2020.4.20.

P144. 5. 求基本群：(1) E^3中去掉2条不相交直线.

Sol：不妨一条位于$\{z=0\}$，一条位于$\{z=3\}$平面中，

则 $X = X_1 \cup X_2$，其中 $X_1 = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : z<2\}$

$X_2 = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : z>1\}$

则 $X_0 = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 1<z<2\}$ 为 E^3 凸集，平凡.

考虑 $\pi_1(X_1, x_0) \cong \pi_1(E^3$中去掉一条x轴$, (0,0,1))$ 即可.

然后由 Van Kampen，其基本群只须自由乘积两个 $\pi_1(X_1,x_0)$.

下面证 $\pi_1(X_1,x_0)\cong\mathbb{Z}$，从而$E^3$中去掉两不交直线的基本群为$\boxed{\mathbb{Z}*\mathbb{Z}}$

这是因为：“E^3去掉x轴”$\cong \mathbb{R}\times S^1$（强形变收缩），

$\pi_1(\mathbb{R}\times S^1,(0,0,1)) \cong \pi_1(S^1,(0,1)) \cong \mathbb{Z}$. #

(2) E^3中去掉3条坐标轴.

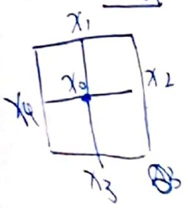
Sol：$E^3\setminus\{x,y,z轴\} \cong S^2\setminus\{(0,0,\pm1),(0,\pm1,0),(\pm1,0,0)\}$

由4.(2)类似可知，S^3去掉6个点后，

$\pi_1(E^3去3轴, x_0) \cong \pi_1(S^3去6点, x_0) \cong \mathbb{Z}^{*5}$. #

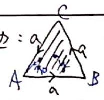
(3) “田”字形.

Sol：令 a, b, c, d 分别代表从中间x_0出发逆时针绕4个格子一圈.



则 $\pi_1(田, x_0) = \langle abcd\rangle = \mathbb{Z}^{*4}$. #

(只须将 $\alpha\in\pi_1(“田”, x_0)$，每次经过 x_i $(i\in[4])$ 时增加
道路 $(x_i, x_0)\cdot(x_0 x_i)$ 即可.)

6. 粘上 Δ 的三条边： 求所得商空间基本群.

Sol：记内部为 X_2，则 $\pi_1(X_2)$ 平凡

记 Δ 中非 x_0 一点 y，则记 $X_1 = X\setminus\{y\}$

$\therefore X = X_1 \cup X_2$，$X_0 = X_1 \cap X_2 \cong S^1$.

由 Van Kampen，

$\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X_1, x_0) / \mathrm{Im}(i_{12})$

注意 $\pi_1(X_0)$ 由一圈生成，记 $\pi_1(X_0, x_0) \cong \mathbb{Z}\langle f\rangle$.
（逆时针绕 y 转一圈）.

在 $\pi_1(X_1)$ 中 $f \simeq (x_0A)\cdot a\cdot a\cdot a\cdot(Ax_0)$

$\simeq ((x_0A)\cdot a\cdot(Ax_0))^3$

而 $\pi_1(X_1, x_0) \cong \mathbb{Z}\langle (x_0A)\cdot a\cdot(Ax_0)\rangle$

$\therefore \pi_1(X, x_0) \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. #

7. 证明：若曲面 M、N 同胚，则 ∂M、∂N 同胚. 由此说明 Mobius 带与平环不同胚.
（显然，一个无边 一个有边.）

Pf：曲面 2 维 mfld.
边界点有开邻域同胚于 $\mathbb{E}^2_+ = \{(x_1, x_2) : x_2 \geq 0\}$ 的开邻域.
设 $f: M \to N$ 为同胚映射.
则 $\forall x \in \partial M$，$\exists U$，$\varphi: U \to \mathbb{E}^2_+$ 同胚映射
$\varphi\circ f^{-1}: f(U) \to \mathbb{E}^2_+$ 为同胚映射.
$\therefore f(x) \in \partial N$，且 ∂M、∂N 同胚. #

8. $f: D^2 \to \mathbb{E}^2$ 连续. 证明 下面条件之一 ⇒ f 有不动点

(1) $f(S^1) \subset D^2$

Pf：记 $g(x) = \begin{cases} x, & x \in D^2 \\ \frac{x}{\|x\|}, & x \notin D^2 \end{cases}$.

则 $g\circ f: D^2 \to D^2$ 有不动点 x （这和老师一开始讲的作业题一样）.

$g\circ f(x) = x$. $\overset{g:\mathbb{E}^2\to D^2}{\Rightarrow} x \in D^2$

若 $f(x) \neq x$，则 $f(x) \notin D^2 \Rightarrow g\circ f(x) \in S^1 \Rightarrow x \in S^1 \Rightarrow f(x) \subset D^2$ 与 $f(x) \notin D^2$ 矛盾！ #

$\therefore f(x) = x$. 即 x 也是 f 的不动点

(2) $\forall x \in S^1$，$f(x)$，x 与 0 不共线.

Pf：由 (1)，$\exists$ 不动点 x，s.t. $g\circ f(x) = x \in D^2$.
若 $f(x) \neq x$，则 $f(x) \notin D^2 \Rightarrow g\circ f(x) \in S^1 \Rightarrow x \in S^1$ 且与 $f(x)$ 共线 #
∴ 此与条件矛盾 $\therefore f(x) = x$.

(3) $\forall x \in S^1$，线段 $\overline{xf(x)}$ 过原点，

Pf：由 (1)，$\exists g f(x) = x \in D^2$，
若 $f(x) \neq x$，则 $f(x) \notin D^2 \Rightarrow g\circ f(x) \in S^1 \Rightarrow x \in S^1 \to f(x)$ 在 x 对顶点，
$\Rightarrow g\circ f(x) = -x$ 矛盾. #
$\therefore f(x) = x$.

9. $f: D^2 \to D^2$ 连续，S^1 上不动，证明 f 是满的

Pf：反证. 若 $\exists x_0 \in D^2 \setminus f(D^2) \subset e^2$（由 $f|_{S^1} = id_{S^1}$ 知 x_0 必在内部）
则 $\exists g$ 将 $f(D^2)$ 强形变收缩到 S^1 上.
$\Rightarrow g\circ f: D^2 \to S^1$ 连续满射，而 D^2 单连通、S^1 不是. 矛盾. #

学院：　　专业：　　班级　　学号：　　姓名：
装　订　线

10. $S_i^2 \subset \mathbb{E}^3$：以 $(i,0,0)$ 为心、$\frac{1}{2}$ 为半径的球面，$X=\bigcup_{i\in\mathbb{Z}} S_i^2$. 证明 X 单连通

解：我看到答案了，它取 $X_1=\{(x,y,z)\in X: z\geq 0\}$

$X_2=\{z\leq 0\}$

这不科学，不是 Van Kampen 对开集用吗？

但另一方面，确实由于 $\pi_1(S^2)=\{1\}$，

每个从 $(i-\frac{1}{2},0,0)$ 到 $(i+\frac{1}{2},0,0)$ 道路都同伦，（看成 D^2 粘起来，这两点之一回为一个 D^2）

故 $\pi_1(X_i)=\{1\}$ 都平凡 且 $X_0=$“x-y 平面中粘起的圆环”道路连通

$\Rightarrow \pi_1(X)$ 平凡.

∴ X 单连通 #

2020.4.23

P134. 14. 证明 $\mathbb{E}^2\ncong\mathbb{E}^n$，$\forall n>2$.

解：挖去一点后 $\pi_1(\mathbb{E}^2\setminus\{0\})=\pi_1(S^2)=\mathbb{Z}$

$\pi_1(\mathbb{E}^n\setminus\{0\})=\{1\}$

∴ $\mathbb{E}^2\ncong\mathbb{E}^n$. #.

15. 证明 $D^2\ncong D^n$，$\forall n>2$.

解：D^n 和 $\mathbb{E}^n$ 无差 $(n\geq 2)$ 吧…… #.

2020.4.26

P153. 6. $p:E\to B$ 覆叠. 证明 p 局部同胚 (i.e., $\forall e\in E$, $\exists V\ni e$ 开邻域, s.t. $p|_V$ 同胚)

pf: 取 $p(e)$ 的基本邻域 U, 设 $p^{-1}(U)=\coprod_\alpha V_\alpha$, 则 $\exists\alpha_0$, s.t. $e\in V_{\alpha_0}$. 且 $p|_{V_{\alpha_0}}$ 同胚. #

9. $p:[a,b]\to S^1$, $x\mapsto e^{i2\pi x}$ 覆叠吗?

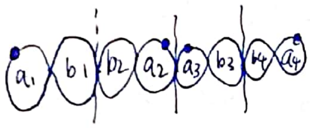
pf: 不是. 考虑 $p(a)$. 若有基本邻域 U, 则 $p^{-1}(U)$ 包含 a 的连通分支为 $[a,a+\varepsilon)$, $\varepsilon>0$.

不妨 $\varepsilon<1$, 由于 U 的含 $p(a)$ 的开子集仍基本邻域

则 $p|_{[a,a+\varepsilon)}$ 同胚于 U. 而 $p([a,a+\varepsilon))$ 不为 S^1 开集, 矛盾! #

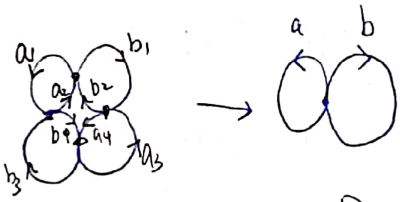
11. 构造 ∞ 上两种4叶覆叠.

Sol ①



E: 沿每个轴对称 $p:E\to B$

图中4点打为最左边那个 ∞ 的腰位上的点



比如 $a_1\to a$

$e^{2\pi i\theta}\mapsto e^{2\pi i\frac{4}{3}\theta}$.

$p: E \longrightarrow B$

a_i(或 b_i)上一点 $\longmapsto$ a(或 b)上一点

#

13. $p:E\to B$ 覆叠, $U\subset B$ 道连, $V\subset p^{-1}(U)$ 道路分支. 证明 $p(V)=U$.

pf: 不妨 $U\neq\phi$. 取定 $b=p(e)\in U$. $\forall b'\in U$, $\exists$ U 中从 b 到 b' 道路 a.

$\exists$ a 的道路提升 $\tilde a: I\to E$, s.t. $p\circ\tilde a=a\subset U \Rightarrow \tilde a\subset p^{-1}(U)$

由 V 为道路分支, $\tilde a\subset V$ $\therefore b'=a(1)=p(\tilde a(1))\subset p(V)$.

$\therefore U\subset p(V)$, 又由 $p(V)\subset U$ 知 $p(V)=U$. #

15. $A\subset X$ 称为<u>半单连通子集</u>, 若 A 道连, 且包含映射诱导的基本群同态 $i_*:\pi_1(A)\to\pi_1(X)$ 平凡.

证明覆叠空间的底空间的半单连通开子集一定是基本邻域.

pf: $\forall U\subset B$ 半单连通开子集, 设 $p^{-1}(U)=\coprod_\alpha V_\alpha$, V_α 为道路分支, 则由13. $p(V_\alpha)=U$. $\Rightarrow p|_{V_\alpha}$ 满射

反证. 若 $p|_{V_\alpha}$ 非单射, 则 $\exists e\neq e'\in V_\alpha$, s.t. $p(e)=p(e')=b$. 设 $\tilde a$ 为 V_α 中 e 到 e' 道路. 由 $i_*:\pi_1(U)\to\pi_1(B)$ 平凡,

$p\circ\tilde a\simeq e_b$. 由道路提升唯一性, $\exists!\,\tilde e_b$ 为 e_b 道路提升, $\tilde e_b(0)=\tilde e_b(1)=e\neq e'$

$\Rightarrow \tilde a\simeq \tilde e_b \Rightarrow \tilde a(0)=\tilde a(1)$ 矛盾! $\therefore p|_{V_\alpha}$ 单射 $\therefore p|_{V_\alpha}$ 同胚. $\therefore U$ 为基本邻域 #.

17. 设 $E_1 \xrightarrow{\tilde{p}} E \xrightarrow{p} B$ 复叠，且 B: 局部半单连通（点点有半单连通邻域），则 $p\circ\tilde{p}: E_1 \to B$ 复叠.

Pf: $\forall b\in B$, $\exists$ 半单连通邻域 $U\ni b$, 由 15. 它是基本邻域，

$p^{-1}(U)=\coprod_{\alpha} V_\alpha$，$V_\alpha$ 道路连通且 $V_\alpha \xrightarrow{p|_{V_\alpha}} U$ 同胚 $\Rightarrow V_\alpha$ 半单连通 $\Rightarrow$ 为基本邻域

$\forall V_\alpha$，由 $\tilde{p}$ 复叠，$\tilde{p}^{-1}(V_\alpha)=\coprod_{\beta_\alpha} V_{\alpha,\beta_\alpha}$，$V_{\alpha,\beta_\alpha}$ 道连且 $V_{\alpha,\beta_\alpha} \xrightarrow{\tilde{p}|_{V_{\alpha,\beta_\alpha}}} V_\alpha$ 同胚

$\therefore (p\circ\tilde{p})^{-1}(U)=\coprod_{\alpha,\beta_\alpha} V_{\alpha,\beta_\alpha}$

$p\circ\tilde{p}\,(V_{\alpha,\beta_\alpha}) = p(V_\alpha)=U$ 同胚.

$\therefore$ $p\circ\tilde{p}$ 复叠. #

19. $p: E\to B$ 复叠. $b\in B$, $e\in p^{-1}(b)$, a, a': B 中从 b 到 b 道路
$\tilde{a}, \tilde{a}'$: 以 e 起点对应提升.

证明 $\tilde{a}(1)=\tilde{a}'(1) \Leftrightarrow \langle a\bar{a}'\rangle \in H_e$.

Pf: ($\Rightarrow$) $\tilde{a}\bar{\tilde{a}}' \in \pi_1(E,e)$

$\Rightarrow \langle a,\bar{a}'\rangle \in P_\pi(\pi_1(E,e))=H_e$

($\Leftarrow$) $\langle a\bar{a}'\rangle \in H_e = P_\pi(\pi_1(E,e))$

$\Rightarrow \exists \langle\tilde{a}_0\rangle \in \pi_1(E,e)$. s.t. $P_\pi\langle\tilde{a}_0\rangle=\langle a\bar{a}'\rangle$，记 $a_0=p(\tilde{a}_0)\simeq a\bar{a}'$

$\therefore$ $\exists H$ 将 a_0 同伦映到 $a\bar{a}'$.

令 $H'(x,t)=H(x,[t+\frac{1}{2}])$，则 $\bar{a}'a \simeq a_0|_{[\frac{1}{2},1]}\cdot a_0|_{[0,\frac{1}{2}]}$.

由同伦提升. $\bar{\tilde{a}}'\tilde{a} \simeq \tilde{a}_0|_{[\frac{1}{2},1]}\cdot\tilde{a}_0|_{[0,\frac{1}{2}]} \in \pi_1(E, p^{-1}(a_0)|_{\frac{1}{2}})$
为闭曲线.

$\therefore$ $\bar{\tilde{a}}'\tilde{a}(0)=\bar{\tilde{a}}'\tilde{a}(1) \Rightarrow \tilde{a}'(1)=\tilde{a}'(1)$. #

学院：________ 专业：________ 班级________ 学号：________ 姓名：________

装 订 线