2020. 3.16

P71. 1、证明 S^n 道路连通. $(n\geq 1)$

Pf: 不妨设其中一端为 N (北极) 下证 $\forall x\in S^n\setminus\{N,S\}$, x 与 N 道路连通

$f_x:[0,1]\to S^n$

$t\longmapsto (cx_1,\cdots,cx_n,(x_{n+1}-1)t+1)$, 其中 $c=\sqrt{\dfrac{1-((x_{n+1}-1)t+1)^2}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}}$

由于 x 不为极点, c 良定, f_x 在 $I=[0,1]$ 上连续.

若 $x=N$, 则取 e_N,

若 $x=S$, 则取 $f_S(t)=(0,\cdots,0,\sqrt{1-(1-2t)^2},1-2t)$ 即可. #

从而, 加之由径向对称性, S^n 中任意两点道连 $\Rightarrow S^n$ 道连.

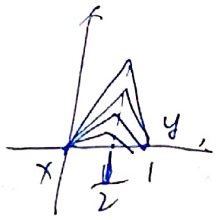
2. $A\subset E^2$, A^c 可数. 证 A 道路连通

Pf. $\forall x,y\in A$, 不妨 $x=(0,0)$ $y=(1,0)$. (其他经伸缩、旋转、平移的 transformation 可归此情形)

记 $f_a:[0,1]\to E^2$

$t\longmapsto\begin{cases}(t,at), & 0\le t\le \frac{1}{2}\\ (t,a(1-t)), & \frac{1}{2}\le t\le 1\end{cases}$ 相当于两段直线路径乘积, 是连续的道路.

其中 $a\in\mathbb{R}$.



由 A^c 可数, $\exists a\in\mathbb{R}$, $f_a(I)\subset A$.

$\Rightarrow (x,y)$ 道连 $\Rightarrow A$ 道连. #

3. 道路连通可乘

Pf: 设 A、B 道连, 则下证 $\forall (a_i,b_i)\in A\times B$, $i=1,2$ 道路连通

由 A 道连, $\exists$ A 中从 a_1 到 a_2 的道路 f_A, B 中从 b_1 到 b_2 道路 f_B.

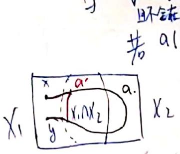
令 $\tilde{f}_A:[0,1]\to A\times B$, $t\mapsto (f_A(t),b_1)$, $\tilde{f}_B:[0,1]\to A\times B$, $t\mapsto (a_2,f_B(t))$, 则 $\tilde{f}_A\tilde{f}_B$ 使 (a_i,b_i) 道路连通 #

5. $X = X_1 \cup X_2$，X_1 开 X，X 和 $X_1 \cap X_2$ 道连 $\Rightarrow X_1$、X_2 道连.

Pf: $\forall x, y \in X_1$，由 X 道连，$\exists$ 连续 $a: [0,1] \to X$ s.t. $a(0)=x$, $a(1)=y$.
且不全在 $X_1 \cap X_2$，不妨 $x \notin X_1 \cap X_2$.

若 $a(I) \subsetneq X_1$，则 $I = a^{-1}(X) = a^{-1}(X_1^c) \sqcup a^{-1}(X_2^c) \sqcup a^{-1}(X_1 \cap X_2)$

由 x, y 选取，则 $a^{-1}(X_2^c) \neq \phi$；由 $a(I) \subsetneq X_1$ 则 $a^{-1}(X_1^c) \neq \phi$



由 I 连通，$a^{-1}(X_1 \cap X_2) \neq \phi$.

设 $\delta = \inf a^{-1}(X_1 \cap X_2)$，则 $[0,\delta] \in a^{-1}(X_2^c)$，否则，若 对 $\forall u \in [0,\delta]$ $u \in a^{-1}(X_1 \cap X_2)$ 和 $X_1 \cap X_2$ 开 导致与 δ 定义矛盾.

若 $u \in a^{-1}(X_1^c)$，仿上面可得矛盾.
（考虑 $a|_{[0,\delta]}$.）.

由 $X_2^c \subset X_1$，$\delta \in a^{-1}(X_1)$ 开集 $\Rightarrow \exists \varepsilon$, s.t. $[0, \delta+\varepsilon) \subset a^{-1}(X_1)$
$\exists \delta < \varepsilon$, s.t 若 $\delta + \delta \in a^{-1}(X_1 \cap X_2)$.

$\therefore \exists \tilde{x}$, s.t. $a|_{[0,\tilde{x}]} \subseteq X_1$，$a(\tilde{x}) \in X_1 \cap X_2$

（若 $a(0) = x \in X_1 \cap X_2$，取 $\tilde{x} = 0$ 即可.）

同理 $\exists \tilde{y}$, s.t. $a|_{[\tilde{y},1]} \subseteq X_2$. $a(\tilde{y}) \in X_1 \cap X_2$

由 $X_1 \cap X_2$ 道连，$\exists \hat{a}$ 在 $X_1 \cap X_2$ 中道路连 $a(\tilde{x})$ 和 $a(\tilde{y})$，

因此，x, y 在 X_1 中有道路 $a|_{[0,\tilde{x}]} \cdot \hat{a} \cdot a|_{[\tilde{y},1]}$，$\forall x, y \in X_1$.

$\Rightarrow X_1$ 道连，同样得 X_2 道连. #

P86. 1. $f: X \to Y$，$g: Y \to Z$ 连续. $g \circ f$ 商映射，证明 g 商映射.

Pf: ① g 连续

② 若 g 不满，$g(Y) \subsetneq Z$，$g \circ f(X) \subseteq g(Y) \subsetneq Z$ 不满，与 $g \circ f$ 商映射矛盾.
$\therefore g$ 满射

③ $\forall B \subset Z$，若 $g^{-1}(B) \subset Y$ 开，则 $f^{-1}(g^{-1}(B)) \subset X$ 开，
由 $g \circ f$ 商映射，B 为开集

$\therefore g$ 商映射. #

3. $X: T_2 \Rightarrow CX: T_2$.

Pf: $CX = X \times I / X \times \{1\} = \{(x,t): x \in X, t \in [0,1)\} \cup \{[(x,1)]\}$，简记 $[(x,1)]$ 仍为 $(x,1)$

$\forall (x, t_x), (y, t_y) \in CX$，若 $t_x \neq t_y$，则 $\exists \delta$, s.t. $(t_x-\delta, t_x+\delta)$，$(t_y-\delta, t_y+\delta)$ 为 $[0,1]$ 中不交开集.

$\therefore$ 开邻域 $X \times (t_x-\delta, t_x+\delta)$
与 $X \times (t_y-\delta, t_y+\delta)$ 不交.

否则，若 $t_x = t_y = t \in [0,1)$，由 X T_2，$\exists$ $x \in N_x$, $y \in N_y$ 开邻域, s.t.
$N_x \cap N_y = \phi \Rightarrow N_x \times [0,1)$，
$N_y \times [0,1)$ 不交.

若 $t_x = t_y = 1$，则 $(x,1) = (y,1)$，传层分离性.

综上，$\forall (x,t_x) \neq (y,t_y)$，有不交开邻域分离它们. 即满足 T_2. #

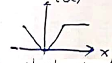
2020.3.20

P86. 5. $f: (-1,2) \to [0,1]$

$$x \mapsto \begin{cases} |x|, & -1 \le x \le 0 \\ x, & 0 \le x \le 1 \\ 1, & 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

$x=-1$ 和 $x=2$ 肿么肥四？

证明:(1) f 是商映射.



Pf: f 满射、连续、$\forall B \subset [0,1]$，若 $f^{-1}(B)$ 为开集 ① $1 \in B \Rightarrow [1,2) \subset f^{-1}(B) \Rightarrow 1 \in f^{-1}(B)$
$\Rightarrow \exists \delta$, s.t. $(1-\delta, 1+\delta) \subset f^{-1}(B)$
$\Rightarrow (1-\delta, 1] \subset B$.
② $x \in B \setminus \{1\} \Rightarrow x \in f^{-1}(B) \Rightarrow \exists \delta, (x-\delta, x+\delta) \subset f^{-1}(B)$
$\Rightarrow (x-\delta, x+\delta) \subset B$
$\Rightarrow B$ 为开集 #

(2) f 非开映射/闭映射

Pf: $(1,2)$ 为开集，映到 $\{1\}$ 为 $[0,1]$ 中闭集非开集
$(-1,0]$ 为 $(-1,2)$ 中闭集，映到 $[0,1)$ 为 $[0,1]$ 中开集非闭集. #

6. $S^1 \times S^1 \simeq T^2$

Pf: $(e^{2\pi i\theta}, e^{2\pi i\varphi}) \xrightarrow{f} ((R+r\cos\varphi)\cos\theta, (R+r\cos\varphi)\sin\theta, r\sin\varphi)$ 为连续同胚映射. #

或用 $(e^{2\pi i\theta}, e^{2\pi i\varphi}) \mapsto (\theta, \varphi)_{\in \mathbb{R}^2} \longmapsto ([\theta], [\varphi]) \in \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z} = T^2$

13. 证明由 $f(x,y)=(\cos 2\pi x, \cos 2\pi y, \sin 2\pi y \cdot \sin 2\pi x \cos \pi y, \sin 2\pi x \sin \pi y)$ 规定的 $f: I\times I \to E^5$ 的像 $f(I\times I)\cong$ Klein 瓶.

解：若 $f(x,y)=f(x',y')$，则

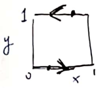
由 E^5 中的第 2、3 维知，$y=y'$ 或 $\{y,y'\}=\{0,1\}$

① 当 $y\neq y'$ 时，不妨 $y=0, y'=1$

$f(x,y)=(\cos 2\pi x, 1, 0, \sin 2\pi x, 0)$

$f(x,y')=(\cos 2\pi x', 1, 0, -\sin 2\pi x', 0)$

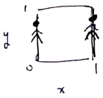
$\therefore x=1-x'$ 或 $x,x'\in\{0,1\}$



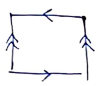
② 当 $y=y'$ 时，

$f(x,y)=f(x',y') \Leftrightarrow \begin{cases}\cos 2\pi x=\cos 2\pi x' \\ \sin 2\pi x=\sin 2\pi x'\end{cases}$

$\therefore x=x'$ 或 $x,x'\in\{0,1\}$.



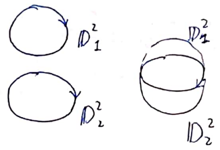
综上，将 $I\times I$ 如此粘合：



即 Klein 瓶的构造. #

- $X\sqcup Y$：由 X 中元素和 Y 中元素构成的新集合 $=\{x,y: x\in X, y\in Y\}$（可重复元素）
  X, Y 作为 $X\sqcup Y$ 子集，$X\cap Y=\phi$.
- $(X_1\sqcup X_2, \tau)$：拓扑和，记作 X_1+X_2，若 $\tau=\{U\subset X_1\sqcup X_2: U\cap X_i\in\tau_i\}$.
- $f: A\subset X\to Y$ 连续，$\sim$ 规定两类等价类：① $X\setminus A$ 中单点 ② $\{y\}\cup f^{-1}(y), y\in Y$
  称商空间 $(X+Y)/\sim$ 为 f 的贴空间，记 $Y\cup_f X$.

14. $i: S^1\to D^2$，则 $D^2\cup_i D^2\cong S^2$



解：为区分，记 $D_1^2 \supset S^1 \xrightarrow{i} D_2^2$

考虑 $f: D_1^2\sqcup D_2^2\to S^2$

$x\mapsto\begin{cases}(x, \sqrt{1-|x|^2}) \triangleq f_1(x), & x\in D_1^2 \\ (x, -\sqrt{1-|x|^2}) \triangleq f_2(x), & x\in D_2^2\end{cases}$

则 ① f 满射

② $\forall B \overset{开}{\subset} S^2$，记 $S_+^2=\{(x,y,z): z\geq 0\}$，$S_-^2=\{(x,y,z): z\leq 0\}$

则 $B\cap S_+^2$ 为 S_+^2 中开集 $\Rightarrow f^{-1}(B)\cap D_1^2=f_1^{-1}(B\cap S_+^2)\overset{开}{\subset} D_1^2$

同理 $f^{-1}(B)\cap D_2^2\overset{开}{\subset} D_2^2$

$\therefore f^{-1}(B)$ 为 $D_1^2\sqcup D_2^2$ 中开集

$\therefore f$ 连续

③ $\forall f^{-1}(B)\overset{开}{\subset} D_1^2\sqcup D_2^2$，则 $f^{-1}(B)\cap D_i^2$ 为 D_i^2 中开集 $(i=1,2)$

由于 f_1 是同胚映射，$f_1(f^{-1}(B)\cap D_1^2)=B\cap S_+^2$ 为 S_+^2 中开集

$\Rightarrow B\cap S_{++}^2=\{(x,z)\in B; z>0\}$ 均为 B 中内点.

$\forall (x,0)\in B\cap\partial S_+^2$，不妨 $x=(1,0)$，则 $\exists\delta>0$, s.t. $\{(x,y)\in D_i^2: x>1-\delta\}\subset f^{-1}(B)\cap D_i^2$

$\Rightarrow \{(x,y,z)\in S^2: x>1-\delta\}\subset B \Rightarrow B\cap\partial S_+^2$ 为 B 中内点

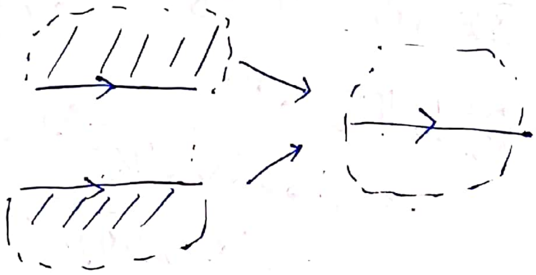
综上 $B=B^\circ$，即 B 为开集

由①②③，f 为商映射，且 $f(x)=f(\tilde{x}) \Leftrightarrow x=\tilde{x}$ 或 $\begin{cases}x\in D_i^2, \tilde{x}\in D_j^2, i\neq j \\ 但 x 和 \tilde{x} 的坐标表示相同.\end{cases}$

$\Leftrightarrow x\overset{i}{\sim}\tilde{x}$ in $D_1^2\sqcup D_2^2$

$\therefore D^2\cup_i D^2=D^2\sqcup D^2/_i=D^2\sqcup D^2/_f\cong S^2$. #

15. $\mathbb{E}_+^2=\{(x,y):y\geq 0\}$, $f:\mathbb{E}^1\to\mathbb{E}^2_+$, $x\mapsto(x,0)$. 证明: $\mathbb{E}_+^2\cup_f\mathbb{E}_+^2\simeq\mathbb{E}^2$



解: 定义 $g:\mathbb{E}^2_{+,1}\sqcup\mathbb{E}^2_{+,2}\to\mathbb{E}^2$

$$(x,y)\mapsto\begin{cases}(x,y), & (x,y)\in\mathbb{E}^2_{+,1}\\ (x,-y), & (x,y)\in\mathbb{E}^2_{+,2}\end{cases}$$

则 ① g 满

② $\forall B\overset{开}{\subset}\mathbb{E}^2$, $B\cap\mathbb{E}_+^2$ 为 $\mathbb{E}_+^2$ 开集 $\Rightarrow g^{-1}(B)\cap\mathbb{E}^2_{+,1}$ 为 $\mathbb{E}^2_{+,1}$ 开集. $\mathbb{E}^2_{+,2}$ 同理, 故 $g^{-1}(B)$ 为开集 $\Rightarrow g$ 连续

③ $\forall g^{-1}(B)\overset{开}{\subset}\mathbb{E}^2_{+,1}\sqcup\mathbb{E}^2_{+,2}$, B 在 $\mathbb{E}^2_{+,i}$ 中开. $\Rightarrow B\cap\mathring{\mathbb{E}}_+^2\subset B^\circ$

$\forall(x,0)\in B$, $[(x,0)]\in g^{-1}(B)$, $\exists\delta>0$, s.t. $B_{(x,0)}(\delta)\cap\mathbb{E}^2_{+,i}\subset g^{-1}(B)\cap\mathbb{E}^2_{+,i}$

$\Rightarrow g(B_{(x,0)}(\delta))\subset g(g^{-1}(B))=B.$

$\Rightarrow B\cap\partial\mathbb{E}_+^2\subset B^\circ$

$\therefore B=\mathring{B}$, B 为开集

$\therefore g$ 为商映射, 且 $g(x,y)=g(\tilde{x},\tilde{y})\iff(x,y)\,f\,(\tilde{x},\tilde{y})$

$\therefore \mathbb{E}_+^2\cup_f\mathbb{E}_+^2=\mathbb{E}_+^2\sqcup\mathbb{E}_+^2/\underset{g}{\sim}\simeq\mathbb{E}^2.$ #