2020.5.7

P164. 2. 若$q=q'$，则$L(p,q)=L(p,q')$

Pf：$f_{p,q}(z_1,z_2)=(e^{\frac{2\pi i}{p}}z_1, e^{\frac{2\pi i q}{p}}z_2)$

$=(e^{\frac{2\pi i}{p}}z_1, e^{\frac{2\pi i q'}{p}}z_2)=f_{p,q'}(z_1,z_2)$

$\Rightarrow f_{p,q}=f_{p,q'} \Rightarrow L(p,q)=L(p,q')$. #

3. $p:E\to B$ 正则复叠，$U\subset B$ 道连基本邻域，$V_\alpha\subset p^{-1}(U)$：分支.

证明 $p^{-1}(U)$所有分支集合 $=\{h(V_\alpha):h\in D(E,p)\}$.

Pf：① $\forall h\in D(E,p)$，h将V_α同胚映到$h(V_\alpha)$ $\Rightarrow h(V_\alpha)$ 道路连通

且 $p(h(V_\alpha))=p(V_\alpha)=U$ （若$p(V_\alpha)\neq U$，则考虑$p^{-1}(U)$的复叠分片与道连U同胚，得矛盾.）

若$h(V_\alpha)$不为分支，则 $\exists\, \alpha_h\in h(V_\alpha)$，$\alpha'_h\notin h(V_\alpha)$ 道路连通 且$\alpha'_h\in p^{-1}(U)$

$\Rightarrow h^{-1}(\alpha_h)\in V_\alpha$，$h^{-1}(\alpha'_h)\notin V_\alpha$ 道连，与V_α为分支矛盾 且$h^{-1}(\alpha'_h)\in p^{-1}(U)$.

$\therefore h(V_\alpha)$为$p^{-1}(U)$分支.

② $\forall V'_\alpha$为$p^{-1}(U)$分支，$\forall e'\in V'_\alpha$，$\exists\, e\in V_\alpha$，s.t. $p(e)=p(e')$ （由U道连，$p(V_\alpha)=U$）

由正则复叠，$\exists\, h\in D(E,p)$，s.t. $h(e)=e'$.

$\Rightarrow$ 由①知 $h(V_\alpha)=V'_\alpha$.

综上，$p^{-1}(U)$分支全体 $=\{h(V_\alpha):h\in D(E,p)\}$. #

4. $p:E\to B$ 泛复叠，$G\subset D(E,p)$子群，$E_1=E/G$，$\tilde{p}:E\to E_1$ 投射，$p_1:E_1\to B$由p导出.

证明$\tilde{p}$与p_1都复叠

Pf：① $\forall [e]\in E_1$，$\tilde{p}^{-1}([e])=\{g(e):g\in G\}$. 令$b=p(e)$，$\exists\, U\ni b$基本邻域 s.t. $p^{-1}(U)=\coprod V_\alpha$，$p|_{V_\alpha}:V_\alpha\to U$同胚. $\exists\, V_\alpha$，s.t. $e\in V_\alpha$（仍记$[V_\alpha]$为V_α）.

则 $\tilde{p}^{-1}(V_\alpha)=\coprod_{g\in G}g(V_\alpha)$，$\tilde{p}|_{g(V_\alpha)}:g(V_\alpha)\to V_\alpha$ 同胚 $\Rightarrow \tilde{p}$为复叠映射.

② $\forall b=p(e)\in B$，$p^{-1}(U)=\coprod_{\alpha\in\Lambda}V_\alpha$ （记号同①.） $p_1^{-1}(U)=\coprod_{\alpha\in\Lambda_1\subset\Lambda}[V_\alpha]$ 故为复叠

（泛复叠用在哪儿？良定吗？） #

5. $p:E\to B$ 泛复叠，$a, a'\subset B$：起终相同的道路，$\tilde{a}$、$\tilde{a}'$：提升，$\tilde{a}(0)=\tilde{a}'(0)$

证明 $\tilde{a}(1)=\tilde{a}'(1) \Leftrightarrow a\simeq a'$.

Pf：（$\Leftarrow$）由同伦提升定理"$a\simeq a'$" "$\tilde{a}(0)=\tilde{a}'(0)$" $\Rightarrow \tilde{a}(1)=\tilde{a}'(1)$.

（$\Rightarrow$）$\tilde{a}\overline{\tilde{a}'}$ 为以$\tilde{a}(0)=e$为起点的闭路.

$\Rightarrow \langle a\overline{a'}\rangle\in H_e=p_\pi(\pi_1(E,e))$ 平凡，由p泛复叠.

$\Rightarrow a\simeq a'$ #.