习题一

1. 举例说明对独立同分布随机变量$\{X_1, X_2, \cdots\}$, $S_n/n \xrightarrow{p} 0$ 推不出$S_n/n \to 0\ a.s.$

2. 设$\{X_n\}$是一列独立的随机变量, $\{b_n\}$是一列收敛到$+\infty$的实数序列, 并且

   (a) $\sum_{i=1}^n P(|X_i| > b_n) \to 0$,
   (b) $\frac{1}{b_n^2} \sum_{i=1}^n EX_i^2 I(|X_i| \le b_n) \to 0$.

   证明

$$\frac{1}{b_n}\Big(\sum_{i=1}^n X_i - a_n\Big) \xrightarrow{p} 0,$$

   其中

$$a_n = \sum_{i=1}^n EX_i I(|X_i| \le b_n).$$

3. 证明: 对于任意$\delta > 0$, $0 < p < 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{|k-np|>n\delta} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = 0$.

4. 假设$X_1, X_2, \cdots$时独立同分布的随机变量, 且对$x \ge e$, 有$P(X_i > x) = e/x \log x$. 证明$E|X_i| = \infty$且存在常数序列$\mu_n \to \infty$, 使得$S_n/n - \mu_n \xrightarrow{p} 0$.

5. (1).利用弱大数定律证明: 对任意$T \ge 0$和$t > 0$有

$$\lim_{n\to\infty} e^{-nt} \sum_{k \le nT} \frac{(nt)^k}{k!} = \begin{cases} 1, & T > t, \\ 0, & T < t. \end{cases}$$

   (2). 设F是一个正值随机变量的分布函数, 它的Laplace变换为

$$\varphi(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} dF(t), \quad \lambda > 0.$$

   利用(1)证明: 对任意$T \ge 0$, 当T为F的连续点时有

$$\sum_{k \le nT} \frac{(-n)^k}{k!} \varphi^{(k)}(n) \to F(T),\ \ n \to \infty.$$

   这说明F由它的Laplace变换唯一确定.

6. *假设$X_1, X_2, \cdots$独立同分布, 其分布: $P(0 \le X_i < \infty) = 1$, 且对任意的$x$,

$$P(X_i > x) > 0.$$

   记$\mu(s) = \int_0^s x dF(x)$, $\nu(s) = \mu(s)/s(1-F(s))$. 证明: 存在常数列$a_n$, 有$S_n/a_n \xrightarrow{p} 1$的充分必要条件是: $\nu(s) \to \infty$.

附:

命题0.1. 设$\{X, X_n, n\ge 1\}$是一列独立同分布的随机变量序列, $S_n=\sum_{k=1}^n X_k$, 那么存在常数序列$\{b_n\}$使得

$$\frac{S_n}{n}-b_n\xrightarrow{p}0$$

的充要条件是

$$nP(|X|>n)\to 0,$$

此时$b_n=EXI(|X|\le n)+o(1)$.

充分性的证明. 对任意$n\ge 1$, $1\le k\le n$, 定义

$$X_{nk}=X_kI(|X_k|\le n),\ \ T_n=\sum_{k=1}^n X_{nk},\ \ \mu_n=EX_{n1}.$$

则

$$P(|S_n/n-\mu_n|>\varepsilon)\le P(|T_n/n-\mu_n|>\varepsilon)+P(S_n\ne T_n).$$

由Chebyshev不等式得

$$\begin{aligned}P(|T_n/n-\mu_n|>\varepsilon) &\le \frac{1}{\varepsilon^2}\mathrm{Var}(T_n/n)=\frac{1}{n\varepsilon^2}\mathrm{Var}(X_{n1})\le\frac{1}{n\varepsilon^2}EX_{n1}^2\\ &= \frac{1}{n\varepsilon^2}\int_0^\infty 2xP(|X_{n1}|>x)dx\\ &= \frac{2}{n\varepsilon^2}\int_0^n xP(|X|>x)dx\to 0.\end{aligned}$$

再注意到

$$P(S_n\ne T_n)\le P\Big(\bigcup_{k=1}^n\{X_k>n\}\Big)\le\sum_{k=1}^n P(X_k\ge n)=nP(|X|\ge n)\to 0,$$

于是

$$P(|S_n/n-\mu_n|>\varepsilon)\to 0.$$

□

为了证明必要性, 我们需要对称化的技巧.

假设X是一个随机变量, 具有分布F, 设X'是一个与X独立同分布的随机变量, 则$X-X'$是具有对称分布

$${}^0F(x)=\int_{-\infty}^\infty F(x+y)F(dy),$$

${}^0F$称为F的对称化.

引理0.2. *(对称化不等式)* 设X, X'是独立同分布随机变量, 则对任意x和a, 有

$$\frac{1}{2}P(X - mX \geq x) \leq P(X - X' \geq x),$$
$$\frac{1}{2}P(|X - mX| \geq x) \leq P(|X - X'| \geq x) \leq 2P(|X - a| \geq x/2).$$

证明. 首先

$$\begin{aligned} P(X - X' \geq x) &\geq P(X - mX \geq x, X' - mX \leq 0) \\ &= P(X - mX \geq x)P(X' \leq mX) = \frac{1}{2}P(X - mX \geq x). \end{aligned}$$

类似地

$$P(X - X' \leq -x) \geq \frac{1}{2}P(X - mX \leq -x),$$

于是

$$P(|X - X'| \geq x) \geq \frac{1}{2}P(|X - mX| \geq x).$$

另一方面, 对任意x和a有

$$\begin{aligned} P(|X - X'| \geq x) &\leq P(|X - a| \geq x/2\text{或}|X' - a| \geq x/2) \\ &\leq P(|X - a| \geq x/2) + P(|X' - a| \geq x/2) = 2P(|X - a| \geq x/2). \end{aligned}$$

□

首先假设X是对称的, 即$X \overset{d}{=} -X$. 对对称随机变量, 我们有如下不等式:

引理0.3. 设$X_1, X_2, \cdots, X_n$是一列独立的对称随机变量, 则S_n具有对称分布并且

$$P(|S_n| > t) \geq \frac{1}{2}P\Big(\max_{1\leq j\leq n} |X_j| > t\Big). \tag{0.1}$$

如果X_i还是同分布的, 则

$$P(|S_n| > t) \geq \frac{1}{2}(1 - \exp\{-nP(|X_1| > t)\}). \tag{0.2}$$

证明. 显然S_n是对称的. 记

$$L = \inf\{i : |X_i| = \max\{|X_j|, 1 \leq j \leq n\}\}, \quad M = X_L, \ T = S_n - M,$$

则(M, T)是对称的, 即$(M, T), (M, -T), (-M, T), (-M, -T)$都具有相同的分布. 于是

$$\begin{aligned} P(M > t) &\leq P(M > t, T \geq 0) + P(M > t, T \leq 0) = 2P(M > t, T \geq 0) \\ &\leq 2P(M + T > t) = 2P(S_n > t) = P(|S_n| > t), \end{aligned}$$

并且

$$P\Big(\max_{1\leq j\leq n} |X_j| > t\Big) = P(|M| > t) = 2P(M > t) = 2P(|S_n| > t).$$

即得(0.1)式.

如果X_i还是同分布的, 则利用不等式$1+x\le e^x$, $x\in\mathbb{R}$得

$$P\Big(\max_{1\le j\le n}|X_j|\le t\Big)=P(|X_1|\le t)^n=(1-P(|X_1|>t))^n\le\exp\{-nP(|X_1|>t)\},$$

再结合(0.1)式立得(0.2)式. □

命题0.1必要性的证明. 设$X',X_1',X_2',\cdots$是$X,X_1,X_2,\cdots$的独立复制, 记${}^0S_n=\sum_{j=1}^n(X_i-X_i')$, 由引理0.2和0.3 知对任意$\varepsilon>0$有

$$\begin{aligned}2P(|S_n/n-b_n|>\varepsilon) &= 2P(|S_n-nb_n|>n\varepsilon)\ge P(|{}^0S_n|>2n\varepsilon)\\ &\ge \frac{1}{2}(1-\exp\{-nP(|X-X'|>2n\varepsilon)\})\\ &\ge \frac{1}{2}(1-\exp\{-(1/2)nP(|X|>2n\varepsilon+|mX|)\}).\end{aligned}$$

因此当$S_n/n-b_n\xrightarrow{p}0$时有$nP(|X|>n)\to 0$. 再由充分性的证明过程知$b_n=EXI(|X|<n)+o(1)$. □