学院：________ 专业：________ 班级________ 学号：________ 姓名：________

2020.3.30

P109. 2. $y_1, y_2 \in Y$, $f_{y_i}: X \to \{y_i\}$. 证明 $f_{y_1} \simeq f_{y_2} \Leftrightarrow y_1, y_2$ 在 Y 的同一道路分支中.

证. $f_{y_1} \simeq f_{y_2}$

$\Leftrightarrow \exists H$ 连续, s.t. $H(x,0)=y_1$, $H(x,1)=y_2$

$(\Rightarrow)$ 固定 x, $H(x,\cdot):[0,1]\to Y$ 为连接 y_1, y_2 的道路.

即 y_1, y_2 道连

$(\Leftarrow)$ 设 y_1, y_2 道连 $\widehat{H}(t):[0,1]\to Y$ 连通

则 $H(x,t)=\widehat{H}(t)$ 为同伦. #

3. 证明：若连续 $f: X\to S^n$ 不满，则 f 零伦.

证：不妨 N(北极) $\notin f(X)$，则由北极球极投影 φ.

$\varphi\circ f: X\to E^n$ 连续，单射

故 $H(x,t)=\varphi^{-1}((1-t)\,\varphi\circ f(x))$ 使 f 零伦（同伦于 $f_{S(南极)}$） #

5. $f: X\to Y$ 连续，X 中道路 $a \simeq b$，证明 $f\circ a \simeq f\circ b$

证：$a\simeq b \Rightarrow \exists H$ 连续，s.t. $H(s,0)=a(s)$ $H(0,t)=a(0)$
$H(s,1)=b(s)$ $H(1,t)=a(1)$

则 $f\circ H$ 连续. 且 $f\circ H(s,0)=(f\circ a)(s)$, $f\circ H(0,t)=(f\circ a)(0)$
$f\circ H(s,1)=(f\circ b)(s)$, $f\circ H(1,t)=(f\circ a)(1)$

$\therefore f\circ a\simeq f\circ b$ #

6. 记 $p: I\to S^1$, $t\mapsto e^{i2\pi t}$. $f,g\in C(S^1,X)$. 证明：$f\circ p \simeq g\circ p \Leftrightarrow f\simeq g$ rel $\{1\}$.

证：$f\circ p\simeq g\circ p \Leftrightarrow$ $\exists$ 从 $f\circ p$ 到 $g\circ p$ 的同伦 $H(x,t)$, s.t.
$f\circ p(0)=g\circ p(0)=f(1)=g(1)=H(0,t)$
$f\circ p(1)=g\circ p(1)=f(1)=g(1)=H(1,t)$

$\Leftrightarrow \widetilde{H}(e^{i2\pi x},t)=H(x,t): S^1\times[0,1]\to X$ 连续
$\widetilde{H}(1,t)=f(1)=g(1)$ （由于 $S^1=I/\sim$ 商拓扑，从而 $\widetilde{H}$ 连续 $\Leftrightarrow H$ 连续.）

$\Leftrightarrow f\simeq g$ rel $\{1\}$. #

2020.4.3.

P108. 4. 证明：连续 $f: X\to Y$ 零伦 $\Leftrightarrow f$ 可扩张到 CX 上
$CX = X\times I/X\times\{1\}$

证：$(\Leftarrow)$ 设 $\bar f$ 为 f 扩张到 CX 上的连续映射，

则 $H(x,t)=\begin{cases}\bar f(x,t), & t\neq 1\\ \bar f(x_0,t), & t=1, x_0\in X\end{cases}$ 连续. 且将 $f=H(\cdot,0)$ 与 $C=H(\cdot,1)=\bar f(x_0,1)$ 同伦起来

（连续性由 $\bar f$ 在商拓扑中连续得到.） $\therefore f$ 零伦.

$(\Rightarrow)$ $\exists H(x,t)$ 连续, s.t. $H(\cdot,0)=f$, $H(\cdot,1)=c$ for some $c\in Y$

定义 $\bar f(x,t)=\begin{cases}H(x,t), & t\neq 1\\ C, & t=1\end{cases}$，则 $\bar f$ 连续定义在 CX 上，为 f 的扩张. #.

7. $X\subset E^n$ 凸，则 X 上相同起、终点的两条道路必定端同伦.

证：设两条道路为 $f_i:[0,1]\to P_i\subset X$, $f_i(0)=a$, $f_i(1)=b$, $i=0,1$.

则 $H(x,t)=(1-t)f_0(x)+t f_1(x)$ 连续定义在 $[0,1]\times I$ 上(由凸，良定)

且 $H(0,t)=(1-t)a+ta=a$, $H(1,t)=b$, $H(\cdot,0)=f_0$, $H(\cdot,1)=f_1$

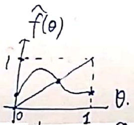
$\therefore f_1\simeq f_2$ 定端同伦. #

8. 证明：若连续 $f: S^1 \to S^1 \not\simeq id_{S^1}$，则 f 有不动点.

Pf: 若 f 没有不动点，即 $f(x) \neq x, \forall x \in S^1$

将 S^1 中元素表示为 $x = e^{i2\pi\theta}$，$\theta \in [0,1] = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$

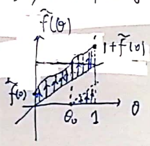
则 $f(\theta) = e^{i2\pi \hat{f}(\theta)}$，$\hat{f}(\theta) \neq \theta$.



若无 $\hat{f}(\theta)=1$，由连续性介值定理和 $\hat{f}(0) = \hat{f}(1) \in (0,1)$，必有不动点 $\hat{f}(\theta) = \theta$，矛盾!

不妨 $\hat{f}(\theta_0) = 1$ for some θ_0，则图类似右边

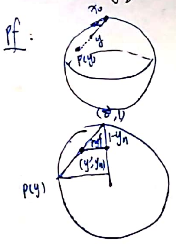
令 $H(\theta, t) = \begin{cases} e^{i2\pi((1-t)\theta + t\hat{f}(\theta))}, & \theta \leq \hat{f}(\theta) \leq 1. \\ e^{i2\pi((1-t)\theta + t(1+\hat{f}(\theta)))}, & 0 \leq \hat{f}(\theta) < \theta. \end{cases}$



则 H 连续，为 id_{S^1} 到 f 的同伦映射. #

P134. 12. $x_0 \in \underset{\partial D^n}{S^{n-1}}$，证明 $S^{n-1} \setminus \{x_0\}$ 为 $D^n \setminus \{x_0\}$ 的形变收缩核.

Pf:



由图，$\forall y \in D^n \setminus \{x_0\}$，定义 $p(y) \in S^{n-1} \setminus \{x_0\}$ 为其沿 $x_0 y$ 方向到 ∂S^n 的交点.

准确说，不妨 $x_0 = (0, \cdots 0, 1)$，$y = (y_1, \cdots, y_n) = (y', y_n)$

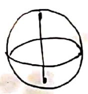
则 $p(y) = (ay', 1 - a(1-y^n))$

其中 $a = \frac{2(1-y^n)}{|y'|^2 + (1-y^n)^2}$ (>0).

则令 $H(y,t) = (1-t)y + t\,p(y)$ 可知为强形变收缩核. #

13. 证明下列各空间互相同伦等价:

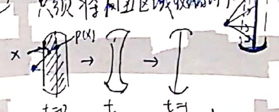
①S^2 加条直径　② T^2 的纬圈上粘一个圆盘　③ S^2 加一 S^1 (相切)



Pf: ① 为

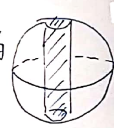
: S^2 加一类似圆柱的实心区域 $(D^2 \cap \{x^2+y^2 \leq \varepsilon\})$ 的强形变收缩

只须将柱图区域收缩即可:



(用 $(1-t)x + tp(x)$ 收缩)

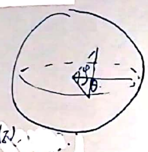
② 为



关于阴影区域的商映射,

(可以找到连续映射 $f(x,y,z) = (x,y,d(z))$,

其中 $d((x,y,z)) = dist((x,y,z), \cdots)$)



③ 为 ① 将 N.S 粘合的商空间.

我猜和强形变收缩以及商映射有关，但不会证了.