

中国科学技术大学
2018-2019学年实分析期末考试

姓名: _____ 学号: _____

要求: 请将所有的答案写在答题纸上。在每张答题纸上写上姓名和学号。

1. (15分) 写出测度、预测度的定义以及预测度构造测度的步骤。
2. (20分) 判断对错 (错误的给出反例, 正确的给出简要证明)。

(a) 设 f 在 $[a, b]$ 上单调递增且几乎处处可微, 则

$$\int_{[a,b]} f'(x) dx = f(b) - f(a).$$

(b) 设 E 为 \mathbb{R}^n 中的可测集, 则对几乎处处的 $x \in E$ 有

$$\lim_{m(B) \rightarrow 0} \frac{m(B \cap E)}{m(B)} = 1$$

其中 B 为包含 x 的球。

3. (10分) 设 $f \in L^1(\mathbb{R})$, 计算:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f(x-n) \frac{x}{1+|x|} dx.$$

4. (15分) 设 f 和 g 是 $(0, 1)$ 上的非负实值可测函数, 满足对任意的 $\alpha > 0$ 都有 $m(\{x \in (0, 1) : f(x) > \alpha\}) = m(\{x \in (0, 1) : g(x) > \alpha\})$. 证明:

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 g(x) dx.$$



5. (15分) 证明: 函数

$$f(x) := \begin{cases} 0, & \text{if } x = 0, \\ x^2 \cos \frac{1}{x^2}, & \text{if } 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

在 $[0, 1]$ 上不是有界变差的.

6. (15分) 设 \mathbb{R} 上实值函数 f 满足

$$|f(x) - f(y)| \leq e^{|x|+|y|}|x - y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

证明: f 把每个零测集映为零测集.

7. (10分) 设 $E \subset \mathbb{R}$ 可测, $m(E) > 0$. 令

$$f(x) := \int_{\mathbb{R}} \chi_E(tx) \chi_E(t) dt.$$

证明: f 在 $x = 1$ 处连续.

