习题1

1. 设$\mathscr{F}_1 \subset \mathscr{F}_2 \subset \cdots$为一列$\sigma$代数.

   (a) 证明$\cup_i \mathscr{F}_i$为代数.

   (b) 举例说明$\cup_i \mathscr{F}_i$不一定是σ代数.

2. 设$\mathscr{D} = \{D_1, D_2, \cdots\}$是$\Omega$的某个可数分割,而$\mathscr{B} = \sigma(\mathscr{D})$, 问$\mathscr{B}$中元素是否只有可数个。

3. 设$\mathscr{F}$为σ代数, $P : \mathscr{F} \to [0, 1]$为集合函数, 则

   (σ可加性) 对任意$\mathscr{F}$中两两不相容的集合$A_1, A_2, \cdots$都有
$$P(\sum A_i) = \sum P(A_i).$$
   等价于如下两条性质成立:

   (a). (有限可加性)对任意$\mathscr{F}$中有限个两两不相容的集合$A_1, A_2, \cdots, A_n$都有
$$P\Big(\sum_{i=1}^n A_i\Big) = \sum_{i=1}^n P(A_i),$$
   (b). ($\emptyset$处的连续性) 设$A_n \in \mathscr{F}$且$A_n \downarrow \emptyset$, 则
$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = 0.$$
   (**注：当$\mathscr{F}$为代数时上结论也成立.**)

4. $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$是一个概率空间, $\mathscr{F}_0 = \{\Omega_0 \cap A : A \in \mathscr{F}\}$,称之为$\mathscr{F}$在$\Omega_0$上的限制。若$\Omega_0 \in \mathscr{F}$, 则定义集函
$$P^{'}(B) = \frac{P(B)}{P(\Omega_0)},\ \ B \in \mathscr{F}_0.$$
   证明：$\mathscr{F}_0$是Ω_0上的一个σ代数; $P^{'}$是$(\Omega_0, \mathscr{F}_0)$ 上的一个概率测度.

5. 设$\mathscr{C}_1, \mathscr{C}_2$是$\Omega$上的两个$\sigma$域,

   (a) 问如下两集合是否为σ域(请证明或举例说明):
$$\mathscr{C}_1 \cup \mathscr{C}_2 = \{A : A \in \mathscr{C}_1\text{或}A \in \mathscr{C}_2\},$$
$$\mathscr{C}_1 \cap \mathscr{C}_2 = \{A : A \in \mathscr{C}_1\text{且}A \in \mathscr{C}_2\}.$$
   (b) 记$\mathscr{C}_1 \vee \mathscr{C}_2 := \sigma(\mathscr{C}_1 \cup \mathscr{C}_2)$, 请证明
$$\mathscr{C}_1 \vee \mathscr{C}_2 = \sigma\{B_1 \cap B_2 : B_1 \in \mathscr{C}_1, B_2 \in \mathscr{C}_2\}.$$

6. * 设$\{A_\alpha\}$是一个由不可数个Ω的子集构成的集合类, $\mathscr{F} = \sigma(\{A_\alpha\})$. 证明对任意$B \in \mathscr{F}$, 存在可数个子集$\{A_{\alpha_j}\} \subset \{A_\alpha\}$ 使得$B \in \sigma(\{A_{\alpha_j}\})$.
   (注意到$\{A_{\alpha_j}\}$的选取依赖于B)

   方法提示: 为了验证某σ域$\mathscr{F}$具有某种性质, 通常采用的方法如下:

(a) 第一步: 构造子集类$\mathscr{A} = \{A : A$具有该性质$\}$,

(b) 第二步: 找一个合适的子集类$\mathscr{C}$, 使得$\mathscr{C} \subset \mathscr{A}$并且$\sigma(\mathscr{C}) = \mathscr{F}$,

(c) 第三步: 证明$\mathscr{A}$为σ域.

7. 设μ是一个测度, 且存在$A_1, A_2, \cdots \in \mathscr{F}$互不相容, $\sum A_i = \Omega$, $\mu(A_i) < \infty$, 则μ称为σ 有限测度.

   对任意σ 有限(非零)测度μ, 请构造一个概率测度P使得$P(A) = 0$当且仅当$\mu(A) = 0$.

8. 一个σ代数如果能由一个可数集类生成，则称为可数生成的。

   (1)设Ω为可分度量空间。证明其Borel代数（即由开集生成的σ代数）是可数生成的。

   (2)举例说明:两个σ代数$\mathscr{F}_1 \subset \mathscr{F}_2$，有可能$\mathscr{F}_2$ 是可数生成的，而$\mathscr{F}_1$不是。

附录: 概率扩张定理的存在性证明

定理0.1. *(Carathéodory's extension theorem)* 设$\mathscr{A}$是定义在Ω上的子集代数, 则$\mathscr{A}$上的概率测度可以唯一地扩张到$\sigma(\mathscr{A})$上.

存在性的证明. 设P是$\mathscr{A}$上的概率测度, 我们现在将它延拓到$\sigma(\mathscr{A})$上.

$\triangleright$令$\mathscr{G}$为$\mathscr{A}$中元素的可列并构成的集合, 则很容易在$\mathscr{G}$上定义概率. 设$A=\cup_{i=1}^{\infty}A_i$其中$A_i\in\mathscr{A}$, 则$B_n:=\cup_{i=1}^{n}A_i\in\mathscr{A}$并且$B_n\uparrow A$, 于是可以定义

$$P(A)=\lim_{n\to\infty}P(B_n).$$

可以证明这里$P(A)$的定义与$A_1,A_2,\cdots$(从而$B_1,B_2,\cdots$)的选取无关, (即若还有$A=\cap_{i=1}^{\infty}A_i'$其中$A_i'\in\mathscr{A}$, 令$B_n':=\cup_{i=1}^{n}A_i'$, 则$\lim\limits_{n\to\infty}P(B_n')=\lim\limits_{n\to\infty}P(B_n)$.) 即这里的定义是明确的. $\mathscr{G}$上的概率很好定义, 但对一般的$\sigma(\mathscr{A})$上的集合, 因为它没有显式表达式, 所以概率不容易定义. 我们下面采用Lebesgue测度中用的方法.

$\triangleright$首先定义外测度: 对任意$A\subset\Omega$,

$$P^*(A)=\inf\Big\{\sum_i P(A_i):\ \ A\subset\bigcup_i A_i,\ \ A_i\in\mathscr{A}\Big\}.$$

相应地, 还可以定义内测度P_*, 它满足

$$P_*(A)=1-P^*(A^c).$$

自然地, 当A的内外测度相同时, 我们可以将这个值定义为A的测度. 而$P^*(A)=P_*(A)$等价于

$$P^*(A)+P^*(A^c)=1. \tag{0.1}$$

进一步, 为了后面证明简单, 考虑满足下述条件的A: 对任意$E\subset\Omega$有

$$P^*(A\cap E)+P^*(A^c\cap E)=P^*(E). \tag{0.2}$$

称满足上条件的集合A为P^*可测集. 显然(0.1)式是上式当$E=\Omega$时的特殊情况.

定义$\mathscr{M}$为所有P^*可测集A组成的集合.

我们首先来证明$\mathscr{M}$是一个σ域.

- (1) P^*的一些性质:

1. $P^*(\emptyset)=0$,
2. 非负: 对任意$A\subset\Omega$都有$P^*(A)\ge 0$,
3. 单调: 若$A\subset B$, 则$P^*(A)\le P^*(B)$,
4. 次σ可加性: $P^*(\cup_n A_n)\le\sum_n P^*(A_n)$.

最后一条性质的证明: 对任意$\varepsilon>0$, 对任意n, 存在$B_{nk}\in\mathscr{A}$ 使得$A_n\subset\cup_k B_{nk}$且$\sum_k P(B_{nk})<P^*(A_n)+\varepsilon 2^{-n}$. 于是$\cup_n A_n\subset\cup_n\cup_k B_{nk}$且

$$P^*(\cup_n A_n)\le\sum_{nk}P(B_{nk})<\sum_n P^*(A_n)+\varepsilon.$$

另外, 由次σ可加性, (0.2)式等价于

$$P^*(A\cap E)+P^*(A^c\cap E)\leq P^*(E).$$

(2)证明$\mathscr{A}\subset\mathscr{M}$.

设$A\in\mathscr{A}$, 对任意$E\subset\Omega$以及任意的$\varepsilon>0$, 存在$E_n\subset\mathscr{A}, n=1,2,\cdots$使得$E\subset\cup_n E_n$ 并且$\sum_n P(E_n)\leq P^*(E)+\varepsilon$. 记$A_n=E_n\cap A, B_n=E_n\cap A^c$, 则$A_n, B_n\in\mathscr{A}$ 并且$E\cap A\subset\cup_n A_n, E\cap A^c\subset\cup_n B_n$. 从而

$$P^*(E\cap A)+P^*(E\cap A^c)\leq\sum_n P(A_n)+\sum_n P(B_n)=\sum_n P(E_n)\leq P^*(E)+\varepsilon.$$

由ε以及E的任意性知$A\in\mathscr{M}$.

(3)证明$\mathscr{A}$上P与P^*相等.

显然对任意$A\in\mathscr{A}$有$P(A)\geq P^*(A)$. 若$A\subset\cup_n A_n$,其中$A_n\in\mathscr{A}$, 则由次σ可加性和单调性知

$$P(A)\leq\sum_n P(A\cap A_n)\leq\sum_n P(A_n),$$

由P^*的定义知$P(A)\leq P^*(A)$.

(4). 接着证明$\mathscr{M}$是一个σ域.

显然$\Omega\in\mathscr{M}$且$\mathscr{M}$对余封闭. 只需证明对可列并封闭. 分两步:

1. 首先$\mathscr{M}$是一个代数. 只需证它对有限交封闭. 设$A,B\in\mathscr{M}$, 则

$$\begin{aligned}
P^*(E) &= P^*(B\cap E)+P^*(B^c\cap E)\\
&= P^*(A\cap B\cap E)+P^*(A^c\cap B\cap E)\\
&\quad +P^*(A\cap B^c\cap E)+P^*(A^c\cap B^c\cap E)\\
&\geq P^*(A\cap B\cap E)\\
&\quad +P^*(A^c\cap B\cap E+A\cap B^c\cap E+A^c\cap B^c\cap E)\\
&= P^*(A\cap B\cap E)+P^*((A\cap B)^c\cap E),
\end{aligned}$$

于是$A\cap B\in\mathscr{M}$.

2. 设$A_1,A_2,\cdots\in\mathscr{M}$是一列有限或无限的两两不交集合序列, 则对任意$E\subset\Omega$有

$$P^*\Big(E\cap\Big(\cup_k A_k\Big)\Big)=\sum_k P^*(E\cap A_k).$$

先考虑有限个集合的情形, 假设集合的个数为n. 当$n=1$时结论成立. 当$n=2$时(因为A_1,A_2不相容,所以$A_2\subset A_1^c$),

$$\begin{aligned}
P^*(E\cap(A_1\cup A_2)) &= P^*(E\cap(A_1\cup A_2)\cap A_1)+P^*(E\cap(A_1\cup A_2)\cap A_1^c)\\
&= P^*(E\cap A_1)+P^*(E\cap A_2).
\end{aligned}$$

假设$n-1$时结论成立, 则当n时, 由归纳法,

$$\begin{aligned}
P^*\Big(E\cap\Big(\cup_{k=1}^n A_k\Big)\Big) &= P^*\Big(E\cap\Big(\cup_{k=1}^{n-1} A_k\Big)\Big)+P^*\Big(E\cap A_n\Big)\\
&= \sum_{k=1}^n P^*(E\cap A_k),
\end{aligned}$$

即n时结论成立. 由此得有限情形时结论成立.

下面证明无限情形. 我们有

$$P^*\Big(E\cap\Big(\cup_k A_k\Big)\Big)\ge P^*\Big(E\cap\Big(\cup_{k=1}^n A_k\Big)\Big)=\sum_{k=1}^n P^*(E\cap A_k),$$

再令$n\to\infty$, 并结合P^*的次σ可加性得无限情形结论成立.

3. $\mathscr{M}$对可列不交并封闭.

设$A_1,A_2,\cdots$是$\mathscr{M}$中的两两不交集, 记$A=\cup_i A_i, F_n=\cup_{i=1}^n A_i$. 则由$F_n\in\mathscr{M}$知

$$\begin{aligned}
P^*(E) &= P^*(E\cap F_n)+P^*(E\cap F_n^c)\\
&\ge \sum_{i=1}^n P^*(E\cap A_i)+P^*(E\cap A^c)\\
&\to \sum_{i=1}^\infty P^*(E\cap A_i)+P^*(E\cap A^c)\\
&= P^*(E\cap A)+P^*(E\cap A^c),
\end{aligned}$$

于是$A\in\mathscr{M}$.

(5) 证明存在性.

从上面的(4)2中可以看出P^*是$\mathscr{M}$上的σ可加集合函数. 又$P^*(\Omega)=P(\Omega)=1$, 所以P^*在$\mathscr{M}$上是一个概率测度. 于是将P^*限制在$\sigma(\mathscr{A})$上也是一个概率测度. □