Date

Bathtub principel

$C=\{g: 0\le g(x)\le 1 \text{ for all } x \text{ and } \int g(x)\mu(dx) = G\}$

Then $I=\inf_{g\in C}\int f(x)g(x)\mu(dx)$ is attained by

$$g_s(x) = \chi_{\{f<s\}} + g\chi_{\{f=s\}} \quad \text{where } 0\le g\le 1 \text{ and } \int_{\{f=s\}} g = G-\mu\{f<s\}$$

The minimizer ~~given in~~ is unique if $G=\mu(\{f<s\})$ or if $G=\mu(\{f\le s\})$.

Pf. $I(g_s)=\int_{f<s} f(x) + s(G-\mu\{f<s\})$

So $I(g)=\int gf \geq I(g_s) \Longleftrightarrow$

$\int g(f-s) \geq \int_{f<s}(f-s)$ since $0\le g\le 1$ this inequality is always true.

Therefore g_s are minimizer.

If the equality holds then $\begin{cases} g(f-s)=0 & \text{for } f(x)>s \\ g(f-s)=f-s & \text{for } f(x)<s \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} g=1 & \text{in } f<s \\ g=0 & \text{in } f>s \end{cases} \Rightarrow g=h_s$ for some h.

综上便知. g_s 达到极小. 且达到极小的函数一定是某个 g_s.

下面关心唯一性问题, i.e. ①对不同的 s, 我们构造出的 g_s 是不是一样的? ②对给定的 s. g 是否有一定的任意性?

若 $\mu(A)<\infty$, 则 $\forall \varepsilon>0$ ∃紧集 K_ε s.t. $A\subset K_\varepsilon$ $\mu(K_\varepsilon - A) < \varepsilon$ ...

令 $s^* = \sup\{s : |f<s| \le G\}$ 则 $\begin{cases} |f<s^*| \le G \\ |f\le s^*| \ge G \end{cases}$

若 $\exists s$ s.t. g_s 达到最大 则 $s \le s^*$

case 1： $s<s^*$ 时 则 $G \le |f\le s| \le G \Rightarrow |f\le s| = G$

$\Rightarrow g_s = \chi_{f\le s}$ 且 $|f^{-1}((s,s^*))| = 0$

故这时 对于不同 s 对应的 g_s 是同一个函数 $g_s = g = \chi_{f<s^*}$

case 2 $s=s^*$

· $|f=s^*|=0$ 时 $g_s = \chi_{f<s^*}$ (这时与case1中相同)

· $|f=s^*|\ne 0$ 时 $g_s = \chi_{f<s^*} + g\chi_{f=s^*}$ g是满足 $0\le g\le 1$

$$\int_{f=s^*} g = G-|f<s^*|$$

综上可知

~~· $|f=s^*|=0$ 时 解唯一 为 $\chi_{f<s^*}$~~

~~· $|f=s^*|\ne 0$ 但 $|f\le s^*|=G$ 时 解唯一 为 $\chi_{f\le s^*}$~~

~~· $|f=s^*|\ne 0$ 且 $|f\le s^*|>G$ 时 解不唯一，为~~

~~$g_s = \chi_{f<s^*} + g\chi_{f=s^*}$ g是满足 $0\le g\le 1$~~

~~$\int_{f=s^*} g = G-|f<s^*|$~~

· $|f<s^*|=G$ 时 解唯一 为 $\chi_{f<s^*}$

· $|f\le s^*|=G$ 时 解唯一 为 $\chi_{f\le s^*}$

· $|f<s^*|<G$ 且 $|f\le s^*|>G$ 时 解不唯一.

第一章作业

Date

1. 令 $S=\bigcap_{\substack{T为单调类\\ A\subset T}} T$ 则
 - S 为单调类
 - S 对有限并封闭
 - S 对取余运算封闭

3. Prop: X, Y 两个集合, $\mathcal{F}$ 为 X 上的 σ 代数, $f: X\to Y$, 则
$\mathcal{G}=\{A\subset Y: f^{-1}(A)\in\mathcal{F}\}$ 构成了 Y 上的 σ 代数

特别地 $Y=\mathbb{R}$, f 可测时, $\mathcal{G}$ 包含了所有开集, 从而包含了所有Borel集

5. 一方面 $F_{f_j}\le F_f$ 从而 $\int_0^\infty F_{f_j}(t)dt \le \int_0^\infty F_f(t)dt$ $\forall j$
加上反向不等式即可. 由瑕积分定义知 只需证 $\forall M>0$

$$\varliminf_{j\to\infty}\int_0^M F_{f_j} \ge \int_0^M F_f$$

仅证明 $\int_0^M F_f<\infty$ 的情形, $\int_0^M F_f=\infty$ 的情形类似.

记 $\varphi_j = F_{f_j}$, $\varphi=F_f$

$\forall\varepsilon>0$ $\exists [0,M]$ 的一个划分 $0=x_0<x_1<\cdots<x_n=M$ st

$$\sum_{j=1}^n \varphi(x_j)(x_j-x_{j-1}) \ge \int_0^M\varphi-\varepsilon/2$$

又 $\exists N\gg1$ st 当 $m>N$ 时 $|\varphi_m(x_j)-\varphi(x_j)|\le \frac{\varepsilon}{2M}$ $\forall j=0,\cdots,n$

从而 $\sum_{j=1}^n\varphi_m(x_j)(x_j-x_{j-1})\ge\int_0^M\varphi-\varepsilon$ for $m>N$

而 φ_m Riemann可积且单调递减, 可知 $\int_0^M\varphi_m\ge\int_0^M\varphi-\varepsilon$ (why?)

$\Longrightarrow \varliminf_{j\to\infty}\int_0^M\varphi_j\ge\int_0^M\varphi-\varepsilon$ 再由 ε 任意性便得证.

7. 见上课笔记

9. 略

11. 见书

13 略

15 Follow the hint.

取 $\varepsilon>0$ st $K\subset K_{2\varepsilon}\subset \overline{K_{2\varepsilon}}\subset\Omega$

令 $\varphi_\varepsilon(x)=1-\min\{1,\frac{d(x,K_\varepsilon)}{\varepsilon}\}$

则 $\varphi_\varepsilon\in C_c^0(\Omega)$, $\varphi_\varepsilon=1$ in K_ε, $\varphi_\varepsilon=0$ outside $K_{2\varepsilon}$

令 $\psi=j_\varepsilon*\varphi_\varepsilon$ 即可

Rmk:

~~1. Urysohn引理对更一般的拓扑空间 (normal space) 才成立~~

1. 还有个有趣的引理 见 John Lee P47

Thm: M smooth manifold, K is a closed subset of M, there is a smooth nonnegative function $f: M\to\mathbb{R}$ st $f^{-1}(0)=K$

Cor: A, B are disjoint closed set of a smooth manifold M. Then $\exists f\in C^\infty(M)$ st $0\le f(x)\le 1$ $\forall x\in M$, $f^{-1}(0)=A$, $f^{-1}(1)=B$

由 扫描全能王 扫描创建

$\parallel\ \bigcup_q\{f_q(x)<t\}$

Date

17 $\{\inf_q f_q(x)<t\}$ 为开集

~~$\exists\ x_0.\ x\to t\quad f_{q_0}(x)<t\quad \exists\ x$ 的邻域 U st $f_{q_0}|_U<t$~~

~~$\Rightarrow U\subset\{\inf_q f_q(x)<t\}$~~

19 Follow the hint $A=\{0\}\times[0,1]$

21 $\mathbb{R}^n$上的Riemann积分?

23 略　27 取 C 为一个类Cantor集, $m(C)>0$　$\underbrace{C\times C}_{\mathbb{R}^2}-\times C$ 可测子集

25. 要用到Tietze扩张定理

Thm: X是一个正规拓扑空间(特别地,是$\mathbb{R}^n$中开集), $A\subset X$ closed

$f\in C(A)$ 则 $\exists F\in C(X)$ st $F|_A=f$.

证明可见 Folland Real Analysis $P_{122}-P_{123}$

or 大本书 P_{47}.

·根据我知道的结果 如果不用Egorov定理证明 (Evans Measure theory and fine properties of functions Thm 1.14)

应该要求μ是Borel正则的

$\forall A\subset\mathbb{R}^n$, $\exists$ Borel set B st $A\subset B$ $\mu(A)=\mu(B)$

正则的要求用在了证明如下结果:

若$\mu(A)<\infty$, 则$\forall\varepsilon>0$ $\exists$紧集K_ε st $A\subset K_\varepsilon$, $\mu(K_\varepsilon-A)<\varepsilon$ ...(*)

由 扫描全能王 扫描创建

我们先承认(*)前提下，证明Lusin定理；(用A来表示Ω) 不妨设f实值

Step1：对A做分割

$\forall i\geq 1$ 令 $\mathbb{R}^m = \bigsqcup_{j=1}^{\infty} B_{ij}$ (不交并)，$\operatorname{diam}(B_{ij}) < \frac{1}{i}$

令 $A_{ij} = A\cap f^{-1}(B_{ij})$ 则 $A = \bigsqcup_{j=1}^{\infty} A_{ij}$

Step2. 用紧集逼近 A_{ij}

$\exists$ 紧集 $K_{ij}\subset A_{ij}$ st $\mu(A_{ij}-K_{ij}) < \frac{\varepsilon}{2^{i+j}}$

从而 $\mu(A-\bigcup_{j=1}^{\infty} K_{ij}) = \mu(\bigcup_{j=1}^{\infty}(A_{ij}-K_{ij}))$

$\leq \sum_{j=1}^{\infty}\mu(A_{ij}-K_{ij}) < \frac{\varepsilon}{2^i}$

利用测度连续性知 $\exists N(i)\in\mathbb{N}$ st

$\mu(A-\bigcup_{j=1}^{N(i)} K_{ij}) < \varepsilon/2^i$

step3. 构造紧集上连续函数一致逼近f.

令 $D_i = \bigcup_{j=1}^{N(i)} K_{ij}$ 选取 $b_{ij}\in B_{ij}$ 定义 g_i by

$g_i(x) = b_{ij}$ if $x\in K_{ij}$ 则 g_i 是 D_i上连续函数 (why?)

且 $|f(x)-g_i(x)| < \frac{1}{i}$ for all $x\in D_i$

令 $K = \bigcap_{i=1}^{\infty} D_i$ 则 $\mu(A-K) < \varepsilon$

$|f(x)-g_i(x)| < \frac{1}{i}$ for all $x\in K$

$\Longrightarrow$ $f|_K$ 上连续

step4 用Tietze扩张定理得 $f|_K$ 上延拓为A上连续函数即可