

选做习题5

1. 设 X 是一可取无穷值的(广义)随机变量, 若 $E|X| < \infty$, 则 $P(|X| < \infty) = 1$.
2. 设 $E|X| < \infty$, 证明对任意 $\varepsilon > 0$, 存在简单随机变量 X_ε 使得

$$E|X - X_\varepsilon| < \varepsilon.$$

于是存在简单随机变量序列 X_n 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} E|X - X_n| = 0$. 并且这里的 X_n 可以选取使得 $|X_n| \leq |X|$.

3. 设 X_1, X_2, \dots 是一列独立同分布的随机变量, 并且具有有限的均值, 证明

$$\frac{1}{n}E\left\{\max_{1 \leq k \leq n} X_k\right\} \rightarrow 0.$$

4. 设 X 为可积随机变量且 A_n 为 A 的可数分割, 则 $\sum_{n=0}^{\infty} E(XI_{A_n}) = E(XI_A)$.
5. 举例说明存在随机变量 $X_n, n \geq 1$ 使得

$$E \sum_{n=1}^{\infty} X_n \neq \sum_{n=1}^{\infty} EX_n.$$

6. 如果 $0 \leq X_n \rightarrow X$ 且对任意 $n \geq 1$ 有 $EX_n \leq A < \infty$, 则 $EX \leq A$.
7. 设 $p > 0$ 为常数. 如果 $E|X|^p < \infty$, 则 $x^p P(|X| > x) \rightarrow 0 (x \rightarrow \infty)$. 反过来, $x^p P(|X| > x) \rightarrow 0$, 则对任意 $0 < \varepsilon < p$ 有 $E|X|^{p-\varepsilon} < \infty$, 并举例说明 $E|X|^p < \infty$ 不一定成立.
8. 设 $X \sim N(0, 1)$, 求 $EX^n (n \in \mathbb{N})$.
9. (a) 设 $0 < b \leq a$ 均为常数, 证明存在随机变量 X 满足 $EX^2 = b^2$ 且 $P(|X| \geq a) = b^2/a^2$.
(b) 如果 $E(X^2) = 1$ 且 $E(|X|) \geq a > 0$, 则对于 $0 \leq \lambda \leq 1, P(|X| \geq \lambda a) \geq (1 - \lambda)^2 a^2$.