2020.6.1.

P233. 1. 证明 S^{n-1} 不是 D^n 收缩核

Pf: 由 $H_n(D^n) \cong H_n(\Delta^n) \cong 0$, $H_n(S^{n-1}) \cong \mathbb{Z}$ 知 非收缩核 $(n \geq 2)$

$n=1$ 时 S^{n-1} 不连通了都… #

2. 设 $f: D^n \to E^n$ 连续，证明在以下之一成立时 f 有不动点：

① $f(S^{n-1}) \subset D^n$

Pf: 令 $r: E^n \to D^n$, $x \mapsto \frac{x}{\max\{\|x\|, 1\}}$，则 $r \circ f: D^n \to D^n$. 由 Brouwer 不动点定理

可知. $\exists x$, s.t $r \circ f(x) = x$.（这个定理证明考虑"偶数 n 时无恒非0切向场"即可，奇数时补丁延拓为偶数情形.）

若 $\|f(x)\| \geq 1$，则 $\|r \circ f(x)\| = 1 = \|x\|$

又由 $f(x) \in D^n$ 知 $\|f(x)\| = \|x\| = 1$ $\Rightarrow f(x) = x$. 为不动点

若 $\|f(x)\| < 1$，则 $r \circ f(x) = f(x) = x$，也为不动点. #

② $\forall x \in S^{n-1}$, $f(x), x, 0$ 不共线.

Pf: 同①. $\exists x$, s.t. $r \circ f(x) = x$.

若 $\|f(x)\| \geq 1$，则 $\|x\| = \|r \circ f(x)\| = 1$ $\Rightarrow x \in S^{n-1}$

$\Rightarrow f(x) = \|f(x)\| x$ 与条件矛盾.

$\therefore \|f(x)\| < 1 \Rightarrow f(x) = x$. 为不动点. #

③ $\forall x \in S^{n-1}$, $\overline{xf(x)}$ 线段过0.

Pf: 同②. 在 $x \in S^{n-1}$ 处有矛盾，从而 $f(x) = f(x) = x$ 为不动点 #

4. $f: D^n \to D^n$ 连续，$f(S^{n-1}) \subset S^{n-1}$，记 $f_0 = f|_{S^{n-1}}$. 证明：

若 $\deg(f_0) \neq 0$ 则 f 满射

Pf: 反证，若 $\exists x \in D^n \setminus f(D^n)$

① $x \in S^{n-1}$：则 f_0 非满射，$f_0(S^{n-1})$ 可缩为一点（通过球极投影到 $\mathbb{R}^{n-1}$ 再直线收缩.）

$\Rightarrow \deg(f_0) = 0$. 矛盾！

② $x \notin S^{n-1}$：WLOG $x = 0$（否则考虑 $\tilde{f}(y) = f(dy)$，其中 $d(0) = x$，$d|_{S^{n-1}} = id_{S^{n-1}}$.）（rescale $y-x$ 就好了.）

由于 S^{n-1} 是 $D^n \setminus \{0\}$ 的收缩核，WLOG $f: D^n \to S^{n-1}$

$\simeq \tilde{f}: S^n \to S^{n-1}$

由 $H_q(S^n)$ 或 $H_q(S^{n-1}) = 0$, $\forall q \neq 0$

$\Rightarrow \deg(f_0) = 0$. 矛盾！

$\therefore f$ 满射. #

5. n 偶，$f: S^n \to S^n$ 连续，则 ① f 或有不动点，或 $\exists x \in S^n$, s.t. $f(x) = -x$.

Pf: 令 $V(x) = \frac{f(x) - \langle f(x), x\rangle x}{1 - \langle f(x), x\rangle}$，若 $f(\cdot)$ 无不动点

则 $\langle V, x\rangle = 0$, $\forall x \in S^n$ $\Rightarrow V$ 为切向量场

$\Rightarrow \exists x$, s.t. $V(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = \langle f(x), x\rangle x \Leftrightarrow f(x) = cx$, $c \in \mathbb{R}$

由 $f(x) \in S^n$ 知 $f(x) = -x$. #

② f^2 有不动点.

Pf: 由球极投影，若 $f(x) \neq g(x)$ for some x，则 $f \simeq g$.

若 f^2 无不动点，则 $f^2(x) = -x$ for some x，则 $\deg f^2 = \deg h = -1$

$(\deg f)^2 \geq 0$ 矛盾！ #

学院：＿＿＿＿ 专业：＿＿＿＿ 班级＿＿＿＿ 学号：＿＿＿＿ 姓名：＿＿＿＿

装 订 线

P239. 1. $f: S^n \circlearrowleft$ 连续，$f(x) \neq f(-x)$, $\forall x \in S^n$. 证明 $\deg(f)$ 奇.

Pf: 令 $g(x) = \dfrac{f(x)-f(-x)}{\|f(x)-f(-x)\|}$，则 $g(-x) = -g(x)$ 为保径映射
$\in S^n$

$\therefore \deg g$ 为奇.

令 $H(x,t) = \dfrac{f(x)-tf(-x)}{\|f(x)-tf(-x)\|}$，则 $f \overset{H}{\simeq} g$. $\Rightarrow \deg f$ 为奇. #

2. X: 可剖分空间，$f: S^n \to X$ 连续，且 $f(x)=f(-x)$, $\forall x \in S^n$.

证明：$f_{*n}(H_n(S^n)) \subset 2H_n(X)$，特别当 n 偶时，$f_{*n}(H_n(S^n))=0$

Pf: 不妨设 X 为多面体 $|K|$，并把 f 看作 $|\Sigma^n|$ 到 $|K|$ 映射.

$\exists$ 充分大的 r, s.t. f 有单纯逼近 $\varphi: (\Sigma^n)^{(r)} \to K$, s.t.

$\varphi(\cdot) = \varphi(-\cdot)$ 即 $\varphi = \varphi \circ h$.

$\forall C_n \in H_n((\Sigma^n)^{(r)}) = Z_n((\Sigma^n)^{(r)})$

$\varphi_n(C_n)$

(不会做了，但我猜只用对 $Z_n((\Sigma^n)^{(r)})$ 的生成元验证

$\varphi_n(C_n) \in 2H_n(X)$，其中 $\varphi_n((\Sigma^n)^{(r)})$ 同构于 $(\Sigma^n)^{(r)}$) 当 n 偶时，由 $\deg h = -1$ 知

$\deg \varphi = \deg \varphi \cdot \underset{\text{从而定义deg.}}{\deg h} \Rightarrow \deg \varphi = 0 \Rightarrow f_{*n}(H_n(S^n)) = 0$.

#

3. $f: S^n \circlearrowleft$ 连续，$f(x)=f(-x)$, $\forall x \in S^n$. 则 $\deg f$ 偶.

Pf: 由 2.. $f_{*n}(H_n(S^n)) \subset 2H_n(S^n) \Rightarrow \deg f$ 即 $\deg f$ 偶 #.

2020. 6. 4.

P243. 1. 证明 $L(f)$ 同伦不变量. 即若 $f \simeq g$ 时，$L(f) = L(g)$.

Pf: $\because f \simeq g$ $\therefore f_{*q} \simeq g_{*q}$ $\Rightarrow tr\, f_{*q} = tr\, g_{*q}$ $\Rightarrow L(f) = L(g)$ #

2. 设 K 的 Euler 示性数 $\chi(K) \neq 0$，证明若 $f \simeq id: |K| \to |K|$，则 f 有不动点.

Pf: $L(id) = \sum (-1)^q tr(id_{*q}) = \sum (-1)^q \alpha_q = \chi(K) \neq 0$

由上一题，$L(f) = L(id) \neq 0$；由 Lefschetz 不动点定理，f 有不动点 #

3. 证明射影平面到自身的 $\forall$ 连续映射有不动点.

Pf: 即 Check $H_q(\mathbb{P}^2; \mathbb{R}) = 0$, $\forall q \geq 1$

(类似于 $H_q(\mathbb{P}^2, \mathbb{Z}) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}_2, & q=1 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$ 的证明，

但注意不再有系数 $\in \mathbb{R}$ 的约束，故 $H_1(\mathbb{P}^2, \mathbb{Z}) \simeq 0$.)

$\therefore H_q(\mathbb{P}^2, \mathbb{R}) = 0$, $\forall q \neq 0$,

$\therefore L(f) = 1$, $\forall f: \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ 连续.

由 Lefschetz 得证. #.