1. “变”角. 所谓变角, 就是将角度进行恒等变换, 为解题作铺垫, 常用的变角类型有 $2\alpha=(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)$, $2\beta=(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)$, $\alpha=(\alpha+\beta)-\beta$, $\alpha=(\alpha+45^\circ)-45^\circ$, $\alpha=(m+1)\alpha-m\alpha$, 等等.

2. 已知 $\cos(\alpha+\beta)=\frac{4}{5}$, $\cos(\alpha-\beta)=-\frac{4}{5}$, 其中 $\alpha+\beta\in(\frac{7\pi}{4},2\pi)$, $\alpha-\beta\in(\frac{3\pi}{4},\pi)$, 求 $\cos 2\alpha$. 解' $\because \frac{7\pi}{4}<\alpha+\beta<2\pi$, $\frac{3\pi}{4}<\alpha-\beta<\pi$, $\therefore \sin(\alpha+\beta)=-\frac{3}{5}$, $\sin(\alpha-\beta)=\frac{3}{5}$, 于是 $\cos 2\alpha=\cos[(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)]=\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)-\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$ __________ $=\frac{4}{5}(-\frac{4}{5})-(-\frac{3}{5})\times\frac{3}{5}=-\frac{16}{25}+\frac{9}{25}=-\frac{7}{25}$.

3. 求证: $\tan(\alpha-\beta)+\tan(\beta-\gamma)+\tan(\gamma-\alpha)=\tan(\alpha-\beta)\tan(\beta-\gamma)\tan(\gamma-\alpha)$. 证明 $\tan(\gamma-\alpha)=-\tan(\alpha-\gamma)=-\tan[(\alpha-\beta)+(\beta-\gamma)]$ __________ $=-\frac{\tan(\alpha-\beta)+\tan(\beta-\gamma)}{1-\tan(\alpha-\beta)\tan(\beta-\gamma)}$. 去分母, 得 $-\tan(\gamma-\alpha)+\tan(\gamma-\alpha)\tan(\alpha-\beta)\tan(\beta-\gamma)=\tan(\alpha-\beta)+\tan(\beta-\gamma)$, 即 $\tan(\alpha-\beta)+\tan(\beta-\gamma)+\tan(\gamma-\alpha)=\tan(\alpha-\beta)\tan(\beta-\gamma)\tan(\gamma-\alpha)$.

4. “拆”角. 所谓拆角, 就是把已知的角一拆为二, 以达到消项的目的. 实际上, 拆角是变角的特例.

5. 求 $\frac{2\cos 10^\circ-\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ}$ 的值. 解原试 $=\frac{2\cos(30^\circ-20^\circ)-\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ}=\frac{2(\cos 30^\circ\cos 20^\circ+\sin 30^\circ\sin 20^\circ)-\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ}$ __________ $=\frac{2\cos 30^\circ\cos 20^\circ}{\cos 20^\circ}=\sqrt{3}$. 注意上述解法是把 10°“拆”成 $30^\circ-20^\circ$ 来求解, 如果把 20°“拆”成 $30^\circ-10^\circ$ 也可获解, 但过程较冗赘.

6. 正、余互变. 如果 $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$, 那么 $\sin\alpha=\cos\beta$, $\cos\alpha=\sin\beta$, $\tan\beta=\cot\alpha$. 例如, 由 $(\frac{\pi}{3}-\varphi)+(\frac{\pi}{6}+\varphi)=\frac{\pi}{2}$, 可得 $\sin(\frac{\pi}{3}-\varphi)=\cos(\frac{\pi}{6}+\varphi)$.

7. 已知 $\sin(\frac{\pi}{4}-x)=\frac{5}{13}$, 且 $0<x<\frac{\pi}{4}$. 求 $\frac{\cos 2x}{\cos(\frac{\pi}{4}+x)}$ 的值. 解由条件, 得 $\cos(\frac{\pi}{4}-x)=\frac{12}{13}$. $\therefore$ 原式 $=\frac{\sin(\frac{\pi}{2}-2x)}{\cos(\frac{\pi}{4}+x)}=\frac{\sin 2(\frac{\pi}{4}-x)}{\cos(\frac{\pi}{4}+x)}=\frac{2\sin(\frac{\pi}{4}-x)\cos(\frac{\pi}{4}-x)}{\cos(\frac{\pi}{4}+x)}$ __________ $=\frac{2\cos(\frac{\pi}{4}+x)\cos(\frac{\pi}{4}-x)}{\cos(\frac{\pi}{4}+x)}=2\cos(\frac{\pi}{4}-x)=\frac{24}{13}$.

8. 逆用公式. 由 $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$ 可得 $\tan\alpha+\tan\beta=\tan(\alpha+\beta)(1-\tan\alpha\tan\beta)$, 或 $1-\tan\alpha\tan\beta=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{\tan(\alpha+\beta)}$. 后两个公式是第一个公式的逆用.

9. 求 $\tan 65^\circ+\tan 70^\circ+1-\tan 65^\circ\tan 70^\circ$ 的值. 解原式 $=\tan(65^\circ+70^\circ)(1-\tan 65^\circ\tan 70^\circ)+1-\tan 65^\circ\tan 70^\circ$ __________ $=(-1)\cdot(1-\tan 65^\circ\tan 70^\circ)+1-\tan 65^\circ\tan 70^\circ=0$. 注意此例也可用“他推法”求解. 所谓“他推法”, 即从某已知等式出发, 经过变换后, 便可获得欲求之解. 如例 5, $\because 135^\circ=65^\circ+70^\circ$, 两边取正切, 便得 $-1=\tan(65^\circ+70^\circ)=\frac{\tan 65^\circ+\tan 70^\circ}{1-\tan 65^\circ\tan 70^\circ}$, $\therefore \tan 65^\circ\tan 70^\circ-1=\tan 65^\circ+\tan 70^\circ$, 移项即可得原式 $=0$. 请读者思考, 如何通过“公式逆用”或“他推法”来证明: $\tan(A-B)+\tan(B-C)+\tan(C-A)=\tan(A-B)\tan(B-C)\tan(C-A)$.

10. 合一变形. 形如 $a\sin x+b\sin x$ 的式子颇为常见. 此类式子可作“合一变形”, 即 $a\sin x+b\sin x=\sqrt{a^2+b^2}(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x)=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi)$, 其中, $\sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$. 由此便可求得 $a\sin x+b\sin x$ 的值域、周期和单调区间等.

11. 求函数 $f(x)=\sin x-\sqrt{3}\cos x$ 的值域、最小正周期以及为增函数的区间. 解 $\because f(x)=2(\sin x\cdot\frac{1}{2}-\cos x\cdot\frac{\sqrt{3}}{2})=2\sin(x-\frac{\pi}{3})$, $\therefore$ 函数的值域为 [-2, 2], 最小正周期是 2π, 为增函数的区间是 $[2k\pi-\frac{\pi}{6},2k\pi+\frac{5\pi}{6}](k\in\mathbf{Z})$.

12. 求函数 $y=\dfrac{\sqrt{3}\sin x}{2+\cos x}$ 的值域. 解由已知, 得 $2y+y\cos x=\sqrt{3}\sin x$, 即 $\sqrt{3}\sin x-y\cos x=2y$, $\therefore \sin x\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3+y^2}}-\cos x\cdot\dfrac{y}{\sqrt{3+y^2}}=\dfrac{2y}{\sqrt{3+y^2}}$. 于是 $\sin(x-\varphi)=\dfrac{2y}{\sqrt{3+y^2}}$(其中 φ 满足 $\sin\varphi=\dfrac{y}{\sqrt{3+y^2}}$, $\cos\varphi=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3+y^2}}$). $\because |\sin(x-\varphi)|\le 1$, $\therefore \dfrac{2y}{\sqrt{3+y^2}}\le 1$, $\therefore -1\le y\le 1$. 注意对于求 $y=\dfrac{a\sin x+b\cos x+c}{a'\sin x+b'\cos x+c'}$ 的值域, 均可采用例 7 的方法, 即去分母, 合一变形, 解不等式三个步骤.

13. 升幂和降幂. (1) 升幂. 运用公式 $1+\cos 2x=2\cos^2 x$, $1-\cos 2x=2\sin^2 x$.

14. 化简 $\dfrac{1+\cos\theta-\sin\theta}{1-\cos\theta-\sin\theta}+\dfrac{1-\cos\theta-\sin\theta}{1+\cos\theta-\sin\theta}$. 解原式 $=\dfrac{2\cos^2\frac{\theta}{2}-2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\sin^2\frac{\theta}{2}-2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}+\dfrac{2\sin^2\frac{\theta}{2}-2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}-2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}$ —— $\begin{cases} =\dfrac{\cos\frac{\theta}{2}(}{\sin\frac{\theta}{2}(} \\ =-(\cot \end{cases}$

(2) 降幂. 逆用公式 $\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1$ 和 $\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$, 可得 $\cos^2\alpha=\dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$, $\sin^2\alpha=\dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$.

15. 求函数 $y=3\sin^2\alpha-4\sin\alpha\cdot\cos\alpha+\cos^2\alpha$ 的值域和最小正周期. 解 $\because y=3\cdot\dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}-2\sin 2\alpha+\dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}=2-(2\sin 2\alpha+\cos 2\alpha)=2-\sqrt{5}(2\alpha+\varphi)$, 其中 $\sin\varphi=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos\varphi=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$, $\therefore$ 函数的值域是 $[2-\sqrt{5},2+\sqrt{5}]$, 最小正周期是 π. 注意对于形如 $y=a\sin^2\alpha+b\sin\alpha\cos\alpha+c\cos^2\alpha$ 的函数, 宜采用“先降幂, 后合一”的方法进行化简, 再研究其性质. 【训练题】(一) 两角和 (差) 的余弦公式

16. 化简 $\sin(x+y)\sin x+\cos(x+y)\cos x$ 的结果是 ()

A. $\cos(2x+y)$　　B. $\cos y$　　C. $\sin(2x+y)$　　D. $\sin y$

17. 满足 $\cos\alpha\cos\beta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\sin\alpha\sin\beta$ 的一组 α,β 的值是 ()

A. $\alpha=\dfrac{13\pi}{12},\beta=\dfrac{3\pi}{4}$　　B. $\alpha=\dfrac{\pi}{2},\beta=\dfrac{\pi}{3}$　　C. $\alpha=\dfrac{\pi}{2},\beta=\dfrac{\pi}{6}$　　D. $\alpha=\dfrac{\pi}{3},\beta=\dfrac{\pi}{6}$

18. 若 $\dfrac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$, 且 $\cot(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha)=\dfrac{3}{4}$, 则 $\cos(\alpha-\dfrac{3\pi}{2})$ 的值等于 ()

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{10}$　　B. $-\dfrac{\sqrt{2}}{10}$　　C. $\dfrac{7\sqrt{2}}{10}$　　D. $-\dfrac{7\sqrt{2}}{10}$

19. 若三角形的两内角 α,β 满足 $\cos\alpha\cos\beta>\sin\alpha\sin\beta$, 则这个三角形的形状 ()

A. 是锐角三角形　　B. 是貞角三角形　　C. 是钝角三角形　　D. 不能确定

20. 若关于 x 的方程 $x^2+x\cos\alpha\cos\beta+\cos\gamma=0$ 的两根 x_1,x_2 满足 $x_1+x_2=\dfrac{x_1x_2}{2}$, 则以 α,β,γ 为内角的三角形的形状 ()

A. 是等腰三角形, 不可能是直角三角形　　B. 是直角三角形, 不可能是等腰三角形　　C. 是等腰直角三角形　　D. 是等腰三角形, 也可能是直角三角形

21. (1) 若 $\tan x=\dfrac{4}{3}(\pi<x<2\pi)$, 则 $\cos(2x-\dfrac{\pi}{3})\cdot\cos(\dfrac{\pi}{3}-x)-\sin(2x-\dfrac{\pi}{3})\cdot\sin(\dfrac{\pi}{3}-x)=$__________. (2) 若锐角 α,β 满足 $\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$, $\cos(\alpha+\beta)=-\dfrac{5}{13}$ 则 $\cos\beta=$__________. (3) 若 $\cos(\alpha-\beta)=-\dfrac{4}{5}$, $\cos(\alpha+\beta)=\dfrac{4}{5}$, 且 $90^\circ<\alpha-\beta<180^\circ$, $270^\circ<\alpha+\beta<360^\circ$, 则 $\cos 2\alpha=$__________, $\cos 2\beta=$__________. (4) 若 $\cos x+\cos y=\dfrac{1}{2}$, $\sin x-\sin y=\dfrac{1}{3}$, 则 $\cos(x+y)=$__________.

22. 若 $\sin\alpha\sin\beta=1$, 则 $\cos(\alpha+\beta)$ 的值是 ()

A. -1 B. 0 C. 1 D. ±1

23. 若 α,β 为锐角, 则 ()

A. $\cos(\alpha+\beta)>\cos\alpha+\cos\beta$ B. $\cos(\alpha+\beta)>\sin\alpha+\sin\beta$ C. $\cos(\alpha+\beta)<\cos\alpha+\cos\beta$ D. $\cos(\alpha+\beta)<\sin\alpha+\sin\beta$

24. 若 $\sin\alpha+\sin\beta=\frac{\sqrt{2}}{2}$, 则 $\cos\alpha+\cos\beta$ 的取值范围是 ()

A. $[0,\frac{\sqrt{2}}{2}]$ B. $[-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}]$ C. [2, 2] D. $[-\frac{\sqrt{14}}{2},\frac{\sqrt{14}}{2}]$.

25. 若三角形的两内角 α,β 满足 $\tan\alpha\tan\beta>1$, 则这个三角形的形状是 ()

A. 等腰直角三角形 B. 不等腰的直角三角形 C. 锐角三角形 D. 钝角三角形

26. 若三角形的两内角 α,β 满足 $\sin\alpha=\frac{3}{5}$, $\cos\beta=\frac{5}{13}$, 则此三角形的另—内角 γ 的余弦值等于 ()

A. $\frac{16}{65}$ 或 $\frac{56}{65}$ B. $\frac{56}{65}$ C. $\frac{16}{65}$ D. $-\frac{16}{65}$ 或 $-\frac{56}{65}$

27. (1) 已知锐角 α,β 满足 $\cos\alpha=\frac{4}{5}$, $\tan(\alpha-\beta)=-\frac{1}{3}$, 求 $\cos\beta$. (2) 已知 $\cos(\frac{\pi}{4}-\alpha)=\frac{3}{5}$, $\sin(\frac{3\pi}{4}+\beta)=\frac{5}{13}$, 其中 $\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{3\pi}{4}$, $0<\beta<\frac{\pi}{4}$, 求 $\sin(\alpha+\beta)$ 的值. (3) 已知 α,β 为锐角, 满足 $\cos\alpha=\frac{1}{7}$, $\sin(\alpha+\beta)=\frac{5\sqrt{3}}{14}$, 求 $\cos\beta$ 的值.

28. 已知 $8\cos(2\alpha+\beta)+5\cos\beta=0$, 求 $\tan(\alpha+\beta)\cdot\tan\alpha$ 的值.

29. 解不等式: $\sin 4x+\cos 4x\cdot\cot 2x>1$.

30. 已知锐角 α,β,γ 满足 $\sin\alpha+\sin\gamma=\sin\beta$, $\cos\alpha-\cos\gamma=\cos\beta$, 求 $\alpha-\beta$ 的值. (二) 两角和 (差) 的正弦公式

31. 若 α,β 为锐角, 且满足 $\cos\alpha=\frac{4}{5}$, $\cos(\alpha+\beta)=\frac{3}{5}$, 则 $\sin\beta$ 的值是 ()

A. $\frac{17}{25}$ B. $\frac{3}{5}$ C. $\frac{7}{25}$ D. $\frac{1}{5}$

32. 函数 $y=\sin(x+\frac{\pi}{3})-\sqrt{3}\cos(x+\frac{\pi}{3})$()

A. 是奇函数, 但不是偶函数 B. 是偶函数, 但不是奇函数 C. 既不是奇函数, 也不是偶函数 D. 奇偶性无法确定

33. 下列函数中, 与 $y=\sin x+\cos x$ 的振幅、最小正周期都相同的函数是 ()

A. $y=\sin x$ B. $y=\cos x$ C. $y=\sqrt{2}\sin x$ D. $y=\sin x\cos x$

34. 函数 $y=\sin x+\sqrt{3}\cos x(0\le x\le\frac{\pi}{2})$ 的值域是 ()

A. $[1,\frac{3}{2}]$ B. [1, 2] C. $[\frac{3}{2},2]$ D. [0, 2]

35. (1) 化简 $\sin(x+27^\circ)\cos(18^\circ-x)+\cos(x+27^\circ)\sin(18^\circ-x)=$__________. (2) 函数 $y=3\sin 2x+3\sqrt{3}\cos 2x+1$ 的最小正周期是__________, 最大值是__________, 最小值是__________.

36. 若 α 是一个三角形的最小内角, 则函数 $y=\sin\alpha-\cos\alpha$ 的值域为 ()

A. $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$　　B. $(-1,\dfrac{\sqrt{3}-1}{2})$　　C. $(-1,\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}]$　　D. $[-1,\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}]$

37. 若函数 $f(x)=\sin 2x+a\cos 2x$ 的图像关于直线 $x=-\dfrac{\pi}{8}$ 对称, 则实数 a 的值等于 ()

A. $\sqrt{2}$　　B. $-\sqrt{2}$　　C. 1　　D. -1

38. (1) 若以 $\sin(45^\circ-\alpha)=-\dfrac{2}{3}$, $\dfrac{\pi}{4}<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$, 则 $\sin\alpha=$__________. (2) 计算: $\dfrac{\sin 7^\circ+\sin 8^\circ\cos 15^\circ}{\cos 7^\circ-\sin 8^\circ\sin 15^\circ}=$__________. (3) 计算: $\csc 10^\circ-\sqrt{3}\sec 10^\circ=$__________.

39. (1) 函数 $y=\log_{0.2}(\sin x+\cos x)$ 为增函数的区间是__________. (2) 不等式 $\sin x<\cos x$ 的解是__________.

40. 求下列函数的值域: (1)$y=\dfrac{\sqrt{5}\sin x+1}{\cos x+2}$. (2)$y=\dfrac{\tan\theta+2}{\sec\theta-1}$.

41. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $2\cos B\cos C=1-\cos A$, 且 $2\sin B\cos C=1+\sin(B-C)$, 判断此三角形的形状.

42. (1) 已知关于 x 的方程 $x^2+px+q=0$ 的两根是 $\tan\alpha,\tan\beta$, 求 $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}$ 的值. (2) 已知 $\sin(\alpha+\beta)=\dfrac{1}{2}$, $\sin(\alpha-\beta)=\dfrac{1}{3}$, 求 $\tan\alpha\cot\beta$ 的值. (3) 已知 $\tan(\alpha+\beta)=-2$, $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{1}{2}$, 求 $\dfrac{\sin 2\alpha}{\sin 2\beta}$ 的值.

43. 已知 $\tan\alpha=1$, $3\sin\beta=\sin(2\alpha+\beta)$, 求 $\tan(\alpha+\beta)$ 的值. 29 已知 $\dfrac{\tan(\alpha-\gamma)}{\tan\alpha}+\dfrac{\sin^2\beta}{\sin^2\alpha}=1$, 求证: $\tan^2\beta=\tan\alpha\tan\gamma$.

44. (1) 求函数 $y=\dfrac{\sin x\cos x}{1+\sin x+\cos x}$ 的最大值, (2) 求函数 $y=\sin x+\cos x+\sin x\cos x$ 的值域. (3)$a\in\mathbf{R}$, 求 $y=(\sin x+a)(\cos x+a)$ 的最小值. 注意对于含 $\sin x\pm\cos x, \sin x\cos x$ 的三角函数式, 可令 $t=\sin x\pm\cos x$, 则 $\sin x\cos x=\pm\dfrac{t^2-1}{2}$, $t\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$. (三) 两角和 (差) 的正切公式

45. 若 $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{2}{5}$, $\tan(\beta-\dfrac{\pi}{4})=\dfrac{1}{4}$, 则 $\tan(\alpha+\dfrac{\pi}{4})$ 等于 ()

A. $\dfrac{13}{18}$　　B. $\dfrac{13}{22}$　　C. $\dfrac{3}{22}$　　D. $\dfrac{1}{6}$

46. 若 $\dfrac{1-\tan A}{1+\tan A}=4+\sqrt{5}$, 则 $\cot(\dfrac{\pi}{4}+A)$ 的值等于 ()

A. $-4-\sqrt{5}$　　B. $4+\sqrt{5}$　　C. $-\dfrac{1}{4+\sqrt{5}}$　　D. $\dfrac{1}{4+\sqrt{5}}$

47. 已知 $\alpha+\beta=\dfrac{3\pi}{4}$, 则 $(1-\tan\alpha)(1-\tan\beta)$ 的值等于 ()

A. 2　　B. -2　　C. 1　　D. -1

48. (1) 计算 $\dfrac{1+\cot 15^\circ}{1-\tan 75^\circ}=$__________. (2) 若 $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{4}$, 则 $\dfrac{1-\tan\beta}{1+\tan\beta}=$__________. (3) 若 $\tan x=\dfrac{1}{2}$, $\tan(x-y)=-\dfrac{2}{5}$, 则 $\tan(2x-y)=$__________. (4) 在 $\triangle ABC$ 中, $\tan A,\tan B$ 是方程 $3x^2+8x-1=0$ 的两个根, 则 $\tan C=$__________. (5) 若 $\tan(\alpha+\dfrac{\pi}{4})=-\dfrac{9}{40}$, 则 $\tan\alpha=$__________, $\tan(\alpha-\dfrac{\pi}{4})=$__________.

49. 若 $\alpha,\beta\in(\dfrac{\pi}{2},\pi)$, 且 $\tan\alpha<\cot\beta$, 则 ()

A. $\alpha<\beta$　　B. $\beta>\alpha$　　C. $\pi<\alpha+\beta<\dfrac{3\pi}{2}$　　D. $\alpha+\beta>\dfrac{3\pi}{2}$

50. 函数 $y=\dfrac{\cos 2x+\sin 2x}{\cos 2x-\sin 2x}$ 的最小正周期是 ()

A. 2π B. $\dfrac{3\pi}{2}$ C. π D. $\dfrac{\pi}{2}$

51. 若 $-\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\dfrac{\pi}{2},-\dfrac{\pi}{2}<\beta<\dfrac{\pi}{2}$, 且 $\tan\alpha,\tan\beta$ 是方程 $x^2+3\sqrt{3}x+4=0$ 的两个根, 则 $\alpha+\beta$ 等于 ()

A. $\dfrac{\pi}{3}$ B. $-\dfrac{2\pi}{3}$ C. $\dfrac{\pi}{3}$ 或 $\dfrac{4\pi}{3}$ D. $\dfrac{\pi}{3}$ 或 $-\dfrac{2\pi}{3}$

52. (1) 若 $\tan\theta$ 和 $\tan(\dfrac{\pi}{4}-\theta)$ 是方程 $x^2+px+q=0$ 的两个根, 则 p,q 满足关系式__________. (2) 若 $\tan\alpha=\dfrac{1}{7}$, $\tan\beta=\dfrac{1}{3}$, $0<\alpha,\beta<\dfrac{\pi}{2}$, 则 $\alpha+2\beta=$__________.

53. (1) 计算: $1+\tan 66^\circ+\tan 69^\circ-\tan 66^\circ\tan 69^\circ=$__________. (2) 计算: $\tan 19^\circ+\tan 101^\circ-\sqrt{3}\tan 19^\circ\tan 101^\circ=$__________ (3) 若 $\alpha+\beta=k\pi+\dfrac{\pi}{4}(k\in\mathbf{Z})$, 则 $(1+\tan\alpha)(1+\tan\beta)=$__________. (4) 计算 $(1+\tan 1^\circ)(1+\tan 2^\circ)(1+\tan 3^\circ)\cdots(1+\tan 43^\circ)(1+\tan 44^\circ)=$__________.

54. (1) 求证: $\tan 20^\circ\tan 30^\circ+\tan 30^\circ\tan 40^\circ+\tan 40^\circ\tan 20^\circ=1$. (2) 求证: $\tan(A-B)+\tan(B-C)+\tan(C-A)=\tan(A-B)\tan(B-C)\tan(C-A)$. (3) 求证: $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$, 其中 $A+B+C=k\pi(k\in\mathbf{Z})$.

55. 已知锐角 α,β 满足 $\tan\alpha=\sqrt{3}(m+1)$, $\tan(-\beta)=\sqrt{3}(\tan\alpha\tan\beta+m)$, 求 $\alpha+\beta$ 的值.

56. (1) 求 $\dfrac{\tan 20^\circ+\tan 40^\circ+\tan 120^\circ}{\tan 20^\circ\tan 40^\circ}$ 的值. (2) 已知 $\tan\theta=\dfrac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}(\alpha,\theta$ 都是锐角$)$, 求 $\dfrac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\theta}$ 的值. (3) 已知 $\tan(\dfrac{\pi}{4}+\alpha)=-\dfrac{1}{2}$, 求 $\dfrac{2\cos\alpha(\sin\alpha-\cos\alpha)}{1+\tan\alpha}$ 的值.

57. 已知 $\tan\alpha,\tan\beta$ 是关于 x 的方程 $mx^2-2x\sqrt{7m-3}+2m=0$ 的两个实根, 求 $\tan(\alpha+\beta)$ 的取值范围. (四) 二倍角的正弦公式

58. 若 $\sin\alpha+\cos\alpha=-\sqrt{2}$, 则 $\tan\alpha+\cot\alpha$ 等于 ()

A. -2 B. -1 C. 1 D. 2

59. 若三角形的一个内角 α 满足 $\sin\alpha+\cos\alpha=\dfrac{3}{4}$, 则这个三角形的形状是 ()

A. 锐角三角形 B. 钝角三角形 C. 不等腰的直角三角形 D. 等腰直角三角形

60. 函数 $f(x)=\sqrt{\cos^2 x-\cos^4 x}$ 的最小正周期为 ()

A. $\dfrac{\pi}{2}$ B. π C. $\dfrac{3\pi}{2}$ D. 2π

61. 若 $\alpha\in[\dfrac{5\pi}{2},\dfrac{7}{2}\pi]$, 则 $\sqrt{1+\sin\alpha}+\sqrt{1-\sin\alpha}$ 的值为 ()

A. $2\cos\dfrac{\alpha}{2}$ B. $-2\cos\dfrac{\alpha}{2}$ C. $2\sin\dfrac{\alpha}{2}$ D. $-2\sin\dfrac{\alpha}{2}$

62. 函数 $y=\log_{0.5}(\sin x\cos x)$ 为增函数的区间是 ()

A. $(k\pi-\dfrac{\pi}{4},k\pi+\dfrac{\pi}{4})(k\in\mathbf{Z})$ B. $(k\pi,k\pi+\dfrac{\pi}{4}](k\in\mathbf{Z})$ C. $(k\pi+\dfrac{\pi}{4},k\pi+\dfrac{\pi}{2})(k\in\mathbf{Z})$ D. $[k\pi+\dfrac{\pi}{4},k\pi+\dfrac{3\pi}{4})(k\in\mathbf{Z})$

63. $\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}$ 的值等于 ()

A. 4 B. $\frac{1}{4}$ C. 2 D. $\frac{1}{2}$

64. (1) 若 $\cos^2(\frac{x}{2})=\sin x$, 则 $\tan\frac{x}{2}$ 等于__________. (2) 计算: ① $\sin 105^\circ\cos 75^\circ=$__________; ② $\cos^2 15^\circ+\cos^2 75^\circ+\cos 15^\circ\cos 75^\circ=$__________; ③ $\cos\frac{5\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}=$__________. (3) 函数 $y=\cos(\frac{\pi}{2}x)\cos[\frac{\pi}{2}(x-1)]$ 的最小正周期是__________. (4) 若 $\sin x-\cos x=\frac{1}{2}$, 则 $\sin^3 x-\cos^3 x=$__________.

65. (1) 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, $\tan A+\tan B=4$, 则此三角形的两个锐角分别等于__________. (2) 若 $\sin 2\alpha=\frac{4}{5}$, 则 $\tan^2\alpha+\cot^2\alpha=$__________.

66. 若 $\sin x\cos y=\frac{1}{2}$, 则 $\cos x\sin y$ 的取值范围是 ()

A. $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ B. $[-\frac{3}{2},\frac{1}{2}]$ C. $[-\frac{1}{2},\frac{3}{2}]$ D. $[-1,1]$

67. 求值: (1)$\sin 18^\circ\sin 54^\circ$. (2)$\cos\frac{\pi}{17}\cos\frac{2\pi}{17}\cos\frac{4\pi}{17}\cos\frac{8\pi}{17}$.

68. 求值: (1)$\cos^4(\frac{\pi}{8})+\cos^4(\frac{3\pi}{8})+\cos^4(\frac{5\pi}{8})+\cos^4(\frac{7\pi}{8})$. (2)$\sin^4(\frac{\pi}{16})+\sin^4(\frac{3\pi}{16})+\sin^4(\frac{5\pi}{16})+\sin^4(\frac{7\pi}{16})$.

69. 求值: (1)$\csc 10^\circ-\sqrt{3}\sec 10^\circ$. (2)$\cos 40^\circ(1+\sqrt{3}\cot 80^\circ)$. (3)$\tan 70^\circ\cos 10^\circ(\sqrt{3}\tan 20^\circ-1)$. (4)$\sec 50^\circ+\cot 80^\circ$. (五) 二倍角的余弦公式

70. 若 $x=\frac{\pi}{12}$, 则 $\cos^4 x-\sin^4 x$ 的值为 ()

A. 0 B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

71. 函数 $y=\sin^2 x$ 是 (),

A. 最小正周期为 2π 的偶函数 B. 最小正周期为 2π 的奇函数 C. 最小正周期为 π 的偶函数 D. 最小正周期为 π 的奇函数

72. 若 $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{3}{5}$, $\cos\frac{\alpha}{2}=-\frac{4}{5}$, 则角 α 所在的象限是 ()

A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

73. 函数 $y=2\sin x\cos sx-(\cos^2 x-\sin^2 x)$ 的最大值与最小值之积等于 ()

A. 2 B. -2 C. 1 D. -1

74. 函数 $y=1-\cos^2 x+\cos^4 x$ 的最小正周期是 ()

A. 2π B. π C. $\frac{\pi}{2}$ D. $\frac{\pi}{4}$

75. 化简 $\sqrt{1-\cos 4-\sin^2 2}$ 的结果是 ()

A. $\cos 2$ B. $-\cos 2$ C. $\sqrt{3}\cos 2$ D. $-\sqrt{3}\cos 2$

76. (1) 若 $\sin\theta:\sin\frac{\theta}{2}=8:5$, 则 $\cos\theta=$__________. (2) 计算 $\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}\cot\frac{\pi}{8}=$__________. (3) 若 $8\cos(\frac{\pi}{8}+\alpha)\cos(\frac{\pi}{4}-\alpha)=1$, 则 $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=$__________. (4) 函数 $y=\sin x\cos x-2\sin^3 x\cos x$ 的最小正周期

是__________. (5) 若 $\tan x=\sqrt{2}$, 则 $\dfrac{2\cos^2\dfrac{x}{2}-\sin x-1}{\sin x+\cos x}=$__________. (6) 函数 $y=2\sin x(\sin x+\cos x)$ 为减函数的区间是__________.

77. 若 $270^\circ<\alpha<360^\circ$, 则化简 $\sqrt{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cos 2\alpha}}$ 的结果是 ()

A. $\sin\dfrac{\alpha}{2}$　　B. $-\sin\dfrac{\alpha}{2}$　　C. $\cos\dfrac{\alpha}{2}$　　D. $-\cos\dfrac{\alpha}{2}$

78. 若 $\pi<x<\dfrac{3\pi}{2}$, 则 $\sqrt{\tan x+\sin x}+\sqrt{\tan x-\sin x}$ 可以化成 ()

A. $2\sqrt{\tan x}\sin(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{4})$　　B. $2\sqrt{\tan x}\sin(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4})$　　C. $-2\sqrt{\tan x}\sin(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{4})$　　D. $-2\sqrt{\tan x}\sin(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4})$

79. (1) 已知 $\sin\alpha+\sin\beta=\dfrac{1}{2}$, $\cos\alpha+\cos\beta=\dfrac{1}{3}$, 求 $\cos^2(\dfrac{\alpha-\beta}{2})$ 的值. (2) 求 $y=\sin^6 x+\cos^6 x$ 的最小正周期. (3) 已知 $\tan\alpha\tan\beta=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, 求 $(2-\cos 2\alpha)(2-\cos 2\beta)$ 的值.

80. (1) 化简: $\dfrac{2\cos^2\alpha-1}{2\tan(\dfrac{\pi}{4}-\alpha)\sin^2(\dfrac{\pi}{4}+\alpha)}$.(2) 化简: $\dfrac{1+\cos\theta-\sin\theta}{1-\cos\theta-\sin\theta}+\dfrac{1-\cos\theta-\sin\theta}{1+\cos\theta-\sin\theta}$. (3) 已知 $\cos(\dfrac{\pi}{4}+x)=\dfrac{4}{5}(\dfrac{19\pi}{12}<x<\dfrac{7\pi}{4})$, 求 $\dfrac{\sin 2x-2\sin^2 x}{1-\tan x}$ 的值.

81. 求下列函数的最大值及其相成的 x 值: (1)$f(x)=4\cos 2x+12\sin x-5\cos^2 x$. (2)$f(x)=\sin 2x+\sin x+\cos x$. (3)$f(x)=\dfrac{\sin x\cos x}{1+\sin x+\cos x}$.

82. 求函数 $y=\sin^2 x+2\sin x\cos x+3\cos^2 x-2$ 的取值范、最小正周期以及为增函数的区间. (六) 万能公式

83. 化简 $\dfrac{\cot\dfrac{\alpha}{2}-\tan\dfrac{\alpha}{2}}{\cot\dfrac{\alpha}{2}+\tan\dfrac{\alpha}{2}}$ 的结果是 ()

A. $\sin\alpha$　　B. $\cos\alpha$　　C. $\tan\alpha$　　D. $\cot\alpha$

84. 函数 $y=\lg\dfrac{\tan x}{1+\tan x}$ 为增函数的区间是 ()

A. $(k\pi,k\pi+\dfrac{\pi}{4}]$, $k\in\mathbf{Z}$　　B. $(k\pi,2k\pi+\dfrac{\pi}{4}]$, $k\in\mathbf{Z}$　　C. $(2k\pi,2k\pi+\dfrac{\pi}{2}]$, $k\in\mathbf{Z}$　　D. $(2k\pi,k\pi+\dfrac{\pi}{2}]$, $k\in\mathbf{Z}$

85. 若 $f(\tan x)=\sin 2x$, 则 $f(-1)$ 的值是 ()

A. $-\sin 2$　　B. -1　　C. $\dfrac{1}{2}$　　D. 1

86. 若 $\tan\dfrac{A}{2}=\dfrac{m}{n}$, 则 $m\cos A-n\sin A$ 等于 ()

A. n　　B. $-n$　　C. m　　D. $-m$

87. 若锐角 θ 满足 $\sin\dfrac{\theta}{2}=\sqrt{\dfrac{x-1}{2x}}$, 则 $\tan\theta$ 等于 ()

A. x　　B. $\dfrac{x+1}{\sqrt{x-1}}$　　C. $\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}$　　D. $\sqrt{x^2-1}$

88. (1) 化简 $\dfrac{\tan(45^\circ-\alpha)}{1-\tan^2(45^\circ-\alpha)}\cdot\dfrac{\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}=$__________. (2) 若 $\tan\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{2}{5}$, 则 $\dfrac{2\sin\alpha+3\cos\alpha}{3\cos\alpha-4\sin\alpha}=$__________. (3) 若 $\dfrac{2\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta-3\cos\theta}=-5$, 则 $3\cos 2\theta+4\sin 2\theta=$__________.

89. (1) 已知 $\sin\alpha=\frac{3}{5}$, $\alpha\in(\frac{\pi}{2},\pi)$, $\tan(\pi-\beta)=\frac{1}{2}$, 求 $\tan(\alpha-2\beta)$ 的值. (2) 已知 $\tan 2\theta=-2\sqrt{2}$, $\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{2}$, 求 $\frac{2\cos^2(\frac{\theta}{2})-\sin\theta-1}{\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4}+\theta)}$ 的值.

90. 已知 $a\sin x+b\cos x=0$, $A\sin 2x+B\cos 2x=C$, '$(a,b$ 是不同时为零的实数), 求证: $2abA+(b^2-a^2)B+(a^2+b^2)C=0$. (七) 半角公式

91. 下列函数中, 最小正周期为 π 的是 ()

A. $y=\frac{\sin x}{1-\cos x}$　　B. $y=\tan\frac{x}{2}-\frac{1}{\sin x}$　　C. $y=\cos^2(2x)$　　D. $y=\tan x-\cot x$

92. 若 $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$, 且 $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$, 则 $\cos\frac{\alpha}{2}$ 的值等于 ()

A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$　　B. $-\frac{\sqrt{5}}{5}$　　C. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$　　D. $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$

93. 若 $2\pi<\theta<4\pi$, $\sin\theta=-\frac{3}{5}$, $\cos\theta<0$, 则 $\tan\frac{\theta}{2}$ 的值等于 ()

A. -3　　B. 3　　C. $-\frac{1}{3}$　　D. $\frac{1}{3}$

94. 若 $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$, 则 ()

A. $\cos\frac{\alpha}{2}=-\sqrt{\frac{1+\sin\beta}{2}}$　　B. $\sin\frac{\alpha}{2}=-\sqrt{\frac{1-\sin\beta}{2}}$　　C. $\tan\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\sin\beta}{1+\sin\beta}}$　　D. $\tan\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\sin\beta}{1-\sin\beta}}$

95. 当 $3\pi<\alpha<4\pi$ 时. 化简 $\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}-\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$ 得 ()

A. $-\sqrt{2}\sin(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4})$　　B. $\sqrt{2}\sin(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4})$　　C. $-\sqrt{2}\sin(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{4})$　　D. $\sqrt{2}\sin(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{4})$

96. 若 $\sin 2\alpha=a$, $\cos 2\alpha=b$, 则 $\tan(\alpha+\frac{\pi}{4})$ 的值是 ()

A. $\frac{a}{1+b}$　　B. $\frac{1+a}{b}$　　C. $\frac{1+a-b}{1-a+b}$　　D. $\frac{a-b+1}{a+b+1}$

97. (1) 若 $\sin x=\frac{2}{3}$, 且 $\frac{\pi}{2}<x<\pi$, 则 $\sin\frac{x}{2}=$__________. (2) 若 α 是第三象限角, 且 $\sin(\alpha+\beta)\cos\beta-\sin\beta\cdot\cos(\alpha+\beta)=-\frac{5}{13}$, 则 $\tan\frac{\alpha}{2}=$__________. (3) 若 $3\sin\alpha=4\cos\alpha$, 且 $\sin\alpha<0$, 则 $\tan\frac{\alpha}{2}=$__________. (4) 若 $\tan 35^\circ=m$, 则 $\frac{\cos 20^\circ}{1-\sin 20^\circ}=$__________. (5) 当 $k\in\mathbf{Z}$ 时, $(\tan\frac{5\pi}{12})^k\cdot(\tan\frac{\pi}{12})^{k+2}=$__________.

98. 与 $\lg(\cos x-1)^2$ 相等的式子是 ()

A. $4\lg|\cos\frac{x}{2}|+2\lg 2$　　B. $2\lg(\cos x-1)$　　C. $[\lg(\cos x-1)]^2$　　D. $4\lg|\sin\frac{x}{2}|+2\lg 2$

99. (1) 已知 $\frac{1-\cos 2\theta}{1+\cos 2\theta}=7-4\sqrt{3}$, 且 $(\frac{1}{2})^{\sin 2\theta}>1$, 求 $\tan\theta$ 的值. (2) 已知 $\sin(\alpha+\frac{3\pi}{4})=\frac{5}{13}$, $\cos(\frac{\pi}{4}-\beta)=\frac{3}{5}$, 且 $-\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{4}<\beta<\frac{3\pi}{4}$, 求 $\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$ 的值. (3) 已知 $\sin\alpha-\cos\alpha=\frac{1}{2}$, 且 $\pi<\alpha<2\pi$, 求 $\tan\frac{\alpha}{2}$ 的值. (4) 已知 $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$, 且 α 为第二象限角, 求 $\frac{\tan\frac{\pi+\alpha}{4}}{1-\cot^2\frac{\pi-\alpha}{4}}$ 的值. 二、积化和差与和差化积公式【典型题型和解题技巧】

100. 拆项法. 对形如 $\sin\alpha+\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha+2\beta)+\cdots+\sin(\alpha+n\beta)$ 及 $\cos\alpha+\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha+2\beta)+\cdots+\cos(\alpha+n\beta)$ 的式子, 可乘以 $\dfrac{\sin\dfrac{\beta}{2}}{\sin\dfrac{\beta}{2}}$, 再逐项积化和差, 依次将各项一拆为二, 以达到消项的目的.

101. 求证: $\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos nx=\dfrac{\cos\dfrac{n+1}{2}x\sin\dfrac{n}{2}x}{\sin\dfrac{x}{2}}$. 证明　左边 $=\dfrac{1}{\sin\dfrac{x}{2}}(\sin\dfrac{x}{2}\cos x+\sin\dfrac{x}{2}\cos 2x+\sin\dfrac{x}{2}\cos 3x+\cdots+\sin\dfrac{x}{2}\cos nx)=\dfrac{1}{2\sin\dfrac{x}{2}}[(\sin\dfrac{3x}{2}-\sin\dfrac{x}{2})+(\sin\dfrac{5x}{2}-\sin\dfrac{3x}{2})+(\sin\dfrac{7x}{2}-\sin\dfrac{5x}{2})+\cdots+(\sin\dfrac{2n+1}{2}x-\sin\dfrac{2n-1}{2}x)]=\dfrac{1}{2\sin\dfrac{x}{2}}(\sin\dfrac{2n+1}{2}x-\sin\dfrac{x}{2})=\dfrac{\cos\dfrac{n+1}{2}x\sin\dfrac{n}{2}x}{\sin\dfrac{x}{2}}=$ 右边, 原式得证.

102. 三角形中的恒等变形. 在 $\triangle ABC$ 中, 以下变形应相当熟练: $\sin(A+B)=\sin C$, $\cos(A+B)=-\cos C$, $\tan(A+B)=-\tan C$; $\sin\dfrac{A+B}{2}=\cos\dfrac{C}{2}$, $\cos\dfrac{A+B}{2}=\sin\dfrac{C}{2}$, $\tan\dfrac{A+B}{2}=\cot\dfrac{C}{2}$, 进一步还有: $\sin(A+B)=\sin C=2\sin\dfrac{C}{2}\cos\dfrac{C}{2}=2\cos\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{C}{2}=2\sin\dfrac{C}{2}\sin\dfrac{A+B}{2}$, $\cos(A+B)=2\cos^2\dfrac{A+B}{2}-1=2\sin^2\dfrac{C}{2}-1=1-2\sin^2\dfrac{A+B}{2}=1-2\cos^2\dfrac{C}{2}$.

103. 在 $\triangle ABC$ 中, 求证: $\sin^2\dfrac{A}{2}+\sin^2\dfrac{B}{2}+\sin^2\dfrac{C}{2}=1-2\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$. 证明　左边 $=\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}(\cos A+\cos B+\cos C)=\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}(2\cos\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}+\cos C)$ ______ $\begin{cases}=\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}(2\sin\dfrac{C}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}+1-2\sin^2\dfrac{C}{2})\\=1-\sin\dfrac{C}{2}(\cos\dfrac{A-B}{2}-\sin\dfrac{C}{2})=1-\sin\dfrac{C}{2}(\cos\dfrac{A-B}{2}-\text{co}\end{cases}$

______ $=1-2\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}=$ 右边, 原式得证.

104. 题型 $a\sin\alpha+b\sin\beta=m$, $a\cos\alpha+b\cos\beta=n$. 此类题型或类似的题型十分多见, 常可利用两式四则运算. 并结合和差化积来求解.

105. 已知 $\cos\alpha+\cos\beta=a$, $\sin\alpha+\sin\beta=b(ab\neq 0)$, 求 $\cos(\alpha-\beta)$, $\cos(\alpha+\beta)$ 的值. 解两式平方相加, 可得 $2+2\cos(\alpha-\beta)=a^2+b^2$, $\cos(\alpha-\beta)=\dfrac{a^2+b^2-2}{2}$. 再将两式和差化积, 得 $2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}=a$, $2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}=b$. 显然 $\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}\neq 0$, 于是两式相除, 得 $\tan\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\dfrac{b}{a}$. 再由万能公式, 得 $\cos(\alpha+\beta)=\dfrac{1-\tan^2(\dfrac{\alpha+\beta}{2})}{1+\tan^2(\dfrac{\alpha+\beta}{2})}=\dfrac{1-\dfrac{b^2}{a^2}}{1+\dfrac{b^2}{a^2}}=\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$.

106. 已知 $a\cos\alpha+b\sin\alpha=c$, $a\cos\beta+b\sin\beta=c$, 其中 $\alpha\pm\beta\neq k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$, 求证: $\dfrac{a}{\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}}=\dfrac{b}{\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}}=\dfrac{c}{\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}}$. 证明将已知的两式相减, 得 $a(\cos\alpha-\cos\beta)+b(\sin\alpha-\sin\beta)=0$. 利用和差化积, 得 $-2a\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}+2b\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}=0$. 由条件知 $\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}\neq 0$, $a\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}=b\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}$, 即 $\dfrac{a}{\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}}=\dfrac{b}{\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}}$. 再利用等比性质, 得 $\dfrac{a\cos\alpha}{\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\alpha}=\dfrac{b\sin\alpha}{\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\alpha}=\dfrac{a\cos\alpha+b\sin\alpha}{\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\alpha+\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\alpha}=\dfrac{c}{\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}}$, $\dfrac{a}{\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}}=\dfrac{b}{\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}}=\dfrac{c}{\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}}$

107. 降幂与化积. 在本章内, 有不少问题的求解要通过先降幂再化积来完成.

108. 已知 $\alpha+\beta=\dfrac{2\pi}{3}$, 求 $\sin^2\alpha+\sin^2\beta$ 的取值范围.

解 $\sin^2\alpha+\sin^2\beta=\dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}+\dfrac{1-\cos 2\beta}{2}=1-\dfrac{1}{2}(\cos 2\alpha+\cos 2\beta)$ __________$=1-\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)=1+\dfrac{1}{2}\cos(\alpha-\beta)$, 又 $=-1\leq\cos(\alpha-\beta)\leq 1$, $\sin^2\alpha+\sin^2\beta$ 的取值范围是 $[\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2}]$. 【训练题】(一) 积化和差公式

109. 函数 $y=\sin(3x+\dfrac{\pi}{12})\sin(3x-\dfrac{5\pi}{12})$ 的最小正周期是 ()

A. $\dfrac{\pi}{3}$ B. $\dfrac{2\pi}{3}$ C. 3π D. 6π

110. 若 $\cos^2\alpha-\cos^2\beta=m$, 则 $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$ 等于 ()

A. $4m$ B. $-4m$ C. m D. $-m$

111. $\cos(\dfrac{\pi}{5}+1)\cos(\dfrac{\pi}{5}-1)$ 等于 ()

A. $\cos^2(\dfrac{\pi}{5})+\sin^2 1$ B. $\sin^2(\dfrac{\pi}{5})-\cos^2 1$ C. $\cos^2(\dfrac{\pi}{5})-\sin^2 1$ D. $\sin^2(\dfrac{\pi}{5})+\cos^2 1$

112. 函数 $f(x)=\sin(x+\dfrac{5\pi}{12})\cos(x-\dfrac{\pi}{12})$ 是 ()

A. 最小正周期为 π 的奇函数 B. 最小正周期为 π 的偶函数 C. 最小正周期为 2π 的函数, 没有奇偶性 D. 最小正周期为 π 的函数, 没有奇偶性

113. 函数 $f(x)=2\sin\dfrac{x}{2}\sin(\alpha-\dfrac{x}{2})$ 的最大值等于 ()

A. $2\sin^2(\dfrac{\alpha}{2})$ B. $-2\sin^2(\dfrac{\alpha}{2})$ C. $2\cos^2(\dfrac{\alpha}{2})$ D. $-2\cos^2(\dfrac{\alpha}{2})$

114. (1) 函数 $y=\sin(\dfrac{3\pi}{4}-x)\sin(\dfrac{3\pi}{4}+x)$ 的值域是__________. (2) 函数 $f(x)=\sin x\cos(x+A)$ 的最小正周期是__________, 最大值是__________.

115. 求值或化简: (1)$\cos^2\alpha-\cos(\alpha+60^\circ)\cos(\alpha-60^\circ)=$__________. (2)$\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)+\sin^2\beta=$__________. (3) 若 $\sin(\alpha+\beta)=\dfrac{2}{3}$, $\sin(\alpha-\beta)=\dfrac{1}{5}$, 则 $\tan\alpha\cot\beta=$__________. (4) 若 $\sin(\theta+\dfrac{\pi}{6})\sin(\theta-\dfrac{\pi}{6})=\dfrac{11}{20}$, 则 $\tan\theta=$__________.

116. 计算下列各式: (1)$\sin 63^\circ-\cos 63^\circ+2\sqrt{2}\sin 66^\circ\cos 84^\circ=$__________. (2)$\dfrac{1}{2\sin 10^\circ}-2\sin 70^\circ=$__________. (3)$\dfrac{1-4\sin 10^\circ+8\sin^3 10^\circ}{2\cos 80^\circ}=$__________. (4)$\sin 80^\circ\cos 20^\circ+\sin 45^\circ\cos 145^\circ+\sin 55^\circ\cos 245^\circ=$__________.

117. (1) 求证: $\tan\dfrac{3\alpha 2-\tan\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{2}{\sin}\alpha}{\cos\alpha+\cos 2\alpha}$. (2) 已知 $\tan\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, 求 $\cos 2\alpha\cdot\cos 2\beta-\cos^2(\alpha-\beta)$ 的值.

118. 已知 A,B,C 是 $\triangle ABC$ 的三内角, 若 $B=60^\circ$, 求 $\cos A\cos C$ 的取值范围.

119. 计算下列各式: . (1)$\cos 20^\circ+\cos 60^\circ+\cos 100^\circ+\cos 140^\circ$. (2)$\cos\dfrac{2\pi}{7}+\cos\dfrac{4\pi}{7}+\cos\dfrac{6\pi}{7}$.

120. *(1) 求证: ① $\sin\alpha\sin(60^\circ+\alpha)\sin(60^\circ-\alpha)=\dfrac{1}{4}\sin 3\alpha$; ② $\cos\alpha\cos(60^\circ+\alpha)\cos(60^\circ-\alpha)=\dfrac{1}{4}\cos 3\alpha$; ③ $\tan\alpha\tan(60^\circ+\alpha)\tan(60^\circ-\alpha)=\tan 3\alpha$. (2) 求值或化简.. ① $\sin 5^\circ\sin 55^\circ\sin 65^\circ$; ② $\sin 10^\circ\sin 30^\circ\sin 50^\circ\sin 70^\circ$;

③ $\cos 10^\circ \cos 30^\circ \cos 50^\circ \cos 70^\circ$; *④ $\sin x \sin(\frac{1}{3}\pi + x) \sin(\frac{2}{3}\pi + x)$; *⑤ $\tan 5^\circ \tan 55^\circ \tan 65^\circ \tan 75^\circ$. *98. 已知 $f(x) = \cos^2(x+\theta) - 2\cos\theta\cos x\cos(x+\theta) + \cos^2\theta$. (1) 求此函数的最小正周期. (2) 若 $\frac{1}{4} \le f(x) \le \frac{3}{4}$, $0 \le x \le 2\pi$, 求 x 取值范围. *99. 已知 $\cos(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta) + \frac{1}{2}\sin\alpha\cos\alpha = 0$, 且 $3\sin^2\alpha + 2\sin^2\beta = 1$, $\alpha, \beta \in (0, \frac{\pi}{2})$, 求 $\sin(\alpha+\beta)$ 的值. (二) 和差化积公式

121. 下列各式中, 不正确的是 ()

A. $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\beta+\alpha}{2}\cos\frac{\beta-\alpha}{2}$ B. $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\beta+\alpha}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}$ C. $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\beta+\alpha}{2}\cos\frac{\beta-\alpha}{2}$ D. $\cos\alpha - \cos\beta = 2\sin\frac{\beta+\alpha}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}$

122. 函数 $y = \cos^2(x - \frac{\pi}{12}) + \sin^2(x + \frac{\pi}{12}) - 1$ 是 ()

A. 最小正周期为 2π 的奇函数 B. 最小正周期为 2π 的偶函数 C. 最小正周期为 π 的奇函数 D. 最小正周期为 π 的偶函数

123. 将 $\cos^2 x - \sin^2 y$ 化为积的形式, 结果是 ()

A. $-\sin(x+y)\sin(x-y)$ B. $\cos(x+y)\cos(x-y)$ C. $\sin(x+y)\cos(x-y)$ D. $-\cos(x+y)\sin(x-y)$

124. 设 $x + y = \frac{2\pi}{3}$, 则 $\cos x - \cos y$ 的最大值是 ()

A. $-\sqrt{3}$ B. $2\sqrt{3}$ C. $\sqrt{3}$ D. 1

125. 函数 $f(x) = \frac{\cos 3x - \cos x}{\cos x}$ 的值域是 ()

A. $[-4, +\infty)$ B. $[-4, 0)$ C. $(-4, 0]$ D. $(-4, 4]$

126. 求值或化简: (1)$\sin 10^\circ + \sin 50^\circ - \sin 70^\circ =$__________. (2)$\cos 20^\circ - \cos 80^\circ - \sin 50^\circ =$__________. (3)$\sin 15^\circ - \sin 75^\circ + 2\sin 15^\circ \sin 75^\circ =$__________. (4)$\sin 80^\circ - \sin 20^\circ + 2\sin 10^\circ \cos 50^\circ =$__________. (5)$\cos\frac{5\pi}{13} + \cos\frac{3\pi}{13} + 2\cos\frac{9\pi}{13}\cos\frac{\pi}{13} =$__________. (6)$\cos^2(\alpha+\beta) + \cos^2(\alpha-\beta) - \cos 2\alpha\cos 2\beta =$__________. (7)$\cos\alpha + \cos(\frac{2}{3}\pi + \alpha) + \cos(\frac{2}{3}\pi - \alpha) =$__________. (8)$\sin^2 40^\circ + \sin^2 80^\circ + \frac{1}{2}\cos 220^\circ =$__________. (9)$\cos 20^\circ + \sin 60^\circ + \cos 100^\circ + \cos 140^\circ =$__________. (10)$\sin 63^\circ - \sin 27^\circ + 2\sqrt{2}\cos 84^\circ \sin 66^\circ =$__________.

127. 计算下列各式: (1)$\frac{\sin 20^\circ - \cos 50^\circ}{\cos 80^\circ} =$__________. (2)$\frac{\sin 10^\circ + \sin 50^\circ}{\sin 35^\circ \sin 55^\circ} =$__________. (3)$\csc 18^\circ - \csc 54^\circ =$__________.

128. 若 $x + y = 1$, 则 $\sin x + \sin y$ 与 1 的大小关系是 ()

A. $\sin x + \sin y > 1$ B. $\sin x + \sin y = 1$ C. $\sin x + \sin y < 1$ D. 随 x, y 的取值而定

129. 若 $\sqrt{3}(\sin\alpha + \sin\beta) = \cos\beta - \cos\alpha$, $\alpha, \beta \in (0, \pi)$, 则 $\alpha - \beta$ 等于 ()

A. $-\frac{2\pi}{3}$ B. $-\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{\pi}{3}$ D. $\frac{2\pi}{3}$

130. 若 $x > 0$, $y > 0$, $0 < x + y < 2\pi$, 则 $f(x) = \sin(x+y) - \sin x - \sin y$ 的值 ()

A. 恒大于零 B. 恒小于零 C. 恒等于零 D. 符号随 x, y 的取值而定

131. 函数 $y=\sin(2x-\frac{\pi}{6})-\cos 2x$ 的图像, 可由函数 $y=\sqrt{3}\sin 2x$ 的图像 ()

A. 向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度得到　B. 向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度得到　C. 向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度得到　D. 向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度得到

132. 在 "① $\cos 40^\circ+\sqrt{3}\sin 40^\circ=2\cos 20^\circ$, ② $1+2\cos 20^\circ=4\cos 20^\circ\cos 40^\circ$, ③ $\frac{\sin 40^\circ}{1+\cos 40^\circ}=\cot 70^\circ$, ④ $\frac{1-\tan 40^\circ}{1+\tan 40^\circ}=\tan 20^\circ$" 这四个式子中, 成立的个数是 ()

A. 1　B. 2　C. 3　D. 4

133. 已知 $\cos 36^\circ\cos 72^\circ=\frac{1}{4}$, 求下列各式的值: (1)$\cos 36^\circ-\cos 72^\circ$. (2)$\cos^2(\frac{\pi}{5})+\sin^2(\frac{\pi}{10})$. (3)$\cos 12^\circ-\cos 24^\circ-\cos 48^\circ+\cos 84^\circ$.

134. 求下列各式的值: (1)$\cos^2 73^\circ+\sin^2 43^\circ+\cos 73^\circ\sin 43^\circ$. (2)$\cos^2 10^\circ+\cos^2 110^\circ+\cos^2 130^\circ$. (3)$\sin 10^\circ\sin 50^\circ-\sin 50^\circ\sin 70^\circ-\sin 70^\circ\sin 10^\circ$.(4)$\tan 9^\circ-\tan 27^\circ-\tan 63^\circ+\tan 81^\circ$.

135. (1) 已知 $\cos\alpha-\cos\beta=\frac{1}{2}$, $\sin\alpha-\sin\beta=-\frac{1}{3}$, 求 $\sin(\alpha+\beta)$, $\cos(\alpha-\beta)$ 的值. (2) 已知 $\cos\alpha+\cos\beta=\frac{\sqrt{2}}{4}$, $\tan(\alpha+\beta)=-\frac{4}{3}$, 求 $\sin\alpha+\sin\beta$ 的值. *(3) 已知 $a\cos x+b\sin x+c=0(a\neq 0)$ 在区间 $(\frac{\pi}{2},\pi)$ 内有两个相异的实根 α,β, 求 $\sin(\alpha+\beta)$ 的值. *(4) 已知 $\sin\alpha+\sin\beta=\frac{3}{5}$, $\cos\alpha+\cos\beta=\frac{4}{5}$, 求 $\cos\alpha\cdot\cos\beta$ 的值.

136. 根据下列条件判断 $\triangle ABC$ 的形状: (1)$\sin A+\sin B=\cos A+\cos B$. (2)$\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C<2$. *(3)$\tan B=\frac{\cos(B-C)}{\sin A-\sin(B-C)}$. *(4)$\sin A=\frac{\sin B+\sin C}{\cos B+\cos C}$. *116. 将 $\sin x+\sin y+\sin z-\sin(x+y+z)$ 化为积的形式. *ll7. 若 $\frac{\sin(A+30^\circ)-\sin(B+30^\circ)}{\cos A-\cos B}=m\cot\frac{A+B}{2}+n$, 求 m,n 的值. *118. 已知 $\sin A+\sin B-\sin C=0$, $\cos A+\cos B-\cos C=0$, 求证: $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C$ 为定值. *119.(1) 已知 $0<x<\pi$, 求函数 $f(x)=-\frac{1}{2}+\frac{\sin\frac{5x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}$ 的最小值. (2) 已知三角形内角 θ 满足 $\frac{\sin\frac{5\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}}-\frac{1}{2}=a\cos\theta+a$, 求实数 a 的取值范围.

137. (1) 已知 $0<\alpha<\pi$, $0<\beta<\pi$, 且 $\cos\alpha+\cos\beta-\cos(\alpha+\beta)=\frac{3}{2}$, 求证: $\alpha=\beta=\frac{\pi}{3}$. *(2) 已知 A,B 是两个锐角, 且满足 $a\sin A+b\cos B-\sin B=0$, $a\sin B+b\cos A-\sin A=0$, 又 $\tan\frac{A+B}{2}=a+1$, 求证: $a^2+b=1$. 三、解斜三角形【典型题型和解题技巧】

138. 三角形形状的确定. 按边分: 可分为等边三角形、等腰三角形和不等边三角形. 按角分: 可分为锐角三角形、直角三角形和钝角三角形.

139. 根据条件确定三角形的形状: (1) 已知 $\frac{a^3+b^3-c^3}{a+b-c}=c^2$, 且 $\sin A\sin B=\frac{3}{4}$. (2)$\cos A+\cos B>\sin A+\sin B$. (3)$a\cos B+b\cos C+c\cos A=b\cos A+c\cos B+a\cos C$. 解 (l) 由 $\frac{a^3+b^3-c^3}{a+b-c}=c^2$, 得 $a^2+b^2=c^2(a+b)$, 即 $(a+b)(a^2-ab+b^2-c^2)=0$. $a+b\neq 0$, $c^2=a^2+b^2-ab$, 结合余弦定理可得 $2\cos C=1$. $\cos C=\frac{1}{2}$, 故 $C=60^\circ$, 再由 $\sin A\sin B=\frac{3}{4}$, 得 $-\frac{1}{2}[\cos(A+B)-\cos(A-B)]=\frac{3}{4}$. $A+B=120^\circ$, $\frac{1}{2}\cos(A-B)=\frac{1}{2}$, $A=B$. $\triangle ABC$ 为等边三角形. (2) $(\cos A+\cos B)-(\sin A+\sin B)=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}-2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}=2\cos\frac{A-B}{2}(\cos\frac{A+B}{2}-\sin\frac{A+B}{2})=2\sqrt{2}\cos\frac{A-B}{2}\sin(\frac{\pi}{4}-\frac{A+B}{2})$, 由条件

$\cos A+\cos B>\sin A+\sin B$ 及 $\cos\dfrac{A-B}{2}>0$, 得 $\sin\dfrac{\pi-2(A+B)}{4}>0$, $2k\pi<\dfrac{\pi-2(A+B)}{4}<2k\pi+\pi$, 即 $2k\pi<\dfrac{C-(A+B)}{4}<2k\pi+\pi$. 又 A,B,C 是三角形的内角, 取 $k=0$, $0<C-(A+B)<4\pi$, 即 $C>A+B$. 结合 $A+B=\pi-C$, 有 $C>\dfrac{\pi}{2}$, $\triangle ABC$ 是钝角三角形 (C 为钝角). (3) 利用正弦定理, 有 $a=2R\sin A$, $b=2R\sin B$, $c=2R\sin C$(R 为 $\triangle ABC$ 的外接圆半径), 由已知条件可得 $(\sin A\cos B-\cos A\sin B)+(\sin B\cos C-\cos B\sin C)+(\sin C\cos A-\cos C\sin A)=0$. 即 $\sin(A-B)+\sin(B-C)+\sin(C-A)=0$, 前两项和差化积. 便得 $2\sin\dfrac{A-C}{2}\cos\dfrac{A-2B+C}{2}-2\sin\dfrac{A-C}{2}\cos\dfrac{A-C}{2}=0$, 即 $\sin\dfrac{A-C}{2}(\cos\dfrac{A-2B+C}{2}-\cos\dfrac{A-C}{2})=0$. 再和差化积, 得 $\sin\dfrac{A-B}{2}\sin\dfrac{B-C}{2}\sin\dfrac{C-A}{2}=0$, 于是 $A=B$ 或 $B=C$ 或 $C=A$. 是等腰三角形.

140. 三角形中的恒等式证明. 对于 $\triangle ABC$ 中的恒等式证明, 除了要能熟练运用正弦定理、余弦定理、三角恒等变换公式等外, 还要能熟练掌握下列变换: $\sin(A+B)=\sin C$, $\cos(A+B)=-\cos C$, $\tan(A+B)=-\tan C$; $\sin\dfrac{A+B}{2}=\cos\dfrac{C}{2}$, $\cos\dfrac{A+B}{2}=\sin\dfrac{C}{2}$, $\tan\dfrac{A+B}{2}=\cot\dfrac{C}{2}$; $\sin(A+B)=\sin C=2\sin\dfrac{C}{2}\cos\dfrac{C}{2}=2\cos\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{C}{2}=2\sin\dfrac{C}{2}\sin\dfrac{A+B}{2}$.

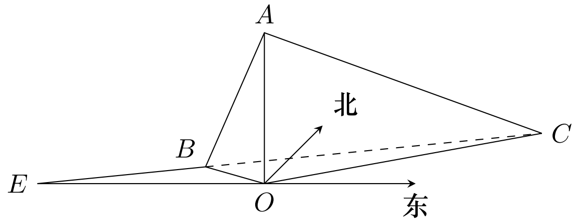
141. 在 $\triangle ABC$ 中, 求证: (1)$\sin^2\dfrac{A}{2}+\sin^2\dfrac{B}{2}+\sin^2\dfrac{C}{2}=1-2\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$. (2)$(a-b)\cot\dfrac{C}{2}+(b-c)\cot\dfrac{A}{2}+(c-a)\cot\dfrac{B}{2}=0$. 证明 (1) 左边 $=\dfrac{1-\cos A}{2}+\dfrac{1-\cos B}{2}+\sin^2\dfrac{C}{2}=1-\cos\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}+\sin^2\dfrac{C}{2}$ $\left\{\begin{array}{l}=1-\sin\dfrac{C}{2}(\cos\dfrac{A-B}{2}-\cos\dfrac{A+B}{2})\\=1-(-2)\sin\dfrac{C}{2}\sin\dfrac{A}{2}\sin(-\dfrac{B}{2})\end{array}\right.$ $=1-2\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}=$ 右边, 原式得证. (2) 左边 $=2R(\sin A-\sin B)\tan\dfrac{A+B}{2}+2R(\sin B-\sin C)\tan\dfrac{B+C}{2}+2R(\sin C-\sin A)\tan\dfrac{C+A}{2}=2R(2\cos\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2}\cdot\dfrac{\sin\dfrac{A+B}{2}}{\cos\dfrac{A+B}{2}}+2\cos\dfrac{B+C}{2}\sin\dfrac{B-C}{2}\cdot\dfrac{\sin\dfrac{B+C}{2}}{\cos\dfrac{B+C}{2}}+2\cos\dfrac{C+A}{2}\sin\dfrac{C-A}{2}\cdot\dfrac{\sin\dfrac{C+A}{2}}{\cos\dfrac{C+A}{2}})=4R(\sin\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2}+\sin\dfrac{B+C}{2}\sin\dfrac{B-C}{2}+\sin\dfrac{C+A}{2}\sin\dfrac{C-A}{2})=2R[(\cos A-\cos B)+(\cos B-\cos C)+(\cos C-\cos A)]=0=$ 右边, 原式得证.

142. 三角形中的有关计算. 一般情况下, 解斜三角形可按下列步骤进行: (1) 若是实际的应用题, 则应将所讨论的问题归结到某一个三角形中. (2) 在三角形中表明已知量与所要求的量, 分析已知量与所求量之间的关系. (3) 利用三角形的有关知识进行计算.

143. 在 $\triangle ABC$ 中. 已知 $A>B>C$, 且 $A=2C$, $b=4$, $a+c=8$, 求 a,c 的长. 解由正弦定理 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}$ 及 $A=2C$, 得 $\cos C=\dfrac{a}{2c}$. 由条件 $a+c=8=2b$, 利用余弦定理得 $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{a^2+(\frac{a+c}{2})^2-c^2}{a(a+c)}=\dfrac{5a^2+2ac-3c^2}{4a(a+c)}=\dfrac{(5a-3c)(a+c)}{4a(a+c)}=\dfrac{5a-3c}{4a}$. 于是 $\dfrac{a}{2c}=\dfrac{5a-3c}{4a}$, 整理得 $(2a-3c)(a-c)=0$. $a\neq c$, $2a=3c$. $a+c=8$, $a=\dfrac{24}{5}$, $c=\dfrac{16}{5}$.

144. 如图, 海岛 O 上有一座海拔 1000 米的山, 山顶上设有一个观察站 A, 上午 11 时测得一轮船在岛北偏东 60° 的 C 处, 俯角为 30°; 11 时 10 分又测得该船在岛的北偏西 60° 的 B 处, 俯角为 60°. (1) 该船的速度为每小

时多少千米? (2) 若此船以不变航速继续前进, 则它何时到达岛的正西方向? 此时所在点 E 离开海岛多少千米?



解 (1) 在 Rt$\triangle ABC$ 与 Rt$\triangle AOC$ 中, 求得 $OB = OA\tan 30^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$(千米), $OC = OA\tan 60^\circ = \sqrt{3}$(千米). 由余弦定理, 得 $\begin{cases} BC = \sqrt{OB^2 + OC^2 - 2\cdot OB\cdot OC\cos\angle BOC} \\ = \sqrt{\dfrac{3}{9} + 3 - 2(-\dfrac{1}{2})} = \sqrt{\dfrac{13}{3}}, \end{cases}$ 于是船速 $v = \dfrac{BC}{\frac{1}{6}} = 2\sqrt{39}$(千米/时).

(2) 在 $\triangle OBC$ 中, 由余弦定理, 得 $\cos\angle OBC = \dfrac{BC^2 + OB^2 - OC^2}{2\cdot BC\cdot OB} = \dfrac{\frac{13}{3} + \frac{3}{9} - 3}{2\sqrt{\frac{13}{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}} = \dfrac{5}{\sqrt{13}}26$. 于是 $\sin\angle EBO = \sin\angle OBC = \sqrt{1 - (\dfrac{5\sqrt{13}}{26})^2} = \dfrac{3\sqrt{39}}{26}$, $\begin{cases} \sin\angle BEO = \sin[180^\circ - (\angle EBO + 30^\circ)] = \sin(\angle EBO + 30^\circ) \\ = \dfrac{3\sqrt{39}}{26}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{5\sqrt{13}}{26}\times\dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{13}}{13}. \end{cases}$
在 $\triangle BEO$ 中, 由正弦定理, 得 $OE = \dfrac{OB\cdot\sin\angle EBO}{\sin\angle BEO} = \dfrac{3}{2}$(千米), $BE = \dfrac{OB\sin\angle BOE}{\sin\angle BEO} = \dfrac{\sqrt{39}}{6}$(千米). 于是从 B 到 E 所需时间 $t = \dfrac{BE}{v} = \dfrac{1}{12}$(时)= 5 分. 再经过 5 分到达海岛的正西方方向, 此时 E 点离海岛 1.5 千米. 【训练题】

145. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $A = 60^\circ$, $AC = 16$, 且此三角形的面积为 $220\sqrt{3}$, 则 BC 边的长是 ()

A. $\sqrt{2400}$　B. 25　C. 51　D. 49

146. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $a + b = 10$, $c = 6$, $C = 30^\circ$, 则此三角形的面积等于 ()

A. $8(2+\sqrt{3})$　B. $8(2-\sqrt{3})$　C. $16(2+\sqrt{3})$　D. $16(2-\sqrt{3})$

147. 若 $\triangle ABC$ 的三边 a, b, c 满足 $\dfrac{1}{a+b} + \dfrac{1}{b+c} = \dfrac{3}{a+b+c}$, 则 B 等于 ()

A. 30°　B. 45°　C. 60°　D. 120°

148. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $A = 60^\circ$, 且最大边长和最小边长恰好是方程 $x^2 - 7x + 11 = 0$ 的两根, 则第三边的边长为 ()

A. 2　B. 3　C. 4　D. 5

149. 若三角形的三条边氏分别是 4, 5, 6, 则这个三角形的形状 ()

A. 是锐角三角形　B. 是直角三角形　C. 是钝角三角形　D. 不能确定

150. 若三角形的角 A 满足 $\sin A = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, 则 A 等于 ()

A. 60°　B. 120°　C. 60° 或 120°　D. 30° 或 150°

151. 若三角形的三内角之比为 $1:2:3$, 则它们所对边的边长之比为 ()

A. $1:2:3$ B. $3:4:5$ C. $11:\sqrt{3}:2$ D. $5:6:7$

152. 在 $\triangle ABC$ 中, $a(\sin B-\sin C)+b(\sin C-\sin A)+c(\sin A-\sin B)$ 的值是 ()

A. $\frac{1}{2}$ B. 0 C. 1 D. π

153. 若方程 $x^2\sin A+2x\sin B+\sin C=0$ 有重根, 则 $\triangle ABC$ 的三边 a,b,c 满足关系式 ()

A. $b=ac$ B. $a=b=c$ C. $c=ab$ D. $b^2=ac$

154. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $a=1$, $b=\sqrt{3}$, $A=30^\circ$, 则 B 的值是 ()

A. 60° B. 60. 或 120° C. 120° D. 30° 或 150°

155. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $B=45^\circ$, $c=2\sqrt{2}$, $b=\frac{4\sqrt{3}}{3}$, 则 A 的值是 ()

A. 15° B. 75° C. 105° D. 15° 或 75°

156. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $B=45^\circ$, $b=10$, $c=5\sqrt{6}$, 则 a 等于 ()

A. $5(\sqrt{3}+1)$ B. $5(\sqrt{3}-1)$ C. $10(\sqrt{3}+1)$ 或 $10(\sqrt{3}-1)$ D. $5(\sqrt{3}+1)$ 或 $5(\sqrt{3}-1)$

157. 在 $\triangle ABC$ 中, 若三内角满足 $\sin^2 A=\sin^2 B+\sin B\sin C+\sin^2 C$, 则 A 等于 ()

A. 30° B. 60° C. 120° D. 150°

158. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $b=2\sqrt{2}$, $a=2$, 且三角形有解, 则 A 的取值范围是 ()

A. $0^\circ<A<30^\circ$ B. $0^\circ<A\leq 45^\circ$ C. $0^\circ<A<90^\circ$ D. $30^\circ<A<60^\circ$

159. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $a\cos A=b\cos B$, 则 $\triangle ABC$ 的形状 ()

A. 只可能是等边三角形 B. 只可能是等腰三角形 C. 只可能是直角三角形 D. 既可能是等腰三角形, 也可能是直角三角形

160. 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中, 已知 $C=90^\circ$, $a=2$, $c=\sqrt{29}$, 那么 $\tan B$ 的值等于 ()

A. $\frac{2}{5}$ B. $\frac{2\sqrt{29}}{29}$ C. $\frac{5\sqrt{29}}{29}$ D. $\frac{5}{2}$

161. 在 $\triangle ABC$ 巾, 若 $C=90^\circ$, $S_{\triangle ABC}=8\sqrt{3}$, $b=4$, 则 B 等于 ()

A. 15° B. 30° C. 45° D. 60°

162. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $C=90^\circ$, 则 $a^3\cos A+b^3\cos B$ 等于 ()

A. c^3 B. abc C. $(a+b)c^2$ D. $(a+b)c^3$

163. 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中, 若 $B=60^\circ$, $C=45^\circ$, $BC=8$, $AD\perp BC$ 于点 D, 则 AD 的长为 ()

A. $4(\sqrt{3}-1)$ B. $4(\sqrt{3}+1)$ C. $4(3-\sqrt{3})$ D. $4(3+\sqrt{3})$

164. 若 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 的斜边 $AB=2$, 则其内切圆的半径 r 的取值范围是 ()

A. $(1,\sqrt{2}]$　　B. $[1,\sqrt{2}]$　　C. $(0,\sqrt{2}-1]$　　D. $[1,\sqrt{2}-1]$

165. 若 AD 是 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 斜边 BC 上的高, 则下列命题不成立的是 ()

A. $\sin B=\sqrt{\dfrac{CD}{BC}}$　　B. $\cos B=\sqrt{\dfrac{BD}{BC}}$　　C. $\tan B=\sqrt{\dfrac{BD}{CD}}$　　D. $\cot B=\sqrt{\dfrac{BD\cdot BC}{AC}}$

166. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $\sin A=\sin B$, 则下列结论中正确的是 ()

A. $A=B$　　B. $A=180^\circ-B$　　C. $A=B$ 或 $A=180^\circ-B$　　D. $A+B=90^\circ$

167. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $\sin A:\sin B:\sin C=3:5:7$, 则此三角形的最大内角的度数等于 ()

A. 75°　　B. 120°　　C. 135°　　D. 150°

168. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $A=60^\circ$, $B=1$, $S_{\triangle ABC}=\sqrt{3}$, 则 $\dfrac{a+b+c}{\sin A+\sin B+\sin C}$ 等于 ()

A. $\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$　　B. $\dfrac{2\sqrt{39}}{3}$　　C. $\dfrac{26\sqrt{3}}{3}$　　D. $2\sqrt{7}$

169. 若 $\triangle ABC$ 的三边 a,b,c 满足 $(a+b-c)(c-a)=0$, 则此三角形的形状是 ()

A. 不等腰的锐角三角形　　B. 直角三角形　　C. 不等腰的钝角三角形　　D. 等腰三角形

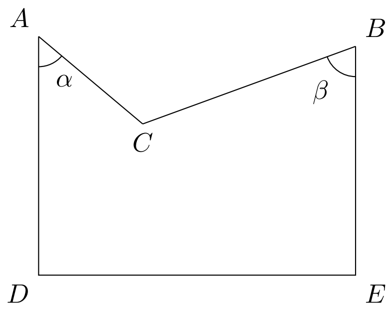
170. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $\sin A\cdot\cos B<0$, 则 $\triangle ABC$ 的形状 ()

A. 是锐角三角形　　B. 是直角三角形　　C. 是钝角三角形　　D. 不能确定

171. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $\sin A=2\cos B\cdot\sin C$, 则此三角形的形状 ()

A. 是等腰三角形, 但不一定是等边三角形　　B. 是等边三角形　　C. 是不等腰的直角三角形　　D. 是边长互不相等的三角形

172. 一角槽的横断面如图所示, $\angle ADE=\angle BED=90^\circ$, 且 $\alpha=50^\circ$, $\beta=70^\circ$, $AC=90\mathrm{mm}$, $BC=150\mathrm{mm}$, 则 DE 的长约等于 (　　).



A. 210mm　　B. 200mm　　C. 198mm　　D. 171mm

(第 148 题)

173. $\triangle ABC$ 的 BC 边上有一点 D, 满足 $\angle CAD=\angle DAB=60^\circ$, 且 $AC=3$, $AB=6$, 则 AD 的长为 ()

A. 2　　B. 2.5　　C. 3　　D. 3.5

174. 设 a, $a+1$, $a+2$ 是钝角三角形的三边, 则 a 的取值范围是 ()

A. $0<a<3$　　B. $1<a<3$　　C. $3<a<4$　　D. $4<a<6$

175. 在 $\triangle ABC$ 中, 根据条件求三角形的内角: (1) 若 $a=\sqrt{3}+1$, $b=2$, $c=\sqrt{6}$, 则 $A=$__________. (2) 若 $a:b:c=\sqrt{2}:(1+\sqrt{3}):2$, 则 $A=$__________. (3) 若三角形中三边长的比为 $3:4:\sqrt{37}$, 则这个三角形的最大内角等于__________. (4) 若 $(a+b+c)(b+c-a)=3bc$, 则 $A=$__________. (5) 若 $2\lg(a^2+b^2-c^2)=\lg 2+2\lg a+2\lg b$, 则 $C=$__________. (6) 若三角形面积 $S=\dfrac{1}{4\sqrt{3}}(b^2+c^2-a^2)$, 则 $A=$__________.

176. 在 $\triangle ABC$ 中, 根据条件求三角形的边长: (1) 若 $a=6$, $b=6\sqrt{3}$, $A=30^\circ$, 则 $c=$__________. (2) 若一内角为 30°, 它的一邻边边长为 4, 对边长为 $\dfrac{5}{2}$, 则另一邻边边长为__________. (3) 若一个内角是 45°, 这个角的一条邻边长是 $\sqrt{3}+1$, 对边长是 2, 则其另一条邻边长等于__________. (4) 若 $\dfrac{b-1}{c+2}=\dfrac{2}{3}$, $a=\sqrt{21}$, $A=60^\circ$, 则 $c=$__________. (5) 若 $AB=AC$, $BC-AB=2$, $\cos B=\dfrac{4}{5}$, 则 $AB=$__________, $BC=$__________. (6) 若 $a+b=8$, $c=7$, $C=60^\circ$, 则 $a=$__________, $b=$__________. (7) 若三角形的面积为 $\sqrt{3}$, $B=60^\circ$, $b=4$, 则 $a=$__________, $c=$__________.

177. 在 $\triangle ABC$ 中, 根据条件求三角形的内角: (1) 若 $b=2c\sin B$, 则 $C=$__________. (2) 若 $a=4$, $b=6$, $\sin B=\dfrac{3}{4}$, 则 $A=$__________. (3) 若 $a=2\sqrt{2}$, $b=2\sqrt{3}$, $A=45^\circ$. 则 $C=$__________.

178. 在 $\triangle ABC$ 中, 根据条件求三角形的边长: (1) 若等边 $\triangle ABC$ 的外接圆半径为 $6\sqrt{3}\text{cm}$, 则它的边长为__________. (2) 若 $A=105^\circ$, $B=45^\circ$, $c=\sqrt{2}$, 则 $b=$__________. (3) 若 $A=45^\circ$, $B=60^\circ$, $a=10$, 则 $b=$__________, $c=$__________. (4) 若 $\cos A=\dfrac{\sin B}{2\sin C}$, $b=4\sqrt{3}$, $2\sin B=\sqrt{3}$, 则 $a=$__________.

179. 在 $\triangle ABC$ 中, 根据条件直接写出结论: (1) 若 $\sqrt{(\sin B-\frac{\sqrt{2}}{2})^2}+(\sqrt{3}-\tan C)^2=0$, 则 $A=$__________. (2) 若 $AC=5$, $B=60^\circ$, $AD\perp BC$ 于点 D, 且 $AD=3$, 则 $BC=$__________, $AB=$__________. (3) 若 $C=90^\circ$, $CD\perp AB$ 于点 D, $BD=6$, $CD=2$, 则 $\sin A=$__________.

180. 在 $\triangle ABC$ 中, 根据条件计算: (1) 若 $2B=A+C$, 且边 $AC=2$, 则外接圆半径 $R=$__________. (2) 若面积 $S=\dfrac{1}{4}$, 外接圆半径 $R=1$, 则 $abc=$__________. (3) 若 $\dfrac{a}{\sin A}=2$, 则 $\dfrac{a+b+c}{\sin A+\sin B+\sin C}=$__________. (4) 若 $(b+c):(c+a):(a+b)=4:5:6$, 则 $\sin A:\sin B:\sin C=$__________. (5) 若 $A=105^\circ$, $B=30^\circ$, $BC=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$, 则的 B 分线的长为__________. (6) 若 BC 边上的中线 $m=\sqrt{\dfrac{8-3\sqrt{3}}{2}}$, 且 $a=\sqrt{3}+1$, $b=\sqrt{6}$, 则 $B=$__________.

181. 根据条件判断 $\triangle ABC$ 的形状: (1) 若 $\sin A:\sin B:\sin C=2:3:4$, 则这个三角形是__________ 三角形. (2) 若关于 x 的方程 $x^2+\cos B\cdot x-\dfrac{a}{c}=0$ 的两根之和等于两根之积, 则这个三角形是三角形. (3) 若 $b\sin B=c\sin C$, 则这个三角形是__________ 三角形. (4) 若 $a\cos A=b\cos B$, 则这个三角形是__________ 三角形. (5) 若 $\sin A=2\sin B\cos C$, 且 $\dfrac{a+b-c}{b+c-a}=\dfrac{3b}{c}$, 则这个三角形是__________ 三角形. (6) 若 $B=30^\circ$, $c=150$, $b=50\sqrt{3}$, 则这个三角形是__________ 三角形. (7) 若 $b=a\sin C$, $c=a\sin(90^\circ-B)$, $B<90^\circ$, 则这个三角形是__________ 三角形. (8) 若 $a=\sqrt{3}-1$, $b=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$, $C=\dfrac{\pi}{4}$, 则这个三角形是__________ 三角形.

182. (1) 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $a=8$, $b=7$, $c=5$, 求 B 及三角形的面积 S. (2) 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $a=12$, $b=4\sqrt{3}$, $A=120°$, 求 C 及三角形的面积. (3) 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $a=7$, $b=3$, $c=5$, 求最大角与 $\sin C$ 的值. (4) 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $b=\sqrt{2}$, $c=1$, $B=45°$, 求 a, C 的值. (5) 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $A=45°$, $B=60°$, $a=10$, 求 b, c 的值. (6) 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $a=10$, $b=6$, $C=120°$, 求 $\sin A$ 的值. (7) 在 $\triangle ABC$ 中, 已知一个内角是 $60°$, 其对边为 7, 且面积为 $10\sqrt{3}$, 求其他两边的长. (8) 已知钝角三角形的三边长是三个连续偶数, 求三边长.

183. 根据条件判断 $\triangle ABC$ 的形状: (1)$A=60°$, $a=1$, $b+c=2$. (2)$(b-c)\cos^2 A = b\cos^2 B - c\cos^2 C$. (3)$\tan\dfrac{A-B2=\dfrac{a}{-}b}{a+b}$.

184. 在 $\triangle ABC$ 中, 求证: (1)$a(\sin B-\sin C)+b(\sin C-\sin A)+c(\sin A-\sin B)=0$. (2)$\sin^2 A+\sin^2 B+\cos^2 C+2\sin A\sin B\cos(A+B)=1$. (3)$a^2(\cos^2 B-\cos^2 C)+b^2(\cos^2 C-\cos^2 A)+c^2(\cos^2 A-\cos^2 B)=0$. (4)$(a^2-b^2-c^2)\tan A+(a^2-b^2+c^2)\tan B=0$. (5)$\dfrac{a-c\cos B}{b-c\cos A}=\dfrac{\sin B}{\sin A}$.

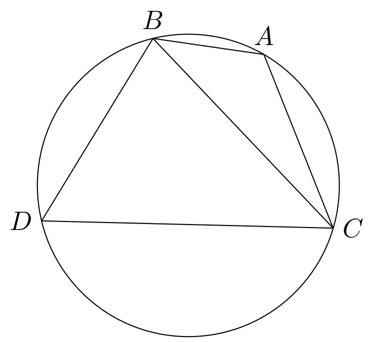
185. 在 $\triangle ABC$ 中: (1) 已知 $(a+b+c)(a+b-c)=3ab$, 求 C. (2) 已知 $ab=60$, $ab=60$, 面积 $S=15$, 求三内角. (3) 已知三边长分别为 k^2+k+1, k^2-1, $2k+1$, 求最大内角. (4) 已知 $(b+c):(c+a):(a+b)=4:5:6$ 求最大内角. (5) 已知面积 $S=\sqrt{3}$, $a=2\sqrt{3}$, $b=2$, 求 A, B, c. (6) 已知 $A=120°$, $AB+BC=21$, $AC+BC=20$, 求 BC 的长.

186. 在 $\triangle ABC$ 中: (1) 已知 $A>90°$, $\sin B=\dfrac{5\sqrt{3}}{14}$, $2^{5a-7b}=1$, 求 $a:b:c$. (2) 已知两边之和为 4, 其夹角为 $60°$, 分别求周氏的最小值和面积的最大值.

187. 在 $\triangle ABC$ 中: (1) 已知 $C=90°$, 求证: $\sin 2A\cdot\cot A=\dfrac{2b^2}{c^2}$. (2) 已知 $A:B=1:2$, 求证: $\dfrac{a}{b}=\dfrac{a+b}{a+b+c}$. (3) 已知 $C=2B$, 求证: $c^2-b^2=ab$. (4) 已知 $A=100°$, $AB=AC$, 角 B 的平分线交 AC 于点 D, 求证: $AD+DB=BC$. (5) 已知 $2b=a+c$, 求证: ① $\tan\dfrac{A}{2}\cdot\tan\dfrac{C}{2}=\dfrac{1}{3}$; ② $\cos A+\cos C-\cos A\cdot\cos C+\dfrac{1}{3}\sin A\cdot\sin C$ 为定值. (6) 已知 $\sin A+\sin C=2\sin B$, 且最大角与最小角之差为 $90°$, 求证: 三边之比为 $(\sqrt{7}-1):\sqrt{7}:(\sqrt{7}+1)$. (7) 已知 $C=90°$, CD 是斜边 AB 上的高, 且 $\triangle CBD$ 的面积是 $\triangle ACD$, $\triangle ABC$ 面积的比例中项, 求证: $\sin B=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

188. 在 $\triangle ABC$ 中: (1) 已知 B 的 2 倍等于其他两角的和, 最长边长与最短边长的和是 8cm, 最长边长与最短边长的积是 15cm2, 求面积及 B 所对边的长. (2) 已知 B 为锐角, $b=7$cm, 外接圆半径 $R=\dfrac{7\sqrt{3}}{3}$cm, 面积 $S=10\sqrt{3}$cm2, 求其他两边的长. (3) 已知 $A=120°$, $\sin B:\sin C=3:2$, 且面积 $S=6\sqrt{3}$, 求 a 的值. (4) 已知 $\sin A:\sin B:\sin C=4:5:6$, 且最大边为 10, 求外接圆半径 R 和内切圆半径 r.

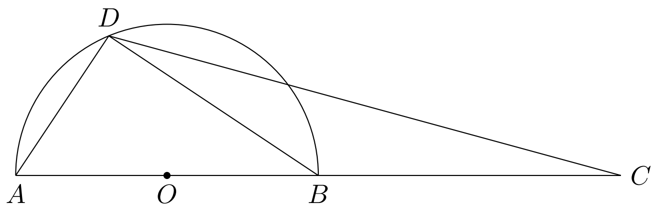
189. 如图, 在圆内接四边形 $ABCD$ 中, 已知边 $AB=3$, $AD=5$, 对角线 $BD=7$, $\angle BDC=45°$, 求:



(1) $\sin\angle BAD$ 的值;

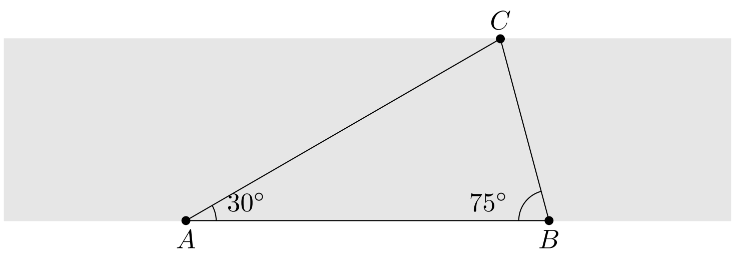
(2) 边 BC 的长.

190. 如图, AB 是半圆 O 的直径, 延长 AB 到 C, 使 $BC=AB$, D 是半圆上一点, 连接 CD, 且 $\tan\angle CDB=\dfrac{1}{3}$, 求 $\cos\angle DAB$ 的值.

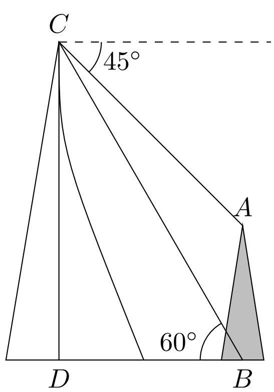


191. 已知 R, r 分别是直角三角形的外接圆半径与内切圆半径, 求 $\dfrac{r}{R}$ 的最大值, 并说明此时三角形的形状.

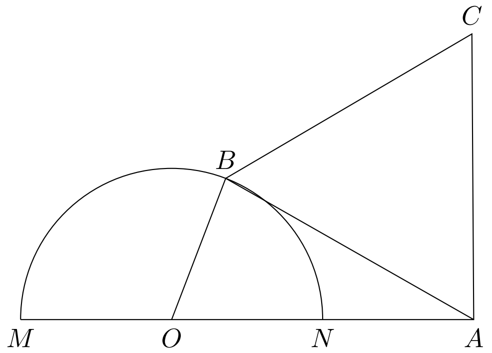
192. 如图, 为了测定河的宽度, 在一岸边选定两点 A, B, 望对岸标记物 C, 测得 $\angle CAB=30^\circ$, $\angle CBA=75^\circ$, $AB=120$ 米, 求河的宽度.



193. 如图, 在塔底 B 测得山顶 C 的仰角为 60°, 在山顶 C 测得塔顶 A 的俯角为 45°, 已知塔高 $AB=20$ 米, 求山高 DC.



194. 如图, 半圆 O 的直径 MN 的长为 2, A 为直径延长线上一点, 且 $OA=2$, B 为半圆上任意一点, 以 AB 为边作等边 $\triangle ABC(A,B,C$ 顺时针排列), $\angle AOB$ 等于多少时, 四边形 $OACB$ 的面积最大? 最大面积是多少?

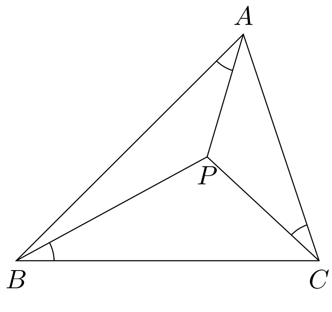


195. 利用三角代换求下列函数的值域: (1)$y=x+\sqrt{1-x^2}+3$. (2)$y=\sqrt{x-4}+\sqrt{15-3x}$. (3)$y=2\sqrt{x+3}+\sqrt{2-x}$. (4)$S=x^2+xy+y^2(1\le x^2+y^2\le 2)$. (5)$y=\sqrt{1+x}-\sqrt{x}$. 注意常用的三角代换有如下几种: 若 $0\le x\le 1$, 可令 $x=\sin^2\alpha$ 或令 $x=\cos^2\alpha(0\le\alpha\le\dfrac{\pi}{2})$, 或令 $x=\tan\alpha(0\le\alpha\le\dfrac{\pi}{4})$; 若 $-1\le x\le 1$, 可令 $x=\sin\alpha(-\dfrac{\pi}{2}\le\alpha\le\dfrac{\pi}{2})$, 或令 $x=\cos\alpha(0\le\alpha\le\pi)$, 或令 $x=\tan\alpha(-\dfrac{\pi}{4}\le\alpha\le\dfrac{\pi}{4})$; 若 $x^2+y^2=R^2$, 可令 $x=R\cos\alpha$, $y=R\sin\alpha(0\le\alpha\le 2\pi)$; 若 $x\in\mathbf{R}$, 可令 $x=\tan\alpha(-\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\dfrac{\pi}{2})$; 若 $x^2-y^2=1$, 可令 $x=\sec\alpha$, $y=\tan\alpha(0\le\alpha<\dfrac{\pi}{2})$

196. (1.) 求函数 $f(x)=\sqrt{x-1}+\sqrt{2-x}$ 的最大值、最小值. (2) 已知 $a,b>0$, 求函数 $f(x)=a\sqrt{1-x^2}+bx$ 的最大值、最小值. (3) 已知 $0\le y<x<\dfrac{\pi}{2}$, 且满足 $\tan x=3\tan y$, 求 $x-y$ 的最大值.

197. (1)$0<\alpha<\beta<\dfrac{\pi}{2}$, 且 $\sin\alpha$, $\sin\beta$ 是方程 $x^2-(\sqrt{2}\cos 40^\circ)x+\cos^2 40^\circ-\dfrac{1}{2}=0$ 的两根, 求 $\cos(2\alpha-\beta)$ 的值. (2) 在 $\triangle ABC$ 中, $\tan A$, $\tan B$ 是关于 x 的二次方程 $x^2+mx+m+1=0$ 的两个实根, 求实数 m 的取值范围.

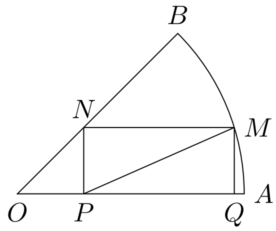
198. 如图, 已知 P 为 $\triangle ABC$ 内一点, 且满足 $\angle PAB=\angle PBC=\angle PCA=\theta$, 求证: $\cot\theta=\cot A+\cot B+\cot C$.



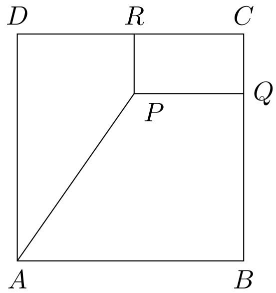
199. 若不等式 $\dfrac{(x^2+1)\cos\theta-x(\cos\theta-5)+3}{x^2-x+1}>\sin\theta-1$ 对任意实数 x 恒成立, 求 θ 的取值范围.

200. 已知函数 $f(x)=a+b\cos x+c\sin x$ 的图像过两点 $(0,1)$, $(\dfrac{\pi}{2},1)$, 且当 $x\in[0,\dfrac{\pi}{2}]$ 时, $|f(x)|\le 2$, 求实数 a 的取值范围.

201. (1) 已知 $\odot O$ 的半径为 R, 它的内接三角形 ABC 满足关系式 $2R(\sin^2 A-\sin^2 C)=(\sqrt{2}a-b)\sin B$, 求 $\triangle ABC$ 面积的最大值. (2) 如图, 已知扇形 AOB 的中心角为 45°, 半径为 1, 矩形 $MNPQ$ 内接于扇形, 使 P,Q 点在半径 OA 上, 求矩形 $MNPQ$ 的对角线 PM 的最小值.



(3) 如图, 已知 P 是正方形 $ABCD$ 内一点, $PQ \perp BC$, $PR \perp CD$, $(Q, R$ 为垂足), $AB = 10$, $AP = 9$, 求矩形面积的最大值、最小值.



202. (1) 若 $x \neq k\pi (k \in \mathbf{N})$, 求证: ① $\dfrac{1}{\sin 2x} = \cot x - \cot 2x$; ② $\dfrac{1}{\sin 2x} + \dfrac{1}{\sin 2^2 x} + \cdots + \dfrac{1}{\sin 2^n x} = \cot x - \cot 2^n x$. (2) 求证: $\tan x \tan 2x + \tan 2x \tan 3x + \cdots + \tan(n-1)x \tan nx = \dfrac{\tan nx}{\tan x} - n (n \in \mathbf{N})$. (3) 求证: $(2\cos\theta - 1)(2\cos 2\theta - 1)(2\cos 2^2\theta - 1) \cdot \cdots \cdot (2\cos 2^{n-1}\theta - 1) = \dfrac{2\cos 2^n\theta + 1}{2\cos\theta + 1}$

203. 求 $\cos\dfrac{\pi}{17}\cos\dfrac{2\pi}{17}\cos\dfrac{3\pi}{17}\cos\dfrac{4\pi}{17}\cos\dfrac{5\pi}{17}\cos\dfrac{6\pi}{17}\cos\dfrac{7\pi}{17}\cos\dfrac{8\pi}{17}$ 的值.

204. 实数 x, y, z 满足 $\sin x = a\sin(y-z)$, $\sin y = b\sin(z-x)$, $\sin z = c\sin(x-y)(a, b, c \neq 1)$, 且 $\sin(x-y)$, $\sin(y-z)$, $\sin(z-x)$ 都不为 0, 求 a, b, c 应满足的关系式.