2020.3.23

P86. 11. $p: \mathbb{E}^1 \to \mathbb{E}^1/(0,1]$ 粘合

① p 非开/闭映射.

Pf: 注意在商拓扑中. $(0,1] \longmapsto p((0,1]) = [1]$ 非开、闭集

$\therefore p: (0,1) \longmapsto [1]$ 将开/闭集映为非开/闭集，故非开/闭映射.

$[\frac{1}{2},1] \longmapsto [1]$ #

② $A = \mathbb{E}^1 \setminus (0,1]$，证明 $p_A: A \to p(A)$ 非商映射.

Pf: $\because A \subset \mathbb{E}^1$，

$\therefore (-1,0] = (-1,\frac{1}{2}) \setminus (0,1]$ 为 A 中开集.

且 $(-1,0] = p_A^{-1}([(-1,0]])$，其中 $[B]$ 代表 $\{[x], x \in B\}$.

下证 $[(-1,0]]$ 非 $p(A) = [A]$ 中开集.
$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad$ $= p(\mathbb{E}^1) \setminus [1]$

否则，$\exists\, \mathbb{E}^1/(0,1]$ 中开集 $[B]$，s.t. $[(-1,0]] = [B] \setminus [1]$.

$\Leftrightarrow p^{-1}([B]) \subset \mathbb{E}^1$ 为开集，

① 若 $[1] \notin [B]$，则 $[B] = [(-1,0]]$，$p^{-1}([B]) = (-1,0]$ 非开.

② 若 $[1] \in [B]$，则 $[B] = [(-1,0]] \cup [1]$，$p^{-1}([B]) = (-1,1]$ 非开.

$\therefore$ 不满足商映射定义第3条. #

12. $f: \mathbb{S}^2 \to \mathbb{E}^4$ 证明 $f(\mathbb{S}^2) \cong \mathbb{P}^2$.

$(x,y,z) \mapsto f(x,y,z) = (x^2-y^2, xy, xz, yz)$

Pf: $f(x,y,z) = f(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})$ 时.

$$\begin{cases} \tilde{x}^2-\tilde{y}^2 = x^2-y^2 & ① \\ \tilde{x}\tilde{y} = xy & ② \\ \tilde{y}\tilde{z} = yz & ③ \\ \tilde{z}\tilde{x} = zx & ④ \end{cases}$$

(i) 若 $xyz \neq 0$，

③×④/② 得 $\tilde{z}^2 = z^2$

$\tilde{z} = z \overset{③④}{\Rightarrow} \tilde{y} = y,\ \tilde{x} = x$

$\tilde{z} = -z \overset{③④}{\Rightarrow} \tilde{y} = -y,\ \tilde{x} = -x$ 且不违背①

(ii) 若 $x = 0$.（$y=0$ 时交换 x,y 顺序同理）

且若 $\tilde{x} \neq 0$，由②④ $\Rightarrow \tilde{y}, \tilde{z} = 0$，$\tilde{x} \in \{\pm 1\}$

由①，$\tilde{x}^2-\tilde{y}^2 = 1 > 0 = -y^2$ 矛盾!

$\therefore \tilde{x} = 0$

若 $y \neq 0$，讨论同(i)

若 $y = 0$，由①知 $\tilde{y} = 0$，$z, \tilde{z} \in \{\pm 1\}$

(iii) 若 $xy \neq 0 = z$

且若 $\tilde{z} \neq 0$，则由③、④ $\Rightarrow \tilde{x} = \tilde{y} = 0$ 与②矛盾. $\therefore \tilde{z} = 0$

$$\begin{cases} \tilde{x}^2-\tilde{y}^2 = x^2-y^2 \\ \tilde{x}\cdot\tilde{y} = xy \\ \tilde{x}^2+\tilde{y}^2 = x^2+y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tilde{x}^2 = x^2 \\ \tilde{y}^2 = y^2 \\ \tilde{x}\tilde{y} = xy \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tilde{x} = x \\ \tilde{y} = y \end{cases} \text{或} \begin{cases} \tilde{x} = -x \\ \tilde{y} = -y \end{cases}$$

综上，$f(x,y,z) = f(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}) \Leftrightarrow (\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}) = \pm(x,y,z)$. 又由 $f: \mathbb{S}^2 \to f(\mathbb{S}^2)$ 连续、满.

$\mathbb{S}^2$ 紧，$f(\mathbb{S}^2) \subset \mathbb{E}^4$ Hausdorff

$\Rightarrow f$ 为商映射.

$\therefore f(\mathbb{S}^2) \cong \mathbb{S}^2/_{\sim +} \cong \mathbb{P}^2$. #

P92. 2. 紧致流形 C_2.

Pf: $\forall x \in X$，$\exists N_x$ 为 x 开邻域，s.t. N_x 与 $\mathbb{E}^n$ 或 $\mathbb{E}^n_+$ 同胚，

记为 $\varphi_x: N_x \to \mathbb{E}^n$ 或 $\mathbb{E}^n_+$

由紧性，$\exists x_1, \cdots, x_N$，s.t. $X = \bigcup_{i=1}^{N} N_{x_i}$

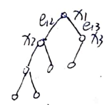
记 $\mathbb{E}^n$ 或 $\mathbb{E}^n_+$ 中开集族 $\{B(p, q)\}_{p,q \in \mathbb{Q}}$ $\quad (B(a,r) = \{x \in \mathbb{E}^n \text{或} \mathbb{E}^n_+ : d(x,a) < r\})$

$\bigcup_{i=1}^{N} \{\varphi_{x_i}^{-1}(B(p,q))\}_{p,q \in \mathbb{Q}}$ 为可数拓扑基. #

3. 紧流形可度量化.

Pf: 设记号同2. $X = \bigcup_{i=1}^{N} N_{x_i}$

由连通，从 x_1 出发，可找到一棵树 T 使 $(x_i, x_j) \in E(T) \Rightarrow N_{x_i} \cap N_{x_j} \neq \phi$



取 $e_{ij} \in (x_i, x_j)$

（如图，$N_{x_1} \cap N_{x_2} \neq \phi$，但不确定是否有 $N_{x_1} \cap N_{x_3} \neq \phi$）

由同胚，N_{x_i} 上可直接定义度量 $d(x,y) = d_{\mathbb{E}^n}(\varphi_{x_i}(x), \varphi_{x_i}(y))$

否则，$\forall x \in N_{x_i}$，$y \in N_{x_j}$，$(x_i, x_{i_2}, \cdots, x_{i_{k-1}}, x_j) \in E(T)$ 为唯一的树道路

$d(x,y) \triangleq d(x, e_{i,i_2}) + d(e_{i,i_2}, e_{i_2,i_3}) + \cdots + d(e_{i_{k-2},i_{k-1}}, e_{i_{k-1},j}) + d(e_{i_{k-1},j}, x_j)$

从而 ① $d(x,x) = 0$，$d(x,y) \geq 0$，"=" $\Leftrightarrow x = y$

② $d(x,y) = d(y,x)$

③ $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ （x 到 z 的树道路若不经过 y 所在 N_{x_i}，则要走回头路 $d(e_{i,\cdot}, y)$；否则，要走 $d(e_{i,\cdot}, y)$ 回头路，都导致 d 增加）

4. E^1中$\sim$：等价类为① $\{x\}$，$\forall x\in[-1,1]$，或② $\{x,-x\}$，$\forall x>1$

证明$E^1/\sim$的每点有同胚于E^1的开邻域，但它不是Hausdorff空间.

Pf: Step1. $\forall x\in(-1,1)$，$\exists\delta$，s.t. $(x-\delta,x+\delta)\subset(-1,1)$

$\varphi_x(y)\triangleq \tan\left(\frac{\pi}{2}\frac{y-x}{\delta}\right)$ 为$(x-\delta,x+\delta)$到E^1的同胚.

$\forall x>1$，$\exists\delta$，s.t. $(\sqrt{x^2-\delta},\sqrt{x^2+\delta})\subset(1,+\infty)$

$\varphi_x([y])=\tan\left(\frac{\pi}{2}\frac{y^2-x^2}{\delta}\right)$ 为$(\sqrt{x^2-\delta},\sqrt{x^2+\delta})$到$E^1$的同胚.

$x=1$时，$\varphi_x([y])=\begin{cases}\tan\left((y-1)\frac{\pi}{2}\right), & y\in(0,1]\\ \tan\left((y^2-1)\frac{\pi}{2}\right), & y\in(1,2)\end{cases}$ 为$[(0,2)]$到E^1同胚.

Step2. 非Hausdorff.

考虑 -1 和 1 的分离情况：

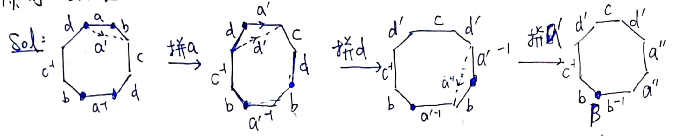
$\forall$包含1 (-1)的开邻域N_1 (N_{-1})，$\exists\delta$，s.t. $[(1,1+\delta)]\subset N_1$ 且$[(-(1+\delta),-1)]\subset N_{-1}$

则不存在分离±1的两个开邻域. $\Rightarrow E^1/\sim$ 非Hausdorff #

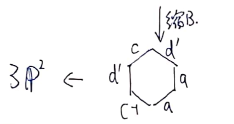
2020.3.26

P101.1.闭曲面类型：(1) $abcda^{-1}bc^{-1}d$.

Sol:

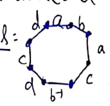


(其实简单做法，由于有2个顶点类，缩成一类后还有6边，6 mod 4 ≠0，故必为$3\mathbb{P}^2$.)



(2) $abacb^{-1}dcd$

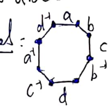
Sol:



只有1个顶点类，且有同向对 $\Rightarrow 4\mathbb{P}^2$.

(3) $abcb^{-1}dc^{-1}a^{-1}d^{-1}$

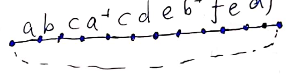
Sol:



1个顶点类，且无同向对 $\Rightarrow 2T^2$

(4) $abca^{-1}cdeb^{-1}fedf$

Sol:



1个顶点类，且有同向对 $\Rightarrow 6\mathbb{P}^2$.

2. 两闭曲面挖去一个圆盘内部后把洞口对接—"连通和".

记为$M\#N$. (1) 若$M=mT^2$，$N=nT^2$，则$M\#N$是？

(2) $M=m\mathbb{P}^2$，$N=n\mathbb{P}^2$，则$M\#N$是？

(3) $M=mT^2$，$N=n\mathbb{P}^2$，则$M\#N$是？

Sol：挖圆盘相当于拆开多边形一顶点，

则 $M\#N=a_1\cdots a_1'\cdots$ 若 $M=a_1\cdots$，$N=a_1'\cdots$

$\therefore$ (1) $M\#N\cong(m+n)T^2$

(2) $M\#N\cong(m+n)\mathbb{P}^2$

(3) $M\#N\cong a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}\cdots a_mb_ma_m^{-1}b_m^{-1}a_1'^2\cdots a_n'^2$

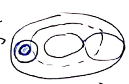
且$(a_ib_ia_i^{-1}b_i^{-1})$部分在一个顶点类，$(a_i'^2)$部分也在一个顶点类

$\therefore$共一个顶点类，且有同向对 $\Rightarrow M\#N\simeq(2m+n)\mathbb{P}^2$.

3. 环面挖去圆盘内部，洞口对径点粘合，得到什么曲面？

(T^2)

Sol：注意



在挖去圆盘外取一小的圆，则在小圆内相当于平环面粘合对径点$\cong\mathbb{P}^2$

(例子讲过)

相当于$T^2\#\mathbb{P}^2\cong3\mathbb{P}^2$. 故是亏格为3的不可定向闭曲面.

#