选做习题3

1. 证明
$$P\Big(\liminf_{n\to\infty} A_n\Big) \le \liminf_{n\to\infty} P(A_n) \le \limsup_{n\to\infty} P(A_n) \le P\Big(\limsup_{n\to\infty} A_n\Big).$$

2. 证明任何一个分布函数具有至多可数个不连续点.

3. 证明如下函数都是右连续, 并且对每个变元是单调非降的, 但却不是$\mathbb{R}^2$中的分布函数:
$$G(x,y) = \begin{cases} 1 & x+y \ge 0, \\ 0 & x+y < 0. \end{cases}$$

4. 假设随机变量X的分布函数$F(x) = P(X \le x)$是连续的, 证明$Y = F(X)$服从$[0,1]$上的均匀分布.

5. 设F是具有跳跃点$\{a_1, a_2, \cdots\}$的分布函数. 证明对于任意固定的$x \in \mathbb{R}$，当$s \downarrow 0$时, 和
$$\sum_{x-s<a_j<x} [F(a_j) - F(a_j-)]$$
收敛于零. 如果求和范围扩张到$x - s < a_j \le x$, 上述极限是多少?

6. 当且仅当对于每个$s > 0$都有$F(x+s) - F(x-s) > 0$时, 点x称为分布函数F的支撑点. 所有这样的支撑点构成的集合称为F的支撑集. 证明每个跳跃点属于支撑集, 且支撑集的每个孤立点是跳跃点. 给出支撑集是整个直线的离散分布函数的例子.

7. 设$(\Omega, \mathscr{F}, P)$是概率空间, $\mathscr{G}_1, \mathscr{G}_2$是$\mathscr{F}$的子$\sigma$代数, 假设$\mathscr{D}_1, \mathscr{D}_2$是$\pi$系且$\sigma(\mathscr{D}_i) = \mathscr{G}_i, i = 1, 2$. 如果对任意$B_1 \in \mathscr{D}_1$和$B_2 \in \mathscr{D}_2$都有$P(B_1B_2) = P(B_1)P(B_2)$, 请证明对任意$B_1 \in \mathscr{G}_1$和$B_2 \in \mathscr{G}_2$都有$P(B_1B_2) = P(B_1)P(B_2)$,

8. 设$\mathscr{F}_1 \subset \mathscr{F}_2 \subset \cdots$是一列$\sigma$域, 则对任意$A \in \sigma(\mathscr{F}_n, n \ge 1)$存在$A_1, A_2, \cdots \in \cup_n \mathscr{F}_n$ 使得$P(A \Delta A_n) \to 0$.

9. 设P是$(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}(\mathbb{R}^n))$上的概率测度, 证明对任意$\varepsilon > 0$和$B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$, 都存在紧集$A_1$和开集$A_2$使得$A_1 \subset B \subset A_2$ 并且$P(A_2 - A_1) < \varepsilon$.