

- “变”角. 所谓变角, 就是将角度进行恒等变换, 为解题作铺垫, 常用的变角类型有  $2\alpha = (\alpha + \beta) + (\alpha - \beta)$ ,  $2\beta = (\alpha + \beta) + (\alpha - \beta)$ ,  $\alpha = (\alpha + \beta) - \beta$ ,  $\alpha = (\alpha + 45^\circ) - 45^\circ$ ,  $\alpha = (m+1)\alpha - m\alpha$ , 等等.
- 已知  $\cos(\alpha + \beta) = \frac{4}{5}$ ,  $\cos(\alpha - \beta) = -\frac{4}{5}$ , 其中  $\alpha + \beta \in (\frac{7\pi}{4}, 2\pi)$ ,  $\alpha - \beta \in (\frac{3\pi}{4}, \pi)$ , 求  $\cos 2\alpha$ . 解:  $\because \frac{7\pi}{4} < \alpha + \beta < 2\pi$ ,  $\frac{3\pi}{4} < \alpha - \beta < \pi$ ,  $\therefore \sin(\alpha + \beta) = -\frac{3}{5}$ ,  $\sin(\alpha - \beta) = \frac{3}{5}$ , 于是  $\cos 2\alpha = \cos[(\alpha + \beta) + (\alpha - \beta)] = \cos(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta) - \sin(\alpha + \beta)\sin(\alpha - \beta) = \frac{4}{5}(-\frac{4}{5}) - (-\frac{3}{5}) \times \frac{3}{5} = -\frac{16}{25} + \frac{9}{25} = -\frac{7}{25}$ .
- 求证:  $\tan(\alpha - \beta) + \tan(\beta - \gamma) + \tan(\gamma - \alpha) = \tan(\alpha - \beta)\tan(\beta - \gamma)\tan(\gamma - \alpha)$ . 证明  $\tan(\gamma - \alpha) = -\tan(\alpha - \gamma) = -\tan[(\alpha - \beta) + (\beta - \gamma)] = -\frac{\tan(\alpha - \beta) + \tan(\beta - \gamma)}{1 - \tan(\alpha - \beta)\tan(\beta - \gamma)}$ . 去分母, 得  $-\tan(\gamma - \alpha) + \tan(\gamma - \alpha)\tan(\alpha - \beta)\tan(\beta - \gamma) = \tan(\alpha - \beta) + \tan(\beta - \gamma)$ , 即  $\tan(\alpha - \beta) + \tan(\beta - \gamma) + \tan(\gamma - \alpha) = \tan(\alpha - \beta)\tan(\beta - \gamma)\tan(\gamma - \alpha)$ .
- “拆”角. 所谓拆角, 就是把已知的角一拆为二, 以达到消项的目的. 实际上, 拆角是变角的特例.
- 求  $\frac{2\cos 10^\circ - \sin 20^\circ}{\cos 20^\circ}$  的值. 解原式  $= \frac{2\cos(30^\circ - 20^\circ) - \sin 20^\circ}{\cos 20^\circ} = \frac{2(\cos 30^\circ \cos 20^\circ + \sin 30^\circ \sin 20^\circ) - \sin 20^\circ}{\cos 20^\circ} = \frac{2\cos 30^\circ \cos 20^\circ}{\cos 20^\circ} = \sqrt{3}$ . 注意上述解法是把  $10^\circ$ “拆”成  $30^\circ - 20^\circ$  来求解, 如果把  $20^\circ$ “拆”成  $30^\circ - 10^\circ$  也可获解, 但过程较冗赘.
- 正、余互变. 如果  $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ , 那么  $\sin \alpha = \cos \beta$ ,  $\cos \alpha = \sin \beta$ ,  $\tan \beta = \cot \alpha$ . 例如, 由  $(\frac{\pi}{3} - \varphi) + (\frac{\pi}{6} + \varphi) = \frac{\pi}{2}$ , 可得  $\sin(\frac{\pi}{3} - \varphi) = \cos(\frac{\pi}{6} + \varphi)$ .
- 已知  $\sin(\frac{\pi}{4} - x) = \frac{5}{13}$ , 且  $0 < x < \frac{\pi}{4}$ . 求  $\frac{\cos 2x}{\cos(\frac{\pi}{4} + x)}$  的值. 解由条件, 得  $\cos(\frac{\pi}{4} - x) = \frac{12}{13}$ .  $\therefore$  原式  $= \frac{\sin(\frac{\pi}{2} - 2x)}{\cos(\frac{\pi}{4} + x)} = \frac{\sin 2(\frac{\pi}{4} - x)}{\cos(\frac{\pi}{4} + x)} = \frac{2\sin(\frac{\pi}{4} - x)\cos(\frac{\pi}{4} - x)}{\cos(\frac{\pi}{4} + x)} = \frac{2\cos(\frac{\pi}{4} + x)\cos(\frac{\pi}{4} - x)}{\cos(\frac{\pi}{4} + x)} = 2\cos(\frac{\pi}{4} - x) = \frac{24}{13}$ .
- 逆用公式. 由  $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$  可得  $\tan \alpha + \tan \beta = \tan(\alpha + \beta)(1 - \tan \alpha \tan \beta)$ , 或  $1 - \tan \alpha \tan \beta = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{\tan(\alpha + \beta)}$ . 后两个公式是第一个公式的逆用.
- 求  $\tan 65^\circ + \tan 70^\circ + 1 - \tan 65^\circ \tan 70^\circ$  的值. 解原式  $= \tan(65^\circ + 70^\circ)(1 - \tan 65^\circ \tan 70^\circ) + 1 - \tan 65^\circ \tan 70^\circ = (-1) \cdot (1 - \tan 65^\circ \tan 70^\circ) + 1 - \tan 65^\circ \tan 70^\circ = 0$ . 注意此例也可用“他推法”求解. 所谓“他推法”, 即从某已知等式出发, 经过变换后, 便可获得欲求之解. 如例 5,  $\because 135^\circ = 65^\circ + 70^\circ$ , 两边取正切, 便得  $-1 = \tan(65^\circ + 70^\circ) = \frac{\tan 65^\circ + \tan 70^\circ}{1 - \tan 65^\circ \tan 70^\circ}$ ,  $\therefore \tan 65^\circ \tan 70^\circ - 1 = \tan 65^\circ + \tan 70^\circ$ , 移项即可得原式  $= 0$ . 请读者思考, 如何通过“公式逆用”或“他推法”来证明:  $\tan(A - B) + \tan(B - C) + \tan(C - A) = \tan(A - B)\tan(B - C)\tan(C - A)$ .
- 合一变形. 形如  $a \sin x + b \cos x$  的式子颇为常见. 此类式子可作“合一变形”, 即  $a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2}(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x) = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \varphi)$ , 其中,  $\sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ ,  $\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ . 由此便可求得  $a \sin x + b \cos x$  的值域、周期和单调区间等.
- 求函数  $f(x) = \sin x - \sqrt{3} \cos x$  的值域、最小正周期以及为增函数的区间. 解:  $f(x) = 2(\sin x \cdot \frac{1}{2} - \cos x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}) = 2\sin(x - \frac{\pi}{3})$ ,  $\therefore$  函数的值域为  $[-2, 2]$ , 最小正周期是  $2\pi$ , 为增函数的区间是  $[2k\pi - \frac{\pi}{6}, 2k\pi + \frac{5\pi}{6}] (k \in \mathbf{Z})$ .

12. 求函数  $y = \frac{\sqrt{3} \sin x}{2 + \cos x}$  的值域. 解由已知, 得  $2y + y \cos x = \sqrt{3} \sin x$ , 即  $\sqrt{3} \sin x - y \cos x = 2y$ ,  $\therefore \sin x \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3+y^2}} - \cos x \cdot \frac{y}{\sqrt{3+y^2}} = \frac{2y}{\sqrt{3+y^2}}$ . 于是  $\sin(x-\varphi) = \frac{2y}{\sqrt{3+y^2}}$  (其中  $\varphi$  满足  $\sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{3+y^2}}$ ,  $\cos \varphi = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3+y^2}}$ ).  $\therefore |\sin(x-\varphi)| \leq 1$ ,  $\therefore \frac{2y}{\sqrt{3+y^2}} \leq 1$ ,  $\therefore -1 \leq y \leq 1$ . 注意对于求  $y = \frac{a \sin x + b \cos x + c}{a' \sin x + b' \cos x + c'}$  的值域, 均可采用例 7 的方法, 即去分母, 合一变形, 解不等式三个步骤.

13. 升幂和降幂. (1) 升幂. 运用公式  $1 + \cos 2x = 2 \cos^2 x$ ,  $1 - \cos 2x = 2 \sin^2 x$ .

14. 化简  $\frac{1 + \cos \theta - \sin \theta}{1 - \cos \theta - \sin \theta} + \frac{1 - \cos \theta - \sin \theta}{1 + \cos \theta - \sin \theta}$ . 解原式 =  $\frac{2 \cos^2 \frac{\theta}{2} - 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}}{2 \sin^2 \frac{\theta}{2} - 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}} + \frac{2 \sin^2 \frac{\theta}{2} - 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}}{2 \cos^2 \frac{\theta}{2} - 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}} = \begin{cases} \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} \\ -(\cot \frac{\theta}{2}) \end{cases}$
- (2) 降幂. 逆用公式  $\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$  和  $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$ , 可得  $\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$ ,  $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$ .

15. 求函数  $y = 3 \sin^2 \alpha - 4 \sin \alpha \cdot \cos \alpha + \cos^2 \alpha$  的值域和最小正周期. 解  $\therefore y = 3 \cdot \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} - 2 \sin 2\alpha + \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} = 2 - (2 \sin 2\alpha + \cos 2\alpha) = 2 - \sqrt{5}(2\alpha + \varphi)$ , 其中  $\sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{5}}$ ,  $\cos \varphi = \frac{2}{\sqrt{5}}$ ,  $\therefore$  函数的值域是  $[2 - \sqrt{5}, 2 + \sqrt{5}]$ , 最小正周期是  $\pi$ . 注意对于形如  $y = a \sin^2 \alpha + b \sin \alpha \cos \alpha + c \cos^2 \alpha$  的函数, 宜采用“先降幂, 后合一”的方法进行化简, 再研究其性质. 【训练题】(一) 两角和(差)的余弦公式

16. 化简  $\sin(x+y) \sin x + \cos(x+y) \cos x$  的结果是 ()

A.  $\cos(2x+y)$  B.  $\cos y$  C.  $\sin(2x+y)$  D.  $\sin y$

17. 满足  $\cos \alpha \cos \beta = \frac{\sqrt{3}}{2} + \sin \alpha \sin \beta$  的一组  $\alpha, \beta$  的值是 ()

A.  $\alpha = \frac{13\pi}{12}, \beta = \frac{3\pi}{4}$  B.  $\alpha = \frac{\pi}{2}, \beta = \frac{\pi}{3}$  C.  $\alpha = \frac{\pi}{2}, \beta = \frac{\pi}{6}$  D.  $\alpha = \frac{\pi}{3}, \beta = \frac{\pi}{6}$

18. 若  $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ , 且  $\cot(\frac{3\pi}{2} + \alpha) = \frac{3}{4}$ , 则  $\cos(\alpha - \frac{3\pi}{2})$  的值等于 ()

A.  $\frac{\sqrt{2}}{10}$  B.  $-\frac{\sqrt{2}}{10}$  C.  $\frac{7\sqrt{2}}{10}$  D.  $-\frac{7\sqrt{2}}{10}$

19. 若三角形的两内角  $\alpha, \beta$  满足  $\cos \alpha \cos \beta > \sin \alpha \sin \beta$ , 则这个三角形的形状 ()

A. 是锐角三角形 B. 是直角三角形 C. 是钝角三角形 D. 不能确定

20. 若关于  $x$  的方程  $x^2 + x \cos \alpha \cos \beta + \cos \gamma = 0$  的两根  $x_1, x_2$  满足  $x_1 + x_2 = \frac{x_1 x_2}{2}$ , 则以  $\alpha, \beta, \gamma$  为内角的三角形的形状 ()

A. 是等腰三角形, 不可能 B. 是直角三角形, 不可能 C. 是等腰直角三角形 D. 是等腰三角形, 也可能是直角三角形

21. (1) 若  $\tan x = \frac{4}{3} (\pi < x < 2\pi)$ , 则  $\cos(2x - \frac{\pi}{3}) \cdot \cos(\frac{\pi}{3} - x) - \sin(2x - \frac{\pi}{3}) \cdot \sin(\frac{\pi}{3} - x) =$  \_\_\_\_\_. (2) 若锐角  $\alpha, \beta$  满足  $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ ,  $\cos(\alpha + \beta) = -\frac{5}{13}$  则  $\cos \beta =$  \_\_\_\_\_. (3) 若  $\cos(\alpha - \beta) = -\frac{4}{5}$ ,  $\cos(\alpha + \beta) = \frac{4}{5}$ , 且  $90^\circ < \alpha - \beta < 180^\circ$ ,  $270^\circ < \alpha + \beta < 360^\circ$ , 则  $\cos 2\alpha =$  \_\_\_\_\_,  $\cos 2\beta =$  \_\_\_\_\_. (4) 若  $\cos x + \cos y = \frac{1}{2}$ ,  $\sin x - \sin y = \frac{1}{3}$ , 则  $\cos(x+y) =$  \_\_\_\_\_.

22. 若  $\sin \alpha \sin \beta = 1$ , 则  $\cos(\alpha + \beta)$  的值是 ()

A. -1

B. 0

C. 1

D.  $\pm 1$

23. 若  $\alpha, \beta$  为锐角, 则 ()

A.  $\cos(\alpha + \beta) > \cos \alpha + \cos \beta$  B.  $\cos(\alpha + \beta) > \sin \alpha + \sin \beta$  C.  $\cos(\alpha + \beta) < \cos \alpha + \cos \beta$  D.  $\cos(\alpha + \beta) < \sin \alpha + \sin \beta$

24. 若  $\sin \alpha + \sin \beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , 则  $\cos \alpha + \cos \beta$  的取值范围是 ()

A.  $[0, \frac{\sqrt{2}}{2}]$

B.  $[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}]$

C.  $[2, 2]$

D.  $[-\frac{\sqrt{14}}{2}, \frac{\sqrt{14}}{2}]$ .

25. 若三角形的两内角  $\alpha, \beta$  满足  $\tan \alpha \tan \beta > 1$ , 则这个三角形的形状是 ()

A. 等腰直角三角形

B. 不等腰的直角三角形

C. 锐角三角形

D. 钝角三角形

26. 若三角形的两内角  $\alpha, \beta$  满足  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ ,  $\cos \beta = \frac{5}{13}$ , 则此三角形的另一内角  $\gamma$  的余弦值等于 ()

A.  $\frac{16}{65}$  或  $\frac{56}{65}$

B.  $\frac{56}{65}$

C.  $\frac{16}{65}$

D.  $-\frac{16}{65}$  或  $-\frac{56}{65}$

27. (1) 已知锐角  $\alpha, \beta$  满足  $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ ,  $\tan(\alpha - \beta) = -\frac{1}{3}$ , 求  $\cos \beta$ . (2) 已知  $\cos(\frac{\pi}{4} - \alpha) = \frac{3}{5}$ ,  $\sin(\frac{3\pi}{4} + \beta) = \frac{5}{13}$ , 其中  $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{3\pi}{4}$ ,  $0 < \beta < \frac{\pi}{4}$ , 求  $\sin(\alpha + \beta)$  的值. (3) 已知  $\alpha, \beta$  为锐角, 满足  $\cos \alpha = \frac{1}{7}$ ,  $\sin(\alpha + \beta) = \frac{5\sqrt{3}}{14}$ , 求  $\cos \beta$  的值.

28. 已知  $8 \cos(2\alpha + \beta) + 5 \cos \beta = 0$ , 求  $\tan(\alpha + \beta) \cdot \tan \alpha$  的值.

29. 解不等式:  $\sin 4x + \cos 4x \cdot \cot 2x > 1$ .

30. 已知锐角  $\alpha, \beta, \gamma$  满足  $\sin \alpha + \sin \gamma = \sin \beta$ ,  $\cos \alpha - \cos \gamma = \cos \beta$ , 求  $\alpha - \beta$  的值. (二) 两角和 (差) 的正弦公式

31. 若  $\alpha, \beta$  为锐角, 且满足  $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ ,  $\cos(\alpha + \beta) = \frac{3}{5}$ , 则  $\sin \beta$  的值是 ()

A.  $\frac{17}{25}$

B.  $\frac{3}{5}$

C.  $\frac{7}{25}$

D.  $\frac{1}{5}$

32. 函数  $y = \sin(x + \frac{\pi}{3}) - \sqrt{3} \cos(x + \frac{\pi}{3})$  ()

A. 是奇函数, 但不是偶函数

B. 是偶函数, 但不是奇函数

C. 既不是奇函数, 也不是偶函数

D. 奇偶性无法确定

33. 下列函数中, 与  $y = \sin x + \cos x$  的振幅、最小正周期都相同的函数是 ()

A.  $y = \sin x$

B.  $y = \cos x$

C.  $y = \sqrt{2} \sin x$

D.  $y = \sin x \cos x$

34. 函数  $y = \sin x + \sqrt{3} \cos x (0 \leq x \leq \frac{\pi}{2})$  的值域是 ()

A.  $[1, \frac{3}{2}]$

B.  $[1, 2]$

C.  $[\frac{3}{2}, 2]$

D.  $[0, 2]$

35. (1) 化简  $\sin(x + 27^\circ) \cos(18^\circ - x) + \cos(x + 27^\circ) \sin(18^\circ - x) =$  \_\_\_\_\_. (2) 函数  $y = 3 \sin 2x + 3\sqrt{3} \cos 2x + 1$  的最小正周期是\_\_\_\_\_, 最大值是\_\_\_\_\_, 最小值是\_\_\_\_\_.

36. 若  $\alpha$  是一个三角形的最小内角, 则函数  $y = \sin \alpha - \cos \alpha$  的值域为 ()

- A.  $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$       B.  $(-1, \frac{\sqrt{3}-1}{2})$       C.  $(-1, \frac{\sqrt{3}-1}{2}]$       D.  $[-1, \frac{\sqrt{3}-1}{2}]$

37. 若函数  $f(x) = \sin 2x + a \cos 2x$  的图象关于直线  $x = -\frac{\pi}{8}$  对称, 则实数  $a$  的值等于 ()

- A.  $\sqrt{2}$       B.  $-\sqrt{2}$       C. 1      D. -1

38. (1) 若以  $\sin(45^\circ - \alpha) = -\frac{2}{3}$ ,  $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ , 则  $\sin \alpha =$  \_\_\_\_\_. (2) 计算:  $\frac{\sin 7^\circ + \sin 8^\circ \cos 15^\circ}{\cos 7^\circ - \sin 8^\circ \sin 15^\circ} =$  \_\_\_\_\_.  
(3) 计算:  $\csc 10^\circ - \sqrt{3} \sec 10^\circ =$  \_\_\_\_\_.

39. (1) 函数  $y = \log_{0.2}(\sin x + \cos x)$  为增函数的区间是 \_\_\_\_\_. (2) 不等式  $\sin x < \cos x$  的解是 \_\_\_\_\_.

40. 求下列函数的值域: (1)  $y = \frac{\sqrt{5} \sin x + 1}{\cos x + 2}$ . (2)  $y = \frac{\tan \theta + 2}{\sec \theta - 1}$ .

41. 在  $\triangle ABC$  中, 已知  $2 \cos B \cos C = 1 - \cos A$ , 且  $2 \sin B \cos C = 1 + \sin(B - C)$ , 判断此三角形的形状.

42. (1) 已知关于  $x$  的方程  $x^2 + px + q = 0$  的两根是  $\tan \alpha, \tan \beta$ , 求  $\frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha - \beta)}$  的值. (2) 已知  $\sin(\alpha + \beta) = \frac{1}{2}$ ,  $\sin(\alpha - \beta) = \frac{1}{3}$ , 求  $\tan \alpha \cot \beta$  的值. (3) 已知  $\tan(\alpha + \beta) = -2$ ,  $\tan(\alpha - \beta) = \frac{1}{2}$ , 求  $\frac{\sin 2\alpha}{\sin 2\beta}$  的值.

43. 已知  $\tan \alpha = 1$ ,  $3 \sin \beta = \sin(2\alpha + \beta)$ , 求  $\tan(\alpha + \beta)$  的值. 29 已知  $\frac{\tan(\alpha - \gamma)}{\tan \alpha} + \frac{\sin^2 \beta}{\sin^2 \alpha} = 1$ , 求证:  $\tan^2 \beta = \tan \alpha \tan \gamma$ .

44. (1) 求函数  $y = \frac{\sin x \cos x}{1 + \sin x + \cos x}$  的最大值, (2) 求函数  $y = \sin x + \cos x + \sin x \cos x$  的值域. (3)  $a \in \mathbf{R}$ , 求  $y = (\sin x + a)(\cos x + a)$  的最小值. 注意对于含  $\sin x \pm \cos x$ ,  $\sin x \cos x$  的三角函数式, 可令  $t = \sin x \pm \cos x$ , 则  $\sin x \cos x = \pm \frac{t^2 - 1}{2}$ ,  $t \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ . (三) 两角和 (差) 的正切公式

45. 若  $\tan(\alpha + \beta) = \frac{2}{5}$ ,  $\tan(\beta - \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{4}$ , 则  $\tan(\alpha + \frac{\pi}{4})$  等于 ()

- A.  $\frac{13}{18}$       B.  $\frac{13}{22}$       C.  $\frac{3}{22}$       D.  $\frac{1}{6}$

46. 若  $\frac{1 - \tan A}{1 + \tan A} = 4 + \sqrt{5}$ , 则  $\cot(\frac{\pi}{4} + A)$  的值等于 ()

- A.  $-4 - \sqrt{5}$       B.  $4 + \sqrt{5}$       C.  $-\frac{1}{4 + \sqrt{5}}$       D.  $\frac{1}{4 + \sqrt{5}}$

47. 已知  $\alpha + \beta = \frac{3\pi}{4}$ , 则  $(1 - \tan \alpha)(1 - \tan \beta)$  的值等于 ()

- A. 2      B. -2      C. 1      D. -1

48. (1) 计算  $\frac{1 + \cot 15^\circ}{1 - \tan 75^\circ} =$  \_\_\_\_\_. (2) 若  $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$ , 则  $\frac{1 - \tan \beta}{1 + \tan \beta} =$  \_\_\_\_\_. (3) 若  $\tan x = \frac{1}{2}$ ,  $\tan(x - y) = -\frac{2}{5}$ , 则  $\tan(2x - y) =$  \_\_\_\_\_. (4) 在  $\triangle ABC$  中,  $\tan A, \tan B$  是方程  $3x^2 + 8x - 1 = 0$  的两个根, 则  $\tan C =$  \_\_\_\_\_. (5) 若  $\tan(\alpha + \frac{\pi}{4}) = -\frac{9}{40}$ , 则  $\tan \alpha =$  \_\_\_\_\_,  $\tan(\alpha - \frac{\pi}{4}) =$  \_\_\_\_\_.

49. 若  $\alpha, \beta \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ , 且  $\tan \alpha < \cot \beta$ , 则 ()

- A.  $\alpha < \beta$       B.  $\beta > \alpha$       C.  $\pi < \alpha + \beta < \frac{3\pi}{2}$       D.  $\alpha + \beta > \frac{3\pi}{2}$

50. 函数  $y = \frac{\cos 2x + \sin 2x}{\cos 2x - \sin 2x}$  的最小正周期是 ( )
- A.  $2\pi$  B.  $\frac{3\pi}{2}$  C.  $\pi$  D.  $\frac{\pi}{2}$
51. 若  $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ,  $-\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{\pi}{2}$ , 且  $\tan \alpha, \tan \beta$  是方程  $x^2 + 3\sqrt{3}x + 4 = 0$  的两个根, 则  $\alpha + \beta$  等于 ( )
- A.  $\frac{\pi}{3}$  B.  $-\frac{2\pi}{3}$  C.  $\frac{\pi}{3}$  或  $\frac{4\pi}{3}$  D.  $\frac{\pi}{3}$  或  $-\frac{2\pi}{3}$
52. (1) 若  $\tan \theta$  和  $\tan(\frac{\pi}{4} - \theta)$  是方程  $x^2 + px + q = 0$  的两个根, 则  $p, q$  满足关系式\_\_\_\_\_. (2) 若  $\tan \alpha = \frac{1}{7}$ ,  $\tan \beta = \frac{1}{3}$ ,  $0 < \alpha, \beta < \frac{\pi}{2}$ , 则  $\alpha + 2\beta =$ \_\_\_\_\_.
53. (1) 计算:  $1 + \tan 66^\circ + \tan 69^\circ - \tan 66^\circ \tan 69^\circ =$ \_\_\_\_\_. (2) 计算:  $\tan 19^\circ + \tan 101^\circ - \sqrt{3} \tan 19^\circ \tan 101^\circ =$ \_\_\_\_\_. (3) 若  $\alpha + \beta = k\pi + \frac{\pi}{4}$  ( $k \in \mathbf{Z}$ ), 则  $(1 + \tan \alpha)(1 + \tan \beta) =$ \_\_\_\_\_. (4) 计算  $(1 + \tan 1^\circ)(1 + \tan 2^\circ)(1 + \tan 3^\circ) \cdots (1 + \tan 43^\circ)(1 + \tan 44^\circ) =$ \_\_\_\_\_.
54. (1) 求证:  $\tan 20^\circ \tan 30^\circ + \tan 30^\circ \tan 40^\circ + \tan 40^\circ \tan 20^\circ = 1$ . (2) 求证:  $\tan(A - B) + \tan(B - C) + \tan(C - A) = \tan(A - B) \tan(B - C) \tan(C - A)$ . (3) 求证:  $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$ , 其中  $A + B + C = k\pi$  ( $k \in \mathbf{Z}$ ).
55. 已知锐角  $\alpha, \beta$  满足  $\tan \alpha = \sqrt{3}(m + 1)$ ,  $\tan(-\beta) = \sqrt{3}(\tan \alpha \tan \beta + m)$ , 求  $\alpha + \beta$  的值.
56. (1) 求  $\frac{\tan 20^\circ + \tan 40^\circ + \tan 120^\circ}{\tan 20^\circ \tan 40^\circ}$  的值. (2) 已知  $\tan \theta = \frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha}$  ( $\alpha, \theta$  都是锐角), 求  $\frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin \theta}$  的值. (3) 已知  $\tan(\frac{\pi}{4} + \alpha) = -\frac{1}{2}$ , 求  $\frac{2 \cos \alpha (\sin \alpha - \cos \alpha)}{1 + \tan \alpha}$  的值.
57. 已知  $\tan \alpha, \tan \beta$  是关于  $x$  的方程  $mx^2 - 2x\sqrt{7m - 3} + 2m = 0$  的两个实根, 求  $\tan(\alpha + \beta)$  的取值范围. (四) 二倍角的正弦公式
58. 若  $\sin \alpha + \cos \alpha = -\sqrt{2}$ , 则  $\tan \alpha + \cot \alpha$  等于 ( )
- A. -2 B. -1 C. 1 D. 2
59. 若三角形的一个内角  $\alpha$  满足  $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{3}{4}$ , 则这个三角形的形状是 ( )
- A. 锐角三角形 B. 钝角三角形 C. 不等腰的直角三角形 D. 等腰直角三角形
60. 函数  $f(x) = \sqrt{\cos^2 x - \cos^4 x}$  的最小正周期为 ( )
- A.  $\frac{\pi}{2}$  B.  $\pi$  C.  $\frac{3\pi}{2}$  D.  $2\pi$
61. 若  $\alpha \in [\frac{5\pi}{2}, \frac{7}{2}\pi]$ , 则  $\sqrt{1 + \sin \alpha} + \sqrt{1 - \sin \alpha}$  的值为 ( )
- A.  $2 \cos \frac{\alpha}{2}$  B.  $-2 \cos \frac{\alpha}{2}$  C.  $2 \sin \frac{\alpha}{2}$  D.  $-2 \sin \frac{\alpha}{2}$
62. 函数  $y = \log_{0.5}(\sin x \cos x)$  为增函数的区间是 ( )
- A.  $(k\pi - \frac{\pi}{4}, k\pi + \frac{\pi}{4})$  ( $k \in \mathbf{Z}$ ) B.  $(k\pi, k\pi + \frac{\pi}{4})$  ( $k \in \mathbf{Z}$ ) C.  $(k\pi + \frac{\pi}{4}, k\pi + \frac{\pi}{2})$  ( $k \in \mathbf{Z}$ ) D.  $[k\pi + \frac{\pi}{4}, k\pi + \frac{3\pi}{4})$  ( $k \in \mathbf{Z}$ )

63.  $\cos \frac{\pi}{5} \cos \frac{2\pi}{5}$  的值等于 ( )  
 A. 4 B.  $\frac{1}{4}$  C. 2 D.  $\frac{1}{2}$
64. (1) 若  $\cos^2(\frac{x}{2}) = \sin x$ , 则  $\tan \frac{x}{2}$  等于\_\_\_\_\_. (2) 计算: ①  $\sin 105^\circ \cos 75^\circ =$ \_\_\_\_\_; ②  $\cos^2 15^\circ + \cos^2 75^\circ + \cos 15^\circ \cos 75^\circ =$ \_\_\_\_\_; ③  $\cos \frac{5\pi}{8} \cos \frac{\pi}{8} =$ \_\_\_\_\_. (3) 函数  $y = \cos(\frac{\pi}{2}x) \cos[\frac{\pi}{2}(x-1)]$  的最小正周期是\_\_\_\_\_. (4) 若  $\sin x - \cos x = \frac{1}{2}$ , 则  $\sin^3 x - \cos^3 x =$ \_\_\_\_\_.
65. (1) 在  $\triangle ABC$  中,  $\angle C = 90^\circ$ ,  $\tan A + \tan B = 4$ , 则此三角形的两个锐角分别等于\_\_\_\_\_. (2) 若  $\sin 2\alpha = \frac{4}{5}$ , 则  $\tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha =$ \_\_\_\_\_.
66. 若  $\sin x \cos y = \frac{1}{2}$ , 则  $\cos x \sin y$  的取值范围是 ( )  
 A.  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$  B.  $[-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}]$  C.  $[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$  D.  $[-1, 1]$
67. 求值: (1)  $\sin 18^\circ \sin 54^\circ$ . (2)  $\cos \frac{\pi}{17} \cos \frac{2\pi}{17} \cos \frac{4\pi}{17} \cos \frac{8\pi}{17}$ .
68. 求值: (1)  $\cos^4(\frac{\pi}{8}) + \cos^4(\frac{3\pi}{8}) + \cos^4(\frac{5\pi}{8}) + \cos^4(\frac{7\pi}{8})$ . (2)  $\sin^4(\frac{\pi}{16}) + \sin^4(\frac{3\pi}{16}) + \sin^4(\frac{5\pi}{16}) + \sin^4(\frac{7\pi}{16})$ .
69. 求值: (1)  $\csc 10^\circ - \sqrt{3} \sec 10^\circ$ . (2)  $\cos 40^\circ (1 + \sqrt{3} \cot 80^\circ)$ . (3)  $\tan 70^\circ \cos 10^\circ (\sqrt{3} \tan 20^\circ - 1)$ . (4)  $\sec 50^\circ + \cot 80^\circ$ . (五) 二倍角的余弦公式
70. 若  $x = \frac{\pi}{12}$ , 则  $\cos^4 x - \sin^4 x$  的值为 ( )  
 A. 0 B.  $\frac{1}{2}$  C.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  D.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$
71. 函数  $y = \sin^2 x$  是 ( ),  
 A. 最小正周期为  $2\pi$  的偶函数 B. 最小正周期为  $2\pi$  的奇函数 C. 最小正周期为  $\pi$  的偶函数 D. 最小正周期为  $\pi$  的奇函数
72. 若  $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{3}{5}$ ,  $\cos \frac{\alpha}{2} = -\frac{4}{5}$ , 则角  $\alpha$  所在的象限是 ( )  
 A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限
73. 函数  $y = 2 \sin x \cos x - (\cos^2 x - \sin^2 x)$  的最大值与最小值之积等于 ( )  
 A. 2 B. -2 C. 1 D. -1
74. 函数  $y = 1 - \cos^2 x + \cos^4 x$  的最小正周期是 ( )  
 A.  $2\pi$  B.  $\pi$  C.  $\frac{\pi}{2}$  D.  $\frac{\pi}{4}$
75. 化简  $\sqrt{1 - \cos 4 - \sin^2 2}$  的结果是 ( )  
 A.  $\cos 2$  B.  $-\cos 2$  C.  $\sqrt{3} \cos 2$  D.  $-\sqrt{3} \cos 2$
76. (1) 若  $\sin \theta : \sin \frac{\theta}{2} = 8 : 5$ , 则  $\cos \theta =$ \_\_\_\_\_. (2) 计算  $\sin \frac{\pi}{8} \cos \frac{\pi}{8} \cot \frac{\pi}{8} =$ \_\_\_\_\_. (3) 若  $8 \cos(\frac{\pi}{8} + \alpha) \cos(\frac{\pi}{4} - \alpha) = 1$ , 则  $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha =$ \_\_\_\_\_. (4) 函数  $y = \sin x \cos x - 2 \sin^3 x \cos x$  的最小正周期

是\_\_\_\_\_. (5) 若  $\tan x = \sqrt{2}$ , 则  $\frac{2\cos^2 \frac{x}{2} - \sin x - 1}{\sin x + \cos x} =$ \_\_\_\_\_. (6) 函数  $y = 2\sin x(\sin x + \cos x)$  为减函数的区间是\_\_\_\_\_.

77. 若  $270^\circ < \alpha < 360^\circ$ , 则化简  $\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\alpha}}$  的结果是 ()

- A.  $\sin \frac{\alpha}{2}$  B.  $-\sin \frac{\alpha}{2}$  C.  $\cos \frac{\alpha}{2}$  D.  $-\cos \frac{\alpha}{2}$

78. 若  $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ , 则  $\sqrt{\tan x + \sin x} + \sqrt{\tan x - \sin x}$  可以化成 ()

- A.  $2\sqrt{\tan x} \sin(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4})$  B.  $2\sqrt{\tan x} \sin(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4})$  C.  $-2\sqrt{\tan x} \sin(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4})$  D.  $-2\sqrt{\tan x} \sin(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4})$

79. (1) 已知  $\sin \alpha + \sin \beta = \frac{1}{2}$ ,  $\cos \alpha + \cos \beta = \frac{1}{3}$ , 求  $\cos^2(\frac{\alpha - \beta}{2})$  的值. (2) 求  $y = \sin^6 x + \cos^6 x$  的最小正周期. (3) 已知  $\tan \alpha \tan \beta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ , 求  $(2 - \cos 2\alpha)(2 - \cos 2\beta)$  的值.

80. (1) 化简:  $\frac{2\cos^2 \alpha - 1}{2\tan(\frac{\pi}{4} - \alpha)\sin^2(\frac{\pi}{4} + \alpha)}$ . (2) 化简:  $\frac{1 + \cos \theta - \sin \theta}{1 - \cos \theta - \sin \theta} + \frac{1 - \cos \theta - \sin \theta}{1 + \cos \theta - \sin \theta}$ . (3) 已知  $\cos(\frac{\pi}{4} + x) = \frac{4}{5}(\frac{19\pi}{12} < x < \frac{7\pi}{4})$ , 求  $\frac{\sin 2x - 2\sin^2 x}{1 - \tan x}$  的值.

81. 求下列函数的最大值及其相应的  $x$  值: (1)  $f(x) = 4\cos 2x + 12\sin x - 5\cos^2 x$ . (2)  $f(x) = \sin 2x + \sin x + \cos x$ . (3)  $f(x) = \frac{\sin x \cos x}{1 + \sin x + \cos x}$ .

82. 求函数  $y = \sin^2 x + 2\sin x \cos x + 3\cos^2 x - 2$  的取值范、最小正周期以及为增函数的区间. (六) 万能公式

83. 化简  $\frac{\cot \frac{\alpha}{2} - \tan \frac{\alpha}{2}}{\cot \frac{\alpha}{2} + \tan \frac{\alpha}{2}}$  的结果是 ()

- A.  $\sin \alpha$  B.  $\cos \alpha$  C.  $\tan \alpha$  D.  $\cot \alpha$

84. 函数  $y = \lg \frac{\tan x}{1 + \tan x}$  为增函数的区间是 ()

- A.  $(k\pi, k\pi + \frac{\pi}{4}]$ ,  $k \in \mathbf{Z}$  B.  $(k\pi, 2k\pi + \frac{\pi}{4}]$ ,  $k \in \mathbf{Z}$  C.  $(2k\pi, 2k\pi + \frac{\pi}{2}]$ ,  $k \in \mathbf{Z}$  D.  $(2k\pi, k\pi + \frac{\pi}{2}]$ ,  $k \in \mathbf{Z}$

85. 若  $f(\tan x) = \sin 2x$ , 则  $f(-1)$  的值是 ()

- A.  $-\sin 2$  B.  $-1$  C.  $\frac{1}{2}$  D.  $1$

86. 若  $\tan \frac{A}{2} = \frac{m}{n}$ , 则  $m \cos A - n \sin A$  等于 ()

- A.  $n$  B.  $-n$  C.  $m$  D.  $-m$

87. 若锐角  $\theta$  满足  $\sin \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{x-1}{2x}}$ , 则  $\tan \theta$  等于 ()

- A.  $x$  B.  $\frac{x+1}{\sqrt{x-1}}$  C.  $\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$  D.  $\sqrt{x^2-1}$

88. (1) 化简  $\frac{\tan(45^\circ - \alpha)}{1 - \tan^2(45^\circ - \alpha)} \cdot \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} =$ \_\_\_\_\_. (2) 若  $\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{2}{5}$ , 则  $\frac{2\sin \alpha + 3\cos \alpha}{3\cos \alpha - 4\sin \alpha} =$ \_\_\_\_\_. (3) 若  $\frac{2\sin \theta + \cos \theta}{\sin \theta - 3\cos \theta} = -5$ , 则  $3\cos 2\theta + 4\sin 2\theta =$ \_\_\_\_\_.

89. (1) 已知  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ ,  $\alpha \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ ,  $\tan(\pi - \beta) = \frac{1}{2}$ , 求  $\tan(\alpha - 2\beta)$  的值. (2) 已知  $\tan 2\theta = -2\sqrt{2}$ ,  $\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}$ , 求  $\frac{2\cos^2(\frac{\theta}{2}) - \sin \theta - 1}{\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4} + \theta)}$  的值.

90. 已知  $a \sin x + b \cos x = 0$ ,  $A \sin 2x + B \cos 2x = C$ , ( $a, b$  是不同时为零的实数), 求证:  $2abA + (b^2 - a^2)B + (a^2 + b^2)C = 0$ . (七) 半角公式

91. 下列函数中, 最小正周期为  $\pi$  的是 ()

A.  $y = \frac{\sin x}{1 - \cos x}$       B.  $y = \tan \frac{x}{2} - \frac{1}{\sin x}$       C.  $y = \cos^2(2x)$       D.  $y = \tan x - \cot x$

92. 若  $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$ , 且  $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ , 则  $\cos \frac{\alpha}{2}$  的值等于 ()

A.  $\frac{\sqrt{5}}{5}$       B.  $-\frac{\sqrt{5}}{5}$       C.  $\frac{2\sqrt{5}}{5}$       D.  $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$

93. 若  $2\pi < \theta < 4\pi$ ,  $\sin \theta = -\frac{3}{5}$ ,  $\cos \theta < 0$ , 则  $\tan \frac{\theta}{2}$  的值等于 ()

A. -3      B. 3      C.  $-\frac{1}{3}$       D.  $\frac{1}{3}$

94. 若  $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ , 则 ()

A.  $\cos \frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1 + \sin \beta}{2}}$       B.  $\sin \frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1 - \sin \beta}{2}}$       C.  $\tan \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \sin \beta}{1 + \sin \beta}}$       D.  $\tan \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \sin \beta}{1 - \sin \beta}}$

95. 当  $3\pi < \alpha < 4\pi$  时, 化简  $\sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} - \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$  得 ()

A.  $-\sqrt{2}\sin(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4})$       B.  $\sqrt{2}\sin(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4})$       C.  $-\sqrt{2}\sin(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4})$       D.  $\sqrt{2}\sin(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4})$

96. 若  $\sin 2\alpha = a$ ,  $\cos 2\alpha = b$ , 则  $\tan(\alpha + \frac{\pi}{4})$  的值是 ()

A.  $\frac{a}{1+b}$       B.  $\frac{1+a}{b}$       C.  $\frac{1+a-b}{1-a+b}$       D.  $\frac{a-b+1}{a+b+1}$

97. (1) 若  $\sin x = \frac{2}{3}$ , 且  $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ , 则  $\sin \frac{x}{2} =$  \_\_\_\_\_. (2) 若  $\alpha$  是第三象限角, 且  $\sin(\alpha + \beta) \cos \beta - \sin \beta \cdot \cos(\alpha + \beta) = -\frac{5}{13}$ , 则  $\tan \frac{\alpha}{2} =$  \_\_\_\_\_. (3) 若  $3 \sin \alpha = 4 \cos \alpha$ , 且  $\sin \alpha < 0$ , 则  $\tan \frac{\alpha}{2} =$  \_\_\_\_\_. (4) 若  $\tan 35^\circ = m$ , 则  $\frac{\cos 20^\circ}{1 - \sin 20^\circ} =$  \_\_\_\_\_. (5) 当  $k \in \mathbf{Z}$  时,  $(\tan \frac{5\pi}{12})^k \cdot (\tan \frac{\pi}{12})^{k+2} =$  \_\_\_\_\_.

98. 与  $\lg(\cos x - 1)^2$  相等的式子是 ()

A.  $4 \lg |\cos \frac{x}{2}| + 2 \lg 2$       B.  $2 \lg(\cos x - 1)$       C.  $[\lg(\cos x - 1)]^2$       D.  $4 \lg |\sin \frac{x}{2}| + 2 \lg 2$

99. (1) 已知  $\frac{1 - \cos 2\theta}{1 + \cos 2\theta} = 7 - 4\sqrt{3}$ , 且  $(\frac{1}{2})^{\sin 2\theta} > 1$ , 求  $\tan \theta$  的值. (2) 已知  $\sin(\alpha + \frac{3\pi}{4}) = \frac{5}{13}$ ,  $\cos(\frac{\pi}{4} - \beta) = \frac{3}{5}$ , 且  $-\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{4}$ ,  $\frac{\pi}{4} < \beta < \frac{3\pi}{4}$ , 求  $\sin \frac{\alpha - \beta}{2}$  的值. (3) 已知  $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{2}$ , 且  $\pi < \alpha < 2\pi$ , 求  $\tan \frac{\alpha}{2}$  的值. (4) 已知  $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$ , 且  $\alpha$  为第二象限角, 求  $\frac{\tan \frac{\pi + \alpha}{4}}{1 - \cot^2 \frac{\pi - \alpha}{4}}$  的值. 二、积化和差与和差化积公式【典型

题型和解题技巧】



100. 拆项法. 对形如  $\sin \alpha + \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha + 2\beta) + \cdots + \sin(\alpha + n\beta)$  及  $\cos \alpha + \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha + 2\beta) + \cdots + \cos(\alpha + n\beta)$  的式子, 可乘以  $\frac{\sin \frac{\beta}{2}}{\sin \frac{\beta}{2}}$ , 再逐项积化和差, 依次将各项一拆为二, 以达到消项的目的.

101. 求证:  $\cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx = \frac{\cos \frac{n+1}{2}x \sin \frac{n}{2}x}{\sin \frac{x}{2}}$ . 证明 左边  $= \frac{1}{\sin \frac{x}{2}} (\sin \frac{x}{2} \cos x + \sin \frac{x}{2} \cos 2x + \sin \frac{x}{2} \cos 3x + \cdots + \sin \frac{x}{2} \cos nx) = \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2}} [(\sin \frac{3x}{2} - \sin \frac{x}{2}) + (\sin \frac{5x}{2} - \sin \frac{3x}{2}) + (\sin \frac{7x}{2} - \sin \frac{5x}{2}) + \cdots + (\sin \frac{2n+1}{2}x - \sin \frac{2n-1}{2}x)] = \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2}} (\sin \frac{2n+1}{2}x - \sin \frac{x}{2}) = \frac{\cos \frac{n+1}{2}x \sin \frac{n}{2}x}{\sin \frac{x}{2}} = \text{右边, 原式得证.}$

102. 三角形中的恒等变形. 在  $\triangle ABC$  中, 以下变形应相当熟练:  $\sin(A+B) = \sin C$ ,  $\cos(A+B) = -\cos C$ ,  $\tan(A+B) = -\tan C$ ;  $\sin \frac{A+B}{2} = \cos \frac{C}{2}$ ,  $\cos \frac{A+B}{2} = \sin \frac{C}{2}$ ,  $\tan \frac{A+B}{2} = \cot \frac{C}{2}$ , 进一步还有:  $\sin(A+B) = \sin C = 2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2} = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{C}{2} = 2 \sin \frac{C}{2} \sin \frac{A+B}{2}$ ,  $\cos(A+B) = 2 \cos^2 \frac{A+B}{2} - 1 = 2 \sin^2 \frac{C}{2} - 1 = 1 - 2 \sin^2 \frac{A+B}{2} = 1 - 2 \cos^2 \frac{C}{2}$ .

103. 在  $\triangle ABC$  中, 求证:  $\sin^2 \frac{A}{2} + \sin^2 \frac{B}{2} + \sin^2 \frac{C}{2} = 1 - 2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$ . 证明 左边  $= \frac{3}{2} - \frac{1}{2} (\cos A + \cos B + \cos C) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} (2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} + \cos C) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} (2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{A-B}{2} + 1 - 2 \sin^2 \frac{C}{2}) = 1 - \sin \frac{C}{2} (\cos \frac{A-B}{2} - \sin \frac{C}{2}) = 1 - \sin \frac{C}{2} (\cos \frac{A-B}{2} - \cos \frac{A+B}{2}) = 1 - 2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = \text{右边, 原式得证.}$

104. 题型  $a \sin \alpha + b \sin \beta = m$ ,  $a \cos \alpha + b \cos \beta = n$ . 此类题型或类似的题型十分多见, 常可利用两式四则运算, 并结合和差化积来求解.

105. 已知  $\cos \alpha + \cos \beta = a$ ,  $\sin \alpha + \sin \beta = b$  ( $ab \neq 0$ ), 求  $\cos(\alpha - \beta)$ ,  $\cos(\alpha + \beta)$  的值. 解 两式平方相加, 可得  $2 + 2 \cos(\alpha - \beta) = a^2 + b^2$ ,  $\cos(\alpha - \beta) = \frac{a^2 + b^2 - 2}{2}$ . 再将两式和差化积, 得  $2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} = a$ ,  $2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} = b$ . 显然  $\cos \frac{\alpha - \beta}{2} \neq 0$ , 于是两式相除, 得  $\tan \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{b}{a}$ . 再由万能公式, 得  $\cos(\alpha + \beta) = \frac{1 - \tan^2(\frac{\alpha + \beta}{2})}{1 + \tan^2(\frac{\alpha + \beta}{2})} = \frac{1 - \frac{b^2}{a^2}}{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$ .

106. 已知  $a \cos \alpha + b \sin \alpha = c$ ,  $a \cos \beta + b \sin \beta = c$ , 其中  $\alpha \pm \beta \neq k\pi$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ , 求证:  $\frac{a}{\cos \frac{\alpha + \beta}{2}} = \frac{b}{\sin \frac{\alpha + \beta}{2}} = \frac{c}{\cos \frac{\alpha - \beta}{2}}$ . 证明 将已知的两式相减, 得  $a(\cos \alpha - \cos \beta) + b(\sin \alpha - \sin \beta) = 0$ . 利用和差化积, 得  $-2a \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} + 2b \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} = 0$ . 由条件知  $\sin \frac{\alpha - \beta}{2} \neq 0$ ,  $a \sin \frac{\alpha + \beta}{2} = b \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$ , 即  $\frac{a}{\cos \frac{\alpha + \beta}{2}} = \frac{b}{\sin \frac{\alpha + \beta}{2}}$ . 再利用等比性质, 得  $\frac{a \cos \alpha}{\cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \alpha} = \frac{b \sin \alpha}{\sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \alpha} = \frac{a \cos \alpha + b \sin \alpha}{\cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \alpha + \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \alpha} = \frac{c}{\cos \frac{\alpha - \beta}{2}}$ ,  $\frac{a}{\cos \frac{\alpha + \beta}{2}} = \frac{b}{\sin \frac{\alpha + \beta}{2}} = \frac{c}{\cos \frac{\alpha - \beta}{2}}$ .

107. 降幂与化积. 在本章内, 有不少问题的求解要通过先降幂再化积来完成.

108. 已知  $\alpha + \beta = \frac{2\pi}{3}$ , 求  $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta$  的取值范围.

解  $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} + \frac{1 - \cos 2\beta}{2} = 1 - \frac{1}{2}(\cos 2\alpha + \cos 2\beta) = 1 - \cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) = 1 + \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta)$ , 又  $-1 \leq \cos(\alpha - \beta) \leq 1$ ,  $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta$  的取值范围是  $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ . 【训练题】(一) 积化和差公式

109. 函数  $y = \sin(3x + \frac{\pi}{12}) \sin(3x - \frac{5\pi}{12})$  的最小正周期是 ()

A.  $\frac{\pi}{3}$

B.  $\frac{2\pi}{3}$

C.  $3\pi$

D.  $6\pi$

110. 若  $\cos^2 \alpha - \cos^2 \beta = m$ , 则  $\sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta)$  等于 ()

A.  $4m$

B.  $-4m$

C.  $m$

D.  $-m$

111.  $\cos(\frac{\pi}{5} + 1) \cos(\frac{\pi}{5} - 1)$  等于 ()

A.  $\cos^2(\frac{\pi}{5}) + \sin^2 1$

B.  $\sin^2(\frac{\pi}{5}) - \cos^2 1$

C.  $\cos^2(\frac{\pi}{5}) - \sin^2 1$

D.  $\sin^2(\frac{\pi}{5}) + \cos^2 1$

112. 函数  $f(x) = \sin(x + \frac{5\pi}{12}) \cos(x - \frac{\pi}{12})$  是 ()

A. 最小正周期为  $\pi$  的奇函数

B. 最小正周期为  $\pi$  的偶函数

C. 最小正周期为  $2\pi$  的函数, 没有奇偶性

D. 最小正周期为  $\pi$  的函数, 没有奇偶性

113. 函数  $f(x) = 2 \sin \frac{x}{2} \sin(\alpha - \frac{x}{2})$  的最大值等于 ()

A.  $2 \sin^2(\frac{\alpha}{2})$

B.  $-2 \sin^2(\frac{\alpha}{2})$

C.  $2 \cos^2(\frac{\alpha}{2})$

D.  $-2 \cos^2(\frac{\alpha}{2})$

114. (1) 函数  $y = \sin(\frac{3\pi}{4} - x) \sin(\frac{3\pi}{4} + x)$  的值域是\_\_\_\_\_. (2) 函数  $f(x) = \sin x \cos(x + A)$  的最小正周期是\_\_\_\_\_, 最大值是\_\_\_\_\_.

115. 求值或化简: (1)  $\cos^2 \alpha - \cos(\alpha + 60^\circ) \cos(\alpha - 60^\circ) =$ \_\_\_\_\_. (2)  $\cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) + \sin^2 \beta =$ \_\_\_\_\_. (3) 若  $\sin(\alpha + \beta) = \frac{2}{3}$ ,  $\sin(\alpha - \beta) = \frac{1}{5}$ , 则  $\tan \alpha \cot \beta =$ \_\_\_\_\_. (4) 若  $\sin(\theta + \frac{\pi}{6}) \sin(\theta - \frac{\pi}{6}) = \frac{11}{20}$ , 则  $\tan \theta =$ \_\_\_\_\_.

116. 计算下列各式: (1)  $\sin 63^\circ - \cos 63^\circ + 2\sqrt{2} \sin 66^\circ \cos 84^\circ =$ \_\_\_\_\_. (2)  $\frac{1}{2 \sin 10^\circ} - 2 \sin 70^\circ =$ \_\_\_\_\_. (3)  $\frac{1 - 4 \sin 10^\circ + 8 \sin^3 10^\circ}{2 \cos 80^\circ} =$ \_\_\_\_\_. (4)  $\sin 80^\circ \cos 20^\circ + \sin 45^\circ \cos 145^\circ + \sin 55^\circ \cos 245^\circ =$ \_\_\_\_\_.

117. (1) 求证:  $\tan \frac{3\alpha}{2} - \tan \frac{\alpha}{2} = \frac{2}{\sin \alpha}$ . (2) 已知  $\tan \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , 求  $\cos 2\alpha \cdot \cos 2\beta - \cos^2(\alpha - \beta)$  的值.

118. 已知  $A, B, C$  是  $\triangle ABC$  的三内角, 若  $B = 60^\circ$ , 求  $\cos A \cos C$  的取值范围.

119. 计算下列各式: (1)  $\cos 20^\circ + \cos 60^\circ + \cos 100^\circ + \cos 140^\circ$ . (2)  $\cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7}$ .

120. (1) 求证: ①  $\sin \alpha \sin(60^\circ + \alpha) \sin(60^\circ - \alpha) = \frac{1}{4} \sin 3\alpha$ ; ②  $\cos \alpha \cos(60^\circ + \alpha) \cos(60^\circ - \alpha) = \frac{1}{4} \cos 3\alpha$ ; ③  $\tan \alpha \tan(60^\circ + \alpha) \tan(60^\circ - \alpha) = \tan 3\alpha$ . (2) 求值或化简. ①  $\sin 5^\circ \sin 55^\circ \sin 65^\circ$ ; ②  $\sin 10^\circ \sin 30^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ$ ;

③  $\cos 10^\circ \cos 30^\circ \cos 50^\circ \cos 70^\circ$ ; \*④  $\sin x \sin(\frac{1}{3}\pi + x) \sin(\frac{2}{3}\pi + x)$ ; \*⑤  $\tan 5^\circ \tan 55^\circ \tan 65^\circ \tan 75^\circ$ . \*98. 已知  $f(x) = \cos^2(x + \theta) - 2\cos\theta \cos x \cos(x + \theta) + \cos^2\theta$ . (1) 求此函数的最小正周期. (2) 若  $\frac{1}{4} \leq f(x) \leq \frac{3}{4}$ ,  $0 \leq x \leq 2\pi$ , 求  $x$  取值范围. \*99. 已知  $\cos(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta) + \frac{1}{2} \sin\alpha \cos\alpha = 0$ , 且  $3\sin^2\alpha + 2\sin^2\beta = 1$ ,  $\alpha, \beta \in (0, \frac{\pi}{2})$ , 求  $\sin(\alpha + \beta)$  的值. (二) 和差化积公式

121. 下列各式中, 不正确的是 ()

$$\begin{array}{llll} \text{A. } \sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\beta+\alpha}{2}\cos\frac{\beta-\alpha}{2} & \text{B. } \sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\beta+\alpha}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2} & \text{C. } \cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\beta+\alpha}{2}\cos\frac{\beta-\alpha}{2} & \text{D. } \cos\alpha - \cos\beta = 2\sin\frac{\beta+\alpha}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2} \end{array}$$

122. 函数  $y = \cos^2(x - \frac{\pi}{12}) + \sin^2(x + \frac{\pi}{12}) - 1$  是 ()

A. 最小正周期为  $2\pi$  的奇函数  
B. 最小正周期为  $2\pi$  的偶函数  
C. 最小正周期为  $\pi$  的奇函数  
D. 最小正周期为  $\pi$  的偶函数

123. 将  $\cos^2 x - \sin^2 y$  化为积的形式, 结果是 ()

A.  $-\sin(x+y)\sin(x-y)$   
B.  $\cos(x+y)\cos(x-y)$   
C.  $\sin(x+y)\cos(x-y)$   
D.  $-\cos(x+y)\sin(x-y)$

124. 设  $x + y = \frac{2\pi}{3}$ , 则  $\cos x - \cos y$  的最大值是 ()

A.  $-\sqrt{3}$   
B.  $2\sqrt{3}$   
C.  $\sqrt{3}$   
D. 1

125. 函数  $f(x) = \frac{\cos 3x - \cos x}{\cos x}$  的值域是 ()

A.  $[-4, +\infty)$   
B.  $[-4, 0)$   
C.  $(-4, 0]$   
D.  $(-4, 4]$

126. 求值或化简: (1)  $\sin 10^\circ + \sin 50^\circ - \sin 70^\circ =$  \_\_\_\_\_. (2)  $\cos 20^\circ - \cos 80^\circ - \sin 50^\circ =$  \_\_\_\_\_. (3)  $\sin 15^\circ - \sin 75^\circ + 2\sin 15^\circ \sin 75^\circ =$  \_\_\_\_\_. (4)  $\sin 80^\circ - \sin 20^\circ + 2\sin 10^\circ \cos 50^\circ =$  \_\_\_\_\_. (5)  $\cos \frac{5\pi}{13} + \cos \frac{3\pi}{13} + 2\cos \frac{9\pi}{13} \cos \frac{\pi}{13} =$  \_\_\_\_\_. (6)  $\cos^2(\alpha + \beta) + \cos^2(\alpha - \beta) - \cos 2\alpha \cos 2\beta =$  \_\_\_\_\_. (7)  $\cos \alpha + \cos(\frac{2}{3}\pi + \alpha) + \cos(\frac{2}{3}\pi - \alpha) =$  \_\_\_\_\_. (8)  $\sin^2 40^\circ + \sin^2 80^\circ + \frac{1}{2} \cos 220^\circ =$  \_\_\_\_\_. (9)  $\cos 20^\circ + \sin 60^\circ + \cos 100^\circ + \cos 140^\circ =$  \_\_\_\_\_. (10)  $\sin 63^\circ - \sin 27^\circ + 2\sqrt{2} \cos 84^\circ \sin 66^\circ =$  \_\_\_\_\_.

127. 计算下列各式: (1)  $\frac{\sin 20^\circ - \cos 50^\circ}{\cos 80^\circ} =$  \_\_\_\_\_. (2)  $\frac{\sin 10^\circ + \sin 50^\circ}{\sin 35^\circ \sin 55^\circ} =$  \_\_\_\_\_. (3)  $\csc 18^\circ - \csc 54^\circ =$  \_\_\_\_\_.

128. 若  $x + y = 1$ , 则  $\sin x + \sin y$  与 1 的大小关系是 ()

A.  $\sin x + \sin y > 1$   
B.  $\sin x + \sin y = 1$   
C.  $\sin x + \sin y < 1$   
D. 随  $x, y$  的取值而定

129. 若  $\sqrt{3}(\sin \alpha + \sin \beta) = \cos \beta - \cos \alpha$ ,  $\alpha, \beta \in (0, \pi)$ , 则  $\alpha - \beta$  等于 ()

A.  $-\frac{2\pi}{3}$   
B.  $-\frac{\pi}{3}$   
C.  $\frac{\pi}{3}$   
D.  $\frac{2\pi}{3}$

130. 若  $x > 0, y > 0, 0 < x + y < 2\pi$ , 则  $f(x) = \sin(x + y) - \sin x - \sin y$  的值 ()

A. 恒大于零  
B. 恒小于零  
C. 恒等于零  
D. 符号随  $x, y$  的取值而定

131. 函数  $y = \sin(2x - \frac{\pi}{6}) - \cos 2x$  的图象, 可由函数  $y = \sqrt{3} \sin 2x$  的图象 ()

- A. 向右平移  $\frac{\pi}{3}$  个单位长 度得到  
B. 向左平移  $\frac{\pi}{3}$  个单位长 度得到  
C. 向右平移  $\frac{\pi}{6}$  个单位长 度得到  
D. 向左平移  $\frac{\pi}{6}$  个单位长 度得到

132. 在 “①  $\cos 40^\circ + \sqrt{3} \sin 40^\circ = 2 \cos 20^\circ$ , ②  $1 + 2 \cos 20^\circ = 4 \cos 20^\circ \cos 40^\circ$ , ③  $\frac{\sin 40^\circ}{1 + \cos 40^\circ} = \cot 70^\circ$ , ④  $\frac{1 - \tan 40^\circ}{1 + \tan 40^\circ} = \tan 20^\circ$ ” 这四个式子中, 成立的个数是 ()

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

\*112. 已知  $\cos 36^\circ \cos 72^\circ = \frac{1}{4}$ , 求下列各式的值: (1)  $\cos 36^\circ - \cos 72^\circ$ . (2)  $\cos^2(\frac{\pi}{5}) + \sin^2(\frac{\pi}{10})$ . (3)  $\cos 12^\circ - \cos 24^\circ - \cos 48^\circ + \cos 84^\circ$ .

133. 求下列各式的值: (1)  $\cos^2 73^\circ + \sin^2 43^\circ + \cos 73^\circ \sin 43^\circ$ . (2)  $\cos^2 10^\circ + \cos^2 110^\circ + \cos^2 130^\circ$ . (3)  $\sin 10^\circ \sin 50^\circ - \sin 50^\circ \sin 70^\circ - \sin 70^\circ \sin 10^\circ$ . (4)  $\tan 9^\circ - \tan 27^\circ - \tan 63^\circ + \tan 81^\circ$ .

134. (1) 已知  $\cos \alpha - \cos \beta = \frac{1}{2}$ ,  $\sin \alpha - \sin \beta = -\frac{1}{3}$ , 求  $\sin(\alpha + \beta)$ ,  $\cos(\alpha - \beta)$  的值. (2) 已知  $\cos \alpha + \cos \beta = \frac{\sqrt{2}}{4}$ ,  $\tan(\alpha + \beta) = -\frac{4}{3}$ , 求  $\sin \alpha + \sin \beta$  的值. \*(3) 已知  $a \cos x + b \sin x + c = 0 (a \neq 0)$  在区间  $(\frac{\pi}{2}, \pi)$  内有两个相异的实根  $\alpha, \beta$ , 求  $\sin(\alpha + \beta)$  的值. \*(4) 已知  $\sin \alpha + \sin \beta = \frac{3}{5}$ ,  $\cos \alpha + \cos \beta = \frac{4}{5}$ , 求  $\cos \alpha \cdot \cos \beta$  的值.

135. 根据下列条件判断  $\triangle ABC$  的形状: (1)  $\sin A + \sin B = \cos A + \cos B$ . (2)  $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C < 2$ .

\*(3)  $\tan B = \frac{\cos(B - C)}{\sin A - \sin(B - C)}$ . \*(4)  $\sin A = \frac{\sin B + \sin C}{\cos B + \cos C}$ . \*116. 将  $\sin x + \sin y + \sin z - \sin(x + y + z)$  化为积的形式. \*117. 若  $\frac{\sin(A + 30^\circ) - \sin(B + 30^\circ)}{\cos A - \cos B} = m \cot \frac{A + B}{2} + n$ , 求  $m, n$  的值. \*118. 已知  $\sin A + \sin B - \sin C = 0$ ,  $\cos A + \cos B - \cos C = 0$ , 求证:  $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C$  为定值. \*119. (1) 已知  $0 < x < \pi$ ,

求函数  $f(x) = -\frac{1}{2} + \frac{\sin \frac{5x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2}}$  的最小值. (2) 已知三角形内角  $\theta$  满足  $\frac{\sin \frac{5\theta}{2}}{2 \sin \frac{\theta}{2}} - \frac{1}{2} = a \cos \theta + a$ , 求实数  $a$  的取值范围.

136. (1) 已知  $0 < \alpha < \pi$ ,  $0 < \beta < \pi$ , 且  $\cos \alpha + \cos \beta - \cos(\alpha + \beta) = \frac{3}{2}$ , 求证:  $\alpha = \beta = \frac{\pi}{3}$ . \*(2) 已知  $A, B$  是两个锐角, 且满足  $a \sin A + b \cos B - \sin B = 0$ ,  $a \sin B + b \cos A - \sin A = 0$ , 又  $\tan \frac{A + B}{2} = a + 1$ , 求证:  $a^2 + b = 1$ .

### 三、解斜三角形【典型题型和解题技巧】

137. 三角形形状的确定. 按边分: 可分为等边三角形、等腰三角形和不等边三角形. 按角分: 可分为锐角三角形、直角三角形和钝角三角形.

138. 根据条件确定三角形的形状: (1) 已知  $\frac{a^3 + b^3 - c^3}{a + b - c} = c^2$ , 且  $\sin A \sin B = \frac{3}{4}$ . (2)  $\cos A + \cos B > \sin A + \sin B$ . (3)  $a \cos B + b \cos C + c \cos A = b \cos A + c \cos B + a \cos C$ . 解 (1) 由  $\frac{a^3 + b^3 - c^3}{a + b - c} = c^2$ , 得  $a^2 + b^2 = c^2(a + b)$ , 即  $(a + b)(a^2 - ab + b^2 - c^2) = 0$ .  $a + b \neq 0$ ,  $c^2 = a^2 + b^2 - ab$ , 结合余弦定理可得  $2 \cos C = 1$ .  $\cos C = \frac{1}{2}$ , 故  $C = 60^\circ$ , 再由  $\sin A \sin B = \frac{3}{4}$ , 得  $-\frac{1}{2}[\cos(A + B) - \cos(A - B)] = \frac{3}{4}$ .  $A + B = 120^\circ$ ,  $\frac{1}{2} \cos(A - B) = \frac{1}{2}$ ,  $A = B$ .  $\triangle ABC$  为等边三角形. (2)  $(\cos A + \cos B) - (\sin A + \sin B) = 2 \cos \frac{A + B}{2} \cos \frac{A - B}{2} - 2 \sin \frac{A + B}{2} \cos \frac{A - B}{2} = 2 \cos \frac{A - B}{2} (\cos \frac{A + B}{2} - \sin \frac{A + B}{2}) = 2\sqrt{2} \cos \frac{A - B}{2} \sin(\frac{\pi}{4} - \frac{A + B}{2})$ , 由条件

$\cos A + \cos B > \sin A + \sin B$  及  $\cos \frac{A-B}{2} > 0$ , 得  $\sin \frac{\pi - 2(A+B)}{4} > 0$ ,  $2k\pi < \frac{\pi - 2(A+B)}{4} < 2k\pi + \pi$ , 即  $2k\pi < \frac{C - (A+B)}{4} < 2k\pi + \pi$ . 又  $A, B, C$  是三角形的内角, 取  $k = 0$ ,  $0 < C - (A+B) < 4\pi$ , 即  $C > A+B$ . 结合  $A+B = \pi - C$ , 有  $C > \frac{\pi}{2}$ ,  $\triangle ABC$  是钝角三角形 ( $C$  为钝角). (3) 利用正弦定理, 有  $a = 2R \sin A$ ,  $b = 2R \sin B$ ,  $c = 2R \sin C$  ( $R$  为  $\triangle ABC$  的外接圆半径), 由已知条件可得  $(\sin A \cos B - \cos A \sin B) + (\sin B \cos C - \cos B \sin C) + (\sin C \cos A - \cos C \sin A) = 0$ . 即  $\sin(A-B) + \sin(B-C) + \sin(C-A) = 0$ , 前两项和差化积, 使得  $2 \sin \frac{A-C}{2} \cos \frac{A-2B+C}{2} - 2 \sin \frac{A-C}{2} \cos \frac{A-C}{2} = 0$ , 即  $\sin \frac{A-C}{2} (\cos \frac{A-2B+C}{2} - \cos \frac{A-C}{2}) = 0$ . 再和差化积, 得  $\sin \frac{A-B}{2} \sin \frac{B-C}{2} \sin \frac{C-A}{2} = 0$ , 于是  $A=B$  或  $B=C$  或  $C=A$ . 是等腰三角形.

139. 三角形中的恒等式证明. 对于  $\triangle ABC$  中的恒等式证明, 除了要能熟练运用正弦定理、余弦定理、三角恒等变换公式等外, 还要能熟练掌握下列变换:  $\sin(A+B) = \sin C$ ,  $\cos(A+B) = -\cos C$ ,  $\tan(A+B) = -\tan C$ ;  $\sin \frac{A+B}{2} = \cos \frac{C}{2}$ ,  $\cos \frac{A+B}{2} = \sin \frac{C}{2}$ ,  $\tan \frac{A+B}{2} = \cot \frac{C}{2}$ ;  $\sin(A+B) = \sin C = 2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2} = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{C}{2} = 2 \sin \frac{C}{2} \sin \frac{A+B}{2}$ .

140. 在  $\triangle ABC$  中, 求证: (1)  $\sin^2 \frac{A}{2} + \sin^2 \frac{B}{2} + \sin^2 \frac{C}{2} = 1 - 2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$ . (2)  $(a-b) \cot \frac{C}{2} + (b-c) \cot \frac{A}{2} + (c-a) \cot \frac{B}{2} = 0$ . 证明 (1) 左边 =  $\frac{1-\cos A}{2} + \frac{1-\cos B}{2} + \sin^2 \frac{C}{2} = 1 - \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} + \sin^2 \frac{C}{2}$   

$$\left\{ \begin{aligned} &= 1 - \sin \frac{C}{2} (\cos \frac{A-B}{2} - \cos \frac{A+B}{2}) \\ &= 1 - (-2) \sin \frac{C}{2} \sin \frac{A}{2} \sin(-\frac{B}{2}) \end{aligned} \right. = 1 - 2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = \text{右边, 原式}$$

得证. (2) 左边 =  $2R(\sin A - \sin B) \tan \frac{A+B}{2} + 2R(\sin B - \sin C) \tan \frac{B+C}{2} + 2R(\sin C - \sin A) \tan \frac{C+A}{2}$   

$$= 2R(2 \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2} \cdot \frac{\sin \frac{A+B}{2}}{\cos \frac{A+B}{2}} + 2 \cos \frac{B+C}{2} \sin \frac{B-C}{2} \cdot \frac{\sin \frac{B+C}{2}}{\cos \frac{B+C}{2}} + 2 \cos \frac{C+A}{2} \sin \frac{C-A}{2} \cdot \frac{\sin \frac{C+A}{2}}{\cos \frac{C+A}{2}})$$
  

$$= 4R(\sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2} + \sin \frac{B+C}{2} \sin \frac{B-C}{2} + \sin \frac{C+A}{2} \sin \frac{C-A}{2}) = 2R[(\cos A - \cos B) + (\cos B - \cos C) + (\cos C - \cos A)] = 0 = \text{右边, 原式得证.}$$

141. 三角形中的有关计算. 一般情况下, 解斜三角形可按下列步骤进行: (1) 若是实际的应用题, 则应将所讨论的问题归结到某一个三角形中. (2) 在三角形中表明已知量与所要求的量, 分析已知量与所求量之间的关系. (3) 利用三角形的有关知识进行计算.

142. 在  $\triangle ABC$  中, 已知  $A > B > C$ , 且  $A = 2C$ ,  $b = 4$ ,  $a + c = 8$ , 求  $a, c$  的长. 解由正弦定理  $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$  及  $A = 2C$ , 得  $\cos C = \frac{a}{2c}$ . 由条件  $a + c = 8 = 2b$ , 利用余弦定理得  $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{a^2 + (\frac{a+c}{2})^2 - c^2}{2a(a+c)} = \frac{5a^2 + 2ac - 3c^2}{4a(a+c)} = \frac{(5a-3c)(a+c)}{4a(a+c)} = \frac{5a-3c}{4a}$ . 于是  $\frac{a}{2c} = \frac{5a-3c}{4a}$ , 整理得  $(2a-3c)(a-c) = 0$ .  $a \neq c$ ,  $2a = 3c$ .  $a + c = 8$ ,  $a = \frac{24}{5}$ ,  $c = \frac{16}{5}$ .

143. 如图 1, 海岛  $O$  上有一座海拔 1000 米的, 山顶上设有一个观察站  $A$ , 上午 11 时测得一轮船在岛北偏东  $60^\circ$  的  $C$  处, 俯角为  $30^\circ$ ; 11 时 10 分又测得该船在岛的北偏西  $60^\circ$  的  $B$  处, 俯角为  $60^\circ$ . (1) 该船的速度为每小时

多少千米? (2) 若此船以不变航速继续前进, 则它何时到达岛的正西方向? 此时所在点  $E$  离开海岛多少千米?

(图 1) 解 (1) 在  $\text{Rt}\triangle ABC$  与  $\text{Rt}\triangle AOC$  中, 求得  $OB = OA \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$  (千米),  $OC = OA \tan 60^\circ = \sqrt{3}$  (千米).

由余弦定理, 得 
$$\begin{cases} BC = \sqrt{OB^2 + OC^2 - 2 \cdot OB \cdot OC \cos \angle BOC} \\ = \sqrt{\frac{3}{9} + 3 - 2(-\frac{1}{2})} = \sqrt{\frac{13}{3}}, \end{cases}$$
 于是船速  $v = \frac{BC}{\frac{1}{6}} = 2\sqrt{39}$  (千米/时).

(2) 在  $\triangle OBC$  中, 由余弦定理, 得  $\cos \angle OBC = \frac{BC^2 + OB^2 - OC^2}{2 \cdot BC \cdot OB} = \frac{\frac{13}{3} + \frac{3}{9} - 3}{2\sqrt{\frac{13}{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{5}{\sqrt{13}}$ . 于是

$$\sin \angle EBO = \sin \angle OBC = \sqrt{1 - (\frac{5\sqrt{13}}{26})^2} = \frac{3\sqrt{39}}{26}, \begin{cases} \sin \angle BEO = \sin[180^\circ - (\angle EBO + 30^\circ)] = \sin(\angle EBO + 30^\circ) \\ = \frac{3\sqrt{39}}{26} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{5\sqrt{13}}{26} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{13}}{13}. \end{cases}$$

在  $\triangle BEO$  中, 由正弦定理, 得  $OE = \frac{OB \cdot \sin \angle EBO}{\sin \angle BEO} = \frac{3}{2}$  (千米),  $BE = \frac{OB \sin \angle BOE}{\sin \angle BEO} = \frac{\sqrt{39}}{6}$  (千米). 于是从  $B$  到  $E$  所需时间  $t = \frac{BE}{v} = \frac{1}{12}$  (时) = 5 分. 再经过 5 分到达海岛的正西方向, 此时  $E$  点离海岛 1.5 千米. 【训练题】

144. 在  $\triangle ABC$  中, 若  $A = 60^\circ$ ,  $AC = 16$ , 且此三角形的面积为  $220\sqrt{3}$ , 则  $BC$  边的长是 ()

- A.  $\sqrt{2400}$                       B. 25                      C. 51                      D. 49

145. 在  $\triangle ABC$  中, 若  $a + b = 10$ ,  $c = 6$ ,  $C = 30^\circ$ , 则此三角形的面积等于 ()

- A.  $8(2 + \sqrt{3})$                       B.  $8(2 - \sqrt{3})$                       C.  $16(2 + \sqrt{3})$                       D.  $16(2 - \sqrt{3})$

146. 若  $\triangle ABC$  的三边  $a, b, c$  满足  $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} = \frac{3}{a+b+c}$ , 则  $B$  等于 ()

- A.  $30^\circ$                       B.  $45^\circ$                       C.  $60^\circ$                       D.  $120^\circ$

147. 在  $\triangle ABC$  中, 若  $A = 60^\circ$ , 且最大边长和最小边长恰好是方程  $x^2 - 7x + 11 = 0$  的两根, 则第三边的边长为 ()

- A. 2                      B. 3                      C. 4                      D. 5

148. 若三角形的三条边长分别是 4, 5, 6, 则这个三角形的形状 ()

- A. 是锐角三角形                      B. 是自: 角二角形                      C. 是钝角三角形                      D. 不能确定

149. 若三角形的角  $A$  满足  $\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , 则  $A$  等于 ()

- A.  $60^\circ$                       B.  $120^\circ$                       C.  $60^\circ$  或  $120^\circ$                       D.  $30^\circ$  或  $150^\circ$

150. 若三角形的三内角之比为  $1:2:3$ , 则它们所对边的边长之比为 ()

- A.  $1:2:3$                       B.  $3:4:5$                       C.  $11:\sqrt{3}:2$                       D.  $5:6:7$

151. 在  $\triangle ABC$  中,  $a(\sin B - \sin C) + b(\sin C - \sin A) + c(\sin A - \sin B)$  的值是 ()

- A.  $\frac{1}{2}$                       B. 0                      C. 1                      D.  $\pi$

152. 若方程  $x^2 \sin A + 2x \sin B + \sin C = 0$  有重根, 则  $\triangle ABC$  的三边  $a, b, c$  满足关系式 ()
- A.  $b = ac$                       B.  $a = b = c$                       C.  $c = ab$                       D.  $b^2 = ac$
153. 在  $\triangle ABC$  中, 若  $a = 1, b = \sqrt{3}, A = 30^\circ$ , 则  $B$  的值是 ()
- A.  $60^\circ$                       B.  $60^\circ$  或  $120^\circ$                       C.  $120^\circ$                       D.  $30^\circ$  或  $150^\circ$
154. 在  $\triangle ABC$  中, 若  $B = 45^\circ, c = 2\sqrt{2}, b = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ , 则  $A$  的值是 ()
- A.  $15^\circ$                       B.  $75^\circ$                       C.  $105^\circ$                       D.  $15^\circ$  或  $75^\circ$
155. 在  $\triangle ABC$  中, 若  $B = 45^\circ, b = 10, c = 5\sqrt{6}$ , 则  $a$  等于 ()
- A.  $5(\sqrt{3} + 1)$                       B.  $5(\sqrt{3} - 1)$                       C.  $10(\sqrt{3} + 1)$  或  $10(\sqrt{3} - 1)$                       D.  $5(\sqrt{3} + 1)$  或  $5(\sqrt{3} - 1)$
156. 在  $\triangle ABC$  中, 若三内角满足  $\sin^2 A = \sin^2 B + \sin B \sin C + \sin^2 C$ , 则  $A$  等于 ()
- A.  $30^\circ$                       B.  $60^\circ$                       C.  $120^\circ$                       D.  $150^\circ$
157. 在  $\triangle ABC$  中, 若  $b = 2\sqrt{2}, a = 2$ , 且三角形有解, 则  $A$  的取值范围是 ()
- A.  $0^\circ < A < 30^\circ$                       B.  $0^\circ < A \leq 45^\circ$                       C.  $0^\circ < A < 90^\circ$                       D.  $30^\circ < A < 60^\circ$
158. 在  $\triangle ABC$  中, 若  $a \cos A = b \cos B$ , 则  $\triangle ABC$  的形状 ()
- A. 只可能是等边三角形                      B. 只可能是等腰三角形                      C. 只可能是直角三角形                      D. 既可能是等腰三角形, 也可能是直角三角形
159. 在  $\text{Rt}\triangle ABC$  中, 已知  $C = 90^\circ, a = 2, c = \sqrt{29}$ , 那么  $\tan B$  的值等于 ()
- A.  $\frac{2}{5}$                       B.  $\frac{2\sqrt{29}}{29}$                       C.  $\frac{5\sqrt{29}}{29}$                       D.  $\frac{5}{2}$
160. 在  $\triangle ABC$  中, 若  $C = 90^\circ, S_{\triangle ABC} = 8\sqrt{3}, b = 4$ , 则  $B$  等于 ()
- A.  $15^\circ$                       B.  $30^\circ$                       C.  $45^\circ$                       D.  $60^\circ$
161. 在  $\triangle ABC$  中, 若  $C = 90^\circ$ , 则  $a^3 \cos A + b^3 \cos B$  等于 ()
- A.  $c^3$                       B.  $abc$                       C.  $(a + b)c^2$                       D.  $(a + b)c^3$
162. 在  $\text{Rt}\triangle ABC$  中, 若  $B = 60^\circ, C = 45^\circ, BC = 8, AD \perp BC$  于点  $D$ , 则  $AD$  的长为 ()
- A.  $4(\sqrt{3} - 1)$                       B.  $4(\sqrt{3} + 1)$                       C.  $4(3 - \sqrt{3})$                       D.  $4(3 + \sqrt{3})$
163. 若  $\text{Rt}\triangle ABC$  的斜边  $AB = 2$ , 则其内切圆的半径  $r$  的取值范围是 ()
- A.  $(1, \sqrt{2}]$                       B.  $[1, \sqrt{2}]$                       C.  $(0, \sqrt{2} - 1]$                       D.  $[1, \sqrt{2} - 1]$
164. 若  $AD$  是  $\text{Rt}\triangle ABC$  斜边  $BC$  上的高, 则下列命题不成立的是 ()
- A.  $\sin B = \sqrt{\frac{CD}{BC}}$                       B.  $\cos B = \sqrt{\frac{BD}{BC}}$                       C.  $\tan B = \sqrt{\frac{BD}{CD}}$                       D.  $\cot B = \sqrt{\frac{BD \cdot BC}{AC}}$

165. 在  $\triangle ABC$  中, 若  $\sin A = \sin B$ , 则下列结论中正确的是 ()
- A.  $A = B$                       B.  $A = 180^\circ - B$                       C.  $A = B$  或  $A = 180^\circ - B$                       D.  $A + B = 90^\circ$
166. 在  $\triangle ABC$  中, 若  $\sin A : \sin B : \sin C = 3 : 5 : 7$ , 则此三角形的最大内角的度数等于 ()
- A.  $75^\circ$                       B.  $120^\circ$                       C.  $135^\circ$                       D.  $150^\circ$
167. 在  $\triangle ABC$  中, 若  $A = 60^\circ$ ,  $B = 1$ ,  $S_{\triangle ABC} = \sqrt{3}$ , 则  $\frac{a+b+c}{\sin A + \sin B + \sin C}$  等于 ()
- A.  $\frac{8\sqrt{3}}{3}$                       B.  $\frac{2\sqrt{39}}{3}$                       C.  $\frac{26\sqrt{3}}{3}$                       D.  $2\sqrt{7}$
168. 若  $\triangle ABC$  的三边  $a, b, c$  满足  $(a+b-c)(c-a) = 0$ , 则此三角形的形状是 ()
- A. 不等腰的锐角三角形                      B. 直角三角形                      C. 不等腰的钝角三角形                      D. 等腰三角形
169. 在  $\triangle ABC$  中, 若  $\sin A \cdot \cos B < 0$ , 则  $\triangle ABC$  的形状 ()
- A. 是锐角三角形                      B. 是直角三角形                      C. 是钝角三角形                      D. 不能确定
170. 在  $\triangle ABC$  中, 若  $\sin A = 2 \cos B \cdot \sin C$ , 则此三角形的形状 ()
- A. 是等腰三角形, 但不一定是等边三角形                      B. 是等边三角形                      C. 是不等腰的直角三角形                      D. 是边长互不相等的三角形
171. 一角槽的横断面如图所示, 四边形  $ADEB$  是矩形, 且  $\alpha = 50^\circ$ ,  $\beta = 70^\circ$ ,  $AC = 90\text{mm}$ ,  $BC = 150\text{mm}$ , 则  $DE$  的长等于
- A.  $210\text{mm}$                       B.  $200\text{mm}$                       C.  $198\text{mm}$                       D.  $171\text{mm}$
- (第 148 题)
172.  $\triangle ABC$  的  $BC$  边上有一点  $D$ , 满足  $\angle CAD = \angle DAB = 60^\circ$ , 且  $AC = 3$ ,  $AB = 6$ , 则  $AD$  的长为 ()
- A. 2                      B. 2.5                      C. 3                      D. 3.5
173. 设  $a, a+1, a+2$  是钝角三角形的三边, 则  $a$  的取值范围是 ()
- A.  $0 < a < 3$                       B.  $1 < a < 3$                       C.  $3 < a < 4$                       D.  $4 < a < 6$
174. 在  $\triangle ABC$  中, 根据条件求三角形的内角: (1) 若  $a = \sqrt{3} + 1$ ,  $b = 2$ ,  $c = \sqrt{6}$ , 则  $A =$ \_\_\_\_\_. (2) 若  $a : b : c = \sqrt{2} : (1 + \sqrt{3}) : 2$ , 则  $A =$ \_\_\_\_\_. (3) 若三角形中三边长的比为  $3 : 4 : \sqrt{37}$ , 则这个三角形的最大内角等于\_\_\_\_\_. (4) 若  $(a+b+c)(b+c-a) = 3bc$ , 则  $A =$ \_\_\_\_\_. (5) 若  $2 \lg(a^2 + b^2 - c^2) = \lg 2 + 2 \lg a + 2 \lg b$ , 则  $C =$ \_\_\_\_\_. (6) 若三角形面积  $S = \frac{1}{4\sqrt{3}}(b^2 + c^2 - a^2)$ , 则  $A =$ \_\_\_\_\_.
175. 在  $\triangle ABC$  中, 根据条件求三角形的边长: (1) 若  $a = 6$ ,  $b = 6\sqrt{3}$ ,  $A = 30^\circ$ , 则  $c =$ \_\_\_\_\_. (2) 若一内角为  $30^\circ$ , 它的一邻边边长为 4, 对边长为  $\frac{5}{2}$ , 则另一邻边边长为\_\_\_\_\_. (3) 若一个内角是  $45^\circ$ , 这个角的一条邻边长是  $\sqrt{3} + 1$ , 对边长是 2, 则其另一条邻边长等于\_\_\_\_\_. (4) 若  $\frac{b-1}{c+2} = \frac{2}{3}$ ,  $a = \sqrt{21}$ ,  $A = 60^\circ$ ,



则  $c =$ \_\_\_\_\_. (5) 若  $AB = AC$ ,  $BC - AB = 2$ ,  $\cos B = \frac{4}{5}$ , 则  $AB =$ \_\_\_\_\_,  $BC =$ \_\_\_\_\_.  
 (6) 若  $a + b = 8$ ,  $c = 7$ ,  $C = 60^\circ$ , 则  $a =$ \_\_\_\_\_,  $b =$ \_\_\_\_\_. (7) 若三角形的面积为  $\sqrt{3}$ ,  $B = 60^\circ$ ,  
 $b = 4$ , 则  $a =$ \_\_\_\_\_,  $c =$ \_\_\_\_\_.

176. 在  $\triangle ABC$  中, 根据条件求三角形的内角: (1) 若  $b = 2c \sin B$ , 则  $C =$ \_\_\_\_\_. (2) 若  $a = 4$ ,  $b = 6$ ,  
 $\sin B = \frac{3}{4}$ , 则  $A =$ \_\_\_\_\_. (3) 若  $a = 2\sqrt{2}$ ,  $b = 2\sqrt{3}$ ,  $A = 45^\circ$ . 则  $C =$ \_\_\_\_\_.

177. 在  $\triangle ABC$  中, 根据条件求三角形的边长: (1) 若等边  $\triangle ABC$  的外接圆半径为  $6\sqrt{3}\text{cm}$ , 则它的边长为\_\_\_\_\_.  
 (2) 若  $A = 105^\circ$ ,  $B = 45^\circ$ ,  $c = \sqrt{2}$ , 则  $b =$ \_\_\_\_\_. (3) 若  $A = 45^\circ$ ,  $B = 60^\circ$ ,  $a = 10$ , 则  $b =$ \_\_\_\_\_,  
 $c =$ \_\_\_\_\_. (4) 若  $\cos A = \frac{\sin B}{2 \sin C}$ ,  $b = 4\sqrt{3}$ ,  $2 \sin B = \sqrt{3}$ , 则  $a =$ \_\_\_\_\_.

178. 在  $\triangle ABC$  中, 根据条件直接写出结论: (1) 若  $\sqrt{(\sin B - \frac{\sqrt{2}}{2})^2 + (\sqrt{3} - \tan C)^2} = 0$ , 则  $A =$ \_\_\_\_\_.  
 (2) 若  $AC = 5$ ,  $B = 60^\circ$ ,  $AD \perp BC$  于点  $D$ , 且  $AD = 3$ , 则  $BC =$ \_\_\_\_\_,  $AB =$ \_\_\_\_\_. (3) 若  
 $C = 90^\circ$ ,  $CD \perp AB$  于点  $D$ ,  $BD = 6$ ,  $CD = 2$ , 则  $\sin A =$ \_\_\_\_\_.

179. 在  $\triangle ABC$  中, 根据条件计算: (1) 若  $2B = A + C$ , 且边  $AC = 2$ , 则外接圆半径  $R =$ \_\_\_\_\_. (2) 若面积  
 $S = \frac{1}{4}$ , 外接圆半径  $R = 1$ , 则  $abc =$ \_\_\_\_\_. (3) 若  $\frac{a}{\sin A} = 2$ , 则  $\frac{a+b+c}{\sin A + \sin B + \sin C} =$ \_\_\_\_\_.  
 (4) 若  $(b+c):(c+a):(a+b) = 4:5:6$ , 则  $\sin A:\sin B:\sin C =$ \_\_\_\_\_. (5) 若  $A = 105^\circ$ ,  $B = 30^\circ$ ,  
 $BC = \frac{\sqrt{6}}{2}$ , 则的  $B$  分线的长为\_\_\_\_\_. (6) 若  $BC$  边上的中线  $m = \sqrt{\frac{8-3\sqrt{3}}{2}}$ , 且  $a = \sqrt{3}+1$ ,  $b = \sqrt{6}$ ,  
 则  $B =$ \_\_\_\_\_.

180. 根据条件判断  $\triangle ABC$  的形状: (1) 若  $\sin A:\sin B:\sin C = 2:3:4$ , 则这个三角形是\_\_\_\_\_三角  
 形. (2) 若关于  $x$  的方程  $x^2 + \cos B \cdot x - \frac{a}{c} = 0$  的两根之和等于两根之积, 则这个三角形是三角形. (3) 若  
 $b \sin B = c \sin C$ , 则这个三角形是\_\_\_\_\_三角形. (4) 若  $a \cos A = b \cos B$ , 则这个三角形是\_\_\_\_\_  
 三角形. (5) 若  $\sin A = 2 \sin B \cos C$ , 且  $\frac{a+b-c}{b+c-a} = \frac{3b}{c}$ , 则这个三角形是\_\_\_\_\_三角形. (6) 若  $B = 30^\circ$ ,  
 $c = 150$ ,  $b = 50\sqrt{3}$ , 则这个三角形是\_\_\_\_\_三角形. (7) 若  $b = a \sin C$ ,  $c = a \sin(90^\circ - B)$ ,  $B < 90^\circ$ , 则  
 这个三角形是\_\_\_\_\_三角形. (8) 若  $a = \sqrt{3}-1$ ,  $b = \frac{\sqrt{6}}{2}$ ,  $C = \frac{\pi}{4}$ , 则这个三角形是\_\_\_\_\_三角形.

181. (1) 在  $\triangle ABC$  中, 已知  $a = 8$ ,  $b = 7$ ,  $c = 5$ , 求  $B$  及三角形的面积  $S$ . (2) 在  $\triangle ABC$  中, 已知  $a = 12$ ,  
 $b = 4\sqrt{3}$ ,  $A = 120^\circ$ , 求  $C$  及三角形的面积. (3) 在  $\triangle ABC$  中, 已知  $a = 7$ ,  $b = 3$ ,  $c = 5$ , 求最大角与  $\sin C$  的  
 值. (4) 在  $\triangle ABC$  中, 已知  $b = \sqrt{2}$ ,  $c = 1$ ,  $B = 45^\circ$ , 求  $a, C$  的值. (5) 在  $\triangle ABC$  中, 已知  $A = 45^\circ$ ,  $B = 60^\circ$ ,  
 $a = 10$ , 求  $b, c$  的值. (6) 在  $\triangle ABC$  中, 已知  $a = 10$ ,  $b = 6$ ,  $C = 120^\circ$ , 求  $\sin A$  的值. (7) 在  $\triangle ABC$  中, 已  
 知一个内角是  $60^\circ$ , 其对边为  $7$ , 且面积为  $10\sqrt{3}$ , 求其他两边的长. (8) 已知钝角三角形的三边长是三个连续  
 偶数, 求三边长.

182. 根据条件判断  $\triangle ABC$  的形状: (1)  $A = 60^\circ$ ,  $a = 1$ ,  $b + c = 2$ . (2)  $(b-c) \cos^2 A = b \cos^2 B - c \cos^2 C$ .  
 $A - B = \frac{a}{b}$   
 (3)  $\tan \frac{a}{a+b}$ .

183. 在  $\triangle ABC$  中, 求证: (1)  $a(\sin B - \sin C) + b(\sin C - \sin A) + c(\sin A - \sin B) = 0$ . (2)  $\sin^2 A + \sin^2 B +$   
 $\cos^2 C + 2 \sin A \sin B \cos(A+B) = 1$ . (3)  $a^2(\cos^2 B - \cos^2 C) + b^2(\cos^2 C - \cos^2 A) + c^2(\cos^2 A - \cos^2 B) = 0$ .

$$(4)(a^2 - b^2 - c^2) \tan A + (a^2 - b^2 + c^2) \tan B = 0. (5) \frac{a - c \cos B}{b - c \cos A} = \frac{\sin B}{\sin A}.$$

184. 在  $\triangle ABC$  中: (1) 已知  $(a+b+c)(a+b-c) = 3ab$ , 求  $C$ . (2) 已知  $ab = 60$ ,  $ab = 60$ , 面积  $S = 15$ , 求三内角. (3) 已知三边长分别为  $k^2 + k + 1$ ,  $k^2 - 1$ ,  $2k + 1$ , 求最大内角. (4) 已知  $(b+c) : (c+a) : (a+b) = 4 : 5 : 6$  求最大内角. (5) 已知面积  $S = \sqrt{3}$ ,  $a = 2\sqrt{3}$ ,  $b = 2$ , 求  $A, B, C$ . (6) 已知  $A = 120^\circ$ ,  $AB + BC = 21$ ,  $AC + BC = 20$ , 求  $BC$  的长.

185. 在  $\triangle ABC$  中: (1) 已知  $A > 90^\circ$ ,  $\sin B = \frac{5\sqrt{3}}{14}$ ,  $2^{5a-7b} = 1$ , 求  $a : b : c$ . (2) 已知两边之和为 4, 其夹角为  $60^\circ$ , 分别求周氏的最小值和面积的最大值.

186. 在  $\triangle ABC$  中: (1) 已知  $C = 90^\circ$ , 求证:  $\sin 2A \cdot \cot A = \frac{2b^2}{c^2}$ . (2) 已知  $A : B = 1 : 2$ , 求证:  $\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a+b+c}$ . (3) 已知  $C = 2B$ , 求证:  $c^2 - b^2 = ab$ . (4) 已知  $A = 100^\circ$ ,  $AB = AC$ , 角  $B$  的平分线交  $AC$  于点  $D$ , 求证:  $AD + DB = BC$ . (5) 已知  $2b = a + c$ , 求证: ①  $\tan \frac{A}{2} \cdot \tan \frac{C}{2} = \frac{1}{3}$ ; ②  $\cos A + \cos C - \cos A \cdot \cos C + \frac{1}{3} \sin A \cdot \sin C$  为定值. (6) 已知  $\sin A + \sin C = 2 \sin B$ , 且最大角与最小角之差为  $90^\circ$ , 求证: 三边之比为  $(\sqrt{7} - 1) : \sqrt{7} : (\sqrt{7} + 1)$ . (7) 已知  $C = 90^\circ$ ,  $CD$  是斜边  $AB$  上的高, 且  $\triangle CBD$  的面积是  $\triangle ACD$ ,  $\triangle ABC$  面积的比例中项, 求证:  $\sin B = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$ .

187. 在  $\triangle ABC$  中: (1) 已知  $B$  的 2 倍等于其他两角的和, 最长边长与最短边长的和是 8cm, 最长边长与最短边长的积是  $15\text{cm}^2$ , 求面积及  $B$  所对边的长. (2) 已知  $B$  为锐角,  $b = 7\text{cm}$ , 外接圆半径  $R = \frac{7\sqrt{3}}{3}\text{cm}$ , 面积  $S = 10\sqrt{3}\text{cm}^2$ , 求其他两边的长. (3) 已知  $A = 120^\circ$ ,  $\sin B : \sin C = 3 : 2$ , 且面积  $S = 6\sqrt{3}$ , 求  $a$  的值. (4) 已知  $\sin A : \sin B : \sin C = 4 : 5 : 6$ , 且最大边为 10, 求外接圆半径  $R$  和内切圆半径  $r$ .

188. 如图, 在圆内接四边形  $ABCD$  中, 已知边  $AB = 3$ ,  $AD = 5$ , 对角线  $BD = 7$ ,  $\angle BDC = 45^\circ$ , 求: (1)  $\sin \angle BAD$  的值. (2) 边  $BC$  的长. \_\_\_\_\_ (第 166 题) \_\_\_\_\_ (第 165 题)

189. 如图,  $AB$  是半圆  $O$  的直径, 延长  $AB$  到  $C$ , 使  $BC = AB$ ,  $D$  是半圆上一点, 连接  $CD$ , 且  $\tan \angle CDB = \frac{1}{3}$ , 求  $\cos \angle DAB$  的值.

190. 已知  $R, r$  分别是直角三角形的外接圆半径与内切圆半径, 求  $\frac{r}{R}$  的最大值, 并说明此时三角形的形状.

191. 如图, 为了测定河的宽度, 在一岸边选定两点  $A, B$ , 望对岸标记物  $C$ , 测得  $\angle CAB = 30^\circ$ ,  $\angle CBA = 75^\circ$ ,  $AB = 120$  米, 求河的宽度. (第 168 题)

192. 如图, 在塔底  $B$  测得山顶  $C$  的仰角为  $60^\circ$ , 在山顶  $C$  测得塔顶  $A$  的俯角为  $45^\circ$ , 已知塔高  $AB = 20$  米, 求山高  $DC$ . (第 169 题)

193. 如图, 半圆  $O$  的直径  $MN$  的长为 2,  $A$  为直径延长线上一点, 且  $OA = 2$ ,  $B$  为半圆上任意一点, 以  $AB$  为边作等边  $\triangle ABC$  ( $A, B, C$  顺时针排列),  $\angle AOB$  等于多少时, 四边形  $OACB$  的面积最大? 最大面积是多少? (第 170 题)

194. 利用二角代换求下列函数的值域: (1)  $y = x + \sqrt{1 - x^2} + 3$ . (2)  $y = \sqrt{x - 4} + \sqrt{15 - 3x}$ . (3)  $y = 2\sqrt{x + 3} + \sqrt{2 - x}$ . (4)  $S = x^2 + xy + y^2 (1 \leq x^2 + y^2 \leq 2)$ . (5)  $y = \sqrt{1 + x} - \sqrt{x}$ . 注意常用的三角代换有如下几种: 若

$0 \leq x \leq 1$ , 可令  $x = \sin^2 \alpha$  或令  $x = \cos^2 \alpha (0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2})$ , 或令  $x = \tan \alpha (0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{4})$ ; 若  $-1 \leq x \leq 1$ , 可令  $x = \sin \alpha (-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2})$ , 或令  $x = \cos \alpha (0 \leq \alpha \leq \pi)$ , 或令  $x = \tan \alpha (-\frac{\pi}{4} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{4})$ ; 若  $x^2 + y^2 = R^2$ , 可令  $x = R \cos \alpha, y = R \sin \alpha (0 \leq \alpha \leq 2\pi)$ ; 若  $x \in \mathbf{R}$ , 可令  $x = \tan \alpha (-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2})$ ; 若  $x^2 - y^2 = 1$ , 可令  $x = \sec \alpha, y = \tan \alpha (0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2})$

195. (1.) 求函数  $f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{2-x}$  的最大值、最小值. (2) 已知  $a, b > 0$ , 求函数  $f(x) = a\sqrt{1-x^2} + bx$  的最大值、最小值. (3) 已知  $0 \leq y < x < \frac{\pi}{2}$ , 且满足  $\tan x = 3 \tan y$ , 求  $x - y$  的最大值.

196. (1)  $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$ , 且  $\sin \alpha, \sin \beta$  是方程  $x^2 - (\sqrt{2} \cos 40^\circ)x + \cos^2 40^\circ - \frac{1}{2} = 0$  的两根, 求  $\cos(2\alpha - \beta)$  的值. (2) 在  $\triangle ABC$  中,  $\tan A, \tan B$  是关于  $x$  的二次方程  $x^2 + mx + m + 1 = 0$  的两个实根, 求实数  $m$  的取值范围.

197. 如图, 已知  $P$  为  $\triangle ABC$  内一点, 且满足  $\angle PAB = \angle PBC = \angle PCA = \theta$ , 求证:  $\cot \theta = \cot A + \cot B + \cot C$ . (第 174 题)

198. 若不等式  $\frac{(x^2 + 1) \cos \theta - x(\cos \theta - 5) + 3}{x^2 - x + 1} > \sin \theta - 1$  对任意实数  $x$  恒成立, 求  $\theta$  的取值范围.

199. 已知函数  $f(x) = a + b \cos x + c \sin x$  的图象过两点  $(0, 1), (\frac{\pi}{2}, 1)$ , 且当  $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$  时,  $|f(x)| \leq 2$ , 求实数  $a$  的取值范围.

200. (1) 已知  $\odot O$  的半径为  $R$ , 它的内接三角形  $ABC$  满足关系式  $2R(\sin^2 A - \sin^2 C) = (\sqrt{2}a - b) \sin B$ , 求  $\triangle ABC$  面积的最大值. (2) 如图, 已知扇形  $AOB$  的中心角为  $45^\circ$ , 半径为 1, 矩形  $MNPQ$  内接于扇形, 使  $P, Q$  点在半径  $OA$  上, 求矩形  $MNPQ$  的对角线  $PM$  的最小值. (3) 如图, 已知  $P$  是正方形  $ABCD$  内一点,  $PQ \perp BC, PR \perp CD$  ( $Q, R$  为垂足),  $AB = 10, AP = 9$ , 求矩形面积的最大值、最小值. \_\_\_\_\_ (第 177(2) 题) \_\_\_\_\_ (第 177(3) 题)

201. (1) 若  $x \neq k\pi (k \in \mathbf{N})$ , 求证: ①  $\frac{1}{\sin 2x} = \cot x - \cot 2x$ ; ②  $\frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\frac{\sin 2^2 x}{\tan nx}} + \cdots + \frac{1}{\sin 2^n x} = \cot x - \cot 2^n x$ . (2) 求证:  $\tan x \tan 2x + \tan 2x \tan 3x + \cdots + \tan(n-1)x \tan nx = \frac{\tan nx}{\tan x} - n (n \in \mathbf{N})$ . (3) 求证:  $(2 \cos \theta - 1)(2 \cos 2\theta - 1)(2 \cos 2^2 \theta - 1) \cdots (2 \cos 2^{n-1} \theta - 1) = \frac{2 \cos 2^n \theta + 1}{2 \cos \theta + 1}$

202. 求  $\cos \frac{\pi}{17} \cos \frac{2\pi}{17} \cos \frac{3\pi}{17} \cos \frac{4\pi}{17} \cos \frac{5\pi}{17} \cos \frac{6\pi}{17} \cos \frac{7\pi}{17} \cos \frac{8\pi}{17}$  的值.

203. 实数  $x, y, z$  满足  $\sin x = a \sin(y - z), \sin y = b \sin(z - x), \sin z = c \sin(x - y) (a, b, c \neq 1)$ , 且  $\sin(x - y), \sin(y - z), \sin(z - x)$  都不为 0, 求  $a, b, c$  应满足的关系式.