习题7

1. 用Fubini定理证明如下结论

   (a) 对任意分布函数F以及$a \geq 0$,证明
   $$\int_{-\infty}^{\infty}(F(x-a)-F(x))=a.$$

   (b) 设$X \geq 0$, 则对任意$r>1$, 我们有
   $$\int_0^{\infty}\frac{1}{u^r}E(X\wedge u^r)du=\frac{r}{r-1}EX^{1/r}.$$

   (c) 证明$\int_{-\infty}^{\infty}|x|dF(x)<\infty$的充要条件是
   $$\int_{-\infty}^{0}F(x)dx<\infty \text{ 且 } \int_0^{\infty}1-F(x)dx<\infty$$

2. 设$\{a_{ij}, i,j\geq 1\}$为实数族,有$\sum_{i,j}|a_{ij}|<\infty$, 由Fubini定理推出
   $$\sum_{ij}a_{ij}=\sum_i(\sum_j a_{ij})=\sum_j(\sum_i a_{ij}).$$
   举例说明当$\sum_{i,j}|a_{ij}|=\infty$时上式不一定成立.

3. (a) 设X,Y独立, X为绝对连续随机变量, 则$X+Y$为绝对连续的, 说明如果X,Y不是独立的, 则此结论不一定成立.

   (b) 设X,Y独立, X为离散的, Y为奇异连续随机变量, 则$X+Y$为奇异连续的.

4. (a) 证明对任意$r\geq 1$有
   $$E|X|^r=r\int_0^{\infty}x^{r-1}P(|X|>x)dx.$$

   (b) 如果对任意$\alpha>1$, 都有
   $$\frac{P(|X|>\alpha n)}{P(|X|>n)}\to 0.$$
   证明X的任意阶矩都存在.

   (c) 假设X,Y为非负随机变量, $r>1$且
   $$P(Y>t)\leq\frac{1}{t}\int_{Y>t}XdP,\quad \forall t>0,$$
   用Fubini定理和Holder不等式证明
   $$EY^r\leq\left(\frac{r}{r-1}\right)^r EX^r.$$

5. 设随机变量X,Y相互独立, $p\geq 1$,

   (a) 若$EX=EY=0$, 则$E|X+Y|^p\geq\max\{E|X|^p,E|Y|^p\}$.

   (b) 若$E|X+Y|^p<\infty$, 则$E|X|^p<\infty, E|Y|^p<\infty$.