第一次习题课

失败人士

2018 年 8 月 2 日

1　点集拓扑简介

定义1.1：X为一个集合，τ为X的子集的集合,若称τ为X上的拓扑,则满足以下三个条件

(a)$X, \varnothing \in \tau$

(b)对于任意$U_\alpha \in \tau, \alpha \in \Lambda$,$\Lambda$是一个指标族, 则$\cup_{\alpha\in\Lambda} U_\alpha \in \tau$

(c)对于任意$U_1, U_2 \in \tau$,则$U_1 \cap U_2 \in \tau$

其中(X, τ)称为拓扑空间X,任意$U \in \tau$称为X的开集,$F = U^c$称为X的闭集

例子1.1:X为一个集合,$\tau = X, \varnothing$称为X上的平凡拓扑，$\tau = \mathscr{P}(X)$称为X上的离散拓扑，$\mathscr{P}(X)$表示X的全部子集构成的集合，又记为2^X.

定义1.2:$f : (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$称为$X$到$Y$的连续映射是指对于任意$U \in \tau_Y$,则有$f^{-1}(U) \in \tau_X$

定义1.3:$f : (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$称为$X$到$Y$的同胚是指,存在$g : (Y, \tau_Y) \longrightarrow (X, \tau_X)$为Y到X的连续映射,满足$g \circ f = Id_X, f \circ g = Id_Y$

定义1.4:$f : (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$称为$X$到$Y$的开映射是指对于任意$U \in \tau_X$，则有$f(U) \in \tau_Y$

定义1.5:设(X, τ)为拓扑空间,$x_n, x \in X, n \in Z_+$,称$x_n \longrightarrow x$是指对于任意$U \in \tau, x \in U$,存在$N \in Z_+$,使得对于任意$n > N$,有$x_n \in U$

定义1.6:设X为一个集合，$\mathscr{B}$为X的子集的集合，$\overline{\mathscr{B}}$定义为{U为X的子集| $U = \cup_{B_i\in\mathscr{B}} B_i$},若$\overline{\mathscr{B}}$为$X$上的拓扑,则称$\mathscr{B}$为$X$的拓扑基。

命题1.1：$\mathscr{B}$为X的拓扑基当且仅当$\mathscr{B}$满足以下两个条件

(a)$\cup_{B\in\mathscr{B}} B = X$

(b)对于任意$B_1, B_2 \in \mathscr{B}, B_1 \cap B_2 \notin \varnothing$,对于任意$x \in B_1 \cap B_2$，存在$B_3 \in \mathscr{B}$,使得$x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$

注：设(X,τ)为拓扑空间，$\mathscr{B}$称为(X,τ)的拓扑基是指$\overline{\mathscr{B}}=\tau$

命题1.2：若(X,τ)为拓扑空间，$\mathscr{B}$为τ的子集，则$\mathscr{B}$为(X,τ)的拓扑基当且仅当对于任意$U\in\tau$，对于任意$x\in U$,存在$B\in\mathscr{B}$，使得$x\in B\subseteq U$

注:以下拓扑空间(X,τ)在不引起歧义的前提下，简记为拓扑空间X

练习:

(1)证明命题1.1和1.2

(2)如何合理地定义度量空间的拓扑？将一般拓扑空间的概念和度量空间做对比，并证明两者的一致性

(3)如何合理地定义有限个空间的笛卡儿积的拓扑？对于无穷个空间的笛卡儿积，该如何定义？

(4)如何描述一个集合上不同的拓扑的“大小”关系？并证明欧式空间的度量空间拓扑和作为R的乘积空间的拓扑是一致的

(5)找到一个例子满足f是X到Y的连续双射，但不是同胚

(6)仿照开映射定义闭映射，并举例说明开映射，闭映射，连续映射这三个概念两两不同

(7)度量空间的完备性是否为拓扑性质？即两个度量空间同胚，其中一个完备能否得到另一个完备？