2020.4.13

P_{121}. 1. $f: S^1 \to S^1, z \mapsto -z$. 描述同态 $f_\pi: \pi_1(S^1,1) \to \pi_1(S^1,-1)$

Sol: 将圈数为 n 的定端同伦类映为圈数 $-n$，即反向画圈

因为 $\Phi(f_\pi(\langle a \rangle)) = \Phi(\langle f_\pi \circ a \rangle) = \widetilde{f_\pi a}(1) - \widetilde{f_\pi a}(0)$

$= -\tilde{a}(1) - (-\tilde{a})(0) = -n$. #.

2. $f: S^1 \to S^1, z \mapsto z^n, n \in \mathbb{Z}$. 描述同态 $f_\pi: \pi_1(S^1,1) \to \pi_1(S^1,1)$.

Sol: $\because \Phi(f_\pi(\langle a \rangle)) = \Phi(\langle a^n \rangle) = n\,\Phi(\langle a \rangle)$

$\therefore f_\pi$ 将圈数为 m 的定端同伦类映为圈数为 mn 的. #

3. $f, g: (S^1, 1) \to (Y, y_0)$ 连续，且 $f_\pi = g_\pi: \pi_1(S^1,1) \to \pi_1(Y, y_0)$，证明 $f \simeq g$ rel. 1

Pf: $S^1 \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z} = \{[t] : 0 \le t < 1\}$

设 $\langle a \rangle \in \pi_1(S^1,1)$

由 $f_\pi(\langle a \rangle) = g_\pi(\langle a \rangle)$,

$\exists H_a: I \times I \to Y$ 连续

s.t. $H_a(s,0) = f(a(s))$

$H_a(s,1) = g(a(s))$

$H_a(1,t) = H_a(0,t) = f(a(0)) = g(a(0)) = y_0$.

取 $a = p|_{[0,1]}: s \mapsto e^{i2\pi s}$.

则 $H(x,t) = H_a(a^{-1}(x), t)$ 满足.

$H(x,0) = f(x)$

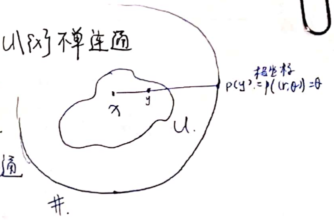
$H(x,1) = g(x)$.

$H(1,t) = H_a(1,t) = y_0$.

由定义，$f \simeq g$ rel. 1. #.

7. 证明若 $x \in E^2$，$U \ni x$ 邻域，则 $U \setminus \{x\}$ 不单连通

Pf: 如图，由 $P: y \mapsto P(y)$ 可构造



$U \setminus \{x\}$ 到 S^1 的直线同伦.

由 $\pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$ 不单连通

知 $U \setminus \{x\}$ 不单连通 #.

2020.4.16.

P_{140}.1. G_1, G_2, H: 群，$f_i: G_i \to H$ 是同态 $(i=1,2)$，证明 $\exists!$ 同态 $\varphi: G_1 * G_2 \to H$,

s.t. $\varphi|_{G_i} = f_i$, $i = 1, 2$.

Pf: 此即附录A. 命题A.8 简化.

令 $\varphi(g_1 \cdots g_n) = f_{j_1}(g_1) \cdots f_{j_n}(g_n)$，其中 $g_i \in G_{j_i}$, $j_i \in \{1,2\}$

(事实上，$\{j_1, \cdots, j_n\} = (1,2,1,2,\cdots)$ 或 $(2,1,2,1,\cdots)$)

则 ① $\varphi((g_1 \cdots g_n) \cdot (h_1 \cdots h_m))$, $h_i \in G_{k_i}$

$$= \begin{cases} \varphi(g_1 \cdots g_n h_1 \cdots h_m) = f_{j_1}(g_1) \cdots f_{j_n}(g_n) f_{k_1}(h_1) \cdots f_{k_m}(h_m), & \text{若 } j_n \ne k_1 \\ \varphi(g_1 \cdots (g_n h_1) \cdots h_m) = f_{j_1}(g_1) \cdots f_{j_n}(g_n h_1) \cdots f_{k_m}(h_m) \overset{f_i \text{同态}}{=} f_{j_1}(g_1) \cdots f_{j_n}(g_n) f_{j_n = k_1}(h_1) \cdots f_{k_m}(h_m), & \text{若 } j_n = k_1 \end{cases}$$

$= \varphi(g_1 \cdots g_n) \varphi(h_1 \cdots h_m) \Rightarrow$ 同态.

② $\varphi(g_i) = f_i(g_i), \forall g_i \in G_i, i = 1, 2 \Rightarrow \varphi|_{G_i} = f_i$.

由①+②，存在性得证.

③ $\forall \tilde{\varphi}$ 满足题意，$\forall (g_1 \cdots g_n) \in G_1 * G_2$,

$\tilde{\varphi}(g_1 \cdots g_n) \overset{\text{同态}}{=} \tilde{\varphi}(g_1) \cdots \tilde{\varphi}(g_n) \overset{\tilde{\varphi}|_{G_i} = f_i}{=} f_{j_1}(g_1) \cdots f_{j_n}(g_n) = \varphi(g_1 \cdots g_n)$ $\Rightarrow$ 唯一性得证.

#.

P141. 2. $X=X_1\cup X_2$，X_i 开，$X_0=X_1\cap X_2$ 非空且道路连通，$x_0\in X_0$.

证明 由 $(i_1)_\pi:\pi_1(X_1,x_0)\to\pi_1(X,x_0)$ 和 $(i_2)_\pi:\pi_1(X_2,x_0)\to\pi_1(X,x_0)$

决定的同态 $\varphi:\pi_1(X_1,x_0)*\pi_1(X_2,x_0)\to\pi_1(X,x_0)$ 满同态.

Pf：此即 Van Kampen 第一条. 附录B在 P262 有证.

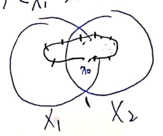
若有X道路连通(不妨如此，否则与 x_0 不连通的点不会在闭路中出现.)

$\forall\langle\alpha\rangle\in\pi_1(X,x_0)$，$\alpha:[0,1]\to X$.

由 X_i 开，∃充分大的 n 令 $I_i=[\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}]$，$i=1,\cdots,n$

s.t. $\alpha(I_i)\subset X_1$ 或 X_2，设 $\alpha(I_i)\subset X_{\tilde{i}}$，$\tilde{i}\in\{1,2\}$

记 $x_i=\alpha(\frac{i}{n})$.



若 $x_i\in X_0$，则取 X_0 中道路 w_i 连接 x_0 和 x_i.

否则 $x_i\in X_{\tilde{i}}$，取连接 x_0 和 x_i 的 $X_{\tilde{i}}$ 中道路 w_i.

如上取定，则 $w_{i-1}\underset{\uparrow}{\alpha(I_i)}w_i^{-1}\in\pi_1(X_{\tilde{i}},x_0)$

(这个要rescale到 $[0,1]$)

$\therefore\varphi(\langle(\alpha(I_1)w_1^{-1})\cdot(w_1\alpha(I_2)w_2^{-1})\cdots\underset{\pi_1(X_{\tilde{i}},x_0)}{\underset{\Uparrow}{(w_{i-1}\alpha(I_i)w_i^{-1})}}\cdots(w_{n-1}\alpha(I_n))\rangle)$

$=\langle(\alpha(I_1)w_1^{-1})(w_1\alpha(I_2)w_2^{-1})\cdots(w_{n-1}\alpha(I_n))\rangle$

$=\langle\alpha(I_1)\alpha(I_2)\cdots\alpha(I_n)\rangle$

$=\langle\alpha\rangle$. $\therefore\varphi$ 为满的. #

3. 证 $n>2$ 时，$E^n\setminus\{$有限点$\}$ 单连通

Pf：设 $E^n\setminus\{x_1,\cdots,x_m\}$ 为我们的目标.

∃ε充分小，s.t. $B(x_m,\varepsilon)\cap\{x_1,\cdots,x_m\}=x_m$

$\therefore E^n\setminus\{x_1,\cdots,x_{m-1}\}=E^n\setminus\{x_1,\cdots,x_m\}\cup B(x_m,\varepsilon)$
$\qquad\triangleq X_1\cup X_2$

且 $X_1\cap X_2=B(x_m,\varepsilon)\setminus\{x_m\}$ 强形变收缩到 S^{n-1}，$n-1\geq2$.

由 $\pi_1(S^{n-1})=\{1\}$ 知 $X_1\cap X_2$ 道路连通

由 Van Kampen 情形① (由 $\pi_1(B(x_m,\varepsilon))$ 平凡，由 $B(x_m,\varepsilon)$ 凸.)

$\pi_1(E^n\setminus\{x_1,\cdots,x_{m-1}\})=\pi_1(E^n\setminus\{x_1,\cdots,x_m\})*\pi_1(B(x_m,\varepsilon))$
$\qquad=\pi_1(E^n\setminus\{x_1,\cdots,x_m\})$

由归纳及 $\pi_1(E^n)=\{1\}$ 知 $E^n\setminus\{x_1,\cdots,x_m\}$ 单连通. #

4. 求下列空间基本群：

(1) E^2 去掉3个点

Sol：设三个点被 $y=0$ 分离成1个点和两个点.

且∃ $\varepsilon>0$ 充分小，s.t. $\{y>-\varepsilon\}\cap\{x_1,x_2,x_3\}=\{y>0\}\cap\{x_1,x_2,x_3\}$
$\{y<\varepsilon\}\cap\{x_1,x_2,x_3\}=\{y<0\}\cap\{x_1,x_2,x_3\}$

由于 $\{-\varepsilon<y<\varepsilon\}$ 为 $\mathbb{R}^2$ 的凸子集，它单连通

$\therefore\pi_1(E^2\setminus\{x_1,x_2,x_3\})\cong\pi_1(E^2\setminus\{x_1\})*\pi_1(E^2\setminus\{x_2,x_3\})$

对 $\{x_2,x_3\}$ 再用分离技巧.

$\cong\pi_1(E^2\setminus\{x_1\})*\pi_1(E^2\setminus\{x_2\})*\pi_1(E^2\setminus\{x_3\})$

$\cong\mathbb{Z}*\mathbb{Z}*\mathbb{Z}$. ($E^2\setminus\{x_1\}$ 强形变收缩于 $\partial B(x_1,\varepsilon)\cong S^1$). #

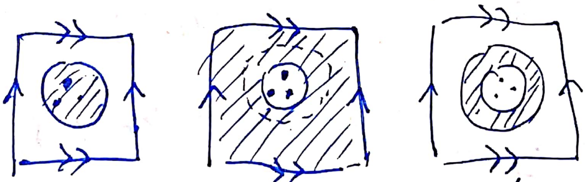
(2) S^2 中去掉3个点

Sol：由 S^2 中去掉1个点 $\cong E^2$.

$\therefore \pi_1(S^2$ 中去掉3点$) \cong \pi_1(E^2$ 中去掉2点$) = \mathbb{Z}*\mathbb{Z}$ （由(1)知）. #

(3) T^2 去掉3个点

Sol：构造 X_1、X_2 如右.



X_1 X_2 X_0

则 $\pi_1(X_1) \overset{(1)}{\cong} \mathbb{Z}*\mathbb{Z}*\mathbb{Z}$.

$\pi_2(X_2) \cong \mathbb{Z}*\mathbb{Z}$ （由它强形变收缩至 $S^1 \vee S^1$）

X_0 强形变收缩至 S^1，$\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$.

$\therefore \pi_1(T^2$ 去掉三点$) = \mathbb{Z}^{*4}$ #.