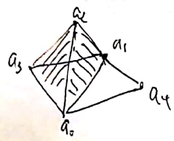
2020.5.18

P101. 2. $K=Bd(a_0,a_1,a_2,a_3)\cup Bd(a_0a_1a_4)$，求K各维同调群



Sol：① $H_q(K)\cong 0$ for $k\neq 0,1,2$，由K为2维复形.

② $H_0(K)\cong\mathbb{Z}$

③ $H_2(K)=Z_2(K)$.

令 $\sigma_i=a_{i+1}a_{i+2}a_{i+3}\in T_2(K)$ （下标mod 4）

$\forall c=\sum n_i\sigma_i\in Z_2(K)$ 有

$0=\partial_2 c=\sum_{i=0}^{3}n_i\partial_2\sigma_i$ $\Rightarrow$ 每条棱只被2个面使用

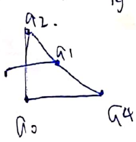
$\Rightarrow n_0=-n_1=n_2=-n_3$ 为所有解.

$\Rightarrow H_2(K)\cong\mathbb{Z}$ （生成元 $\sigma_0-\sigma_1+\sigma_2-\sigma_3$.）

④ $H_1(K)$ 可由 $\partial_2\sigma_1$, $\partial_2\sigma_2$, $\partial_2\sigma_3$. $\partial_2\sigma_4$ 消去，s.t.

$\forall c\in H_1(K)$，$c=\sum_{ij}n_{ij}a_ia_j$ 中 a_0a_1, a_0a_3, a_2a_3 系数 n_{01}, n_{03}, $n_{23}=0$.

剩余



$\Rightarrow n_{13}=0$，$n_{02}=n_{21}=n_{14}=n_{40}$，$n_{21}=-n_{12}$，$n_{40}=-n_{04}$

$\Rightarrow H_1(K)\cong\mathbb{Z}$

（生成元为 $\langle a_0a_2+a_2a_1+a_1a_4+a_4a_0\rangle$）

综上，$H_q(K)\cong\mathbb{Z}$，$q=0,1,2$；$H_q(K)\cong 0$，其他. #.

3. $K=Bd(a_0,a_1,a_2,a_3)\cup Bd(a_0,a_1,a_2,a_4)$，求K各维同调群

Sol：$q\neq 0,1,2$ 时，$H_q(K)\cong 0$.

$H_0(K)\cong\mathbb{Z}$.

$q=2$ 时，由于 a_1a_3 为两面共边

$\forall c=\sum n_{ijk}a_ia_ja_k\in Z_2(K)$ 有 $n_{013}=n_{123}$ 同理 n_{203}

同理下三面系数相同（或相反，看定向）

但 a_0a_1 也有三个面共边，且上下面各自恒等（中间夹一个 $a_0a_1a_2$ 平面）.

∴ n_{012} 系数取决于 $-(n_{014}+n_{013})=-(n_{124}+n_{123})=-(n_{204}+n_{203})$

∴ $H_2(K)=Z_2(K)\cong\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$

$q=1$ 时，$\forall\langle c\rangle\in H_1(K)$，

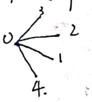
由 $\partial_2(a_0a_1a_3)$. $\partial_2(a_0a_2a_3)$. $\partial_2(a_0a_1a_4)$. $\partial_2(a_0a_2a_4)$

$\partial_2(a_0a_1a_2)$

可分别消去 a_1a_3. a_2a_3. a_1a_4. a_2a_4. a_1a_2 系数而不改变

c 所在等价类. 不妨 $c=\langle\sum_{i=1}^{4}n_{0i}a_0a_i\rangle\in H_1(K)$,

（剩下

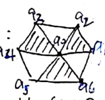


则 $c=\sum n_{0i}a_0a_i\in Z_1(K)\Rightarrow\partial_1c=0\Rightarrow n_{0i}=0$

$\Rightarrow H_1(K)\cong 0$.

#

综上，$H_q(K)\cong\begin{cases}\mathbb{Z}, & q=0\\ \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}, & q=2\\ 0, & 其他.\end{cases}$

4. 求K： 的各维同调群.

Sol：$H_q(K)\cong 0$，$q\neq 0,1,2$.　$H_0(K)\cong\mathbb{Z}$.

编号如上. $q=2$ 时，$\forall c=n_{12}(a_0a_1a_2)+n_{34}(a_0a_3a_4)+n_{56}(a_0a_5a_6)$

$\in Z_2(K)$ $\Rightarrow n_{12}=n_{34}=n_{56}=0\Rightarrow H_2(K)\cong 0$.

$q=1$ 时，由 $\partial_2(a_0a_1a_2)$，$\partial_2(a_0a_3a_4)$，$\partial_2(a_0a_5a_6)$ 可消去

a_1a_2. a_3a_4. a_5a_6 的系数.

$\forall\langle c\rangle\in H_1(K)$，不妨 $c=(n_1a_0a_2+n_2a_2a_3+n_3a_3a_0)+\cdots$

（如左图）.

则 $c\in Z_1(K)\Leftrightarrow\begin{cases}n_1=n_2=n_3\\ n_4=n_5=n_6\\ n_7=n_8=n_9\end{cases}$

$\Rightarrow H_1(K)=\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$ （以 $a_0a_2+a_2a_3+a_3a_0$.

$a_0a_4+a_4a_5+a_5a_0$.

$a_0a_6+a_6a_1+a_1a_0$ 为生成元）

综上. $H_q(K)\cong\begin{cases}\mathbb{Z}, & q=0\\ \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}, & q=1\\ 0, & 其他\end{cases}$

#

5. 由Euler-Poincaré 证明 $\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}=0$
(不太一样!) 当$n>0$时.

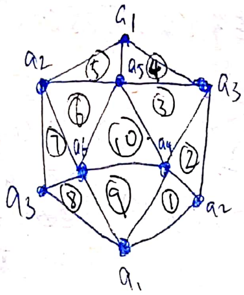
证：由提示，设n维单形 S，考虑复形 $Cl\,S=:K$，则 $\chi(K)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\alpha_i=\sum_{i=1}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}$

由单纯锥零调. $\beta_i(K)=0$, $i>0$; $\beta_0(K)=1$

由Euler-Poincaré $1=\chi(K)$ $\Rightarrow \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}=0$. #

$n=0$时,由 $\binom{0}{0}=0$ 得证

6. K: P^2 剖分, 求 $H_q(K;\mathbb{Q})$.



Sol: ① $H_q(K;\mathbb{Q})=0$, $q\neq 0,1,2$.

② $q=0$ 时，取树 $T=\bigcup_{i=1}^{5}a_6a_i$,

故 $B_0(K;\mathbb{Q})$ 有 basis(基)

$\{a_i-a_6,\ i=1,\cdots,5\}$

$B_0(K;\mathbb{Q})=\mathrm{span}_{\mathbb{Q}}\{a_i-a_6, i=1,\cdots,5\}\cong\mathbb{Q}^{\oplus5}$

注意 $Z_0(K;\mathbb{Q})=\mathrm{span}_{\mathbb{Q}}\{a_i\}=\mathrm{span}_{\mathbb{Q}}(\{a_i-a_6\}\cup\{a_6\})\cong\mathbb{Q}^{\oplus6}$.

$\Rightarrow H_0(K,\mathbb{Q})\cong\mathrm{span}_{\mathbb{Q}}\{a_6\}\cong\mathbb{Q}$.

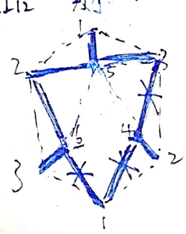
③ $q=2$时, $\forall c=\sum_{i=1}^{10}q_i\sigma_i\in Z_2(K;\mathbb{Q})$, $q_i\in\mathbb{Q}$.

由 $0=\partial_2 c$ 知 $n_i\equiv c$ (由内部共边为两个面的公共边)

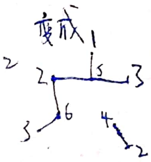
再由 σ_2. σ_7 的共边 a_2a_3 知 $n_2=-n_7$ $\Rightarrow n_i\equiv0$ $\Rightarrow H_2(K,\mathbb{Q})\cong0$.

④ $q=1$时, 从 $\partial_2\sigma_1$ 消去 a_1a_2 的系数 q_{12} 剩下. 再由 $\partial_2(\sigma_1+\sigma_5)$,

$\partial_2\sigma_2$	a_2a_3
$\partial_2\sigma_4$	a_3a_1
$\partial_2\sigma_3$	a_4a_5
$\partial_2\sigma_6$	a_5a_6
$\partial_2\sigma_9$	a_6a_4



$\partial_2(\sigma_2+\sigma_7)$
$\partial_2(\sigma_4+\sigma_8)$
变成



只有回路 $a_3a_6+a_6a_2+a_2a_5+a_5a_3$
再消去一次, 即得 $H_1(K;\mathbb{Q})\cong0$.

综上, $H_q(K;\mathbb{Q})\cong\begin{cases}\mathbb{Q}, & q=0\\ 0, & 其他\end{cases}$

(也可由Euler-Poincaré 知 $H_1(K;\mathbb{Q})=0$) #

学院：______ 专业：______ 班级______ 学号：______ 姓名：______

装 订 线

2020.5.22

P209. 1. $\varphi: K \to L$ 单纯，证明 $\varphi(K)$ 为 L 的子复形.

证：显然，由单纯定义 $\varphi(K) \subset L$，下证 $\varphi(K)$ 为复形.

① $\forall\, \underline{s}, \underline{t} \in \varphi(K)$，要么不交；若交，由 $\underline{s}$、$\underline{t}$ 仍为单形及 L 为复形，它们规则相处.

② 若 $\underline{t}$、$\underline{s} \in \varphi(K)$，$\underline{t} < \underline{s}$，

则 φ^{-1}($\underline{s}$的顶点集) $\supseteq \varphi^{-1}$($\underline{t}$的顶点集)

由 $\underline{s} \in \varphi(K)$ 知 $\exists\, \underline{s_0} \in K$, s.t. $\underline{s} = \varphi(\underline{s_0})$

$\therefore \exists\, \underline{s_0}$ 顶点子集，组成子单形 $\underline{t_0} \in K$, s.t. $\underline{t} = \varphi(\underline{t_0}) \in \varphi(K)$. #

综上，$\varphi(K)$ 为 L 的子复形

3. $\varphi: K \to L$ 单纯，$x \in |K|$，证明：$\varphi(\mathrm{Car}_K x) = \mathrm{Car}_L \overline{\varphi}(x)$

这里不是 $\overline{\varphi}$？

证：$\forall\, y \in \mathrm{Car}_K x = (a_0, \cdots, a_q)$，$x = \sum_{i=0}^{q} \mu_i a_i$，$\mu_i > 0$，$\sum \mu_i = 1$

$y = \sum_{i=0}^{q} \lambda_i a_i$，$\lambda_i \in [0,1]$，$\sum \lambda_i = 1$

$\Rightarrow \overline{\varphi}(y) = \sum \lambda_i \varphi(a_i)$，$\overline{\varphi}(x) = \sum \mu_i \varphi(a_i)$

设 $\{\varphi(a_0), \cdots, \varphi(a_q)\} = \{b_0, \cdots, b_r\}$，$r \le q$，则

$\overline{\varphi}(x) = \sum_{j=0}^{r} b_j \Big(\sum_{\varphi(a_i)=b_j} \mu_i\Big)$，系数 $\sum_{\varphi(a_i)=b_j} \mu_i > 0$

$\Rightarrow \mathrm{Car}_L \overline{\varphi}(x) = (b_0, \cdots, b_r)$

且 $\overline{\varphi}(y) = \sum_{j=0}^{r} \Big(\sum_{\varphi(a_i)=b_j} \lambda_i\Big) b_j \in \mathrm{Car}_L \overline{\varphi}(x)$

$\Rightarrow \overline{\varphi}(\mathrm{Car}_K x) \subseteq \mathrm{Car}_L \overline{\varphi}(x)$

另一方面，$\forall\, z = \sum_{j=0}^{r} \lambda_j b_j \in \mathrm{Car}_L \overline{\varphi}(x)$

$\exists\, i_j \in \{0, \cdots, q\}$, s.t. $\varphi(a_{i_j}) = b_j$

$\Rightarrow z = \overline{\varphi}\Big(\sum_{j=0}^{r} \lambda_j a_{i_j}\Big) \in \overline{\varphi}(\mathrm{Car}_K x)$. #

$\Rightarrow \overline{\varphi}(\mathrm{Car}_K x) \supseteq \mathrm{Car}_L \overline{\varphi}(x)$.

4. $\varphi: K \to L$，$\psi: L \to M$ 单纯. 证明：

(1) $\psi \circ \varphi: K \to M$ 单纯

证：① a 为 K 顶点 $\xRightarrow{\varphi\text{单纯}}$ $\varphi(a)$ 为 L 顶点 $\xRightarrow{\psi\text{单纯}}$ $\psi \circ \varphi(a)$ 为 M 顶点

② $\underline{s} = (a_0, \cdots, a_q) \in K$ $\Rightarrow \varphi(\underline{s})$ 顶点集为 $\{\varphi(a_0), \cdots, \varphi(a_q)\} = \{b_0, \cdots, b_r\}$

不妨记 $\underline{t} = (b_0, \cdots, b_r) = \varphi(\underline{s})$（或者合同）

$\Rightarrow \psi \circ \varphi(\underline{s}) = \psi(\underline{t})$ 顶点集为 $\{\psi(b_0), \cdots, \psi(b_r)\}$

$= \{\psi \circ \varphi(a_0), \cdots, \psi \circ \varphi(a_q)\}$

$\therefore \psi \circ \varphi$ 为单纯映射 #

(2) $\overline{\psi \circ \varphi}: |K| \to |M| = \overline{\psi} \circ \overline{\varphi}$

证：$\forall\, x \in |K|$，设 $\mathrm{Car}_K x = (a_0, \cdots, a_q)$，$x = \sum_{i=0}^{q} \lambda_i a_i$，$\lambda_i > 0$，$\sum \lambda_i = 1$

则 $\overline{\psi \circ \varphi}(x) = \sum_{i=0}^{q} \lambda_i\, \psi \circ \varphi(a_i)$

$\overline{\varphi}(x) = \sum \lambda_i \varphi(a_i)$ 设 $\{\varphi(a_i)\} = \{b_0, \cdots, b_r\}$，$r \le q$. 相异.

$\Rightarrow \overline{\psi} \circ \overline{\varphi}(x) = \sum_{j=0}^{r} \psi(b_j) \Big(\sum_{\varphi(a_i)=b_j} \lambda_i\Big)$

$= \sum_{j=0}^{r} \sum_{\varphi(a_i)=b_j} \big(\lambda_i \psi(b_j)\big)$

$= \sum_{j=0,\, \varphi(a_i)=b_j}^{r} \lambda_i\, \psi \circ \varphi(a_i)$

$= \sum_{i=0}^{q} \lambda_i\, \psi \circ \varphi(a_i) = \overline{\psi \circ \varphi}(x)$，$\forall x \in |K|$. #

(3) $(\psi \circ \varphi)_{*q} = \psi_{*q} \circ \varphi_{*q}: H_q(K) \longrightarrow H_q(M)$，$\forall q \in \mathbb{Z}$

证：$\forall \langle x \rangle \in H_q(K)$，

$(\psi \circ \varphi)_{*q}(\langle x \rangle) = \langle \psi \circ \varphi(x) \rangle$

$\varphi_{*q}(\langle x \rangle) = \langle \varphi(x) \rangle$

$\psi_{*q} \varphi_{*q}(\langle x \rangle) = \langle \psi(y) \rangle$ y 为 $\langle \varphi(x) \rangle$ 代表元

$\xlongequal{\text{取}y=\varphi(x)} \langle \psi \circ \varphi(x) \rangle = (\psi \circ \varphi)_{*q}(\langle x \rangle)$，$\forall \langle x \rangle, q$

$\therefore (\psi \circ \varphi)_{*q} = \psi_{*q} \circ \varphi_{*q}$. #

5. 复形 K, L，$\varphi_0: K^0 \to L^0$ 对应. 证明 φ^0 为某单纯 $\varphi: K \to L$ 的顶点映射

$\Leftrightarrow \forall s=(a_0, \cdots, a_q) \in K$，$\varphi_0(a_0), \cdots, \varphi_0(a_q)$ 为 L 中同一单形顶点

Pf：($\Rightarrow$) 由 φ 为单纯映射，$\varphi(s)$ 顶点集为 $\{\varphi_0(a_i)\}$ 的单形.

($\Leftarrow$) 定义对 $\forall x=\sum_{i=0}^{q}\lambda_i a_i \in K$，$\varphi(x)=\sum \lambda_i \varphi(a_i)$，则 $\varphi|_{K^0}=\varphi_0$

下证 φ 为单纯映射：① φ 把顶点映成顶点.

② $\forall s \in K$ 中单形，$\{\varphi_0(a_0), \cdots, \varphi_0(a_q)\}$ 为 L 中同一单形顶点

$=\{b_0, \cdots, b_r\}$ 相异.

$\Rightarrow \{b_0, b_1, \cdots, b_r\}$ 构成 L 中单形. 综上，φ 为单纯映射. ※