

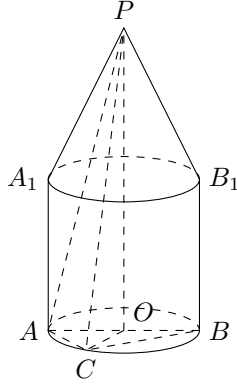
A. 命题 P 真, 命题 Q 真

B. 命题 P 真, 命题 Q 假

C. 命题 P 假, 命题 Q 真

D. 命题 P 假, 命题 Q 假

17. 如图, 空间几何体由两部分构成, 上部是一个底面半径为 1, 高为 2 的圆锥, 下部是一个底面半径为 1, 高为 2 的圆柱. 圆锥和圆柱的轴在同一直线上, 圆锥的下底面与圆柱的上底面重合. 点 P 是圆锥的顶点, AB 是圆柱下底面的一条直径, AA_1 、 BB_1 是圆柱的两条母线. C 是弧 AB 的中点.



(1) 求异面直线 PA_1 与 BC 所成的角的大小;

(2) 求点 B_1 到平面 PAC 的距离.

18. 已知 α, λ 是实常数, $f(x) = \begin{vmatrix} \lambda \cos x \sin(x - \alpha) \\ \sin(x + \alpha) \cos x \end{vmatrix}$.

(1) 当 $\lambda = 1, \alpha = \frac{\pi}{3}$ 时, 求函数 $y = f(x)$ 的最小正周期、单调增区间与最大值;

(2) 是否存在 λ , 使得 $f(x)$ 是与 α 有关的常数函数 (即 $f(x)$ 的值与 x 的取值无关)? 若存在, 求出所有满足条件的 λ ; 若不存在, 说明理由.

19. 已知 a 是实常数, $a > 0, f(x) = ax - 1 + \frac{1}{x^2}$.

(1) 当 $a = 2$ 时, 判断函数 $y = f(x)$ 在区间 $[1, +\infty)$ 上的单调性, 并说明理由;

(2) 写出一个 a 的值, 使得 $f(x) = 0$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上有至少两个不同的解, 并严格证明你的结论.

20. 设抛物线 Γ 的方程为 $y^2 = 2px$, 其中常数 $p > 0$. F 是抛物线 Γ 的焦点.

(1) 若直线 $x = 3$ 被抛物线 Γ 所截得的弦长为 6, 求 p 的值;

(2) 设 A 是点 F 关于顶点 O 的对称点. P 是抛物线 Γ 上的动点, 求 $\frac{|PA|}{|PF|}$ 的最大值;

(3) 设 $p = 2, l_1, l_2$ 是两条互相垂直, 且均经过点 F 的直线. l_1 与抛物线 Γ 交于点 A, B, l_2 与抛物线交于点 C, D . 若点 G 满足 $4\vec{FG} = \vec{FA} + \vec{FB} + \vec{FC} + \vec{FD}$, 求点 G 的轨迹方程.

21. 设各项均为整数的无穷数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1 = 1$, 且对所有 $n \in \mathbb{N}^*$, 均成立 $|a_{n+1} - a_n| = n$.

(1) 写出 a_4 的所有可能值 (不需要写计算过程);

(2) 若 $\{a_{2n-1}\}$ 是公差为 1 的等差数列, 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

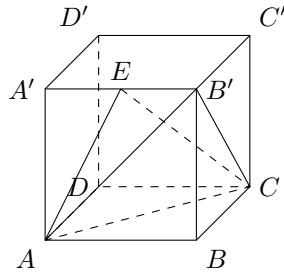
(3) 证明: 存在满足条件的数列 $\{a_n\}$, 使得在该数列中, 有无穷多项为 2019.

22. 设 $m \in \mathbb{R}$. 已知集合 $A = \{2, 3\}, B = \{1, m\}$. 若 $4 - m \in A$, 则 $m =$ _____.

37. 在 $\triangle ABC$ 中, $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, 对于下面两个说法: ① 对于任意 $\triangle ABC$, 以 $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}$ 为三边的三角形存在, 且总是一个锐角三角形; ② 存在一个 $\triangle ABC$, 以 $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ 为三边的三角形是一个钝角三角形. 下面判断正确的是 ().

- A. ①正确, ②错误
B. ①错误, ②正确
C. ①正确, ②正确
D. ①错误, ②错误

38. 如图, 在棱长为 2 的正方体 $ABCD - A'B'C'D'$ 中, E 为 AB 的中点.



- (1) 求证: 直线 AE 平行于平面 $CC'D'D$;
(2) 求点 E 到平面 $AB'C$ 的距离.

39. 经济订货批量模型, 是目前大多数工厂、企业等最常采用的订货方式, 即某种物资在单位时间的需求量为某常数, 经过某段时间后, 存储量消耗下降到零, 此时开始订货并随即到货, 然后开始下一个存储周期. 该模型适用于整批间隔进货、不允许缺货的存储问题. 具体如下:

年存储成本费 T (元) 关于每次订货 x (单位: 吨) 的函数关系为 $T(x) = \frac{Bx}{2} + \frac{AC}{x}$, 其中 A 为年需求量, B 为每单位物资的年存储费, C 为每次订货费.

某化工厂需用甲醇作为原料, 年需求量为 6000 吨, 每吨存储费为 120 元/年, 每次订货费为 2500 元. (1) 若该化工厂每次订购 300 吨甲醇, 求年存储成本费;

(2) 每次需订购多少吨甲醇, 可使该化工厂年存储成本费最少? 最少费用为多少?

40. 已知函数 $f(x) = \sin x$.

- (1) 设 $a \in \mathbf{R}$, 判断函数 $g(x) = a \cdot f(x) + f(x + \frac{\pi}{2})$ 的奇偶性, 并说明理由;
(2) 设函数 $F(x) = 2f(x) - \sqrt{3}$. 对任意 $b \in \mathbf{R}$, 求 $y = F(x)$ 在区间 $[b, b + 100\pi]$ 上零点个数的所有可能值.

41. 双曲线 $\Gamma: x^2 - \frac{y^2}{b^2} = 1 (b > 0)$.

- (1) 若 Γ 的一条渐近线方程为 $y = 2x$, 求 Γ 的方程;
(2) 设 F_1, F_2 是 Γ 的两个焦点, P 为 Γ 上一点, 且 $PF_1 \perp PF_2$, $\triangle PF_1F_2$ 的面积为 9, 求 b 的值;
(3) 已知斜率为 2 的直线与 Γ 交于 A, B 两点, 点 M 是线段 AB 的中点, 设点 M 的横坐标的集合为 Ω . 若 $\{x | x = 2n, n \in \mathbf{N}^*\} \subseteq \Omega$, 求正数 b 的取值范围.

42. 已知以 a_1 为首项的数列 $\{a_n\}$ 满足: $|a_{n+1}| = |a_n + 1| (n \in \mathbf{N}^*)$.

- (1) 当 $a_1 = -\frac{1}{3}$ 时, 且 $-1 < a_n < 0$, 写出 a_2, a_3 ;
(2) 若数列 $\{|a_n|\} (1 \leq n \leq 10, n \in \mathbf{N}^*)$ 是公差为 -1 的等差数列, 求 a_1 的取值范围;

(3) 设 $a_1 = 0$. 记 S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 给定正整数 $m \geq 4$, 求 S_{m-1} 的最小值, 并证明取到最小值的数列 $\{a_n\}$ 不唯一.

43. 函数 $y = 3 \sin(2x + \frac{\pi}{3})$ 的最小正周期 $T =$ _____.

44. 函数 $y = \lg x$ 的反函数是_____.

45. 已知集合 $P = \{x | (x+1)(x-3) < 0\}$, $Q = \{x | |x| > 2\}$, 则 $P \cap Q =$ _____.

46. 函数 $y = x + \frac{9}{x}$, $x \in (0, +\infty)$ 的最小值是_____.

47. 计算: $\lim_{n \rightarrow \infty} [\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + (\frac{1}{2})^n] =$ _____.

48. 记球 O_1 和 O_2 的半径、体积分别为 r_1 、 V_1 和 r_2 、 V_2 , 若 $\frac{V_1}{V_2} = \frac{8}{27}$, 则 $\frac{r_1}{r_2} =$ _____.

49. 若某线性方程组对应的增广矩阵是 $\begin{pmatrix} m & 4 & 2 \\ 1 & m & m \end{pmatrix}$, 且此方程组有唯一的一组解, 则实数 m 的取值范围是_____.

50. 若一个布袋中有大小、质地相同的三个黑球和两个白球, 从中任取两个球, 则取出的两球中恰是一个白球和一个黑球的概率是_____.

51. $(1+2x)^n$ 的二项展开式中, 含 x^3 项的系数等于含 x 项的系数的 8 倍, 则正整数 $n =$ _____.

52. 平面上三条直线 $x - 2y + 1 = 0$, $x - 1 = 0$, $x + ky = 0$, 如果这三条直线将平面划分为六个部分, 则实数 k 的取值组成的集合 $A =$ _____.

53. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{8} = 1$, 左、右焦点分别为 F_1 、 F_2 , 过点 F_2 作一直线与双曲线 C 的右支交于 P 、 Q 两点, 使得 $\angle F_1 P Q = 90^\circ$, 则 $\triangle F_1 P Q$ 的内切圆的半径 $r =$ _____.

54. 已知点 $B(4, 0)$, $C(2, 2)$, 平面直角坐标系上的动点 P 满足 $\vec{OP} = \lambda \cdot \vec{OB} + \mu \cdot \vec{OC}$ (其中 O 是坐标原点, 且 $1 < \lambda \leq a$, $1 < \mu \leq b$), 若动点 P 组成的区域的面积为 8, 则 $a + b$ 的最小值是_____.

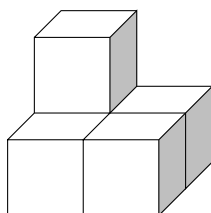
55. 若向量 $\vec{a} = (2, 0)$, $\vec{b} = (1, 1)$, 则下列结论中正确的是 ().

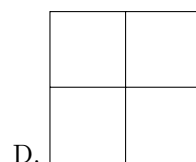
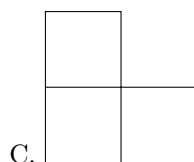
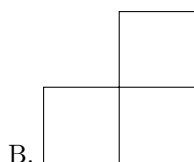
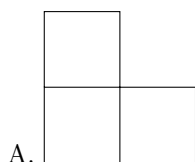
- A. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1$ B. $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ C. $(\vec{a} - \vec{b}) \perp \vec{b}$ D. $\vec{a} \parallel \vec{b}$

56. 椭圆的参数方程为 $\begin{cases} x = 5 \cos \theta, \\ y = 3 \sin \theta \end{cases}$ (θ 为参数), 则它的两个焦点坐标是 ().

- A. $(\pm 4, 0)$ B. $(0, \pm 4)$ C. $(\pm 5, 0)$ D. $(0, \pm 3)$

57. 如图几何体是由五个相同正方体叠成的, 其三视图中的左视图序号是 ().





58. 定义 $F(a, b) = \begin{cases} a, & a \leq b, \\ b, & a > b, \end{cases}$ 已知函数 $f(x)$ 、 $g(x)$ 定义域都是 \mathbf{R} , 给出下列命题:

- (1) 若 $f(x)$ 、 $g(x)$ 都是奇函数, 则函数 $F(f(x), g(x))$ 为奇函数;
- (2) 若 $f(x)$ 、 $g(x)$ 都是减函数, 则函数 $F(f(x), g(x))$ 为减函数;
- (3) 若 $f_{\min}(x) = m$, $g_{\min}(x) = n$, 则 $F_{\min}(f(x), g(x)) = F(m, n)$;
- (4) 若 $f(x)$ 、 $g(x)$ 都是周期函数, 则函数 $F(f(x), g(x))$ 是周期函数.

其中正确命题的个数为 ().

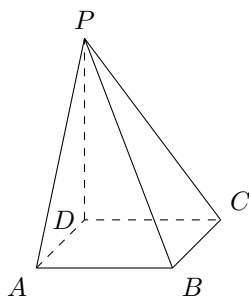
A. 1 个

B. 2 个

C. 3 个

D. 4 个

59. 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是边长为 6 的正方形, $PD \perp$ 平面 $ABCD$, $PD = 8$.



(1) 求 PB 与平面 $ABCD$ 所成角的大小;

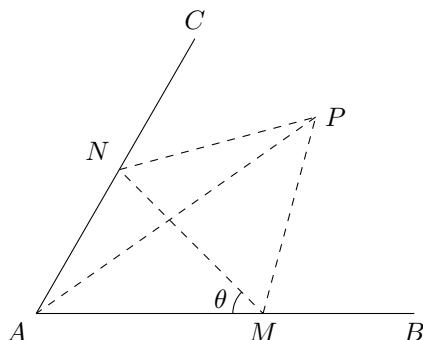
(2) 求异面直线 PB 与 DC 所成角的大小.

60. 复数 $z = (\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i)^2$ 是一元二次方程 $mx^2 + nx + 1 = 0 (m, n \in \mathbf{R})$ 的一个根.

(1) 求 m 和 n 的值;

(2) 若 $(m + ni)\bar{u} + u = z (u \in \mathbf{C})$, 求 u .

61. 如图, 经过村庄 A 有两条夹角为 60° 的公路 AB 、 AC , 根据规划拟在两条公路之间的区域内建一工厂 P , 分别在两条公路边上建两个仓库 M 、 N (异于村庄 A), 要求 $PM = PN = MN = 2$ (单位: 千米). 记 $\angle MN = \theta$.



(1) 将 AN 、 AM 用含 θ 的关系式表示出来;

(2) 如何设计 (即 AN 、 AM 为多长时), 使得工厂产生的噪声对居民的影响最小 (即工厂与村庄的距离 AP 最大)?

62. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 的左、右焦点分别为 F_1 、 F_2 .

(1) 点 P 在椭圆 C 上运动 (点 P 不在 x 轴上), 设 F_2 关于 $\angle F_1PF_2$ 的外角平分线所在直线的对称点为 Q , 求 Q 的轨迹方程;

(2) 设 M 、 N 分别是曲线 C 上的两个不同点, 且点 M 在第一象限, 点 N 在第三象限, 若 $\overrightarrow{OM} + 2\overrightarrow{ON} = 2\overrightarrow{OF_1}$, O 为坐标原点, 求直线 MN 的斜率;

(3) 过点 $S(0, -\frac{1}{3})$ 的动直线 l 交曲线 C 于 A 、 B 两点, 在 y 轴上是否存在定点 T , 使以 AB 为直径的圆恒过这个点? 若存在, 求出点 T 的坐标; 若不存在, 请说明理由.

63. 已知无穷数列 $\{a_n\} (a_n \in \mathbf{Z})$ 的前 n 项和为 S_n , 记 S_1 、 S_2 、 \dots 、 S_n 中奇数的个数为 b_n .

(1) 若 $a_n = n$, 请写出数列 $\{b_n\}$ 的前 5 项;

(2) 求证: “ a_1 为奇数, $a_i (i = 2, 3, 4, \dots)$ 均为偶数” 是 “数列 $\{b_n\}$ 是单调递增数列” 的充分不必要条件;

(3) 若 $a_i = b_i, i = 1, 2, 3, \dots$, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

64. 函数 $f(x) = 3 \cos 2x + 1$ 的最小值为_____.

65. 函数 $f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{3+x}}$ 的定义域为_____.

66. 若集合 $A = \{2, 4, 6, 8\}$, $B = \{x | x^2 - 4x \leq 0\}$, 则 $A \cap B =$ _____.

67. 已知函数 $g(x)$ 的图像与函数 $f(x) = \log_2(3^x - 1)$ 的图像关于直线 $y = x$ 对称, 则 $g(3) =$ _____.

68. 设复数 $z = \begin{vmatrix} \cos \alpha & i \\ \sin \alpha & \sqrt{2} + i \end{vmatrix}$ (i 为虚数单位), 若 $|z| = \sqrt{2}$, 则 $\tan 2\alpha =$ _____.

69. 设 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 若 $b = 2\sqrt{3}$, $c = 8$, $A = 30^\circ$, 则 $\sin C =$ _____.

70. 已知点 $A(3, -2)$, 点 P 满足线性约束条件 $\begin{cases} x + 2 \geq 0, \\ y - 1 \leq 0, \\ x - 2y \leq 4, \end{cases}$ 设 O 为坐标原点, 则 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP}$ 的最大值为_____.

71. 若函数 $f(x) = \log_2(2^x + 1) + kx$ 是偶函数, 则 $k =$ _____.

72. 已知等边 $\triangle ABC$ 的边长为 $2\sqrt{3}$, 点 P 是其外接圆上的一个动点, 则 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ 的取值范围是_____.

73. 已知函数 $f(x) = \cos(2x - \frac{\pi}{6})$, 若对于任意的 $x_1 \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$, 总存在 $x_2 \in [m, n]$, 使得 $f(x_1) + f(x_2) = 0$, 则 $|m - n|$ 的最小值为_____.

74. 已知 AB 为单位圆 O 的一条弦, P 为单位圆 O 上的点, 若 $f(\lambda) = |\overrightarrow{AP} - \lambda \overrightarrow{AB}| (\lambda \in \mathbf{R})$ 的最小值为 m , 当点 P 在单位圆上运动时, m 的最大值为 $\frac{4}{3}$, 则线段 AB 长度为_____.

75. 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 3, a_{n+1} = 1 + a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_n$, 记 T_n 为数列 $\{\frac{1}{a_n}\}$ 的前 n 项和, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n =$ _____.

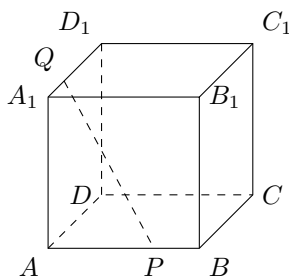
76. 若 O 为坐标原点, P 是直线 $x - y + 2 = 0$ 上的动点, 则 $|OP|$ 的最小值为 ().

- A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B. $\sqrt{2}$ C. $\sqrt{3}$ D. 2

77. 若 $|x - a| \leq 1$ 成立的一个充分不必要条件是 $1 \leq x \leq 2$, 则实数 a 的取值范围是 ().

- A. $1 \leq a \leq 2$ B. $a \geq 1$ C. $a \leq 2$ D. $a \geq 1$ 或 $a \leq 2$

78. 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, P 、 Q 两点分别从点 B 和点 A_1 出发, 以相同的速度在棱 BA 和 A_1D_1 上运动至点 A 和点 D_1 , 在运动过程中, 直线 PQ 与平面 $ABCD$ 所成角 θ 的变化范围为 ().



- A. $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}]$ B. $[\arctan \frac{\sqrt{2}}{2}, \arctan \sqrt{2}]$
C. $[\frac{\pi}{4}, \arctan \sqrt{2}]$ D. $[\arctan \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{2}]$

79. 已知函数 $f(x) = m \cdot 2^x + x^2 + nx$, 记集合 $A = \{x | f(x) = 0, x \in \mathbf{R}\}$, 集合 $B = \{x | f(f(x)) = 0, x \in \mathbf{R}\}$. 若 $A = B$, 且 A 、 B 都不是空集, 则 $m + n$ 的取值范围是 ().

- A. $[0, 4)$ B. $[-1, 4)$ C. $[-3, 5]$ D. $[0, 7)$

80. 已知函数 $f(x) = 2 \cos^2 x + 2\sqrt{3} \sin x \cos x$.

(1) 求 $f(x)$ 的最大值和最小正周期 T ;

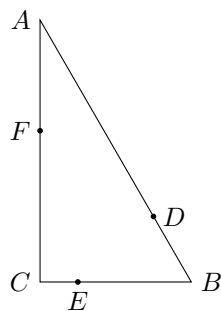
(2) 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A 、 B 、 C 所对的边分别为 a 、 b 、 c , 已知 $f(\frac{A}{2}) = 3$, 且 $a = 1$, 求 $\triangle ABC$ 面积的最大值.

81. 已知函数 $f(x) = a - \frac{4}{3^x + 1}$ (a 为实常数).

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的奇偶性, 并说明理由;

(2) 当 $f(x)$ 为奇函数时, 对任意的 $x \in [1, 5]$, 不等式 $f(x) \geq \frac{u}{3^x}$ 恒成立, 求实数 u 的最大值.

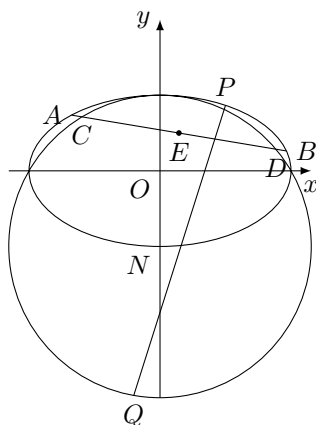
82. 如图, 某公园有三条观光大道 AB 、 BC 、 CA 围成直角三角形, 其中直角边 $BC = 200\text{m}$, 斜边 $AB = 400\text{m}$, 现有甲、乙、丙三位小朋友分别在 AB 、 BC 、 AC 大道上嬉戏, 所在位置分别记为点 D 、 E 、 F .



(1) 若甲乙都以每分钟 100m 的速度从点 B 出发在各自的大道上奔走, 到大道的另一端时即停, 乙比甲迟 2 分钟出发, 当乙出发 1 分钟后, 求此时甲乙两人之间的距离;

(2) 设 $\angle CEF = \theta$, 乙丙之间的距离是甲乙之间距离的 2 倍, 且 $\angle DEF = \frac{\pi}{3}$, 请将甲乙之间的距离 y 表示为 θ 的函数, 并求甲乙之间的最小距离.

83. 如图, 已知椭圆 $M: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 经过圆 $N: x^2 + (y+1)^2 = 4$ 与 x 轴的两个交点和与 y 轴正半轴的交点.



(1) 求椭圆 M 的方程;

(2) 若点 P 为椭圆 M 上的动点, 点 Q 为圆 N 上的动点, 求线段 PQ 长的最大值;

(3) 若不平行于坐标轴的直线 L 交椭圆 M 于 A 、 B 两点, 交圆 N 于 C 、 D 两点, 且满足 $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DB}$, 求证: 线段 AB 的中点 E 在定直线上.

84. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 若存在实常数 λ 及 $a (a \neq 0)$, 对任意 $x \in D$, 当 $x+a \in D$ 且 $x-a \in D$ 时, 都有 $f(x+a) + f(x-a) = \lambda f(x)$ 成立, 则称函数 $f(x)$ 具有性质 $M(\lambda, a)$.

(1) 判断函数 $f(x) = x^2$ 是否具有性质 $M(\lambda, a)$, 并说明理由;

(2) 若函数 $g(x) = \sin 2x + \sin x$ 具有性质 $M(\lambda, a)$, 求 λ 及 a 应满足的条件;

(3) 已知定义域为 \mathbf{R} 的函数 $y = h(x)$ 不存在零点, 且具有性质 $M(t + \frac{1}{t}, t)$ (其中 $t > 0, t \neq 1$), 记 $a_n = h(n) (n \in \mathbf{N}^*)$, 求证: 数列 $\{a_n\}$ 为等比数列的充要条件是 $\frac{a_2}{a_1} = t$ 或 $\frac{a_2}{a_1} = \frac{1}{t}$.

85. 已知 $\tan \alpha = \frac{1}{2}$, 则 $\tan 2\alpha =$ _____.

86. 不等式 $\frac{1}{x-1} > 1$ 的解集为_____.

87. 在 $(x - \frac{1}{\sqrt[3]{x}})^6$ 的二项展开式中, x^2 项的系数为_____.

88. 已知球的体积为 $\frac{4}{3}\pi$, 则该球的左视图所表示图形的面积为_____.

89. 已知圆的方程为 $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0$, 则圆心到直线 $l: 3x + 4y + 4 = 0$ 的距离 $d =$ _____.

90. 若关于 x 的实系数一元二次方程 $x^2 - bx + c = 0$ 的一根为 $1 - i$ (i 为虚数单位), 则 $b + c =$ _____.

91. 已知 $m \in \mathbf{R}$, 若直线 $l_1: mx + y + 1 = 0$ 与直线 $l_2: 9x + my + 2m + 3 = 0$ 平行, 则 $m =$ _____.

92. 已知实数 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x + 2y \geq 3, \\ 2x + y \geq 3, \\ x \geq 0, y \geq 0, \end{cases}$ 则 $z = x + y$ 的最小值是_____.

93. 设 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的奇函数, 当 $x > 0$ 时, $f(x) = a^x + b$ ($0 < a < 1, b \in \mathbf{R}$), 若 $f(x)$ 存在反函数, 则 b 的取值范围是_____.

94. 上海某高校哲学专业的 4 名研究生到指定的 4 所高级中学宣讲习近平新时代中国特色社会主义思想. 若他们每人都随机地从 4 所学校选择一所, 则 4 人中至少有 2 人选择到同一所学校的概率是_____ (结果用最简分数表示).

95. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $AB = 1, AC = 2, \angle A = 120^\circ$, 若点 P 是 $\triangle ABC$ 所在平面上一点, 且满足 $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \lambda \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{CP} = -1$, 则实数 λ 的值为_____.

96. 已知定义在 \mathbf{R} 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+1) = 2f(x) + 1$, 当 $x \in [0, 1)$ 时, $f(x) = x^3$. 设 $f(x)$ 在区间 $[n, n+1)$ ($n \in \mathbf{N}^*$) 上的最小值为 a_n , 若存在 $n \in \mathbf{N}^*$, 使得 $\lambda(a_n + 1) < 2n - 7$ 成立, 则实数 λ 的取值范围是_____.

97. 下列以 t 为参数的参数方程中, 其表示的曲线与方程 $xy = 1$ 表示的曲线完全一致的是 ().

A. $\begin{cases} x = t^{\frac{1}{2}}, \\ y = t^{-\frac{1}{2}} \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = |t|, \\ y = \frac{1}{|t|} \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sec t \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = \tan t, \\ y = \cot t \end{cases}$

98. 已知函数 $f(x) = \sin 2x, x \in [a, b]$, 则 “ $b - a \geq \frac{\pi}{2}$ ” 是 “ $f(x)$ 的值域为 $[-1, 1]$ ” 的 () 条件

A. 充分不必要 B. 必要不充分 C. 充要 D. 既不充分也不必要

99. 某高校举行科普知识竞赛, 所有参赛的 500 名选手成绩的平均数为 82, 方差为 0.82, 则下列四个数据中不可能是参赛选手成绩的是 ().

A. 60 B. 70 C. 80 D. 100

100. 设数列 $\{a_n\}$, 若存在常数 t , 对任意小的正数 s , 总存在正整数 n_0 , 当 $n \geq n_0$ 时, $|a_n - t| < s$, 则数列 $\{a_n\}$ 为收敛数列. 下列关于收敛数列说法正确的是 ().

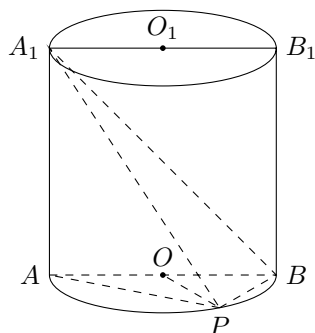
A. 若等比数列 $\{a_n\}$ 是收敛数列, 则公比 $q \in (0, 1)$

B. 等差数列不可能是收敛数列

C. 设公差不为 0 的等差数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和为 $S_n (S_n \neq 0)$, 则数列 $\{\frac{1}{S_n}\}$ 一定是收敛数列

D. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 满足 $a_1 = 1, S_{n+1} = a_n + 1$, 则数列 $\{a_n\}$ 是收敛数列

101. 如图, 已知 AB 为圆柱 OO_1 的底面圆 O 的一条直径, P 为圆周上的一点, $OA = 2, \angle BOP = 60^\circ$, 圆柱 OO_1 的表面积为 24π .



(1) 求三棱锥 $A_1 - APB$ 的体积;

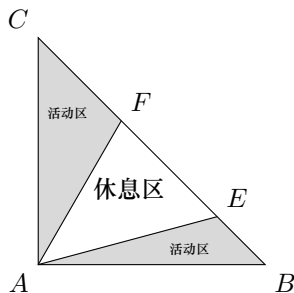
(2) 求直线 AP 与平面 A_1PB 所成的角的大小.

102. 已知 a 为实数, 函数 $f(x) = x|x - a| - a, x \in \mathbf{R}$.

(1) 当 $a = 2$ 时, 求函数 $f(x)$ 的单调递增区间;

(2) 若对任意 $x \in (0, 1), f(x) < 0$ 恒成立, 求 a 的取值范围.

103. 某动物园喜迎虎年的到来, 拟用一块形如直角三角形 ABC 的地块建造小老虎的休息区和活动区. 如图, $\angle BAC = 90^\circ, AB = AC = 20$ (单位: 米), E, F 为 BC 上的两点, 且 $\angle EAF = 45^\circ, \triangle AEF$ 区域为休息区, $\triangle ABE$ 和 $\triangle ACF$ 区域均为活动区. 设 $\angle EAB = \alpha (0 < \alpha < 45^\circ)$.



(1) 求 AE, AF 的长; (用 α 的代数式表示) (2) 为了使小老虎能健康成长, 要求所建造的活动区面积尽可能大 (即休息区尽可能小). 当 α 为多少时, 活动区的面积最大? 最大面积活动区为多少?

104. 在平面直角坐标系中, 已知点 $A(0, \sqrt{2}), B(0, -\sqrt{2})$, 动点 $C(x, y)$ 关于直线 $y = x$ 的对称点为 D , 且 $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}x^2$, 动点 C 的轨迹为曲线 E .

- (1) 求曲线 E 的方程;
- (2) 已知动点 P 在曲线 E 上, 点 Q 在直线 $y = 2\sqrt{2}$ 上, 且 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = 0$, 求线段 PQ 长的最小值;
- (3) 过点 $(-\sqrt{2}, 0)$ 且不垂直于 x 轴的直线交曲线 E 于 M 、 N 两点, 点 M 关于 x 轴的对称点为 M' , 试问: 在 x 轴上是否存在一定点 T , 使得 M' 、 N 、 T 三点共线? 若存在, 求出定点 T 的坐标; 若不存在, 说明理由.
105. 对于数列 $\{a_n\}$, 记 $V(n) = |a_2 - a_1| + |a_3 - a_2| + \cdots + |a_n - a_{n-1}| (n > 1, n \in \mathbf{N}^*)$.
- (1) 若数列 $\{a_n\}$ 通项公式为: $a_n = \frac{1 + (-1)^n}{2} (n \in \mathbf{N}^*)$, 求 $V(5)$;
- (2) 若数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1 = a$, $a_n = b$, 且 $a > b$, 求证: $V(n) = a - b$ 的充分必要条件是 $a_{i+1} \leq a_i (i = 1, 2, \cdots, n-1)$;
- (3) 已知 $V(2022) = 2022$, 若 $y_t = \frac{1}{t}(a_1 + a_2 + \cdots + a_t)$, $t = 1, 2, \cdots, 2022$, 求 $|y_2 - y_1| + |y_3 - y_2| + \cdots + |y_{2022} - y_{2021}|$ 的最大值.
106. 已知集合 $A = \{1, 3, m\}$, $B = \{3, 5\}$, 且 $B \subseteq A$, 则实数 m 的值是_____.
107. 函数 $f(x) = \sqrt{1 - \frac{2}{x}}$ 的定义域是_____.
108. 函数 $y = 2^x (x \geq 2)$ 的反函数是_____.
109. 如果圆锥的底面积为 π , 母线长为 2, 那么该圆锥的高为_____.
110. 二项式 $(\sqrt[3]{x} - \frac{2}{x})^8$ 的展开式中的常数项为_____.
111. 某班从 4 位男生和 3 位女生志愿者选出 4 人参加校运会的点名签到工作, 则选出的志愿者中既有男生又有女生的概率是_____ (结果用最简分数表示).
112. 在复平面内, 三点 A 、 B 、 C 分别对应复数 z_A 、 z_B 、 z_C , 若 $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = 1 + \frac{4}{3}i$, 则 $\triangle ABC$ 的三边长之比为_____.
113. 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \frac{\pi}{6})$, $\omega > 0$, 若函数 $f(x)$ 满足 $f(x) = f(x + 12)$, $x \in \mathbf{R}$ 恒成立, 且在“任意两个相邻奇数所形成的闭区间”内总存在至少两个零点, 则 ω 的最小值为_____.
114. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A 、 B 、 C 所对的边分别为 a 、 b 、 c , 如果对任意的实数 λ , $|\overrightarrow{BA} - \lambda \overrightarrow{BC}| \geq |\overrightarrow{BC}|$ 恒成立, 则 $\frac{c}{b} + \frac{b}{c}$ 的最大值是_____.
115. 在边长为 1 的正方形 $ABCD$ 中, P 、 Q 分别为边 BC 、 CD 上的动点, 如果 $\triangle PCQ$ 的周长为定值 2, 那么 $\triangle PAQ$ 的外接圆直径的最小值为_____.
116. 已知平面直角坐标系中两点 $A(a_1, a_2)$ 、 $B(b_1, b_2)$, 有 $S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2}|a_1 b_2 - a_2 b_1|$. 设 (x_1, y_1) 、 (x_2, y_2) 、 (x_3, y_3) 是平面曲线 $x^2 + y^2 = 2x - 4y$ 上任意三点, 则 $T = x_1 y_2 - x_2 y_1 + x_2 y_3 - x_3 y_2$ 的最大值为_____.
117. 对实数 $x \in \mathbf{R}$, 函数 $f(x)$ 满足: $f(x+1) = \sqrt{f(x) - f^2(x)} + \frac{1}{2}$, $a_n = f^2(n) - f(n)$, 数列 $\{a_n\}$ 的前 15 项和为 $-\frac{31}{16}$, 数列 $\{c_n\}$ 满足 $c_n + c_{n+1} = [f(2019)]^n$, 若数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 S_n 的极限存在, 则 $c_1 =$ _____.

118. 关于 x 、 y 的二元一次方程组 $\begin{cases} 3x + 4y = 1, \\ x - 3y = 10 \end{cases}$ 的增广矩阵为 ().

- A. $\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & -3 & 10 \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & -3 & -10 \end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & -3 & 10 \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 10 \end{pmatrix}$

119. 已知函数 $f(x) = \cos(3x + \varphi)$ 满足 $f(x) \leq f(1)$ 恒成立, 则 ().

- A. 函数 $f(x-1)$ 一定是奇函数 B. 函数 $f(x+1)$ 一定是奇函数
C. 函数 $f(x-1)$ 一定是偶函数 D. 函数 $f(x+1)$ 一定是偶函数

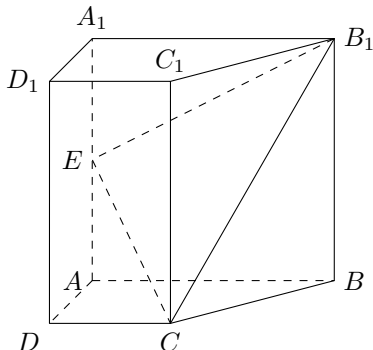
120. 如果一个几何体绕着一条直线旋转 θ 角与原几何体重合, 其中 $0^\circ < \theta \leq 180^\circ$, 称该直线为该几何体的一条旋转轴. 正四面体的不同旋转轴有 () 条.

- A. 3 B. 4 C. 6 D. 7

121. 已知点 P 为椭圆 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$ 上的任意一点, 点 F_1 、 F_2 分别为该椭圆的上下焦点, 设 $\alpha = \angle PF_1F_2$, $\beta = \angle PF_2F_1$, 则 $\sin \alpha + \sin \beta$ 的最大值为 ().

- A. $\frac{3\sqrt{7}}{7}$ B. $\frac{4\sqrt{7}}{7}$ C. $\frac{8}{9}$ D. $\frac{3}{2}$

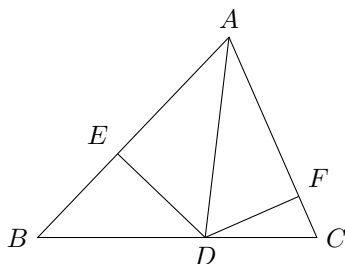
122. 如图, 四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 侧棱 $AA_1 \perp$ 底面 $ABCD$, $AB \parallel CD$, $AB \perp AD$, $AD = DC = 1$, $AA_1 = AB = 2$, E 为棱 AA_1 的中点.



(1) 求二面角 $B_1 - CE - C_1$ 的正弦值;

(2) 设点 M 为线段 C_1E 上, 且直线 AM 与平面 ADD_1A_1 所成角正弦值为 $\frac{\sqrt{2}}{6}$, 求线段 AM 的长.

123. 在锐角 $\triangle ABC$ 中, 已知 $\cos A = \frac{5}{13}$, $S_{\triangle ABC} = 6$, 若点 D 是线段 BC 上一点 (不含端点), 过 D 作 $DE \perp AB$ 于 E , $DF \perp AC$ 于 F .



- (1) 求 BC 的取值范围;
 (2) 问点 D 在何处时, $\triangle DEF$ 的面积最大, 最大值为多少?

124. 已知各项都不为零的无穷数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_{n+1}a_n + a_{n+1} - a_n = 0, n \in \mathbf{N}^*$.

- (1) 证明 $\{\frac{1}{a_n}\}$ 为等差数列, 并求 $a_1 = 1$ 时数列 $\{a_n\}$ 中的最大项;
 (2) 若 a_{2018} 为数列 $\{a_n\}$ 中的最小项, 求 a_1 的取值范围.

125. 已知曲线 $\Gamma: F(x, y) = 0$, 对坐标平面上任意一点 $P(x, y)$, 定义 $F[P] = F(x, y)$. 若两点 P, Q , 满足 $F[P] \cdot F[Q] > 0$, 称点 P, Q 在曲线 Γ 同侧; 若 $F[P] \cdot F[Q] < 0$, 称点 P, Q 在曲线 Γ 两侧.

(1) 直线 $l: kx - y = 0$ 过原点, 线段 AB 上所有点都在直线 l 同侧, 其中 $A(-1, 1), B(2, 3)$, 求直线 l 的倾斜角的取值范围;

(2) 已知曲线 $F(x, y) = (3x + 4y - 5) \cdot \sqrt{4 - x^2 - y^2} = 0$, O 为坐标原点, 求点集 $S = \{P | F[P] \cdot F[O] > 0\}$ 的面积;

(3) 记到点 $(0, 1)$ 与到 x 轴距离和为 5 的点的轨迹为曲线 C , 曲线 $\Gamma: F(x, y) = x^2 + y^2 - y - a = 0$, 若曲线 C 上总存在两点 M, N 在曲线 Γ 两侧, 求曲线 C 的方程与实数 a 的取值范围.

126. 设函数 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上有定义, 实数 a 和 b 满足 $1 \leq a < b$, 若 $f(x)$ 在区间 $(a, b]$ 上不存在最小值, 则称 $f(x)$ 在区间 $(a, b]$ 上具有性质 P .

- (1) 当 $f(x) = x^2 + cx$, 且 $f(x)$ 在区间 $(1, 2]$ 上具有性质 P , 求实数 c 的取值范围;
 (2) 已知 $f(x+1) = f(x) + 1 (x \geq 1)$, 且当 $1 \leq x < 2$ 时, $f(x) = 1 - x$, 判别 $f(x)$ 在区间 $(1, 4]$ 上是否具有性质 P ;
 (3) 若对于满足 $1 \leq a < b$ 的任意实数 a 和 b , $f(x)$ 在区间 $(a, b]$ 上具有性质 P , 且对于任意 $n \in \mathbf{N}^*$, 当 $x \in (n, n+1)$ 时, 有 $|f(n) - f(x)| + |f(x) - f(n+1)| = |f(n) - f(n+1)|$, 证明: 当 $x \geq 1$ 时, $f(2x) > f(x)$.

127. 在复平面内, 复数 $\frac{2}{1+i}$ 对应的点与原点的距离是_____.

128. 将参数方程 $\begin{cases} x = \cos \theta, \\ y = 2 \sin \theta \end{cases} (\theta \in [0, \pi])$ 化为普通方程, 所得方程是_____.

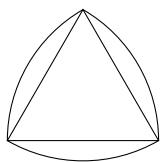
129. 已知向量 $\vec{a} = (1, 4, -5)$, $\vec{b} = (1, 1, 4)$, 则 \vec{a} 在 \vec{b} 方向上的投影是_____.

130. 若函数 $y = \tan 2x \cdot (2 \cos^2 x - 1)$ 的定义域是_____.

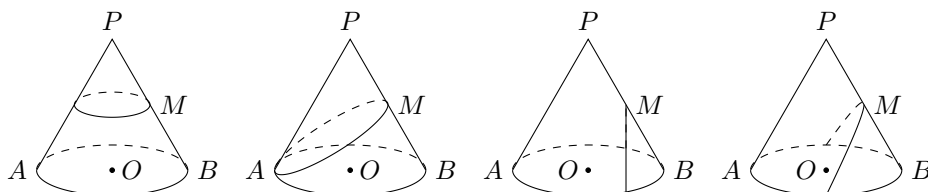
131. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_4 + a_8 = 16$, 则该数列前 11 项和 $S_{11} =$ _____.

132. 在 $(\sqrt[3]{x} + \frac{2}{x})^n$ 的二项展开式中, 所有项的系数之和为 81, 则其常数项为_____.

133. 在均匀分布的条件下, 某些概率问题可转化为几何图形的面积比来计算, 勒洛三角形是由德国机械工程专家勒洛首先发现, 作法为: 以等边三角形的每个顶点为圆心, 以边长为半径, 在另两个顶点间作一段弧, 三段弧围成的曲边三角形就是勒洛三角形, 在勒洛三角形中随机取一点, 此点取自正三角形的概率为_____.



134. 平面上整点 (横、纵坐标都为整数的点) 到直线 $y = \frac{5}{3}x + \frac{4}{5}$ 的距离的最小值是_____.
135. 设定义域为 \mathbf{R} 的函数 $f(x)$ 、 $g(x)$ 都有反函数, 且函数 $f(x-1)$ 和 $g^{-1}(x-3)$ 图像关于直线 $y=x$ 对称, 若 $g(5) = 2015$, 则 $f(4) =$ _____.
136. 在 $\triangle ABC$ 中, $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sqrt{3} \cos B}{b}$, 如果 $b = 2$, 则 $\triangle ABC$ 面积的最大值为_____.
137. 数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 2$, $a_2 = 7$, a_{n+2} 等于 $a_n \cdot a_{n+1}$ 的个位数, 则 $a_{2019} =$ _____.
138. 已知函数 $f(x)$ 满足: ① 对任意 $x \in (0, +\infty)$ 恒有 $f(2x) = 2f(x)$ 成立; ② $x \in (1, 2]$ 时, $f(x) = 2 - x$; 若 $f(a) = f(2020)$, 则满足条件的最小的正实数 a 是_____.
139. 给出下列命题, 其中正确的命题为 ().
- A. 若直线 a 和 b 共面, 直线 b 和 c 共面, 则 a 和 c 共面
 - B. 直线 a 与平面 α 不垂直, 则 a 与平面 α 内的所有直线都不垂直
 - C. 直线 a 与平面 α 不平行, 则 a 与平面 α 内的所有直线都不平行
 - D. 异面直线 a 、 b 不垂直, 则过 a 的任何平面与 b 都不垂直
140. 已知平面向量 \vec{OA} 、 \vec{OB} 、 \vec{OC} 为三个单位向量, 且 $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 0$, 若 $\vec{OC} = x\vec{OA} + y\vec{OB} (x, y \in \mathbf{R})$, 则 $x + y$ 的最大值为 ().
- A. 1 B. $\sqrt{2}$ C. $\sqrt{3}$ D. 2
141. 已知函数① $f(x) = 3 \ln x$; ② $f(x) = 3e^{\cos x}$; ③ $f(x) = 3e^x$; ④ $f(x) = 3 \cos x$; 其中对于 $f(x)$ 定义域内的任意一个自变量 x_1 都存在唯一一个自变量 x_2 , 使 $\sqrt{f(x_1)f(x_2)} = 3$ 成立的函数是 ().
- A. ③ B. ②③ C. ①②④ D. ④
142. 在圆锥 PO 中, 已知高 $PO = 2$, 底面圆的直径 $AB = 8$, M 为母线 PB 的中点. 根据圆锥曲线的定义, 下列四个图中的截面边界曲线分别为圆 (截面平行于底面)、椭圆 (椭圆长轴为线段 AM)、双曲线的一部分 (双曲线所在平面垂直于 AB) 及抛物线的一部分 (抛物线对称轴为 MO 所在直线), 下面四个命题:
- ① 圆的面积为 4π ; ② 椭圆的长轴为 $\sqrt{37}$; ③ 双曲线两渐近线的夹角为 $\arcsin \frac{3}{5}$; ④ 抛物线中焦点到准线的距离为 $\frac{8\sqrt{5}}{5}$ 中, 正确的个数为 ().



A. 1 个

B. 2 个

C. 3 个

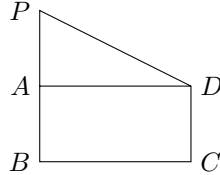
D. 4 个

143. 已知复数 $z_1 = \sin 2x + \lambda i$, $z_2 = m + (m - \sqrt{3} \cos 2x)i$ ($\lambda, m, x \in \mathbf{R}$), 且 $z_1 = z_2$.

(1) 若 $\lambda = 0$ 且 $0 < x < \pi$, 求 x 的值;

(2) 设 $\lambda = f(x)$, 求 $f(x)$ 的最小正周期和单调递减区间.

144. 如图, 在直角梯形 $PBCD$ 中, $PB \parallel DC$, $DC \perp BC$, $PB = BC = 2CD = 2$, 点 A 是 PB 的中点, 现沿 AD 将平面 PAD 折起, 设 $\angle PAB = \theta$.



(1) 当 θ 为直角时, 求异面直线 PC 与 BD 所成角的大小;

(2) 当 θ 为多少时, 三棱锥 $P-ABD$ 的体积为 $\frac{\sqrt{2}}{6}$.

145. 对于两个定义域相同的函数 $f(x)$ 、 $g(x)$, 若存在实数 m 、 n , 使 $h(x) = mf(x) + ng(x)$, 则称函数 $h(x)$ 是由“基函数 $f(x)$ 、 $g(x)$ ”生成的.

(1) $f(x) = x^2 + 3x$ 和 $g(x) = 3x + 4$ 生成一个偶函数 $h(x)$, 求 $h(2)$ 的值;

(2) 若 $h(x) = 2x^2 + 3x - 1$ 由 $f(x) = x^2 + ax$, $g(x) = x + b$ ($a, b \in \mathbf{R}$ 且 $ab \neq 0$) 生成, 求 $a + 2b$ 的取值范围.

146. 设抛物线 $y^2 = 4px$ ($p > 0$) 的准线与 x 轴的交点为 M , 过 M 作直线 l 交抛物线于 A 、 B 两点.

(1) 求线段 AB 中点的轨迹方程;

(2) 若线段 AB 的垂直平分线交对称轴于 $N(x_0, 0)$, 求 x_0 的取值范围;

(3) 若直线 l 的斜率依次取 $p, p^2, p^3, \dots, p^n, \dots$ 时, 线段 AB 的垂直平分线与对称轴的交点依次为 $N_1, N_2, N_3, \dots, N_n, \dots$, 当 $0 < p < 1$ 时, 求: $S = \frac{1}{|N_1 N_2|} + \frac{1}{|N_2 N_3|} + \frac{1}{|N_3 N_4|} + \dots + \frac{1}{|N_n N_{n+1}|} + \dots$ 的值.

147. 给定无穷数列 $\{a_n\}$, 若无穷数列 $\{b_n\}$ 满足: 对任意 $n \in \mathbf{N}^*$, 都有 $|b_n - a_n| \leq 1$, 则称 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ “接近”.

(1) 设 $\{a_n\}$ 是首项为 1, 公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列, $b_n = a_{n+1} + 1$, $n \in \mathbf{N}^*$, 判断数列 $\{b_n\}$ 是否与 $\{a_n\}$ 接近, 并说明理由;

(2) 设数列 $\{a_n\}$ 的前四项为: $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 4, a_4 = 8$, $\{b_n\}$ 是一个与 $\{a_n\}$ 接近的数列, 记集合 $M = \{x | x = b_i, i = 1, 2, 3, 4\}$, 求 M 中元素的个数 m 的所有可能值;

(3) 已知 $\{a_n\}$ 是公差为 d 的等差数列, 若存在数列 $\{b_n\}$ 满足: $\{b_n\}$ 与 $\{a_n\}$ 接近, 且在 $b_2 - b_1, b_3 - b_2, \dots, b_{201} - b_{200}$ 中至少有 100 个为正数, 求 d 的取值范围.

148. 已知复数 z 满足 $z(1 + i^{2020}) = 2 - 4i$ (其中, i 为虚数单位), 则 $z =$ _____.

149. 函数 $y = \arcsin(x + 1)$ 的定义域是_____.

150. 计算行列式的值, $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} =$ _____.

151. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的实轴与虚轴长度相等, 则 C 的渐近线方程是_____.

152. 已知无穷数列 $a_n = \frac{2}{(-3)^n}, n \in \mathbf{N}^*$, 则数列 $\{a_n\}$ 的各项和为_____.

153. 一个圆锥的表面积为 π , 母线长为 $\frac{5}{6}$, 则其底面半径为_____.

154. 某种微生物的日增长率为 r , 经过 n 天后其数量由 p_0 变化为 p , 并且满足方程 $p = p_0 e^{rn}$. 实验检测, 这种微生物经过一周数量由 2.58 个单位增长到 14.86 个单位, 则增长率 $r =$ _____(精确到 1%).

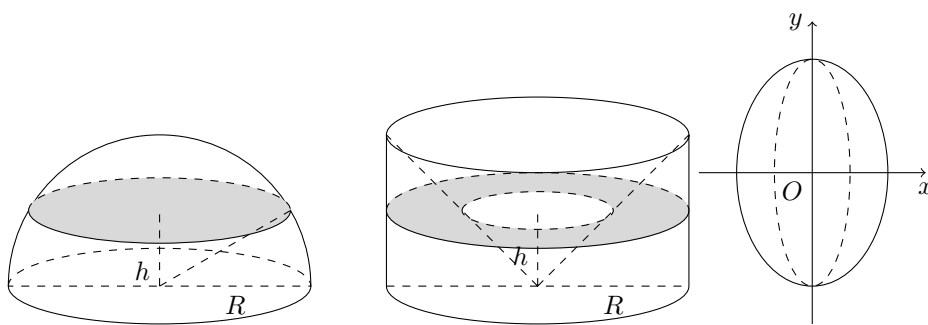
155. 已知 $(x - \frac{1}{2x})^n$ 的展开式的常数项为第 6 项, 则常数项为_____.

156. 某医院 ICU 从 3 名男医生和 2 名女医生中任选 2 位赴武汉抗疫, 则选出的 2 位医生中至少有 1 位女医生的概率是_____.

157. 已知方程 $x^2 + tx + 1 = 0 (t \in \mathbf{R})$ 的两个根是 x_1, x_2 , 若 $|x_1 - x_2| = 2\sqrt{2}$, 则 $t =$ _____.

158. 已知 O 是坐标原点, 点 $A(-1, 1)$, 若点 $M(x, y)$ 为平面区域 $\begin{cases} x + y \geq 2, \\ x \leq 1, \\ y \leq 2, \end{cases}$ 上的一个动点, 则 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OM}$ 的取值范围是_____.

159. 课本中介绍了应用祖暅原理推导棱锥体积公式的做法. 祖暅原理也可用来求旋转体的体积. 现介绍用祖暅原理求球体体积公式的做法: 可构造一个底面半径和高都与球半径相等的圆柱, 然后在圆柱内挖去一个以圆柱下底面圆心为顶点, 圆柱上底面为底面的圆锥, 用这样一个几何体与半球应用祖暅原理 (左图), 即可求得球的体积公式. 请研究和理解球的体积公式求法的基础上, 解答以下问题: 已知椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 1$, 将此椭圆绕 y 轴旋转一周后, 得一橄榄状的几何体 (右图), 其体积等于_____.



160. 抛物线 $y = 4x^2$ 的准线方程是 ().

A. $x = -2$

B. $x = -1$

C. $y = -\frac{1}{8}$

D. $y = -\frac{1}{16}$

161. 若函数 $f(x) = \sin x + a \cos x$ 的图像关于直线 $x = \frac{\pi}{4}$ 对称, 则 a 的值为 ().

A. 1

B. -1

C. $\sqrt{3}$

D. $-\sqrt{3}$

162. 已知 \vec{a}, \vec{b} 是平面内两个互相垂直的单位向量, 若向量 \vec{c} 满足 $(\vec{c} - \vec{a}) \cdot (\vec{c} - \vec{b}) = 0$, 则 $|\vec{c}|$ 的最大值是 ().
- A. 1 B. 2 C. $\sqrt{2}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$
163. 已知命题: “若 a, b 为异面直线, 平面 α 过直线 a 且与直线 b 平行, 则直线 b 与平面 α 的距离等于异面直线 a, b 之间的距离” 为真命题. 根据上述命题, 若 a, b 为异面直线, 且它们之间的距离为 d , 则空间中与 a, b 均异面且距离也均为 d 的直线 c 的条数为 ().
- A. 0 条 B. 1 条
C. 多于 1 条, 但为有限条 D. 无数多条
164. 如图, 在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $AB = 2AC = 2$, D 是 AB 的中点. (1) 若三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 的体积为 $3\sqrt{3}$, 求三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 的高;
(2) 若 $C_1C = 2$, 求二面角 $D - B_1C_1 - A_1$ 的大小.
165. 已知函数 $f(x) = \sqrt{2}\sin(\omega x + \varphi)$, $g(x) = \sqrt{2}\cos \omega x$, $\omega > 0$, $\varphi \in [0, \pi)$, 它们的最小正周期为 π .
(1) 若 $y = f(x)$ 是奇函数, 求 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上的公共递减区间 D ;
(2) 若 $h(x) = f(x) + g(x)$ 的一个零点为 $x = -\frac{\pi}{6}$, 求 $h(x)$ 的最大值.
166. 已知函数 $f(x) = ax + \log_2(2^x + 1)$, 其中 $a \in \mathbf{R}$.
(1) 根据 a 的不同取值, 讨论 $f(x)$ 的奇偶性, 并说明理由;
(2) 已知 $a > 0$, 函数 $f(x)$ 的反函数为 $f^{-1}(x)$, 若函数 $y = f(x) + f^{-1}(x)$ 在区间 $[1, 2]$ 上的最小值为 $1 + \log_2 3$, 求函数 $f(x)$ 在区间 $[1, 2]$ 上的最大值.
167. 设椭圆 $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右焦点为 $F(1, 0)$, 短轴的一个端点 B 到 F 的距离等于焦距. (1) 求椭圆 Γ 的标准方程;
(2) 设 C, D 是四条直线 $x = \pm a, y = \pm b$ 所围成的矩形在第一、第二象限的两个顶点, P 是椭圆 Γ 上任意一点, 若 $\vec{OP} = m\vec{OC} + n\vec{OD}$, 求证: $m^2 + n^2$ 为定值;
(3) 过点 F 的直线 l 与椭圆 Γ 交于不同的两点 M, N , 且满足 $\triangle BFM$ 与 $\triangle BFN$ 的面积比值为 2, 求直线 l 的方程.
168. 定义: 设 $\{a_n\}$ 是无穷数列, 若存在正整数 k 使得对任意 $n \in \mathbf{N}^*$, 均有 $a_{n+k} > a_n$ ($a_{n+k} < a_n$), 则称 $\{a_n\}$ 是近似递增 (减) 数列, 其中 k 叫近似递增 (减) 数列 $\{a_n\}$ 的间隔数.
(1) 若 $a_n = n + (-1)^n$, $\{a_n\}$ 是不是近似递增数列, 并说明理由;
(2) 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = \frac{1}{(-2)^{n-1}} + a$, 其前 n 项的和为 S_n , 若 2 是近似递增数列 $\{S_n\}$ 的间隔数, 求 a 的取值范围;
(3) 已知 $a_n = -\frac{n}{2} + \sin n$, 证明 $\{a_n\}$ 是近似递减数列, 并且 4 是它的最小间隔数.