习题

1. 假设$X, X_1, X_2, \cdots$是独立同分布的随机变量, $EX = 0$, $Var(X) = 1$. 证明:

   (a)

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{n}} = \infty \ \ a.s.$$

   (b)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{p} 0 \quad \text{不成立}.$$

2. 假设$X, X_1, X_2, \cdots$是独立同分布的非负随机变量, $EX = 1$, $Var(X) = \sigma^2 < \infty$, 令$S_n = X_1 + \cdots + X_n$, 证明:

$$2(\sqrt{S_n} - \sqrt{n}) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \sigma^2).$$

3. 假设$X, X_1, X_2, \cdots$是一列独立同分布的随机变量, $EX = 0$, $Var(X) = 1$, 令$S_n = X_1 + \cdots + X_n$, 假设$\{N_n, n \geq 1\}$是一列非负整数值的随机变量, a_n为一列正整数, 满足

$$a_n \to \infty, \ \ \frac{N_n}{a_n} \xrightarrow{p} 1, \ \ n \to \infty.$$

   证明:

$$\frac{S_{N_n}}{\sqrt{a_n}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1), \ \ n \to \infty.$$

4. 求证: 当$n \to \infty$时,

$$e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} \to \frac{1}{2}.$$