习题4

1. 证明: 如果φ 是特征函数, 那么$\mathrm{Re}\ \varphi$ 和$|\varphi|^2$ 也是特征函数.

2. (a) 证明:

$$\mu(\{a\}) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} e^{-ita}\varphi(t)dt.$$

   (b) 假设有$h > 0$, 使得$P(X \in h\mathbb{Z}) = 1$, 证明$\varphi(2\pi/h + t) = \varphi(t)$, 并且对于任何$x \in h\mathbb{Z}$,

$$P(X = x) = \frac{h}{2\pi}\int_{-\pi/h}^{\pi/h} e^{-itx}\varphi(t)dt.$$

   (c) 假设$X = Y + b$, 如果$P(X \in b + h\mathbb{Z}) = 1$, 则(b)式对于$x \in b + h\mathbb{Z}$也成立.

3. 举例随机变量X有密度函数, 但是$\int |\varphi(t)|dt = \infty$.

4. 假设对于$1 \le n \le \infty$, 随机变量X_n与Y_n独立, 证明: 如果$X_n \xrightarrow{d} X_\infty$, $Y_n \xrightarrow{d} Y_\infty$, 则$X_n + Y_n \xrightarrow{d} X_\infty + Y_\infty$.

5. (a) 假设测度$\{\mu_i, i \in I\}$是胎紧的, 证明对应的特征函数φ_i是等度连续的.

   (b) 假设$\mu_n \xrightarrow{d} \mu_\infty$, $\{\mu_i, i \in I\}$是胎紧的, 证明在紧集上特征函数φ_n一致收敛到φ_∞.