2020.2.24

P28. 1. 设 $f: X\to Y$，证明如下等价：① $f$ 连续；② $\forall A\subset X$，$f(\overline{A})\subset\overline{f(A)}$；

③ $\forall B\subset Y$，$\overline{f^{-1}(B)}\subset f^{-1}(\overline{B})$

证：①⇒②：$\forall x\in\overline{A}$，要么 $x\in A \Rightarrow f(x)\in f(A)\subset\overline{f(A)}$

要么 $x\in A' \Rightarrow$ 若 $f(x)\notin\overline{f(A)}$，则 $\exists f(x)$ 的开邻域 $N$，s.t. $N\cap f(A)=\phi$

由 $f$ 连续，$x\in f^{-1}(N)$ 开 $X$ 且 $f^{-1}(N)\cap A = f^{-1}(N\cap f(A)) = \phi$.

则 $x\notin A'$ 与 $x\in A'$ 矛盾.

$\therefore f(x)\in\overline{f(A)}$

从而 $f(\overline{A})\subset\overline{f(A)}$.

②⇒③：$f^{-1}(B)=A$ 时，$f(\overline{A}) = f(\overline{f^{-1}(B)})\subset\overline{f(A)} = \overline{B}$

$\Rightarrow \overline{A}\subset f^{-1}(\overline{B})$

③⇒①：取 $B$ 为闭集，则 $\overline{f^{-1}(B)}\subset f^{-1}(\overline{B}) = f^{-1}(B)$ $\Rightarrow f^{-1}(B)$ 为 $X$ 中闭集 $\Rightarrow f$ 连续. #

4. 证明下列空间同胚：① $X_1=E^2\setminus\{0\}$；② $X_2=\{(x,y,z)\in E^3 \mid x^2+y^2=1\}$

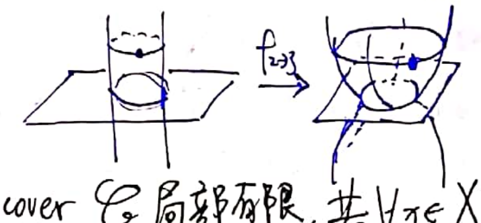
③ $X_3=\{(x,y,z)\in E^3 \mid x^2+y^2-z^2=1\}$ 单叶双曲面.

证：①→②：$\forall (r\cos\theta, r\sin\theta)\in X_1$ $(r>0)$，令 $f_{1\to2}(r\cos\theta, r\sin\theta) = (\cos\theta, \sin\theta, \lg r)$

则 $f_{1\to2}^{-1} = f_{2\to1}(x,y,z) = (xe^z, ye^z)$

而连续性与微分相容，易见 $f_{1\to2}$、$f_{2\to1}$ 连续.

②→③：$\forall (x,y,z)\in X_2$，令 $f_{2\to3}(x,y,z) = (ax, ay, z)$，其中 $a=\sqrt{z^2+1}$.




则 $f_{3\to2} = f_{2\to3}^{-1}(x,y,z) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, z\right)$

同样易见连续 #

5. $X$ 的 cover $\mathcal{C}$ 局部有限，若 $\forall x\in X$，∃邻域只与 $\mathcal{C}$ 中有限元相交.

设 $\mathcal{C}$ 为 $X$ 的局部有限闭 cover，$f: X\to Y$ 在 $\forall C\in\mathcal{C}$ 上 $f_C$ 连续，则 $f$ 连续.

证：$\forall x\in X$，∃开邻域 $N_x$ 只与 $C_1,\dots,C_n\in\mathcal{C}$ 相交.

由粘接引理，$f$ 在 $\bigcup_{i=1}^{n} C_i$ 连续，由 $N_x\subset\bigcup_{i=1}^{n} C_i$，$f$ 在 $N_x$ 连续 $\Rightarrow f$ 在 $x$ 连续 $\Rightarrow f$ 连续 #

学院：　专业：　班级　学号：　姓名：

装　订　线

10. $f: X \to Y$ 开(闭)映射，若 $f$ 把 $X$ 的开(闭)集映为 $Y$ 的开(闭)集.

举例说明开(闭)映射不一定闭(开)映射.

Sol：① $f(x) = 0$，$x \in E^1$，其中 $f: E^1 \to E^1$

则像要么是 $\phi$，要么是 $\{0\}$，都是 $E^1$ 中闭集.

$\Rightarrow f$ 闭映射

$\Rightarrow$ 由 $\{0\}$ 非开，$f$ 非开映射.

② 定义 $E^1$ 的子空间 $E^1 \setminus \{0\}$.

$f: E^1 \setminus \{0\} \to E^1$

$x \mapsto x$

则由 $E^1 \setminus \{0\} \overset{开}{\subset} E^1$

$f$ 将开集映为开集. $\Rightarrow f$ 开映射.

但闭集 $(0,1]$ 映到 $(0,1]$ 在 $E^1$ 中非闭

$\Rightarrow f$ 非闭映射

#

12. 设 $(X,d)$ 度量空间，非 $A \overset{闭}{\subset} X$. $f: X \to E^1$

$x \mapsto d(x,A) = \inf\{d(x,a) : a \in A\}$.

证明 $f$ 连续，且 $f(x) = 0 \Leftrightarrow x \in A$.

Pf：$\forall$ 开集 $N \subset E^1$，$\forall x \in f^{-1}(N)$，$f(x) \in N \Rightarrow \exists \varepsilon > 0$，s.t. $B(f(x), \varepsilon) \subset N$

$\forall y \in B(x, \frac{\varepsilon}{2})$，$\forall a \in A$，有 $d(y,a) \geq -d(y,x) + d(x,a)$

$> d(x,A) - \frac{\varepsilon}{2}$

$\Rightarrow d(y,A) \geq d(x,A) - \frac{\varepsilon}{2}$

由对称性，同理有 $d(x,A) \geq d(y,A) - \frac{\varepsilon}{2}$

$\Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$

$\Rightarrow y \in f^{-1}(B(f(x), \varepsilon)) \subset f^{-1}(N)$

$\therefore B(x, \frac{\varepsilon}{2}) \subset f^{-1}(N)$ ($\forall x \in f^{-1}(N)$，$\exists \varepsilon$.)

$\therefore f$ 连续

且 $x \in A \Rightarrow d(x,A) = 0$

$x \notin A \Rightarrow \exists \delta$，s.t. $B(x,\delta) \subset A^c$ (开集) $\Rightarrow d(x,A) \geq \delta > 0$.

$\Rightarrow f(x) = 0$ iff $x \in A$

#

P34. 1. $A, B$ 分别为 $X, Y$ 闭，证明 $A \times B \overset{闭}{\subset} X \times Y$

Pf：$\because A^c$ 开，$B^c$ 开

$\therefore A^c \times Y$，$X \times B^c$ 开

$\therefore (A \times B)^c = (A^c \times Y) \cup (X \times B^c)$ 开 $\Rightarrow A \times B$ 闭.

#

2. $A \subset X$，$B \subset Y$，证明 $X \times Y$ 中，① $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$

Pf：$\forall (x,y) \in \overline{A \times B}$

$\forall x$ 的邻域 $N_x \in \mathcal{T}_X$，有 $N_x \times Y \in \mathcal{T}_{X \times Y}$，$(N_x \times Y) \cap (A \times B) \neq \phi \Rightarrow N_x \cap A \neq \phi$

$\Rightarrow x \in \overline{A}$

同理 $y \in \overline{B}$　故 LHS $\subset$ RHS.

另一方面，$\forall x \in \overline{A}$，$y \in \overline{B}$，$\forall (x,y)$ 的 $X \times Y$ 中邻域 $N$，

由定义知 $\exists I$，s.t. $N = \bigcup_{i \in I} (N_{x_i} \times N_{y_i})$，$N_{x_i} \in \mathcal{T}_X$，$N_{y_i} \in \mathcal{T}_Y$

$\therefore (x,y) \in N_{x_i} \times N_{y_i}$ for some $i$

由 $x \in \overline{A}$ 知 $N_{x_i} \cap A \neq \phi$，同理 $N_{y_i} \cap B \neq \phi$ $\Rightarrow (N_{x_i} \times N_{y_i}) \cap (A \times B) \neq \phi$

$\Rightarrow N \cap (A \times B) \neq \phi$

$\Rightarrow (x,y) \in \overline{A \times B}$.

$\Rightarrow$ RHS $\subset$ LHS.

#

② $(A \times B)^\circ = \mathring{A} \times \mathring{B}$

Pf：$(\mathring{A} \times \mathring{B})^c = ((\mathring{A})^c \times Y) \cup (X \times (\mathring{B})^c)$　　(*)：$\overline{A^c} = (A^c)^\circ$

$\overset{(*)}{=} (\overline{A^c} \times Y) \cup (X \times \overline{B^c})$

$\overset{①}{=} \overline{A^c \times Y} \cup \overline{X \times B^c}$

$\overset{闭包与并可换序}{=} \overline{(A^c \times Y) \cup (X \times B^c)}$

$\overset{(*)}{=} \left(\left(\left((A^c \times Y) \cup (X \times B^c)\right)^c\right)^\circ\right)^c$

$= \left((A \times B)^\circ\right)^c$　　$\Rightarrow \mathring{A} \times \mathring{B} = (A \times B)^\circ$

#

5. 设 $X, Y$ 可分，证明 $X\times Y$ 可分.

Pf: 设 $X, Y$ 的可数稠密集为 $A, B$，则 $A\times B$ 可数，且 $\overline{A\times B} \overset{\text{作业2①}}{=\!=} \bar{A}\times\bar{B} = X\times Y \Rightarrow$ 稠密 #

6. $A_i \subset X_i$, $i=1,2$. 证明 $A_1\times A_2$ 作为 $X_1\times X_2$ 子空间的拓扑 $=$ $A_1$ 与 $A_2$ 乘积空间的拓扑

Pf: 即证 $\mathcal{T}_{X_1\times X_2}|_{A_1\times A_2} = \mathcal{T}_{X_1}|_{A_1} \times \mathcal{T}_{X_2}|_{A_2}$

$(\supset)$: $\forall B_1\times B_2 \in \mathcal{T}_{X_1}|_{A_1}\times\mathcal{T}_{X_2}|_{A_2}$, $\exists U_i\in\mathcal{T}_{X_i}$, s.t. $B_i = U_i\cap A_i$

$\therefore B_1\times B_2 = (U_1\cap A_1)\times(U_2\cap A_2) = (U_1\times U_2)\cap(A_1\times A_2) \in \mathcal{T}_{X_1\times X_2}|_{A_1\times A_2}$

(由 $U_1\times U_2 \in \mathcal{T}_{X_1\times X_2}$)

$\Rightarrow$ RHS $\subset$ LHS (由 $\times$ 的定义是其中元素之并，而 $\mathcal{T}_{X_1\times X_2}|_{A_1\times A_2}$ 关于任意并封闭)

$(\subset)$: $\forall U\cap(A_1\times A_2)\in$ LHS, $U\in\mathcal{T}_{X_1\times X_2}$, $\exists \{U_{1i}\times U_{2i}\}_{i\in I} \in \mathcal{T}_{X_1}\times\mathcal{T}_{X_2}$,

s.t. $U = \left(\bigcup_{i\in I}(U_{1i}\times U_{2i})\right)$ 由任意并在RHS封闭，只须 $(U_{1i}\times U_{2i})\cap(A_1\times A_2)\in$ RHS.

由 $(U_{1i}\times U_{2i})\cap(A_1\times A_2) = (U_{1i}\cap A_1)\times(U_{2i}\cap A_2) \in \mathcal{T}_{X_1}|_{A_1}\times\mathcal{T}_{X_2}|_{A_2}$ 得证! #

9. $\mathbb{R}$ 上 $\mathcal{B} = \{[a,b): a<b\}$，证明在 $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ 中，$[a,b)$ 既开又闭.

Pf: $[a,b)$ 开，由 $\mathcal{B}$ 定义.

$[b,\infty) = \bigcup_{n=1}^{\infty}[b, b+n)$ 开
$(-\infty, a) = \bigcup_{n=1}^{\infty}[a-n, a)$ 开
$\Big\}$ $[a,b)^c$ 开 $\Rightarrow [a,b)$ 闭. #

10. $\mathcal{B}_i$ 为 $(X_i, \mathcal{T}_i)$ 拓扑基. 证明 $\mathcal{B} = \{B_1\times B_2 : B_i\in\mathcal{B}_i\}$ 为 $X_1\times X_2$ 拓扑基.

Pf: 即证 $\begin{cases} ① \bigcup_{B\in\mathcal{B}} B = X_1\times X_2 \\ ② \forall B^1\in\mathcal{B}_1, B^2\in\mathcal{B}_2 \text{ 有 } B^1\cap B^2\in\mathcal{B} \end{cases}$

①: 由 $\bigcup_{B\in\mathcal{B}} B = \bigcup_{B_1\in\mathcal{B}_1}\bigcup_{B_2\in\mathcal{B}_2} B_1\times B_2 = \left(\bigcup_{B_1\in\mathcal{B}_1}B_1\right)\times\left(\bigcup_{B_2\in\mathcal{B}_2}B_2\right) = X_1\times X_2$ 得.

②: 由 $B^1\cap B^2 = (B_1^1\cap B_1^2)\times(B_2^1\cap B_2^2)\in\mathcal{B}_1\times\mathcal{B}_2$ 得. #

扫描全能王 创建

学院：　　专业：　　班级：　　学号：　　姓名：

装　订　线

2020.2.27

P43. 1. 称 $X$ 满足 $T_0$ 公理，若 $\forall x \neq y \in X$，$\exists U \in \tau$, s.t. $U$ 只包含一点.

举例：满足 $T_0$ 非 $T_1$ 的拓扑空间.

Sol： $X = \{0,1\}$，$\tau = \{\phi, \{0\}, X\}$

则对 $x=0, y=1$，$\exists U = \{0\}$, s.t. $U$ 只包含 $x$. $\Rightarrow$ 有 $T_0$.

但不存在 $U \in \tau$, s.t. 它只包含 $1=y$. $\Rightarrow$ 非 $T_1$. #

(抄串题了，4在下面)

5. $Y$: Hausdorff, $f: X \to Y$ 连续，则 $f$ 的图 $G_f \triangleq \{(x, f(x)): x \in X\}$ 为 $X \times Y$ 闭

Pf $\forall (x,y) \in X \times Y$，若 $y \neq f(x)$，即 $(x,y) \notin G_f$.

由 $Y$ Hausdorff，$\exists$ 开邻域 $N_y$. $N_{f(x)}$, s.t. $N_y \cap N_{f(x)} = \phi$

($N_y$ 代表包含 $y$ 的 neighbourhood)

$\Rightarrow f^{-1}(N_y) \cap f^{-1}(N_{f(x)}) = \phi$ 且 $x \in f^{-1}(N_{f(x)}) \overset{开}{\subset} X$

$\therefore f^{-1}(N_{f(x)}) \times N_y$ 为 $(x,y)$ 开邻域 且与 $G_f$ 无交.

$\therefore (x,y) \in (\overline{G_f})^c$ #

$\therefore G_f^c = \overline{G_f}^c \Rightarrow G_f$ 闭.

4. $Y$: Hausdorff, $f: X \to Y$ 连续，则 $\mathrm{Fix}\, f = \{x \in X: f(x) = x\}$ 为 $X$ 闭.

(注：这里应为 $f: X \to X$，否则怎有 $f(x)$ 与 $x$ 的大小比较?)

Pf: $\forall x \notin \mathrm{Fix}\, f$，$f(x) \neq x$，由 Hausdorff. $\exists$ 开邻域 $N_x \cap N_{f(x)} = \phi$.

由 $f$ 连续，有 $x \in f^{-1}(N_{f(x)}) \subset X$ 开.

考虑开集 $N_x \cap f^{-1}(N_{f(x)}) =: N$，则 $x \in N$ 且

$\forall y \in N$，$f(y) \in N_{f(x)} \Rightarrow f(y) \notin N_x \supset N \Rightarrow f(y) \neq y \Rightarrow N \in (\mathrm{Fix} f)^c$ #

$\therefore (\mathrm{Fix}\, f)^c$ 开，即 $\mathrm{Fix}\, f$ 闭.

8. 证明两 Hausdorff 空间 $\boxed{乘积}$ 也 Hausdorff.

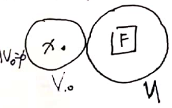
Pf： $\forall (x_1, y_1) \neq (x_2, y_2) \in X \times Y$，不妨 $x_1 \neq x_2$

则由 $X$ Hausdorff. $\exists N_1 \cap N_2 = \phi$, s.t. $x_i \in N_i$, $i = 1,2$. $N_i \in \tau_X$.

$\therefore N_i \times Y \in \tau_{X \times Y}$ 为无交的 $X \times Y$ 中分别含两点的开邻域 #

$\therefore X \times Y$ Hausdorff.

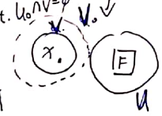
9. 设 $X: T_3$，$F \subset X$ 闭，$x \notin F$. 证明 $\exists F$ 和 $x$ 的开邻域 $U, V$, s.t. $\overline{U} \cap \overline{V} = \phi$.




Pf：由 $T_3$，$\exists F$ 和 $x$ 的开邻域 $U$、$V_0$, s.t. $U \cap V_0 = \phi$

$\therefore \overline{U} \subset \overline{V_0^c} = V_0^c \Rightarrow x \notin \overline{U}$

再由 $T_3$，$\exists \overline{U}$ 和 $x$ 的开邻域 $U_0$. $V$, s.t. $U_0 \cap V = \phi$




$\therefore \overline{V} \subset \overline{U_0^c} = U_0^c \Rightarrow \overline{V} \cap \overline{U} = \phi$. #

$\overline{U} \subset U_0$

10. $f: X \to Y$ 满、闭连续映射，若 $X: T_4$，则 $Y: T_4$.

Pf： $\forall A$ 为 $Y$ 闭集，$W$ 为开集，$A \subset W$

由 $f$ 连续 $f^{-1}(A)$ 为 $X$ 闭集，$f^{-1}(W)$ 为 $X$ 开集，$f^{-1}(A) \subset f^{-1}(W)$

由 $X: T_4$，$\exists \widetilde{U}$ 为 $X$ 开集，s.t. $f^{-1}(A) \subset \widetilde{U}$, $\overline{\widetilde{U}} \subset f^{-1}(W)$

由闭 + 满知 $f$ 也为开映射.

$\therefore f(\widetilde{U}) \subset Y$ 开，$f(\overline{\widetilde{U}}) \subset Y$ 闭

$\therefore \exists U = f(\widetilde{U})$ s.t. $A \subset U$

且 $f(\widetilde{U}) \subset f(\overline{\widetilde{U}}) \Rightarrow \overline{U} = \overline{f(\widetilde{U})} \subset f(\overline{\widetilde{U}}) \subset W$

即得 $Y$ 满足 $T_4$. #