在这个笔记中，我们 check 一些 weak L^q-space 的性质（书上留作习题），并用 Marcinkiewicz 插值来证明 weak Young inequality

一、For $1\le q\le\infty$ 我们定义 weak L^q-space $L^q_w(\mathbb{R}^n)$ (or $L^{q,\infty}(\mathbb{R}^n)$) 如下

$$L^q_w(\mathbb{R}^n) := \{ f \text{ 为 } \mathbb{R}^n \text{ 上可测函数}: \underbrace{\sup_{\alpha>0} \alpha \, |\{|f(x)|>\alpha\}|^{1/q}}_{\text{记作 } \langle f\rangle_{q,w}} < \infty \}$$

则有如下简单事实：

① $L^q(\mathbb{R}^n) \subset L^q_w(\mathbb{R}^n)$ $\because$ $\|f\|_q^q \ge \int_{|f|>\alpha} |f|^q \ge \alpha^q |\{|f|>\alpha\}|$

② $L^\infty_w = L^\infty$ ③ $\langle f^*\rangle_{q,w} = \langle f\rangle$

For $q>1$, define $\|f\|_{q,w} = \sup_{|A|<\infty} |A|^{-1/q'} \int_A |f(x)|$，则有

Prop： ① $\|\cdot\|_{q,w}$ 是一个范数

② $\exists\, C_1, C_2>0$（不依赖于 f）s.t.

$$C_1 \langle f\rangle_{p,w} \le \|f\|_{p,w} \le C_2 \langle f\rangle_{p,w}$$

Pf：① 是显然的

② 取 $A=\{|f|>\alpha\}$ 则

$$\langle f\rangle_{q,w} \ge |A|^{-\frac{1}{q'}} \int_A |f| \ge \alpha\, |A|^{1-\frac{1}{q'}} = \alpha\, |\{|f(x)|>\alpha\}|^{\frac{1}{q}}$$

便知可取 $C_2=1$.

反过来 $|A|^{-1/q'} \int_A |f(x)| = |A|^{-\frac{1}{q'}} \int_0^\infty |A\cap\{|f|>\alpha\}|\, d\alpha$

$$\leq |A|^{-1/q'} \int_0^\infty \min\left\{|A|, \frac{\|f\|_{q,w}^q}{\lambda^q}\right\} d\lambda$$

$$\leq |A|^{\frac{1}{q}-1} \left(|A|\cdot B + \frac{(q-1)\|f\|_{q,w}^q}{B^{q-1}}\right) \quad \forall B>0$$

$$= |A|^{\frac{1}{q}}\cdot B + \frac{(q-1)\cdot\|f\|_{q,w}^q}{\cancel{\left(\frac{B}{|A|^{\frac{1}{q}}}\right)}\left(B\cdot|A|^{\frac{1}{q}}\right)^{q-1}}$$

取 $B = \|f\|_{q,w}\,|A|^{-\frac{1}{q}}$ 可得

$$|A|^{-\frac{1}{q'}}\int_A |f| \leq q\cdot\|f\|_{q,w}$$

故可取 $C = \frac{1}{q}$

#

<u>Rmk</u>: $q=1$ 时命题不成立 因为 $\lim$

$$\langle f\rangle_{1,w} = \sup_{\lambda>0} \lambda\cdot|\{|f|>\lambda\}|$$ $\updownarrow$ 互相看不等价. 如取 $f=\frac{1}{x}$ $(n=1)$.

$$\|f\|_{1,w} = \sup_A \int_A |f(x)| \overset{MCT}{=} \|f\|_{L^1}$$

Weak Young inequality (without sharp constant)

For $1<p,q,r<\infty$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}=2$

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,g(x-y)\,h(y)\,dx\,dy\right| \le C\|f\|_p\|g\|_{q,w}\|h\|_r$$

利用Hölder不等式 只需证明

$$\|g*h\|_{p'} \le C\|g\|_{q,w}\|h\|_r \quad p' \text{ 为 } p \text{ 的对偶指标}$$

将p'记作p. 只需证明如下不等式

$$\boxed{\text{For } 1<p,q,r<\infty \quad \frac{1}{p}=\frac{1}{q}+\frac{1}{r}-1 \quad \|g*h\|_p \le C\|g\|_{q,w}\|h\|_r} \quad (*)$$

我们用Marcinkiewicz插值 为叙述这定理引入几个概念

<u>Def</u>: T is a mapping from $L^p(\mathbb{R}^n)$ $1\le p\le\infty$ to measurable function on $\mathbb{R}^n$

Then for $1\le q\le\infty$, we say that T is weak type (p,q) if

$\underline{\exists C>0}$, $\langle Tf\rangle_{q,w} \le C\|f\|_p$

RmK: If T is $L^p\to L^q$ 有界 $\Longrightarrow$ T is weak type (p,q) 故我们称

$L^p\to L^q$ 有界也被称为 strong type (p,q)

可知 strong type (p,∞) $\Longleftrightarrow$ weak type (p,∞)

Thm (Marcinkiewicz Interpolation Thm)

T is sublinear operator and simultaneously of weak type (p_0,q_0) and (p_1,q_1), $q_0\neq q_1$. If $0<\theta<1$, $\frac{1}{p}=\frac{1-\theta}{p_0}+\frac{\theta}{p_1}$, $\frac{1}{q}=\frac{1-\theta}{q_0}+\frac{\theta}{q_1}$

Then T is of strong type (p,q), namely

$$\|Tf\|_q\leq A\|f\|_p \quad f\in L^p(\mathbb{R}^n)$$

我们来看此插值不等式如何指导我们想要的不等式(吧)

从而证明如下结论:(思考 why?)

$\forall$ fix $q\in(1,\infty)$, $p,r\in(1,\infty)$ 满足 $\frac{1}{p}=\frac{1}{q}+\frac{1}{r}-1$ 算子

$g\in L^q_w$

$T(h)=g*h$ 是 weak type (r,p)

Warning: 我原本想对一般的 $g \in L^q_w$ 得到此估计 但是失败了!

所以我先对 $g(x) = |x|^{-\frac{n}{q}} \in L^q_w$ 来证 然后再利用课本上的一个技巧 推广到任意的 $g \in L^q_w$.

WLOG ~~$\|g\|_{q,w}=1$~~ $\|h\|_r = 1$

令 $g_1(x) = g(x)\cdot \chi_{\{|x|\le\mu\}}$ $\quad g_2(x) = g(x)\cdot\chi_{\{|x|>\mu\}}$

$\forall \lambda>0$ $\quad |\{|g*h|>\lambda\}| \le |\{|g_1*h|>\frac{\lambda}{2}\}| + |\{|g_2*h|>\frac{\lambda}{2}\}|$

$$\le C\frac{\|g_1*h\|_r^r}{\lambda^r} \le \frac{C\|g_1\|_1^r}{\lambda^r} \le \frac{C\mu^{\frac{nr}{q'}}}{\lambda^r}$$

$\|g_2*h\|_\infty \le \|g_2\|_{r'}\|h\|_r = \|g_2\|_{r'}$

$$\|g_1\|_1^r = \left(\int_{|x|\le\mu} |x|^{-\frac{n}{q}}dx\right)^r = \left(C\int_0^\mu x^{n-1-\frac{n}{q}}dx\right)^r = C\mu^{\frac{nr}{q'}}$$

$$\|g_2\|_{r'} = \left(\int_{|x|\ge\mu} |x|^{-\frac{nr'}{q}}dx\right)^{\frac{1}{r'}} = \left(\int_\mu^\infty x^{n-1-\frac{nr'}{q}}dx\right)^{\frac{1}{r'}} = \mu^{n(\frac{1}{r'}-\frac{1}{q})} = \mu^{-n/p}$$

$\boxed{\text{Recall } \frac{1}{p} = \frac{1}{q}+\frac{1}{r}-1}$

取 $\mu^{-n/p} = \frac{\lambda}{4}$ 则 $|\{|g_2*h|>\frac{\lambda}{2}\}| = 0$

$$\Longrightarrow |\{|g*h|>\lambda\}| \le C\lambda^{-\frac{pr}{q'}-r} \le C\lambda^{-p}$$