2020.4.27

P159. 1. 设 $p:E\to B$ 复叠，X：连通，$f:X\to B$ 零伦连续，证明：f 有提升，且提升零伦.

证：设 $F:X\times I\to B$ 使 f 同伦于常值映射 f_b，即 $F(x,0)=f(x)$，$\forall x\in X$.

则由同伦提升定理，$\exists F$ 的提升 $\tilde{F}:X\times I\to E$, s.t. $\tilde{F}(x,0)=\tilde{f}(x)$ 有

$p\circ\tilde{f}(x)=F(x,0)=f(x)$，即 $f(x)$ 有提升 $\tilde{f}$ 且 $\tilde{F}$ 将 $\tilde{f}$ 同伦映为

$\tilde{F}(x,1)\equiv e\in p^{-1}(b)$. (由 $\tilde{F}$ 连续得到恒为 $p^{-1}(b)$ 中同一元). #

2. $p:E\to B$ 复叠，$U\subset B$ 道连开，$i:U\to B$ 包含，导出 $i_\pi:\pi_1(U)\to\pi_1(B)$ 平凡，则 U 基本邻域. 这就是半单连通开 $\Rightarrow$ 基本邻域 (P154.15) 啊…

证：我试试用上面1.来证.

设 $p^{-1}(U)=\coprod V$，V 为连通分支，则由P154.13，$p(V)=U$ 为满射.

$i:U\to B$ 零伦连续，则由1. 有提升 $\tilde{i}:U\to E$, s.t. $\tilde{i}\circ p|_V=i$

由提升唯一性，$p|_V$ 单. (规定 $\tilde{i}$ 一点像给出一个提升) $\therefore p|_V$ 同胚 $\therefore U$ 基本邻域

#

3. 设 $f:S^2\to T^2$ 连续，则 f 零伦

证：$T^2=E^2/\mathbb{Z}^2$ $\Rightarrow p:E^2\to T^2$ 有自然的复叠.

$\exists$ 提升 $\tilde{f}:S^2\to E^2$, s.t. $f=p\circ\tilde{f}$

$\Rightarrow f_\pi=p_\pi\circ\tilde{f}_\pi$. 由于 $\pi_1(S^2)=\{1\}$ 平凡. $\tilde{f}_\pi(\pi_1(S^2))=\{1\}$

$p_\pi(\{1\})=\{1\}$

#

$\Rightarrow$ 零伦.

5. $p_i:E_i\to B$ 复叠 $(i=1,2)$，$h:(E_1,p_1)\to(E_2,p_2)$ 同态. 证明 h 复叠

证：$\forall e_2\in E_2$，记 $b_2=p_2(e_2)\in B$. $\exists b_2$ 的基本邻域 $U\subset B$, s.t.

$p_i^{-1}(U)=\coprod_\alpha V_\alpha^{(i)}$. $p_i|_{V_\alpha^{(i)}}\to U$ 同胚，$i=1,2$. $\exists V^{(2)}\triangleq V_{\alpha_0}^{(2)}$, s.t.

$e_2\in V^{(2)}$，且 $p_2|_{V^{(2)}}\to U$ 同胚. 验证 $V^{(2)}$ 为基本邻域，从而 h 复叠

 由 $p_2\circ h=p_1\Rightarrow h^{-1}(V^{(2)})=h^{-1}(p_2|_{V^{(2)}}^{-1}(U))=p_1^{-1}(U)=\coprod_\alpha V_\alpha^{(1)}\Rightarrow V^{(2)}$ 基本邻域

#.

No

Date

证 of Thm：**Step1** 构造 E 和 $p: E\to B$.

取 $b_0\in B$，令 $E \triangleq \{\langle a\rangle : a(0)=b_0\}$

$p: E\to B$，$\langle a\rangle \mapsto a(1)$.

由 B 道连，p 满.

Step2 构造 E 上拓扑 (step 2~4)

令 $\mathcal{U} \triangleq \{u\subset B : u$ 开，道连，$\pi_1(u)\to\pi_1(B)$ 平凡$\}$

则 $\mathcal{U}$ 为 B 拓扑基 (∵ $\bigcup_{u\in\mathcal{U}} u = B$，且 $\forall x\in B$，$\forall x$ 邻域 V

由 B 局部半单连通，$\exists U'$，$\pi_1(U')\to\pi_1(B)$ 平凡，s.t. $x\in U'$

由 B 道连，$\exists$ 连通开 $u\in U'\cap V$，s.t. $x\in u\subset V$

$\Rightarrow \pi_1(u)\to\pi_1(U')\to\pi_1(B)$ 平凡 $\Rightarrow u\in\mathcal{U}$)

$\forall u\in\mathcal{U}$，设 a 为从 b_0 到 u 的一条道路，

令 $(u,\langle a\rangle) \triangleq \{\langle a\eta\rangle : \eta: I\to u,\ 0\mapsto a(1)\}$，注意它只与 u、$\langle a\rangle$ 有关

Step3 一些性质：

① $p:(U,\langle a\rangle)\to U$ 满 (由 U 道连)

② $p|_{(U,\langle a\rangle)}$ 单. (由 $\pi_1(U)\to\pi_1(B)$ 平凡)

③ 若 $\langle a'\rangle\in(U,\langle a\rangle)$，则 $(U,\langle a\rangle)=(U,\langle a'\rangle)$

(由 $\langle a'\eta'\rangle \overset{a'=a\eta}{=} \langle a\eta\eta'\rangle$，$\langle a\eta'\rangle=\langle a'\bar{\eta}\eta'\rangle$)

故 $(U,\langle a\rangle)=(U,\langle a'\rangle)$ 或 $(U,\langle a\rangle)\cap(U,\langle a'\rangle)=\varphi$，$\forall a,a'$

Step4 令 $\mathcal{F} \triangleq \{(u,\langle a\rangle) : u\in\mathcal{U},\ a:$ 从 b_0 到 u 的道路$\}$，则 $\mathcal{F}$ 为 E 的一个拓扑基

规定 E 上拓扑由 $\mathcal{F}$ 生成.

∵ $\bigcup_{(u,\langle a\rangle)\in\mathcal{F}} (u,\langle a\rangle)=E$ 且 若 $(U,\langle a\rangle)\cap(V,\langle a\rangle)\neq\varphi$，取 $\langle a''\rangle$ 于其中

则 $(U,\langle a\rangle)=(U,\langle a''\rangle)$，$(V,\langle a'\rangle)=(V,\langle a''\rangle)$

$\exists W\in\mathcal{U}$，s.t. $a''(1)\in W\subset U\cap V$ $\Rightarrow$ $(W,\langle a''\rangle)\subset(U,\langle a\rangle)\cap(V,\langle a'\rangle)$

且 $\langle a''\rangle\in(W,\langle a''\rangle)$

No

Date

~~Def. 局部单连通：有单连通邻域基~~

Prop. 局部单连通 $\Rightarrow$ 局部半单连通

c.e.g. CX 单连通 $\Rightarrow$ 局部半单连通，但非局部单连通 (去掉 CX 的尖尖就完了)

Thm. (覆叠空间存在定理) B：道连 + 局部道连 + 局部半单连 $\Rightarrow$ B 有泛覆叠空间

($\forall b\in B$，$\exists$ 邻域 $U\subset E$，s.t. $\pi_1(U)\to\pi_1(X)$ 平凡.)

step5 $p: E\to B$ 连续开，更准确说，$p|_{(U,\langle a\rangle)}:(U,\langle a\rangle)\to U$ 同胚.

首先，step3 ①② $\Rightarrow$ p 一一对应.

step 2 $\Rightarrow$ $G_1 = \{v\in\mathcal{U} ; v\subset U\}$ 为 U 拓扑基

step 4 $\Rightarrow$ $G_2 = \{(V,\langle a'\rangle)\in\mathcal{F} : (V,\langle a'\rangle)\subset(U,\langle a\rangle)\}$ 为 $(U,\langle a\rangle)$ 拓扑基.

只须证 p 诱导 G_1 到 G_2 的双射.

$p((V,\langle a'\rangle))=V\subset U$. $\Rightarrow$ p 把 G_2 映到 G_1

① 满的：$\forall v\in\mathcal{U}$，$v\subset U$，$\exists\langle a'\rangle\in(U,\langle a\rangle)$，$a'(1)\in V$，则

$(V,\langle a'\rangle)\subset(U,\langle a'\rangle)=(U,\langle a\rangle)$ $\Rightarrow (V,\langle a'\rangle)\in G_2$ 且

$p((V,\langle a'\rangle))=V\subset U$.

② 单的：若 $p((V_1,\langle a'\rangle))=p((V_2,\langle a''\rangle))$，则 ($p((V_1,\langle a'\rangle))=V_1$，$p((V_2,\langle a''\rangle))=V_2$)

$(V_1,\langle a'\rangle)\subset(U,\langle a\rangle)$

$(V_2,\langle a''\rangle)\subset(U,\langle a\rangle)$

由 $p:(U,\langle a\rangle)\to U$ 单得 $(V_1,\langle a'\rangle)=(V_2,\langle a''\rangle)$

Step6 $p: E\to B$ 覆叠.

∵ $\forall u\in\mathcal{U}$，$p^{-1}(u)=\bigcup_{\langle a\rangle,\ a(1)\in U}(U,\langle a\rangle)=\coprod_{\langle a\rangle \text{ in some sets}}(U,\langle a\rangle)$ 且 $p|_{(U,\langle a\rangle)}$ 同胚.

Step7 (E,p) 泛覆叠，即 E 单连通

∵ $\forall\langle a\rangle\in E$，则 $a: I\to B$ 为以 b_0 为起点道路. 令 $a_s: I\to B$，$t\mapsto a(st)$. 则 $s\mapsto\langle a_s\rangle=:\tilde{a}(s)$

为 E 中从 $\langle a_0\rangle$ 到 $\langle a_1\rangle$ 道路. ($\langle a_0\rangle=\langle e_{b_0}\rangle$，$\langle a_1\rangle=\langle a\rangle$) $\Rightarrow$ 令 $H=p_\pi(\pi_1(E,\langle e_{b_0}\rangle))$，其中 $p(\langle e_{b_0}\rangle)=b_0$

则 $p(\tilde{a}(t))=a_t(1)=a(t)$ $\Rightarrow$ $\tilde{a}$ 为 a 提升 [illegible]

$\tilde{a}$ 闭道路，$\tilde{a}(1)=\tilde{a}(0)=\langle e_{b_0}\rangle$

∴ $\langle a\rangle=\langle e_{b_0}\rangle$ ∴ H 平凡 $\Rightarrow$ $\pi_1(E,\langle e_{b_0}\rangle)$ 平凡.