习题3

1. 假设$X_1, X_2, \cdots$是独立同分布的随机变量, $EX_i = 0$, $Var(X_i) = C < \infty$, 令$S_n = X_1 + \cdots + X_n$, 证: 当$p > 1/2$时, $S_n/n^p \xrightarrow{a.s} 0$.

2. 假设$X_1, X_2, \cdots$是独立同分的随机变量, 令$S_n = X_1 + \cdots + X_n$, 常数$p > 0$, 证明: 如果$S_n/n^{1/p} \xrightarrow{a.s} 0$, 有$E|X_1|^p < \infty$.

3. 假设$X_1, X_2, \cdots$是独立同分布的标准正态分布, 证明: 对于任意的t,
$$\sum_{n=1}^{\infty} X_n \frac{\sin(n\pi t)}{n} \quad a.s \quad \text{收敛}.$$

4. 假设$X_1, X_2, \cdots$是独立的随机变量, $EX_n = 0$, $\psi(X) = X^2 I(|X| \leq 1) + |X| I(|X| \geq 1)$, 证明: 如果$\sum_{n=1}^{\infty} E\psi(X_n) < \infty$, 则$\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ a.s 收敛.

5. 假设$X_1, X_2, \cdots$是一列独立的随机变量, 令$S_n = X_1 + \cdots + X_n$,证明: 对任意$a > 0$,
$$P\Big(\sup_{m<j\leq n} |S_m - S_j| > 2a\Big) \min_{m<k\leq n} P\Big(|S_n - S_k| \leq a\Big) \leq P\Big(|S_n - S_m| > a\Big). \tag{0.1}$$

6. 假设$X_1, X_2, \cdots$是独立的随机变量, 令$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, 通过0.1式证明: 如果$S_n$依概率收敛, 则$S_n$ 几乎处处收敛.