}\leq 2m+1\leq\sqrt{13}$, $\dfrac{-1-\sqrt{13}}{2}\leq m\leq\dfrac{-1+\sqrt{13}}{2}$. 注意例 7 也可将原方程化为 $\tan x$ 的二次方程, 再利用 $\triangle\geq 0$ 求解, 请读者试一试. (2) 利用函数图象.

70. 关于 x 的方程 $\sin x+\sqrt{3}\cos x+a=0$ 在 $(0,2\pi)$ 内有两个相异的实数解 α,β, 求实数 a 的取值及 $\alpha+\beta$ 的值. (图 1) 解原方程即 $\sin(x+\dfrac{\pi}{3})=-\dfrac{a}{2}$. 令 $y_1=\sin(x+\dfrac{\pi}{3})(0<x<2\pi)$, $y_2=-\dfrac{a}{2}$. 只需 y_2 的图象 (一条和 y 轴垂直的直线) 和 y_1 的图象在 $(0,2\pi)$ 内有两个交点即可. 观察图 1, 得 $\begin{cases}-1<-\dfrac{a}{2}<1,\\ -\dfrac{a}{2}\neq\dfrac{\sqrt{3}}{2},\end{cases}$ 即 $-2<a<2$ 且 $a\neq-\sqrt{3}$. 利用中点知识, 易得 $\alpha_1+\beta_1=2x_1=\dfrac{\pi}{2}$, $\alpha_2+\beta_2=2x_2=\dfrac{7}{3}\pi$, 即 $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{3}$ 或 $\alpha+\beta=\dfrac{7\pi}{3}$.

71. 就实数 a 的取值范围, 讨论关于 x 的方程 $\cos 2x+2\sin x+2a-3=0$ 在 $[0,2\pi]$ 内解的情况. 解原方程即 $\sin^2 x-\sin x=a-1$, 配方, 得 $(\sin x-\dfrac{1}{2})^2=a-\dfrac{3}{4}$. 令 $y_1=(\sin x-\dfrac{1}{2})^2$, $y_2=a-\dfrac{3}{4}$. 观察图 2, 得: (1)

当 $a-\frac{3}{4}>\frac{9}{4}$ 或 $a-\frac{3}{4}<0$, 即 $a>3$ 或 $a<\frac{3}{4}$ 时, 方程无解. (2) 当 $a-\frac{3}{4}=\frac{9}{4}$, 即 $a=3$ 时, 方程有一解 $x=\frac{3}{2}\pi$. (3) 当 $\frac{1}{4}<a<-\frac{3}{4}<\frac{9}{4}$ 或 $a-\frac{3}{4}=0$, 即 $1<a<3$ 或 $a=\frac{3}{4}$ 时, 方程有两解. (4) 当 $a-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$, 即 $a=1$ 时, 方程有三解: $x=0,\frac{\pi}{2},\pi$. (5) 当 $0<a-\frac{3}{4}<\frac{1}{4}$, 即 $\frac{3}{4}<a<1$ 时, 方程有四解. (图 2) 注意 (1)$x\in[0,2\pi]$ 时, 若以 $\sin x$ 为横轴, 则函数 $y=a\sin^2 x+b\sin x+c(a\neq 0)$ 的图象是在 [-1, 1] 上的一段曲线. (2) 本例的曲线 y_1 的对称轴是固定的. 如果对称轴不定, 问题的讨论就比较复杂. 但就问题的实质而言, 方程 $a\sin^2 x+b\sin x+c=0(a\neq 0)$ 的讨论, 也就是对一元二次方程 $at^2+bt+c=0(a\neq 0)$ 在区间 [-1, 1] 上解的讨论. 读者可参看第一章的例题. 【训练题】(一) 最简单的三角方程

72. 若关于 x 的方程 $\sin x=2a-1$ 有解, 则 a 的取值范围是 ()

A. $0<a<1$　B. $a<0$ 或 $a>1$　C. $a\leq 0$ 或 $a\geq 1$　D. $0\leq a\leq 1$

73. 满足 $\cos(2x+45^\circ)=\sin(30^\circ-x)$ 的最小正角是 ()

A. 5°　B. 15°　C. 30°　D. 37.5°

74. 记方程 $\cos 2x=1$ 的解集为 M, 方程 $\sin 4x=0$ 的解集为 P, 则 M 与 P 的关系是 ()

A. $M\subset P$　B. $M\supset P$　C. $M=P$　D. $M\not\subset P$ 且 $M\not\supset P$

75. 方程 $\cos x^2=1$ 的解集是 ()

A. $\{x|x=2k\pi,k\in\mathbf{Z}\}$　B. $\{x|x=\pm\sqrt{2k\pi},k\in\mathbf{Z}\}$　C. $\{x|x=\pm\sqrt{2k\pi},k\in\mathbf{N}\}$　D. $\{x|x=\pm\sqrt{2k\pi},k\in\mathbf{N}\}\cup\{0\}$

76. 方程 $\sin^2 x=\cos^2 x$ 的解集是 ()

A. $\{x|x=2k\pi+\frac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\}$　B. $\{x|x=k\pi+\frac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\}$　C. $\{x|x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\}$　D. $\{x|x=\frac{k\pi}{4}+\frac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\}$

I56. 方程 $\sqrt{1-\sin^2 x}=\sin x$ 的解集是 ()

A. $\{x|x=k\pi+(-1)^k\frac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\}$　B. $\{x|x=k\pi+\frac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\}$　C. $\{x|x=k\pi\pm\frac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\}$　D. $\{x|x=2k\pi\pm\frac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\}$

77. 方程 $\tan(2x+\frac{\pi}{3})=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 在 $[0,2\pi)$ 范围内的解的个数是 ()

A. 5　B. 4　C. 3　D. 2

78. (1) 若方程 $2\cos x=(\frac{1}{2})^a$ 无解, 则实数 a 的取值范围是__________. (2) 方程 $\sin x=-\cos\frac{2\pi}{5}$ 的解集是__________. (3) 方程 $\sin 2x\cdot\cot x=0$ 的解集是__________.

79. (1) 若函数 $f(x)=\sin(2x+5\theta)$ 的图象关于 y 轴对称, 则 θ 的值等于__________. (2) 若方程 $\sin x=a$ 在 $[\frac{2\pi}{3},\frac{5\pi}{3}]$ 中恰有两个不同的实数解, 则 a 的取值范围是__________.

80. (1) 若 $-6<\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}x<-2$, 求方程 $\cos\pi x=1$ 的解集. (2) 求方程 $\lg x=\cos 2x$ 解的个数. (二) 简单的三角方程

81. 方程 $\dfrac{\cos 2x}{1+\sin 2x}=0$ 的解集是 ()

A. $\{x|x=2k\pi\pm\dfrac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\}$　B. $\{x|x=k\pi\pm\dfrac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\}$　C. $\{x|x=k\pi+\dfrac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\}$　D. $\{x|x=\dfrac{k\pi}{2}+\dfrac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\}$

82. 方程 $\dfrac{2\sin x}{\sin 2x}=1$ 在 $-2\pi\le x\le 2\pi$ 范围内 ()

A. 有一个解　B. 有两个解　C. 有三个解　D. 无解

83. 下列方程中, 与方程 $\sin x=\cos x$ 的解集相同的是 ()

A. $\sin 2x=2\sin^2 x$　B. $\cos x=\sqrt{1-\cos^2 x}$　C. $\sin^2 x=\cos^2 x$　D. $\dfrac{\cos 2x}{\sin x+\cos x}=0$

84. 写出下列方程的解集: (1)$\lg_2 tgx=1+\log_2\sin x$:__________. (2)$\sin x+\sqrt{3}\cos x=2$:__________. (3)$\sin x-\sqrt{3}\cos x=a$, $|a|\le 2$:__________. (4)$\cos(x+\dfrac{2\pi}{3})\cos(x+\dfrac{\pi}{3})=-\dfrac{1}{4}$:__________. (5)$\cos^2(\dfrac{x-30^\circ}{2})+\cos^2(\dfrac{x+30^\circ}{2})=1$:__________. (6)$\sin x\cos x+1=\sin x+\cos x$:__________. (7)$\sqrt{2}\sin x=\sin 2x+\cos 2x$:__________. (8)$\sin(x-\dfrac{\pi}{6})\sin(x+\dfrac{\pi}{6})=\dfrac{1}{2}$:__________.

85. 解下列方程: (1)$\sin 3x-\sin 2x+\sin x=0$. (2)$\cos 2x\cos 3x=\cos x\cos 4x$. (3)$\sin 4x\cos 3x=\sin 6x\cos x$. (4)$\sin 5x-\sin 3x=\sqrt{2}\cos 4x$. (5)$\sin x+\sin 2x+\sin 3x=1+\cos x+\cos 2x$.

86. 若方程 $\sin x+\cos x=m(m\in\mathbf{R})$ 在 $0\le x\le\pi$ 范围内有两个不同的实数解, 则 ()

A. $-1\le m\le\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　B. $-1<m\le 1$ 或 $m=\sqrt{2}$　C. $1\le m<\sqrt{2}$　D. $-\sqrt{2}<m<\sqrt{2}$

87. 方程 $\sin^2 x+2\sin x-a=0$ 有解的条件为 ()

A. $a\in\mathbf{R}$　B. $a\in[-1,3]$　C. $a\in[-1,\infty)$　D. $a\in(-\infty,3]$

88. 若方程 $\cos^2 x-|\sin x|+1=0$ 在 $-\pi<x<\pi$ 范围内的解之和是 p, 解之积是 q, 则下列结论正确的是 ()

A. $p=-1$　B. $p=0$　C. $q=1$　D. $q=2$

89. 设 $f(x)=\cos(x-a)+\sin(x+a)$ 是偶函数, 求 a 的值.

90. 解下列方程: (1)$8\sin^2 x=3\sin 2x-1$. (2)$(\sin x+\cos x)^2=2\cos 2x$.

91. 解下列方程: (1)$\dfrac{1+\tan x}{1-\tan x}=1+\sin 2x$. (2)$\tan(\dfrac{\pi}{3}+x)+\tan(\dfrac{\pi}{6}-x)=\dfrac{4}{\sqrt{3}}$.

92. 解下列方程: (1)$\sin x+\cos x+\sin x\cos x=1$. (2)$\sin 2x-12(\sin x-\cos x)+12=0$. (3)$\sqrt{2}(\sin x+\cos x)=\tan x+\cot x$. (4)$\sin x+\cos x+\tan x+\cot x+\sec x+\csc x+2=0$.

93. (1) 已知方程 $2x^2-4x\sin\theta+3\cos\theta=0(0\le\theta\le\pi)$ 有相等的实根, 求 θ 的值, 并解此方程. (2) 已知方程 $x^2-(\sin\alpha+\cos\alpha)x+\sin^2\alpha-\sin\alpha\cos\alpha-1=0$ 有两个相等的实根, 求实数 α 和相成的 x 的值. (3) 已知方程 $x^2-4x\cos 2\theta+2=0$ 和方程 $2x^2+4x\sin 2\theta-1=0$ 有—根互为倒数, 求角 θ 的值 $(0<\theta<\pi)$.

94. (1) 已知关于 x 的方程 $\sin^2 x+\cos x+a=0$ 有解, 求实数 a 的取值范围. (2) 已知 $\cos^2 x-\sin x+a=0$ 在 $0<x\leq\frac{\pi}{2}$ 范围内有解, 求实数 a 的取值范围. (3) 求实数 k 的取值范围, 使关于 x 的方程 $\sin^2 x-\sin x+k=0$ 在 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 上, ① 无解; ② 恰有一解; ③ 有两解.

95. (1) 若关于 x 的方程 $\cos 2x-\sin x+1+m=0$ 有解, 求实数 m 的取值范围. I(2) 若关于 x 的方程 $\sin^2 x+4\sin x\cos x-2\cos^2 x=a$ 恒有实数解, 求实数 a 的取值范围.

96. 将下列各组数从小到大排列: (1)$\frac{1}{2},\sin\frac{1}{2},\arcsin\frac{1}{2}$. (2)$\frac{1}{3},\cos\frac{1}{3},\arccos\frac{1}{3}$. (3)$\arcsin\frac{1}{4},\arctan\sqrt{5},\arccos(-\frac{1}{3})$.

97. (1) 已知 $0<x<1$, 求证: $2\arctan\frac{1+x}{1-x}+\arcsin\frac{1-x^2}{1+x^2}=\pi$. (2) 已知 $a,b,c>0$, 求证: 若 $\arctan a+\arctan b+\arctan c=\pi$, 则 $a+b+c=abc$, 反过来也成立.

98. (1) 画出函数 $y=\arctan x+\arctan\frac{1-x}{1+x}$ 的图象. (2) 在不同坐标系内分别画出 $y=\arcsin(\sin x)(-\frac{\pi}{2}\leq x\leq\frac{3\pi}{2})$ 和 $y=\arcsin(\sin x)(x\in\mathbf{R})$ 的图象.

99. 解下列方程: (1)$x=\arcsin(\sin 2x)$. (2)$\cos(\pi\sin x)=\sin(\pi\cos x)(0\leq\pi<2\pi)$. (3)$x^2+2x\cos(xy)+1=0(x,y\in\mathbf{R})$.

100. 已知 α,β 是关于 x 的方程 $a\cos x+b\sin x=c$ 的两个实根 $(a^2+b^2\neq 0,\ a\neq 2k\pi+\beta,\ k\in\mathbf{Z})$, 求证 $\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{c^2}{a^2+b^2}$.

101. 已知 $\triangle ABC$ 的两内角 A,B 满足方程 $8\sin^2 x+3\sin 2x-4=0$, 且 $A>B$, 求此三角形三边长之比.

102. 解方程 $\tan(x+\frac{\pi}{4})+\tan(x-\frac{\pi}{4})=2\cot x$.

103. 已知关于 x 的方程 $x=a\sin x+b(0<a<1,\ b\in\mathbf{R})$ 有实根, 求证: 该方程只有一个实根.

104. (1) 已知方程 $\sin^2 x+3a^2\cos x-2a^2(3a-2)-1=0$ 有实数解, 求实数 a 的取值范围. (2) 已知关于 x 的方程 $2\cos 2x+4(a-1)\sin x-4a+1=0$ 在 $0\leq x\leq 2\pi$ 范围内有相异两个实根, 求 a 的取值范围.

105. 已知关于 x 的方程 $\cos 2x-2(2a+1)\cos x+2a^2+2a+1=0$ 在 $[0,2\pi)$ 范围内有两个不同的解, 求实数 a 的取位范围. .