2016年春季学期实分析(H)期末考试
参考解答

2016.6.30 8:30-11:00

1. 设$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$是绝对连续函数, 证明:$f$将零测集映成零测集, 将(Lebesgue)可测集映成可测集.

证明: 先假设设f的确能将零测集映成零测集. 那么对任一可测集E, 它可以写作一个F_σ-集F和一个零测集Z的并, 则$f(E)=f(F)\cup f(Z)$. 由Z零测及我们的假设知$f(Z)$零测. 对F而言, 将F写作闭集可列并$F=\bigcup_{n=1}^\infty F_n=\bigcup_{m=1}^\infty\bigcup_{n=1}^\infty(F_n\cap B(0,m))$, 而$F_n\cap B(0,m)$是紧集, 紧集在连续映射下的像为紧集, 所以$f(F)$是紧集的可列并, 从而是$F_\sigma$-集. 这也说明$f(E)$可以写成一个$F_\sigma$集和一个零测集的并, 从而$f(E)$是可测集.

余下只欠证：f将零测集映成零测集.

设Z是一个零测集, 那么对任意$\delta>0$, 存在开集$O\supseteq Z$, 使得$m(O)<\delta$. 由一维开集结构定理知道, O可以唯一地写作可列个开区间的不交并, 记作

$$O=\bigcup_{n=1}^\infty(a_n,b_n).$$

令

$$m_j=\inf_{x\in[a_j,b_j]}f(x),M_j=\sup_{x\in[a_j,b_j]}f(x).$$

从而

$$m(f(O))=\sum_{j=1}^\infty|f(M_j)-f(m_j)|=\sum_{j=1}^\infty|\int_{m_j}^{M_j}f'(x)dx|\le\sum_{j=1}^\infty\int_{a_j}^{b_j}|f'(x)|dx=\int_O|f'(t)|dt.$$

注意, 这里我们直接钦定了$f(O)$是可测的, 因为开区间在连续映射下的像是区间, 那么$f(O)$自然是可列个区间的并, 从而一定可测.

据f绝对连续知, $f'\in L^1[a,b]$. 又由积分的绝对连续性得知, $\forall\epsilon>0,\exists\delta>0$, 只要可测集$E$的测度小于$\delta$, 就有$\int_E|f'(x)|dx<\epsilon$. 现在取定$\epsilon$, 将覆盖零测集$Z$的开集$O$的测度取成小于$\delta$, 那么根据上面的讨论就有$m^*(Z)\le m(f(O))<\epsilon$, 令$\epsilon\to0^+$即得$m^*(f(Z))=0$, 从而$f(Z)$零测.

□

2. 设$p, q, r \geq 1$. $f \in L^p(\mathbb{R}^d), g \in L^q(\mathbb{R}^d)$, 且$1/p + 1/q = 1/r$. 证明:

$$\|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

证明: 由条件知道:$p/r, q/r \geq 1, (p/r)^{-1} + (q/r)^{-1} = 1$. 对$(fg)^r$, 以及共轭指标$p/r, q/r$使用Holder不等式, 就有:

$$\int |fg|^r dx \leq \left(|f^r|^{p/r}\right)^{r/p} \left(|g^r|^{q/r}\right)^{r/q}.$$

两边开r次方即有

$$\|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

□

3. 定义卷积如下:

$$(f*g)(x)=\int_{\mathbb{R}^d}f(x-y)g(y)dy.$$

(1)若f可积, g有界, 证明:$f*g$是一致连续的;

(2)在(1)的条件下, 若g也可积, 证明:

$$\lim_{|x|\to\infty}(f*g)(x)=0.$$

证明: (1)直接计算如下:

$$\begin{aligned}|(f*g)(x+h)-(f*g)(x)| &= |\int(f(x+h-y)-f(x-y))g(y)dy| \\ &\le \int|f(x+h-y)-f(x-y)|\cdot|g(y)|dy \\ &\le M\|f(\cdot+h)-f(\cdot)\|_{L^1}\to 0,\ \ as\ |h|\to 0\end{aligned}$$

这对任何$x\in\mathbb{R}^d$一致地成立. 上述最后一步是用到了Lebesgue积分平移连续性.

(2)我们先证明一个引理如下:

引理 若$f(x)$为$\mathbb{R}^d$上可积的一致连续函数, 那么则$f(x)\to 0$ as $|x|\to\infty$.

引理的证明: 若不然, 固定$\epsilon>0$, 存在$\delta>0$, 使得$\forall x,y\in B(x,\delta),|f(x)-f(y)|<\epsilon/2$, 不妨要求$\delta<1/2$. 由假设, f在无穷远不趋于0, 则存在$x_1,|f(x_1)|\ge\epsilon$. 从而$\forall y\in B(x_1,\delta),|f(y)|\ge\epsilon/2$. 同理, 存在$x_2\in B(0,|x_1|+1)^c$, 使得$|f(x_2)|\ge\epsilon$, 从而$\forall y\in B(x_2,\delta),|f(y)|\ge\epsilon/2$.

不断重复上面的过程, 得到一列$\{x_n\}_1^\infty$, 在$B(x_n,\delta)$上, $|f(x)|\ge\epsilon/2$, 其中$|x_{n+1}-x_n|\ge 1$.

那么则

$$\int|f(x)|dx\ge\frac{\epsilon}{2}m\{x:|f(x)|\ge\epsilon/2\}=+\infty,$$

矛盾. 引理得证.

回到原题, 根据引理, 我们仅欠证明$f*g$可积. 事实上我们可以直接计算如下:

$$\begin{aligned}\int|(f*g)(x)|dx &= \int|\int f(x-y)g(y)dy|dx \\ &\le \int\int|f(x-y)g(y)|dydx \\ &= \int|g(y)|\left(\int|f(x-y)|dx\right)dy=\|f\|_1\|g\|_1<\infty\end{aligned}$$

从而$f*g\in L^1$. 证毕.

□

4. 设$F \in BV[a,b]$, T_F是其全变差.

(1)证明:$\int_a^b |F'(x)|dx \le T_F(a,b)$;

(2)证明: 上式取等号当且仅当f绝对连续.

证明: (1) 注意到对任意$x, y \in [a,b]$,

$$\left|\frac{F(y)-F(x)}{y-x}\right| \le \frac{T_F(x,y)}{y-x} = \frac{T_F(a,y)-T_F(a,x)}{y-x}.$$

从而$|F'(x)| \le T_F'(x)$ a.e.

于是

$$\int_a^b |F'(x)|dx \le \int_a^b T_F'(x) \le T_F(a,b) - T_F(a,a) = T_F(a,b).$$

注意, 上面最后一个不等号利用了$T_F(a,x)$是单增的.

(2)"$\Rightarrow$":若$F \in AC[a,b]$, 则由(1)的结论知, 只要证明$T_F(a,b) \le \int_a^b |F'(x)|dx$.

设$\pi: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$为区间$[a,b]$的任一划分, 则有

$$\sum_{k=1}^n |F(x_k) - F(x_{k-1})| = \sum_{k=1}^n \left|\int_{x_{k-1}}^{x_k} F'(x)dx\right| \le \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} |F'(x)|dx = \int_a^b |F'(x)|dx.$$

对全体划分π取上确界, 就有

$$T_F(a,b) \le \int_a^b |F'(x)|dx.$$

"$\Leftarrow$": 若成立$\int_a^b |F'(x)|dx = T_F(a,b)$, 构造函数

$$G(x) = \int_a^x |F'(t)|dt - T_F(a,x).$$

那么$G(a) = G(b) = 0$. 又对任意$x, y \in [a,b], x < y$, 有$G(y) - G(x) = \int_x^y |F'(t)|dt - T_F(x,y) \le 0$(由(1)), 从而$G(x)$在$[a,b]$上单调递减. 于是$G(x) = 0\ \forall x \in [a,b]$. 所以

$$T_F(a,x) = \int_a^x |F'(t)|dt\text{绝对连续}.$$

根据绝对连续的定义, $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, 只要任意有限个不交的开区间$(a_1,b_1), \cdots, (a_n,b_n)$满足$\sum_1^n (b_i - a_i) < \delta$, 就有$\sum_1^n |T_F(a,b_i) - T_F(a,a_i)| < \epsilon$.

而$|F(b_i) - F(a_i)| \le |T_F(a,b_i) - T_F(a,a_i)|$, 所以在取定上述$\epsilon, \delta$的情况下, 我们有

$$\sum_1^n |F(b_i) - F(a_i)| < \epsilon,$$

这也就证明了$F \in AC[a,b]$.

$\square$

5. 设点点连续可微函数$f(x,t):(0,1)\times[0,1]\to\mathbb{R}$满足以下条件:

(1)

$$\int_{(0,1)\times[0,1]} |\partial_t f|\, dxdt < \infty;$$

(2)$\int_{(0,1)} f(x,0)dx = 0$;

(3)$\forall t\in[0,1], \int_{(0,1)} \partial_t f(x,t)dx \le 0$.

请严格证明: $\forall t\in(0,1]$, $\int_{(0,1]} f(x,t)dx \le 0$.

证明: 令$F(t)=\int_0^1 f(x,t)dx$, 若能证明$F'(t)=\int_0^1 \partial_t f(x,t)dx$, 那么由条件(3)知道, $F(t)$在$t\in[0,1]$上单调递减, 再据条件(2)的$F(0)=0$知, $F(t)\le 0, \forall t\in[0,1]$.

于是我们只欠证明:

$$F(t)=\int_0^1 \partial_t f(t,x)dx.$$

下面设$|h|$充分小, 使得$t, t+h\in[0,1]$. 我们有

$$F(t+h)-F(t)=\int_0^1 f(x,t+h)-f(x,t)dx=\int_0^1\int_0^h \partial_t f(x,t+s)dsdx. \quad \cdots(*)$$

注意到

$$\int_0^1\int_0^h |\partial_t f(x,t+s)|dxds \le \int_0^1\int_0^1 |\partial_t f(x,t)|dxdt < \infty.$$

$(*)$两边除以h, 根据$Fubini$定理, 我们有:

$$\frac{F(t+h)-F(t)}{h}=\frac{1}{h}\int_0^h\left(\int_0^1 \partial_t f(x,t+s)dx\right)ds.$$

令$h\to 0$, 据$f\in C^1((0,1)\times[0,1])$, 就有

$$F'(t)=\int_0^1 \partial_t f(x,t)dx.$$

证毕.

□

6. 设函数f定义在$[a,b]$上, 满足: $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使得当有限个区间$\{(a_k,b_k)\}_1^n$(可以相交)的总长度$\sum_1^n (b_k - a_k) < \delta$时, 就有

$$\left|\sum_{k=1}^{n} (f(b_k) - f(a_k))\right| < \epsilon.$$

证明: 存在常数$M > 0$, 使得$\forall x, y \in [a,b], |f(x) - f(y)| \le M|x-y|$.

证明: 首先我们证明$f \in AC[a,b]$. 由条件, $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使得当有限个区间$\{(a_k,b_k)\}_1^n$(可以相交)的总长度$\sum_1^n (b_k - a_k) < \delta$时, 就有

$$\left|\sum_{k=1}^{n} (f(b_k) - f(a_k))\right| < \epsilon.$$

我们将上述和式拆成两部分, 记满足$f(b_k) - f(a_k) \ge 0$的那部分为Σ^+, 满足$f(b_i) - f(a_i) < 0$的那部分为Σ^-, 从而

$$|\Sigma^+(f(b_k) - f(a_k))| < \epsilon, \ \ |\Sigma^-(f(b_k) - f(a_k))| < \epsilon.$$

于是

$$\sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| \le |\Sigma^+(f(b_k) - f(a_k))| + |\Sigma^-(f(b_k) - f(a_k))| \le 2\epsilon.$$

从而$f \in AC[a,b]$.

下面我们断言:

Claim: 若$f \in AC[a,b], |f'| \le M$ a.e., 则$|f(x) - f(y)| \le M|x-y|, \forall x, y \in [a,b]$.

Proof of Claim: 由f绝对连续知$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt$. 今对任意$x, y \in [a,b]$, 不妨$x < y$, 则有$|f(x) - f(y)| = |\int_x^y f'(t)dt| \le \int_x^y |f'(t)|dt \le M|x-y|$. 断言获证.

根据断言, 我们只用证明$\exists M > 0, |f'| \le M$ a.e. 为此, 我们将条件中的(a_i,b_i)取成同一个区间. 具体如下:

$\forall x_0 \in (a,b), \exists n_0 \in \mathbb{Z}_+, \ \ s.t. \ x_0 + \frac{\delta_0}{n_0} < b, \delta_0 \in (0,\delta)$. 从而对任何$n > n_0, x_0 + \frac{\delta_0}{n} < b$. 我们取全体$(a_i,b_i)$为$(x_0, x_0 + \frac{\delta_0}{n})$. 则$\sum_1^n (b_i - a_i) = \delta_0 < \delta$. 于是根据条件可得, $n|f(x_0 + \frac{\delta_0}{n}) - f(x_0)| < \epsilon$. 那么则

$$\left|\frac{f(x_0 + n^{-1}\delta_0) - f(x_0)}{n^{-1}\delta_0}\right| < \frac{\epsilon}{\delta_0}, \forall n > n_0.$$

于是存在一列$n_k \to \infty$, 使得

$$\left|\lim_{k\to\infty} \frac{f(x_0 + n_k^{-1}\delta_0) - f(x_0)}{n_k^{-1}\delta_0}\right| < \frac{\epsilon}{\delta_0}.$$

这说明f在x_0处至少一个Dini导数有(一致的)上界$\frac{\epsilon}{\delta_0} =: M$. 因为$f$绝对连续, 所以$f$ a.e.可微, 在这些点上, f的各个Dini导数都相等, 从而就有$|f'| \le M$ a.e. 证毕.

$\square$

7. 设(X,Σ,μ)是测度空间, $\mu(X)=1$, 对任何X的子集E, 定义:

$$\mu^*(E)=\inf\{\mu(A)|A\in\Sigma, A\supseteq E\};$$
$$\mu_*(E)=\sup\{\mu(B)|B\in\Sigma, B\subseteq E\}$$

证明: 集合$\{E\subseteq X|\mu^*(E)=\mu_*(E)\}$是一个$\sigma$-代数.

证明：设$\mathcal{A}=\{E\subseteq X|\mu^*(E)=\mu_*(E)\}$. 首先$\forall E\in\Sigma, \mu^*(E)=\mu_*(E)$为显见, 从而$E\in\mathcal{A}$. 下面证明$\mathcal{A}$是$\sigma$-代数.

Step 1:对补集运算封闭.

设$E\in\mathcal{A}$, 则

$$\begin{aligned}
&\inf\{\mu(A)|A\in\Sigma, A\supseteq E\}=\sup\{\mu(B)|B\in\Sigma, B\subseteq E\}\\
\Rightarrow\ &1-\inf\{\mu(A)|A\in\Sigma, A\supseteq E\}=1-\sup\{\mu(B)|B\in\Sigma, B\subseteq E\}\\
\Rightarrow\ &\sup\{\mu(A^c)|A\in\Sigma, A\supseteq E\}=\inf\{\mu(B^c)|B\in\Sigma, B\subseteq E\}\\
\Rightarrow\ &\sup\{\mu(A')|A'\in\Sigma, A'\subseteq E^c\}=\inf\{\mu(B')|B'\in\Sigma, B\supseteq E^c\},\ \text{since } A\in\Sigma\Leftrightarrow A^c\in\Sigma\\
\Rightarrow\ &\mu^*(E^c)=\mu_*(E^c)\\
\Rightarrow\ &E^c\in\mathcal{A}.
\end{aligned}$$

Step 2:对有限并封闭, 这只要证明$\forall E,F\in\mathcal{A}, E\cup F\in\mathcal{A}$.

注意：不能“不妨设”E,F不交，这需要事先证明对差集运算封闭!

为此我们给出一个引理如下:

引理 $\forall E,F\subseteq X$, 有:

(1)$\mu^*(E\cup F)+\mu^*(E\cap F)\le\mu^*(E)+\mu^*(F)$;

(2)$\mu_*(E\cup F)+\mu_*(E\cap F)\ge\mu_*(E)+\mu_*(F)$.

我们暂且假设引理是正确的, 在这个情况下, $\forall E,F\in\mathcal{A}$, 我们有:

$$\mu_*(E\cup F)+\mu_*(E\cap F)\ge\mu_*(E)+\mu_*(F)=\mu^*(E)+\mu^*(F)\ge\mu^*(E\cup F)+\mu^*(E\cap F)\ge\mu_*(E\cup F)+\mu_*(E\cap F).$$

注意, 第一个、第二个不等号是根据引理, 第三个不等号是因为$\mu^*(E)\ge\mu_*(E),\forall E\subseteq X$显然成立. 中间的等号是因为$E,F\in\mathcal{A}$.

那么由于上面不等式的最左边和最右边是相等的, 我们知道中间所有的不等号全部都要变成等号. 那么就有

$$\mu^*(E\cup F)+\mu^*(E\cap F)=\mu_*(E\cup F)+\mu_*(E\cap F).$$

若$\mu^*(E\cup F)>\mu_*(E\cup F)$, 那么则$\mu^*(E\cap F)<\mu_*(E\cap F)$, 这不可能, 所以只能有$\mu^*(E\cup F)=\mu_*(E\cup F)$, 这就证明了$E,F\in\mathcal{A}\Rightarrow E\cup F\in\mathcal{A}$.

余下欠证引理.

引理的证明：我们只证明(1), (2)事实上是同理的.

$\forall\epsilon>0$, 存在$A_1,A_2\in\Sigma, E\subseteq A_1, F\subseteq A_2$, 使得

$$\mu(A_1)<\mu^*(E)+\epsilon/2,\ \ \mu(A_2)<\mu^*(F)+\epsilon/2.$$

因为$A_1,A_2\in\Sigma$, 所以$\mu(A_1)+\mu(A_2)=\mu(A_1\cup A_2)+\mu(A_1\cap A_2)$. 于是

$$\mu(A_1\cup A_2)+\mu(A_1\cap A_2)\le\mu^*(E)+\mu^*(F)+\epsilon.$$

而$E\cap F\subseteq A_1\cap A_2, E\cup F\subseteq A_1\cup A_2$, 所以

$$\mu(A_1\cup A_2)+\mu(A_1\cap A_2)\ge\mu^*(E\cup F)+\mu^*(E\cap F).$$

结合上面两个不等式, 令$\epsilon\to 0$知, (1)式成立. 引理获证.

Step 3:对可列并封闭. 设有一列$\{E_n\} \in \mathcal{A}$, 对每个E_n, 存在$A_n, B_n \in \Sigma, B_n \subseteq E_n \subseteq A_n$, 使得

$$\mu(A_n) - \frac{\epsilon}{2^n} < \mu^*(E_n) = \mu_*(E_n) < \mu(B_n) + \frac{\epsilon}{2^n}.$$

下面我们直接计算, 过程如下:

$$\begin{aligned}
\mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) &\le \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \le \mu(\bigcup_{n=1}^{N} A_n) + \mu(\bigcup_{n=N+1}^{\infty} A_n) \\
&\le \mu(\bigcup_{n=1}^{N} A_n) + \epsilon \le \mu^*(\bigcup_{n=1}^{N} E_n) + 2\epsilon \\
&= \mu_*(\bigcup_{n=1}^{N} E_n) + 2\epsilon \le \mu(\bigcup_{n=1}^{N} B_n) + 3\epsilon \\
&\le \mu^*(\bigcup_{n=1}^{N} E_n) + 3\epsilon \le \mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) + 3\epsilon
\end{aligned}$$

注意, 上面计算中, 第二行第二个不等号、第三行第二个不等号是在Step 2里面证明了的, 而第三行的等号是Step 2的结果($\mathcal{A}$对有限并封闭).

现在我们令$\epsilon \to 0$, 就有

$$\mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) \le \mu_*(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n).$$

而不等式

$$\mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) \ge \mu_*(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n).$$

是显见的, 所以

$$\mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \mu_*(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n).$$

这就说明了

$$\{E_n\}_1^{\infty} \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{A}.$$

综上所述, 我们证明了$\mathcal{A}$是一个σ-代数.

$\square$