2020.5.25

习4. 1. 设 K' 为 K 的一个重分（不必是重心），$b\in(K')^{\circ}$，$\underline{s}=\mathrm{Car}_K b$. 证明 $\mathrm{St}_{K'} b \subset \mathrm{St}_K \underline{s}$.

证：$\forall a\in \mathrm{St}_{K'} b$，$b<\mathrm{Car}_{K'} a$ 即 $b\in \mathrm{Car}_{K'} a \overset{\text{由}K'\text{重分}}{\subset} \mathrm{Car}_K a$

$\Rightarrow \mathrm{Car}_K b \subset \mathrm{Car}_K a$ 即 $\underline{s}<\mathrm{Car}_K a \Rightarrow a\in \mathrm{St}_K \underline{s}$. #

2. 设 $\underline{s}=(a_0,\cdots,a_q)\in K$. 证明 $\mathrm{St}_{K^{(1)}}\overset{*}{\underline{s}}\subset \mathrm{St}_K a_i$, $i=0,\cdots,q$.

证：$\forall x\in \mathrm{St}_{K^{(1)}}\overset{*}{\underline{s}}$，$\overset{*}{\underline{s}}=(\frac{1}{q+1},\cdots,\frac{1}{q+1})\in \mathrm{Car}_{K^{(1)}}x \subset \mathrm{Car}_K x$

若 $x=(\lambda_0,\cdots,\lambda_q)$，$\sum\lambda_i=1$ 中 $\exists\lambda_i=0$，则 $\mathrm{Car}_K x\subset(a_0,\cdots,\hat{a_i},\cdots,a_q)$ 与 $\overset{*}{\underline{s}}$ 矛盾

$\therefore \mathrm{St}_{K^{(1)}}\overset{*}{\underline{s}}\subset\{(\lambda_0,\cdots,\lambda_q):\sum\lambda_i=1, 且\lambda_i\neq0\}$

又由 $\mathrm{Car}_K x=\underline{s}\ni a_i$ 知 $\mathrm{St}_{K^{(1)}}\overset{*}{\underline{s}}\subset \mathrm{St}_K a_i$ #

3. 验证定义7.5中规定的 $\mathrm{Sd}\,K$ 中单形规则相处.

$\mathrm{Sd}\,K \triangleq \{(\overset{*}{\underline{s_0}},\cdots,\overset{*}{\underline{s_q}}): \underline{s_i}\in K, \underline{s_0}<\cdots<\underline{s_q}\}$

证：由 $\underline{s_0}<\cdots<\underline{s_q}$，$\forall(\overset{*}{\underline{s_0}},\cdots,\overset{*}{\underline{s_q}})$，$(\overset{*}{\underline{s_0'}},\cdots,\overset{*}{\underline{s_q'}})\in \mathrm{Sd}\,K$，若两者相交，

设 $\{\overset{*}{\underline{s_i}}{}^{\cap}, i\in I\}$ 为交集中的顶点集全体.

则由线性性（凸组合），$(\overset{*}{\underline{s_i}}{}^{\cap}, i\in I)$ 组成了 $(\overset{*}{\underline{s_i}})\cap(\overset{*}{\underline{s_i'}})$，即为两者公共面. #

4. 利用单纯逼近存在定理证明：S^n 到 S^{n+1} 的 $\forall$ 连续映射零伦

证：设 n 维多面体 Δ^n，则令 $K\triangleq \mathrm{Bd}\,\Delta^{n+1}$，$L=\mathrm{Bd}\,\Delta^{n+2}$，

$\forall$ 连续 $f: S^n\to S^{n+1}$ 可看作连续 $f: |K|\to|L|$，

由单纯逼近存在定理，$\exists f$ 单纯逼近 $\varphi: K^{(r)}\to L$，其中 $\dim K^{(r)}=n<n+1=\dim L$

由直线同伦，$f\simeq\varphi$，由 dim 知 φ 非满，则 $\varphi\simeq\{x\}$（球极投影），即 f 零伦. #

5. 设 X, Y 可剖分，证明 $[X, Y]$ 可数.（从 X 到 Y 映射同伦类集合）

Pf：不妨 X, Y 为连通的多面体，否则拆成几部分不影响可数性.

设 $|K|=X$, $|L|=Y$. 则 $\exists r_f$ s.t.

$f\simeq\varphi$：从 $K^{(r_f)}$ 到 L 有单纯逼近，而 $K^{(r_f)}$ 到 L 的单纯逼近数有限

$\therefore [X,Y] \le \{K^{(r_f)}\to L$ 的单纯逼近：$r_f\in\mathbb{Z}\}$ 至多可数.

2020.5.28

P223. 1. 求 $S^n \vee S^m$ 同调群（$n\neq m$ 都大于0）.

Sol：$H_q(S^n\vee S^m)\cong H_q(\mathrm{Bd}\,\underline{\Delta}^{n+1}\vee \mathrm{Bd}\,\underline{\Delta}^{m+1})$

由 $H_q(S^n)\cong\begin{cases}\mathbb{Z}, & q=0,n\\ 0, & \text{else}\end{cases}$ 知.

$$H_q(S^n\vee S^m)\cong\begin{cases}\mathbb{Z}, & q=0,n,m\\ 0, & \text{else.}\end{cases}$$ #

2. 作可剖分 X，s.t. $H_0(X), H_2(X), H_3(X)\cong\mathbb{Z}$, $H_1(X)\cong\mathbb{Z}_2$, $H_q(X)\cong 0$ 其他.

Sol：令 $X=P^2\vee S^2\vee S^3$,

则由 $H_q(P^2)\cong\begin{cases}\mathbb{Z}, & q=0\\ \mathbb{Z}_2, & q=1\\ 0, & \text{else}\end{cases}$ $H_q(S^n)\cong\begin{cases}\mathbb{Z}, & q=0,n\\ 0, & \text{else}\end{cases}$ 可 check之 #

3. 作可剖分 X，s.t. X 与 T^2 有同构的同调群但 $X\not\cong T^2$.

Sol：$H_q(T^2)\cong\begin{cases}\mathbb{Z}, & q=0,2\\ \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}, & q=1\\ 0, & \text{else}\end{cases}$ 令 $X=(S^1\vee S^1)\vee S^2$.

但 $\left.\begin{array}{l}\pi_1(T^2)\cong\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\\ \pi_1(X)\cong\mathbb{Z}*\mathbb{Z}\end{array}\right\}\Rightarrow X\not\cong T^2.$ #

P227. 1. X: 可剖分空间, $f: X \to S^n$ $(n \geq 1)$ 连续, 不满. 证 $f_{*q} = 0$.

证: 由 $f(X) \subset S^n$ 不满, $f(x)$ 可收缩至 S^n 上一点, 即 f 零伦

(可由 $S^n \setminus \{s\} \cong \mathbb{R}^n$ 得到.)

$\therefore f \simeq f_c: X \to \{c\} \subseteq S^n$

$\therefore f_{*q} = (f_c)_{*n} = 0.$ #

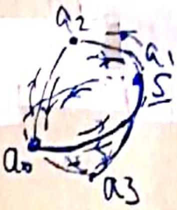
4. 设 $X = S^2$ 赤道上粘一条 Mobius带. 求 $H_q(X)$

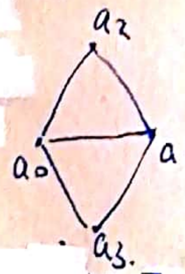
Sol: $q \geq 3$ 时, $H_q(X) \cong 0$.

$q = 0$ 时, $H_q(X) \cong \mathbb{Z}$.

$q = 2$ 时, $H_q(X) = H_2(S^2)$ (由 $H_2(\text{Mobius}) \simeq 0$).

$\simeq \mathbb{Z}$.





$q = 1$ 时, $B_1(X) = \mathbb{Z}(a_0a_2 + a_2a_1) \oplus \mathbb{Z}(a_0a_3 + a_3a_1) \oplus 2\mathbb{Z}a_0a_1$

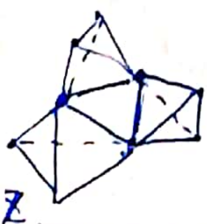
由于 Mobius 带两对面之粘合.

$Z_1(X) = \mathbb{Z}(a_0a_2 + a_2a_1) \oplus \mathbb{Z}(a_0a_3 + a_3a_1) \oplus \mathbb{Z}a_0a_1$

$\Rightarrow H_1(X) = Z_1(X)/B_1(X) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_2$.

$\therefore H_q(X) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = 0, 2 \\ \mathbb{Z}_2, & q = 1 \\ 0, & \text{else}. \end{cases}$

5. X: 三个两两相切 S^2. 求 $H_q(X)$.



X.

Sol. $q \geq 3$, $H_q(X) \cong 0$. $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$

$H_2(X) = Z_2(X) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ 由 $H_2(\boxtimes) \cong \mathbb{Z}$

$q = 1$ 时, 每个 $\boxtimes$ 合收, 可用删边方法, 删至只剩中间的 $\triangle \simeq \bigcirc \simeq S^1$

$\therefore H_q(X) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = 0, 1 \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, & q = 2 \end{cases}$

$\Rightarrow H_1(S) \simeq H_1(X) \simeq \mathbb{Z}$.