随机变量的收敛性习题

1. 证明$X_n \xrightarrow{p} X$等价于$E\Big(\frac{|X_n-X|}{1+|X_n-X|}\Big) \to 0.$

2. 证明对任意随机变量序列$\{X_n\}$, 存在常数序列$\{A_n\}$使得$X_n/A_n \to 0 \ a.s.$

3. 假设对任意$a<b$, 有

$$P(X_n < a \ i.o. \text{ 且 } X_n > b \ i.o.) = 0,$$

则$\lim\limits_{n\to\infty} X_n$ a.s.存在(但极限有可能为无穷).

4. 试按下列步骤证明两两独立情形下的Borel-Cantelli引理:

(1).设$X_1,\cdots,X_n$为一列**非负**随机变量,证明

$$(E(X_1+\cdots+X_n))^2 \le P(X_1+\cdots+X_n>0)E(X_1+\cdots+X_n)^2;$$

(2). 设$A_1,A_2,\cdots,A_n$是一列随机事件,证明

$$P\Big(\bigcup_{i=1}^n A_i\Big) \ge \Big(\sum_{i=1}^n P(A_i)\Big)^2 \Big/ \Big\{\sum_{i=1}^n P(A_i) + 2\sum_{1\le i<j\le n} P(A_iA_j)\Big\};$$

(3). 设$\{A_n, n\ge 1\}$是一列两两独立的随机事件,满足$\sum_{n=1}^\infty P(A_n)=\infty$, 证明

$$P(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 1.$$

5. 设$X_n \xrightarrow{p} X$且$X_n \xrightarrow{p} Y$, 证明$P(X=Y)=1$.

6. 设X_n为随机变量, 证明或举例说明:

   (a) 设$X_n \to 0 \ a.s.$, 则有$S_n/n \to 0 \ a.s.$, 其中$S_n = X_1+\cdots+X_n$.

   (b) 当$X_n \xrightarrow{p} 0$时, 不一定有$S_n/n \xrightarrow{p} 0$.

   (c) 当$\max\limits_{1\le k\le n}|X_k| \xrightarrow{p} 0$时, 有$S_n/n \xrightarrow{p} 0$.

   (d) 如果$p\ge 1$,则当$X_n \xrightarrow{L_p} 0$时, 必有$S_n/n \xrightarrow{L_p} 0$, 但当$p<1$时不一定成立.

7. (a) 在所有随机变量的集合中定义距离:

$$d(X,Y) = E\frac{X-Y|}{1+|X-Y|},$$

   并将a.s.相等的随机变量视为同一随机变量, 证明d是一种距离.

   (b) 依概率收敛等价于按d距离的收敛.

   (c) 不存在这样的距离,使得按该距离收敛等价于a.s.收敛

   提示: 假设存在距离ρ使得按该距离收敛等价于a.s.收敛, 构造随机变量序列X_n使得$X_n \xrightarrow{p} 0$ 但是$X_n \to 0 a.s.$不成立. 显然存在$\varepsilon>0$以及子列$\{n'\}$使得$\rho(X_{n'},0)>\varepsilon$. 但是由$X_{n'} \xrightarrow{p} 0$可得存在进一步的子列a.s.收敛, 从而在该子列对ρ距离也收敛, 由此得到矛盾.

8. 设$X, X_1, X_2, \cdots$是一列独立同分布的随机变量, 证明如下三结论等价

(a) $E|X| < \infty$

(b)

$$\frac{X_n}{n} \to 0 \ a.s.$$

(c)

$$\frac{\max\limits_{1 \le k \le n} |X_k|}{n} \to 0 \ a.s.$$

(提示: 直接用分析的方法证明后两个结论等价.)

9. 设$X_1, X_2, \cdots$是一列独立同分布的可积随机变量, $EX_1 = 0$. 证明

$$\lim_{n \to \infty} E\frac{|S_n|}{n} = 0.$$

10. 设$\{X_i, i \in I\}$为随机变量, f为定义于$[0, \infty)$上的实值正可测函数,满足

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \infty \quad \sup_i Ef(|X_i|) < \infty,$$

则$\{X_i, i \in I\}$一致可积.

11. 设$X_1, X_2, \cdots$为独立同分布随机变量, 具有共同的分布函数F, 假设

$$\lim_{x \to \infty} x^2(1 - F(x)) = 0$$

证明

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \max_{1 \le i \le n} X_i \xrightarrow{p} 0.$$

12. 设$\varepsilon_n \downarrow 0$且

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n - X| \ge \varepsilon_n) < \infty,$$

证明$X_n \to X \ a.s.$

13. 设$F_n \xrightarrow{d} F$且F是连续的, 则

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |F_n(x) - F(x)| \to 0.$$

举例说明对一般的分布F上结论不一定成立.

14. 设所有分布函数构成的集合为$\mathcal{F}$, 对任意$F, G \in \mathcal{F}$定义

$$d(F, F') = \inf\{h : F(x - h) - h \le G(x) \le F(x + h) + h, \ \forall x \in \mathbb{R}\}.$$

证明d构成一个距离, 并且$d(F_n, F) \to 0$等价于$F_n \xrightarrow{d} F$.

15. 设$X_1, X_2, \cdots$为独立同分布的正值随机变量, 具有密度函数f, 现知$\lim_{x\downarrow 0} f(x) = \lambda > 0$, 证明

$$n \min\{X_1, \cdots, X_n\} \xrightarrow{d} \eta,$$

其中η为参数为λ的指数分布.

16. 设$X_1, X_2, \cdots$是一列独立同分布的随机变量, 具有均值0, 方差1, 证明

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\sum_{i=1}^n X_i^2} \xrightarrow{p} 0 \; a.s.$$

且

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n X_i^2}} \xrightarrow{d} N(0,1).$$