2020.2.17

P20. 2. 设 $X=\{x,y,z\}$. X的下列子集是不是拓扑？若否，添加最少的子集，使它成为拓扑.

(1) $\{X,\phi,\{x\},\{y\}\}$　是

(2) $\{X,\phi,\{x,y\},\{x,z\}\}$　不是，添加 $\{x\}$ 即可.

(3) $\{X,\phi,\{x,y\},\{x,z\},\{y,z\}\}$ 不是，添加 $\{x\},\{y\},\{z\}$.

4. 设 τ 是 X 上拓扑，$A\subset X$，证明 $\tau'=\{A\cup U: U\in\tau\}\cup\{\phi\}$ 也是 X 上拓扑

证：① $\phi\in\tau'$，$X=A\cup X\in\tau'$

② $\forall A\cup U_1, A\cup U_2\in\tau'$，有 $(A\cup U_1)\cap(A\cup U_2)=A\cup(U_1\cap U_2)\in\tau'$

③ $\forall A\cup U_i\in\tau'$，$i\in I$，有 $\bigcup\limits_{i\in I}(A\cup U_i)=A\cup(\bigcup\limits_{i\in I}U_i)\in\tau'$

$\therefore\tau'$ 也是 X 上拓扑.　#.

5. 设 τ_1,τ_2 为 X 上拓扑，证明 $\tau_1\cap\tau_2$ 也是 X 上拓扑.

Pf: ① $X,\phi\in\tau_1,\tau_2\Rightarrow X,\phi\in\tau_1\cap\tau_2$

② $U_1,U_2\in\tau_1\cap\tau_2\Rightarrow U_1\cap U_2\in\tau_1,\tau_2\Rightarrow U_1\cap U_2\in\tau_1\cap\tau_2$

③ $U_i\in\tau_1\cap\tau_2, i\in I\Rightarrow\bigcup\limits_{i\in I}U_i\in\tau_1,\tau_2\Rightarrow\bigcup\limits_{i\in I}U_i\in\tau_1\cap\tau_2$

$\therefore\tau_1\cap\tau_2$ 也是 X 上拓扑.　#

6. E^2 子集 $A=\{(x,\sin\frac{1}{x}):x\in(0,1)\}$，求 $\bar{A}$.

Sol: CLAIM: $\bar{A}=A\cup\{(1,\sin 1)\}\cup\{(0,x):x\in[-1,1]\}$，这是因为：

① 由于 $x\in(0,1)$，$\sin\frac{1}{x}\in[-1,1]$，易知 $\forall(x,y)$ with $x<0$ 或 $x>1$ 或 $|y|>1$，

$\exists r$, s.t. $B_{(x,y)}(r)\cap A=\phi\Rightarrow(x,y)\in(\bar{A})^c$

② $\forall(0,y)$，$|y|\le1$，$\forall U\in\tau_e$，$\exists r$, s.t. $B_{(0,y)}(r)\subseteq U$

由于 $\sin\frac{1}{x}=y$ 有解 $x_k=\frac{1}{\arcsin y+2k\pi}\to0\ (k\to+\infty)$

$\therefore\exists k_0$, s.t. $x_{k_0}<r$　$\therefore(x_{k_0},\cdot)\in A\cap B_{(0,y)}(r)\Rightarrow(0,y)\in\bar{A}$，$|y|\le1$

③ 由函数 $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ 在 $x=1$ 连续，$(1,\sin1)\in\bar{A}$

④ $\forall(x,y)$，$x\in(0,1)$，$y\ne\sin\frac{1}{x}$，由 $f_{(x,y)}(u)=\sqrt{(x-u)^2+(y-\sin\frac{1}{u})^2}$ 在 $[\frac{x}{2},\frac{x+1}{2}]$ 中连续且非0，$\exists r=\min\{\min\limits_{u\in[\frac{x}{2},\frac{x+1}{2}]}f_{(x,y)}(u),\frac{x}{2},\frac{1-x}{2}\}>0$, s.t. $B_{(x,y)}(r)\cap A=\phi$.

$\Rightarrow(x,y)\in(\bar{A})^c$

#.

8. 度量空间中，记 $B[x_0,\varepsilon]=\{x\in X: d(x,x_0)\le\varepsilon\}$. 证明 $B[x_0,\varepsilon]$ 闭、举例说明 $\overline{B(x_0,\varepsilon)}=B[x_0,\varepsilon]$ 不一定成立.

Pf: 即证 $(B[x_0,\varepsilon])^c$ 开, claim: $(B[x_0,\varepsilon])^c=\bigcup\limits_{x:d(x,x_0)>\varepsilon}B(x,d(x,x_0)-\varepsilon)$

这是因为：$\forall x$，$\forall y\in B(x,d(x,x_0)-\varepsilon)$，$d(x_0,y)\ge d(x_0,x)-d(x,y)>\varepsilon$

$\Rightarrow y\in(B[x_0,\varepsilon])^c \Rightarrow LHS\supset RHS$.

另一方面 $\forall x\in(B[x_0,\varepsilon])^c$，$d(x,x_0)>\varepsilon \Rightarrow x\in B(x,d(x,x_0)-\varepsilon) \Rightarrow LHS\subset RHS$.

$\therefore (B[x_0,\varepsilon])^c$ 为一簇开集之并，仍为开集.

考虑 $\{0,1\}^2$，其上度量为 Hamming distance $d((x_1,x_2),(y_1,y_2))=\sum\limits_{i=1}^{2}I\{x_i\ne y_i\}$

记 $x_0=(00)$，$\varepsilon=1$，则 $B[x_0,\varepsilon]=\{(00),(01),(10)\}$

$B(x_0,\varepsilon)=\{(00)\}$

而由于 $B(x_0,\varepsilon)=B[x_0,\frac{1}{2}]$，故为闭集，故 $\overline{B(x_0,\varepsilon)}=\{(00)\}\ne B[x_0,\varepsilon]$.

#

2020.2.20

P20. 10. 设 $A_1,\cdots,A_n$ 为 X 中闭集，$X=\bigcup A_i$. 证明 $B\subset X$ 为 X 的闭 $\Leftrightarrow$ $B\cap A_i$ 是 A_i 的闭集

Pf: B 闭 $\Leftrightarrow$ B^c 开 $\Rightarrow$ $B^c\cap A_i$ 为 A_i 开 $\Leftrightarrow$ $A_i-(B^c\cap A_i)=B\cap A_i$ 是 A_i 的闭

另一方面，若 $B\cap A_i$ 为 A_i 闭集，$B=B\cap X=B\cap(\bigcup A_i)=\bigcup\limits_{i=1}^{n}(B\cap A_i)$

由 $B\cap A_i\overset{闭}{\subset}A_i\overset{闭}{\subset}X$，故 $B\cap A_i\overset{闭}{\subset}X \Rightarrow \bigcup\limits_{i=1}^{n}(B\cap A_i)=B\overset{闭}{\subset}X$. #

11. 设 Y 是 X 的子空间，$A\subset Y$，$x\in Y$. 证明：在 X 中，x 是 A 的聚点 $\Leftrightarrow$ 在 Y 中，x 是 A 的聚点

Pf: ($\Rightarrow$) $\forall x$ 在 Y 中邻域 N_Y，即 $\exists U\in\tau$, s.t. $x\in U\cap Y\subset N_Y$ x是X中A的聚点.

则 $N_Y\cap(A\setminus\{x\})\supset(U\cap Y)\cap(A\setminus\{x\})\overset{A\subset Y,\,x\in Y}{=\!=}U\cap(A\setminus\{x\})\ne\phi \Rightarrow x$ 是 Y 中 A 的聚点.

($\Leftarrow$) $\forall x$ 在 X 中邻域 N，$\exists U\in\tau$, s.t. $x\in U\subset N$ $U\cap Y\in\tau_Y$ 且为 x 邻域

则 $N\cap(A\setminus\{x\})\supset U\cap(A\setminus\{x\})\supset(U\cap Y)\cap(A\setminus\{x\})\ne\phi \Rightarrow x$ 是 X 中聚点.

#

12. 设 X 拓扑空间, $B\subset A\subset X$. 记 $\overline{B}_A$, $\mathring{B}_A$ 为 B 在 A 中闭包和内部, 证明:

($\overline{B}$, $\mathring{B}$)　(X)

(1) $\overline{B}_A = A\cap\overline{B}$.

Pf: $\forall x\in B$, 有 $x\in\overline{B}_A$ 且 $x\in A\cap\overline{B}$ (由 $B\subset A\subset X$) 下面考虑 $x\notin B$ 的那些

若 $x\in B'_A$, 由11题, $x\in B'$ $\Rightarrow \overline{B}_A\subset A\cap\overline{B}$

若 $x\in A\cap B'$, 由11题, $x\in B'_A$ $\Rightarrow \overline{B}_A\supset A\cap\overline{B}$

$\Rightarrow \overline{B}_A = A\cap\overline{B}$ #

(2) $\mathring{B}_A = A\setminus(\overline{A\setminus B})$

Pf: $x\in\mathring{B}_A \Leftrightarrow \exists U\in\mathcal{T}$, s.t. $x\in U\cap A\subset B$

$\Rightarrow x\notin A\setminus B$ 且 $\exists U\in\mathcal{T}$ 为 x 的邻域, s.t. $U\cap((A\setminus B)\setminus\{x\})\subset(U\cap A)\setminus(U\cap B)=\phi$

$\Rightarrow x\notin\overline{A\setminus B}$ $\Rightarrow \mathring{B}_A\subset A\setminus(\overline{A\setminus B})$

另一方面, $\forall x\in A\setminus(\overline{A\setminus B})$, $\exists U\in\mathcal{T}$, s.t. $U\cap(A\setminus B)=\phi$

$\Rightarrow U\cap A\subset U\cap B\subset B \Rightarrow x\in\mathring{B}_A$

$\Rightarrow \mathring{B}_A\supset A\setminus(\overline{A\setminus B})$. #

(3) 若 A 为 X 的开集, 则 $\mathring{B}_A=\mathring{B}$

Pf: $\forall x\in\mathring{B}$, $\exists U\in\mathcal{T}$, s.t. $x\in U\subset B$, 则 $x\in U\cap A\subset B$, $U\cap A\in\mathcal{T}_A \Rightarrow x\in\mathring{B}_A$

$\forall x\in\mathring{B}_A$, $\exists U\cap A\in\mathcal{T}_A$, s.t. $x\in U\cap A\subset B$, 由 A 开, $U\cap A$ 开, 则 $x\in\mathring{B}$

$\Rightarrow \mathring{B}_A=\mathring{B}$ #

15. 证明: A 是拓扑空间 X 的稠密子集 $\Leftrightarrow$ X 的每个非空开集与 A 相交非空.

Pf: ($\Rightarrow$) 反之, 若 $\exists U\in\mathcal{T}$, s.t. $U\subset A^c$. 由 $U=\mathring{U}\subset(A^c)^\circ=(\overline{A})^c$ 知 $\overline{A}^c\neq\phi \Rightarrow \overline{A}\neq X$.

($\Leftarrow$) $\forall x\notin A$, $\forall U\in\mathcal{T}$ 满足 $x\in U$, 则 $U\cap(A\setminus\{x\})=U\cap A\neq\phi \Rightarrow x\in A' \Rightarrow \overline{A}=X$ #

17. 若 A, B 是 X 的稠密子集, 且 A 开, 则 $A\cap B$ 也稠密.

Pf: 由15题, $\forall\phi\neq U\in\mathcal{T}$, 有 $U\cap A$, $U\cap B\neq\phi$　由 A 开, $U\cap A$ 开 $\Rightarrow (U\cap A)\cap B\neq\phi$, $\forall\phi\neq U\in\mathcal{T}$

$\Rightarrow$ $A\cap B$ 稠密, 由15题. #