习题4

1. 设ξ与η是$(\Omega,\mathscr{F})$上的两个随机变量，集合$A\in\mathscr{F}$.证明，如下的函数也是随机变量:

$$\varsigma(\omega)=\xi(\omega)I_A+\eta(\omega)I_{\bar{A}}$$

2. 设$\mathscr{S}=\sigma(\mathscr{A})$，证明$\sigma(X)=\sigma(X^{-1}(\mathscr{A}))$, 其中$\sigma(X)=\{\{X\in B\}:B\in\mathscr{S}\},\sigma(X^{-1}(\mathscr{A}))=\{\{X\in A\}:A\in\mathscr{A}\}$

3. 设$X(\omega)=(X_1(\omega),\cdots,X_n(\omega))$是$(\Omega,\mathscr{F})$到$(\mathbb{R}^n,\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ 上的映射, 证明X是可测的等价于对任意$i=1,2,\cdots,n$, $X_i:\Omega\mapsto\mathbb{R}$是随机变量.

4. 设$X_1,X_2,\cdots$是$(\Omega,\mathscr{F})$上的一列实值随机变量, 对任意$\omega\in\Omega$, 都存在(有限的)极限

$$X(\omega)=\lim_{n\to\infty}X_n(\omega),$$

证明X也是实值随机变量.

5. 设X_1,X_2,X_3是一列独立同分布的参数为1的指数分布,定义

$$Y_1=\frac{X_1}{X_1+X_2},\quad Y_2=\frac{X_1+X_2}{X_1+X_2+X_3},\quad Y_3=X_1+X_2+X_3,$$

证明Y_1,Y_2,Y_3相互独立.

6. (a) 设U是$[0,1]$上的均匀随机变量, 对任意分布函数F, 定义$G(y)=\sup\{x:F(x)\le y\}$. 则$G(U)$具有分布函数F.
   (b) X具有连续分布函数F, 则$F(X)$是$[0,1]$上的均匀随机变量. 如果F不是连续分布函数会如何?

7. 证明

$$\sum_{n=1}^{\infty}P(|X|\ge n)\le E|X|\le 1+\sum_{n=1}^{\infty}P(|X|\ge n).$$

设$c>0$为一固定常数, 证明$E|X|<\infty$的充要条件是$\sum_{n=1}^{\infty}P(|X|\ge cn)<\infty$.

8. 假设X具有密度函数f_X, 证明对任意Borel可测函数$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, 随机变量$g(X)$可积的充要条件是$\int|g(x)|f_X(x)dx$, 此时$Eg(X)=\int g(x)f_X(x)dx$.