实变函数习题答案

06 级数科院本科

2007-2008 第二学期

习题 1

第一组

1. 设 $\{f_j(x)\}$ 是定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的函数列, 试用点集 $\{x: f_j(x) \geq \frac{1}{k}\}$ $(j,k=1,2,\cdots)$ 表示点集 $\{x: \overline{\lim\limits_{j\to\infty}} f_j(x) > 0\}$.

证: $\{x: \overline{\lim\limits_{j\to\infty}} f_j(x) > 0\} = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\bigcap\limits_{N=1}^{\infty}\bigcup\limits_{j=N}^{\infty}\{x: f_j(x) \geq \frac{1}{k}\}$

事实上, 设 $x_0 \in \{x: \overline{\lim\limits_{j\to\infty}} f_j(x) > 0\}$, 则存在 k_0, 使 $\overline{\lim\limits_{j\to\infty}} f_j(x_0) \geq \frac{1}{k_0}$, 再由数列上极限的定义, 对于任何正整数 N, 存在 $n_N \geq N$, 使 $f_{n_N}(x_0) \geq \frac{1}{k_0}$, 因此 $x_0 \in \bigcap\limits_{N=1}^{\infty}\bigcup\limits_{j=N}^{\infty}\{x: f_j(x) \geq \frac{1}{k_0}\}$, 从而 $x_0 \in \bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\bigcap\limits_{N=1}^{\infty}\bigcup\limits_{j=N}^{\infty}\{x: f_j(x) \geq \frac{1}{k}\}$;

相反, 若 $x_0 \in \bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\bigcap\limits_{N=1}^{\infty}\bigcup\limits_{j=N}^{\infty}\{x: f_j(x) \geq \frac{1}{k}\}$, 则存在 $k_0 \in \mathbb{N}$, 使 $x_0 \in \bigcap\limits_{N=1}^{\infty}\bigcup\limits_{j=N}^{\infty}\{x: f_j(x) \geq \frac{1}{k_0}\}$, 因此对任何正整数 N, 都存在 $j \geq N$, 使 $x_0 \in \{x: f_j(x) \geq \frac{1}{k_0}\}$, 即 $f_j(x_0) \geq \frac{1}{k_0}$, 所以 $\overline{\lim\limits_{j\to\infty}} f_j(x_0) \geq \frac{1}{k_0} > 0$, 即 $x_0 \in \{x: \overline{\lim\limits_{j\to\infty}} f_j(x) > 0\}$.

2. 设 $\{f_n(x)\}$是定义在 $[a,b]$ 上的函数列,$E \subset [a,b]$ 且有 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \chi_{[a,b]\setminus E}(x), x \in [a,b]$. 若令 $E_n = \{x \in [a,b]: f_n(x) \geq \frac{1}{2}\}$, 试求集合 $\lim\limits_{n\to\infty} E_n$.

证: $\lim\limits_{n\to\infty} E_n = [a,b]\setminus E$.

$\forall\, x \in [a,b]\setminus E, \because \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 1, \therefore \exists N, \forall\, n \geq N, f_n(x) \geq \frac{1}{2}$, i.e. $x \in E_n, \therefore x \in \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} E_n, \therefore [a,b]\setminus E \subset \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} E_n$; 反之, 若 $x \overline{\in} [a,b]\setminus E, \because \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0, \therefore \exists N, \forall\, n \geq N, f_n(x) < \frac{1}{2}$, i.e. $x \overline{\in} E_n, \therefore x \overline{\in} \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} E_n, \therefore \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} E_n \subset [a,b]\setminus E. \therefore \lim\limits_{n\to\infty} E_n = [a,b]\setminus E$.

3. 设有集合列 $\{A_n\}, \{B_n\}$, 试证明:

(i) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(A_n \bigcup B_n) = \left(\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n\right) \bigcup \left(\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} B_n\right)$;

(ii) $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}(A_n \bigcap B_n) = \left(\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n\right) \bigcap \left(\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} B_n\right)$.

证: 略.

4. 设 $f: X \to Y, A \subset X, B \subset Y$, 试问下列等式成立吗?

(i) $f^{-1}(Y \setminus B) = f^{-1}(Y) \setminus f^{-1}(B)$;

(ii) $f(X \setminus A) = f(X) \setminus f(A)$.

证: (**i**) 成立. (**ii**)$f(A)\bigcap f(A^c)\neq\emptyset$ 时等式不成立.

5. 试作开圆 $\{(x,y):x^2+y^2<1\}$ 与闭圆盘 $\{(x,y):x^2+y^2\leq 1\}$ 之间的一一对应.

证一: 任取闭圆盘边界上一点 R, 记圆心为 $O,(O,R]$ 为连接 O 与 R 的线段去掉 O, (O,R) 为连接 O 与 R 的线段去掉 O 与 R, 由旋转变换易知 $(O,R)\sim(0,1),(O,R]\sim(0,1],\because(0,1)\sim(0,1],\therefore(O,R)\sim(O,R]$; 再将 O 对应到 O, 就可得到开圆与闭圆盘之间的一一对应.

证二: 记 $A_n=\{(x,y):x^2+y^2=\frac{1}{n^2}\},E_1=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n,E_2=\bigcup\limits_{n=2}^{\infty}A_n$, 开圆为 M, 闭圆盘为 N; $\because\{A_n\}_{n=1}^{\infty}\sim\{A_n\}_{n=2}^{\infty}$, 且任意两个同心圆对等, $\therefore E_1\sim E_2$; 又 $\because M\setminus E_2=N\setminus E_1,\therefore$ 开圆与闭圆盘之间一一对应.

6. 设 $f(x)$ 在 (a,b) 上有界. 若 $f(x)$ 是保号的 (即当 $f(x_0)>(<)0$ 时, 必有 $\delta_0>0$, 使得 $f(x)>(<)0(x_0-\delta_0<x<x_0+\delta_0)$), 试证明 $f(x)$ 的不连续点集是可数的.

说明: 题目有问题, 反例:

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\in(a,b)\bigcap\mathbb{Q},\\ 2, & x\in(a,b)\setminus\mathbb{Q}.\end{cases}$$

7. 设 $f(x)$ 是定义在 $[0,1]$ 上的实值函数, 且存在常数 M, 使得对于 $[0,1]$ 中任意有限个数 : $x_1,x_2,\cdots,x_n$, 均有 $|f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)|\leq M$, 试证明下述集合是可数集 : $E=\{x\in[0,1]:f(x)\neq 0\}$.

证: 令 $a>0$, 记 $E_a^+=\{x\in[0,1]:f(x)>a\},E_a^-=\{x\in[0,1]:f(x)<-a\}$; 则 $E=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\{x\in[0,1]:|f(x)|>\frac{1}{n}\}=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(E_{1/n}^+\bigcup E_{1/n}^-);\forall\, n$, 取 $E_{1/n}^+$ 中的 p 个数 $x_1,x_2,\cdots,x_p$, 则 $p\cdot\frac{1}{n}<|f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_p)|\leq M,p<nM$, 所以 $E_{1/n}^+$ 只含有限个数, 同理 $E_{1/n}^-$ 也只含有限个数, 由此可得 E 可数.

8. 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}^1$ 上的实值函数. 如果对于任意的 $x_0\in\mathbb{R}^1$, 必存在 $\delta>0$, 当 $|x-x_0|<\delta$ 时, 有 $f(x)\geq f(x_0)$, 试证明集合 $E=\{y:y=f(x)\}$ 是可数集.

证: 取 $y\in E$, 则 $\exists\, x\in\mathbb{R}^1$, s.t.$f(x)=y$; 由题意, $\exists\delta_x>0$, s.t.$f(z)\geq f(x),z\in(x-\delta_x,x+\delta_x)$; 取有理数 r_x,R_x, 满足 $x-\delta_x<r_x<x<R_x<x+\delta_x$, 如此就建立了 y 与 (r_x,R_x) 的映射 f; 令 $y_1,y_2\in E,y_1\neq y_2,\exists\, x_1,x_2\in\mathbb{R}^1$, s.t. $f(x_1)=y_1,f(x_2)=y_2$; 若 $(r_{x_1},R_{x_1})=(r_{x_2},R_{x_2})$, 由题意, $f(x_1)\geq f(x_2),f(x_2)\geq f(x_1)$, 即 $f(x_1)=f(x_2)$, 矛盾; 故映射 f 是单射; $\{(r_x,R_x):x\in\mathbb{R}^1,\exists y\in E,\text{s.t.}f(x)=y\}\subset\mathbb{Q}^2$, 因此 E 是可数集.

9. 设 E 是三维欧氏空间 $\mathbb{R}^3$ 中的点集, 且 E 中任意两点的距离都是有理数, 试证明 E 是可数集.

证: 若 E 中所有的点共线, 记作 l; 固定 l 上一点 P, 到 P 距离为 $r\in\mathbb{Q}^+$($\mathbb{Q}^+$ 为正有理数) 的 E 中的点至多有两个, $E=\{P\}\bigcup\limits_{r\in\mathbb{Q}^+}\{x\in E:d(x,P)=r\}$, E 可数; 不然, 取 E 中不共线的三点 A,B,C, 分别以这三点为圆心, r_1,r_2,r_3 为半径作球面, E 中的其余点必属于三个球面的交点; 因为三个球面最多有两个交点, $E=\{A,B,C\}\bigcup\limits_{(r_1,r_2,r_3)\in\mathbb{Q}_3^+}\{x\in E\bigcap S(A,r_1)\bigcap S(B,r_2)\bigcap S(C,r_3)),S(P,r)$ 表示以 P 为圆心 r 为半径的球面 $\}$, E 可数.

10. 设 E 是平面 $\mathbb{R}^2$ 中的可数集, 试证明存在互不相交的集合 A 与 B, 使得 $E=A\cap B$, 且任一平行于 x 轴的直线交 A 至多是有限个点, 任一平行于 y 轴的直线交 B 至多是有限个点.

证: $\because E$ 可数, $\therefore E$ 中点的横坐标, 纵坐标集合也可数, 分别记为 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots\}$, $Y=\{y_1,y_2,\cdots,y_n,\cdots\}$, 如此就可记 $E=\{(x_i,y_j)\in E: i,j\in\mathbb{N}\}$, 作从 E 到 $\mathbb{N}^2$ 的映射 $f: f((x_i,y_j))=(i,j)$; 记 $A_1=\{(i,j): i\le j\}, B_1=\{(i,j): i>j\}$, 令 $A=f^{-1}(A_1), B=f^{-1}(B_1)$ 即可.

11. 设 $\{f_\alpha(x)\}_{\alpha\in I}$ 是定义在 $[a,b]$ 上的实值函数族. 若存在 $M>0$, 使得 $|f_\alpha(x)|\le M, x\in[a,b], \alpha\in I$, 试证明对 $[a,b]$ 中任一可数集 E, 总有函数列 $\{f_{\alpha_n}(x)\}$, 存在极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\{f_{\alpha_n}(x)\}, x\in E$.

证: $\because E\subset[a,b]$ 为可数集, $\therefore$ 可记为: $E=\{x_1,x_2,\cdots,x_m,\cdots\}$, 由题目条件, $|f_\alpha(x_1)|\le M, \alpha\in I$, 由 Bolzano-Weierstrass 定理, $\exists\{f_{\alpha_n^1}\}_{n=1}^\infty\subset\{f_\alpha\}_{\alpha\in I}$, s.t. $\lim\limits_{n\to\infty}f_{\alpha_n^1}(x_1)$ 存在; $\because |f_{\alpha_n^1}(x_2)|\le M, \forall\, n, \therefore \exists\{f_{\alpha_n^2}\}_{n=1}^\infty\subset\{f_{\alpha_n^1}\}_{n=1}^\infty$, s.t. $\lim\limits_{n\to\infty}f_{\alpha_n^2}(x_2)$ 存在; 依次类推, 可得 $\{f_{\alpha_n^m}\}_{n=1}^\infty \subset\{f_{\alpha_n^{m-1}}\}_{n=1}^\infty$, s.t. $\lim\limits_{n\to\infty}f_{\alpha_n^m}(x_m)$ 存在; $\cdots$; 若 E 为有限集, 不妨设元素的个数就为 m, 那么存在极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\{f_{\alpha_n^m}(x)\}, x\in E$; 若 E 为可列集, 利用对角线法则选取子函数列 $\{f_{\alpha_m^m}\}_{m=1}^\infty$, 那么存在极限 $\lim\limits_{m\to\infty}\{f_{\alpha_m^m}(x)\}, x\in E$.

12. 设 $E=\bigcup\limits_{n=1}^\infty A_n$. 若 $\overline{\overline{E}}=\aleph$, 试证明存在 n_0, 使得 $\overline{\overline{A}}_{n0}=\aleph$.

证: 反证, 假设 $\forall\, n, \overline{\overline{A}}_n<\aleph, \because \overline{\overline{E}}=\aleph, \therefore E\sim\{x=(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots): x_n\in[0,1](n=1,2,\cdots)\}\triangleq F$, 设 f 为 E 到 F 的一一映射, 则 $\forall\, n, A_n\sim f(A_n)\triangleq B_n$, 令 P_n 为 B_n 中元素对第 n 个分量的投影映射, 即 $P_n(x)=x_n, x\in B_n$, 易知 $\overline{\overline{P_n(B_n)}}\le\overline{\overline{B}}_n=\overline{\overline{A}}_n<\aleph; \because P_n(B_n)\subset[0,1], \overline{\overline{[0,1]}}=\aleph, \therefore \exists\xi_n\in[0,1]\setminus P_n(B_n)$; 令 $\xi=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots)$, 则 $\xi\in F$, 但是由 ξ 的构造易知 $\xi\overline{\in}\bigcup\limits_{n=1}^\infty B_n=F$, 矛盾. 所以假设不成立, 即存在 n_0, 使得 $\overline{\overline{A}}_{n0}=\aleph$.

13. 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}^1$ 上的单调上升函数, 试证明点集 $E=\{x:$ 对于任意的 $\varepsilon>0$, 有 $f(x+\varepsilon)-f(x-\varepsilon)>0\}$ 是 $\mathbb{R}^1$ 中的闭集.

证: $\forall\, x\in E', \exists\{x_n\}_{n=1}^\infty\subset E$, s.t. $x_n\to x(n\to\infty). \forall\,\varepsilon>0, \exists N, \forall\, n>N, |x-x_n|<\frac{\varepsilon}{2}$. 由题意得: $f(x_{N+1}+\frac{\varepsilon}{2})-f(x_{N+1}-\frac{\varepsilon}{2})>0$, 由 f 的单调上升性可得: $f(x+\varepsilon)-f(x-\varepsilon)\ge f(x_{N+1}+\frac{\varepsilon}{2})-f(x_{N+1}-\frac{\varepsilon}{2})>0$, 即 $x\in E$. 所以 E 是闭集.

14. 设 $F\subset\mathbb{R}^n$ 是有界闭集,E 是 F 中的一个无限子集, 试证明:$E'\bigcap F\ne\emptyset$. 反之, 若 $F\subset\mathbb{R}^n$ 且对于 F 中任一无限子集 E, 有 $E'\bigcap F\ne\emptyset$, 试证明 F 是有界闭集.

证: $\because E\subset F, \therefore E$ 是有界无限点集, $\therefore E$ 中存在收敛子列, 故 $E'\ne\emptyset$; 又 $\because F$ 是闭集, $\therefore E'\subset F'\subset F, \therefore E'\bigcap F\ne\emptyset$; 反之, $\forall\, x\in F', \exists\{x_n\}_{n=1}^\infty\subset F$, s.t. $x_n\to x(n\to\infty)$, 记 $E=\{x_n: n=1,2,\cdots\}$, 则 $E'=\{x\}$, 由题意, $E'\bigcap F\ne\emptyset$, 所以 $x\in F$, 即 F 是闭集. 假设 F 无界, 则 $\forall\, n\in\mathbb{N}, \exists\, x_n\in F$, s.t. $\|x_n\|>n$, 且 x_n 互异, 记 $E=\{x_n: n=1,2,\cdots\}$, 易知 $E'=\emptyset$, 与 $E'\bigcap F\ne\emptyset$ 矛盾, 故 F 有界.

15. 设 $F\subset\mathbb{R}^n$ 是闭集, $r>0$, 试证明点集 $E=\{t\in\mathbb{R}^n:$ 存在 $x\in F, |t-x|=r\}$ 是闭集.

证: $\forall\, t\in E', \exists\{t_n\}_{n=1}^\infty\subset E$, s.t. $t_n\to t(n\to\infty)$. 由题意, $\forall\, n, \exists x_n\in F$, s.t. $|t_n-x_n|=r$. 于是由 $\{t_n\}$ 有界可知 $\{x_n\}$ 有界, 从而 $\{x_n\}$ 存在收敛子列, 不妨记为 $\{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty$, 且 $x_{n_k}\to x(k\to\infty), x\in F, \therefore |t-x|=\lim\limits_{k\to\infty}|t_{n_k}-x_{n_k}|=r$, 即 $t\in E$, 所以 E 为闭集.

16. 设 A,B 是 $\mathbb{R}^1$ 中的点集, 试证明 $(A\times B)'=(\overline{A}\times B')\bigcup(A'\times\overline{B})$.

证: 略.

17. 设 $E \subset \mathbb{R}^2$, 称 $E_y = \{x \in \mathbb{R}^1 : (x,y) \in E\}$ 为 E 在 $\mathbb{R}^1$ 上的投影 (集). 若 $E \subset \mathbb{R}^2$ 是闭集, 试证明 E_y 也是闭集.

证: $\forall\, x \in E_y', \exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E_y$, s.t. $x_n \to x(n \to \infty)$, 进而可得 $(x_n, y) \to (x,y)(n \to \infty)$, 由 E_y 的定义可知, $\{(x_n, y) : n = 1, 2, \cdots\} \subset E$, E 为闭集, 所以 $(x,y) \in E$, 即 $x \in E_y$, 所以 E_y 为闭集.

18. 设 $f \in C(\mathbb{R}^1), \{F_k\}$ 是 $\mathbb{R}^1$ 中的递减紧集列, 试证明 $f\Big(\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} F_k\Big) = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} f(F_k)$.

证: 显然, $f\Big(\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} F_k\Big) \subset \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} f(F_k)$, 往证 $f\Big(\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} F_k\Big) \supset \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} f(F_k)$.$\forall\, y \in \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} f(F_k)$, 记 $E = \{x \in \mathbb{R}_1 : f(x) = y\}, F_{k,y} = E \bigcap F_k$, 因为 f 是连续的, 所以 E 是闭集; 又因为 $\{F_k\}$ 是紧集列, 所以也是有界闭集列, 所以 $\{F_{k,y}\}$ 是有界闭集列, 且由 $\{F_k\}$ 的递减性可以推出 $\{F_{k,y}\}$ 也是递减的, 由闭区间套定理, 存在 $x \in \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} F_{k,y} \subset \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} F_k$, 使 $f(x) = y$, 故 $y \in f\Big(\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} F_k\Big)$, 即 $f\Big(\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} F_k\Big) \supset \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} f(F_k)$, 原命题得证.

19. 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}^1$ 上具有介值性. 若对任意的 $r \in Q$, 点集 $\{x \in \mathbb{R}^1 : f(x) = r\}$ 必为闭集, 试证明 $f \in C(\mathbb{R}^1)$.

证: (法一) 若对任意的 $t \in \mathbb{R}_1, E_1 = \{x \in \mathbb{R}_1 : f(x) < t\},\ E_2 = \{x \in \mathbb{R}_1 : f(x) > t\}$ 都为开集, 则 $f \in C(\mathbb{R}^1)$, 往证对任意的 $r \in \mathbb{Q}, E_1 = \{x \in \mathbb{R}_1 : f(x) < r\},\ E_2 = \{x \in \mathbb{R}_1 : f(x) > r\}$ 都为开集. $\because E = \{x \in \mathbb{R}_1 : f(x) = r\}$ 为闭集, $\therefore E_1 \bigcup E_2$ 为开集; $\forall\, x \in E_1, \exists B(x, \delta_x) \subset E_1 \bigcup E_2$, 若 $\exists\, y \in B(x, \delta_x) \bigcap E_2$, 则 $f(y) > r$, 由介值性, 存在 $z \in B(x, |y-x|) \subset B(x, \delta_x)$, s.t. $f(z) = r$, 这与 E_1, E_2 定义矛盾, 所以 $B(x, \delta_x) \subset E_1$, 即 E_1 是开集, 同理可证 E_2 是开集.

(法二) 反证. 假设 f 不是 $\mathbb{R}^1$ 上的连续函数, 则存在 $x_0 \in \mathbb{R}^1, \varepsilon > 0$ 以及 $x_n(n = 1, 2, \cdots)$, s.t. $|x_n - x_0| < \frac{1}{n}, |f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon$, 不妨设 $f(x_n) \geq f(x_0) + \varepsilon > f(x_0)$, 则 $\exists r \in \mathbb{Q}$, s.t. $f(x_n) \geq f(x_0) + \varepsilon > r > f(x_0)$, 由介值性可知, $\exists \xi_n$, s.t. $|\xi_n - x_0| \leq |x_n - x_0| < \frac{1}{n}, f(\xi_n) = r, \forall\, n$, 因此 $\xi_n \to x_0(n \to \infty)$, 因为点集 $E \triangleq \{x \in \mathbb{R}^1 : f(x) = r\}$ 为闭集, 所以 $x_0 \in E$, 即 $f(x_0) = r$, 与 $r > f(x_0)$ 矛盾, 所以假设不成立, 即 f 是 $\mathbb{R}^1$ 上的连续函数.

20. 设 E_1, E_2 是 $\mathbb{R}^1$ 中的非空集, 且 $E_2' \neq \emptyset$, 试证明 $\overline{E}_1 + E_2' \subset (E_1 + E_2)'$.

证: $\forall\, x \in \overline{E}_1 + E_2', \exists\, y \in \overline{E}_1, z \in E_2'$, s.t. $x = y + z, \therefore \exists \{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E_2$, s.t.$z_n \to z(n \to \infty)$; 若 $y \in E_1$, 则易知 $y + z_n \to y + z = x(n \to \infty), \because y + z_n \in E_1 + E_2, \forall\, n, \therefore x \in (E_1 + E_2)'$; 若 $y \in E_1'$, 则 $\exists \{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E_1$, s.t. $y_n \to y(n \to \infty)$, 易得 $y_n + z_n \to y + z = x(n \to \infty), \because y_n + z_n \in E_1 + E_2, \forall\, n, \therefore x \in (E_1 + E_2)'$, 原命题得证.

21. 设 $E \subset \mathbb{R}^n$. 若 $E \neq \emptyset$, 且 $E \neq \mathbb{R}^n$, 试证明 E 之边界点非空 (即 $\partial E \neq \emptyset$).

反证: 假设 $\partial E = \emptyset$. $\therefore \overline{E} = \dot{E} \bigcup \partial E = \dot{E}, \therefore \overline{E}$ 既是开集又是闭集, 所以 $\overline{E} = \emptyset$ 或者 $\overline{E} = \mathbb{R}^n$; 若 $\overline{E} = \emptyset$, 则 $E = \emptyset$, 与已知矛盾; 若 $\overline{E} = \mathbb{R}^n$, 则 $\dot{E} = \mathbb{R}^n$, 故 $E = \mathbb{R}^n$, 也与已知矛盾. 所以 $\partial E \neq \emptyset$.

22. 设 G_1, G_2 是 $\mathbb{R}^n$ 中的互不相交的开集, 试证明: $G_1 \bigcap \overline{G}_2 = \emptyset$.

反证: 假设 $G_1 \bigcap \overline{G}_2 \neq \emptyset$, 则 $\exists\, x \in G_1 \bigcap \overline{G}_2, \because G_1$ 是开集, $G_1 \bigcap G_2 = \emptyset, \therefore x \in G_2'$, 且 $\exists B(x, \delta)$, s.t. $B(x, \delta) \subset G_1, \therefore B(x, \delta) \bigcap G_2 = \emptyset$, 这与 x 是 G_2 的极限点矛盾, 所以 $G_1 \bigcap \overline{G}_2 = \emptyset$.

23. 设 $G \subset \mathbb{R}^n$. 若对任意的 $E \subset \mathbb{R}^n$, 有 $G \bigcap \overline{E} \subset \overline{G \bigcap E}$, 试证明 G 是开集.

证: 令 $E = G^c$, 由题意 $G \bigcap \overline{G^c} \subset \overline{G \bigcap G^c} = \emptyset$, 即 $\overline{G^c} \subset G^c, \therefore G^c$ 是闭集, 所以 G 是开

集.

24. 设 a,b,c,d 是实数, 且 $P(x,y)=ax^2y^2+bxy^2+cxy+dy$. 试问点集 $\{(x,y):P(x,y)=0\}$ 有内点吗?

证: 若 $a=b=c=d=0$, 则点集 $E\triangleq\{(x,y):P(x,y)=0\}=\mathbb{R}^2$, 显然有内点. 若 a,b,c,d 不全为 0, 假设 E 有内点, 记为 (x_0,y_0), 则存在 $\varepsilon>0$, 使得 $B((x_0,y_0),\varepsilon)\subset E$, 那么肯定存在 $\tilde{x}\in(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)$, 使得 $a\tilde{x}^2+b\tilde{x}$ 和 $c\tilde{x}+d$ 不全为 0; 对于 $P(\tilde{x},y)=a\tilde{x}^2y^2+b\tilde{x}y^2+c\tilde{x}y+dy=(a\tilde{x}^2+b\tilde{x})y^2+(c\tilde{x}+d)y$, 任给 $y\in(y_0-\sqrt{\varepsilon^2-(\tilde{x}-x_0)^2},y_0+\sqrt{\varepsilon^2-(\tilde{x}-x_0)^2})$, 都能使 $P(\tilde{x},y)=0$, 这与二次多项式最多有两个实根矛盾, 所以点集 E 没有内点.

25. 设 $f:\mathbb{R}^1\to\mathbb{R}^1$, 令 $G_1=\{(x,y):y<f(x)\},G_2=\{(x,y):y>f(x)\}$. 试证明 $f\in C(\mathbb{R}^1)$ 当且仅当 G_1 与 G_2 是开集.

证: ”$\Rightarrow$” (法一) 令 $g(x,y)=f(x)-y$, 则 $g(x,y)$ 是 $\mathbb{R}^2$ 上的连续函数, 所以 $G_1=\{(x,y):y<f(x)\}=\{(x,y):g(x,y)>0\},G_2=\{(x,y):y>f(x)\}=\{(x,y):g(x,y)<0\}$ 均为开集.

(法二) 要证 G_1 与 G_2 是开集, 只要证 G_1^c 与 G_2^c 是闭集. 往证是闭集. $\forall\,(x,y)\in G_1^c{}',\exists\,(x_n,y_n)\in G_1^c$, s.t. $(x_n,y_n)\to(x,y)(n\to\infty)$. 易知 $x_n\to x,y_n\to y(n\to\infty),y_n\geq f(x_n),\forall\,n$. 由 f 的连续性得: $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)\geq\lim\limits_{n\to\infty}y_n=y$, 所以 $(x,y)\in G_1^c$, 即 G_1^c 为闭集, 同理可证 G_2^c 也为闭集.

”$\Leftarrow$” 因为 G_1 与 G_2 是开集, 所以 G_1^c 与 G_2^c 是闭集. 反证: 假设 f 不是 $\mathbb{R}^1$ 上的连续函数, 则存在 $x_0\in\mathbb{R}^1$, $\varepsilon>0$ 以及 x_n, s.t. $|x_n-x_0|<\frac{1}{n},|f(x_n)-f(x_0)|\geq\varepsilon$. 不妨设 $f(x_n)\geq f(x_0)+\varepsilon$, 则 $(x_n,f(x_0)+\varepsilon)\in G_2^c$; 因为 $x_n\to x_0(n\to\infty)$, 所以 $(x_n,f(x_0)+\varepsilon)\to(x_0,f(x_0)+\varepsilon)(n\to\infty)$, 由 G_2^c 是闭集可得 $(x_0,f(x_0)+\varepsilon)\in G_2^c$, 所以 $f(x_0)\geq f(x_0)+\varepsilon$, 矛盾, 所以假设不成立, 也即 $f\in C(\mathbb{R}^1)$.

26. 试问由 $\mathbb{R}^1$ 中的一切开集构成的集族的基数是什么?

解: 设 E 为 $\mathbb{R}^1$ 中以有理数为端点的开区间的全体, 则 E 是可列集; 记 $\mathcal{P}(E)$ 为 E 的幂集, 易知 $\overline{\overline{\mathcal{P}(E)}}=\aleph$; 而每个开区间 (a,b) 都可以表示为一列有理开区间之并. 事实上, 只要取两个有理数列 $\{\alpha_n\},\{\beta_n\}$, 使 $a<\cdots<\alpha_2<\alpha_1<\beta_1<\beta_2<\cdots<b$, 且 $\alpha_n\to a$, $\beta_n\to b$ $(n\to\infty)$, 即知有 $(a,b)=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(\alpha_n,\beta_n)$. 记 $\mathbb{R}^1$ 上开集全体为 $\mathcal{G}$, 下面要证 $\overline{\overline{\mathcal{G}}}=\aleph$. 由于每个开区间 $(0,x)(0<x<\infty)$ 都是开集, 且 $\{(0,x):0<x<\infty\}\subset\mathcal{G}$, 所以 $\overline{\overline{\mathcal{G}}}\geq\overline{\overline{\{(0,x):0<x<\infty\}}}=\aleph$; 另一方面, 对于每个开集 G, 由于 $G=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(\alpha_n,\beta_n)$, 每个 (α_n,β_n) 为有理开区间, 作映射 $\varphi:\ \mathcal{G}\to\mathcal{P}(E)$, 满足 $\varphi(G)=\{(\alpha_n,\beta_n)\}$, $\forall\,G\in\mathcal{G}$, 由于 G 表示成有理区间之并的方法不唯一, 所以 φ 不是一一映射, 因此 $\overline{\overline{\mathcal{G}}}\leq\overline{\overline{\varphi(\mathcal{G})}}\leq\overline{\overline{\mathcal{P}(E)}}=\aleph$. 综合上述两方面, $\overline{\overline{\mathcal{G}}}=\aleph$.

27. 设 $\{F_\alpha\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一族有界闭集, 若任取其中有限个:$F_{\alpha_1},F_{\alpha_2},\cdots,F_{\alpha_m}$ 都有 $\bigcap\limits_{i=1}^{m}F_{\alpha_i}\neq\emptyset$, 试证明 : $\bigcap\limits_{\alpha}F_\alpha\neq\emptyset$.

反证: 假设 $\bigcap\limits_{\alpha}F_\alpha=\emptyset$, 则 $\bigcup\limits_{\alpha}F_\alpha^c=\mathbb{R}^n$, 对于 $F_{\alpha_0}\in\{F_\alpha\},\{F_\alpha^c\}$ 构成 F_{α_0} 的一个开覆盖, $\because$ F_{α_0} 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界闭集, $\therefore$ F_{α_0} 是紧集, 由有限覆盖定理, $F_{\alpha_0}\subset\bigcup\limits_{i=1}^{m}F_{\alpha_i}^c,\therefore$ $F_{\alpha_0}\bigcap F_{\alpha_1}\bigcap\cdots\bigcap F_{\alpha_m}\subset(\bigcup\limits_{i=1}^{m}F_{\alpha_i}^c)\bigcap F_{\alpha_1}\bigcap\cdots\bigcap F_{\alpha_m}=\emptyset$, 与已知矛盾. 所以 $\bigcap\limits_{\alpha}F_\alpha\neq\emptyset$.

28. 设 $\{F_\alpha\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界闭集族, G 是开集且有 $\bigcap\limits_\alpha F_\alpha \subset G$, 试证明 $\{F_\alpha\}$ 中存在有限个:$F_{\alpha_1}, F_{\alpha_2}, \cdots, F_{\alpha_m}$, 使得 $\bigcap\limits_{i=1}^m F_{\alpha_i} \subset G$.

证: (法一)$\because$ G 是开集, $\therefore$ G^c 是闭集, 任取 $F_{\alpha_0} \in \{F_\alpha\}$, 有 $F_{\alpha_0} \bigcap G^c$ 是有界闭集; $\because \bigcap\limits_\alpha F_\alpha \subset G, \therefore G^c \bigcap F_{\alpha_0} \subset G^c \subset \bigcup\limits_\alpha F_\alpha^c$, 由有限覆盖定理, $G^c \bigcap F_{\alpha_0} \subset \bigcup\limits_{i=1}^m F_{\alpha_i}^c, \therefore G^c = G^c \bigcap (F_{\alpha_0} \bigcup F_{\alpha_0}^c) = (G^c \bigcap F_{\alpha_0}) \bigcup (G^c \bigcap F_{\alpha_0}^c) \subset \bigcup\limits_{i=1}^m F_{\alpha_i}^c \bigcup F_{\alpha_0}^c, \therefore G \supset \bigcap\limits_{i=0}^m F_{\alpha_i}$. 原命题得证.

(法二)$\because \bigcap\limits_\alpha F_\alpha \subset G, \therefore \bigcap\limits_\alpha F_\alpha \bigcap G^c = \bigcap\limits_\alpha (F_\alpha \bigcap G^c) = \emptyset$, 因为 $\{F_\alpha \bigcap G^c\}$ 是有界闭集族, 由 27 题的逆否命题可知: 存在有限个集合 $F_{\alpha_1}, F_{\alpha_2}, \cdots, F_{\alpha_m}$, 使得 $\bigcap\limits_{i=1}^m (F_{\alpha_i} \bigcap G^c) = \emptyset$, 所以 $\bigcap\limits_{i=1}^m F_{\alpha_i} \bigcap G^c = \emptyset$, 即 $\bigcap\limits_{i=1}^m F_{\alpha_i} \subset G$.

29. 设 $K \subset \mathbb{R}^n$ 是有界闭集, $\{B_k\}$ 是 K 的开球覆盖, 试证明存在 $\varepsilon > 0$, 使 K 中任一点为中心, ε 为半径的球必含于 $\{B_k\}$ 中的一个.

证: (法一) 反证. 假设 $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, x_\varepsilon \in K$, s.t. $B(x_\varepsilon, \varepsilon)$ 不含于任一 B_k. 由题目条件和有限覆盖定理可知: $K \subset \bigcup\limits_{i=1}^m B_i$, 于是 $B(x_\varepsilon, \varepsilon) \bigcap B_i^c \neq \emptyset, i = 1, 2, \cdots, m$. 取 $\varepsilon = 1, 1/2, \cdots, 1/n, \cdots$, 可得到 K 中点列 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}$, s.t. $B(x_n, 1/n) \bigcap B_i^c \neq \emptyset$. 由 K 的有界闭集性可知, 存在 $\{x_n\}$ 的收敛子列 $\{x_{n_k}\}$, 使得 $x_{n_k} \to x (k \to \infty)$, 且 $x \in K$. 固定 i, 取 $x_{i,n_k} \in B(x_{n_k}, 1/n_k) \bigcap B_i^c$, 由 $1/n_k \to 0 (k \to \infty)$ 知 $x_{i,n_k} \to x (k \to \infty)$; $\because B_i^c$ 为闭集, $\therefore x \in B_i^c, \therefore x \overline{\in} B_i (i = 1, 2, \cdots, m)$, 而 $x \in K$, 与 $\{B_i\}_{i=1}^m$ 是 K 的开覆盖矛盾, 故假设不成立, 原命题得证.

(法二) 反证. 假设 $\forall\, n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in K$, s.t. $B(x_n, 1/n) \not\subseteq B_k, \forall\, k$; $\because K$ 是有界闭集, $\therefore x_n$ 有收敛子列, 不妨仍记为 x_n, 且 $x_n \to x_0 (n \to \infty), x_0 \in K$; $\because \{B_k\}$ 是 K 的开球覆盖, $\therefore \exists B_{k_i} \in \{B_k\}$ 和 $\varepsilon > 0$, s.t. $B(x_0, \varepsilon) \subset B_{k_i}$, 取 n 充分大, 满足 $|x_n - x_0| < \frac{\varepsilon}{2}$ 以及 $\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$, 则 $B(x_n, 1/n) \subset B(x_0, \varepsilon) \subset B_{k_i}$, 与假设矛盾, 所以假设不成立, 原命题得证.

30. 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}^1$ 上的可微函数, 且对任意的 $t \in \mathbb{R}^1$, 点集 $\{x \in \mathbb{R}^1 : f'(x) = t\}$ 是闭集, 试证明 $f'(x)$ 是 $\mathbb{R}^1$ 上的连续函数.

证: 关键在于证明 $f'(x)$ 在 $\mathbb{R}^1$ 上有介值性, 其他证明同 19 题.

31. 设 $f \in C(\mathbb{R}^1)$. 若存在 $a > 0$, 使得 $|f(x) - f(y)| \geq a|x - y|$ $(x, y \in \mathbb{R}^1)$, 试证明 $R(f) = \mathbb{R}^1$.

证: 取 $y = 0$, 则 $|f(x) - f(0)| \geq a|x|$, 当 $|x| \to \infty$ 时, $|f(x)| \to \infty$. 往证当 $x \to \pm\infty$ 时, $f(x)$ 不能同时趋向于 $+\infty$(或 $-\infty$). 反证, 不妨设 $x \to \pm\infty$ 时, $f(x) \to +\infty$, 则 $\forall\, M > 0, \exists\, N_1 > 0$, 任取 $x_1 > N_1, f(x_1) > M$, 任取 $y_1 < -N_1, f(y_1) > M$; 若 $f(x_1) = f(y_1)$, 则要使 $0 = |f(x_1) - f(y_1)| \geq a|x_1 - y_1|$ 成立, a 只能为 0, 与 $a > 0$ 矛盾. 不妨设 $f(x_1) > f(y_1)$, 则 $\exists N_2 > 0$, 任取 $y_2 < -N_2, f(y_2) > f(x_1)$, 对区间 $[y_2, y_1]$(取点时可以保证 $y_2 < y_1$) 应用连续函数的介值定理, $\exists z \in [y_2, y_1]$, s.t.$f(z) = f(x_1)$, 这时要使 $0 = |f(x_1) - f(z)| \geq a|x_1 - z|$ 成立, a 只能为 0, 与 $a > 0$ 矛盾, 所以当 $x \to \pm\infty$ 时, $f(x)$ 不能同时趋向于 $+\infty$(或 $-\infty$), 即 $R(f) = \mathbb{R}^1$.

32. 试证明 $\mathbb{R}^1$ 中可数稠密集不是 G_δ 集.

证: 仿照书上 52 页例 15 的证法.

33. 设 $f \in C([a, b])$, 且在 $[a, b]$ 内的任一子区间上皆非常数. 若 $f(x)$ 的极值点在 $[a, b]$

中稠密, 试证明点集 $\{x\in[a,b]:f'(x)$ 不存在或 $f'(x)$ 在 x 处不连续 $\}$ 在 $[a,b]$ 上稠密.

反证: 假设点集 $\{x\in[a,b]:f'(x)$ 不存在或 $f'(x)$ 在 x 处不连续 $\}$ 在 $[a,b]$ 上不稠密, 则 $\exists\, x_0\in[a,b]$ 和 $\delta>0$, s.t. $\forall\, y\in B(x_0,\delta)\bigcap[a,b], f'(y)$ 存在且连续, 而 $f(x)$ 的极值点在 $[a,b]$ 中稠密, 故在区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 中必有一点 y_0, 使得 $f'(y_0)=0$. 若在 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 中有导数不为 0 的点存在, 不妨记为 $f'(z_0)>0$, 则由导数的连续性可知, $\exists\,\delta_0>0,\forall\, z\in B(z_0,\delta_0), f'(z)>0$, 这与 $f(x)$ 的极值点稠密矛盾, 于是在 $B(x_0,\delta)$ 中处处有 $f'(y)=0$, 这样在区间 $B(x_0,\delta)\bigcap[a,b]$ 上 $f(x)$ 为常数, 与已知矛盾, 故假设不成立, 原命题得证.

34. 试证明在 $[0,1]$ 上不能定义如下之函数 $f(x)$: 在有理数上连续, 在无理数上不连续.

证: 只要证明对于任何在 $[0,1]$ 中有理点上连续的函数, 至少在一个无理点上连续. 记 $(0,1)$ 中有理点全体为 $Q=\{r_1,r_2,\cdots,r_n,\cdots\}$, 又设 $\varepsilon_n=\frac{1}{2^n}, n=1,2,\cdots$, 取 $r_1^*\neq r_1, r_1^*\in Q, f(x)$ 在 r_1^* 连续, 对 ε_1 存在 $\delta_1>0$, 作 $I_1=(r_1^*-\delta_1,r_1^*+\delta_1)$, 使得 $r_1\overline{\in}I_1, |I_1|<\frac{1}{2}, I_1\subset(0,1)$, 且当 $x\in I_1$ 时有 $|f(x)-f(r_1^*)|<\varepsilon_1$; 取 $r_2^*\in I_1, r_2^*\in Q, r_2^*\neq r_2,r_1,r_1^*$, 由 $f(x)$ 在 r_2^* 连续, 对 ε_2 存在 $\delta_2>0$, 作 $I_2=(r_2^*-\delta_2,r_2^*+\delta_2)$, 使得 $r_1,r_1^*,r_2\overline{\in}\overline{I}_2, |I_2|<\frac{1}{2^2}, \overline{I}_2\subset I_1$, 且当 $x\in I_2$ 时有 $|f(x)-f(r_2^*)|<\varepsilon_2$; 显然上述取法是存在的, 如此继续下去, 到第 n 步, 取 $r_n^*\in I_{n-1}, r_n^*\in Q, r_n^*\neq r_n,r_1,r_1^*,r_2,r_2^*,\cdots,r_{n-1},r_{n-1}^*$(由 I_{n-1} 内有无穷多个有理数, 故可以做到), 由 $f(x)$ 在 r_n^* 连续, 对 ε_n 存在 $\delta_n>0$, 作 $I_n=(r_n^*-\delta_n,r_n^*+\delta_n)$, 使得 $r_n,r_1,r_1^*,r_2,r_2^*,\cdots,r_{n-1},r_{n-1}^*\overline{\in}\overline{I}_{n-1}, |I_n|<\frac{1}{2^n}, \overline{I}_n\subset I_{n-1}$, 且当 $x\in I_n$ 时有 $|f(x)-f(r_n^*)|<\varepsilon_n$, 如此得到闭区间套 $[0,1]\supset\overline{I}_1\supset\overline{I}_2\supset\cdots\supset\overline{I}_n\supset\cdots$, 且 $|I_n|<\frac{1}{2^n}\to 0(n\to\infty)$, 由闭区间套定理存在 $x_0\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\overline{I}_n$, 下面证明 x_0 是无理点, 且 $f(x)$ 在 x_0 点连续, 从而命题得证. 若 x_0 为有理点, 则有 $x_0=r_{n_0}$, 取 $n\geq n_0$, 由作法可知 $r_{n_0}\overline{\in}\overline{I}_n$, 但这与 $r_{n_)}=x_0\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\overline{I}_n\subset\overline{I}_n$ 矛盾, 所以 x_0 为无理点, 再证 $f(x)$ 在 x_0 连续, 首先易知 $x_0\in I_n$; 任给 $\varepsilon>0$, 由 $\varepsilon_n\to 0(n\to\infty)$, 取 $\varepsilon_{n_0}<\frac{\varepsilon}{2}$, 再取 $\delta=\delta_{n_0}-|x_0-r_{n_0}^*|>0$, 当 $|x-x_0|<\delta$ 时, $|x-r_{n_0}^*|\leq|x-x_0|+|x_0-r_{n_0}^*|<\delta_{n_0}$, 所以 $|f(x)-f(x_0)|\leq|f(x)-f(r_{n_0}^*)|+|f(r_{n_0}^*)-f(x_0)|<2\varepsilon_{n_0}<\varepsilon$, 这就证明了 $f(x)$ 在无理点 x_0 连续.

35. 试证明不存在满足下列条件的函数 $f(x,y)$:

(i)$f(x,y)$ 是 $\mathbb{R}^2$ 上的连续函数;

(ii) 偏导数 $\frac{\partial}{\partial x}f(x,y),\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上处处存在;

(iii)$f(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 的任一点上都不可微.

证: 用以下几个结论就能证明该题:

1). (书 53 页例 17) 设 $f_k\in C(\mathbb{R}^n)$, 且有 $\lim\limits_{k\to\infty}f_k(x)=f(x), x\in\mathbb{R}^n$, 则 $f(x)$ 的连续点集是 G_δ 型集;

2). (书 54 页例 18) 设 $f_k\in C(\mathbb{R}^n)$, 且有 $\lim\limits_{k\to\infty}f_k(x)=f(x), x\in\mathbb{R}^n$, 则 $f(x)$ 的不连续点集为第一纲集;

3). 若点集 $N\subset\mathbb{R}^n$ 是第一纲集, 则 N^c 在 $\mathbb{R}^n$ 中稠密;

4). 综合 1), 2), 3) 可得: $f(x)$ 的连续点集是稠密的 G_δ 型集;

5). 可数个稠密的 G_δ 型集的交还是稠密的 G_δ 型集;

有了以上 5 个结论, 假设题目中的条件 **(i)**, **(ii)** 满足, 则 $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(x+\frac{1}{n},y)-f(x,y)}{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}n(f(x+\frac{1}{n},y)-f(x,y))\triangleq\lim\limits_{n\to\infty}F_n(x,y)$, 因为 $F_n(x,y)\in C(\mathbb{R}^2)$, 所以 $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ 的连续点集是稠密的 G_δ 型集, 记为 G_x; 同理, $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ 的连续点集也是稠密的 G_δ 型集, 记为 G_y, 令 $G=G_x\bigcap G_y$, 则 G 也是稠密的 G_δ 型集, 故 $f(x,y)$ 在 G 上可微, 这与条件 **(iii)** 矛盾, 故不存在同时满足三个条件的函数 $f(x,y)$.

36. 设 $E \subset \mathbb{R}^1$ 是非空可数集. 若 E 无孤立点, 试证明 $\overline{E} \setminus E$ 在 $\overline{E}$ 中稠密.

37. 试证明 $\mathbb{R}^n$ 中任一闭集皆为 G_δ 集, 任一开集皆为 F_σ 集.

证: 设 F 是闭集, 令 $G_n = \{x : d(x, F) < \frac{1}{n}\}$. (1). G_n 是开集. $\forall\, x_0 \in G_n, d(x_0, F) < \frac{1}{n}, \exists\, y_0 \in F$, s.t. $d(x_0, y_0) = \delta < \frac{1}{n}$; 令 $\varepsilon = \frac{1}{n} - \delta, \forall\, x \in B(x_0, \varepsilon), d(x, y_0) \le d(x, x_0) + d(x_0, y_0) < \varepsilon + \delta = \frac{1}{n}, \therefore d(x, F) \le d(x, y_0) < \frac{1}{n}, \therefore x \in G_n, B(x_0, \varepsilon) \subset G_n$, 故 G_n 是开集. (2). $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G_n = F$. 显然 $F \subset G_n, \forall\, n$, 故 $F \subset \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G_n; \forall x \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G_n, d(x, F) < \frac{1}{n}, \forall\, n, \therefore d(x, F) = 0$. $\because F$ 是闭集, $\therefore x \in F, \therefore \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G_n \subset F$. 综合 (1)(2), F 是可数个开集的交集, 为 G_δ 集. 若 G 是开集, 则 G^c 是闭集, 所以有开集族 $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ 使 $G^c = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G_n$, 所以 $G = (G^c)^c = (\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G_n)^c = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} G_n^c$, 而 G_n^c 为闭集, 故 G 为 F_σ 集, 命题得证.

38. 设 $f : [0,1] \to [0,1]$. 若点集 $G_f = \{(x, f(x)) : x \in [0,1]\}$ 是 $[0,1] \times [0,1]$ 中闭集, 试证明 $f \in C([0,1])$.

证: 任取 $x_0 \in [0,1]$ 及 $[0,1]$ 中收敛到 x_0 的点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, 即 $x_n \to x_0 (n \to \infty)$, 于是可知 $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ 为有界点列. 记 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} f(x_n) = l$, 由 B-W 定理知存在 $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ 的收敛子列 $\{f(x_{n_k})\}_{k=1}^{\infty}$, s.t. $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} f(x_n) = l$, 因此有 $(x_{n_k}, f(x_{n_k})) \to (x_0, l)(k \to \infty)$, 由 G_f 是闭集可知 $(x_0, l) \in G_f$, 于是有 $f(x_0) = l$, 即 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} f(x_n) = f(x_0)$; 同理可推出 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} f(x_n) = f(x_0)$, 于是有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$, 即 $f \in C[0,1]$.

39. 设 $F \subset \mathbb{R}^1$. 若对任意的 $f \in C(F)$, 必有在 $\mathbb{R}^1$ 上的连续延拓, 试证明 F 是闭集.

反证: 若存在 $x_0 \in F'$ 但 $x_0 \overline{\in} F$, 则 $\exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset F$, s.t. $x_n \to x_0 (n \to \infty)$; 令 $f(x) = \frac{1}{|x - x_0|}, x \in F$, 则 $f(x)$ 在 F 上连续; 若 $g(x)$ 是 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}^1$ 上的连续延拓, 则 $g(x) = f(x), x \in F, g(x_0) = \lim\limits_{x_n \to x_0} g(x_n) = \lim\limits_{x_n \to x_0} f(x_n) = \infty$, 与 $g(x)$ 在 $\mathbb{R}^1$ 上连续矛盾, 故不存在 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}^1$ 上连续延拓, 与已知矛盾, 因此假设不成立, F 是闭集.

40. 设 $A, B \subset \mathbb{R}^n$, 且 $\overline{A} \bigcap B = \overline{B} \bigcap A = \emptyset$, 试证明存在开集 $G_A, G_B : G_A \bigcap G_B = \emptyset, G_A \supset A, G_B \supset B$.

证: 作 $G_A = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, A) - d(x, B) < 0\}$, $G_B = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, B) - d(x, A) < 0\}$, 则 $G_A \bigcap G_B = \emptyset$, 且由 $d(x, A)$, $d(x, B)$ 均是关于 x 的连续函数可知 G_A, G_B 均为开集; $\because \overline{A} \bigcap B = \overline{B} \bigcap A = \emptyset, \therefore d(x, B) \ge d(x, \overline{B}) > 0, \forall\, x \in A$; $d(y, A) \ge d(y, \overline{A}) > 0, \forall\, y \in B$; $\therefore G_A \supset A, G_B \supset B$, 故 G_A, G_B 为满足题目要求的开集.

41. 设 F_1, F_2, F_3 是 $\mathbb{R}^n$ 中三个互不相交的闭集, 试作 $f \in C(\mathbb{R}^n)$, 使得

(**i**)$0 \le f(x) \le 1$;

(**ii**)$f(x) = 0 (x \in F_1); f(x) = 1/2 (x \in F_2); f(x) = 1 (x \in F_3)$.

证: 记 $d(x, F_i)$ 为点 x 到 F_i 的距离, $i = 1, 2, 3$, 则 $d(x, F_i) \ge 0$ 且等号成立当且仅

当 $x \in F_i$. 作函数:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\in F_1 \\ \frac{1}{2}, & x\in F_2 \\ 1, & x\in F_3 \\ \frac{\frac{1}{2d(x,F_2)}+\frac{1}{d(x,F_3)}}{\sum\limits_{i=1}^{3}\frac{1}{d(x,F_i)}}, & x\overline{\in}\bigcup\limits_{i=1}^{3}F_i \end{cases}$$

易知 $f(x)$ 满足条件. 或者作函数: $f(x)=\frac{d(x,F_1\bigcup F_2)+d(x,F_1\bigcup F_3)}{d(x,F_1\bigcup F_2)+2d(x,F_1\bigcup F_3)+d(x,F_2\bigcup F_3)}$, 则 $f(x)$ 也满足条件.

习题 2

第一组

1. 设 $E\subset\mathbb{R}^1$, 且存在 $q:0<q<1$, 使得对任一区间 (a,b), 都有开区间列 $\{I_n\}:E\bigcap(a,b)\subset\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}I_n,\sum\limits_{n=1}^{\infty}m(I_n)<(b-a)q$. 试证明 $m(E)=0$.

反证: 假设 $m^*(E)>0$, 由 $m^*(E)=\inf\{m(G):G\supset E,G$ 为开集 $\}$ 及下确界性质, 对 $\varepsilon=\frac{1-q}{2q}m^*(E)>0$, 存在开集 $G\supset E$, 使得 $m(G)<m^*(E)+\varepsilon=\frac{1+q}{2q}m^*(E)$; 设 $\{(\alpha_k,\beta_k)\}_{k=1}^{\infty}$ 为 G 的构成区间, 即 $G=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}(\alpha_k,\beta_k)$, 由题意, 对每个 (α_k,β_k), 存在开区间列 $\{I_i^k\}_{i=1}^{\infty}$, 使得 $E\bigcap(\alpha_k,\beta_k)\subset\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}I_i^k,\sum\limits_{i=1}^{\infty}m(I_i^k)<(\beta_k-\alpha_k)q$, 于是 $m^*(E)=m^*(E\bigcap G)=m^*(E\bigcap(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}(\alpha_k,\beta_k)))=m^*(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}(E\bigcap(\alpha_k,\beta_k)))\le\sum\limits_{k=1}^{\infty}m^*(E\bigcap(\alpha_k,\beta_k))\le\sum\limits_{k=1}^{\infty}m^*(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}I_i^k)\le\sum\limits_{k=1}^{\infty}\sum\limits_{i=1}^{\infty}m(I_i^k)<\sum\limits_{k=1}^{\infty}(\beta_k-\alpha_k)q=qm(G)<q\cdot\frac{1+q}{2q}m^*(E)=\frac{1+q}{2}m^*(E)<m^*(E)(0<q<1)$, 即 $m^*(E)<m^*(E)$, 这是不可能的, 故 $m(E)=0$.

证二：取 E 的一个 $L-$ 覆盖 $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}(I_n$ 为开区间), 则 $m^*(E)\le\sum\limits_{n=1}^{\infty}m^*(E\bigcap I_n)$, 因此要证 $m(E)=0$, 只要证明对于任一开区间 I, $m^*(E\bigcap I)=0$ 成立即可. 由题意, 对任一开区间 I, 存在开区间列 $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$： $E\bigcap I\subset\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}I_n,\sum\limits_{n=1}^{\infty}m(I_n)<qm(I)$; 对于每一个 I_n, 同样存在开区间列 $\{I_m^n\}_{m=1}^{\infty}$： $E\bigcap I_n\subset\bigcup\limits_{m=1}^{\infty}I_m^n,\sum\limits_{m=1}^{\infty}m(I_m^n)<qm(I_n)$; 对于每一个 I_m^n, 又存在开区间列 $\{I_j^{nm}\}_{j=1}^{\infty}$： $E\bigcap I_m^n\subset\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}I_j^{nm},\sum\limits_{j=1}^{\infty}m(I_j^{nm})<qm(I_m^n)$, 所以 $m^*(E\bigcap I)\le m^*(E\bigcap(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}I_n))\le\sum\limits_{n=1}^{\infty}m^*(E\bigcap I_n)\le\sum\limits_{n=1}^{\infty}m^*(E\bigcap(\bigcup\limits_{m=1}^{\infty}I_m^n))\le\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sum\limits_{m=1}^{\infty}m^*(E\bigcap I_m^n)<\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sum\limits_{m=1}^{\infty}qm(I_m^n)$ $=\sum\limits_{n=1}^{\infty}q\sum\limits_{m=1}^{\infty}m(I_m^n)<\sum\limits_{n=1}^{\infty}qqm(I_n)=q^2\sum\limits_{n=1}^{\infty}m(I_n)<q^3m(I)$, 依此类推, 易知: $m^*(E\bigcap I)<q^km(I)$, $k=1,2,\cdots$, 因此 $m^*(E\bigcap I)=0$, 从而 $m(E)=m^*(E)=0$, 原命题得证.

2. 设 $A_1,A_2\subset\mathbb{R}^n,A_1\subset A_2,A_1$ 是可测集且有 $m(A_1)=m^*(A_2)<\infty$, 试证明 A_2 是可测集.

证一：$\because A_1\subset A_2,\therefore A_1\bigcap A_2=A_1$; 又 $\because A_1$ 可测, $m^*(A_1)=m(A_1)=m^*(A_2),\therefore m^*(A_2)=m^*(A_2\bigcap A_1)+m^*(A_2\bigcap A_1^c)=m^*(A_1)+m^*(A_2\bigcap A_1^c)=m^*(A_2)+m^*(A_2\bigcap A_1^c),\because m^*(A_2)<\infty,\therefore m^*(A_2\bigcap A_1^c)=0,\therefore A_2\setminus A_1$ 可测, $\because A_2=A_1\bigcup(A_2\setminus A_1),\therefore A_2$ 可测.

证二：由可测的定义, 只需证 $m^*(T)\ge m^*(T\bigcap A_2)+m^*(T\bigcap A_2^c),\forall\ T\subset\mathbb{R}^n$. $\because A_1\subset A_2,\therefore A_1^c\supset A_2^c,\therefore m^*(T\bigcap A_2^c)\le m^*(T\bigcap A_1^c);\because A_1$ 可测, $\therefore m^*(T\bigcap A_2)=m^*(T\bigcap A_2\bigcap A_1)+m^*(T\bigcap A_2\bigcap A_1^c)\le m^*(T\bigcap A_1)+m^*(A_2\bigcap A_1^c)=m^*(T\bigcap A_1)$(由证一可知 $m^*(A_2\bigcap A_1^c)=0$), $\therefore m^*(T)=m^*(T\bigcap A_1)+m^*(T\bigcap A_1^c)\ge m^*(T\bigcap A_2)+m^*(T\bigcap A_2^c)$.

3. 设 $A,B\subset\mathbb{R}^n$ 都是可测集, 试证明 $m^*(A\bigcup B)+m^*(A\bigcap B)=m^*(A)+m^*(B)$.

证一：$\because A,B$ 都是可测集, $\therefore m^*(A\bigcup B)+m^*(A\bigcap B)=m^*(A\bigcup(B\setminus A))+m^*(A\bigcap B)=m^*(A)+m^*(B\setminus A)+m^*(A\bigcap B)=m^*(A)+m^*(B\bigcap A^c)+m^*(B\bigcap A)=m^*(A)+m^*(B)$.

证二：$\because A,B$ 都是可测集, $\therefore m^*(A)=m^*(A\bigcap B)+m^*(A\bigcap B^c),m^*(A\bigcup B)=m^*((A\bigcup B)\bigcap B)+m^*((A\bigcup B)\bigcap B^c)=m^*(B)+m^*(A\bigcap B^c),\therefore m^*(A\bigcup B)+m^*(A\bigcap B)+m^*(A\bigcap B^c)=m^*(A)+m^*(B)+m^*(A\bigcap B^c)$, 若 $m^*(A\bigcap B^c)<\infty$, 则等式两边同时减

去 $m^*(A\bigcap B^c)$, 得 $m^*(A\bigcup B)+m^*(A\bigcap B)=m^*(A)+m^*(B)$; 若 $m^*(A\bigcap B^c)=\infty$, 则 $m^*(A)=m^*(A\bigcup B)=\infty$, 所证等式左右两边都为 ∞, 故也成立.

4. 试问是否存在闭集 $F, F\subset[a,b]$ 且 $F\neq[a,b]$, 而 $m(F)=b-a$?

证: 因为 F 是闭集, 所以 F^c 是开集, 又因为 $F\subsetneq[a,b]$, 所以 $[a,b]\bigcap F^c\neq\emptyset$, 从而 $[a,b]\bigcap F^c$ 有内点, 不妨设 $x_0\in[a,b]\bigcap F^c,\delta_0>0$, 且有 $E_0\triangleq(x_0-\delta_0,x_0+\delta_0)\subset[a,b]\bigcap F^c$, 于是有 $m([a,b]\bigcap F^c)\geq 2\delta, m(F)\leq m([a,b]\setminus E_0)\leq b-a-2\delta<b-a$, 与题目条件 $m(F)=b-a$ 矛盾, 所以不存在题目要求的闭集 F.

5. 试在 $\mathbb{R}^1$ 中做一个由某些无理数构成的闭集 F, 使得 $m(F)>0$.

证: 记 $\mathbb{R}^1$ 中全体有理数为 $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$, 令 $E_n=(r_n-\frac{1}{2^{n+1}},r_n+\frac{1}{2^{n+1}})$, 则 $E=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n$ 为开集, 且 $m(E)\leq\sum\limits_{n=1}^{\infty}m(E_n)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=1$; 令 $F=\mathbb{R}^1\setminus E$, 则 F 为闭集, 且 $m(F)=m(\mathbb{R}^1\setminus E)=m(\mathbb{R}^1)-m(E)=\infty>0$, 所以 F 就是满足题目条件的闭集.

6. 设 $I=[0,1]\times[0,1]$, 令 $E=\{(x,y)\in I:|\sin x|<\frac{1}{2},\cos(x+y)$ 是无理数 $\}$, 试求 $m(E)$.

证: $\because x\in[0,1],|\sin x|<\frac{1}{2},\therefore x\in[0,\frac{\pi}{6}),\therefore x+y\in[0,\frac{\pi}{6}+1)\subset[0,\frac{\pi}{2}],\therefore\cos(x+y)\in[0,1],\forall\, x\in[0,\frac{\pi}{6}),y\in[0,1]$; 设 $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $[0,1]$ 中的全体有理数, 令 $E_0=\{(x,y):0\leq x<\frac{\pi}{6},0\leq y\leq 1\},E_n=\{(x,y)\in I:0\leq x<\frac{\pi}{6},\cos(x+y)=r_n\}=\{(x,y)\in I:0\leq x<\frac{\pi}{6},x+y=\arccos r_n\},n=1,2,\cdots$, 易知 E_n 是平面上的线段 (或空集), 所以 $m(E_n)=0,n=1,2,\cdots$, 所以 $m(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n)\leq\sum\limits_{n=1}^{\infty}m(E_n)=0$, 即 $m(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n)=0$, 所以 $m(E)=m(E_0\setminus(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n))=m(E_0)=\frac{\pi}{6}$.

7. 设 $\{E_k\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的可测集列, 若 $m(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}E_k)<\infty$, 试证明 $m(\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}E_k)\geq\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}m(E_k)$.

证: 因为 $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}E_k=\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}\bigcup\limits_{n=k}^{\infty}E_n$, 而 $\{\bigcup\limits_{n=k}^{\infty}E_n\}_{k=1}^{\infty}$ 为递减的可测集列, 且 $m(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}E_k)<\infty$, 由测度的下连续可得: $m(\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}E_k)=m(\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}\bigcup\limits_{n=k}^{\infty}E_n)=m(\lim\limits_{k\to\infty}\bigcup\limits_{n=k}^{\infty}E_n)=\lim\limits_{k\to\infty}m(\bigcup\limits_{n=k}^{\infty}E_n)=\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}m(\bigcup\limits_{n=k}^{\infty}E_n)\geq\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}m(E_k)$.

8. 设 $\{E_k\}$ 是 $[0,1]$ 中的可测集列, $m(E_k)=1(k=1,2,\cdots)$, 试证明:$m(\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}E_k)=1$.

证: 记 $E=[0,1],\because m(E_k)=1(k=1,2,\cdots),\therefore m(E\setminus E_k)=m(E)-m(E_k)=0(k=1,2,\cdots),\therefore 1=m(E)=m(\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}E_k)+m(E\setminus\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}E_k)=m(\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}E_k)+m(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}(E\setminus E_k))\leq m(\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}E_k)+\sum\limits_{k=1}^{\infty}m(E\setminus E_k)=m(\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}E_k)$, 即 $m(\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}E_k)\geq 1$, 又 $\because m(\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}E_k)\leq m(E)=1,\therefore m(\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}E_k)=1$.

9. 设 $E_1,E_2,\cdots,E_k$ 是 $[0,1]$ 中的可测集, 且有 $\sum\limits_{i=1}^{k}m(E_i)>k-1$, 试证明:$m(\bigcap\limits_{i=1}^{k}E_i)>0$.

证: 记 $[0,1]$ 为 E, 因为 $\bigcap\limits_{i=1}^{k}E_i=E\bigcap(\bigcap\limits_{i=1}^{k}E_i)=E\bigcap((\bigcap\limits_{i=1}^{k}E_i)^c)^c=E\setminus(\bigcap\limits_{i=1}^{k}E_i)^c=E\setminus$

$(\bigcup\limits_{i=1}^{k} E_i^c)$, 所以 $m(\bigcap\limits_{i=1}^{k} E_i) = m(E \setminus (\bigcup\limits_{i=1}^{k} E_i^c)) = m(E) - m(E \bigcap (\bigcup\limits_{i=1}^{k} E_i^c)) = m(E) - m(\bigcup\limits_{i=1}^{k}(E \setminus E_i)) \geq m(E) - \sum\limits_{i=1}^{k} m(E \setminus E_i) = m(E) - \sum\limits_{i=1}^{k}(m(E) - m(E_i)) = 1 - k + \sum\limits_{i=1}^{k} m(E_i) > 1 - k + k - 1 = 0$, 原命题得证.

10. 设 A, B, C 是 $\mathbb{R}^n$ 中的可测集, 若有 $m(A \triangle B) = 0, m(B \triangle C) = 0$, 试证明 $m(A \triangle C) = 0$.

证: $\because$ A, B, C 是可测集, $m(A \triangle B) = 0, m(B \triangle C) = 0$, $\therefore$ $m(A \triangle B) = m(A \setminus B) + m(B \setminus A) = 0$, $\therefore$ $m(A \setminus B) = m(B \setminus A) = 0$, 同理, $m(B \setminus C) = m(C \setminus B) = 0$; $\because$ $A \setminus C = A \bigcap C^c = A \bigcap C^c \bigcap (B \bigcup B^c) = (A \bigcap C^c \bigcap B) \bigcup (A \bigcap C^c \bigcap B^c) \subset (B \setminus C) \bigcup (A \setminus B)$, $\therefore$ $m(A \setminus C) \leq m(A \setminus B) + m(B \setminus C) = 0$, $\therefore$ $m(A \setminus C) = 0$, 同理, $m(C \setminus A) = 0$, $\therefore$ $m(A \triangle C) = m(A \setminus C) + m(C \setminus A) = 0$, 原命题得证.

11. 设 $\{B_\alpha\}_{\alpha \in I}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中一族开球, 记 $G = \bigcup\limits_{\alpha \in I} B_\alpha$. 若有 $0 < \lambda < m(G)$, 试证明存在有限个互不相交的开球 $B_{\alpha_1}, B_{\alpha_2}, \cdots, B_{\alpha_m}$, 使得 $\sum\limits_{k=1}^{m} m(B_{\alpha_k}) > \frac{\lambda}{3^n}$.

证: 取 $K \subset G$ 为紧集, 且 $m(K) > \lambda$, 由有限覆盖定理, 存在有限个开球 (按直径从大到小的顺序排列)$B_{\alpha_1}, B_{\alpha_2}, \cdots, B_{\alpha_n}$, 使得 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} B_{\alpha_i} \supset K$; 第一步, 记 $B_1 = B_{\alpha_1}$, 则 $3B_1$ 可以覆盖 $\{B_{\alpha_i}\}_{i=1}^n$ 中所有与 B_1 相交的开球; 第二步, 从 $\{B_{\alpha_i}\}_{i=1}^n \setminus \{B_1\}$ 中选取与 B_1 不相交且直径最大的开球, 记为 B_2, 同样 $3B_2$ 可以覆盖 $\{B_{\alpha_i}\}_{i=1}^n$ 中所有与 B_2 相交的开球, $\cdots$, 依次下去, 可以得到有限个互不相交的开球 $\{B_j\}_{j=1}^m$, 使得 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} B_{\alpha_i} \subset \bigcup\limits_{j=1}^{m} 3B_j$, 由测度的单调性可知: $\lambda < m(K) \leq m(\bigcup\limits_{i=1}^{n} B_{\alpha_i}) \leq m(\bigcup\limits_{j=1}^{m} 3B_j) \leq 3^n \sum\limits_{j=1}^{m} m(B_j)$, 所以 $\sum\limits_{j=1}^{m} m(B_j) > \frac{\lambda}{3^n}$, 原命题得证.

12. 设 $\{B_k\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中递减可测集列, $m^*(A) < \infty$, 令 $E_k = A \bigcap B_k (k = 1, 2, \cdots), E = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} E_k$, 试证明 $\lim\limits_{k \to \infty} m^*(E_k) = m^*(E)$.

证一：取 A 的等测包 H, 则 $H \supset A$, $m(H) = m^*(A) < \infty$; 因为 $\{B_k\}$ 为递减可测集列, 所以 $\{H \bigcap B_k\}$ 为递减可测集列, 由测度的下连续性可知: $\lim\limits_{k \to \infty} m(H \bigcap B_k) = m(\lim\limits_{k \to \infty} H \bigcap B_k) = m(\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}(H \bigcap B_k))$. 此外根据外测度的单调性和次可加性, 易知 $0 \leq m^*(E_k) - m^*(E) \leq m^*(E_k \setminus E) = m^*((A \bigcap B_k) \setminus (A \bigcap (\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} B_k))) = m^*(A \bigcap (B_k \setminus (\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} B_k))) \leq m^*(H \bigcap (B_k \setminus (\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} B_k))) = m((H \bigcap B_k) \setminus ((\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}(H \bigcap B_k))) = m(H \bigcap B_k) - m(\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}(H \bigcap B_k))$, 令 $k \to \infty$, 可得: $\lim\limits_{k \to \infty} m^*(E_k) = m^*(E)$.

证二：$\because$ $\{B_k\}$ 是递减可测集列, $\therefore$ $\{B_k^c\}$ 是递增可测集列, $\therefore$ $\{A \bigcap B_k^c\}$ 是递增集合列, 由推论 2.17, $\lim\limits_{k \to \infty} m^*(A \bigcap B_k^c) = m^*(\lim\limits_{k \to \infty}(A \bigcap B_k^c)) = m^*(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}(A \bigcap B_k^c)) = m^*(A \bigcap (\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} B_k)^c)$; 根据可测集的定义, $m^*(A) = m^*(A \bigcap B_k) + m^*(A \bigcap B_k^c)$, 令 $k \to \infty$, 得: $m^*(A) = \lim\limits_{k \to \infty} m^*(E_k) + m^*(A \bigcap (\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} B_k)^c)$ (1); 因为 $\lim\limits_{k \to \infty} B_k$ 也是可测集, 所以 $m^*(A) = m^*(A \bigcap (\lim\limits_{k \to \infty} B_k))$

$+ m^*(A\bigcap(\lim\limits_{k\to\infty} B_k)^c) = m^*(A\bigcap(\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} B_k)) + m^*(A\bigcap(\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} B_k)^c) = m^*(E) + m^*(A\bigcap(\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} B_k)^c)$ (2); 又因为 $m^*(A) < \infty$, 所以由 (1)(2), $\lim\limits_{k\to\infty} m^*(E_k) = m^*(E)$.

13. 设 $E \subset \mathbb{R}^n, H \supset E$ 且 H 是可测集, 若 $H \setminus E$ 中任一可测子集皆为零测集, 试问 H 是 E 的等测包吗?

证: 令 G 是 E 的一个等测包, 则 $G \supset E$, $m(G) = m^*(E)$, 因而 $H \setminus G \subset H \setminus E$, 由于 $H \setminus G$ 是可测集, 根据已知条件, $m(H \setminus G) = 0$, 所以 $m(H) = m(H \setminus G) + m(H \bigcap G) = m(H \bigcap G) \le m(G) = m^*(E)$; 又因为 $H \supset E$, 所以 $m(H) \ge m^*(E)$, 故 $m(H) = m^*(E)$, 即 H 是 E 的等测包.

14. 试证明点集 E 可测的充分必要条件是: 对任给 $\varepsilon > 0$, 存在开集 $G_1, G_2 : G_1 \supset E, G_2 \supset E^c$, 使得 $m(G_1 \bigcap G_2) < \varepsilon$.

证: " $\Rightarrow$ " 若 E 可测, 由定理 2.13, $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists$ 开集 $G \supset E$, 闭集 $F \subset E$, s.t. $m(G \setminus E) < \varepsilon/2$, $m(E \setminus F) < \varepsilon/2$, 由 $G \setminus F \subset (G \setminus E)\bigcup(E \setminus F)$, 知 $m(G \setminus F) \le m((G \setminus E)\bigcup(E \setminus F)) \le m(G \setminus E) + m(E \setminus F) < \varepsilon$, 令 $G_1 = G$, $G_2 = F^c$, 则 G_1, G_2 为开集, $G_1 \supset E, G_2 \supset E^c$, $m(G_1 \bigcap G_2) = m(G \setminus F) < \varepsilon$.

" $\Leftarrow$ " 若对任给 $\varepsilon > 0$, 存在开集 $G_1, G_2 : G_1 \supset E, G_2 \supset E^c$, 使得 $m(G_1 \bigcap G_2) < \varepsilon$, 则取 $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$, 存在开集 G_n, 闭集 F_n, $G_n \supset E, F_n \subset E$, 使得 $m(G_n \setminus F_n) < \varepsilon_n$, $n = 1, 2, \cdots$; 令 $G = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G_n$, $F = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$, 则 $G \supset E$, $F \subset E$ 均为可测集, 且 $m(G\setminus F) \le m(G_n \setminus F_n) < \varepsilon_n$, 令 $n \to \infty$, 得 $m(G \setminus F) = 0$; 因为 $F \subset E$, 所以 $G \setminus E \subset G \setminus F$, $m^*(G \setminus E) \le m(G \setminus F) = 0$, 即 $G \setminus E$ 为零测集, 故 $E = G \setminus (G \setminus E)$ 为可测集.

15. 设 $E \subset [0, 1]$ 是可测集且有 $m(E) \ge \varepsilon > 0$, $x_i \in [0, 1], i = 1, 2, \cdots, n$, 其中 $n > \frac{2}{\varepsilon}$. 试证明 E 中存在两个点其距离等于 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 中某两个点之间的距离.

证: 因为 $x_i \in [0, 1]$, 所以 $E + \{x_i\} \subset [0, 2]$, $i = 1, 2, \cdots, n$, 所以 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}(E + \{x_i\}) \subset [0, 2]$, $m(\bigcup\limits_{i=1}^{n}(E + \{x_i\})) \le m([0, 2]) = 2$; 由测度的平移不变性可知 $m(E + \{x_i\}) = m(E) \ge \varepsilon > 0$, $i = 1, 2, \cdots, n$, 若 $(E + \{x_i\})\bigcap(E + \{x_j\}) = \emptyset$, $\forall\ i \ne j$, $i, j = 1, 2, \cdots, n$, 则 $m(\bigcup\limits_{i=1}^{n}(E + \{x_i\})) = \sum\limits_{i=1}^{n} m(E + \{x_i\}) = n \cdot m(E) \le 2, n \le \frac{2}{m(E)} \le \frac{2}{\varepsilon}$, 与已知 $n > \frac{2}{\varepsilon}$ 矛盾, 所以存在 $i \ne j$, $i, j = 1, 2, \cdots, n$, s.t. $(E+\{x_i\})\bigcap(E+\{x_j\}) \ne \emptyset$, 即存在 e_i, $e_j \in E$, $e_i \ne e_j$, s.t. $e_i + x_i = e_j + x_j$, 则 $|e_i - e_j| = |x_i - x_j|$, 原命题得证.

16. 设 W 是 $[0, 1]$ 中的不可测集, 试证明存在 $\varepsilon : 0 < \varepsilon < 1$, 使得对于 $[0, 1]$ 中的任一满足 $m(E) \ge \varepsilon$ 的可测集 E, $W \bigcap E$ 是不可测集.

反证: 假设 $\forall\ \varepsilon : 0 < \varepsilon < 1$, $\exists$ 可测集 $E \subset [0, 1]$, $m(E) \ge \varepsilon$, s.t. $W \bigcap E$ 是可测集, 取 $\varepsilon_n = 1 - \frac{1}{n}$, $\exists$ 可测集 $E_n \subset [0, 1]$, s.t. $m(E_n) \ge \varepsilon_n$, $W \bigcap E_n$ 为可测集, $n = 1, 2, \cdots$; 令 $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$, 则 $E \subset [0, 1]$ 为可测集, 且 $1 - \frac{1}{n} \le m(E_n) \le m(E) \le 1$, 令 $n \to \infty$, 得 $m(E) = 1$, $m([0, 1] \setminus E) = m([0, 1]) - m(E) = 0, m^*(W \bigcap([0, 1] \setminus E)) \le m([0, 1] \setminus E) = 0$, 所以 $W \bigcap([0, 1] \setminus E)$ 为零测集, 又因为 $W \bigcap E = W \bigcap(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(W \bigcap E_n)$ 为可测集, 所以 $W = W \bigcap[0, 1] = W \bigcap(E \bigcup([0, 1] \setminus E)) = (W \bigcap E)\bigcup(W \bigcap([0, 1] \setminus E))$ 为可测集, 与已知 W 为不可测集矛盾, 故假设不成立, 原命题得证.

习题 3

第一组

1. 设有指标集 I, $\{f_\alpha(x):\alpha\in I\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上可测函数族, 试问函数 $S(x)=\sup\{f_\alpha(x):\alpha\in I\}$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上是可测的吗?

证: $S(x)$ 不一定是可测函数. 反例: 取 I 为 $\mathbb{R}^1$ 中的不可测集, 取

$$f_\alpha(x)=\begin{cases}1, & x=\alpha,\\ 0, & x\neq\alpha.\end{cases}$$

则 $f_\alpha(x)$ 在 $\mathbb{R}^1$ 中可测, 同时易得 $\{x\in\mathbb{R}^1:S(x)>0\}=I$ 为不可测集, 从而 $S(x)$ 不是可测函数.

2. 设 $z=f(x,y)$ 是 $\mathbb{R}^2$ 上的连续函数, $g_1(x)$, $g_2(x)$ 是 $[a,b]\subset\mathbb{R}^1$ 上的实值可测函数, 试证明 $F(x)=f(g_1(x),g_2(x))$ 是 $[a,b]$ 上的可测函数.

证一：$\forall\ t\in\mathbb{R}^1$, $G\triangleq\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:f(x,y)>t\}$ 是开集, 由开集的构成定理, 存在可列个互不相交的半开闭矩体 G_n, s.t. $G=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}G_n$, 其中 G_n 可以记为 $I_n\times I_n'$, I_n,I_n' 均为半开闭区间; $\{x\in[a,b]:F(x)>t\}=\{x\in[a,b]:(g_1(x),g_2(x))\in G\}=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\{x\in[a,b]:(g_1(x),g_2(x))\in G_n\}=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(\{x\in[a,b]:g_1(x)\in I_n\}\bigcap\{x\in[a,b]:g_1(x)\in I_n'\})$, 由 $g_1(x)$, $g_2(x)$ 是 $[a,b]\subset\mathbb{R}^1$ 上的实值可测函数, 可知 $\{x\in[a,b]:F(x)>t\}$ 是可测集, 因此 $F(x)=f(g_1(x),g_2(x))$ 是 $[a,b]$ 上的可测函数.

证二：因为 $g_1(x)$, $g_2(x)$ 是 $[a,b]\subset\mathbb{R}^1$ 上的实值可测函数, 所以存在可测简单函数列 $\{\phi_k(x)\}$ 和 $\{\psi_k(x)\}$, s.t. $\lim\limits_{k\to\infty}\phi_k(x)=g_1(x)$, $\lim\limits_{k\to\infty}\psi_k(x)=g_2(x)$, $\forall\ x\in[a,b]$; 那么 $\{f(\phi_k(x),\psi_k(x))\}$ 也为 $[a,b]$ 上的简单可测函数列, 因为 $z=f(x,y)$ 是 $\mathbb{R}^2$ 上的连续函数, 所以 $\lim\limits_{k\to\infty}f(\phi_k(x),\psi_k(x))=f(g_1(x),g_2(x))$, 所以 $F(x)=f(g_1(x),g_2(x))$ 是 $[a,b]$ 上的可测函数.

3. 设 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上存在右导数, 试证明右导函数 $f_+'(x)$ 是 $[a,b)$ 上的可测函数.

证: 由题意可知 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上右连续, 利用书 22 页例 12 的结论, $f(x)$ 的不连续点集是可数集, 即 $f(x)$ 几乎处处连续, 因此 $f(x)$ 是可测函数, 进一步 $f(x+\frac{1}{n})$ 也是可测函数; 又因为 $f_+'(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(x+\frac{1}{n})-f(x)}{\frac{1}{n}}$, 由可测函数列的极限仍为可测函数可知, $f_+'(x)$ 是 $[a,b)$ 上的可测函数.

4. 设 $f(x)$ 是 $E\subset\mathbb{R}^n$ 上几乎处处有限的可测函数, $m(E)<\infty$, 试证明对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 E 上的有界可测函数 $g(x)$, 使得 $m(\{x\in E:|f(x)-g(x)|>0\})<\varepsilon$.

证: 令 $E_0=\{x\in E:|f(x)|=\infty\}$, $E_n=\{x\in E:|f(x)|\geq n\}$, $n=1,2,\cdots$, 则有 $E\supset E_1\supset E_2\supset\cdots\supset E_n\supset\cdots$, $E_0=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}E_n$; 又因为 $m(E)<\infty$, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}m(E_n)=m(\lim\limits_{n\to\infty}E_n)=m(E_0)=0$; $\forall\ \varepsilon>0$, $\exists\ N>0$, s.t. $m(E_N)=m(\{x\in E:|f(x)|\geq N\})<\varepsilon$, 作函数

$$g(x)=\begin{cases}f(x), & x\in E\setminus E_N,\\ 0, & x\in E_N.\end{cases}$$

易知 $g(x)$ 有界且可测, 而 $m(\{x\in E:|f(x)-g(x)|>0\})\le m(E_N)<\varepsilon$, 因此 $g(x)$ 即为符合要求的可测函数.

5. 设 $f(x)$ 以及 $f_n(x)$ $(n=1,2,\cdots)$ 都是 $A\subset\mathbb{R}^1$ 上几乎处处有限的可测函数. 若对任给的 $\varepsilon>0$, 存在 A 的可测子集 $B:m(A\setminus B)<\varepsilon$, 使得 $f_n(x)$ 在 B 上一致收敛于 $f(x)$, 试证明 $f_n(x)$ 在 A 上几乎处处收敛于 $f(x)$.

证: 对于 $\varepsilon_m=\frac{1}{2^m}$, 存在 A 的可测子集 B_m, 使得 $m(A\setminus B_m)<\frac{1}{2^m}$, 且 $f_n(x)$ 在 B_m 上一致收敛于 $f(x)$. 记 $B=\bigcap\limits_{j=1}^{\infty}\bigcup\limits_{m=j}^{\infty}(A\setminus B_m)$, 因为 $m(B)\le m(\bigcup\limits_{m=j}^{\infty}(A\setminus B_m))\le\sum\limits_{m=j}^{\infty}m(A\setminus B_m)<\sum\limits_{m=j}^{\infty}\frac{1}{2^m}=\frac{1}{2^{j-1}}$, $\forall\ j\in\mathbb{N}$, 所以 $m(B)=0$. $\forall\ x\in A\setminus B=\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}\bigcap\limits_{m=j}^{\infty}B_m$, $\exists\ j_0\in\mathbb{N}$, s.t. $x\in\bigcap\limits_{m=j_0}^{\infty}B_m$, 因为 f_n 在 B_m 上一致收敛, 故在 x 处收敛, 又 $m(B)=0$, 故 $f_n(x)$ 在 A 上几乎处处收敛于 $f(x)$.

6. 设 $\{f_k(x)\}$ 是 $E\subset\mathbb{R}^n$ 上的实值可测函数列, $m(E)<\infty$, 试证明 $\lim\limits_{k\to\infty}f_k(x)=0,\ a.e.\ x\in E$ 的充分必要条件是: 对任意的 $\varepsilon>0$ 有 $\lim\limits_{j\to\infty}m(\{x\in E:\sup\limits_{k\ge j}\{|f_k(x)|\}\ge\varepsilon\})=0$.

证: 记 $E^*=\{x\in E:f_k(x)\nrightarrow 0(k\to\infty)\}=\bigcup\limits_{m=1}^{\infty}\bigcap\limits_{j=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=j}^{\infty}\{x\in E:|f_k(x)|\ge\frac{1}{m}\}$.

"$\Rightarrow$" 假设 $\lim\limits_{k\to\infty}f_k(x)=0,\ a.e.\ x\in E,\ \forall\ \varepsilon>0$,

$$\begin{aligned}
&\overline{\lim_{j\to\infty}}m(\{x\in E:\sup_{k\ge j}\{|f_k(x)|\}\ge\varepsilon\})\\
\le\ &\overline{\lim_{j\to\infty}}m(\bigcup_{k=j}^{\infty}\{x\in E:|f_k(x)|\ge\varepsilon/2\})\\
=\ &\lim_{j\to\infty}m(\bigcup_{k=j}^{\infty}\{x\in E:|f_k(x)|\ge\varepsilon/2\})\\
=\ &m(\bigcap_{j=1}^{\infty}\bigcup_{k=j}^{\infty}\{x\in E:|f_k(x)|\ge\varepsilon/2\})\qquad(m(E)<\infty)\\
\le\ &m(E^*)=0
\end{aligned}$$

所以 $\lim\limits_{j\to\infty}m(\{x\in E:\sup\limits_{k\ge j}\{|f_k(x)|\}\ge\varepsilon\})=0$.

"$\Leftarrow$" 假设对任意的 $\varepsilon>0$ 有 $\lim\limits_{j\to\infty}m(\{x\in E:\sup\limits_{k\ge j}\{|f_k(x)|\}\ge\varepsilon\})=0$,

$$\begin{aligned}
m^*(E^*)\ &\le\ \sum_{m=1}^{\infty}m(\bigcap_{j=1}^{\infty}\bigcup_{k=j}^{\infty}\{x\in E:|f_k(x)|\ge\frac{1}{m}\})\\
&=\ \sum_{m=1}^{\infty}\lim_{j\to\infty}m(\bigcup_{k=j}^{\infty}\{x\in E:|f_k(x)|\ge\frac{1}{m}\})\qquad(m(E)<\infty)\\
&\le\ \sum_{m=1}^{\infty}\lim_{j\to\infty}m(\{x\in E:\sup_{k\ge j}\{|f_k(x)|\}\ge\frac{1}{m}\})=0
\end{aligned}$$

所以 $\lim\limits_{k\to\infty}f_k(x)=0,\ a.e.\ x\in E$.

7. 设 $f(x), f_1(x), \cdots, f_k(x), \cdots$ 是 $[a,b]$ 上几乎处处有限的可测函数, 且有 $\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$, $a.e.\ x \in [a,b]$, 试证明存在 $E_n \subset [a,b] (n = 1, 2, \cdots)$, 使得 $m([a,b] \setminus \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n) = 0$, 而 $f_k(x)$ 在每个 E_n 上一致收敛于 $f(x)$.

证: 由题设条件知符合叶戈洛夫定理的全部条件, 所以, 对 $\delta_n = \frac{1}{n} > 0$, 存在 $E_n \subset [a,b]$, 使得 $m([a,b] \setminus E_n) < \frac{1}{n}$, $f_k(x)$ 在 E_n 上一致收敛于 $f(x)$. 因为 $m([a,b] \setminus \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n) \le m([a,b] \setminus E_n) < \frac{1}{n}, \forall\, n \in \mathbb{N}$, 所以 $m([a,b] \setminus \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n) = 0$.

8. 设 $\{f_k(x)\}$ 在 E 上依测度收敛于 $f(x)$, $\{g_k(x)\}$ 在 E 上依测度收敛于 $g(x)$. 试证明 $\{f_k(x) + g_k(x)\}$ 在 E 上依测度收敛于 $f(x) + g(x)$.

证: 由题意, $\forall\, \varepsilon > 0$, $\lim\limits_{k\to\infty} m(\{x \in E : |f_k(x) - f(x)| > \varepsilon/2\}) = 0$, $\lim\limits_{k\to\infty} m(\{x \in E : |g_k(x) - g(x)| > \varepsilon/2\}) = 0$, 利用三角不等式易知 $\{x \in E : |f_k(x) + g_k(x) - f(x) - g(x)| > \varepsilon\} \subset \{x \in E : |f_k(x) - f(x)| > \varepsilon/2\} \bigcup \{x \in E : |g_k(x) - g(x)| > \varepsilon/2\}$, 于是 $m(\{x \in E : |f_k(x) + g_k(x) - f(x) - g(x)| > \varepsilon\}) \le m(\{x \in E : |f_k(x) - f(x)| > \varepsilon/2\}) + m(\{x \in E : |g_k(x) - g(x)| > \varepsilon/2\})$, 不等式两边同时取极限, $\lim\limits_{k\to\infty} m(\{x \in E : |f_k(x) + g_k(x) - f(x) - g(x)| > \varepsilon\}) = 0$, 因此 $\{f_k(x) + g_k(x)\}$ 在 E 上依测度收敛于 $f(x) + g(x)$.

9. 设 $f(x), f_1(x), f_2(x), \cdots, f_k(x), \cdots$ 是 E 上几乎处处有限的可测函数, 且 $m(E) < \infty$. 若在 $\{f_k(x)\}$ 的任意子列 $\{f_{k_i}(x)\}$ 中均存在几乎处处收敛于 $f(x)$ 的子列 $\{f_{k_{i_j}}(x)\}$, 试证明 $\{f_k(x)\}$ 在 E 上依测度收敛于 $f(x)$.

反证: 假设 $f_n(x) \not\Rightarrow f(x)$ 于 E, 则存在 $\varepsilon_0 > 0$, 使得 $m(\{x \in E : |f_k(x) - f(x)| > \varepsilon_0\}) \nrightarrow 0 (k \to \infty)$, 因此有子列 $\{f_{k_i}(x)\}$, 使得 $\lim\limits_{i\to\infty} m(\{x \in E : |f_{k_i}(x) - f(x)| > \varepsilon_0\}) > 0\ (*)$, 由题意, $\{f_{k_i}(x)\}$ 中存在几乎处处收敛于 $f(x)$ 的子列 $\{f_{k_{i_j}}(x)\}$, 根据定理 3.14, $\lim\limits_{j\to\infty} m(\{x \in E : |f_{k_{i_j}}(x) - f(x)| > \varepsilon_0\}) = 0$, 这与 $(*)$ 矛盾, 故 $f_n(x) \Rightarrow f(x)$.

10. 设 $m(E) < \infty$, $f(x), f_1(x), f_2(x), \cdots, f_k(x), \cdots$ 是 E 上几乎处处有限的可测函数, 试证明 $\{f_k(x)\}$ 在 E 上依测度收敛于 $f(x)$ 的充分必要条件是: $\lim\limits_{k\to\infty} \inf\limits_{\alpha>0} \{\alpha + m(\{x \in E : |f_k(x) - f(x)| > \alpha\})\} = 0$.

"$\Rightarrow$": (法一) 假设 $\{f_k(x)\}$ 在 E 上依测度收敛于 $f(x)$, 那么 $\forall\, \varepsilon > 0, \alpha < \varepsilon/2$, $\exists\, N > 0$, $\forall\, k \ge N$, $m(\{x \in E : |f_k(x) - f(x)| > \alpha\}) < \varepsilon/2$, $\therefore$ $\alpha + m(\{x \in E : |f_k(x) - f(x)| > \alpha\}) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$, $\therefore$ $\inf\limits_{\alpha>0} \{\alpha + m(\{x \in E : |f_k(x) - f(x)| > \alpha\})\} < \varepsilon$, 即 $\lim\limits_{k\to\infty} \inf\limits_{\alpha>0} \{\alpha + m(\{x \in E : |f_k(x) - f(x)| > \alpha\})\} = 0$.

(法二)

$$
\begin{aligned}
& \lim_{k\to\infty} \inf_{\alpha>0} \{\alpha + m(\{x \in E : |f_k(x) - f(x)| > \alpha\})\} \\
\le\ & \inf_{\alpha>0} \lim_{k\to\infty} (\alpha + m(\{x \in E : |f_k(x) - f(x)| > \alpha\})) \\
=\ & \inf_{\alpha>0} \{\alpha + 0\} \\
=\ & \inf_{\alpha>0} \{\alpha\} \\
=\ & 0
\end{aligned}
$$

.

"$\Leftarrow$" 记 $b_k=\inf\limits_{\alpha>0}\{\alpha+m(\{x\in E:|f_k(x)-f(x)|>\alpha\})\}$, 假设 $\lim\limits_{k\to\infty}b_k=0$, 因为存在 $\alpha_k>0$, 使得 $b_k\le\alpha_k+m(\{x\in E:|f_k(x)-f(x)|>\alpha_k\})\le b_k+1/k$, 同时取极限得, $\lim\limits_{k\to\infty}\alpha_k=0$, $\lim\limits_{k\to\infty}m(\{x\in E:|f_k(x)-f(x)|>\alpha_k\})=0$. $\forall\,\varepsilon>0$, $\exists\,K_0>0$, $\forall\,k>K_0$, 有 $\alpha_k<\varepsilon$, 从而 $m(\{x\in E:|f_k(x)-f(x)|>\varepsilon\})\to 0(k\to\infty)$, 即 $\{f_k(x)\}$ 在 E 上依测度收敛于 $f(x)$.

11. 设 $f_n(x)$ 是 $[0,1]$ 上的递增函数 $(n=1,2,\cdots)$, 且 $f_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上依测度收敛于 $f(x)$, 试证明在 $f(x)$ 的连续点 x_0 上, $f_n(x_0)\to f(x_0)(n\to\infty)$.

证一：假设在 $f(x)$ 的连续点 x_0 上, $f_n(x_0)\nrightarrow f(x_0)(n\to\infty)$, 则 $\exists\,\varepsilon_0>0$, $\forall\,N>0$, $\exists\,n>N$, s.t. $|f_n(x_0)-f(x_0)|\ge 2\varepsilon_0$, $\therefore$ $f_n(x_0)-f(x_0)\ge 2\varepsilon_0$ 或 $f_n(x_0)-f(x_0)\le -2\varepsilon_0$. 因为 $f(x)$ 在 x_0 点连续, 所以对上面的 $\varepsilon_0>0$, $\exists\,\delta>0$, $\forall\,x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)\subset[0,1]$, $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon_0$.

(1) 若 $f_n(x_0)-f(x_0)\ge 2\varepsilon_0$, 则 $\forall\,x\in(x_0,x_0+\delta)$, 由于 f_n 在 $[0,1]$ 上递增, 从而 $f_n(x)-f(x_0)\ge f_n(x_0)-f(x_0)\ge 2\varepsilon_0$, 所以 $|f_n(x)-f(x)|\ge|f_n(x)-f(x_0)|-|f(x_0)-f(x)|>\varepsilon_0$, 所以 $(x_0,x_0+\delta)\subset\{x\in[0,1]:|f_n(x)-f(x)|>\varepsilon_0\}$, 所以 $m(\{x\in[0,1]:|f_n(x)-f(x)|>\varepsilon_0\})\ge\delta$.

(2) 若 $f_n(x_0)-f(x_0)\le -2\varepsilon_0$, 则 $\forall\,x\in(x_0-\delta,x_0)$, 由于 f_n 在 $[0,1]$ 上递增, 从而 $f_n(x)-f(x_0)\le f_n(x_0)-f(x_0)\le -2\varepsilon_0$, 所以 $|f_n(x)-f(x)|\ge|f_n(x)-f(x_0)|-|f(x_0)-f(x)|>\varepsilon_0$, 所以 $(x_0-\delta,x_0)\subset\{x\in[0,1]:|f_n(x)-f(x)|>\varepsilon_0\}$, 所以 $m(\{x\in[0,1]:|f_n(x)-f(x)|>\varepsilon_0\})\ge\delta$.

综上: $m(\{x\in[0,1]:|f_n(x)-f(x)|>\varepsilon_0\})\ge\delta$, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}m(\{x\in[0,1]:|f_n(x)-f(x)|>\varepsilon_0\})\ne 0$, 与 $f_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上依测度收敛于 $f(x)$ 矛盾, 所以在 $f(x)$ 的连续点 x_0 上, $f_n(x_0)\to f(x_0)(n\to\infty)$.

证二：$\because$ x_0 为 $f(x)$ 的连续点, $\therefore$ $\forall\,\varepsilon>0$, $\exists\,\delta>0$, $\forall\,x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$, $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon/18$. $\because$ $f_n\Rightarrow f$, $\therefore$ $\lim\limits_{n\to\infty}m(\{x\in[0,1]:|f_n(x)-f(x)|>\varepsilon/9\})<\delta/2$, $\therefore$ $\exists\,x_1\in(x_0-\delta,x_0),x_2\in(x_0,x_0+\delta)$, s.t. $|f_n(x_1)-f(x_1)|\le\varepsilon/9,|f_n(x_2)-f(x_2)|\le\varepsilon/9$, $\therefore$ $|f_n(x_1)-f_n(x_2)|\le|f_n(x_1)-f(x_1)|+|f_n(x_2)-f(x_2)|+|f(x_1)-f(x_2)|\le\varepsilon/3$; $\because f_n$ 在 $[0,1]$ 上递增, $\therefore$ $|f_n(x_1)-f_n(x_0)|\le|f_n(x_1)-f_n(x_2)|\le\varepsilon/3$, $\therefore$ $|f_n(x_0)-f(x_0)|\le|f_n(x_0)-f_n(x_1)|+|f_n(x_1)-f(x_1)|+|f(x_1)-f(x_0)|<\varepsilon$, $\therefore$ $f_n(x_0)\to f(x_0)(n\to\infty)$.

12. 设 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^1$, 且对任意的 $\varepsilon>0$, 存在开集 $G\subset\mathbb{R}^n,m(G)<\varepsilon$, 使得 $f\in C(\mathbb{R}^n\backslash G)$, 试证明 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的可测函数.

证: 由题意可知, 对任意 $1/n$, 存在开集 $G_n\subset\mathbb{R}^n$, 使得 $m(G_n)<1/n, f(x)\in C(\mathbb{R}^n\setminus G_n)$. 令 $G=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}G_n$, 则有 $m(G)=0$, 对于任意的实数 $t\in\mathbb{R}^1$, $\{x\in\mathbb{R}^n:f(x)>t\}=\{x\in G:f(x)>t\}\bigcup\{x\in\mathbb{R}^n\setminus G:f(x)>t\}=\{x\in G:f(x)>t\}\bigcup(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\{x\in\mathbb{R}^n\setminus G_n:f(x)>t\})$, $\because m^*(\{x\in G:f(x)>t\})\le m^*(G)=0$, $\therefore\{x\in G:f(x)>t\}$ 是零测集; 又 $\because f(x)\in C(\mathbb{R}^n\setminus G_n)$, $\therefore\{x\in\mathbb{R}^n\setminus G_n:f(x)>t\}$ 是可测集, 从而 $\{x\in\mathbb{R}^n:f(x)>t\}$ 是可测集, 故 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的可测函数.

13. 设 $\{f_k(x)\}$ 与 $\{g_k(x)\}$ 在 E 上都依测度收敛于零, 试证明 $\{f_k(x)\cdot g_k(x)\}$ 在 E 上依测度收敛于零.

证: 由 $\{x\in E:|f_k(x)\cdot g_k(x)|>\varepsilon\}\subset\{x\in E:|f_k(x)|>\sqrt{\varepsilon}\}\bigcup\{x\in E:|g_k(x)|>\sqrt{\varepsilon}\}$ 可知 $m(\{x\in E:|f_k(x)\cdot g_k(x)|>\varepsilon\})\le m(\{x\in E:|f_k(x)|>\sqrt{\varepsilon}\})+m(\{x\in E:|g_k(x)|>\sqrt{\varepsilon}\})$, 因为 $\{f_k(x)\}$ 与 $\{g_k(x)\}$ 在 E 上都依测度收敛于零, 不等式两边同时取极限得: $\lim\limits_{k\to\infty}m(\{x\in E:|f_k(x)\cdot g_k(x)|>\varepsilon\})=0$, 即 $\{f_k(x)\cdot g_k(x)\}$ 在 E 上依测度收敛于零.

14. 设 $\{f_k(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上依测度收敛于 $f(x)$, $g(x)$ 是 $\mathbb{R}^1$ 上的连续函数, 试证明 $\{g[f_k(x)]\}$ 在 $[a,b]$ 上依测度收敛于 $g[f(x)]$. 若将 $[a,b]$ 改为 $[0,\infty)$, 结论还成立吗?

证: 由复合函数的可测性易知: $g[f_k(x)], k=1,2,\cdots,g[f(x)]$ 均为 $[a,b]$ 上的可测函数; 任取 $\{g[f_k(x)]\}$ 的一个子列 $\{g[f_{k_i}(x)]\}$, 因为 $\{f_{k_i}(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上依测度收敛于 $f(x)$, 所以存在子列 $\{f_{k_{i_j}}(x)\}$, s.t. $\lim\limits_{j\to\infty} f_{k_{i_j}}(x)=f(x)$; 又因为 $g(x)$ 是 $\mathbb{R}^1$ 上的连续函数, 所以 $\lim\limits_{j\to\infty} g(f_{k_{i_j}}(x))=g(f(x))$, 由习题 9 的结论, $\{g[f_k(x)]\}$ 在 $[a,b]$ 上依测度收敛于 $g[f(x)]$.

若将 $[a,b]$ 改为 $[0,\infty)$, 结论不再成立, 反例:

$$f_n(x)=\begin{cases} x, & x\in[0,n) \\ x+\frac{1}{x}, & x\in[n,+\infty) \end{cases}, \qquad f(x)=x, \qquad g(x)=x^2,$$

则 $f_n(x)\Rightarrow f(x)$, 但 $g(f_n(x))\not\Rightarrow g(f(x))$.

15. 设有定义在可测集 $E\subset\mathbb{R}^n$ 上的函数 $f(x)$, 且对任给的 $\delta>0$, 存在 E 中的闭集 $F, m(E\setminus F)<\delta$, 使得 $f(x)$ 在 F 上连续, 试证明 $f(x)$ 是 E 上的可测函数.

证一 : 由题意可知, 对任意 $1/n$, 存在 E 中的闭集 $F_n, m(E\setminus F_n)<1/n$, 使得 $f(x)$ 在 F_n 上连续. 令 $F=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n, E_0=E\backslash F$, 则有 $m(E_0)=m(E\backslash F)\le m(E\backslash F_n)<1/n, n=1,2,\cdots$, 所以 $m(E_0)=0$; 对于任意的实数 $t\in\mathbb{R}^1, \{x\in E: f(x)>t\}=\{x\in E_0: f(x)>t\}\bigcup\{x\in F: f(x)>t\}=\{x\in E_0: f(x)>t\}\bigcup(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\{x\in F_n: f(x)>t\})$, $\because m^*(\{x\in E_0: f(x)>t\})\le m^*(E_0)=0$, $\therefore \{x\in E_0: f(x)>t\}$ 是零测集; 又 $\because f$ 在 F_n 上连续, $\therefore \{x\in F_n: f(x)>t\}$ 是可测集, 从而 $\{x\in E: f(x)>t\}$ 是可测集, 故 $f(x)$ 是 E 上的可测函数.

证二 : 由题意可知, 对任意 $1/n$, 存在 E 中的闭集 $F_n, m(E\setminus F_n)<1/n$, 使得 $f(x)$ 在 F_n 上连续, 由延拓定理, 存在 $\mathbb{R}^n$ 上的连续函数 $f_n(x)$, 使得 $f_n(x)=f(x),\ x\in F_n, n=1,2,\cdots$, 易知 $\{x\in E: |f_n(x)-f(x)|>\varepsilon\}\subset E\setminus F_n$, 则 $m^*(\{x\in E: |f_n(x)-f(x)|>\varepsilon\})\le m(E\setminus F_n)<1/n$, 不等式两边同时取极限得: $\lim\limits_{n\to\infty} m^*(\{x\in E: |f_n(x)-f(x)|>\varepsilon\})=0$, 由 16 题的结论, $f(x)$ 是 E 上的可测函数.

16. 设 $\{f_n(x)\}$ 是 $[a,b]$ 上的可测函数列, $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的实值函数. 若对任给的 $\varepsilon>0$, 都有 $\lim\limits_{n\to\infty} m^*(\{x\in[a,b]: |f_n(x)-f(x)|>\varepsilon\})=0$, 试问 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的可测函数吗?

证一 : $\forall\, i,j\in\mathbb{N}, \forall\,\varepsilon>0$, $\because \{x\in[a,b]: |f_i(x)-f_j(x)|>\varepsilon\}\subset\{x\in[a,b]: |f_i(x)-f(x)|>\varepsilon/2\}\bigcup\{x\in[a,b]: |f_j(x)-f(x)|>\varepsilon/2\}$, $\therefore\ m(\{x\in[a,b]: |f_i(x)-f_j(x)|>\varepsilon\})\le m^*(\{x\in[a,b]: |f_i(x)-f(x)|>\varepsilon/2\})+m^*(\{x\in[a,b]: |f_j(x)-f(x)|>\varepsilon/2\})$, 不等式两边取极限得: $\lim\limits_{i,j\to\infty} m(\{x\in[a,b]: |f_i(x)-f_j(x)|>\varepsilon\})=0$, 于是知 $\{f_n(x)\}$ 为依测度收敛的 Cauchy 列, 由定理 3.16, 存在 $[a,b]$ 上几乎处处有限的可测函数 $g(x)$ 使得 $f_n(x)\Rightarrow g(x)$ 于 $[a,b]$; 又 $\forall\,\varepsilon>0$, $\{x\in[a,b]: |f(x)-g(x)|>\varepsilon\}\subset\{x\in[a,b]: |f(x)-f_n(x)|>\varepsilon/2\}\bigcup\{x\in[a,b]: |f_n(x)-g(x)|>\varepsilon/2\}$,$\therefore$ $m^*(\{x\in[a,b]: |f(x)-g(x)|>\varepsilon\})\le m^*(\{x\in[a,b]: |f(x)-f_n(x)|>\varepsilon/2\})+m^*(\{x\in[a,b]: |f_n(x)-g(x)|>\varepsilon/2\})$, 不等式两边同时取极限可得: $m^*(\{x\in[a,b]: |f(x)-g(x)|>\varepsilon\})=0$, $\therefore\ m^*(\{x\in[a,b]: |f(x)-g(x)|>0\})=m^*(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\{x\in[a,b]: |f(x)-g(x)|>1/k\})\le\sum\limits_{k=1}^{\infty} m^*(\{x\in[a,b]: |f(x)-g(x)|>1/k\})=0$, $\therefore f(x)=g(x)$, a.e. 于 $[a,b]$, 从而 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的可测函数.

证二 : 记 $E_{n_k}(k)=\{x\in[a,b]: |f_{n_k}(x)-f(x)|>\frac{1}{k}\}$, 则由题意可知, $\forall\, k\in\mathbb{N}$, $\exists\, n_k>0$, s.t. $m^*(E_{n_k}(k)) < \frac{1}{2^k}$. 令 $E = \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{k=N}^{\infty} E_{n_k}(k)$, 则 $m(E) = 0$. $\forall\, x \in [a,b] \setminus E = \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{k=N}^{\infty} \{x \in [a,b] : |f_{n_k}(x) - f(x)| \le \frac{1}{k}\}$, $\exists N_0 > 0$, s.t. $|f_{n_k}(x) - f(x)| \le \frac{1}{k}$, $\forall\, k \ge N_0$, 所以 $\lim\limits_{k\to\infty} f_{n_k}(x) = f(x)$, *a.e.* $[a,b]$, 所以 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的可测函数.

17. 设 $f(x), f_k(x)(k = 1,2,\cdots)$ 是 $E \subset \mathbb{R}^1$ 上实值可测函数. 若对任给 $\varepsilon > 0$, 必有 $\lim\limits_{j\to\infty} m(\bigcup_{k=j}^{\infty} \{x : |f_k(x) - f(x)| > \varepsilon\}) = 0$. 试证明对任给 $\delta > 0$, 存在 $e \subset E$ 且 $m(e) < \delta$, 使得 $f_k(x)$ 在 $E \setminus e$ 上一致收敛于 $f(x)$.

证: 证明方法与书 136 页证明定理 3.12 的方法一致.

习题 4

第一组

1. 设 $f(x)$ 是 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上几乎处处大于零的可测函数, 且满足 $\int_E f(x)\mathrm{d}x = 0$, 试证明 $m(E) = 0$.

反证: 假设 $m(E) > 0$, 记 $F = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\{x \in E : f(x) > 1/n\} \triangleq \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$, 则 $E = (E \setminus F)\bigcup F$, 由 $m(E \setminus F) = 0$ 知必存在某个 n_0, 使得 $m(E_{n_0}) > 0$. 此时有: $0 = \int_E f(x)\mathrm{d}x \geq \int_{E_{n_0}} f(x)\mathrm{d}x \geq \frac{1}{n_0}m(E_{n_0})$, 得 $m(E_{n_0}) = 0$, 矛盾. 从而假设不成立, 即 $m(E) = 0$.

2. 设 $f(x)$ 在 $[0,\infty)$ 上非负可积, $f(0) = 0$ 且 $f'(0)$ 存在, 试证明积分 $\int_{[0,\infty)} \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x$ 存在.

证: 由题意得: $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$, 从而 $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$, $\forall\, x < \delta$, $\frac{f(x)}{x} \leq |f'(0)| + \varepsilon$, 所以 $\int_0^{\delta} \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x \leq \delta(|f'(0)| + \varepsilon) < \infty$; 再由 $f(x)$ 在 $[0,\infty)$ 上非负可积可得: $\int_{\delta}^{\infty} \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x \leq \frac{1}{\delta}\int_{\delta}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x < \infty$, 综合即得 $\int_0^{\infty} \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x = \int_0^{\delta} \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x + \int_{\delta}^{\infty} \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x < \infty$, 即积分存在.

3. 设 $f(x)$ 是 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上非负可测函数. 若存在 $E_k \subset E$, $m(E \setminus E_k) < 1/k(k = 1, 2, \cdots)$, 使得极限 $\lim\limits_{k\to\infty}\int_{E_k} f(x)\mathrm{d}x$ 存在, 试证明 $f(x)$ 在 E 上可积.

证: 令 $F = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k$, $f_k(x) = f(x)\chi_{E_k}(x)$, 则 $m(E \setminus F) = 0$, $f_k \Rightarrow f$ 于 E. 由 Riesz 定理, 存在子序列 $\{f_{k_i}\}$, 使得 $\lim\limits_{i\to\infty} f_{k_i}(x) = f(x)$ a.e. $x \in E$. 于是由 Fatou 引理, $\int_F f(x)\mathrm{d}x = \int_F \lim\limits_{i\to\infty} f_{k_i}(x)\mathrm{d}x \leq \varliminf\limits_{i\to\infty}\int_F f_{k_i}(x)\mathrm{d}x = \varliminf\limits_{i\to\infty}\int_{E_{k_i}} f(x)\mathrm{d}x$, 由极限 $\lim\limits_{k\to\infty}\int_{E_k} f(x)\mathrm{d}x$ 存在知 $\int_F f(x)\mathrm{d}x < \infty$, 又 $m(E \setminus F) = 0$, 故 $\int_E f(x)\mathrm{d}x = \int_{E\setminus F} f(x)\mathrm{d}x + \int_F f(x)\mathrm{d}x < \infty$, 即 $f(x)$ 在 E 上可积.

4. 设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}^1$ 上非负可积函数, 令 $F(x) = \int_{(-\infty,x]} f(t)\mathrm{d}t$, $x \in \mathbb{R}^1$. 若 $F \in L(\mathbb{R}^1)$, 试证明 $\int_{\mathbb{R}^1} f(x)\mathrm{d}x = 0$.

证: 由 $f(x) \in L(\mathbb{R}^1)$ 可知: $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, N > 0$, s.t. $\int_{\{x:|x|\geq N\}} F(x)\mathrm{d}x < \varepsilon$; 又因为 $f \geq 0$, 所以 F 是 $\mathbb{R}^1$ 上的增函数, 从而 $\forall\, y \geq N$ 都有: $F(y) = \int_y^{y+1} F(y)\mathrm{d}x \leq \int_y^{y+1} F(x)\mathrm{d}x \leq \int_{\{x:|x|\geq N\}} F(x)\mathrm{d}x < \varepsilon$, 由此得 $\lim\limits_{y\to\infty} F(y) = 0$, 即 $\int_{\mathbb{R}^1} f(x)\mathrm{d}x = 0$.

5. 设 $f_k(x)(k = 1, 2, \cdots)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上非负可积函数列, 若对任一可测集 $E \subset \mathbb{R}^n$, 都有 $\int_E f_k(x)\mathrm{d}x \leq \int_E f_{k+1}(x)\mathrm{d}x$, 试证明 $\lim\limits_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x = \int_E \lim\limits_{k\to\infty} f_k(x)\mathrm{d}x$.

证: 令 $E_k = \{x \in \mathbb{R}^n : f_k(x) > f_{k+1}(x)\}$ $(k = 1, 2, \cdots)$, 易知 E_k 可测. 由题意 $0 \leq \int_{E_k}(f_k(x) - f_{k+1}(x))\mathrm{d}x \leq 0$, 因此 $\int_{E_k}(f_k(x) - f_{k+1}(x))\mathrm{d}x = 0$, 又 $f_k(x) - f_{k+1}(x) > 0$ 于 E_k, 故 $m(E_k) = 0$. 令 $F = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k$, 则 $m(F) = 0$, 并且在 $E \setminus F$ 上, $f_k(x) \leq f_{k+1}(x)$, $\forall\, k$. 由 Levi 定理, $\lim\limits_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{k\to\infty}\int_{E\setminus F} f_k(x)\mathrm{d}x = \int_{E\setminus F}\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x)\mathrm{d}x = \int_E \lim\limits_{k\to\infty} f_k(x)\mathrm{d}x$.

6. 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是 $E \subset \mathbb{R}^1$ 上非负可测函数, 且 $m(E) = 1$. 若有 $f(x)g(x) \geq 1, x \in E$, 试证明 $(\int_E f(x)\mathrm{d}x)(\int_E g(x)\mathrm{d}x) \geq 1$.

证: 由 Hölder 不等式易知 $(\int_E \sqrt{f(x)g(x)}\mathrm{d}x)^2 \leq \int_E f(x)\mathrm{d}x\int_E g(x)\mathrm{d}x$, 而 $f(x)g(x) \geq 1, x \in E$, 且 $m(E) = 1$, 于是 $\int_E \sqrt{f(x)g(x)}\mathrm{d}x \geq 1$, 故 $(\int_E f(x)\mathrm{d}x)(\int_E g(x)\mathrm{d}x) \geq 1$.

7. 假设有定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的函数 $f(x)$, 如果对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $g, h \in L(\mathbb{R}^n)$, 满

足 $g(x)\le f(x)\le h(x)(x\in\mathbb{R}^n)$, 并且使得 $\int_{\mathbb{R}^n}[h(x)-g(x)]\mathrm{d}x<\varepsilon$, 试证明 $f\in L(\mathbb{R}^n)$.

证: 由题意知, $\forall\ k\in\mathbb{N}$, $\exists$ 可积函数 $g_k(x)$ 和 $h_k(x)$, s.t. $g_k(x)\le f(x)\le h_k(x)$, 且 $\int_{\mathbb{R}^n}[h_k(x)-g_k(x)]\mathrm{d}x<1/k$, 于是 $\{h_k-g_k\}$ 为非负可积函数列, 且 $\lim\limits_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n}[h_k(x)-g_k(x)]\mathrm{d}x=0$, 因此 $h_k(x)-g_k(x)\Rightarrow 0$. 由 Riesz 定理, 存在子列 $\{h_{k_j}-g_{k_j}\}$, 使得 $\lim\limits_{j\to\infty}[h_{k_j}(x)-g_{k_j}(x)]=0$ a.e. $x\in\mathbb{R}^n$. 因为 $g_{k_j}(x)\le f(x)\le h_{k_j}(x)$, 所以 $h_{k_j}(x)-f(x)\le h_{k_j}(x)-g_{k_j}(x)$, 不等式两边同时取极限, 得 $\lim\limits_{j\to\infty}h_{k_j}(x)=f(x)$ a.e. $x\in\mathbb{R}^n$, 从而 $f(x)$ 为 $\mathbb{R}^n$ 上的可测函数; 又因为 $|f(x)|\le\max\{|g_k(x)|,|h_k(x)|\}\le|g_k(x)|+|h_k(x)|$, 由 g_k,h_k 的可积性知 $|f|$ 为 $\mathbb{R}^n$ 上的可积函数, 从而 f 为 $\mathbb{R}^n$ 上的可积函数.

8. 设 $\{E_k\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中测度有限的可测集列, 且有 $\lim\limits_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n}|\chi_{E_k}(x)-f(x)|\mathrm{d}x=0$, 试证明存在可测集 E, 使得 $f(x)=\chi_E(x)$, a.e. $x\in\mathbb{R}^n$.

证: 由题意知 $\chi_{E_k}\Rightarrow f$, 根据 Riesz 定理, 存在子列 $\{E_{k_j}\}$, 使得 $\lim\limits_{j\to\infty}\chi_{E_{k_j}}(x)=f(x)$ a.e. $x\in\mathbb{R}^n$, 令 $E=\lim\limits_{j\to\infty}E_{k_j}$, 则 $f(x)=\chi_E(x)$, a.e. $x\in\mathbb{R}^n$.

9. 设 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的递增函数, 试证明对 $E\subset[0,1]$, $m(E)=t$, 有 $\int_{[0,t]}f(x)\mathrm{d}x\le\int_E f(x)\mathrm{d}x$.

证: 由题意可得 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可积. 令 $E_1=[0,t]\bigcap E$, $E_2=[0,t]\bigcap E^c$, $E_3=[t,1]\bigcap E$, 则 $[0,t]=E_1\bigcup E_2$, $E=E_1\bigcup E_3$; 因为 $m([0,t])=m(E)=t$, 所以 $m(E_2)=m(E_3)$, 又因为 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的递增函数, 所以 $\int_{E_2}f(x)\mathrm{d}x\le f(t)m(E_2)=f(t)m(E_3)\le\int_{E_3}f(x)\mathrm{d}x$, 故 $\int_{[0,t]}f(x)\mathrm{d}x\le\int_E f(x)\mathrm{d}x$.

10. 设 $f\in L(\mathbb{R}^n)$, $E\subset\mathbb{R}^n$ 是紧集, 试证明 $\lim\limits_{|y|\to\infty}\int_{E+\{y\}}|f(x)|\mathrm{d}x=0$.

证: 由 $E\subset\mathbb{R}^n$ 是紧集可知 E 是有界闭集, 故存在 $M>0$, 使得 $|x|\le M$, $\forall\ x\in E$; 又因为 $f\in L(\mathbb{R}^n)$, 所以 $\forall\ \varepsilon>0$, $\exists\ N>0$, s.t. $\int_{\{x:|x|\ge N\}}|f(x)|\mathrm{d}x<\varepsilon$. 取 $N_1=N+2M$, 则当 $|y|>N_1$ 时, $E+\{y\}\subset\{x:|x|\ge N\}$, 故 $\int_{E+\{y\}}|f(x)|\mathrm{d}x<\varepsilon$, 从而 $\lim\limits_{|y|\to\infty}\int_{E+\{y\}}|f(x)|\mathrm{d}x=0$.

11. 证明下列等式:

(1) $\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{(0,\infty)}\frac{x^{\alpha-1}}{e^x-1}\mathrm{d}x=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^{-\alpha}\quad(\alpha>1)$;

(2) $\int_{(0,\infty)}\frac{\sin ax}{e^x-1}\mathrm{d}x=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a}{n^2+a^2}\quad(a>0)$.

证: (1). 注意到 $\frac{x^{\alpha-1}}{e^x-1}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{\alpha-1}e^{-nx}$, 由非负可测函数的逐项积分定理可知: 原式 $=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_{(0,\infty)}x^{\alpha-1}e^{-nx}\mathrm{d}x=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^{-\alpha}$;

(2). 注意到 $\frac{\sin ax}{e^x-1}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^{-nx}\sin ax$, $e^{-nx}\sin ax\in L((0,\infty))$, 以及 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_{(0,\infty)}|e^{-nx}\sin ax|\mathrm{d}x\le\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a}{n^2}<\infty$, 由可积函数的逐项积分定理, 原式 $=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_{(0,\infty)}e^{-nx}\sin ax\mathrm{d}x=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a}{n^2+a^2}$.

12. 设 $f\in L(\mathbb{R}^1), a>0$, 试证明级数 $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}f(\frac{x}{a}+n)$ 在 $\mathbb{R}^1$ 几乎处处绝对收敛, 且其和函数 $S(x)$ 以 a 为周期, 且 $S\in L([0,a])$.

证: 由 $S(x+a)=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}f(\frac{x+a}{a}+n)=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}f(\frac{x}{a}+1+n)=S(x)$, 知 $S(x)$ 以 a 为周期, 故只需在 $[0,a]$ 上考察相应问题即可. 由非负可测函数的逐项积分定理, $\int_0^a\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}|f(\frac{x}{a}+n)|\mathrm{d}x=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}\int_0^a|f(\frac{x}{a}+n)|\mathrm{d}x=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}a\int_n^{n+1}|f(x)|\mathrm{d}x=a\int_{\mathbb{R}^1}|f(x)|\mathrm{d}x<\infty$, 故 $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}f(\frac{x}{a}+n)$ 在 $\mathbb{R}^1$ 几乎处处绝对收敛, 且 $S\in L([0,a])$.

13. 设 $f\in L(\mathbb{R}^1),p>0$, 试证明 $\lim\limits_{n\to\infty}n^{-p}f(nx)=0$, a.e. $x\in\mathbb{R}^1$.

证: 考虑级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{f(nx)}{n^p}$, 由非负可测函数的逐项积分定理, $\int_{\mathbb{R}^1}\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\frac{f(nx)}{n^p}|\mathrm{d}x=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_{\mathbb{R}^1}\frac{|f(nx)|}{n^p}\mathrm{d}x$ $=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{p+1}}\int_{\mathbb{R}^1}|f(x)|\mathrm{d}x=c\int_{\mathbb{R}^1}|f(x)|\mathrm{d}x<\infty$, 所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\frac{f(nx)}{n^p}|$ 在 $\mathbb{R}^1$ 上可积, 从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{f(nx)}{n^p}$ 在 $\mathbb{R}^1$ 上可积, 得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{f(nx)}{n^p}$ 几乎处处有限, 因此 $\lim\limits_{n\to\infty}n^{-p}f(nx)=0$, a.e. $x\in\mathbb{R}^1$.

14. 设 $x^sf(x),x^tf(x)$ 在 $(0,\infty)$ 上可积, 其中 $s<t$, 试证明积分 $\int_{[0,\infty)}x^uf(x)\mathrm{d}x,\quad u\in(s,t)$ 存在且是 $u\in(s,t)$ 的连续函数.

证: 因为 $\int_0^\infty|x^uf(x)|\mathrm{d}x\le\int_0^1|x^sf(x)|\mathrm{d}x+\int_1^\infty|x^tf(x)|\mathrm{d}x$, 由 $x^sf(x),x^tf(x)$ 在 $(0,\infty)$ 上可积可知, $\int_{[0,\infty)}x^uf(x)\mathrm{d}x$ 存在; 对于任意 $u_n\to u(n\to\infty)$, 由 $\int_0^\infty|x^{u_n}f(x)|\mathrm{d}x\le\int_0^1|x^sf(x)|\mathrm{d}x+\int_1^\infty|x^tf(x)|\mathrm{d}x<\infty$, 令 $F(x)=|x^sf(x)|+|x^tf(x)|$, 则 $|x^{u_n}f(x)|\le F(x)\in L((0,\infty))$, 由 Lebesgue 控制收敛定理, $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{[0,\infty)}x^{u_n}f(x)\mathrm{d}x=\int_{[0,\infty)}\lim\limits_{n\to\infty}x^{u_n}f(x)\mathrm{d}x=\int_{[0,\infty)}x^uf(x)\mathrm{d}x$, 由海涅定理, $\int_{[0,\infty)}x^uf(x)\mathrm{d}x$ 是 $u\in(s,t)$ 的连续函数.

15. 设 $f(x)$ 是 $(0,1)$ 上的正值可测函数, 若存在常数 c 使得 $\int_{[0,1]}[f(x)]^n\mathrm{d}x=c\quad(n=1,2,\cdots)$, 试证明存在可测集 $E\subset(0,1)$, 使得 $f(x)$ 几乎处处等于 $\chi_E(x)$. 再问若 $f(x)$ 不是非负的又如何?

证: 记 $E_1=\{x\in(0,1):f(x)>1\}$, 则 $m(E_1)=0$, 否则, 若 $m(E_1)>0$, 则 $\int_{E_1}[f(x)]^n\mathrm{d}x\to\infty(n\to\infty)$, 与积分为常数矛盾, 所以 $f(x)\le1$, a.e. $x\in(0,1)$. 记 $E_2=\{x\in(0,1):0<f(x)<1\}$, 则 $m(E_2)=0$, 否则, 若 $m(E_2)>0$, 则 $\int_{E_2}[f(x)]^n\mathrm{d}x<\int_{E_2}[f(x)]^{n-1}\mathrm{d}x$, $n=1,2,\cdots$, 与积分为常数矛盾, 所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上几乎处处等于 0 或 1, 令 $E=\{x\in(0,1):f(x)=1\}$, 则 $f(x)$ 几乎处处等于 $\chi_E(x)$.

若 $f(x)$ 不是非负的, 结论仍然成立. 此时 $f^2(x)\ge0$, 且 $\int_{[0,1]}[f^2(x)]^n\mathrm{d}x=c(n=1,2,\cdots)$, 对于 $f^2(x)$ 有 $f^2(x)=\chi_E(x)$, a.e. $x\in(0,1)$. 记 $E_0=\{x\in(0,1):f^2(x)\ne\chi_E(x)\}$, 则 $m(E_0)=0$, $\forall\ x\in(0,1)\setminus E_0$, $f(x)=0$ 或 1 或 -1, 记 $E_1=\{x\in(0,1)\setminus E_0:f(x)=0\}$, $E_2=\{x\in(0,1)\setminus E_0:f(x)=1\}$, $E_3=\{x\in(0,1)\setminus E_0:f(x)=-1\}$, 则 $\int_{[0,1]}f^2(x)\mathrm{d}x=\int_{E_0}f^2(x)\mathrm{d}x+\int_{E_1}f^2(x)\mathrm{d}x+\int_{E_2}f^2(x)\mathrm{d}x+\int_{E_3}f^2(x)\mathrm{d}x=m(E_2)+m(E_3)=c$, 同理, $\int_{[0,1]}f(x)\mathrm{d}x=m(E_2)-m(E_3)=c$, 所以, $m(E_3)=0$, 所以 $\forall\ x\in(0,1)\setminus(E_0\bigcup E_3)$, $f(x)=f^2(x)=\chi_E(x)$.

16. 设 $f\in L([0,1])$, 试证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{[0,1]}n\ln(1+\frac{|f(x)|^2}{n^2})\mathrm{d}x=0$.

证: 记 $f_n(x)=n\ln(1+\frac{|f(x)|^2}{n^2})$, 则 f_n 在 $[0,1]$ 上可测, 因为当 $x\ge0$ 时, $\ln(1+x^2)\le x$, 所以 $f_n(x)\le n\cdot\frac{|f(x)|}{n}=|f(x)|$, 又因为 $f\in L([0,1])$, 所以 $f_n\in L([0,1])$, 由 Lebesgue 控制收敛定理, $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{[0,1]}n\ln(1+\frac{|f(x)|^2}{n^2})\mathrm{d}x=\int_{[0,1]}\lim\limits_{n\to\infty}n\ln(1+\frac{|f(x)|^2}{n^2})\mathrm{d}x=0$.

17. 设 $E_1 \supset E_2 \supset \cdots \supset E_k \supset \cdots, E = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} E_k, f \in L(E_k)(k = 1, 2, \cdots)$, 试证明 $\lim\limits_{k\to\infty} \int_{E_k} f(x)\mathrm{d}x = \int_E f(x)\mathrm{d}x$.

证: 令 $f_k(x) = f(x)\chi_{E_k}(x)$, 由集合的递减性可知, $\lim\limits_{n\to\infty} f_k(x) = f(x)\chi_E(x)$, 且 $|f_k(x)| \le |f_1(x)|, \forall\, k \in \mathbb{N}$; 因为 $f_1(x)$ 是 E_1 上的可积函数, 由 Lebesgue 控制收敛定理, $\lim\limits_{k\to\infty} \int_{E_k} f(x)\mathrm{d}x$ $= \lim\limits_{k\to\infty} \int_{E_1} f_k(x)\mathrm{d}x = \int_{E_1} \lim\limits_{k\to\infty} f_k(x)\mathrm{d}x = \int_{E_1} f(x)\chi_E(x)\mathrm{d}x = \int_E f(x)\mathrm{d}x$.

18. 设 $f \in L(E)$ 且 $f(x) > 0 (x \in E)$, 试证明 $\lim\limits_{k\to\infty} \int_E [f(x)]^{1/k}\mathrm{d}x = m(E)$.

证: 记 $f_k(x) = [f(x)]^{1/k}$; 因为 $f \in L(E)$, 所以 $f(x) < \infty$, a.e. $x \in E$. 令 $E_0 = \{x \in E : f(x) = \infty\}$, $E_1 = \{x \in E : 1 < f(x) < \infty\}$, $E_2 = \{x \in E : 0 < f(x) \le 1\}$, 则 $m(E_0) = 0$, $m(E_1) + m(E_2) = m(E)$. $\forall\, x \in E_1$, $\{f_k(x)\}$ 单调递减趋向于 1, 因为 $f_1 = f \in L(E)$, 由 Lebesgue 控制收敛定理, $\lim\limits_{k\to\infty} \int_{E_1} [f(x)]^{1/k}\mathrm{d}x = \int_{E_1} \lim\limits_{k\to\infty} [f(x)]^{1/k}\mathrm{d}x = m(E_1)$; $\forall\, x \in E_2$, $\{f_k(x)\}$ 单调递增趋向于 1, 由 Levi 定理, $\lim\limits_{k\to\infty} \int_{E_2} [f(x)]^{1/k}\mathrm{d}x = \int_{E_2} \lim\limits_{k\to\infty} [f(x)]^{1/k}\mathrm{d}x = m(E_2)$, 所以, $\lim\limits_{k\to\infty} \int_E [f(x)]^{1/k}\mathrm{d}x = \lim\limits_{k\to\infty} \int_{E_1} [f(x)]^{1/k}\mathrm{d}x + \lim\limits_{k\to\infty} \int_{E_2} [f(x)]^{1/k}\mathrm{d}x = m(E_1) + m(E_2) = m(E)$.

19. 设 $\{f_n(x)\}$ 是 $[0, 1]$ 上的非负可积函数列, 且 $f_n(x)$ 在 $[0, 1]$ 上依测度收敛于 $f(x)$. 若有 $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{[0,1]} f_n(x)\mathrm{d}x = \int_{[0,1]} f(x)\mathrm{d}x$, 试证明对 $[0, 1]$ 中任一可测子集, 有 $\lim\limits_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\mathrm{d}x = \int_E f(x)\mathrm{d}x$.

证: 加一个条件: $\int_{[0,1]} f(x)\mathrm{d}x < \infty$. 由书 187 页的注可知: $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{[0,1]} |f_n(x) - f(x)|\mathrm{d}x = 0$. 于是, 对任意可测子集, 有: $0 \le |\int_E f_n(x)\mathrm{d}x - \int_E f(x)\mathrm{d}x| \le \int_E |f_n(x) - f(x)|\mathrm{d}x \le \int_{[0,1]} |f_n(x) - f(x)|\mathrm{d}x \to 0 (n \to \infty)$, 所以, $\lim\limits_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\mathrm{d}x = \int_E f(x)\mathrm{d}x$.

20. 设 $\{f_k(x)\}$ 是 E 上非负可积函数列, 且 $f_k(x)$ 在 E 上几乎处处收敛于 $f(x) \equiv 0$. 若有 $\int_E \max\{f_1(x), f_2(x), \cdots, f_k(x)\}\mathrm{d}x \le M\ (k = 1, 2, \cdots)$, 试证明 $\lim\limits_{k\to\infty} \int_E f_k(x)\mathrm{d}x = 0$.

证: 记 $g_k(x) = \max\{f_1(x), f_2(x), \cdots, f_k(x)\}$, $g(x) = \sup\limits_{k\ge1} f_k(x)$, 则 $g_k(x), g(x)$ 非负可测, 且 $\lim\limits_{k\to\infty} g_k(x) = g(x)$, 由 Fatou 引理, $\int_E g(x)\mathrm{d}x = \int_E \lim\limits_{k\to\infty} g_k(x)\mathrm{d}x \le \underline{\lim}_{k\to\infty} \int_E g_k(x)\mathrm{d}x \le M$, 所以 $g \in L(E)$; 又因为 $f_k(x) \le g(x)$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x) = 0$, a.e. $x \in E$, 由 Lebesgue 控制收敛定理, $\lim\limits_{k\to\infty} \int_E f_k(x)\mathrm{d}x = \int_E \lim\limits_{k\to\infty} f_k(x)\mathrm{d}x = 0$.

21. 设 $\{f_k(x)\}$ 是 E 上可测函数列, $g(x)$ 是 E 上的正值可积函数. 若 $f_k(x) \ge -g(x)\ (x \in E, k = 1, 2, \cdots)$, 试证明 $\int_E \underline{\lim}_{k\to\infty} f_k(x)\mathrm{d}x \le \underline{\lim}_{k\to\infty} \int_E f_k(x)\mathrm{d}x$.

证: 需要用一个结论: 若 f 在 E 上积分存在, g 在 E 上可积, 则 $f + g$ 在 E 上积分存在, 且 $\int_E [f(x) + g(x)]\mathrm{d}x = \int_E f(x)\mathrm{d}x + \int_E g(x)\mathrm{d}x$. $\because\ f_k(x) \ge -g(x)$ 且 $g(x) > 0$, $\therefore\ f_k^-(x) \le g(x)$, $(\underline{\lim}_{k\to\infty} f_k(x))^- \le g(x)$, 又 $\because\ g \in L(E)$, $\therefore\ \int_E f_k^-(x)\mathrm{d}x < \infty$, $\int_E (\underline{\lim}_{k\to\infty} f_k(x))^-\mathrm{d}x < \infty$, 故 $f_k(x)$, $\underline{\lim}_{k\to\infty} f_k(x)$ 在 E 上积分存在; 由 Fatou 引理, $\int_E \underline{\lim}_{k\to\infty} [f_k(x) + g(x)]\mathrm{d}x \le \underline{\lim}_{k\to\infty} \int_E [f_k(x) + g(x)]\mathrm{d}x$, 利用证明开始所列结论, $\int_E \underline{\lim}_{k\to\infty} f_k(x)\mathrm{d}x + \int_E g(x)\mathrm{d}x \le \underline{\lim}_{k\to\infty} \int_E f_k(x)\mathrm{d}x$ $+ \int_E g(x)\mathrm{d}x$, $\because\ \int_E g(x)\mathrm{d}x < \infty$, $\therefore\ \int_E \underline{\lim}_{k\to\infty} f_k(x)\mathrm{d}x \le \underline{\lim}_{k\to\infty} \int_E f_k(x)\mathrm{d}x$.

22. 试证明: $\int_{[0,\infty)} e^{-x^2} \cdot \cos(2xt)\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-t^2}$, $t \in \mathbb{R}^1$.

证: 记 $I(t) = \int_{[0,\infty)} e^{-x^2} \cdot \cos(2xt)\mathrm{d}x$, 由积分号下求导 (条件验证略), $\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = \int_{[0,\infty)} (-2x)e^{-x^2} \cdot$

$\sin(2xt)\mathrm{d}x = -2tI(t)$, 于是, $\frac{\mathrm{d}I}{I(t)} = -2t\mathrm{d}t$, 等式两边同时对 t 积分, $\ln I(t) = -t^2 + c$, $I(t) = c \cdot e^{-t^2}$, 又 $t = 0$ 时, $I(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, 于是得到 $c = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, 从而 $I(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-t^2}$.

23. 设 $f \in L(\mathbb{R}^n)$, $f_k \in L(\mathbb{R}^n)(k = 1, 2, \cdots)$, 且对于任一可测集 $E \subset \mathbb{R}^n$, 有 $\int_E f_k(x)\mathrm{d}x \leq \int_E f_{k+1}(x)\mathrm{d}x$ $(k = 1, 2, \cdots)$, $\lim\limits_{k\to\infty} \int_E f_k(x)\mathrm{d}x = \int_E f(x)\mathrm{d}x$, 试证明 $\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$, a.e. $x \in \mathbb{R}^n$.

证: 类似第 5 题可知, $f_k(x) \leq f_{k+1}(x)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上几乎处处成立, 于是 $\{f_k(x) - f_1(x)\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的非负渐增函数列, 由 Levi 定理, $\int_E f(x)\mathrm{d}x - \int_E f_1(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{k\to\infty} \int_E f_k(x)\mathrm{d}x - \int_E f_1(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{k\to\infty} \int_E [f_k(x) - f_1(x)]\mathrm{d}x = \int_E \lim\limits_{k\to\infty} [f_k(x) - f_1(x)]\mathrm{d}x$, 因为 $f, f_1 \in L(\mathbb{R}^n)$, 所以 $[\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x) - f_1(x)] \in L(\mathbb{R}^n)$, 所以 $\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x) \in L(\mathbb{R}^n)$, 所以, $\lim\limits_{k\to\infty} \int_E f_k(x)\mathrm{d}x - \int_E f_1(x)\mathrm{d}x = \int_E \lim\limits_{k\to\infty} f_k(x)\mathrm{d}x - \int_E f_1(x)\mathrm{d}x$, 即 $\lim\limits_{k\to\infty} \int_E f_k(x)\mathrm{d}x = \int_E \lim\limits_{k\to\infty} f_k(x)\mathrm{d}x$, 故对任意可测集 $E \subset \mathbb{R}^n$, 有: $\int_E f(x)\mathrm{d}x = \int_E \lim\limits_{k\to\infty} f_k(x)\mathrm{d}x$, 由 E 的任意性知: $\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$, a.e. $x \in \mathbb{R}^n$.

24. 设 $\{f_k(x)\}, \{g_k(x)\}$ 是 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的两个可测函数列, 且有 $|f_k(x)| \leq g_k(x)$, $x \in E$. 若 $\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x) = f(x), \lim\limits_{k\to\infty} g_k(x) = g(x), \lim\limits_{k\to\infty} \int_E g_k(x)\mathrm{d}x = \int_E g(x)\mathrm{d}x < \infty$, 试证明 $\lim\limits_{k\to\infty} \int_E f_k(x)\mathrm{d}x = \int_E f(x)\mathrm{d}x$.

证: 由题意可知, $|f(x)| \leq g(x)$, $\because$ $g \in L(E)$, $\therefore$ $f \in L(E)$; 又 $\because$ $\lim\limits_{k\to\infty} \int_E g_k(x)\mathrm{d}x = \int_E g(x)\mathrm{d}x < \infty$, $\therefore g_k \in L(E)$, $\therefore$ $f_k \in L(E)$. 易知, $\{g_k(x) + f_k(x)\}, \{g_k(x) - f_k(x)\}$ 为 E 上两列非负可测函数列, 由 Fatou 引理, $\int_E \varliminf\limits_{k\to\infty} (g_k(x) + f_k(x))\mathrm{d}x \leq \varliminf\limits_{k\to\infty} \int_E (g_k(x) + f_k(x))\mathrm{d}x$, $\therefore$ $\int_E (f(x) + g(x))\mathrm{d}x \leq \int_E g(x)\mathrm{d}x + \varliminf\limits_{k\to\infty} \int_E f_k(x)\mathrm{d}x$, 从而, $\int_E f(x)\mathrm{d}x \leq \varliminf\limits_{k\to\infty} \int_E f_k(x)\mathrm{d}x$; 类似地, $\int_E \varliminf\limits_{k\to\infty} (g_k(x) - f_k(x))\mathrm{d}x \leq \varliminf\limits_{k\to\infty} \int_E (g_k(x) - f_k(x))\mathrm{d}x$, $\therefore$ $\int_E (g(x) - f(x))\mathrm{d}x \leq \int_E g(x)\mathrm{d}x - \varlimsup\limits_{k\to\infty} \int_E f_k(x)\mathrm{d}x$, 从而, $\int_E f(x)\mathrm{d}x \geq \varlimsup\limits_{k\to\infty} \int_E f_k(x)\mathrm{d}x$, 于是, $\varliminf\limits_{k\to\infty} \int_E f_k(x)\mathrm{d}x \geq \int_E f(x)\mathrm{d}x \geq \varlimsup\limits_{k\to\infty} \int_E f_k(x)\mathrm{d}x \geq \varliminf\limits_{k\to\infty} \int_E f_k(x)\mathrm{d}x$, 因此, $\lim\limits_{k\to\infty} \int_E f_k(x)\mathrm{d}x = \int_E f(x)\mathrm{d}x$.

25. 设 $f(x)$ 是 $[a, b]$ 上的有界函数, 其不连续点集记为 D. 若 D 只有可列个极限点, 试证明 $f(x)$ 是 $[a, b]$ 上的 Riemann 可积函数.

证: 利用书 35 页思考题 2 的结论: 设 $E \subset \mathbb{R}^n$, 若 E' 是可数集, 则 E 是可数集. 因为 D 只有可列个极限点, 所以 D 为可数集, 即 $f(x)$ 的不连续点集为可数集, 故 $f(x)$ 的不连续点集为零测集, 又因为 $f(x)$ 是 $[a, b]$ 上的有界函数, 所以 $f(x)$ 是 $[a, b]$ 上的 Riemann 可积函数.

26. 设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}^1$ 上的有界函数, 若对于每一点 $x \in \mathbb{R}^1$, 存在极限 $\lim\limits_{h\to 0} f(x + h)$, 试证明 $f(x)$ 在任一区间 $[a, b]$ 上是 Riemann 可积的.

证: 利用书 22 页例 12 的结论可知, $f(x)$ 的不连续点集是可数集, 故为零测集, 又因为 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}^1$ 上的有界函数, 所以 $f(x)$ 在任一区间 $[a, b]$ 上是 Riemann 可积的.

27. 设 $E \subset [0, 1]$, 试证明 $\chi_E(x)$ 在 $[0, 1]$ 上 Riemann 可积的充分必要条件是 $m(\overline{E} \setminus \dot{E}) = 0$.

证: 记 $\omega(x)$ 为 $\chi_E(x)$ 的振幅函数, 易知 $\{x \in [0, 1] : \omega(x) > 0\} = \overline{E} \setminus \dot{E}$; $\chi_E(x)$ 在 $[0, 1]$ 上 Riemann 可积 $\Leftrightarrow m(\{x \in [0, 1] : \omega(x) > 0\}) = 0 \Leftrightarrow m(\overline{E} \setminus \dot{E}) = 0$.

28. 设 $f \in R([0, 1])$, 试证明 $f(x^2) \in R([a, b])$.

证: $\forall\ x_0\in[0,1]$ 为 $f(x^2)$ 的不连续点, $\exists\ \varepsilon>0$, $\forall\ \delta>0$, $\exists\ x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$, s.t. $|f(x^2)-f(x_0^2)|>\varepsilon$, 则 x_0^2 为 $f(x)$ 的不连续点, 所以 $m(\{x\in[0,1]:f(x^2)$ 在 x 处不连续 $\})$=$m(\{x\in[0,1]:f(x)$ 在 x 处不连续 $\})=0$, 故 $f(x^2)\in R([a,b])$.

29. 假设 $f(x),g(x)$ 是 $E\subset\mathbb{R}^1$ 上的可测函数并且 $m(E)<\infty$, 若 $f(x)+g(y)$ 在 $E\times E$ 上可积, 试证明 $f(x),g(x)$ 都是 E 上的可积函数.

证: 因为 $f(x)+g(y)$ 在 $E\times E$ 上可积, 故由 Fubini 定理, 对于几乎处处的 $y\in E$, $f(x)+g(y)$ 是关于 x 的在 E 上可积的函数, 选取 $y_0\in E$, s.t. $g(y_0)<\infty$, 则 $f(x)+g(y_0)$ 是 E 上的可积函数, $\int_E|f(x)|\mathrm{d}x\le\int_E|f(x)+g(y_0)|\mathrm{d}x+\int_E|g(y_0)|\mathrm{d}x<\infty$, 故 $f(x)$ 是 E 上的可积函数, 同理, $g(x)$ 是 E 上的可积函数.

30. 计算下列积分:

(1). $\int_{x>0}\int_{y>0}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(1+y)(1+x^2y)}$; (2). $\int_0^\infty\frac{\ln x}{x^2-1}\mathrm{d}x$.

证: (1). 根据 Tonelli 定理, 原式 $=\int_{y>0}\int_{x>0}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2y}\frac{\mathrm{d}y}{(1+y)}=\int_{y>0}\int_{x>0}\frac{\sqrt{y}\mathrm{d}x}{1+x^2y}\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y}(1+y)}=2\int_{y>0}\frac{\mathrm{d}y}{1+y^2}\int_{x>0}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\frac{\pi^2}{2}$;

(2). $\frac{\pi^2}{2}=\int_{x>0}\frac{1}{x^2-1}\int_{y>0}(\frac{x^2}{1+x^2y}-\frac{1}{1+y})\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{x>0}\frac{1}{x^2-1}(\ln\frac{1+x^2y}{1+y}|_0^\infty)\mathrm{d}x=2\int_0^\infty\frac{\ln x}{x^2-1}\mathrm{d}x$, $\therefore\ \int_0^\infty\frac{\ln x}{x^2-1}\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{4}$.

31. 设 $E\subset\mathbb{R}^1$ 且 $m(E)>0$, $f(x)$ 是 $\mathbb{R}^1$ 上的非负可测函数. 若函数 $F(x)=\int_E f(x-t)\mathrm{d}t$ 在 $\mathbb{R}^1$ 上可积, 试证明 $f\in L(\mathbb{R}^1)$.

证: 因为 $F(x)=\int_E f(x-t)\mathrm{d}t$ 在 $\mathbb{R}^1$ 上可积, 且 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}^1$ 上的非负可测函数, 所以由 Tonelli 定理, $\infty>\int_{\mathbb{R}^1}F(x)\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^1}\int_E f(x-t)\mathrm{d}t\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^1}\int_{\mathbb{R}^1}\chi_E(t)f(x-t)\mathrm{d}t\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^1}\int_{\mathbb{R}^1}f(x-t)\mathrm{d}x\chi_E(t)\mathrm{d}t=m(E)\int_{\mathbb{R}^1}f(x)\mathrm{d}x$, 又因为 $m(E)>0$, 所以 $\int_{\mathbb{R}^1}f(x)\mathrm{d}x<\infty$, 故 $f\in L(\mathbb{R}^1)$.

32. 设 $f\in L(\mathbb{R}^1)$, 且 $xf(x)$ 在 $\mathbb{R}^1$ 上可积, 令 $F(x)=\int_{-\infty}^x f(t)\mathrm{d}t$. 若有 $\int_{-\infty}^\infty f(x)\mathrm{d}x=0$, 试证明 $F\in L(\mathbb{R}^1)$.

证: 因为 $xf(x)$ 在 $\mathbb{R}^1$ 上可积, 所以 $\int_{-\infty}^\infty|xf(x)|\mathrm{d}x<\infty$, 由 Tonelli 定理, $\infty>\int_0^\infty|xf(x)|\mathrm{d}x=\int_0^\infty x|f(x)|\mathrm{d}x=\int_0^\infty|f(x)|\int_0^x\mathrm{d}t\mathrm{d}x=\int_0^\infty|f(x)|\int_0^\infty\chi_{[0,x]}(t)\mathrm{d}t\mathrm{d}x$
$=\int_{[0,\infty)\times[0,\infty)}|f(x)|\chi_{[0,x]}(t)\mathrm{d}t\mathrm{d}x$, 所以 $f(x)\chi_{[0,x]}(t)\in L([0,\infty)\times[0,\infty))$, 由 Fubini 定理, $\infty>|\int_0^\infty xf(x)\mathrm{d}x|=|\int_0^\infty f(x)\int_0^x\mathrm{d}t\mathrm{d}x|=|\int_0^\infty\int_0^\infty f(x)\chi_{[0,x]}(t)\mathrm{d}t\mathrm{d}x|=|\int_0^\infty\int_0^\infty f(x)\chi_{[0,x]}(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t|=|\int_0^\infty\int_t^\infty f(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t|=|\int_0^\infty(-\int_{-\infty}^t f(x)\mathrm{d}x)\mathrm{d}t|=|\int_0^\infty F(t)\mathrm{d}t|$, 所以 $F\in L([0,\infty))$, 同理 $F\in L([-\infty,0))$, 从而 $F\in L(\mathbb{R}^1)$.

33. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\pi/2}\cos x\cdot\arctan(nx)\mathrm{d}x$ 之值.

证: 记 $f_n(x)=\cos x\cdot\arctan(nx)$, 则 f_n 在 $[0,\pi/2]$ 可测, 易得 $|f_n(x)|\le\frac{\pi}{2}$, 所以 $f_n\in L([0,\pi/2])$, 由 Lebesgue 控制收敛定理, $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\pi/2}f_n(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\pi/2}\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\pi/2}\frac{\pi}{2}\cos x\mathrm{d}x$
$=\frac{\pi}{2}$.

34. 设 $f\in L((0,a))$, $g(x)=\int_x^a f(t)/t\mathrm{d}t(a>x>0)$, 试证明 $g\in L((0,a))$, 且有 $\int_0^a g(x)\mathrm{d}x=\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$.

证: 因为 $f\in L((0,a))$, 所以 $|f|\in L((0,a))$, 由 Tonelli 定理, $|\int_0^a g(x)\mathrm{d}x|=|\int_0^a\int_x^a f(t)/t\mathrm{d}t\mathrm{d}x|$
$\le\int_0^a\int_x^a\frac{|f(t)|}{t}\mathrm{d}t\mathrm{d}x=\int_0^a\int_0^a\frac{|f(t)|}{t}\chi_{[x,a]}(t)\mathrm{d}t\mathrm{d}x=\int_0^a\frac{|f(t)|}{t}\int_0^a\chi_{[x,a]}(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\int_0^a\frac{|f(t)|}{t}t\mathrm{d}t=\int_0^a|f(t)|\mathrm{d}t$
$<\infty$, 所以 $g\in L((0,a))$, 且 $\frac{f(t)}{t}\chi_{[x,a]}(t)\in L((0,a)\times(0,a))$, 再由 Fubini 定理, $\int_0^a g(x)\mathrm{d}x=\int_0^a\int_x^a f(t)/t\mathrm{d}t\mathrm{d}x=\int_0^a\int_0^a\frac{f(t)}{t}\chi_{[x,a]}(t)\mathrm{d}t\mathrm{d}x=\int_0^a\frac{f(t)}{t}\int_0^a\chi_{[x,a]}(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\int_0^a\frac{f(t)}{t}t\mathrm{d}t=\int_0^a f(t)\mathrm{d}t$.

习题 5

第一组

1. 设 E 是 $\mathbb{R}^1$ 中一族 (开, 闭与半开半闭) 区间的并集, 试证明 E 是可测集.

证: 设 $E_N = E\bigcap[-N,N]$, 则 $\lim\limits_{N\to\infty} E_N = E$, 我们仅需证明每个 E_N 可测即可. 由题意, $\forall\ x\in E_N$, 可构造闭区间列 $\{J_n\}_{n=1}^{\infty}$ 使得 $x\in J_n\subset E_N$ 且 $|J_n|\to 0(n\to\infty)$, 则所有的 J_n 构成 E_N 的 Vitali 覆盖, 由 Vitali 覆盖引理可知, $\forall\ \varepsilon>0$, $\exists\ E_\varepsilon=\bigcup\limits_{k=1}^{m} J_{n_k}\subset E_N$, s.t. $m^*(E_N\setminus E_\varepsilon)<\varepsilon$; 取 $\varepsilon_n=\frac{1}{2^n}$, 则对应存在 E_n 使得 $m^*(E_N\setminus E_n)<\frac{1}{2^n}$, 令 $F=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$, 则 $m(E_N\setminus F)=0$, 又因为 F 可测, 所以 $E_N=F\bigcup(E_N\setminus F)$ 可测.

2. 设 $\{x_n\}\subset[a,b]$, 试作 $[a,b]$ 上递增函数, 其不连续点恰为 $\{x_n\}$.

证: 令

$$f_n(x)=\begin{cases}0, & a\le x<x_n\\ \frac{1}{2^n}, & x_n\le x\le b\end{cases},\qquad n=1,2,\cdots,$$

则 $f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上递增, 且在 x_n 处不连续; 取 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, 则易知 $f(x)$ 递增, 仅在 $\{x_n\}$ 不连续.

3. 设 $f(x)$ 是 (a,b) 上的递增函数, $E\subset(a,b)$. 若对任给 $\varepsilon>0$, 存在 $(a_i,b_i)\subset(a,b)(i=1,2,\cdots)$, 使得 $\bigcup\limits_i(a_i,b_i)\supset E$, $\sum\limits_i[f(b_i)-f(a_i)]<\varepsilon$, 试证明 $f'(x)=0$, a.e. $x\in E$.

证: 记 $E_1=(a_1,b_1)$, $E_2=(a_2,b_2)\setminus E_1,\cdots,E_i=(a_i,b_i)\setminus\bigcup\limits_{j=1}^{i-1}E_j,\cdots$, 则 $E_i\subset(a_i,b_i)(i=1,2,\cdots)$ 为可测集, $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}E_i=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}(a_i,b_i)$, $E_i\bigcap E_j=\emptyset(i\ne j)$; 因为 $f(x)$ 在 (a,b) 递增, 所以 $f'(x)\ge 0$, a.e. $x\in(a,b)$; 由 Lebesgue 定理, $\int_E f'(x)\mathrm{d}x\le\int_{\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}E_i} f'(x)\mathrm{d}x=\sum\limits_{i=1}^{\infty}\int_{E_i}f'(x)\mathrm{d}x$ $\le\sum\limits_{i=1}^{\infty}\int_{(a_i,b_i)}f'(x)\mathrm{d}x\le\sum\limits_{i=1}^{\infty}[f(b_i)-f(a_i)]<\varepsilon$, 由 ε 的任意性, $\int_E f'(x)\mathrm{d}x=0$, 故 $f'(x)=0$, a.e. $x\in(a,b)$.

4. 设 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上是有界变差函数, 试证明函数 $F(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$, $F(0)=0$ 是 $[0,a]$ 上的有界变差函数.

证: 因为 $f(x)$ 是 $[0,a]$ 上的有界变差函数, 故存在 $[0,a]$ 上单调递增函数 $g(x),h(x)$, 使得 $f(x)=g(x)-h(x)$, 于是 $F(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{x}\int_0^x g(t)\mathrm{d}t-\frac{1}{x}\int_0^x h(t)\mathrm{d}t\triangleq G(x)-H(x)$, 由 $F(0)=0$ 知 $G(0)=H(0)$, 补充 $G(x),H(x)$ 在 0 点的值为 0, 此时, $\forall\ 0<y<x\le a$, 有 $G(x)-G(y)=\frac{1}{x}\int_0^x g(t)\mathrm{d}t-\frac{1}{y}\int_0^y g(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{x}\int_y^x g(t)\mathrm{d}t+\frac{1}{x}\int_0^y g(t)\mathrm{d}t-\frac{1}{y}\int_0^y g(t)\mathrm{d}t\ge\frac{1}{x}g(y)(x-y)-\frac{x-y}{xy}\int_0^y g(t)\mathrm{d}t=\frac{x-y}{xy}\int_0^y(g(y)-g(t))\mathrm{d}t\ge 0$, 故 $G(x)$ 递增, 同理可证 $H(x)$ 递增, 故 $F(x)$ 是 $[0,a]$ 上有界变差函数.

5. 设 $\{f_k(x)\}$ 是 $[a,b]$ 上的有界变差函数列, 且有 $\bigvee\limits_a^b(f_k)\le M\ (k=1,2,\cdots)$, $\lim\limits_{k\to\infty}f_k(x)=f(x)$, $x\in[a,b]$, 试证明 $f\in BV([a,b])$ 且满足 $\bigvee\limits_a^b(f)\le M$.

证: 对于 $[a,b]$ 的任意分划 $\Delta: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$, 有 $\sum\limits_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|=\sum\limits_{i=1}^{n}|\lim\limits_{k\to\infty}f_k(x_i)-\lim\limits_{k\to\infty}f_k(x_{i-1})|=\sum\limits_{i=1}^{n}\lim\limits_{k\to\infty}|f_k(x_i)-f_k(x_{i-1})|=\lim\limits_{k\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}|f_k(x_i)-f_k(x_{i-1})|\leq\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\bigvee\limits_a^b(f_k)\leq M$, 所以 $f\in BV([a,b])$, 且 $\bigvee\limits_a^b(f)\leq M$.

6. 设 $f\in BV([a,b])$, 且点 $x_0\in[a,b]$ 是 $f(x)$ 的连续点, 试证明 $\bigvee\limits_a^x(f)$ 在点 x_0 处连续.

证: 因为 $f(x)$ 在 $\tilde{x_0}$ 处连续, 所以 $\forall\,\varepsilon>0$, $\exists\,\delta>0$, $\forall\,|x-\tilde{x_0}|<\delta$, $|f(x)-f(\tilde{x_0})|<\varepsilon/2$;
先证右连续: 存在 $[\tilde{x_0},\tilde{x_0}+\delta]$ 的一个分划 $\Delta: \tilde{x_0}=x_0<x_1<\cdots<x_n=\tilde{x_0}+\delta$, 使得 $\bigvee\limits_{\tilde{x_0}}^{\tilde{x_0}+\delta}(f)<\sum\limits_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|+\varepsilon/2$, 则 $\bigvee\limits_{\tilde{x_0}}^{x_1}(f)=\bigvee\limits_{\tilde{x_0}}^{\tilde{x_0}+\delta}(f)-\bigvee\limits_{x_1}^{\tilde{x_0}+\delta}(f)\leq\sum\limits_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|+\varepsilon/2-\sum\limits_{i=2}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|=|f(x_1)-f(x_0)|+\varepsilon/2<\varepsilon$, 故 $\forall\,\tilde{x_0}<x<x_1$, $\bigvee\limits_{\tilde{x_0}}^{x}(f)\leq\bigvee\limits_{\tilde{x_0}}^{x_1}(f)<\varepsilon$, 即 $\bigvee\limits_a^x(f)$ 在点 $\tilde{x_0}$ 处右连续;
再证左连续: 存在 $[a,\tilde{x_0}]$ 的一个分划 $\Delta: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=\tilde{x_0}$, $\|\Delta\|<\delta$, 使得 $\bigvee\limits_a^{\tilde{x_0}}(f)<\sum\limits_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|+\varepsilon/2$, 从而 $\bigvee\limits_a^{\tilde{x_0}}(f)-\sum\limits_{i=1}^{n-1}|f(x_i)-f(x_{i-1})|<\varepsilon$, 由此可知 $\bigvee\limits_a^{\tilde{x_0}}(f)-\bigvee\limits_a^{x_{n-1}}(f)<\varepsilon$, 故 $\forall\,x_{n-1}<x<\tilde{x_0}$, 有 $\bigvee\limits_a^{\tilde{x_0}}(f)-\bigvee\limits_a^{x}(f)<\varepsilon$, 即 $\bigvee\limits_a^x(f)$ 在点 $\tilde{x_0}$ 处左连续.

7. 设函数 $f:[a,b]\to[c,d]$ 是连续函数, 且对任意的 $y\in[c,d]$, 点集 $f^{-1}(\{y\})$ 至多有 10 个点, 试证明 $\bigvee\limits_a^b(f)\leq 10(d-c)$.

证: 对于 $[a,b]$ 的任意分划 $\Delta: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$, 记 $I_i=[x_{i-1},x_i](i=1,2,\cdots,n)$, 由于 f 是连续函数, 所以 $f(I_i)$ 是一个区间, 从而 $\sum\limits_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|\leq\sum\limits_{i=1}^{n}\int_c^d\chi_{f(I_i)}(y)\mathrm{d}y=\int_c^d\sum\limits_{i=1}^{n}\chi_{f(I_i)}(y)\mathrm{d}y$, 又因为 $f^{-1}(\{y\})$ 至多有 10 个点, 故 $\sum\limits_{i=1}^{n}\chi_{f(I_i)}(y)\leq 10$, 故 $\sum\limits_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|\leq 10(d-c)$, 于是有 $\bigvee\limits_a^b(f)\leq 10(d-c)$.

8. 设 $f\in L([0,1])$, $g(x)$ 是定义在 $[0,1]$ 上的单调上升函数. 若对任意的 $[a,b]\subset[0,1]$, 有 $\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|^2\leq[g(b)-g(a)](b-a)$, 试证明 $f^2(x)$ 是 $[0,1]$ 上的可积函数.

证: 记任意 $[a,b]$ 为 $[x,x+\Delta x]$, 则有 $\left|\frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x}f(t)\mathrm{d}t\right|^2\leq\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}$, 由于 $f\in L([0,1])$, $g(x)$ 是定义在 $[0,1]$ 上的单调上升函数, 上式两边同时令 $\Delta x\to 0$, $|f(x)|^2\leq g'(x)$, a.e. $x\in[0,1]$, 故 $\int_0^1|f(x)|^2\mathrm{d}x\leq\int_0^1 g'(x)\mathrm{d}x\leq g(1)-g(0)<\infty$, 故 $f^2(x)$ 是 $[0,1]$ 上的可积函数.

9. 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的非负绝对连续函数, 试证明 $f^p(x)(p>1)$ 是 $[a,b]$ 上的绝对连续函数.

证: 由 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上非负绝对连续可知: $\exists\,M>0$, s.t. $0\leq f(x)\leq M$; 对于函数 $f^p(x)$, 由微分中值定理, $f^p(x)-f^p(y)=pf^{p-1}(\xi)(f(x)-f(y))$, $\forall\,x,y\in[a,b]$, 且 $f(\xi)$ 介于 $f(x)$ 与 $f(y)$ 之间; 那么 $\forall\,\varepsilon>0$, $\exists\,\delta>0$, 只要 $[a,b]$ 中任意有限个互不相交的开区

间 $(x_i,y_i)(i=1,2,\cdots,n)$ 满足 $\sum\limits_{i=1}^{n}|y_i-x_i|<\delta$, 就有 $\sum\limits_{i=1}^{n}|f^p(y_i)-f^p(x_i)|\le\sum\limits_{i=1}^{n}pM^{p-1}|f(y_i)-f(x_i)|\le pM^{p-1}\varepsilon$, 故 $f^p(x)(p>1)$ 是 $[a,b]$ 上的绝对连续函数.

10. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上递增, 且有 $\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x=f(b)-f(a)$, 试证明 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上绝对连续.

证一 : 由 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上递增知 $f'(x)\ge 0$, a.e. $x\in[a,b]$; 由 $\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x=f(b)-f(a)<\infty$ 知 $f'\in L([a,b])$, 故 $F(x)=\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t$ 是 $[a,b]$ 上的绝对连续函数. 下证 $F(x)=f(x)-f(a)$ 在 $[a,b]$ 上处处成立. 由 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上递增及 Lebesgue 定理有 $F(x)\le f(x)-f(a)$, 若等号不成立, 则 $F(b)=\int_a^b f'(t)\mathrm{d}t=\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t+\int_x^b f'(t)\mathrm{d}t<f(x)-f(a)+f(b)-f(x)=f(b)-f(a)$, 与已知矛盾, 故假设不成立, 从而 $F(x)=f(x)-f(a)$, 即 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上绝对连续.

证二 : 由 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上递增知 $f'(x)\ge 0$, a.e. $x\in[a,b]$; 由 $\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x=f(b)-f(a)<\infty$ 知 $f'\in L([a,b])$. 令 $F(x)=\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t-(f(x)-f(a))$, 则 $F(a)=F(b)=0$; $\forall\, a\le x<y\le b$, $F(y)-F(x)=\int_x^y f'(t)\mathrm{d}t-(f(y)-f(x))\le f(y)-f(x)-(f(y)-f(x))=0$, 故 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上递减, 故 $F(x)\equiv 0$, $x\in[a,b]$, 即 $\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t=f(x)-f(a)$, 故 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上绝对连续.

11. 设 $f\in BV([a,b])$. 若有 $\int_a^b|f'(x)|\mathrm{d}x=\bigvee\limits_a^b(f)$, 试证明 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上绝对连续.

证: 根据书 249 页例 4 的结论, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\bigvee\limits_a^x(f)\right)=|f'(x)|$, a.e. $x\in[a,b]$, 则题目条件转化为 $\int_a^b\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\bigvee\limits_a^x(f)\right)\mathrm{d}x=\bigvee\limits_a^b(f)$, 注意到 $\bigvee\limits_a^x(f)$ 在 $[a,b]$ 上非负递增, 同第 10 题的证明可得: $\bigvee\limits_a^x(f)$ 在 $[a,b]$ 上绝对连续. $\forall\,\varepsilon>0$, $\exists\,\delta>0$, 只要 $[a,b]$ 中任意有限个互不相交的开区间 $(x_i,y_i)(i=1,2,\cdots,n)$ 满足 $\sum\limits_{i=1}^{n}|y_i-x_i|<\delta$, 就有 $\sum\limits_{i=1}^{n}\left|\bigvee\limits_a^{y_i}(f)-\bigvee\limits_a^{x_i}(f)\right|=\sum\limits_{i=1}^{n}\left|\bigvee\limits_{x_i}^{y_i}(f)\right|<\varepsilon$, 则 $\sum\limits_{i=1}^{n}|f(y_i)-f(x_i)|\le\sum\limits_{i=1}^{n}\left|\bigvee\limits_{x_i}^{y_i}(f)\right|<\varepsilon$, 即 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上绝对连续.

12. 设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}^1$ 上有界的递增函数, 且 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}^1$ 上可微, 记 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=B$, 试证明 $\int_{\mathbb{R}^1}f'(x)\mathrm{d}x=B-A$.

证: 记 $f_n'(x)=f'(x)\chi_{[-n,n]}(x)$, 由 $f(x)$ 递增知 $\int_{\mathbb{R}^1}f_n'(x)\mathrm{d}x\le f(n)-f(-n)$, 故 $f_n'(x)$ 在 $\mathbb{R}^1$ 上可积, 又 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}^1$ 上可微, 所以 (书 272 页例 1), $\int_{\mathbb{R}^1}f_n'(x)\mathrm{d}x=f(n)-f(-n)$. 由 $f(x)$ 递增知 $f'(x)\ge 0$, a.e. $x\in\mathbb{R}^1$, 于是 $f_n'(x)$ 是非负渐升且以为 $f'(x)$ 为极限的可积函数列, 由 Levi 定理, $\int_{\mathbb{R}^1}f'(x)\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^1}\lim\limits_{n\to\infty}f_n'(x)\mathrm{d}x=\lim\limits_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^1}f_n'(x)\mathrm{d}x=\lim\limits_{n\to\infty}(f(n)-f(-n))=B-A$.

13. 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}^1$ 上的可微函数, 且 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 都是 $\mathbb{R}^1$ 上的可积函数. 试证明 $\int_{\mathbb{R}^1}f'(x)\mathrm{d}x=0$.

证: 由 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}^1$ 上可微, 且 $f'(x)$ 是 $\mathbb{R}^1$ 上的可积函数知对于任意的区间 $[a,b]$ 有 $\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x=f(b)-f(a)$; 因为 $f\in L(\mathbb{R}^1)$, 由书 181 页例 7 知 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x\pm n)=0$, a.e. $x\in\mathbb{R}^1$, 取 $x_1,x_2\in\mathbb{R}^1$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_1+n)=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_2-n)=0$ 成立; 令 $g_n(x)=f'(x)\chi_{[x_2-n,x_1+n]}(x)$, 则 $g_n(x)\to f'(x)(n\to\infty)$, 又因为 $|g_n(x)|\le|f'(x)|\in L(\mathbb{R}^1)$, 所以由 Lebesgue 控制收敛定理, $\int_{\mathbb{R}^1}f'(x)\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^1}\lim\limits_{n\to\infty}g_n(x)\mathrm{d}x=\lim\limits_{n\to\infty}\int_{x_2-n}^{x_1+n}f'(x)\mathrm{d}x=$

$\lim\limits_{n\to\infty}(f(x_1+n)-f(x_2-n))=0.$

14. 假设 $f(x,y)$ 是定义在 $[a,b]\times[c,d]$ 上的二元函数, 且存在 $y_0\in(c,d)$, 使得 $f(x,y_0)$ 在 $[a,b]$ 上是可积的; 又对于每一个 $x\in[a,b]$, $f(x,y)$ 是对 y 在 $[c,d]$ 上的绝对连续函数, $f_y'(x,y)$ 在 $[a,b]\times[c,d]$ 上是可积的, 试证明函数 $F(y)=\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x$ 是定义在 $[c,d]$ 上的绝对连续函数, 且对几乎处处的 $y\in[c,d]$ 有 $F'(y)=\int_a^b f_y'(x,y)\mathrm{d}x$.

证: 由对于每一个 $x\in[a,b]$, $f(x,y)$ 是对 y 在 $[c,d]$ 上的绝对连续函数知, $\forall\,\varepsilon>0$, $\exists\,\delta>0$, 只要 $[a,b]$ 中任意有限个互不相交的开区间 $(z_i,y_i)(i=1,2,\cdots,n)$ 满足 $\sum\limits_{i=1}^{n}|y_i-z_i|<\delta$, 就有 $\sum\limits_{i=1}^{n}|F(y_i)-F(z_i)|=\sum\limits_{i=1}^{n}|\int_a^b[f(x,y_i)-f(x,z_i)]\mathrm{d}x|\le\sum\limits_{i=1}^{n}\int_a^b|f(x,y_i)-f(x,z_i)|\mathrm{d}x=\int_a^b\sum\limits_{i=1}^{n}|f(x,y_i)-f(x,z_i)|\mathrm{d}x\le\varepsilon(b-a)$, 故 $F(y)$ 是定义在 $[c,d]$ 上的绝对连续函数. 由对于每一个 $x\in[a,b]$, $f(x,y)$ 是对 y 在 $[c,d]$ 上的绝对连续函数可知, $f(x,y)-f(x,y_0)=\int_{y_0}^{y}f_t'(x,t)\mathrm{d}t$, 由 $F(y)$ 绝对连续, $f_y'(x,y)$ 在 $[a,b]\times[c,d]$ 上可积, $f(x,y_0)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 以及 Fubini 定理可知, $\int_{y_0}^{y}F'(t)\mathrm{d}t=F(y)-F(y_0)=\int_a^b[f(x,y)-f(x,y_0)]\mathrm{d}x=\int_a^b\int_{y_0}^{y}f_t'(x,t)\mathrm{d}t\mathrm{d}x=\int_{y_0}^{y}\int_a^b f_t'(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t$, 从而有 $F'(y)=\int_a^b f_y'(x,y)\mathrm{d}x$.

15. 设 $f(x)$ 在任一区间 $[a,b]\subset\mathbb{R}^1$ 上都绝对连续. 试证明对每个 $y\in\mathbb{R}^1$, 有 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\int_a^b f(x+y)\mathrm{d}x=\int_a^b\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}f(x+y)\mathrm{d}x$.

证: 因为 $f(x)$ 在任一区间 $[a,b]\subset\mathbb{R}^1$ 上都绝对连续, 所以 $f(x)=f(a)+\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t$, 从而 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\int_a^b f(x+y)\mathrm{d}x=\lim\limits_{h\to\infty}\int_a^b\frac{f(x+y+h)-f(x+y)}{h}\mathrm{d}x=\lim\limits_{h\to\infty}\int_a^b\frac{1}{h}\int_{x+y}^{x+y+h}f'(t)\mathrm{d}t\mathrm{d}x=\lim\limits_{h\to\infty}\int_a^b f'(x+y)\mathrm{d}x=\int_a^b\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}f(x+y)\mathrm{d}x$(倒数第二个等号依据引理 5.6 得来).

16. 试举例说明绝对连续函数是几乎处处可微的这个结论一般是不能改进的.

证: 令 $f(x)=|x|$, $x\in\mathbb{R}^1$, 易证 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}^1$ 上绝对连续, 但显然 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可微.

17. 设 $\{g_k(x)\}$ 是在 $[a,b]$ 上的绝对连续函数列, 又有 $|g_k'(x)|\le F(x)$ a.e. $(k=1,2,\cdots)$ 且 $F\in L([a,b])$. 若 $\lim\limits_{k\to\infty}g_k(x)=g(x)(a\le x\le b)$, $\lim\limits_{k\to\infty}g_k'(x)=f(x)$, a.e. $x\in[a,b]$, 试证明 $g'(x)=f(x)$, a.e. $x\in[a,b]$.

证: 由 $g_k(x)$ 在 $[a,b]$ 上绝对连续知, $g_k(x)-g_k(a)=\int_a^x g_k'(t)\mathrm{d}t$, 两边同时取极限, $\lim\limits_{k\to\infty}\int_a^x g_k'(t)\mathrm{d}t=g(x)-g(a)$; 因为 $|g_k'(x)|\le F(x)$ a.e. $(k=1,2,\cdots)$ 且 $F\in L([a,b])$, 由 Lebesgue 控制收敛定理, $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=\int_a^x\lim\limits_{k\to\infty}g_k'(t)\mathrm{d}t=\lim\limits_{k\to\infty}\int_a^x g_k'(t)\mathrm{d}t=g(x)-g(a)$, 注意到 $f\in L([a,b])$, 从而由微积分基本定理, $g'(x)=f(x)$, a.e. $x\in[a,b]$.

18. 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的绝对连续严格递增函数, $g(y)$ 在 $[f(a),f(b)]$ 上绝对连续, 试证明 $g[f(x)]$ 在 $[a,b]$ 上绝对连续.

证: 由 $g(x)$ 在 $[f(a),f(b)]$ 上绝对连续知: $\forall\,\varepsilon>0$, $\exists\,\delta_1>0$, 只要 $[f(a),f(b)]$ 中任意有限个互不相交的开区间 $(t_i,s_i)(i=1,2,\cdots,n)$ 满足 $\sum\limits_{i=1}^{n}|s_i-t_i|<\delta_1$, 就有 $\sum\limits_{i=1}^{n}|g(s_i)-g(t_i)|<\varepsilon$; 又由于 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的绝对连续严格递增函数, 而 $g(y)$ 以 $[f(a),f(b)]$ 为定义域, 故对于 $\delta_1>0$, $\exists\,\delta>0$, 只要 $[a,b]$ 中任意有限个互不相交的开区间 $(x_i,y_i)(i=1,2,\cdots,n)$ 满足 $\sum\limits_{i=1}^{n}|y_i-x_i|<\delta$, 就有 $\sum\limits_{i=1}^{n}|f(y_i)-f(x_i)|<\delta_1$; 由 $f(x)$ 是严格递增可知诸 $(f(x_i),f(y_i))$ 必互不相交, 此即 $\forall\,\varepsilon>0$, $\exists\,\delta>0$, 只要 $[a,b]$ 中任意有限个互不相交的开区间 $(x_i,y_i)(i=

$1,2,\cdots,n)$ 满足 $\sum\limits_{i=1}^{n}|y_i-x_i|<\delta$, 就有 $\sum\limits_{i=1}^{n}|g(f(y_i))-g(f(x_i))|<\varepsilon$, 故 $g[f(x)]$ 在 $[a,b]$ 上绝对连续.

19. 设 $g(x)$ 是 $[a,b]$ 上的绝对连续函数, $f(x)$ 在 $\mathbb{R}^1$ 上满足 Lipschitz 条件. 试证明 $f[g(x)]$ 是 $[a,b]$ 上的绝对连续函数.

证: 由 $g(x)$ 是 $[a,b]$ 上的绝对连续函数可知: $\forall\,\varepsilon>0$, $\exists\,\delta>0$, 只要 $[a,b]$ 中任意有限个互不相交的开区间 $(x_i,y_i)(i=1,2,\cdots,n)$ 满足 $\sum\limits_{i=1}^{n}|y_i-x_i|<\delta$, 就有 $\sum\limits_{i=1}^{n}|g(y_i)-g(x_i)|<\varepsilon$, 于是由 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}^1$ 上满足 Lipschitz 条件可知, $\sum\limits_{i=1}^{n}|f[g(y_i)]-f[g(x_i)]|\le\sum\limits_{i=1}^{n}M|g(y_i)-g(x_i)|\le M\varepsilon$, 故 $f[g(x)]$ 是 $[a,b]$ 上的绝对连续函数.

20. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可微. 若 $f'(x)=0$, a.e. $x\in[a,b]$, 试证明 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是一个常数 (函数).

证: 因为 $f'(x)=0$, a.e. $x\in[a,b]$, 所以 $f'\in L([a,b])$, 又因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可微, 由书 272 页例 1 的结论知: $\forall\,x\in[a,b]$, $f(x)-f(a)=\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t=0$, 所以 $f(x)=f(a)$, 即 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是一个常数 (函数).