2020. 3. 2

P44. 11. 设 $f: X\to Y$, $x\in X$, $\mathcal{V}$: $f(x)$ 邻域基. 证明若 $\forall V\in\mathcal{V}$, $f^{-1}(V)$ 是 x 邻域, 则 f 在 x 连续.

证 $\forall N_{f(x)}$ 为 $f(x)$ 邻域, 由 $\mathcal{V}$ 为邻域基,

$\exists V\in\mathcal{V}$, s.t. $V\subset N_{f(x)}$

$\therefore f^{-1}(N_{f(x)})\supset f^{-1}(V)$ 为 x 邻域

$\therefore f$ 在 x 连续. #.

13. 证 T_3 可乘. 遗传.

Pf. ① 可乘: 设 X, Y: T_3, 则

$\forall (x,y)\in X\times Y$, $\forall (x,y)$ 的开邻域 $W\in\tau_{X\times Y}$, $W=\bigcup_{i\in I}(W_i^x\times W_i^y)$,

$\exists i\in I$, s.t. $(x,y)\in(W_i^x\times W_i^y)\overset{\text{记}}{=}W_x\times W_y$

由 X 为 T_3, $\exists U_x$ 为 x 开邻域, s.t. $\overline{U_x}\subset W_x$.

$\exists U_y$ 为 y 开邻域, s.t. $\overline{U_y}\subset W_y$

由 P34. 2., $\overline{U_x\times U_y}=\overline{U_x}\times\overline{U_y}\subset W_x\times W_y$ 且 $U_x\times U_y$ 为 (x,y) 邻域.

$\therefore \forall (x,y)\in W$ 开, $\exists U=U_x\times U_y$, s.t. $x\in U\subset\overline{U}\subset W$.

$\therefore X\times Y$ 为 T_3.

② 遗传: 设 X: T_3, $A\subset X$ 为子空间, 则

$\forall x\in A$, $\forall x$ 在 A 的开邻域 $W_A\in\tau_A$

$\exists W\in\tau_X$, s.t. $W_A=W\cap A$.

由 X 为 T_3, $\exists U\in\tau_X$, s.t. $x\in U\subset\overline{U}\subset W$.

$U_A=U\cap A$ 满足 $x\in U_A\subset\overline{U_A}\subset\overline{U}\cap A\subset W\cap A=W_A$.

(这是因为: $\overline{U}^c\cap A$ 为 A 中开集 故 $\overline{U}\cap A$ 为闭集且包含 U_A.)

$\therefore A$ 为 T_3. #

14. 证 C_2 可乘、遗传.

Pf: ① 可乘: 设 X, Y: C_2, 有可数拓扑基 $\mathcal{F}_X$、$\mathcal{F}_Y$

则 $\mathcal{F}_X\times\mathcal{F}_Y=\{F_X\times F_Y: F_X\in\mathcal{F}_X, F_Y\in\mathcal{F}_Y\}$ 可数

且为拓扑基.

因为 $\forall U\in\tau_{X\times Y}$, $U=\bigcup_{i\in I}(U_i^x\times U_i^y)$, $U_i^x\in\tau_X$, $U_i^y\in\tau_Y$

由 X, Y C_2, $\exists U_{ij}^x\in\mathcal{F}_X$, $U_{ij}^y\in\mathcal{F}_Y$,

s.t. $U_i^x=\bigcup_{j\in J}U_{ij}^x$, $U_i^y=\bigcup_{j\in J}U_{ij}^y$

$\therefore U=\bigcup_{\substack{i\in I\\ j\in J\\ j'\in J}}(U_{ij}^x\times U_{ij'}^y)\in\overline{\mathcal{F}_X\times\mathcal{F}_Y}$

$\Rightarrow \tau_{X\times Y}=\overline{\mathcal{F}_X\times\mathcal{F}_Y}$ $\Rightarrow$ $X\times Y$ 为 C_2.

② 遗传: 设 X: C_2, $A\subset X$ 子空间, $\mathcal{F}_X$ 为 X 拓扑基

则 $\mathcal{F}_{X|A}=\{F_X\cap A: F_X\in\mathcal{F}_X\}$ 为 A 的可数拓扑基.

拓扑基是因为 $\forall U_A=U\cap A\in\tau_A$,

$U=\bigcup_{i\in I}U_i$, $U_i\in\mathcal{F}_X$.

then $U_A=\bigcup_{i\in I}(U_i\cap A)$, $U_i\cap A\in\mathcal{F}_{X|A}$ $\Rightarrow U_A\in\overline{\mathcal{F}_{X|A}}$ $\Rightarrow \tau_A=\overline{\mathcal{F}_{X|A}}$

$\Rightarrow A$ 为 C_2 #

18. $S=\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. $\tau=\{U\setminus A: U\subset E^1$ 开, $A\subset S\}$

① 验证 τ 是 $\mathbb{R}$ 上拓扑.

Pf: ① 取 $A=\phi$, U 分别为 ϕ, $\mathbb{R}$ 得, $\phi, \mathbb{R}\in\tau$.

② $\forall U_i\setminus A_i\in\tau$, $i=1,2,\cdots$, 则 $\bigcup_{i=1}^{\infty}(U_i\setminus A_i)=\bigcup_{i=1}^{\infty}(U_i\cap A_i^c)=\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}U_i\right)\setminus A$,

不妨 $A_i\subset U_i$

其中 $A\subset\bigcup A_i\subset S$.

$\therefore \bigcup_{i=1}^{\infty}(U_i\setminus A_i)\in\tau$.

③ $\forall U_i\setminus A_i\in\tau$, $i=1,2$, 则 $(U_1\setminus A_1)\cap(U_2\setminus A_2)=(U_1\cap U_2)\setminus(A_1\cup A_2)$, 其中 $A_1\cup A_2\subset S$. #

$\therefore \bigcap_{i=1}^{2}(U_i\setminus A_i)\in\tau$.

②验证 $(\mathbb{R},\tau)$ T_2，非 T_3.

Step1 T_2

Pf: 注意 $U=U\setminus\phi\in\tau$，即 $\mathbb{R}$ 在 τ_e 中元素均在 τ 中. $(\tau_e\subset\tau)$

$\therefore$ $\forall x\neq y$，$\exists\ \underset{(x-\varepsilon,x+\varepsilon)}{B_\varepsilon^{\tau_e}(x)}, \underset{(y-\varepsilon,y+\varepsilon)}{B_\varepsilon^{\tau_e}(y)}\in\tau$，s.t. 两邻域不交. $\Rightarrow T_2$

Step2 非 T_3.

$\mathbb{Q}=\mathbb{R}\setminus S\in\tau$　$0\in\mathbb{Q}$

$\forall$ 0 的开邻域 $U\setminus A$，由 $0\notin S$ 知 $0\notin A\Rightarrow 0\in U$.

$\therefore\exists\varepsilon>0$, s.t. $U\setminus A\supset(-\varepsilon,\varepsilon)\setminus S=(-\varepsilon,\varepsilon)\cap\mathbb{Q}$

$\forall x\in(-\varepsilon,\varepsilon)\setminus\mathbb{Q}$，$\forall x$ 的邻域 $U_x\setminus A_x$，由 $x\in U_x$ 且 $\mathbb{Q}$ 在 $U_x^{(-\varepsilon,\varepsilon)}$ 中稠密知 $(U_x\setminus A_x)\cap((-\varepsilon,\varepsilon)\cap\mathbb{Q})\neq\phi$.

$\therefore x\in((-\varepsilon,\varepsilon)\cap\mathbb{Q})'$

$\therefore(-\varepsilon,\varepsilon)\subset\overline{(-\varepsilon,\varepsilon)\cap\mathbb{Q}}\subset\overline{U\setminus A}$

$\therefore\overline{U\setminus A}\not\subset\mathbb{Q}$.　不满足 T_3 的等价刻画！　#.

③ $(\mathbb{R},\tau)$ C_1，可分

Step1 C_1

Pf: 由②论证知. $\forall x\in\mathbb{R}$，$\forall$ 邻域 $N_x=U_x\setminus A_x$

$\exists n$, s.t. $(x-\frac{1}{n},x+\frac{1}{n})\setminus S\subset U_x\setminus A_x$.

$\therefore(\mathbb{R},\tau)$ 在 x 处有可数邻域基 $\{(x-\frac{1}{n},x+\frac{1}{n})\setminus S\mid n=1,2,\cdots\}\Rightarrow C_1$

Step2 可分

此外，$(-\varepsilon,\varepsilon)\subset\overline{(-\varepsilon,\varepsilon)\cap\mathbb{Q}}\subset\overline{\mathbb{Q}}$，$\forall\varepsilon>0$.

$\Rightarrow\overline{\mathbb{Q}}=\mathbb{R}$.　故有可数稠密子集 $\mathbb{Q}$，$(\mathbb{R},\tau)$ 可分.　#.

④ τ 在 S 上诱导子空间拓扑 τ_S 为离散拓扑，不可分

Pf: 任取 $x\in S$，$\mathbb{R}\setminus(S\setminus\{x\})\in\tau$

$\Rightarrow x=S\cap(\mathbb{R}\setminus(S\setminus\{x\}))\in\tau_S$

$\Rightarrow\tau_S$ 为离散拓扑.

$\therefore\forall A\subset S$ 既开又闭

$\therefore$ 若 $\overline{A}=S$，则 $A=\overline{A}=S$ 不可数.

$\therefore$ 无可数稠密子集，故不可分.　#

⑤ $(\mathbb{R},\tau)$ 非 C_2.

Pf: 由 14 题，C_2 遗传. 若 $(\mathbb{R},\tau)$ C_2，则 (S,τ_S) C_2

则 (S,τ_S) 有可数拓扑基 $\{A_1,A_2,\cdots\}$

WLOG，$A_i\cap A_j=\phi$，$\forall i\neq j$（否则令 $\widetilde{A_j}=A_j\setminus\bigcup_{i<j}A_i$ 即可.）

$\therefore\forall x\in S$，$\exists!\,A_i$，s.t. $x\in A_i$　且由 $A_i\cap A_j\neq\phi$，$\forall j\neq i$ 知 $x=A_i$

但 $|S|$ 不可数，与 $|\{A_i\}|$ 可数矛盾！

$\therefore(\mathbb{R},\tau)$ 非 C_2.　#

2020.3.5

P49. 1. 证明 Urysohn 证明中的 f 有 $f(x)=\sup\{r\in\mathbb{Q}_I\mid x\notin\overline{U_r}\}=\inf\{r\in\mathbb{Q}_I\mid x\in\overline{U_r}\}$

Pf: 不妨设 f 是用 sup 定义的，且 sup, inf 的集合非空，

下证 $\sup=\inf$.

由 $\overline{U_r}\subset U_{r'}$，$\forall r<r'$ 知.

$\forall r'<f(x)$，有 $x\notin U_{r'}\Rightarrow x\notin\overline{U_r}$，$\forall r<r'$

$\therefore\forall r<f(x)=\sup$，$x\notin U_r\Rightarrow\inf\geq\sup$.　$\cdots$①

$\forall r>f(x)+\frac{1}{n}$，$x\notin\overline{U_r}$ 不成立 $\Leftrightarrow x\in\overline{U_r}\Leftrightarrow$　$\inf\leq f(x)+\frac{1}{n}$，$\forall n$

$\Rightarrow$　$\inf\leq\sup$. $\cdots$②

由①②知 $\sup=\inf$.　#

2. X: T4. $A\subset X$ 闭，则连续 $f: A\to E^n$ 可扩张至 X.

Pf: 由 E^n 有拓扑基 $\{(\text{open})\ n\text{-cube} 全体\} = \mathcal{F}$.

只须验证扩张 $\tilde{f}: X\to E^n$ 有 $\tilde{f}^{-1}(\mathcal{F})$ 为开集族

考虑 $f_i: A\to E^n\to E$

$x\mapsto (f_1(x),\cdots,f_n(x))\mapsto f_i(x)=(f(x))_i$

则由于 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\cdots\times \underset{\substack{\uparrow\\ 第i个}}{U}\times\mathbb{R}\times\cdots\times\mathbb{R}$, $U\in T_e$ 为 E^n 中开集, f_i 连续.

由Tietze扩张, $\exists\, \tilde{f}_i: X\to E$ 为连续扩张

令 $\tilde{f}(x)=(\tilde{f}_1(x),\cdots,\tilde{f}_i(x))$

则 $\forall \prod_{i=1}^{n}(a_i,b_i)\in\mathcal{F}$, $\tilde{f}^{-1}\left(\prod_{i=1}^{n}(a_i,b_i)\right)=\bigcap_{i=1}^{n}\tilde{f}_i^{-1}((a_i,b_i))\in T_X$.

$\Rightarrow \tilde{f}$ 连续, 且 $\tilde{f}|_A=(\tilde{f}_1|_A,\cdots,\tilde{f}_n|_A)$

$=(f_1,\cdots,f_n)=f$. #.

3. Y 中子集 B 称为 Y 的收缩核, 若 $\exists$ 连续 $r: Y\to B$, s.t. $r(x)=x$, $\forall x\in B$.
r 称为 Y 到 B 的收缩映射.

设 D 是 E^n 收缩核, X: T4. $A\subset X$ 闭. 证明连续 $f: A\to D$ 可扩张至 X.

Pf: 由 D 是 E^n 收缩核, $\exists$ 连续 $r: E^n\to D$, s.t. $r|_D=id_D$.

$\therefore f=r\circ f$, 即, $f(x), x\in D$ 可看作 $\begin{cases} r\circ f(x), & x\in D.\\ f: A\to E^n \end{cases}$

由上一题, f 可扩张到 $\tilde{f}: X\to E^n$

从而 $r\circ\tilde{f}: X\to D$ 为 $f: A\to D$ 的扩张且连续

#.

4. S^n: n 维球面 (in E^{n+1}), X: T_4. 证明连续 $f: A\overset{闭}{\subset} X\to S^n$ 可扩张到 A 的开邻域上.

Pf: f 可看作 $A\to E^{n+1}$ 连续. 由Tietze, $\exists$ 连续扩张 $\tilde{f}: X\to E^{n+1}$

记 $A_\varepsilon=\tilde{f}^{-1}(\{x\in E^{n+1}: |x|\in(1-\varepsilon,1+\varepsilon)\})$ 为 X 中开集, 包含 A (即 A 的开邻域)

则 $\tilde{f}|_{A_\varepsilon}: A_\varepsilon\to B_{(1+\varepsilon)}(0)\setminus\overline{B_{(1-\varepsilon)}(0)}$.

令 $\varphi: E^{n+1}\setminus\{0\}\to S^n$, $x\mapsto \frac{x}{\|x\|_2}$, 则 φ 在 $B_{(1+\varepsilon)}(0)\setminus\overline{B_{(1-\varepsilon)}(0)}$ 上连续

$\therefore \varphi\circ\tilde{f}|_{A_\varepsilon}: A_\varepsilon\to S^n$ 连续, 且定义在 A 的开邻域 A_ε 上. #