学院：______ 专业：______ 班级 ______ 学号：______ 姓名：______

装 订 线

2020.3.9

P59. 2. 按以下步骤证列紧度量 $\Rightarrow$ 紧.

(1) X 列紧 $\Rightarrow$ $\forall$ 可数 open cover has finite subcover

Pf: 不妨设可数 open cover $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ 单增，即 $U_i \subset U_{i+1}$

(否则，令 $\widehat{U_n} = \bigcup_{i=1}^{n} U_i$ 即可.)

反证. 若 $\forall i$, $\exists x_i \in U_i^c$，由 X 列紧，$\exists x_0$, $\{x_{n_i}\} \subseteq \{x_i\}$ 严格单增 $n_i \to \infty$

s.t. $x_{n_i} \to x_0$.

由 $x_0 \in \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$，$\exists n$, s.t. $x_0 \in U_n$ $\Rightarrow \exists x_0$ 邻域 N, s.t. $N \subset U_n$

由 $x_{n_i} \to x_0$，$\exists i_0$, s.t. $\forall i > i_0$, $x_{n_i} \in N \Rightarrow x_{n_i} \in U_n, \forall i > i_0$

与 $x_{n_i} \notin U_{n_i}$, $n_i \to \infty$ 矛盾! #

(2) $X: C_2 \Rightarrow \forall$ open cover, has 可数 subcover.

Pf: 设 X 有可数拓扑基 $\{V_i\}_{i=1}^{\infty}$

则取 $\underset{U_1\text{非空}}{U_1} \in \mathcal{F}$ ($\mathcal{F}$ is open cover), $\exists J_1 \subset \mathbb{N}_+$, s.t. $U_1 = \bigcup_{j \in J_1} V_j$

若 $U_1 = X$，停止；否则，取 $U_2 \not\subset U_1$，$\exists J_2 \subset \mathbb{N}_+$, s.t. $U_2 = \bigcup_{j \in J_2} V_j$

且由 $U_2 \not\subset U_1$ 知 $J_2 \not\subset J_1$

若 $U_1 \cup U_2 = X$，停止；否则，重复上述过程.

每一步取代表元 $j_i \in J_i$，(取 $j_i \in J_i \setminus \bigcup_{k<i} J_k$) 则两两相异，至多可数步.

故有可数子覆盖 $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$ #

(3) $X: C_2$，则 X 列紧 $\Rightarrow X$ 紧.

Pf: 结合 (1)+(2)，$\forall$ open cover has countable subcover (C_2)

then the subcover has finite "sub-subcover" (列紧)

$\Rightarrow X$ 紧致. #

(4) 列紧度量 C_2，从而紧.

Pf: 由列紧度量 (X, d) 存在有限 $\frac{1}{n}$-网，$\forall n \geq 1$.

记 $\frac{1}{n}$-网为 $\{x_{n,i}\}_{i=1}^{k_n}$，即 $X = \bigcup_{i=1}^{k_n} B(x_{n,i}, \frac{1}{n})$

[CLAIM] $\mathcal{F} = \{B(x_{n,i}, \frac{1}{n}) : i = 1, \cdots, k_n, n = 1, \cdots\}$ 为可数拓扑基.

$\because$ $\forall U \subset X$ 为开集，$\forall x \in U$

$\exists n = n(x, U)$, s.t. $B(x, \frac{2}{n}) \subset U$.

由 $X = \bigcup_{i=1}^{k_n} B(x_{n,i}, \frac{1}{n})$，$\exists i$, s.t. $x \in B(x_{n,i}, \frac{1}{n}) \subset B(x, \frac{2}{n}) \subset U$

$\therefore U = \bigcup_{x \in U} B(x_{n,i}, \frac{1}{n}) \in \overline{\mathcal{F}}$ $\Rightarrow \mathcal{F}$ 为拓扑基. $\Rightarrow X: C_2$ #.

5. 紧空间无穷子集必有聚点 (Bolzano-Weierestrass)

Pf: 反证. 若可数子集 $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ 无聚点 (不可数的由可数可推.)

则 $\forall y \in X$，$\exists y$ 的开邻域 N_y, s.t. $N_y \cap (\{x_i\} \setminus \{y\}) = \phi$

由 $X = \bigcup_{y \in X} N_y$ 和 X 紧，$\exists \{y_j\}_{j=1}^{n}$, s.t. $X = \bigcup_{j=1}^{n} N_{y_j}$

由 $\{y_j\}$ 有限，不妨 $y_j \notin \{x_i\}$, $\forall j$

则由 $N_{y_j} \cap \{x_i\} = \phi$ 知 $\left(\bigcup_{j=1}^{n} N_{y_j}\right) \cap \{x_i\} = \phi$ 与 $X \cap \{x_i\} = \{x_i\} \neq \phi$ 矛盾! #

8. 若 $X \times Y$ 紧，则 X 与 Y 紧.

Pf: $\forall X$ 的 open cover $\{U_i\}_{i \in I}$，$U_i \times Y \subset X \times Y$ 开.

由 $X \times Y$ 紧，有 $X \times Y$ 的 finite subcover，记为 $\{U_j \times Y\}_{j=1}^{n}$，即 $X \times Y = \bigcup_{j=1}^{n} (U_j \times Y) = \left(\bigcup_{j=1}^{n} U_j\right) \times Y$

$\therefore \{U_j\}_{j=1}^{n}$ 为 X 的 finite subcover $\Rightarrow X$ 紧，Y 同理紧 #.

12. $X = T_2$，则 X 任意紧子集之交仍紧.

Pf: 设 X 的紧致子集族 $\{A_i\}_{i \in I}$，设 $A_1 \in \{A_i\}_{i \in I}$，则 A_1 紧，A_1 的任意闭子集紧.

由 T_2，A_i 均为闭集，$\bigcap_{i \in I, i \neq 1} A_i$ 为闭集，进一步为 A_1 闭子集 $\Rightarrow \bigcap_{i \in I} A_i$ 紧. #

15 证明度量空间 X：紧致 $\Leftrightarrow$ X 上 $\forall$ 连续 f 有界.

证：X 紧致 $\Leftrightarrow$ 列紧.（由度量）

($\Rightarrow$) 若 $\exists f$ 连续，s.t. $\exists x_n \in X$，$|f(x_n)| > n$.

由列紧，$\exists x_0$，s.t. x_n 子列 $x_{n_k} \to x_0$ 但 $f(x_{n_k})$ 不收敛．矛盾！

$\therefore \forall f$ 有界.

($\Leftarrow$) 由 2.(2)，不妨设 X 上可数 open cover $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ 且 $U_i \subset U_{i+1}$

定义 $f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} e^{-id(x, U_i^c)}$.

由 U_i^c 闭，$d(x, U_i^c)$ 良定；若 $x \in U_{i_0}$，则 $f(x) \leq \sum_{i < i_0} e^{-id(x, U_i^c)} + \sum_{i \geq i_0} e^{-dj i}$

记 $d = d(x, U_{i_0}^c) > 0$ $\quad < \infty$ 良定.

且有限和连续，无限和尾端对 $f(x)$、$f(y)$ 之差 $\to 0$ $(i_0 \to \infty)$ $\Rightarrow f$ 连续

$\therefore f$ 有界．设 $|f| < n$，则若 $\exists x \in U_n^c$，则 $f(x) \geq n$，矛盾！

$\therefore U_n = X$．即有有限子cover $\bigcup_{i=1}^{n} U_i$ #.

19. 证明 E^n 的一点紧致化同胚于 S^n

证：首先给出一点紧致化定义：

$(E^n \cup \{\infty\}, \tau)$，$\tau = \{U : U \in \tau_e\} \cup \{C^c \cup \{\infty\} : C \subset E^n$ 紧致子集$\}$

给出 S^n 的北极投影：

$\varphi : S^n \to E^n \cup \{\infty\}$

$$x \mapsto \begin{cases} \dfrac{x_i^n}{1 - x^{n+1}}, & x \text{ 不为北极，即 } x^{n+1} \neq 1 \\ \infty, & x^{n+1} = 1.（x \text{ 为北极}） \end{cases}$$

这是一一映射.

即证① $\forall U \in \tau$，$\varphi^{-1}(U) \in \tau_{S^n}$

② $\forall V \in \tau_{S^n}$，$\varphi(V) \in \tau$.

①：$\forall U \in \tau_e$，由 $\varphi^{-1}|_{E^n}$ 连续同胚于 $S^n \setminus N$，$\varphi^{-1}(U) \in \tau_{S^n}$

$\forall C^c \cup \{\infty\} \in \tau$，由 E^n 中紧 $\Leftrightarrow$ 有界闭，$\exists M > 0$ s.t. $B(0, M) \supset C$.

$\varphi^{-1}(C^c \cup \{\infty\}) = \varphi^{-1}(B(0, M+1) \setminus C) \cup \{x : x^{n+1} > \frac{M^2 - 1}{1 + M^2}\}$ 为 S^n 中开集.

② $\forall N \notin V$，由①一开始，知 $\varphi(V) \in \tau_e \subset \tau$ #.

$\forall N \in V$，$\varphi(V) = \{\infty\} \cup \varphi|_{S^n \setminus N}(V^c) \in \{C^c \cup \{\infty\}\}$

2020.3.12

P66. 2. $(\mathbb{R}, \tau_i)$，$\tau_1 = \{(-\infty, a) : -\infty \leq a \leq +\infty\}$，$\tau_2 = \overline{\{[a,b] \mid a < b\}}$，则 τ_1 下连通，τ_2 下不连通.

证：若 $(-\infty, a_1) \cup (-\infty, a_2) = \mathbb{R}$ 且 $(-\infty, a_1) \cap (-\infty, a_2) = \phi$，$a_1 < a_2$

则 $a_1 = -\infty$，$a_2 = +\infty$ $\Rightarrow \tau_1$ 连通

取定 $a < b$，则 $[a,b]$ 开，$(-\infty, a) = \bigcup_{n=1}^{\infty} [-n, a - \frac{1}{n}]$ 开

$(b, +\infty) = \bigcup_{n=1}^{\infty} [b + \frac{1}{n}, n]$ 开 $\Rightarrow [a,b] = \left((-\infty, a) \cup (b, +\infty)\right)^c$ 闭

$\therefore [a,b]$ 既开又闭，故 τ_2 不连通. #

4. X_1, X_2 开 $\subset$ 连通 X，$X_1 \cup X_2 = X$，$X_1 \cap X_2 \neq \phi$ 连通，证 X_1，X_2 连通

证. 由对称性，只须证 X_1 连通

设 $A_1 \subset X_1$ 既开又闭 $\overset{X_1 \text{开}}{\Rightarrow} A_1 \subset X$ 开

由 $X_1 \cap X_2 \subset X_1$ 连通非空，① $A_1 \cap (X_1 \cap X_2) = \phi$ $\Rightarrow A_1 \subset X_1 \setminus X_2 = X_2^c$ 闭

$\overset{A_1 \text{闭}}{\Rightarrow} A_1 \subset X$ 闭

$\Rightarrow A_1 \subset X$ 既开又闭且 $A_1 \neq X$

$\Rightarrow A_1 = \phi$

② $A_1 \cap (X_1 \cap X_2) = X_1 \cap X_2$，考虑 $X_1 \setminus A_1$，

又回到①中，从而 $A_1 = X_1$.

由①②知 $A_1 = \phi$ 或 X_1 $\Rightarrow X_1$ 连通 #

6. 局部连通的开子集局部连通.

证：设 $X \overset{\text{开}}{\supset} A$，$\forall x \in A$，由于 $\{x$ 的 X 连通邻域 $N_x\}$ 构成 x 的邻域基

则 $\{N_x \cap A\}$ 构成 x 在 A 中邻域基

（由于 A 开，$N_x \cap A$ 是邻域） #

学院：________ 专业：________ 班级________ 学号：________ 姓名：________

装 订 线

7. X不连通 $\Leftrightarrow$ $\exists$ 连续 $f: X \to E^1$，$f(X)$ 是两个点

Pf: $(\Rightarrow)$ $\exists$ 不交开集 X_1, X_2, s.t. $X = X_1 \cup X_2$

令 $f(x) = I_{X_1}(x)$，则 f 连续（f^{-1} 只能为 ϕ, X_1, X_2, X）

且 $f(X) = \{0, 1\}$.

$(\Leftarrow)$ X 连通有介值性，不能使 $f(X)$ 为两点. #

9. X 紧 Hausdorff (T_2)，$\mathcal{F}$: X 连通闭子集族，$\mathcal{F}$ 中 $\forall$ 有限个成员之交为非空连通集. 证：$\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F$ 非空连通.

Pf: ① 非空：否则 $\bigcup_{F \in \mathcal{F}} F^c = X$，且 F^c 开

由紧致性，$\exists \{F_i\} \subset \mathcal{F}$, s.t. $X = \bigcup_{i=1}^{n} F_i^c$

$\Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} F_i = \phi$ 矛盾！

② 连通：否则，闭集 $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F$ 为不交非空闭集 A_1、A_2 之并.

$\Rightarrow A_1$、A_2 在 X 中闭，$A_1 \cup A_2 = \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F$

由紧 $+ T_2 \Rightarrow T_4$

$\Rightarrow \exists U_1$、U_2 在 X 中开，s.t. $A_i \subset U_i$，$U_1 \cap U_2 = \phi$.

考虑 $\widetilde{\mathcal{F}} = \{\widetilde{F} = F \cap (U_1 \cup U_2)^c : F \in \mathcal{F}\}$

则 $\widetilde{F}$ 为闭子集，且 $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} \widetilde{F} = \phi$

$$\Rightarrow \bigcup_{F \in \mathcal{F}} \widetilde{F}^c = X$$

X紧，$\exists$有限

$$\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{n} \widetilde{F}_i^c = X$$

$$\Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} \widetilde{F}_i = \phi$$

从而 $\bigcap_{i=1}^{n} F_i \subset U_1 \cup U_2$ 且连通

这矛盾！因为 $\left(\bigcap_{i=1}^{n} F_i\right) \cap U_j$，$j = 1, 2$ 均为开集（在 $\bigcap_{i=1}^{n} F_i$ 中）.

从而 $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F$ 连通. #

共