装订线 答题时不要超过此线

中国科学技术大学

2018–2019学年实分析期中考试

姓名：________________ 学号：________________

要求: 请将所有的答案写在答题纸上。在每张答题纸上写上姓名和学号。

1. （15分）

   (a) 给出可测函数的定义.

   (b) 设 f 在 $E\subseteq\mathbb{R}^n$ 上可测, G 和 F 分别是 $\mathbb{R}$ 中的开集和闭集. 证明: 点集 $E_1=\{x\in E: f(x)\in G\}$ 和 $E_2=\{x\in E: f(x)\in F\}$ 都是可测集.

2. （15分）下面的说法是否正确? 如果错误, 请说明理由或举出相应的反例; 如果正确, 请给出证明.

   (a) 有界集 E 的外测度是包含 E 的所有闭集的测度的下确界;

   (b) 若对可测集 E 的任一紧子集 K 都有 $m(K)=0$, 则 $m(E)=0$.

3. （15分）设 $E\subseteq\mathbb{R}^n$ 可测, $m(E)<\infty$, 函数列 $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}\subset L^1(E)$ 一致收敛于 f. 证明:
$$\lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)dx=\int_E f(x)dx.$$

4. （15分）设 $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$ 且非负. 对 $\alpha>0$, 记 $E_\alpha:=\{x: f(x)>\alpha\}$. 证明:
$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx=\int_0^\infty m(E_\alpha)\,d\alpha.$$

5. （15分）设 $E\subseteq[0,1]$ 可测, $m(E)>0$. 证明: 存在两点 $x,y\in E$, $x\neq y$, 使得 $x-y\in\mathbb{Q}$.

6. （15分）设 $1\le p<\infty$, $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}\subset L^p([0,1])$, $f\in L^p([0,1])$.

   (a) 证明: 若 $f_k\to f$ a.e. 且 $\lim\limits_{k\to\infty}\|f_k\|_p=\|f\|_p$, 则 $\lim\limits_{k\to\infty}\|f_k-f\|_p=0$.

   (b) 若在 (a) 中去掉 $\lim\limits_{k\to\infty}\|f_k\|_p=\|f\|_p$ 这一条件, 结论是否成立? 请说明理由或举出相应的反例.

7. （10分）设 f 是 $[0,1]$ 上的实值可测函数. 证明: 存在 $[0,1]$ 上依测度收敛于 f 的连续函数序列.

1. (a) $\{f<a\}\in\mathcal{M},\ \forall a\in\mathbb{R}$

(b) $\forall G\subset\mathbb{R}$ 开，由开集结构，$G=\bigcup_{i=1}^{\infty}(a_i,b_i)$，

而 $f^{-1}((a_i,b_i))=\{f<b_i\}\setminus\bigcap_{n=1}^{\infty}\{f<a_i+\frac{1}{n}\}\in\mathcal{M}$. ($a_i,b_i$ 有限)

$\Rightarrow f^{-1}(G)=\bigcup_{i=1}^{\infty}f^{-1}((a_i,b_i))\in\mathcal{M}$.

$\Rightarrow f^{-1}(F)=f^{-1}(G)^c\in\mathcal{M}$.

2. (a) $\chi_{\mathbb{Q}_{[0,1]}}$ (b) 紧 $\Rightarrow$ 闭 $\Rightarrow$ F_σ $\Rightarrow$ E.

3. $\left|\int f_k-f\right|\le\int|f_k-f|\le\varepsilon\cdot m(E)\to 0$.

4. Tonelli, $RHS=\int_0^{\infty}\int_{\mathbb{R}^n}\chi_{\{f(x)>\alpha\}}dx\,d\alpha$

$=\int_{\mathbb{R}^n}\int_0^{\infty}\chi_{\{f(x)>\alpha\}}d\alpha\,dx=\int_{\mathbb{R}^n}f\,dx$.

5. 反证. $\{r_k\}_{k=1}^{\infty}=\mathbb{Q}\cap[0,1]$.

$E+\{r_k\}\cap E=\phi$，$E+\{r_k\}\subset[-1,2]$.

$m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}(E+\{r_k\})\right)=\infty>m([-1,2])$. 矛盾!

6. (a) $|f_k-f|^p\le 2^{p-1}(|f_k|^p+|f|^p)\Rightarrow\int\varliminf 2^{p-1}(|f_k|^p+|f|^p)-|f_k-f|^p\le\varliminf\int 2^{p-1}(|f_k|^p+|f|^p)-|f_k-f|^p$.

$\Rightarrow 2^{p}\int|f|^p\le 2^{p-1}\left(\int|f|^p+\int|f|^p\right)-\varlimsup\int|f_k-f|^p$

(b) $k\chi_{[0,\frac{1}{k}]}$

7. ~~连续在~~ 可测 可由 step a.e. ~~逼近，step 可由连续 a.e. 逼近~~ $\left(1-\frac{d(x,[a,b])}{1/n}\right)^+$

$\Rightarrow$ ~~可测~~ 可由 连续 a.e. ~~逼近~~

7. $\forall f$ 可测，$f\chi_{\{f<M\}}\in L^1$，由连续在 L^1 中稠，$\exists f_{k,M}\xrightarrow{L^1\&m}f\chi_{\{f<M\}}$

集合 $E_M=\{f\ge M\}\downarrow 0\ (M\to\infty)$，从而 $\{f_{k,M}\}$ 满足之

$m(|f_{k,M}-f|>\varepsilon)\le \underbrace{m(|f_{k,M}-f_M|>\frac{\varepsilon}{2})}_{\downarrow 0}+\underbrace{m(|f_M-f|>\frac{\varepsilon}{2})}_{\le E_M\to 0}\to 0.\ (k,M\to\infty)$