$$\int_{\mathbb{R}^n} |z|^{\alpha-n}|z+y|^{\beta-n}\,dz = C_{n-\alpha}^{-1}\cdot C_{n-\beta}^{-1}\cdot\int_{\mathbb{R}^n}\int_0^\infty \exp(-\pi|z|^2\lambda)\,\lambda^{\frac{n-\alpha}{2}-1}d\lambda\int_0^\infty \exp(-\pi|y-z|^2\mu)\,\mu^{\frac{n-\beta}{2}-1}\,d\mu\, dz$$

当然 这个题有更简单的做法.

$$= C_{n-\alpha}^{-1}C_{n-\beta}^{-1}\int_0^\infty\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^n}\exp\left(-\pi\left(\lambda|z|^2+\mu|y-z|^2\right)\right)dz\;\lambda^{\frac{n-\alpha}{2}-1}d\lambda\cdot\mu^{\frac{n-\beta}{2}-1}d\mu$$

$$= C_{n-\alpha}^{-1}C_{n-\beta}^{-1}\int_0^\infty\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^n}\exp(-\pi(\lambda+\mu)|z|^2)\,dz\cdot\exp\left(-\frac{\pi\lambda\mu}{\lambda+\mu}|y|^2\right)\lambda^{\frac{n-\alpha}{2}-1}\mu^{\frac{n-\beta}{2}-1}\,d\lambda\, d\mu$$

$$\sim\int_0^\infty\int_0^\infty\exp\left(-\frac{\pi\lambda\mu}{\lambda+\mu}|y|^2\right)\frac{1}{(\lambda+\mu)^{n/2}}\lambda^{\frac{n-\alpha}{2}-1}\mu^{\frac{n-\beta}{2}-1}\,d\lambda\, d\mu$$

令 $\lambda=\mu t$

$$\sim\int_0^\infty\int_0^\infty\exp\left(-\frac{\pi t}{1+t}\mu|y|^2\right)\frac{1}{\mu^{n/2}}\cdot\frac{1}{(1+t)^{n/2}}\cdot\mu^{\frac{2n-\alpha-\beta}{2}-1}t^{\frac{n-\alpha}{2}-1}\,dt\,d\mu$$

观察到这是一个关于μ的Γ函数 故得对μ作积分 可以计算

$$\sim |y|^{\alpha+\beta-n}\cdot\int_0^\infty\frac{t^{\frac{\beta}{2}-1}}{(1+t)^{\frac{\alpha+\beta}{2}}}\,dt = \int_0^1\frac{t^{\frac{\beta}{2}-1}}{(1+t)^{\frac{\alpha+\beta}{2}}}\,dt+\int_0^1\frac{t^{\frac{\alpha}{2}-1}}{(1+t)^{\frac{\alpha+\beta}{2}}}\,dt$$

可以写B函数！

整理一下系数便得想要结果

Chapter 5:

1. 显然

2. $\hat{f}(\xi)=\int f(x)e^{-2\pi i x\cdot\xi}dx=-\int f(x)e^{-2\pi i(x+\frac{1}{2\xi})\cdot\xi}dx$

$=-\int f(x-\frac{1}{2\xi})e^{-2\pi i x\cdot\xi}dx$

$\Longrightarrow \hat{f}(\xi)=\frac{1}{2}\int f(x)-f(x-\frac{1}{2\xi})e^{-2\pi i x\cdot\xi}dx \xrightarrow{} 0$ as $|\xi|\to\infty$

L^1函数的~~连续~~平均连续性

3. ~~显然~~ 略

4. 略

5 见习题课笔记

6. 事实上 $g(\xi_1\cdots\xi_n)=\int f(x)e^{-2\pi i\sum x_i\xi_i}dx$ 是多变量复解析函数, 对于 ~~$f\in C_c^\infty$~~

特别地 $\hat{f}$ is analytic

$\|g_a(\xi)\|_\infty=\||\xi|^a\hat{f}(\xi)\|_\infty\le C\|\widehat{D^{[a]+1}f}\|_\infty\le C\|D^{[a]+n}f\|_{L^1}<\infty$

8 见习题课笔记

9 $\alpha=a+ib$ ~~$a>0$~~ $g_\alpha(x)=\exp(-\pi\alpha|x|^2)$ $\|g_a\|_p=C\cdot a^{-n/2p}$

$\hat{g}_\alpha=\alpha^{-\frac{n}{2}}\cdot\exp(-\frac{\pi|x|^2}{\alpha})$ ~~$\|\hat{g}_a\|_{p'}=C\cdot a^{-\frac{n}{2}}\cdot a^{\frac{n}{2p'}}$~~

$|\alpha|^{-\frac{n}{2}}\cdot(\mathrm{Re}\frac{1}{\alpha})^{-\frac{n}{2q}}$

$\|\hat{g}_\alpha\|_q=C\cdot$ ~~$|\alpha|^{-\frac{n}{2}}(\ldots)^{\frac{n}{q}}$~~

只能有 $q=p'$ ~~do 可 $\|\hat{g}_\alpha\|_q=C\cdot|\alpha|^{\frac{n}{2p}}$~~

令 $b\to\infty$ 便知 5-6 以不能改进