

## 选做习题6

1. 设 $X, Y$ 是两个随机变量, 对任意有界连续函数 $f$ 都有 $Ef(X) = Ef(Y)$ , 证明 $X$ 与 $Y$ 同分布.
2. 设 $X, Y$ 是概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上的随机变量, 对任意 $A \in \mathcal{F}$ 有 $\int_A X dP \leq \int_A Y dP$ , 证明 $X \leq Y$  a.s.
3. 设 $X$ 是 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上的随机变量, 对任意 $n \in \mathbb{N}$  都有 $E|X|^n < \infty$ , 证明 $f(t) := \log E(|X|^t)$  关于 $t$ 在 $(0, \infty)$ 上是凸函数.
4. 设 $X \geq 0$ , 证明

$$\lim_{x \rightarrow \infty} xE\left(\frac{1}{X}I(X > x)\right) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} xE\left(\frac{1}{X}I(X > x)\right) = 0.$$

(注意, 这里没有假设 $E(1/X) < \infty$ .)

5. 设 $X$ 为随机变量,  $E|X| < \infty$ , 证明:

(a) 如果 $X > 0$ , 则

$$E\frac{1}{X} \geq \frac{1}{EX}, \quad E \ln X \leq \ln EX, \quad E(X \ln X) \geq EXE \ln X,$$

(b) 如果 $P(a < X < b) = 1$ (其中 $0 < a < b < \infty$ ), 则有

$$1 \leq EXE\frac{1}{X} \leq \frac{(a+b)^2}{4ab}.$$

6. (a) 设 $\{A_i, i \geq 1\}$ 是一列独立事件, 则

$$P(\cap_{j=1}^{\infty} A_j) = \prod_{j=1}^{\infty} P(A_j).$$

(b) 设 $X_1, X_2, \dots$ 是一列独立的可积随机变量, 举例说明可能会有

$$E \prod_{k=1}^{\infty} X_k \neq \prod_{k=1}^{\infty} EX_k.$$

7. 设 $EX = 0, EX^2 = \sigma^2$ , 证明

$$P(X > x) \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + x^2}, \quad x > 0.$$