选做习题2

1. (a) 设$\Omega\in\mathscr{F}$并且对任意$A,B\in\mathscr{F}$都有$A-B\in\mathscr{F}$,证明$\mathscr{F}$为一个代数。

   (b) 若$\Omega\in\mathscr{F}$并且$\mathscr{F}$对补及有限不交并封闭，举例说明$\mathscr{F}$不一定是代数。

2. 设$\mathscr{A}$是代数，并且对$\mathscr{A}$中的任意两两不交的集合$(A_n)_{n\geq 1}$都有$\overset{\infty}{\underset{n=1}{\cup}} A_n\in\mathscr{A}$. 证明$\mathscr{A}$是$\sigma$代数。

3. 设$\mathscr{F}$是Ω上的一个σ代数, $\Omega^{'}\subset\Omega$, 定义$\mathscr{F}^{'}=\{A\cap\Omega^{'}:A\in\mathscr{F}\}$,则$\mathscr{F}^{'}$也是$\sigma$代数。

4. 设$\mathscr{F}$是G上的σ代数, C为G的子集但$C\notin\mathscr{F}$. 我们来考察由$\mathscr{F}$中的集合和集合C所生成的最小σ代数$\mathscr{A}=\sigma\{\mathscr{F},C\}$. 证明

$$\mathscr{A}=\{(A\cap C)\cup(B\cap\bar{C}):A,B\in\mathscr{F}\}.$$

5. 设$\mathscr{A}_0$是Ω中的某个(非空的)子集类. 定义

$$\mathscr{A}_1=\mathscr{A}_0\cup\{\Omega,\emptyset\},\quad \mathscr{A}_{n+1}=\{A\cup\bar{B}:A,B\in\mathscr{A}_n\},\ \ n\geq 1.$$

   则有$\mathscr{A}_0\subset\mathscr{A}_1\subset\cdots\subset\mathscr{A}_n\subset\cdots$ 并且$\mathscr{A}:=\overset{\infty}{\underset{n=1}{\cup}}\mathscr{A}_n$为$\mathscr{A}_0$生成的代数.

6. 证明Ω的子集类$\mathscr{C}$为λ系等价于如下条件:

   (1′). $\Omega\in\mathscr{C}$,

   (2′). (对余运算封闭) 设$A\in\mathscr{C}$, 则$A^c\in\mathscr{C}$,

   (3′). (对可列不交并封闭) 设$A_1,A_2,\cdots\in\mathscr{C}$是两两不交的, 则$\cup_n A_n\in\mathscr{C}$.

7. 设$\mathscr{C}$是一个代数, 令

$$\mathscr{A}=\{A\subset\Omega:\ \text{存在}\ A_n\in\mathscr{C}\ \text{使得}\ A_n\to A\}.$$

   证明$\mathscr{C}\subset\mathscr{A}$且$\mathscr{A}$是一个代数.

8. 证明一个σ代数不可能为可列无穷, 它的势只能为有限或者至少为连续统。

9. 设B是$\mathbb{R}$上的Borel集, λ为Lebesgue测度, 定义B的密度为(如果下极限存在)

$$\mu(B)=\lim_{T\to\infty}\frac{\lambda(B\cap[-T,T])}{2T}. \tag{1}$$

   (a) 举例说明, 存在B使得(1)中的极限不存在.

   (b) 证明对互不相容的Borel集B_1,B_2有$\mu(B_1+B_2)=\mu(B_1)+\mu(B_2)$.

   (c) 举例说明, 存在互不相容的Borel集$B_1,B_2,\cdots$, 它们都有密度，但是却有

$$\mu\Big(\sum_{i=1}^{\infty}B_i\Big)\neq\sum_{i=1}^{\infty}\mu(B_i).$$