chapter 6.

6. 只需说明单调函数只有第一类间断点 且第一类间断点可数

8. 来自 Evans "PDEs" chapter 5

只需证明 $\Omega=\mathbb{R}^n$ 的情形. 一般情形由 $W^{1,p}$ ($1\le p\le\infty$) 延拓定理的处理方法化为 $\mathbb{R}^n$ 情形

- Suppose $u\in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$ $u^\varepsilon=\eta_\varepsilon * u$ 为 u 的磨光 (mollifier) thus

$$\begin{cases} u^\varepsilon \to u \text{ uniformly on any compact set } K\subset\mathbb{R}^n \\ \|Du^\varepsilon\|_\infty \le \|Du\|_\infty \end{cases}$$

$\forall x,y\in\mathbb{R}^n$ $x\ne y$
$$u^\varepsilon(x)-u^\varepsilon(y)=\int_0^1 \frac{d}{dt}u^\varepsilon(y+t(x-y))\,dt$$
$$=\int_0^1 Du^\varepsilon(y+t(x-y))\cdot(x-y)\,dt$$
$$\Rightarrow |u^\varepsilon(x)-u^\varepsilon(y)|\le \|Du^\varepsilon\|_\infty|x-y|\le\|Du\|_\infty|x-y|$$

令 $\varepsilon\to0$ 便知 ~~u^ε~~ u 为 Lip 函数

- Suppose u is Lip continuous 考虑 $D_i^h u=\dfrac{u(x-he_i)-u(x)}{-h}$ $i\in\{1,\dots,n\}$ $h\in\mathbb{R}$ $e_i=(0,\dots,1,\dots,0)$ 第 i 位置

$\Downarrow$

$$\|D_i^h u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\le \mathrm{Lip}(u)\quad \forall h\in\mathbb{R}$$

通过取对角线的操作 可知 $\exists h_k\to0$ $D_i^{h_k}u\to v_i$ in $L^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$

(i.e. $\forall$ compact $K\subset\mathbb{R}^n$ $\int_K|D_i^{h_k}-v_i|^2\to0$ as $h_k\to0$)

Then for any $\phi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, we have

~~Then~~ $\int_{\mathbb{R}^n} u\phi_{x_i} \overset{DCT}{=} \lim_{h_k\to} \int_{\mathbb{R}^n} u D_i^{h_k}\phi \underline{\underline{变换一下}} -\lim_{h_k\to 0}\int_{\mathbb{R}^n} D_i^{-h_k} u\phi$

$\overset{L^2_{loc}弱收敛}{=} -\int_{\mathbb{R}^n} v_i\phi$

by definition $\Longrightarrow v_i = u_{x_i}$ in the weak sense $\Longrightarrow u\in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$

#

10 $T_c(\phi)=\int_{\mathbb{R}^n}|x|^{-n}(\phi(x)-\phi(0))dx + c\phi(0)$ for some $c\in\mathbb{C}$ ~~$c\in\mathbb{R}$~~

显然 T_c 满足条件. 下证明这是所有的: $\forall$ 满足条件的 T.

Suppose $\phi\in\ker T_{c_1}\cap\ker T_{c_2}$ $c_1\neq c_2$

$\Longrightarrow \phi(0)=0 \Rightarrow T(\phi)=\int_{\mathbb{R}^n}|x|^{-n}\phi = T_c(\phi)=0$

~~thm 0.10~~

$\Longrightarrow T= \lambda_1 T_{c_1}+\lambda_2 T_{c_2}$ for some

又由于 $T=T_{f}$ for ~~test~~ functions vanishing at origin

便得 $T=T_c$ for some c.

#

11. a) $p<n$ 取 $f(x)=|x|^{-\alpha}\rho(x),\ 0<\alpha<\frac{n}{p}-1$ 即可 (ρ是径向光滑的 cut-off func)

请自行验证 dong $f\in W^{1,p}$.

i.e. $\rho(x)=\begin{cases}1 & |x|<1\\ \in(0,1) & |x|\in(1,2)\\ 0 & |x|>2\end{cases}$

$p=n$ $\quad f(x)=(\log|x|)^{\frac{1}{3}}\cdot\rho(x)\in L^n(\mathbb{R}^n)$

$$|Df|\le C\frac{1}{(\log|x|)^{\frac{2}{3}}|x|}\in L^n(\mathbb{R}^n)$$

b) $\quad g(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}f(x-r_k)\quad \mathbb{Q}\cap B(0,1)=\{r_k\}_{k=1}^{\infty}$

21. $e^{-g(x)}$ 满足条件 (g如上)

12. 归纳法

$\Longrightarrow$ $D^\beta T = c_\beta \int \quad \forall |\beta| = m$

直接验证 $\Longrightarrow$ $D^\beta\left(T - \sum_{|\gamma|=m} c_\gamma \int x^\gamma\right) = 0 \quad \forall |\beta| = m$

归纳假设 $\Longrightarrow$ $T = \sum_{|\alpha|\le m} C_\alpha x^\alpha$

20. Recall Hanner 不等式的证明：对于 $1 \le p \le 2$, $\forall A, B \in \mathbb{C}$

$$|A+B|^p + |A-B|^p \ge \alpha(r)|A|^p + \beta(r)|B|^p \quad \forall r \in [0,1]$$

其中 $\alpha(r) = (1+r)^{p-1} + (1-r)^{p-1}$ $\quad \beta(r) = \left((1+r)^{p-1} - (1-r)^{p-1}\right) r^{1-p}$

~~令~~

积分可得 $\|f+g\|^p_{W^{m,p}} + \|f-g\|^p_{W^{m,p}} \ge \alpha(r)\|f\|^p_{W^{m,p}} + \beta(r)\|g\|^p_{W^{m,p}}$

不妨设 $\|g\|_{W^{m,p}} \le \|f\|_{W^{m,p}}$ 取 $r = \dfrac{\|g\|_{W^{m,p}}}{\|f\|_{W^{m,p}}}$ 便得结论。