1.5.3. 紧集的子集是列紧的　　　　1.6.5 (Hahn-Banach).

例1: 设E是赋范线性空间. $H\subseteq E$是一个超平面, 则H是闭的 $\Leftrightarrow$ f continuous.

$\Rightarrow$: 即$\{f\neq\alpha\}$开. 若$f\neq 0$. $\exists\, B_r(x)\subseteq\{f\neq\alpha\}$. $\Rightarrow$ $f<\alpha$ in $B_r(x)$ 或 $f>\alpha$ in $B_r(x)$.

i.e. $rf(z)+f(x_0)<\alpha$, $f(z)<\frac{1}{r}(\alpha-f(x_0))$, $\forall z\in B_1(0)$. #.

注: 1 由此可以推出, 若f不连续, 则H在E中稠密.

2 f的连续性由$\{f<\alpha\}$(或$\{f>\alpha\}$)有无内点决定 例:Baire纲 $\Rightarrow$ 共鸣定理.

例2: X, Y是赋范线性空间. X是完备的. L_0, L_1是X到Y的有界线性算子. $\forall t\in[0,1]$.
令 $L_t=(1-t)L_0+tL_1$. 若$\exists C$(关于t一致), $\|x\|\le C\|L_t x\|$(*) $\forall x\in X$. $\forall t\in[0,1]$
则 L_0是满的 $\Leftrightarrow$ L_1是满的

假设对某个s, L_s是满的. 由(*), L_s^{-1}存在. $\therefore$ $L_t x=y \Leftrightarrow L_s(x)=y+(t-s)L_0x-(t-s)L_1x$. $\Leftrightarrow x=L_s^{-1}y+(t-s)L_s^{-1}(L_0-L_1)x$.

定义 $T: X\to Y$. $Tx:=L_s^{-1}y+(t-s)L_s^{-1}(L_0-L_1)x$. #

Δ: 解一般线性椭圆方程: Δu 与 $a^{ij}D_{ij}u$. $L_t:=t\Delta+(1-t)a^{ij}D_{ij}$.

例3: E是无限维赋范线性空间. 若E完备, 则Hamel基的势不可数.

Hamel基: ~~$\forall x\in E$~~ $\exists\{e_i\}_{i\in I}\subseteq E$, $\|e_i\|=1$. $\forall x\in E$, $\exists!\{x_i\}_{i\in I}$, $x=\sum_{i\in I}x_ie_i$ 只有有限个x_i非零.

存在性: (Zorn). 定义I的特定子集间的偏序: $\alpha<\beta$, if $\{e_i\}_{i\in\alpha}\subseteq\{e_i\}_{i\in\beta}$.

反设可数: $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$. 则 $E=\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i$, $E_i=\operatorname{span}_{1\le k\le i}\{e_k\}$. $\therefore \exists i_0\in\mathbb{N}$, E_{i_0}有内点

$B_r(x)\subseteq E_{i_0}$. $-B_r(x)\subseteq E_{i_0}$. $\Rightarrow$ $B_{2r}(0)\subseteq E_{i_0}$. i.e. $E\subseteq E_{i_0}$. 矛盾!

例4: 设(X,d)完备. $\{f_n\}\subseteq C(X)$. 且 $\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$, $\forall x\in X$. 则f的不连续点集是第一纲的.

令 $\omega(f)(x)=\lim_{r\to 0}\omega(f;r)(x)$. $\omega(f;r)(x):=\sup_{y,z\in B_r(x)}|f(y)-f(z)|$.

则有: ① $\omega(f)(x)=0 \Leftrightarrow$ f在x处连续 ② $\{x\in X: \omega(f)(x)<\varepsilon\}$ $(:=E_\varepsilon)$ 开.

$\{$不连续点$\}=\bigcup_{n\ge1}E_{\frac1n}^c$. 下证 $E_{\frac1n}^c$ 无内点. 反之, 有 ~~$B_r(x)$~~ $B\subseteq E_{\frac1n}^c$. (不妨B闭球)

令 $F_\ell:=\{x\in B: \sup_{j,k\ge\ell}|(f_j-f_k)(x)|\le\frac{1}{4n}\}$. 则 $B=\bigcup_{\ell\ge1}F_\ell$. 由Baire纲, $\exists\ell_0\in\mathbb{N}$.

$B_0\subseteq F_{\ell_0}\subseteq B$. $\therefore |f_n(x)-f(x)|\le\frac{1}{4n}$. $\forall x\in B_0$, $\forall n\ge\ell_0$. 取 $B_1\subseteq B_0$. $|f_n(y)-f_n(z)|\le\frac{1}{4n}$

$\therefore |f(y)-f(z)|\le|f(y)-f_n(y)|+|f_n(y)-f_n(z)|+|f_n(z)-f(z)|<\frac1n$.

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China
地址：中国 安徽 合肥市金寨路96号 邮编：230026
电话：0551-63602184 传真：0551-63631760 Http://www.ustc.edu.cn

例5：不存在 $f:\mathbb{R}^1\to\mathbb{R}^1$，且 f 的连续点集恰为 $\mathbb{Q}$。

由上一题，E_ε 是开集。$\therefore$ $\{$连续点$\}=\bigcap_{n\geq1}E_{\frac{1}{n}}$ 是 G_δ 集。$\mathbb{Q}:=\{r_n\}$，$\mathbb{R}^1\setminus\{r_n\}$ 开。

取交，$\Rightarrow$ 可数个稠密开集之交 $=\emptyset$。矛盾！

~~例6 $\mathbb{Q}=\{x_j\}$~~

例6：X,Y 是 B空间，$T\in\mathcal{L}(X,Y)$，若 T 不是满射，则 $T(X)$ 是 Y 中的第一纲集。

$\because T(X)=\bigcup_{n\geq1}T(B_n(0))$。下证 $\overline{T(B_n(0))}$ 无内点。若否，$B_r(x_0)\subseteq\overline{T(B_n(0))}$。

$-B_r(x_0)\subseteq\overline{T(B_n(0))}$，$\Rightarrow$ $B_{2r}(0)\subseteq\overline{T(B_{2n}(0))}$。由开映像证明知，$\overline{T(B_{2n}(0))}\subseteq T(B_{4n}(0))$

$\Rightarrow T$ 满射，矛盾。

注：由此，若 $E\subseteq\mathbb{R}^n$，$m(E)<\infty$，则 $\mathcal{L}^p(E)\subseteq\mathcal{L}^2(E)$，$(p>2\geq1)$。$\therefore\mathcal{L}^p(E)$ 在 $\mathcal{L}^2(E)$ 中是第一纲集。

例7：(Grothendieck) $m(E)<\infty$。$X\subseteq\mathcal{L}^p(E)$，且 X 是 $\mathcal{L}^p$ 中闭子空间 且 $X\subseteq\mathcal{L}^\infty$，则 $\dim X<\infty$

1° $\|f\|_2\leq m(E)^{\frac12}\cdot\|f\|_\infty$，$\forall f\in X$。且 $\|f\|_p\leq m(E)^{\frac1p}\|f\|_\infty$，$\forall f\in X$。

由等价范数，$\|f\|_\infty\leq C\|f\|_p$，$\forall f\in X$。

2° 若 $1<p\leq2$，$\|f\|_p\leq C\|f\|_2$。$\therefore$ $\|f\|_\infty\leq C\|f\|_2$，$\forall f\in X$。

若 $p>2$，$\|f\|_p\leq\|f\|_\infty^{\frac{p-2}{p}}\cdot\|f\|_2^{\frac2p}$，$\therefore$ $\|f\|_\infty\leq C\cdot\|f\|_\infty^{\frac{p-2}{p}}\cdot\|f\|_2^{\frac2p}$，$\forall f\in X$。

$\therefore$ 综上，$\|f\|_\infty\leq C\|f\|_2$，$\forall f\in X$。

3° 由于 $\mathcal{L}^2(E)$ 是 Hilbert 空间，若 $f_1,\dots,f_n$ 在 $\mathcal{L}^2(E)$ 中单位正交 且 $(\xi_1,\dots,\xi_n)\in\mathbb{C}^n$，

$|\xi_1|^2+\dots+|\xi_n|^2\leq1$，$f_\xi:=\sum_{j=1}^n\xi_jf_j$，$\|f_\xi\|_2^2=\langle\sum_j\xi_jf_j,\sum_j\xi_jf_j\rangle\leq1$

$\therefore$ $\|f_\xi\|_\infty\leq C\cdot\|f_\xi\|_2\leq C$。取 $\mathbb{C}^n$ 单位球中一可数集 $\{\xi^{(k)}\}$，$\xi^{(k)}=(\xi_1^{(k)},\dots,\xi_n^{(k)})$

$|\xi_1^{(k)}|^2+\dots+|\xi_n^{(k)}|^2\leq1$，$|f_{\xi^{(k)}}(x)|\leq C$，$\forall x\in E\setminus F_k$，$|F_k|=0$。$F:=\bigcup_{k\geq1}F_k$，$|F|=0$

Claim：$|f_\xi(x)|\leq C$，$\forall x\in E\setminus F$，$\forall\xi\in\mathbb{C}^n$ 单位球。

$\therefore\sum_{j=1}^n|f_j(x)|^2\leq C^2$，积分 $\Rightarrow$ $n\leq C^2m(E)$。$\therefore$ $\dim X<\infty$。

例8：S是$L^1[0,1]$的闭子集．$\forall f\in S$．$\exists p=p(f)>1$．s.t. $\|f\|_p<\infty$．证明 $\exists p_0>1$
s.t. $\|f\|_{p_0}<\infty$．$\forall f\in S$ 成立．

令 $S_n:=\{f\in S:\|f\|_{1+\frac{1}{n}}<+\infty\}$．则 S_n 是 S 的子空间．由范数等价，$\exists C_n>0$．
$\|f\|_{1+\frac{1}{n}}\le C_n\|f\|_1$．∴若 $\{f_n\}$ Cauchy in S．($f_n\to f_0\in L^1$)，有 $\{f_n\}$ Cauchy in $L^{1+\frac{1}{n}}$．
∴有子列 a.e.收敛．⇒ $f\in L^{1+\frac{1}{n}}$．∴ S_n 是 S 的闭子空间．

$S=\bigcup_{n\ge1}S_n$．∴ $\exists B_{r_0}(f_0)\subseteq S_{n_0}$，⇒ $B_{2r_0}(0)\subseteq S_{n_0}$．∴ $S\subseteq S_{n_0}$． #.

例9：E是B空间．M是E闭子空间．N finite-dim．⇒ M+N closed in E．

1° $M\cap N=\emptyset$．令 $x_n=y_n+z_n$ 是 M+N 中Cauchy列．Claim：$\{z_n\}$有界．
若否，有子列 $\|z_{k_n}\|\to\infty$．∵$\{x_n\}$ Cauchy in E ∴ $x_n\to x$．∴ $\frac{x_{k_n}}{\|z_{k_n}\|}\to 0$．
而$\left\|\frac{z_{k_n}}{\|z_{k_n}\|}\right\|=1$，∴ $\exists\{z_{k_{n_j}}\}\subseteq\{z_{k_n}\}$．$z_{k_{n_j}}/\|z_{k_{n_j}}\|\to w$，$\|w\|=1$．⇒ $y_{k_{n_j}}/\|z_{k_{n_j}}\|\to -w$
与 $M\cap N=\emptyset$ 矛盾！ ∴ $\{z_n\}$有界，∴ $z_{k_n}\to z_0\in N$．而 $x_{k_n}\to x\in E$．
∴ y_{k_n} 也有极限 $y_0\in M$．∴ $x=y_0+z_0\in M+N$．

2° $M\cap N\ne\emptyset$．令 $N:=(N\cap M)\oplus N_1$．对 $M+N_1=M+N$ 如上操作．

例18 证明：

令 $S_n := \{f \in S: \|f\|_{1+\frac{1}{n}} \leq n\}$. 则 $S = \bigcup_{n\geq 1} S_n$. 下证 S_n 是 $(S, \|\cdot\|_1)$ 闭集

若 $\{f_k\}$ Cauchy in S_n, 则 $f_k \xrightarrow{\|\cdot\|_1} f \in S$. 由 Riesz, $\exists \{f_{k_\ell}\} \subseteq \{f_k\}$, $f_{k_\ell} \xrightarrow{a.e.} f$.

$\therefore |f_{k_\ell}|^{1+\frac{1}{n}} \xrightarrow{a.e.} |f|^{1+\frac{1}{n}}$ 由 Fatou. $\int_{[0,1]} |f|^{1+\frac{1}{n}} dx \leq \varliminf_{\ell\to\infty} \int_{[0,1]} |f_{k_\ell}|^{1+\frac{1}{n}} dx \leq n^{1+\frac{1}{n}}$

$\Rightarrow \|f\|_{1+\frac{1}{n}} \leq n$, $\therefore f \in S_n$. 于是 S_n 是 $(S, \|\cdot\|_1)$ 闭集.

$\therefore$ 由 Baire 纲, $\exists N$, $B_{r_0}(f_0) \subseteq S$. s.t. $\|f\|_{1+\frac{1}{N}} \leq N$, $\forall f \in B_{r_0}(f_0)$.

i.e. $\|r_0 g + f_0\|_{1+\frac{1}{N}} \leq N$, $\forall g \in B_1(0)$ ($B_1(0)$ 是 S 的单位球).

$\therefore \|g\|_{1+\frac{1}{N}} \leq \frac{1}{r_0}(\|f_0\|_{1+\frac{1}{N}} + N)$, $\forall g \in B_1(0)$. $\therefore S \subseteq L^{1+\frac{1}{N}}[0,1]$.

注：上课时的证明有错误. 按上课定义的 S_n 为子空间. 赋 $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_{1+\frac{1}{n}}$ 时并不是全为 B 空间, 故不能有 ~~范数~~ 范数等价.

此时定义的 S_n 是 S 的闭子集, 用 Baire 纲即可.