2020.4.9

P115. 4. $f: X \to Y$ 连续，$x_i \in X$，$y_i = f(x_i)$，$i=0,1$. $w \in [X]$：从 x_0 到 x_1.

证明同态图表可交换：

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X,x_0) & \xrightarrow{f_\pi} & \pi_1(Y,y_0) \\ \downarrow w_\# & & \downarrow (f_\pi \circ w)_\# \\ \pi_1(X,x_1) & \xrightarrow{f_\pi} & \pi_1(Y,y_1) \end{array}$$

Pf：$\forall \langle\alpha\rangle \in \pi_1(X,x_0)$

$f_\pi \circ w_\#(\langle\alpha\rangle) = f_\pi(\langle w^{-1}\alpha w\rangle) = \langle f\circ(w^{-1}\alpha w)\rangle = \langle f(w^{-1})f(\alpha)f(w)\rangle$ f保乘法

$(f_\pi \circ w)_\# f_\pi(\langle\alpha\rangle) = (f_\pi \circ w)_\# \langle f_\pi(\alpha)\rangle$

$= (f_\pi \circ w)^{-1}\langle f_\pi(\alpha)\rangle f_\pi \circ w.$

因为 $\overline{f\circ w} = f_\pi \overline{w}$

$= f_\pi(w^{-1})\langle f_\pi(\alpha)\rangle f_\pi \circ w.$ #

6. X：单连通，a, b 有相同起、终点. 证明 $a \simeq b$

Pf：X 单连通 $\Rightarrow \exists x_0 \in X$，$\pi_1(X,x_0) = \{\langle e_{x_0}\rangle\}$

且 X 道路连通

设 a, b 起点 x 终点 y，则 $\exists$ 道路 $P_{x_0\to x}$，$P_{y\to x_0}$.

$\Rightarrow P_{x_0\to x}\, a\, P_{y\to x_0} \simeq P_{x_0\to x}\, b\, P_{y\to x_0} \simeq e_{x_0}$.

$\Rightarrow a = P_{x_0\to x}^{-1}(P_{x_0\to x}\, a\, P_{y\to x_0})P_{y\to x_0}^{-1} \simeq P_{x_0\to x}^{-1}(P_{x_0\to x}\, b\, P_{y\to x_0})P_{y\to x_0}^{-1}$

$= b.$ #

7. $w_\#$, $w'_\#$：x_0 到 x_1 道路类. 证明 $w_\# = w'_\# \Leftrightarrow ww'^{-1}$ 为 $\pi_1(X,x_0)$ 中心

即 $ww'^{-1}\alpha = \alpha ww'^{-1}$，$\forall \alpha \in \pi_1(X,x_0)$.

Pf：$w_\# = w'_\# \Leftrightarrow w^{-1}\alpha w = w'^{-1}\alpha w'$，$\forall \alpha$.

$\Leftrightarrow \alpha ww'^{-1} = ww'^{-1}\alpha$，$\forall\alpha$. #

8. 若 $x_0, x_1 \in X$ 同一道路分支，则从 x_0 到 x_1 的任一道路类决定相同的同构 $\Leftrightarrow \pi_1(X,x_0)$ 交换群

Pf：由7. $\forall w, w'$，$w_\# = w'_\# \Leftrightarrow ww'^{-1}\alpha = \alpha ww'^{-1}$

令 $w = \beta w'$，其中 $\beta \in \pi_1(X,x_0)$，

则 $(\Rightarrow)$ $\beta\alpha = \alpha\beta$，$\forall \alpha, \beta \in \pi_1(X,x_0) \Rightarrow \pi_1(X,x_0)$ 交换.

$(\Leftarrow)$ $ww'^{-1} = \beta \in \pi_1(X,x_0)$，$\beta\alpha = \alpha\beta \Rightarrow ww'^{-1}$ 为中心

$\Rightarrow w_\# = w'_\#$. #