实变分析期中参考+补充

Problem 1

(1)(课本1.4) 详细的证明如下：

Step1：在μ为有限测度的情形证明此结论.

令 $\mathcal{M}=\{A\in\Sigma:\mu(A)=\nu(A)\}$ 我们将证明① $\Omega\subset\mathcal{M}$. ② $\mathcal{M}$是单调类

从而由单调类定理知 $\Sigma\subset\mathcal{M}$.

①是因为μ是限于一有限测度及测度连续性 ie

$\exists A_i\in\mathcal{A}$ st $\mu(\Omega)=\lim_{i\to\infty}\mu(A_i)=\lim_{i\to\infty}\nu(A_i)=\nu(\Omega)$

② $\mathcal{M}$是单调类是因为 $\mu(\Omega)=\nu(\Omega)<\infty$ 及测度连续性

Step2：对一般情形，有证明 $\forall A\in\mathcal{A}$, $\forall B\in\Sigma$ $\mu(A\cap B)=\nu(A\cap B)$

(这是对测度 $\tilde{\mu}=\mu|_{A_0}$, $\tilde{\nu}=\nu|_{A_0}$ 用Step1的结论)

再用测度的连续性 取$\{A_i\}\subset\mathcal{A}$, $A_i\subset A_{i+1}$ 且 $\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i=\Omega$

$\mu(B)=\lim_{i\to\infty}\mu(B\cap A_i)=\lim_{i\to\infty}\mu(B\cap A_i)=\nu(B)$ $\forall B\subset\Sigma$

(2) 乘积测度有两种定义方式

$\boxed{\text{方法一：数学分析做法}}$：设$(\Omega_1,\Sigma_1,\mu_1)$, $(\Omega_2,\Sigma_2,\mu_2)$是两个测度空间，定义 $\Omega_1\times\Omega_2$上的一个σ代数

Σ为包含 $A_1\times A_2$, $A_i\in\Sigma_i$ 的最小的那个 (注意此时还没有测度在$\Omega_1\times\Omega_2$上定义)

$\forall A\subset\Sigma$ $\forall y\in\Omega_2$ 定义 $A_1(y)=\{x\in\Omega_1:(x,y)\in A\}$ 类似地可定义 $A_2(x)$

Prop：$A_1(y)\in\Sigma_1$, $\forall y\in\Omega_2$ (证明可见1.2节)

Prop：$\int_{\Omega_2}\mu_1(A_1(y))\,d\mu_2(y)=\int_{\Omega_1}\mu_2(A_2(x))\,d\mu_1(x)$ $\forall A\in\Sigma$ 成立

(证明可见1.10)

从而定义 $(\mu_1\times\mu_2)(A):=\int_{\Omega_2}\mu_1(A_1(y))\,d\mu_2(y)$

方法二：参见 Folland 1.4和1.5节

先思路是在$\Omega_1\times\Omega_2$中由矩形组成的代数上定义一个"premeasure"然后利用"测度延拓唯一性"将其延拓到由此代数生成的σ代数上去.

Fubini定理的陈述和论证参见1.11和1.12.

(3) σ有限是必要的（第一章第4题）反例：

μ_1是$[0,1]$上Lebesgue测度 μ_2是$[0,1]$上计数测度

取$A=\{0\}\times[0,1]$ 则
$$\begin{cases}\int_{\Omega_1}\mu_2(A_1(x))\,d\mu_1(x)=\infty\\ \int_{\Omega_2}\mu_1(A_2(y))\,d\mu_2(y)=0\end{cases}$$

Problem 2

(1) f可积是显然的，对函数列$F_j+F-|f_j-f|$用Fatou引理得知

$$2\int F=\int\lim_{j\to\infty}(F_j+F-|f_j-f|)\leq\varliminf_{j\to\infty}\int F_j+F-|f_j-f|$$

≥ 0 (why?)

(WLOG $\lim_{j\to\infty}F_j(x)=F(x)$, a.e) why?

$$=2\int F-\varlimsup_{j\to\infty}\int|f_j-f|$$

$$\Rightarrow\varlimsup_{j\to\infty}\int|f_j-f|=0 \quad \text{特别地}\ \int f=\lim_{j\to\infty}\int f_j$$

这个证明写不严谨. 更加严谨的写法是这样：

反证 假设存在子列 $\varliminf_{j\to\infty}\int|f_{j}-f|\geq\varepsilon_0>0$, 对$F_{j}$取子列使其a.e收敛到$F$

然后用上面的论证得到矛盾.

(2) (a) $f_j = \frac{1}{j}\chi_{[0,j]}$

(b) 取 $f_j = \chi_{[j,j+\frac{1}{2}]} - \chi_{[j+\frac{1}{2},j+1]}$

则 $f_j \to 0$ a.e. 且 $\int f_j = 0$ 故 $\int \lim_{j\to\infty} f_j = \lim_{j\to\infty}\int f_j$

但 f_j 不存在 dominating sequence.

若存在 F_j 及 F 满足条件, 则 $\int F = \sum_{j=0}^{\infty}\int_{[j,j+1]} F$

$$= \sum_{j=0}^{\infty}\left(\int_{[j,j+1]} F_j + o(1)\right)$$

$$\geq \sum_{j=0}^{\infty}(1+o(1)) = \infty \text{ 矛盾}$$

(c) $f_j = \frac{1}{j}\chi_{[j,j+1]}$ f_j 本身即是 ~~控制~~ Dominating sequence

但没有控制函数 因为若 $F(x) \geq f_j(x)$ $\forall j \in \mathbb{N}$ a.e. $x \in \mathbb{R}_+$

则 $\int F \geq \sum_j \int_{[j,j+1]} f_j = \infty$

4. (1) (a) 略 (b) 引理 1.1.6 反例: $f_j = \chi_{[j,j+\frac{1}{j}]}$ ~~$\frac{1}{j}\chi_{[0,j]}$~~

(c) 由于 $f_j \xrightarrow{\mu} f$ 则 $\exists$ 子列 $\{f_{k_i}\}$ s.t. $\mu(\{|f_{k_{i+1}} - f_{k_i}| > \frac{1}{2^i}\}) < \frac{1}{2^i}$ (why?)

则 $f_{k_i} \xrightarrow{a.e.} f$ 这是因为 $f_j \xrightarrow{\mu} f \iff \forall \varepsilon > 0$ $\lim_{j\to\infty}\mu(\{|f_j - f| > \varepsilon\}) = 0$ ……(*)

补充: $f_j \xrightarrow{a.u.} f \iff \forall \varepsilon > 0$ $\lim_{n\to\infty} m\left(\bigcup_{j\geq n}^{\infty}\{|f_n - f| \geq \varepsilon\}\right) = 0$ ……(**)

从而 结合 (*) 便可看出 Egorov 定理

反例: $f_n = \chi_{[\frac{k}{2^i}, \frac{k+1}{2^i}]}$ $n = 2^i + k$

3

⇒) 若 $f_j \overset{a.un.}{\rightrightarrows} f$ 则由定义知 $\forall \varepsilon>0$ ~~$\exists\delta>0$~~ $\exists A_\varepsilon$ ~~$\mu(A_\varepsilon)$~~ $\mu(\Omega-A_\varepsilon)<\varepsilon$

st $f_j \rightrightarrows f$ in A_ε，从而 $\forall\delta>0$ $\exists N(\varepsilon,\delta)\in\mathbb{N}$ st

$$m\Big(\bigcup_{k\ge N}\{|f_k-f|\ge\delta\}\Big)\le\varepsilon \Rightarrow \varlimsup_{n\to\infty} m\Big(\bigcup_{k\ge n}\{|f_k-f|\ge\delta\}\Big)\le\varepsilon$$

由 ε 的任意性 便知 $\forall\delta>0$，$\lim\limits_{n\to\infty} m\Big(\bigcup_{k\ge n}\{|f_k-f|\ge\delta\}\Big)=0$

⇐) $\forall\delta>0$ $\forall j\in\mathbb{N}$ $\exists n_j\in\mathbb{N}$ st $m\Big(\bigcup_{k\ge n_j}\{|f_k-f|\ge\frac{1}{2^j}\}\Big)<\frac{\delta}{2^j}$

从而 $\underbrace{m\Big(\bigcup_{j\ge1}\bigcup_{k\ge n_j}\{|f_k-f|\ge\frac{1}{2^j}\}\Big)}<\delta$

↓ 记为 Ω_δ

claim: $f_n\rightrightarrows f$ in $\Omega\setminus\Omega_\delta$

因为 $\forall\varepsilon>0$ $\exists j\in\mathbb{N}$ st $1/2^j<\varepsilon$ 故当 $k\ge n_j$ 时

$|f_k-f|\le\varepsilon$，$\forall x\in\Omega\setminus\Omega_\delta$ 上成立

(2) Brezis-Lieb

(a) 反例 $f_k(x)=\sin kx\in L^2(0,1)$ then

① $f_k\overset{w}{\rightharpoonup}0$ in L^2 (Riemann-Lebesgue 引理)

② $\int|f_k|^2=C$ 不依赖于 k

③ $\forall x\in(0,1)$ $\sin kx$ 不收敛.

(b) $f_j=\chi_{[j,j+1]}$

• 总结：常用反例

① 振荡 $f\sin kx$

② "移向无穷远" $\chi_{[j,j+1]}$

③ decay $\frac{1}{n}\chi_{[0,n]}$

④ $n\chi_{[0,\frac{1}{n}]}$

• 4.12.1中的结论对一般的一致凸的Banach空间都对（定义见 Problem 6）

Thm: X is a uniformly convex space, $x_n \xrightarrow{w} x$, $\|x_n\| \to \|x\|$

$\Longrightarrow \|x_n - x\| \to 0$

Pf. 不妨设 $x \neq 0$（否则结论显然）

从而 $y_n = \frac{x_n}{\|x_n\|} \xrightarrow{w} \frac{x}{\|x\|} = y$

下半连续性

$\Longrightarrow 1 = \|y\| \leq \varliminf_{n\to\infty} \left\|\frac{y_n+y}{2}\right\| \xrightarrow{\text{一致凸性}} \|y_n - y\| \to 0$

$\Longrightarrow \|x_n - x\| \to 0$

• 关于逐点收敛、依测度收敛、弱收敛有一些有意思结论 大家可以Google一下

Thm: $u_n \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1<p<\infty$ converging a.e. or in measure to u,

with $\|u_n\|_{L^p(\Omega)} \leq C$, $\forall n$

then $u \in L^p$, $u_n \xrightarrow{w} u$ in L^p.

Rmk: $p=1$ 的结论是不对的 如 $u_n = n\chi_{[0,\frac{1}{n}]}$

$\boxed{\text{Problem 1}}$

• $\|f\| = (\int |f|^p)^{1/p}$，$p\in(0,1)$ 不是一个范数

因为 $(\int |f|^p)^{1/p} + (\int |g|^p)^{1/p} \le (\int |f+g|^p)^{1/p}$ for $f,g \ge 0$

• $L^p\ (0<p<1)$ 可以赋予距离 $d(f,g) := \int |f-g|^p$ 易知其满足

① $d(f,g) \ge 0$ 且等号成立 $\Leftrightarrow f=g$

② $d(f,g) = d(g,f)$

③ $d(f,h) \le d(f,g) + d(g,h)$ （因为 $(a+b)^p \le a^p + b^p$，$p\in(0,1)$，$a,b\ge 0$）

且可知其是完备的．若 f_j 为Cauchy列 ∃ 子列 f_{k_j} s.t.

$$\int |f_{k_{j+1}} - f_{k_j}|^p \le \frac{1}{2^j} \quad 则$$

$$\int \Big|\sum_{j=1}^{\infty}(f_{k_{j+1}} - f_{k_j}) + f_{k_1}\Big|^p \le \int |f_{k_1}|^p + \sum_{j=1}^{\infty}\int |f_{k_{j+1}} - f_{k_j}|^p < \infty$$

易知 $f = \sum_{j=1}^{\infty}(f_{k_{j+1}} - f_{k_j}) + f_{k_1}$ 即为 f_j 的极限．

• 我们来证明反向的Hölder不等式 并用此来证明反向Minkowski不等式

i.e. $0<p<1$，$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$　$\|fg\|_1 \ge \|f\|_p \cdot \|g\|_{p'}$，~~p∈(0,1)~~

Pf　$\int |f|^p = \int |fg|^p \cdot |g|^{-p} \le (\int |fg|)^p \cdot (\int |g|^{-p\cdot\frac{1}{1-p}})^{1-p}$

对 $\frac{1}{p}$ 和 $\frac{1}{1-p}$ 这对共轭指标用Hölder不等式

$\| \ (\int |fg|)^p \cdot (\int |g|^{p'})^{\cancel{\ }}$

两边开 p 次方便得结论

- 反向Minkowski不等式 $0<p<1$ $f,g\geq 0$

$$\left(\int|f|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int|g|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leq\left(\int|f+g|^p\right)^{1/p}$$

pf. $\int|f+g|^p\overset{f,g\geq 0}{=}\int|f+g|^{p-1}(|f(x)|+|g(x)|)$

$$\overset{\text{反向Hölder}}{\geq}\left(\left(\int|f(x)|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int|g(x)|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right)\left(\int|f+g|^p\right)^{1-\frac{1}{p}}$$

$$\Longrightarrow\left(\int|f+g|^p\right)^{\frac{1}{p}}\geq\left(\int|f(x)|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int|g(x)|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

- 类似地可证明 log-concavity 不等式 即对 $0<p,q<1$

$\frac{1}{r}=\frac{1-\theta}{p}+\frac{\theta}{q}$ $\theta\in[0,1]$ 有 $\|f\|_r\geq\|f\|_p^{1-\theta}\cdot\|f\|_q^{\theta}$

pf. $\int|f|^r=\int|f|^{r(1-\theta)}|f|^{r\theta}\overset{\text{反向Hölder}}{\geq}\left(\int|f|^p\right)^{\frac{r(1-\theta)}{p}}\cdot\left(\int|f|^q\right)^{\frac{r\theta}{q}}$

$$\Longrightarrow\|f\|_r\geq\|f\|_p^{1-\theta}\cdot\|f\|_q^{\theta}$$

- L^p $p\in(0,1)$ 有一些奇怪的性质.

Prop: $L^p(\mathbb{R}^n)(0<p<1)$ contains no convex open sets other than ϕ and L^p

pf. 设 $\phi\neq V\subset L^p$ 为一个凸开集 不妨设 $0\in V$ 则 $B_r\subset V$ for some $r>0$

$\forall f\in L^p$. $\exists$ positive integer n st $n^{p-1}\int|f|^p<r$ (因为 $p<1$)

由积分关于积分区域连续性可知, $\exists$不相交可测集 E_i st

$\mathbb{R}^n=\bigcup_{i=1}^{n}E_i$ $\int_{E_i}|f|^p=\frac{1}{n}\int_{\mathbb{R}^n}|f|^p$

定义 $g_i = n\chi_{E_i} f$ 则 $\int |g_i|^p = n^{p-1}\int |f|^p < r$

从而 $g_i \in B_r$，$f = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g_i \in B_r \Rightarrow V = L^p$。

#

~~Pro~~ Cor: $f: L^p(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ 连续函数且线性 则 $f \equiv 0$。

Pf: $f^{-1}((-\varepsilon, \varepsilon))$ 为 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 中~~邻域~~ 从而为 $L^p(\mathbb{R}^n)$

由 ε 任意性知 $f \equiv 0$

#

$\boxed{\text{Problem 6}}$ 来自老师的答案 (2)

(1) $\boxed{\text{方法一}}$ 我们在证明Hanner不等式时曾证明了这样一个结论：$\forall A,B\in\mathbb{C}$

$$|A+B|^p+|A-B|^p \ge \alpha(r)|A|^p+\beta(r)|B|^p \quad \forall r\in(0,1],\ 1\le p\le 2$$

其中 $\alpha(r)=(1+r)^{p-1}+(1-r)^{p-1} \ge \beta(r)=\left((1+r)^{p-1}-(1-r)^{p-1}\right)\cdot r^{1-p}$

积分可得 $\|f+g\|_p^p+\|f-g\|_p^p \ge \alpha(r)\|f\|_p^p+\beta(r)\|g\|_p^p$

不妨设 $\|g\|_p\le\|f\|_p$，取 $r=\left(\|g\|_p/\|f\|_p\right)^{p'}$ 可得

$$\text{RHS}=\left[\left(\|f\|_p^{p'}+\|g\|_p^{p'}\right)^{p-1}+\left(\|f\|_p^{p'}-\|g\|_p^{p'}\right)^{p-1}\right]+\left(\|f\|_p^{p'}+\|g\|_p^{p'}\right)^{p-1}$$
$$-\left(\|f\|_p^{p'}-\|g\|_p^{p'}\right)^{p-1}$$

$$\Longrightarrow \|f+g\|_p^p+\|f-g\|_p^p \ge 2\left(\|f\|_p^{p'}+\|g\|_p^{p'}\right)^{p-1}$$

用 f,g 替换为 $f+g$，$f-g$ 便得

$$2^{p-1}\left(\|f\|_p^p+\|g\|_p^p\right)\ge\left(\|f-g\|_p^{p'}+\|f+g\|_p^{p'}\right)^{p-1}$$

注意到 $p-1=p/p'$，而两边开 $p-1$ 次根号便有要证的不等式

方法二：见老师的答案

(3)

(2)

$1<p\le 2$ 时，利用(1)中不等式可知 $\|f\|_p=\|g\|_p=1$ 时 $\|f-g\|_p=\varepsilon$

$$\cancel{\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p^{p'} \le \left(1-\left\|\frac{f-g}{2}\right\|_p^{p'}\right)} =$$

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p^{p'} + \left\|\frac{f-g}{2}\right\|_p^{p'} \le 1$$

$$\Longrightarrow \left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p \le (1-C\varepsilon^{p'})^{\frac{1}{p'}} \le 1-\tilde{C}\varepsilon^{p'}$$

$\Longrightarrow$ L^p $(1<p\le 2)$ 是 p'-order uniformly convex.

$2\le p<\infty$ 时 (1)中的不等式会反向 (对偶是类似的) 则有

$$\|f+g\|_p^{p'} + \|f-g\|_p^{p'} \ge 2\left(\|f\|_p^p+\|g\|_p^p\right)^{p'/p}$$

$$\Longrightarrow \|f\|_p^{p'} + \|g\|_p^{p'} \ge 2\left(\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p^p + \left\|\frac{f-g}{2}\right\|_p^p\right)^{p'/p}$$

类似地 $\|f\|_p=\|g\|_p=1$ $\|f-g\|_p=\varepsilon$ 时可知

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p^p + C\varepsilon^p \le 1$$

从而有 L^p $(2\le p<\infty)$ 是 p-order uniformly convex

综上便知 L^p $(1<p<\infty)$ 是 $\max\{p, p'\}$-order uniformly convex.

(3) 对 L^2 有平行四边形法则 $\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_2^2 + \left\|\frac{f-g}{2}\right\|_2^2 = \frac{1}{2}(\|f\|_2^2+\|g\|_2^2)$

$$\Longrightarrow \left\|\frac{f+g}{2}\right\|_2^2 \ge \cancel{(1-C\varepsilon)^2}\ 1-C\varepsilon^2$$

只能是 2-order uniformly

10

Problem 7

(1) Projection 是唯一的 这是由于 L^p $(1<p<\infty)$ 是一致凸的 我们不妨设 $0\notin C$ 证明 对于闭凸集 C $0\notin C$ $\exists!\ x_0\in C$ st $\|x_0\| = \inf_{x\in C}\|x\|$

若 $\exists\ x_0, x_1\in C$ st $\|x_0\| = \|x_1\| = \inf_{x\in C}\|x\| = d$

$\|x_0 - x_1\| = \varepsilon > 0$

则 $d - \left\|\frac{x_0+x_1}{2}\right\| > \delta(\varepsilon) > 0$ 而 $\frac{x_0+x_1}{2}\in C$ 矛盾

(2) 见课本 2.8 的证明可知

设 $h\in K$ st $\|f-h\|_p = \inf_{g\in K}\|f-g\|_p$

易知 $|f-h|^{p-2}\overline{(f-h)}\in L^{p'}$，定义相应的泛函为

$$L(g) = \int g\,|f-h|^{p-2}\overline{(f-h)}$$

则 $\mathrm{Re}\,L(g) \le \mathrm{Re}\,L(h)$ $\quad\forall g\in K$

且 $L(f-h) = \|f-g\|_p^p > 0$

从而知 $\exists\ a\in\mathbb{R}$ st $L(f) > a > L(g)$ $\forall g\in K$

#

Problem 8 (2.16)

11