习题2

1. 假设$X, X_1, X_2, \cdots$是非负独立同分布的随机变量, 则

   (a) a.s地有
   $$\limsup_{n\to\infty} \frac{X_n}{n} = \begin{cases} 0 & EX < \infty \\ \infty & EX = \infty. \end{cases}$$

   (b) 证明当$EX < \infty$时, 对任意$c \in (0,1)$都有$\sum_n e^{X_n} c^n < \infty$ a.s. 当$EX = \infty$时, 对任意$c \in (0,1)$都有$\sum_n e^{X_n} c^n = \infty$ a.s.

2. 假设$X, X_1, X_2, \cdots$是独立同分布的随机变量，证明:
   $$E|X| < \infty \Leftrightarrow \frac{|X_n|}{n} \xrightarrow{a.s} 0 \Leftrightarrow \frac{\max\limits_{1\le k\le n} |X_k|}{n} \xrightarrow{a.s} 0.$$

3. $X_1, X_2 \cdots$是独立的随机变量，其分布为泊松分布, $EX_n = \lambda_n$, 令$S_n = X_1 + \cdots + X_n$. 证明: 如果$\sum_n \lambda_n = \infty$, 则$S_n/ES_n \xrightarrow{a.s} 1$.

4. 假设随机变量$\{X_n\}$满足$0 \le X_1 \le X_2 \cdots$, 且$EX_n \sim an^\alpha$其中$a > 0$, $Var(X_n) \le Bn^\beta$, $\beta < 2\alpha$, 证明: $X_n/n^\alpha \xrightarrow{a.s} a$.

5. 假设$X_1, X_2 \cdots$是独立同分布的随机变量, 且$P(X_i > x) = e^{-x}$, 记$M_n = \max\limits_{1\le m\le n} X_m$. 证明:

   (a) $\limsup\limits_{n\to\infty} X_n/\log n = 1$ a.s.

   (b) $M_n/\log n \to 1$ a.s.