第一章 度量空间.

§1 基本概念

1.定义 Consider. $\mathbb{R}^n \triangleq \{x=(x_1,\cdots,x_n) \mid x_i\in\mathbb{R}\}$ 距离 $\rho(x,y)\triangleq\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\right]^{\frac{1}{2}}$ $\rho:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $(x,y)\mapsto\rho(x,y)$.

<u>Def</u> <u>度量(距离)空间</u>. 设 ρ 是非空集 X 上二元实函数 $\rho: X\times X\to\mathbb{R}$.

若 ρ 满足 (1) 正定：$\rho(x,y)\geq 0$, $\rho(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$

(2) 对称：$\rho(x,y)=\rho(y,x)$

(3) 三角不等式：$\rho(x,y)\leq\rho(x,y)+\rho(y,z)$

则称 ρ 是 X 上的一个度量，(X,ρ) 称为一个度量空间.

Eg. (1) $(\mathbb{R}^n,\rho_\infty)$：$\rho_\infty(x,y)=\max\limits_{1\leq i\leq n}|x_i-y_i|$

(2) $(\mathbb{R}^n,\rho_p)(p\geq 1)$：$\rho_p(x,y)=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$

<u>RMK</u>. 同一集合上可以有不同的度量.

(3) $(C[a,b],\rho)$：$C[a,b]=\{f \mid f$ 是 $[a,b]$ 上<u>连续函数</u>$\}$，$\rho(f,g)=\max\limits_{t\in[a,b]}|f(t)-g(t)|$

$(C[a,b],\rho_1)$：$\rho_1(f,g)\triangleq\int_a^b|f(t)-g(t)|\,dt$.

<u>Def</u>. <u>开集</u> 称 $A\subset X$ 是 X 的一个开集，若 $\forall x\in A$，$\exists r>0$ s.t. $B(x,r)\triangleq\{y\in X \mid \rho(y,x)<r\}\subset A$.

2.4定义 <u>Def</u> <u>收敛</u> $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset X$，$x_0\in X$. 若 $\rho(x_n,x_0)\to 0\ (n\to\infty)$，则称 x_n 收敛于 x_0，记为 $x_n\to x_0$ ($\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$)

<u>Def</u> <u>闭集</u> $A\subset X$，$\{x_n\}\subset A$，若 $x_n\to x_0$，则 $x_0\in A$. (RMK：等价定义：A^c 为开集)

<u>Def</u> <u>基本列(Cauchy列)</u> $\{x_n\}\subset X$ 称为 (X,ρ) 的一个基本列，若 $\rho(x_n,x_m)\to 0\ (n,m\to\infty)$，i.e.

$\forall\varepsilon>0$，$\exists N(\varepsilon)$，s.t. $\forall m,n\geq N(\varepsilon)$，$\rho(x_m,x_n)<\varepsilon$.

<u>Def</u> <u>完备</u> 若 (X,ρ) 中任何基本列都收敛，则称 (X,ρ) 完备.

Eg. (1) $(\mathbb{R}^n,\rho)$，$(\mathbb{R}^n,\rho_\infty)$，$(\mathbb{R}^n,\rho_p)\ (p\geq 1)$ 完备

(2) $(\mathbb{Q},\rho)$：$\rho(x,y)=|x-y|$ 不完备 $\xrightarrow{\text{完备化}}(\mathbb{R},\rho)$

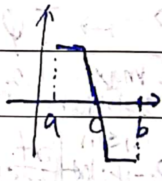
(3) $(C[a,b],\rho)$ 完备.

【 $x_n\to x_0\Rightarrow\forall\varepsilon>0$，$\exists N$ s.t. $\forall n>N$，$\forall t\in[a,b]$，$|x_n(t)-x_0(t)|\leq\max\limits_{t\in[a,b]}|x_n(t)-x_0(t)|<\varepsilon$.

即 $x_n(t)\rightrightarrows x_0(t)$. $\Rightarrow x_0\in C[a,b]$. 】

(4) $(C[a,b],\rho_1)$ 不完备.

【 $f_n(t)=\begin{cases}1, & t\in[a,c-\frac{1}{n}]\\ -n(t-c), & t\in(c-\frac{1}{n},c+\frac{1}{n})\\ -1, & t\in[c+\frac{1}{n},b]\end{cases}$



则 $\rho_1(f_n,f_m)\leq\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\to 0\ (n,m\to\infty)$

$\{f_n\}$ 是基本列，但 $f_n\xrightarrow{L^1}f\notin C[a,b]$. 】

(由Riesz-Fischer thm，$f\overset{a.e.}{=}g=\begin{cases}1, & t\in[a,c)\\ 0, & t=c\\ -1, & t\in(c,b]\end{cases}$)

Pf of Proposition: ($\Leftarrow$) $\forall \varepsilon>0$, $\exists N$, s.t. $\forall n>N$, $\rho(x_n, x_0)<\delta(\varepsilon, x_0) \Rightarrow d(Tx_n, Tx_0)<\varepsilon$

($\Rightarrow$) 反证：$\exists \varepsilon$, $\exists x_0$, $\forall \frac{1}{n}>0$, $\exists\ \rho(x_n, x_0)<\frac{1}{n}$, $d(Tx_n, Tx_0)\geq\varepsilon$ 与连续矛盾. #.

Pf of Banach thm: $\forall x_0\in X$, $x_n \triangleq T^n x_0 \Rightarrow x_{n+1}=Tx_n$

$\therefore \rho(x_{n+1}, x_n)=\rho(Tx_n, Tx_{n-1})<\alpha\rho(x_n, x_{n-1})$

$\cdots<\alpha^n\rho(x_1, x_0)$

$\forall p>0$, $m=n+p$

$\rho(x_{n+p}, x_n)\leq\sum_{i=0}^{p-1}\rho(x_{n+p-i}, x_{n+p-i-1})$

$<\sum_{i=0}^{p-1}\alpha^{n+p-i-1}\rho(x_1, x_0)$

$=\alpha^n\rho(x_1, x_0)\cdot\sum_{i=0}^{p-1}\alpha^{p-i-1}\leq\frac{\alpha^n}{1-\alpha}\rho(x_1, x_0)\to 0\ (n\to\infty)$

$\therefore \{x_n\}$是基本列.

由(X,ρ)完备，$\exists x\in X$, s.t. $x_n\to x$.

$x_{n+1}=Tx_n \overset{n\to\infty}{\Rightarrow} x=Tx$.   唯一性显然   #

原ODE $\Leftrightarrow x(t)=\xi+\int_0^t F(\tau, x(\tau))d\tau$.

Pf of ODE ∃1 thm: $T: C[-h,h]\to C[-h,h]$

$x\mapsto Tx=\xi+\int_0^t F(\tau, x(\tau))d\tau$

$X\triangleq\{x\in C[-h,h] \mid \rho(x,\xi)=\max_{t\in[-h,h]}|x(t)-\xi|\leq\delta\}$，则$X$是$(C[-h,h],\rho)$闭子集 $\Rightarrow X$完备.

① $TX\subset X$: $\rho(Tx,\xi)=\max_{t\in[-h,h]}\left|\int_0^t F(\tau, x(\tau))d\tau\right|\leq Mh<\delta$.

② $\rho(Tx, Ty)<\alpha\rho(x,y)$:

$|Tx-Ty|=\left|\int_0^t\left(F(\tau, x(\tau))-F(\tau, y(\tau))\right)d\tau\right|\overset{\text{Lip}}{\leq}\int_0^t L\cdot|x(\tau)-y(\tau)|d\tau$

$\leq L\cdot h\cdot\rho(x,y)\triangleq\alpha\,\rho(x,y)$，其中$0<\alpha=Lh<1$.

由压缩映射，$\exists 1\ x\in X$, s.t. $Tx=x$.   #

Pf of 隐函数: 空间取 $T: C(\overline{B}(x_0,r),\mathbb{R}^m)\to C(\overline{B}(x_0,r),\mathbb{R}^m) := \overline{B}(x_0,r)$上所有m维实值函数连续$\varphi$: $\overline{B}(x_0,r)\to\mathbb{R}^m$

$\varphi\mapsto T\varphi(x)=\varphi(x)-\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)^{-1}f(x,\varphi(x))$

度量取 $\rho(\varphi,\psi)=\max_{\substack{x\in\overline{B}(x_0,r)\\1\leq i\leq m}}|\varphi_i(x)-\psi_i(x)|$

则 $(T\varphi-T\psi)_i(x)=(\varphi_i-\psi_i)(x)-\left[\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)^{-1}(f(x,\varphi)-f(x,\psi))\right]_i$

$(d_i\triangleq\varphi_i-\psi_i)$ $=d_i(x)-\sum_{j=1}^m\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)^{-1}_{ij}(f_j(x,\varphi)-f_j(x,\psi))$

中值, $\exists\hat{y}_j$ $=d_i(x)-\sum_{j=1}^m\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)^{-1}_{ij}\sum_{k=1}^m\frac{\partial f_j}{\partial y_k}(x,\hat{y}_j)d_k(x).\leq\frac{1}{2}|d_i(x)|$

(由于$\frac{\partial f}{\partial y}$连续，$\exists\delta>0$, $\forall x\in\overline{B}(x_0,\delta)$, $y\in\overline{B}(y_0,\delta)$时 那一坨和$(I\cdot d(x))_i$差很少，每个k差$\frac{1}{2m}|d_i(x)|$.)

3.连续.

Def. 连续映射 度量空间(X,ρ), (Y,d)，称映射$T: X\to Y$, $x\mapsto y=Tx$是X,Y之间的一个连续映射，若$\forall x_n\to x_0$，有$Tx_n\to Tx_0$, i.e., $\rho(x_n,x_0)\to 0\Rightarrow d(Tx_n,Tx_0)\to 0$

Proposition $T: X\to Y$连续 $\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0$, $\forall x_0$, $\exists\delta>0$, s.t. $\forall\rho(x,x_0)<\delta$，有$d(Tx,Tx_0)<\varepsilon$, $\forall x\in X$

4.压缩映射.

Def 压缩映射 度量空间(X,ρ), $T: X\to X$称为压缩映射，若$\forall x,y\in X$,

$\rho(Tx,Ty)\leq\alpha\rho(x,y)$, $0<\alpha<1$.

RMK. 压缩 $\Rightarrow$ 连续.

Thm (Banach) 设T是完备空间(X,ρ)上的一个压缩映射，则T有一个不动点且唯一.

(即 $\exists 1\ x\in X$, s.t. $Tx=x$.)

App: (1) ODE 解的∃1性 $\begin{cases}\frac{dx}{dt}=f(t,x)\\x(0)=\xi\end{cases}$ $\Leftrightarrow x(t)=\xi+\int_0^t F(\tau,x(\tau))d\tau$.

Thm 设连续$F(t,x)$在$D\triangleq[-h,h]\times[\xi-\delta,\xi+\delta]$上对$\forall t$满足Lip条件，$M\triangleq\max_{t,x\in D}|F(t,x)|$

($\forall x_1,x_2\in[\xi-\delta,\xi+\delta]$，$\exists L$ (const) >0, s.t. $|F(t,x_1)-F(t,x_2)|<L|x_1-x_2|$.)

则当$h<\min\{\frac{\delta}{M},\frac{1}{L}\}$时，ODE 有唯一解.

(2) 隐函数定理.

Thm. 设映射$f: \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m$，$U\times V$是$(x_0,y_0)$邻域, s.t.

① f, $\frac{\partial f}{\partial y}$连续

② $f(x_0,y_0)=0$

③ $\det\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)\neq 0$.

则 $\exists\ U_0\times V_0\subset U\times V$, $\exists 1\ \varphi: U_0\to V_0$, s.t. $f(x,\varphi(x))=0$.

$\therefore \rho(T\varphi,T\psi)\leq\frac{1}{2}\rho(\varphi,\psi)$.

$\rho(T\varphi,y_0)\leq\rho(T\varphi,Ty_0)+\rho(Ty_0,y_0)\leq\frac{1}{2}\rho(\varphi,y_0)+\max_{\substack{x\in\overline{B}(x_0,r)\\1\leq i\leq m}}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)^{-1}f(x,y_0)\right]_i\leq\frac{1}{2}\rho(\varphi,y_0)+\frac{\delta}{2}$ (由$f(x_0,y_0)=0$及f连续) ($\exists\eta>0$, $\forall x\in\overline{B}(x_0,\eta)$时.)

$\therefore$ 作 $X\triangleq\{\varphi\in C(\overline{B}(x_0,r),\mathbb{R}^m) \mid \varphi(x_0)=y_0,\ \rho(\varphi,y_0)\leq\delta\}$，则$X$为$C(\overline{B}(x_0,r),\mathbb{R}^m)$闭子集 $\Rightarrow X$完备.

(当$r<\min(\delta,\eta)$时)

由压缩映射，$\exists 1\ \varphi$, s.t. $\varphi=T\varphi \Rightarrow f(x,\varphi(x))=0$ #.

Pf of Proposition: 设(X_2,ρ_2)是包含X的完备空间，下证$(X_1,\rho_1) \overset{\text{等距}}{\subset} (X_2,\rho_2)$

$\forall x \in X_1$，$\exists \{x_n\} \subset X \xrightarrow{\rho_1} x$

又 $x_n \xrightarrow{\rho_2} \hat{x}$　作$\varphi: X_1 \to X_2$，$x \mapsto \hat{x}$.

∴ 定义与选取无关.

$x_n \xrightarrow{\rho_1} x$　$x_n \xrightarrow{\rho_2} \hat{x}$

$y_n \xrightarrow{\rho_1} y$　$y_n \xrightarrow{\rho_2} \hat{y}$

则$\rho_1(x,y) \leftarrow \rho_1(x_n,y_n) = \rho(x_n,y_n) = \rho_2(x_n,y_n) \to \rho_2(\hat{x},\hat{y}) = \rho_2(\varphi x,\varphi y)$

即φ是等距. #

Pf of Thm: $\mathscr{X} \triangleq \{\{x_n\} \mid \{x_n\}$是$X$的基本列$\}$

Step 1. $\{x_n\} \sim \{y_n\} \overset{\Delta}{\Leftrightarrow} \lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n,y_n) = 0$.

$X_1 \triangleq \mathscr{X}/\sim$，$\xi = [x_n]$，$\eta = [y_n]$　$\rho_1(\xi,\eta) \overset{\Delta}{=} \lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n,y_n)$ 定义度量 (与基本列选取无关) check:

Step 2. $X \subset X_1$ 且在X_1中稠密.

X可看作$\{[x_n] \mid x_n = x \in X\}$的等距同构，下证$X$在$(X_1,\rho_1)$中稠密.

$\forall \xi = [x_n] \in X_1$，$\{x_n\} \subset (X,\rho)$是基本列，则$\rho(x_n,x_m) \to 0$ $(n,m\to\infty)$

取$\xi_n = [x_{n,k}]_{k=1}^{\infty} \in X$，$x_{n,k} \equiv x_n \in X$，$\forall k$.

∴ $\rho_1(\xi_n,\xi) = \lim\limits_{k\to\infty} \rho(x_{n,k},x_k) = \lim\limits_{k\to\infty} \rho(x_n,x_k) \to 0$　$(n\to\infty)$.

即$\xi_n \to \xi$ $(n\to\infty)$.

(错误) step 3. (X_1,ρ_1)完备.

设$\xi_n = [x_{n,k} \mid k=1,\cdots] \subset X_1$是基本列，即$\rho_1(\xi_n,\xi_m) = \lim\limits_{k\to\infty} \rho(x_{n,k},x_{m,k}) \to 0$ $(n,m\to\infty)$

取$\xi = [x_{k,k}] \subset X$，易证$\{x_{k,k}\}$是$X$的基本列. (×)

∵ $\rho_1(\xi_n,\xi) = \lim\limits_{k\to\infty} \rho(x_{n,k},x_{k,k}) \to 0$ $(n\to\infty)$　(由$\rho(x_{n,k},x_{m,k}) \to 0$.)

∴ ξ_n 基本列 $\to \xi$.

Step 4. 由Proposition，(X_1,ρ_1)是(X,ρ)的完备化空间 #

§2. 度量空间完备化.

1. 有理数的完备化.　$\mathbb{Q} \triangleq \{\frac{q}{p} \mid p,q \in \mathbb{Z}\}$，$\mathbb{R} \triangleq \{x \mid \exists \{x_n\} \subset \mathbb{Q}, \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x\}$，$\rho(x,y) \triangleq |x-y|$.

$\mathbb{Q} \to \mathbb{R}$. step 1. 定义等价关系$\{x_n\},\{y_n\} \subset \mathbb{Q}$:

$\{x_n\} \sim \{y_n\} \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n,y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} |x_n - y_n| = 0$.

$\mathbb{R} = \{\xi = [x_n] \mid \{x_n\}$是$\mathbb{Q}$中Cauchy列$\}$.

step 2. $\mathbb{Q} = \{\xi = [x_n] \mid x_n = x \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{R}$，且$\mathbb{Q}$在$\mathbb{R}$中稠密.

step 3. $\mathbb{R}$是完备的.

2. 一般度量空间的完备化.

Def. 等距同构. 度量空间(X,ρ)，(Y,d). 若$\varphi: X \to Y$满足:

(1) φ满射

(2) $\forall x_1,x_2 \in X$，$\rho(x_1,x_2) = d(\varphi x_1,\varphi x_2)$

称(X,ρ)，(Y,d)等距同构，φ是等距同构映射. 并认为(X,ρ)，(Y,d)同一度量空间.

RMK. 1. (2) $\Rightarrow$ φ是单射.

2. 若φ仅有(2)，把X看成Y的一个子空间.

Def. 称包含(X,ρ)的最小(等距意义下)的完备度量空间为(X,ρ)的完备化空间.

i.e. 记为(X_1,ρ_1)，若$\forall$完备空间(X_2,ρ_2)包含(X,ρ)，$\exists$等距$\varphi: (X_1,\rho_1) \to (X_2,\rho_2)$，

即(X_1,ρ_1)可看成(X_2,ρ_2)的子集

Proposition 设(X_1,ρ_1)是(X,ρ)的完备空间，且$\rho_1|_{X\times X} = \rho$ 且X在X_1中稠密，

则(X_1,ρ_1)是X的完备化.

Thm. $\forall$度量空间(X,ρ)都可完备化.

Pf of Hausdorff: 1°(反证). 若M不完全有界, 则

$\exists \varepsilon>0$, M不∃有穷ε-网.

即: $\exists x_1\in M$, $\exists x_2\notin B(x_1,\varepsilon)$, $\exists x_3\notin \bigcup_{k=1}^{2}B(x_k,\varepsilon)$, …,

$\exists x_n\notin \bigcup_{k=1}^{n-1}B(x_k,\varepsilon)$

得点列$\{x_k \mid k=1,2,\cdots\}\subset M$.

由$\rho(x_k,x_l)>\varepsilon$, $\forall k\neq l$ 知$\{x_k\}$无收敛子列, 与列紧矛盾.

2° 设$\{x_n\}\subset M$ (相异的). 下证其有收敛子列.

对 1-网, $\exists\{x_{1,k}\}\subset\{x_k\}$, $\exists y_1\in M$, s.t. $\{x_{1,k}\}\subset B(y_1,1)$

对 $\frac{1}{2}$-网, $\exists\{x_{2,k}\}\subset\{x_{1,k}\}$, $y_2\in M$, s.t. $\{x_{2,k}\}\subset B(y_2,\frac{1}{2})$

对 $\frac{1}{n}$-网, $\exists\{x_{n,k}\}\subset\{x_{n-1,k}\}$, $y_n\in M$, s.t. $\{x_{n,k}\}\subset B(y_n,\frac{1}{n})$

取子列 $\{x_{k,k}\}\subset\{x_k\}$, $\rho(x_{k+p,k+p},x_{k,k})\le\rho(x_{k+p,k+p},y_k)+\rho(y_k,x_{k,k})$

$<\frac{2}{k}\to 0$.

∴$\{x_{k,k}\}$是基本列, 由X完备, $\{x_{k,k}\}$收敛于$x\in X$. #

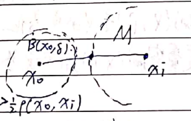
Pf of 紧性等价定义: (⇒) 1° M是闭的 ⇔ $X\setminus M$开.

$\forall x_0\in X\setminus M$,

∵$M\subset\bigcup_{x\in M}B(x,\frac{1}{2}\rho(x_0,x))$

由M紧, $\exists x_1,\cdots,x_m$, s.t. $M\subset\bigcup_{i=1}^{m}B(x_i,\frac{1}{2}\rho(x_0,x_i))$

令$\delta=\min_{1\le i\le m}\frac{1}{2}\rho(x_0,x_i)$



∵$\forall x\in B(x_0,\delta)$,

$\rho(x,x_i)\ge\rho(x_0,x_i)-\rho(x_0,x)>\frac{1}{2}\rho(x_0,x_i)$

∴$x\notin B(x_i,\frac{1}{2}\rho(x_0,x_i))$ ∴$B(x_0,\delta)\subset X\setminus M$ ∴$X\setminus M$开.

2° M列紧. 反证.

设$\{x_n\}\subset M$无收敛子列.

考虑$S_n=\{x_1,\cdots,x_{n-1},x_{n+1},\cdots\}$, 则由无收敛子列知$S_n$闭 ⇒ $X\setminus S_n$开

$\bigcup_{n=1}^{\infty}(X\setminus S_n)=X\setminus\bigcap_{n=1}^{\infty}S_n=X\setminus\phi=X\supset M$.

由M紧, $\exists S_{n_1},\cdots,S_{n_k}$, s.t. $M\subset\bigcup_{i=1}^{k}(X\setminus S_{n_i})=X\setminus\bigcap_{i=1}^{k}S_{n_i}=X\setminus\{x_{n_k+1},\cdots\}$ 与$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset M$矛盾.

(⇐) 反证. 设$M\subset\bigcup_{\lambda\in\Lambda}U_\lambda$, $U_\lambda \overset{开}{\subset} X$. 不∃$M$的finite subcover.

M自列紧 ⇒ M完全有界 ⇒ $\forall n$, ∃$\frac{1}{n}$-网 $N_n=\{x_1^{(n)},\cdots,x_{k_n}^{(n)}\}$

一定$\exists y_n\in N_n$, s.t. $B(y_n,\frac{1}{n})$不在任何U_λ中.

由自列紧, $\exists\{y_{n_k}\}\to y_0\in U_{\lambda_0}$ ∵$U_{\lambda_0}\overset{开}{\subset}X$ ∴$\exists\delta>0$, s.t. $B(y_0,\delta)\subset U_{\lambda_0}$

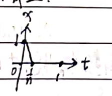
当k充分大时, $\frac{1}{n_k}<\frac{\delta}{2}$, $\rho(y_{n_k},y_0)<\frac{\delta}{2}$ ∴$B(y_{n_k},\frac{1}{n_k})\subset B(y_0,\delta)\subset U_{\lambda_0}$ 与y_{n_k}构造矛盾! #

§3 列紧集

1.列紧性.

• $(\mathbb{R}^n,\rho)$中有界点列必有收敛子列, 但一般度量空间不成立.

E.g. (1) $(C[0,1],\rho)$. $x_n(t)=\begin{cases}1-nt, & t\in[0,\frac{1}{n}]\\ 0, & t\in[\frac{1}{n},1]\end{cases}$



无收敛子列.

(∵$|x_{n+p}(t)-x_n(t)|=\begin{cases}pt, & [0,\frac{1}{n+p}]\\ 1-nt, & [\frac{1}{n+p},\frac{1}{n}]\\ 0, & 其他\end{cases}$

(2) $l^2\triangleq\{\{x_n\}=x \mid \sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2<+\infty\}$

$\rho(x,y)\triangleq\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n-y_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}$

考虑 $e_n=\{0,0,\cdots,0,1,0,\cdots\}$, $E=\{e_n\}_{n=1}^{\infty}\overset{有界}{\subset}l^2$ (∵$\rho(e_n,e_m)\le\sqrt{2}$).

但不存在收敛子列.

Def. 设度量空间(X,ρ), $M\subset X$. 称M是列紧的, 若M中任意点列有收敛子列;

称M是自列紧的, 若它收敛于M中点;

称X是列紧空间, 若X是列紧的.

RMK. 1° $\mathbb{R}^n$中列紧集 ⇔ 有界集

自列紧集 ⇔ 有界闭.

2° 列紧空间子集列紧.

3° 列紧空间完备.

Def. (ε-net) 设距离空间(X,ρ), $M\subset X$, $N\subset M$. 若$\forall\varepsilon>0$, $\forall x\in M$, $\exists y\in N$, s.t. $\rho(x,y)<\varepsilon$

称N是M的一个ε-网. 当N有限元, 称N是M的有穷ε-网.

称M完全有界, 若$\forall\varepsilon>0$, M都有有穷ε-网. 称M有界, 若$M\subset(X,\rho)$, $\exists x_0\in X$, $r>0$, s.t. $M\subset B(x_0,r)$.

RMK. 完全有界 ⇒ 有界.

Thm. (Hausdorff). $(X,\rho)\supset M$. 1° M列紧 ⇒ 完全有界

列紧 $\underset{完备}{\rightleftarrows}$ 完全有界 2° M完全有界 X完备 ⇒ M列紧

2. 紧性.

Def. 紧性. $(X,\rho)\supset M$. 若M的∀开cover, ∃finite subcover, 称M是紧的.

RMK. $M\subset\bigcup_{\lambda\in\Lambda}U_\lambda$, $U_\lambda\overset{开}{\subset}X$ ⇒ $\exists\lambda_1,\cdots,\lambda_n$, s.t. $M\subset\bigcup_{i=1}^{n}U_{\lambda_i}$

Thm. $M\subset(X,\rho)$. M紧 ⇔ M自列紧 = 闭+列紧.

3.紧空间连续函数

• (M,ρ)紧距离空间, $\forall u,v\in C(M)$, 定义$d(u,v)\triangleq\max_{x\in M}|u(x)-v(x)|$

RMK. 1° $\forall u\in C(M)$, $u(M)\subset\mathbb{R}$有界闭, 故u在M上取max.

2° $\forall u\in C(M)$, u一致连续 ($\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta$, s.t. $\forall\rho(x,y)<\delta$, $|u(x)-u(y)|<\varepsilon$.) (HW)

3° $(C(M),d)$完备.

Pf of 上页 RMK. 1°: $u(M)$ 有界闭.

先证 $u(M)$ 列紧: $\forall \{t_n\}=\{u(x_n)\}\subset u(M)$, 由 M 紧 (自列紧), $\exists \{x_{n_k}\}\to x_0$.

由 u 连续, $u(x_{n_k})=t_{n_k}\to u(x_0)\triangleq t_0\in u(M)$.

$\therefore u(M)$ 自列紧 $\Leftrightarrow$ 有界, 闭

(*) 连续函数将紧映成紧: $u\in C(M)$, M 紧, 则 $u(M)\overset{紧}{\subset}\mathbb{R}$.

Pf of A-A thm:

($\Rightarrow$): 1° 一致有界. 列紧 $\Rightarrow$ 完全有界 $\Rightarrow$ $\varepsilon=1$, $\exists F$ 的有限 1-网 $\{\varphi_1,\cdots,\varphi_m\}$, s.t.

$\forall \varphi\in F, \exists \varphi_i, d(\varphi,\varphi_i)<1$

令 $r\triangleq\max\limits_{1\le k\le m} d(0,\varphi_k)$, $\forall x\in M, |\varphi(x)|\le d(\varphi,0)\le d(\varphi,\varphi_i)+d(\varphi_i,0)\le 1+r\triangleq K$

2° 等度连续. 列紧 $\Rightarrow$ 完全有界 $\Rightarrow \exists \frac{\varepsilon}{3}$-网 $N_{\frac{\varepsilon}{3}}=\{\varphi_1,\cdots,\varphi_m\}$, s.t.

$\forall\varphi\in F, \exists \varphi_i\in N_{\frac{\varepsilon}{3}}, d(\varphi,\varphi_i)<\frac{\varepsilon}{3}$

$\because \varphi_i\in C(M)$ $\therefore \varphi_i$ 一致连续: $\forall\varepsilon>0, \exists\delta_i$, s.t. $\forall \rho(x,y)<\delta_i$, $|\varphi_i(x)-\varphi_i(y)|<\frac{\varepsilon}{3}$

令 $\delta=\min\limits_{1\le i\le m}\delta_i$, $\therefore \forall \rho(x,y)<\delta$, 均有

$|\varphi(x)-\varphi(y)|\le|\varphi(x)-\varphi_i(x)|+|\varphi_i(x)-\varphi_i(y)|+|\varphi_i(y)-\varphi(y)|<\varepsilon$

($\Leftarrow$). 由 $C(M)$ 完备, 只需证 F 完全有界.

等度 $\Rightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$, s.t. $\forall\varphi\in F$, $\rho(x,y)<\delta$, 有 $|\varphi(x)-\varphi(y)|<\frac{\varepsilon}{3}$.

由 M 紧 $\Rightarrow$ M 完全有界 $\Rightarrow$ 上述 $\delta>0$, $\exists$ finite δ-网 $N_\delta=\{x_1,\cdots,x_n\}$, s.t. $\forall x\in M, \exists x_r\in N_\delta$ $\rho(x,x_r)<\delta$

作 $T: F\to\mathbb{R}^n$,

$\varphi\mapsto(\varphi(x_1),\cdots,\varphi(x_n))$

F 一致有界 $\Rightarrow \exists K>0$, s.t. $\forall x\in M, \varphi\in F, |\varphi(x)|<K$ $\Rightarrow \left(\sum\limits_{i=1}^{n}\varphi(x_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}\le\sqrt{n}K$

$\therefore \widetilde{F}=T(F)\subset\mathbb{R}^n$ 有界 (列紧 $\Rightarrow$ 完全有界)

对 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\frac{\varepsilon}{3}$-网 $\widetilde{N}_{\frac{\varepsilon}{3}}=\{T\varphi_1,\cdots,T\varphi_m\}\Rightarrow\forall\varphi\in F, \exists T\varphi_i$, s.t. $\rho_n(T\varphi,T\varphi_i)<\frac{\varepsilon}{3}$

$\therefore |\varphi(x)-\varphi_i(x)|\le|\varphi(x)-\varphi(x_r)|+|\varphi(x_r)-\varphi_i(x_r)|+|\varphi_i(x_r)-\varphi_i(x)|$

$< \frac{\varepsilon}{3} + \rho_n(T\varphi,T\varphi_i)+\frac{\varepsilon}{3}<\varepsilon$

$\therefore d(\varphi,\varphi_i)<\varepsilon$, 即 $\{\varphi_1,\cdots,\varphi_m\}$ 是 F 的 ε-网. #

Def. $F\subset C(M)$, M 紧. 若 $\exists K>0$, s.t. $\forall x\in M, \varphi\in F$, 有 $|\varphi(x)|<K$, 则称 F 一致有界.

若 $\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$, s.t. $\forall\varphi\in F$, $\rho(x,y)<\delta$, 有 $|\varphi(x)-\varphi(y)|<\varepsilon$,

则称 F 等度连续.

紧 $\rightleftarrows$ 自列紧 $\underset{闭}{\rightleftarrows}$ 列紧 $\underset{完备空间}{\rightleftarrows}$ 完全有界

Thm. (Arzela-Ascoli) $F\subset C(M)$, M 紧. F 列紧 $\Leftrightarrow$ 一致有界 + 等度连续.

1° 平移不变与加法连续等价性证明:

($\Rightarrow$): $\rho(x_n+y_n,\ x+y) = \rho(x_n-x+y_n-y,\ 0)$

$\leq \rho(x_n-x, 0) + \rho(y_n-y, 0)$

$= \rho(x_n, x) + \rho(y_n, y) \to 0$ $\square$.

($\Leftarrow$) 略.(难.)

§4 线性赋范空间.

1.线性空间.

Def.(线性空间). X 非空集, $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$. 称 X 为一个线性空间, 若.

1° 加法: $\forall x,y\in X$, $\exists 1\, u\in X$ 与 (x,y) 对应, 记为 $u=x+y$, 且有

(A1) $x+y=y+x$

(A2) $(x+y)+z=x+(y+z)$

(A3) $\exists 0\in X$, s.t. $\forall x\in X$, $x+0=0+x=x$

(A4) $\forall x\in X$, $\exists x'\in X$, s.t. $x+x'=0$. 记 $x'=-x$.

2° 数乘: $\forall \alpha\in\mathbb{K}$, $x\in X$, $\exists 1\, u\in X$ 与 (α,x) 对应, 记为 $u=\alpha x$, 且有.

(B1) $\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x$

(B2) $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$ $\quad (\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$

(B3) $1\cdot x=x$.

Def.(线性流形 E) $E\subset X$. 若 $\exists E_0\subset X$, $x_0\in X$, s.t. $E=x_0+E_0=\{x_0+x \mid x\in E_0\}$

则称 E 为 X 的一个线性流形.

Def. 称 $A\subset X$ 线性相关, 若 $\exists x_1,\cdots,x_n\in A$, $\lambda_1,\cdots,\lambda_n\in\mathbb{K}$ 不全为 0, s.t. $\sum \lambda_i x_i=0$.

否则线性无关, 若 $\forall x\in X$ 可表示 A 中元素线性组合(有限), 则称 A 为 X 的一组基.

Def. $A=\{x_\lambda \mid \lambda\in\Lambda\}$, 则 $\{\alpha_1 x_{\lambda_1}+\cdots+\alpha_n x_{\lambda_n} \mid \lambda_i\in\Lambda, \alpha_i\in\mathbb{K}, n\in\mathbb{N}\}$ 为 A 的线性包,

也是包含 A 的最小线性子空间 $\mathrm{span}\{x_\lambda \mid \lambda\in\Lambda\}$.

2.线性空间的距离. (X,ρ): 线性空间 + 距离 (自相容性.)

代数结构 + 拓扑结构

1° 距离平移不变性 (关于加法连续): $\rho(x+z, y+z)=\rho(x,y)$.

$\Leftrightarrow \forall x_n\to x, y_n\to y$, 有 $\rho(x_n+y_n, x+y)\to 0$ $(n\to\infty)$

2° 距离关于数乘连续: (i) $\alpha_n\to\alpha \Rightarrow \rho(\alpha_n x, \alpha x)\to 0$

(ii) $x_n\to x \Rightarrow \rho(\alpha x_n, \alpha x)\to 0$.

• 若令 $p: X\to\mathbb{R}_{\geq 0}$, $x\mapsto p(x)\triangleq\rho(x,0)$, 则

(1) $\rho(x,y)\geq 0 \Leftrightarrow p(x)\geq 0$; $\rho(x,y)=0$ iff. $x=y$ $\Leftrightarrow p(x)=0$ iff $x=0$.

(2) $\rho(x,y)\leq\rho(x,z)+\rho(z,y) \Leftrightarrow p(x+y)\leq p(x)+p(y)$

(3) $\rho(x,y)=\rho(y,x) \Leftrightarrow p(x)=p(-x)$

(4) (i) $\Leftrightarrow \lim\limits_{\alpha_n\to 0} p(\alpha_n x)=0$; (ii) $\Leftrightarrow \lim\limits_{x_n\to 0} p(\alpha x_n)=0$.

e.g. (1) $(\mathbb{R}^n, \|x\| \triangleq (\sum x_i^2)^{\frac{1}{2}})$ 为 Frechet 空间

(2) M距离空间(紧) $(C(M), \|u\| \triangleq \max_{x\in M} |u(x)|)$ Frechet 空间.

(3) $(S \triangleq \{u=\{a_n\} \mid a_i \in \mathbb{K}\}, \|u\| \triangleq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|a_n|}{1+|a_n|} < +\infty)$ Frechet 空间.

(4) $(C(\mathbb{R}^n), \|u\| \triangleq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\max_{\|x\|_0 \le n} |u(x)|}{1+\max_{\|x\|_0 \le n} |u(x)|} < +\infty)$ Frechet 空间.

e.g. (1) $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ 测度空间, $p \ge 1$.

$L^p(\Omega, \mu) \triangleq \{u \mid u$ 可测, $|u|^p$ 可积$\}$

$\|u\|_{L^p} \triangleq (\int_\Omega |u|^p d\mu)^{\frac{1}{p}}$

$(L^p(\Omega,\mu), \|\cdot\|_{L^p})$ Banach 空间.

(2) $l^p \triangleq \{\{a_n\} \mid \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p < +\infty\}$, $p \ge 1$

$\|u\|_{l^p} \triangleq (\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p)^{\frac{1}{p}}$

$(l^p, \|\cdot\|_{l^p})$ Banach 空间

(3) Ω 关于 μ σ-有限 $(\exists \{\Omega_m\} \subset \Omega$, s.t. $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_m, \mu(\Omega_m) < +\infty)$

$L^\infty(\Omega, \mu) \triangleq \{u \mid u$ 有本性上界$\}$

$\|u\|_{L^\infty} \triangleq \inf_{\substack{E\subset\Omega \\ \mu(E)=0}} (\sup_{x\in\Omega\setminus E} |u(x)|)$

$(L^\infty(\Omega,\mu), \|\cdot\|_{L^\infty})$ Banach 空间

(4) $l^\infty = \{u=\{a_n\} \mid \{a_n\}$ 有界$\}$

$\|u\|_{l^\infty} = \sup_{n\ge 1} |a_n|$

$(l^\infty, \|\cdot\|_{l^\infty})$ Banach 空间.

(5) $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 有界连通开. $(C^k(\bar\Omega), \|u\|_{C^k(\bar\Omega)} \triangleq \max_{\substack{x\in\bar\Omega \\ |\alpha|\le k}} \left|\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} u(x)\right|)$ Banach

(6) (Sobolev) $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 有界连通开 $\|u\|_{m,p} \triangleq (\sum_{|\alpha|\le m} \int_\Omega |\partial^\alpha u|^p dx)^{\frac{1}{p}}$

$(C^k(\Omega), \|\cdot\|_{m,p})$ 赋范 非 Banach 空间, 完备化为 Sobolev 空间 $H^{m,p}(\Omega)$

Pf of RMK①(⇐) 反证 $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists x_n \in X$, s.t. $\|x_n\|_1 > n\|x_n\|_2$

令 $y_n = \frac{x_n}{\|x_n\|_1}$, 则 $\|y_n\|_1 = 1$, $\|y_n\|_2 < \frac{1}{n} \to 0$ 矛盾! #

Pf of 有穷线性空间范数等价(推广): 设 $\dim X = n < +\infty$, 取基 $\{e_1, \cdots, e_n\}$, $\forall x = \sum_{i=1}^n x^i e_i$, $x^i \in \mathbb{K}$.

定义 $\|x\|_0 = (\sum_{i=1}^n |x^i|^2)^{\frac{1}{2}}$, 则 $\|\cdot\|_0$ 是 X 的一个范数.

令 $p: X \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \|x\| = \|\sum x^i e_i\|$, 由 Δ 不等式, $|p(x) - p(y)| \le p(x-y) = \|\sum (x^i - y^i) e_i\| \le \sum |x^i - y^i| \cdot \|e_i\| \overset{\text{Cauchy}}{\le} \|x-y\|_0 \cdot (\sum \|e_i\|^2)^{\frac{1}{2}} \triangleq C \cdot \|x-y\|_0$.

则 p 关于 $(X, \|\cdot\|_0)$ 一致连续.

由 $S \triangleq \{x \in X : \|x\|_0 = 1\}$ 是紧集, 则 $\exists C_1, C_2$, s.t. $C_1 \le p(x) \le C_2$, $\forall x \in S$.

$\forall x \ne 0 \in X$, $p(x) = p(\|x\|_0 \cdot \frac{x}{\|x\|_0}) = \|x\|_0 \, p(\frac{x}{\|x\|_0}) \in [C_1\|x\|_0, C_2\|x\|_0]$

Check $C_1 > 0$ 即可: 否则 $\exists x \in S$, $\|x\| = 0$, 与 $\|x\|_0 = 1$ 矛盾. ∴ X 上任何范数 $\|\cdot\|$ 与 $\|\cdot\|_0$ 等价 #

Def. (准范数). 设 $\|\cdot\|: X \to \mathbb{R}$, 满足

(1) $\|x\| \ge 0$, $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (正定性)

(2) $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$ (Δ 不等式)

(3) $\|-x\| = \|x\|$ (对称性)

(4) $\lim_{\alpha_n \to 0} \|\alpha_n x\| = 0$ $\lim_{\|x_n\| \to 0} \|\alpha x_n\| = 0$. 称 $\|\cdot\|$ 为准范数.

RMK. $\{x_n\}, x \in X$. 若 $\|x_n - x\| \to 0$, 则称 x_n 收敛, $x_n \to x$ $(n \to \infty)$.

Def. 称 $(X, \|\cdot\|)$ 为 F^* 空间

称 $(X, \|\cdot\|)$ 为 Frechet 空间, 若 $(X, \|\cdot\|)$ 在准范数收敛的意义下完备.

称赋范 $(X, \|\cdot\|)$ 线性空间为 B^* 空间. 若完备, 称 Banach 空间.

RMK: 范数 (有齐次性) ⇒ 准范数.

3. 范数等价.

Def. 设 X 上两个范数 $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$. $\{x_n\} \subset X$. 若 $\|x_n\|_2 \to 0 \Rightarrow \|x_n\|_1 \to 0$,

则称 $\|\cdot\|_2$ 比 $\|\cdot\|_1$ 强. 若 $\|\cdot\|_2$ 比 $\|\cdot\|_1$ 强 且 $\|\cdot\|_1$ 比 $\|\cdot\|_2$ 强, 则称 $\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|_2$ 等价.

RMK. ① $\exists C > 0$, s.t. $\forall x \in X$, $\|x\|_1 \le C\|x\|_2 \Leftrightarrow \|\cdot\|_2$ 比 $\|\cdot\|_1$ 强.

② $\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|_2$ 等价 $\Leftrightarrow \exists C_1, C_2 > 0$, s.t. $\forall x \in X$, $C_1\|x\|_1 \le \|x\|_2 \le C_2\|x\|_1$.

Thm. (有限空间范数等价) 设 X 是有穷维线性空间, 则 X 上任何两范数等价.

RMK. ① $\forall$ 有穷赋范空间是 Banach 空间

② $\forall$ 赋范空间 有限维子空间完备

Def. (次线性泛函) $p: X \to \mathbb{R}$, 若 (1) $p(x+y) \le p(x) + p(y)$, $\forall x, y \in X$;

(2) $p(\lambda x) = \lambda p(x)$, $\forall \lambda \ge 0$, $x \in X$. 则称 p 为 X 上的一个次线性泛函.

RMK. 若有 (3) $p(x) \ge 0$, $\forall x \in X$; (2') $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, $x \in X$. 则称 p 为 X 上的半范数

Thm. (有限空间范数等价推广) 设 p 为 $(X, \|\cdot\|)$ 上一次线性泛函, 且 $p(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

则 $\exists C_1, C_2 > 0$, s.t. $C_1\|x\| \le p(x) \le C_2\|x\|$.

4. 逼近问题: 赋范空间 $(X, \|\cdot\|)$, $M \triangleq \mathrm{span}\{e_1, \cdots, e_n\} \subset X$. $\forall x \in X$, 是否 $\exists (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$, s.t.

$\|x - \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i\| = \min_{a \in \mathbb{K}^n} \|x - \sum_{i=1}^n a_i e_i\|$?

Thm. (存在性) $\exists \lambda \in \mathbb{K}^n$, s.t. 最佳逼近问题有解.

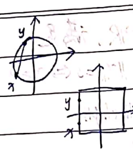
Pf: 作函数 $F(a) = \|x - \sum_{i=1}^n a_i e_i\| \ge \|\sum_{i=1}^n a_i e_i\| - \|x\| \ge C\|a\|_0 - \|x\| \to +\infty$ $(\|a\|_0 \to +\infty)$.

记 $l = \inf_{a \in \mathbb{K}^n} F(a)$. $\forall L > l$, $\exists R > 0$, $\forall x = \sum_{i=1}^n a_i e_i \in X \setminus B_R \triangleq \{x \in X \mid \|x\|_0 \le R\}$, 有 $F(x) \ge L$.

注意 B_R 关于 $\|\cdot\|_0$ 紧, 且 $F(a)$ 在 B_R 上连续 (由 $\|\cdot\|$ 与 $\|\cdot\|_0$ 等价), 从而 $F(a)$ 可取最小值. #

RMK. 存在性的根本原因是有限维空间中点到子空间的距离可由两点距离来实现.

e.g. (1) $\mathbb{R}^2=\{(x_1,x_2)\mid x_i\in\mathbb{R}\}$



∵ 在 $\|x\|_1=(x_1^2+x_2^2)^{\frac{1}{2}}$ 下严格凸.

$\|x\|_2=\max\{x_1,x_2\}$ 下不严格凸.

(2) $L^p(\Omega,\mu)$, $1<p<+\infty$ 严格凸.

pf: $\forall u,v\in L^p$, $\|u+v\|_{L^p}\le\|u\|_{L^p}+\|v\|_{L^p}$

"=" $\Leftrightarrow\exists k\geq 0$, s.t. $u\overset{a.e.}{=}kv$ 或 $v\overset{a.e.}{=}ku$.

∴ $\forall u\neq v\in L^p$, $\|u\|_{L^p}=\|v\|_{L^p}=1$, $\forall\alpha,\beta\in(0,1)$, $\alpha+\beta=1$

$\|\alpha u+\beta v\|_{L^p}<\alpha\|u\|_{L^p}+\beta\|v\|_{L^p}=1$ #

(3) $C(M)$, $L^1(\Omega,\mu)$ 不严格凸.

$C[0,1]$: $x(t)\equiv 1$, $y(t)=t$, 则 $\|x\|=\|y\|=1$, $\|\frac{1}{2}(x+y)\|=1$

$L^1(\Omega,\mu)$: $x(t)\equiv 1$, $y(t)=2t$, 则 $\|x\|_{L^1}=\|y\|_{L^1}=1$, $\|\frac{1}{2}(x+y)\|_{L^1}=1$

Pf of 逼近の唯一性: 设 y 和 z 都是逼近问题的解, $\|x-y\|=\|x-z\|=d>0$.

∵ $\frac{1}{d}\|x-\alpha y-\beta z\|=\frac{1}{d}\|\alpha(x-y)+\beta(x-z)\|$

$=\|\alpha\frac{x-y}{d}+\beta\cdot\frac{x-z}{d}\|\overset{严格凸}{<}1$

即 $\alpha y+\beta z$ 是更优逼近, 矛盾! #

Pf of 有穷 $\Leftrightarrow S_1$ 列紧: $(\Rightarrow)$ 同构于 $(\mathbb{R}^n,\|\cdot\|_0)$, 列紧显然.

$(\Leftarrow)$: 考虑 $\dim X=+\infty$. $\forall x_1\in S_1$. 作 $M_1=\text{span}\{x_1\}$. 由 X 无穷维, 则 $\exists y\in X\setminus M_1$.

由最佳逼近存在性, $\exists x\in M_1$, s.t. $\|y-x\|=\min\limits_{z\in M_1}\|y-z\|=d>0$

记 $x_2\triangleq\frac{y-x}{d}$, 则 $\|x_2\|=1$, $\|x_2-x_1\|=\|\frac{y-x}{d}-x_1\|=\frac{1}{d}\|y-x-dx_1\|\geq 1$. 记 $M_2=\text{span}\{x_1,x_2\}$

重复得 $\{x_1,x_2,\cdots\}\subset X$, s.t. $\|x_n\|=1$, $\|x_n-x_i\|\geq 1$, $i=1,\cdots,n-1$

∴ $\{x_n\}$ 中无收敛子列 ∴ S_1 不列紧. #

Pf of Riesz Lemma: $\forall z\in X\setminus X_0$, 令 $d=\inf\limits_{x\in X_0}\|z-x\|$, 由 X_0 闭, $d>0$

$\forall\delta>0$, $\exists x_\delta\in X_0$, s.t. $d\le\|z-x_\delta\|\le d+\delta$.

令 $y=\frac{z-x_0}{\|z-x_0\|}$, 则 $\|y\|=1$, $\forall x\in X_0$,

$\|y-x\|=\frac{1}{\|z-x_0\|}\|z-(x_0+\|z-x_0\|x)\|\geq\frac{d}{\|z-x_0\|}>\frac{d}{d+\delta}=1-\frac{\delta}{d+\delta}$

取 $\frac{\delta}{d+\delta}=\varepsilon$ 或 $\delta=\frac{d\varepsilon}{1-\varepsilon}$ 即得证. #

(唯一性)

Def. (严格凸) $(X,\|\cdot\|)$ 赋范空间. 若 $\forall x\neq y\in X$, $\|x\|=\|y\|=1$, $\forall\alpha,\beta\in(0,1)$, $\alpha+\beta=1$, 有 $\|\alpha x+\beta y\|<1$. 则称 X 是严格凸的.

Thm. 设赋范空间 $(X,\|\cdot\|)$ 严格凸, 则逼近问题存在唯一解.

5. 有穷维赋范空间的刻画. $(X,\|\cdot\|)$.

• 考虑 $S_1\triangleq\{x\in X\mid\|x\|=1\}$.

Thm. $\dim X<+\infty\Leftrightarrow S_1$ 列紧

Cor. $\dim X<+\infty\Leftrightarrow$ 有界集列紧

Lem (Riesz Lemma) 设 $X_0\subset X$ 是真闭子空间. 则 $\forall 0<\varepsilon<1$, $\exists y\in X$, s.t. $\|y\|=1$ 且 $\|y-x\|>1-\varepsilon$, $\forall x\in X_0$.

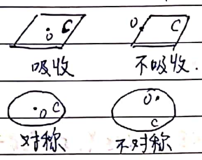
Pf of $co(A)=S_A$: 1° $co(A)\subseteq S_A$，由 S_A 为凸集

2° $S_A\subseteq co(A)$

设E是包含A的一个凸集，则 $\forall x_i\in E$，$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\in E\Rightarrow S_A\subset E$

由E的任意性，$S_A\subseteq co(A)$ #.

e.g.



e.g. $X=\mathbb{R}^n$，$\|\cdot\|_0$，$C=\{x\in\mathbb{R}^n \mid \|x\|_0\le 1\}$

$\forall x\in\mathbb{R}^n$，Minkowski functional $P(x)=\|x\|_0$

Pf of Δ ineq of Minkowski functional:

$\forall x,y\in C$，不妨 $p(x),p(y)<\infty$.

$\forall\varepsilon>0$，取 $\lambda_1=p(x)+\frac{\varepsilon}{2}$，$\lambda_2=p(y)+\frac{\varepsilon}{2}$，则 $\frac{x}{\lambda_1},\frac{x}{\lambda_2}\in C$

$\frac{x+y}{\lambda_1+\lambda_2}=\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\cdot\frac{x}{\lambda_1}+\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\cdot\frac{y}{\lambda_2}\overset{凸}{\in} C$

$\therefore p(x+y)\le\lambda_1+\lambda_2=p(x)+p(y)+\varepsilon$　由 ε 任意性 得证. #.

Pf of Prop (1): 下证 $\alpha C=\overset{S}{\overset{\|\Delta}{\{x\in X \mid p(x)\le\alpha\}}}$，$\forall\alpha>0$

$\forall x\in\alpha C$，$x\overset{\exists}{=}\alpha y$，$y\in C$. 则 $\frac{x}{\alpha}=y\in C\Rightarrow p(x)\le\alpha\Rightarrow\alpha C\subseteq S$.

$\forall x\in S$，$p(x)\le\alpha\Rightarrow\frac{x}{\alpha+\frac{1}{n}}\in C$，$\forall n\in\mathbb{N}$

$\overset{C闭}{\Rightarrow}\frac{x}{\alpha}\in C\Rightarrow x\in\alpha C\Rightarrow S\subseteq\alpha C$.

特别，$C=\{x\in X \mid p(x)\le 1\}$.

下证下半连续：$\forall x_0\in X$，$\forall b<p(x_0)$，取 $U=X\backslash bC$ 开，是 x_0 邻域 且 $\forall x\in U$，$p(x)>b$. #

(2) 设界为 $R>0$，$C\subseteq B_R(0)=\{x\in X \mid \|x\|<R\}$

$\therefore\forall x\in X\backslash\{0\}$，$R\cdot\frac{x}{\|x\|}\notin C$. $\Rightarrow p(x)\ge\frac{\|x\|}{R}>0$. $\Rightarrow$ ("$\Rightarrow$")得证. #.

(3) 0是内点 $\Rightarrow\exists r>0$，s.t. $B_r(0)\subseteq C$.

$\forall x\in X$，$\frac{rx}{2\|x\|}\in B_r(0)$，故C吸收. 且 $p(x)\le\frac{2\|x\|}{r}$

$|p(x)-p(y)|\le\max\{p(x-y),p(y-x)\}\le\frac{2}{r}\|x-y\|\Rightarrow p(x)$ 一致连续 #.

§5. 凸集与不动点

1. 凸集　X是线性空间.

Def. 称C是X的一个凸子集，若 $C\subset X$，$\forall x,y\in C$，$\forall 0\le t\le 1$，有 $tx+(1-t)y\in C$.

RMK. 凸集的交仍凸

Def. $co(A)\triangleq\bigcap_{\lambda\in\Lambda}E_\lambda$ 为A的凸包. $\{E_\lambda \mid \lambda\in\Lambda\}$ 为 $A\subset X$ 中所有包含A的凸集

$S_A\triangleq\{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i \mid \forall n\in\mathbb{N}, x_i\in A; \lambda_i\ge 0, \sum\lambda_i=1\}$ 为A的凸组合（为凸集）

Prop. $A\subset X$，则 $co(A)=S_A$.

Def. C是X的凸集. 称C是吸收的，若 $\forall x\in X$，$\exists\lambda>0$，s.t. $\frac{x}{\lambda}\in C$.

称C是对称的，若 $\forall x\in C$，$-x\in C$.

Def. $C\overset{凸}{\subset}X$复向量空间. 称C是均衡的，若 $\forall\alpha\in\mathbb{C}$，$|\alpha|=1$，$x\in C$，有 $\alpha x\in C$.

2. Minkowski 泛函.

Def. $C\overset{凸}{\subset}X$. 称 $P: X\to\mathbb{R}\cup\{\infty\}$　为凸C的 Minkowski 泛函.

$x\mapsto\inf\{\lambda \mid \frac{x}{\lambda}\in C, \lambda>0\}$

Prop. (1) $P(x)\in[0,+\infty]$，$p(0)=0$

(2) $P(\lambda x)=\lambda P(x)$，$\lambda>0$（正齐次性）

(3) $P(x+y)\le p(x)+p(y)$（Δ不等式）

(4) C吸收 $\Leftrightarrow p(x)<+\infty$，$\forall x\in X$

(5) C对称 $\Leftrightarrow P(\alpha x)=|\alpha|p(x)$，$\alpha\in\mathbb{R}$.

Prop. $C\subset X$ 均衡，则 $p(x)$ 是半范数，即 (1) $P(x)\ge 0$ (2) $P(x+y)\le P(x)+P(y)$ (3) $P(\alpha x)=|\alpha|P(x)$，$\alpha\in\mathbb{C}$

Prop $(X,\|\cdot\|)$ 赋范空间，$C\overset{闭凸}{\subset}X$，则

(1) $C=\{x\in X \mid p(x)\le 1\}$ 且 $p(x)$ 下半连续（称 $f\overset{X\to\mathbb{R}}{}$ 下半连续，若 $\forall x_0\in X$，$\forall b<f(x_0)$，$\exists x_0$邻域U，

(2) 若C有界，则 $p(x)=0\Leftrightarrow x=0$　　s.t. $\forall x\in U$ 有 $b<f(x)$.）

(3) 若0是C的内点，则C吸收的 且 $p(x)$ 一致连续.

Thm. $C\overset{紧凸}{\subset}\mathbb{R}^n$，则 $\exists m\le n$，s.t. C与 S^{m-1}（$\mathbb{R}^m$中单位球）同胚.

Pf: 1° 设E是包含C的最小(dim)线性流，$\dim E=m\le n$，

则 $\exists e_1,\cdots,e_{m+1}\in C$，s.t. $\{e_i-e_{m+1}\}_{i=1}^{m}$ 线性无关.

令 $e_0=\frac{1}{m+1}\sum_{i=1}^{m+1}e_i\in C$，则 $\{e_i-e_0\}_{i=1}^{m}$ 也线性无关，把它们看作 $E-e_0$ 的基

i.e. $\forall y\in E$，$y=\sum\mu_i(e_i-e_0)+e_0$，引进范数 $\|y\|=(\sum|\mu_i|^2)^{\frac{1}{2}}$

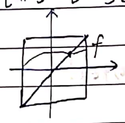
2° e_0是C的内点：$y=\sum\mu_i e_i+(1-\sum\mu_i)e_0=\sum(\mu_i+\frac{1}{m+1}(1-\sum\mu_i))e_i+\frac{1}{m+1}(1-\sum\mu_i)e_{m+1}$

当 $\|y\|\ll 1$，各系数非负 且 总和为1 $\Rightarrow$ 此时 $y\in C\Rightarrow e_0$是内点

3° 由2°，Minkowski 泛函 $p(x)$ 一致连续，线性泛函，且 $p=0\Leftrightarrow x=0$，由有限空间范数等价推广知 $\exists c_1,c_2>0$

$c_1\|z\|_0\le P(z)\le c_2\|z\|_0$，$\forall z\in E$.　作 $\varphi:\overline{B_1(0)}\to C$　$z\mapsto e_0+\frac{\|z\|_0}{p(z)}\cdot z$ $(z\ne 0)$，$0\mapsto e_0$，则 φ 同胚，1-1，

e.g. $f:[-1,1]\to[-1,1]$ 连续，由Brouwer，$\exists\, t_0\in[-1,1]$，s.t. $f(t_0)=t_0$.



Pf of Cor: $\exists\, m\le n$，同胚 $\varphi:\overline{B_1^m(0)}\to C$，考虑 $\tilde{T}=\varphi^{-1}\circ T\circ\varphi$ 连续 $\overline{B_1^m(0)}\circlearrowleft$，则由Brouwer，

$\exists\, \xi\in\overline{B_1^m(0)}$，s.t. $\tilde{T}(\xi)=\xi \Rightarrow T(\varphi(\xi))=\varphi(\xi)$，$\varphi(\xi)$ 为 T 的不动点 #.

Pf of Schauder:

1° $T(C)$ 列紧 $\Rightarrow$ 完全有界 $\Rightarrow \forall n$，$\exists$ 有穷 $\frac{1}{n}$-net $N_n=\{y_1^n,\cdots,y_{m_n}^n\}$，s.t. $T(C)\subseteq\bigcup\limits_{i=1}^{m_n} B(y_i^n,\frac{1}{n})$

记 $E_n=\mathrm{span}\{N_n\}$，$\dim(E_n)<+\infty$.

2° 作 $I_n: T(C)\to co(N_n)$

$y\mapsto\sum\lambda_i(y)y_i^n$，其中 $\lambda_i(y)=\frac{m_i(y)}{\sum m_i(y)}$，$m_i(y)=\begin{cases}0, & y\notin B(y_i^n,\frac{1}{n})\\ 1-n\|y-y_i^n\|, & y\in B(y_i^n,\frac{1}{n})\end{cases}$

则 $I_n(T(C))\subseteq co(N_n)$.

$\|I_n(y)-y\|=\|\sum\lambda_i(y)y_i^n-\sum\lambda_i(y)\cdot y\|$

$\le\sum\lambda_i(y)\|y_i^n-y\|$

$=\sum\limits_{y\in B(y_i^n,\frac{1}{n})}\lambda_i(y)\|y_i^n-y\|<\frac{1}{n}$

3° $\because N_n\subseteq T(C)\subseteq C$ $\therefore co(N_n)\subseteq C$ 且 $co(N_n)$ 有界闭.

考虑 $T_n=I_n\circ T|_{co(N_n)}: co(N_n)\to co(N_n)$.

由 Cor. $\exists\, x_n\in co(N_n)$，s.t. $T_n x_n=x_n$

由 $T(C)$ 列紧，C 闭，$\exists\{Tx_{n_k}\}\to x\in T(C)$，$k\to+\infty$.

$\|x_{n_k}-x\|=\|T_{n_k}x_{n_k}-x\|\le\|I_n(Tx_{n_k})-Tx_{n_k}\|+\|Tx_{n_k}-x\|$

$\le\frac{1}{n_k}+\|Tx_{n_k}-x\|\to 0\ (k\to\infty)$

$\therefore x_{n_k}\to x$. 　　连续$\to 0$ 　　x_{n_k} 构造 $Tx_{n_k}\to x$

又 $\because\|Tx-x\|\le\|Tx-Tx_{n_k}\|+\|Tx_{n_k}-x\|\to 0$

$\therefore Tx=x$. #.

3.不动点定理

Thm.(Brouwer) 设 T 是 $\overline{B_1^n(0)}\subset\mathbb{R}^n\circlearrowleft$ 连续映射，则 T 有不动点

Cor. $C\overset{紧凸}{\subset}\mathbb{R}^n$，$T:C\to C$ 连续，则 T 在 C 上有不动点.

Thm.(Schauder) 赋范空间 $(X,\|\cdot\|)$ $C\overset{闭凸}{\subset}X$，$T:C\to C$ 连续且 $T(C)$ 列紧，则 T 有不动点.

Def.(紧) 赋范空间 $(X,\|\cdot\|)$，$E\subset X$，$T:E\to X$ 连续. 称 T 为紧的，若 T 把 E 的有界集映为列紧.

Cor. 赋范 $(X,\|\cdot\|)$，$C\overset{有界闭凸}{\subset}X$，$T:C\to C$ 紧，则 T 有不动点.

4.应用.

Thm(Caratheodory) 设 $f(t,x)$ 在 $[-h,h]\times[\xi-b,\xi+b]$ 上连续，$|f|\le M$.

则当 $Mh<b$ 时，方程 $\begin{cases}x'(t)=f(t,x(t)), & t\in[-h,h]\\ x(0)=\xi\end{cases}$ 有解.

Pf: 记 $\overline{B(\xi,b)}\triangleq\{x\in C[-h,h]\,|\,\max\limits_{[-h,h]}|x(t)-\xi|\le b\}$

令 $T:\overline{B(\xi,b)}\to C[-h,h]$

$x(t)\mapsto Tx(t)=\xi+\int_0^t f(\tau,x(\tau))\,d\tau$

1° $T(\overline{B(\xi,b)})\subseteq\overline{B(\xi,b)}$

$\because |Tx-\xi|=|\int_0^t f(\tau,x(\tau))\,d\tau|\le Mh\le b$.

2° $\because\|Tx\|_{C[-h,h]}\le|\xi|+Mh$ (一致有界)

$|Tx(t)-Tx(t')|\le M\cdot(t-t')$. (等度连续)

由 Arzela-Ascoli，$T(\overline{B(\xi,b)})$ 列紧

3° $|Tx(t)-Ty(t)|=|\int_0^t f(\tau,x(\tau))-\int_0^t f(\tau,y(\tau))\,d\tau|$

$\le h\cdot\varepsilon$ (当 $\|x-y\|_{C[-h,h]}<\delta$)

$\therefore T$ 连续

$\therefore$ 用Schauder得证. #.

e.g. 1. $(\mathbb{R}^n, (\cdot,\cdot))$, $(\mathbb{C}^n, (\cdot,\cdot))$

2. $\mathbb{C}^n$, $a(x,y) \triangleq \underset{\text{行向量}(1\times n)}{x} A \overline{y}^T$. 其中 A 为 Hermite 阵. a 为共轭双线性函数

A 为正定 Hermite 阵 a 为 $\mathbb{C}^n$ 上的一个内积.

3. $L^2(\Omega,\mu)$, $(u,v) \triangleq \int_\Omega u\overline{v}\,d\mu$ 内积.

4. $l^2 = \{(x_1,x_2,\cdots) \mid \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty\}$, $(x,y) \triangleq \sum_{i=1}^{\infty} x_i \overline{y_i}$ 内积.

5. $C^k(\overline{\Omega}) = \{\overline{\Omega}$ 上有 k 阶连续偏导的函数全体$\}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 有界区域

$(u,v) \triangleq \sum_{|\alpha|\le k} \int_\Omega \partial^\alpha u \cdot \overline{\partial^\alpha v}\, dx$ 内积.

Pf of Prop (二次型): ($\Rightarrow$)

$q(x+y) = q(x) + q(y) + a(x,y) + a(y,x)$

$\Rightarrow a(x,y) + a(y,x) = \overline{a(x,y)} + \overline{a(y,x)}$

$y \leftarrow iy$ 得 $-a(x,y) + a(y,x) = \overline{a(x,y)} - \overline{a(y,x)}$

相加得 $a(y,x) = \overline{a(x,y)}$ #

Pf of Cauchy-Schwarz:

设 $y \neq 0$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $0 \le q(x+\lambda y) = q(x) + \overline{\lambda} a(x,y) + \lambda a(y,x) + |\lambda|^2 q(y)$

取 $\lambda = -\frac{a(x,y)}{q(y)}$, 则 $q(x) - \frac{|a(x,y)|^2}{q(y)} - \frac{|a(x,y)|^2}{q(y)} + \frac{|a(x,y)|^2}{q(y)} \ge 0$.

即 $|a(x,y)| \le \sqrt{q(x)q(y)}$, "=" $\Leftrightarrow q(x+\lambda y) = 0 \Leftrightarrow x = -\lambda y$. #

Pf of Rmk 3: 设 $x_n \to x$, $y_n \to y$ $(n\to\infty)$

$|(x_n,y_n) - (x,y)| \le |(x_n,y_n) - (x_n,y)| + |(x_n,y) - (x,y)|$

$\overset{\text{Cauchy}}{\le} \underset{\text{有界}}{\|x_n\|} \|y_n - y\| + \|x_n - x\| \|y\| \to 0$ $(n\to\infty)$ #.

Pf of Rmk 4: $\forall t \in (0,1)$, $x \neq y \in \mathbb{K}$, $\|x\| = \|y\| = 1$,

$\|tx + (1-t)y\|^2 = t^2 + (1-t)^2 + t(1-t)(x,y) + t(1-t)(y,x)$

$= t^2 + (1-t)^2 + 2t(1-t)\,\mathrm{Re}(x,y)$

$\overset{\text{Cauchy}}{<} t^2 + (1-t)^2 + 2t(1-t) = 1$ #

§6 内积空间.

1. 内积空间定义.

· $\mathbb{C}^n$ 上, $(z,w) \triangleq \sum_{i=1}^{n} z_i \overline{w_i}$ 为 Hermite 内积., prop:

$$\left.\begin{aligned}&(1)\ (az_1 + bz_2, w) = a(z_1,w) + b(z_2,w)\\&(2)\ (z, aw_1 + bw_2) = \overline{a}(z,w_1) + \overline{b}(z,w_2)\end{aligned}\right\}\text{(共轭双线性.)}$$

(3) $(w,z) = \overline{(z,w)}$ (共轭对称性)

(4) $(z,z) \ge 0$, "=" $\Leftrightarrow z = 0 \in \mathbb{C}^n$. (正定性)

Def 共轭双线性函数: $a(\cdot,\cdot): X \times X \to \mathbb{K}$, $(x,y) \mapsto a(x,y)$, 其中 X 线性空间, 函数 a 满足(1)(2)

内积: a 还满足(3)(4). 称 $(X, a(\cdot,\cdot))$ 为内积空间.

Def. 称 $q(x) \triangleq a(x,x)$ 为 a 的二次型, 若 $a(\cdot,\cdot)$ 为 X 上共轭双线性函数.

Prop. $q(x) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow a(x,y) = \overline{a(y,x)}$

Prop. (Cauchy-Schwarz) a 共轭双线性函数, q 二次型 且 $q(x) \ge 0$, "=" $\Leftrightarrow x = 0$.

则 $|a(x,y)| \le \sqrt{q(x)q(y)}$. "=" $\Leftrightarrow x,y$ 线性相关.

Cor. $(\cdot,\cdot)$ 是 X 上内积, 则 $|(x,y)| \le \|x\| \cdot \|y\|$, 其中 $\|x\| \triangleq \sqrt{(x,x)}$

Rmk 1° $\|x\| \triangleq \sqrt{(x,x)}$ 是内积空间 X 上导出的范数.

完备内积空间称为 Hilbert 空间

2° $(X,(\cdot,\cdot)) \xrightarrow{\|x\|=\sqrt{(x,x)}} (X, \|\cdot\|) \xrightarrow{\rho(x,y)=\|x-y\|} (X,\rho)$

内积空间　　赋范空间　　距离空间.

3° 内积关于范数 $\|\cdot\|$ 连续

4° 内积空间严格凸

Q: 范数 $\|\cdot\|$ 何时一定能由内积诱导?

Thm. $(X, \|\cdot\|)$ 可由内积诱导得到 $\Leftrightarrow$ 平行四边形法则成立: $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$

Pf: ($\Rightarrow$) 显然. ($\Leftarrow$): 1° $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $(x,y) \triangleq \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)$

$\forall x,y,z \in X$, $\|x+y+z\|^2 + \|x-y\|^2 = \|(x+\frac{z}{2}) + (y+\frac{z}{2})\|^2 + \|(x+\frac{z}{2}) - (y+\frac{z}{2})\|^2$

$\overset{\text{平行四边形}}{=} 2(\|x+\frac{z}{2}\|^2 + \|y+\frac{z}{2}\|^2)$

$\|x+y-z\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x-\frac{z}{2}\|^2 + \|y-\frac{z}{2}\|^2)$

相减得 $(x+y,z) = 2((x,\frac{z}{2}) + (y,\frac{z}{2}))$

分别取 $x=0$ 和 $y=0$ 得 $(x,z) = 2(x,\frac{z}{2})$, $(y,z) = 2(y,\frac{z}{2})$ $\Rightarrow (x+y,z) = (x,z) + (y,z)$ ①

且 $(qx,y) = q(x,y)$, $\forall q \in \mathbb{Q}$.

由范数连续性, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $(\lambda x, y) = \lambda(x,y)$ ②　性质(3)(4)易证.

2° $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $(x,y) \triangleq \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2)$ 类似可证. #

Pf of Bessel: 先证求和至多可数个(非0的)求和.

$\because 0\le \|x-\sum_{i=1}^{n}(x,e_i)e_i\|^2=\|x\|^2-\sum_{i=1}^{n}|(x,e_i)|^2$

$\therefore \sum_{i=1}^{n}|(x,e_i)|^2\le\|x\|^2$

$\therefore$ 只有有限个 $|(x,e_\alpha)|>\frac{1}{n}$ $\Rightarrow$ 至多可数个 $(x,e_\alpha)\ne 0$, 不妨设为 $\sum_{k=1}^{\infty}|(x,e_k)|^2$

由 $\sum_{i=1}^{n}|(x,e_i)|^2\le\|x\|^2$ 知 $\sum_{i=1}^{\infty}|(x,e_i)|^2\le\|x\|^2$. #

Pf of Bessel Cor: 由 Bessel, 不妨 $\sum_{\alpha\in A}(x,e_\alpha)e_\alpha=\sum_{k=1}^{\infty}(x,e_k)e_k$

记 $x_n=\sum_{k=1}^{n}(x,e_k)e_k$, 则 $\{x_n\}\subset X$

$\|x_{n+p}-x_n\|^2=\sum_{k=n+1}^{n+p}|(x,e_k)|^2\xrightarrow{\text{Bessel}}0\ (n\to\infty,\forall p\in\mathbb{N})$.

$\therefore \lim_{n\to\infty}x_n=\sum_{k=1}^{\infty}(x,e_k)e_k\in X$ (由 X Hilbert)

由 $x-\sum_{k=1}^{\infty}(x,e_k)e_k\perp\sum_{k=1}^{\infty}(x,e_k)e_k$ 得 $\|x-\sum_{\alpha\in A}(x,e_\alpha)e_\alpha\|^2=\|x\|^2-\sum_{\alpha\in A}|(x,e_\alpha)|^2$ #

Pf of 3条等价条件: (1)$\Rightarrow$(2): 反证. 若 $\exists\, 0\ne x\in S^\perp$, $(x,e_\alpha)=0,\forall\alpha\in A$.

由 S 封闭, $x=\sum_{\alpha\in A}(x,e_\alpha)e_\alpha=0$. 矛盾.

(2)$\Rightarrow$(3): 反证 若 $\exists x\in X$, $\sum_{\alpha\in A}|(x,e_\alpha)|^2<\|x\|^2$

令 $y=x-\sum_{\alpha\in A}(x,e_\alpha)e_\alpha$, 则 $\|y\|^2>0$. 但 $y\perp S$, 与完备矛盾.

(3)$\Rightarrow$(1): $\|x-\sum_{\alpha\in A}(x,e_\alpha)e_\alpha\|^2=\|x\|^2-\sum_{\alpha\in A}|(x,e_\alpha)|^2\overset{\text{Parseval}}{=}0$

$\therefore \forall x\in X$, $x=\sum_{\alpha\in A}(x,e_\alpha)e_\alpha$. 即 S 封闭 #

e.g. 1. $L^2[0,2\pi]$, $S=\{e_n(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{int}\mid n=0,\pm1,\cdots\}$ 规范正交.

2. l^2, $S\triangleq\{e_k=(0,\cdots,0,1,0,\cdots)\mid k=1,2,\cdots\}$ 规范正交

3. $D=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|^2<1\}$, $H^2(D)\triangleq\{u$ 全纯 $\mid\int_D|u|^2dxdy<+\infty\}$, $(u,v)\triangleq\int_D u\bar{v}\,dxdy$

$S\triangleq\{\varphi_n(z)=\sqrt{\frac{n}{\pi}}z^{n-1}\mid n=1,2,\cdots\}$ 规范正交

Pf of 可分空间 $\Leftrightarrow$ S 至多可数: ($\Rightarrow$) 可分 $\Rightarrow$ $\exists$ 可数集 $A=\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, s.t. $\bar{A}=X$.

取 A 的一个极大无关组 $A'=\{y_n\}_{n=1}^{N}$, $N<+\infty$ 或 $N=+\infty$.

由 Schmit 正交化得规范正交集 $S=\{e_n\}$, 则

$\overline{\mathrm{span}S}=\overline{\mathrm{span}A'}=\overline{\mathrm{span}A}=X$, 故 S 为 X 的至多可数规范正交基.

($\Leftarrow$): 设 $S=\{e_n\}_{n=1}^{N}$, $N\le+\infty$ 是 X 的规范正交基, 则 $A=\{x=\sum_{k=1}^{N}a_ke_k\mid \mathrm{Re}\,a_k,\mathrm{Im}\,a_k\in\mathbb{Q}\}$ 至多可数

且 $\bar{A}=X$

特别, 作 $X\longrightarrow\mathbb{K}^n$ 或 l^2

$x\mapsto((x,e_1),(x,e_2),\cdots,(x,e_N))$ 即可. #

2. 正交性

Def. (正交) 内积空间 $(X,(\cdot,\cdot))$, 称 $x,y\in X$ 正交, 若 $(x,y)=0$, 记 $x\perp y$.

称 x 与 $M\subset X$ 正交, 若 $\forall y\in M$, $x\perp y$, 记 $x\perp M$.

称 $\{x\in X\mid x\perp M\}$ 为 M 的正交补, 记 $M^\perp$.

Def. 设 $S=\{e_\alpha,\alpha\in A\}\subset(X,(\cdot,\cdot))$. 若 $\forall e_\alpha\ne e_\beta\in S$, $e_\alpha\perp e_\beta$, 则 S 是一个正交集.

若还有 $\|e_\alpha\|=1,\forall\alpha\in A$, 则 S 是规范正交集

称 S 是完备的, 若 $S^\perp=\{0\}$

Rmk. $M^\perp$ 是闭子空间. Rmk. 任何内积空间有完备正交集 (由 Zorn 引理.)

Def. 设 $S=\{e_\alpha,\alpha\in A\}$ 是 $(X,(\cdot,\cdot))$ 的规范正交集. 若 $\forall x\in X$, $x=\sum_{\alpha\in A}(x,e_\alpha)e_\alpha$, 则

称 S 是 X 的一组基 (或 S 是封闭的.)

Thm. (Bessel Ineq.) 设 $S=\{e_\alpha,\alpha\in A\}$ 是规范正交集, 则 $\forall x\in X$, $\sum_{\alpha\in A}|(x,e_\alpha)|^2\le\|x\|^2$

Cor. $(X,(\cdot,\cdot))$ Hilbert 空间, $S=\{e_\alpha,\alpha\in A\}\subset X$ 规范正交集,

则 $\forall x\in X$, $\sum_{\alpha\in A}(x,e_\alpha)e_\alpha\in X$ 且 $\|x-\sum_{\alpha\in A}(x,e_\alpha)e_\alpha\|^2=\|x\|^2-\sum_{\alpha\in A}|(x,e_\alpha)|^2$

Thm: $(X,(\cdot,\cdot))$ Hilbert 空间, $S=\{e_\alpha,\alpha\in A\}\subset X$ 规范正交集,

则下面3条等价: (1) S 封闭

(2) S 完备

(3) Parseval 等式成立: $\|x\|^2=\sum_{\alpha\in A}|(x,e_\alpha)|^2$, $\forall x\in X$.

3. 可分 Hilbert 空间结构.

Def. (可分) (X,ρ) 度量空间, 称 X 可分的, 若 $\exists$ 可数稠密子集 A (即 $\bar{A}=X$)

Rmk. $\mathbb{R}$ 可分, $\because\bar{\mathbb{Q}}=\mathbb{R}$.

Def. (同构). 内积空间 $(X,(\cdot,\cdot))$, $(Y,\langle\cdot,\cdot\rangle)$. $T:X\to Y$ 满足

1° T 线性同构

2° $\langle Tx,Ty\rangle=(x,y)$, $\forall x,y\in X$

则称 T 是 X 与 Y 的一个同构.

Thm (Hilbert 可分空间结构.) $(X,(\cdot,\cdot))$ 可分 Hilbert 空间 $\Leftrightarrow$ X 有至多可数规范正交基. 特别, X 同构于 $\mathbb{K}^n$ 或 l^2

4. 最佳逼近问题: $(X,\|\cdot\|)$ 赋范, $M\subset X$ 无穷维, 是否 $\exists y\in M$, s.t. $\|x-y\|=\inf_{z\in M}\|x-z\|$? 不一定, 要更强条件.

Thm. (最小模可取到.) $(X,(\cdot,\cdot))$ Hilbert 空间, $C\subset X$ 闭凸子集, 则 $\exists y\in C$, s.t. $\|y\|=\inf_{z\in C}\|z\|$

Pf: 设 $0\notin C$. $d\triangleq\inf_{z\in C}\|z\|\overset{(\text{由}C\text{闭})}{>}0$. $\forall n$, $\exists z_n\in C$, s.t. $d\le\|z_n\|\le d+\frac{1}{n}$ 由 C 凸, $\frac{z_n+z_m}{2}\in C$.

$\because \|z_n-z_m\|^2\overset{\text{平行四边形}}{=}2(\|z_n\|^2+\|z_m\|^2)-\|z_n+z_m\|^2\le2((d+\frac{1}{n})^2+(d+\frac{1}{m})^2)-4\|\frac{z_n+z_m}{2}\|^2\le2[(d+\frac{1}{n})^2+(d+\frac{1}{m})^2]-4d^2$

$\to0\ (n,m\to\infty)$

$\therefore\{z_n\}$ 基本列, 由 C 闭, X Hilbert, 收敛于 $y\in C$, $\|y\|=d$. #

<u>Pf</u> of 最佳逼近元刻画:

$\forall t\in[0,1]$, $\varphi(t)\triangleq\|x-tz-(1-t)y\|^2$

$=\|(x-y)\|^2+t^2\|z-y\|^2-2t\langle x-y,z-y\rangle$.

y 是 x 的最佳逼近元 $\Leftrightarrow \varphi(t)\geq\varphi(0)$, $\forall t\in[0,1]$. #

$\Leftrightarrow \langle x-y,z-y\rangle\leq 0$.

<u>Pf</u> of Cor1: 由上面, y 最佳逼近 $\Leftrightarrow \langle x-y,z-y\rangle=\mathrm{Re}\langle x-y,z-y\rangle\leq 0$.

令 $w=z-y\in M-\{y\}\triangleq M_0$, M_0 线性子空间, 则 $\pm w, \pm iw\in M_0$

代入得 $\mathrm{Re}(x-y,w)=\mathrm{Im}(x-y,w)=0$, $\forall w\in M_0$

$\therefore (x-y,w)=(x-y,z-y)=0$, $\forall z\in M$. #

<u>Pf</u> of Cor2. Uniqueness: $x=y+z=y'+z' \Rightarrow \underbrace{y-y'}_{\in M}=\underbrace{z'-z}_{\in M^\perp}\in M\cap M^\perp=\{0\}$ #.

<u>Rmk</u>. 上一定理即 闭凸集 in Hilbert Space 到 0 的距离可由某点实现.

由平移, Hilbert space 中 $\forall x$ 到闭凸集 C 的距离可由 C 中某点实现, i.e.

$\forall x\in X$, $\exists y\in C$, s.t. $\|x-y\|=\inf\limits_{z\in C}\|x-z\|$.

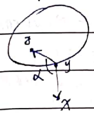
特别, 若 $C=M\subset X$ 闭子空间, 仍有上式成立.

• 夹角 α: $\cos\alpha\triangleq\frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\cdot\|y\|}$, $x,y\in\mathbb{R}^n$, $\langle x,y\rangle=\sum_{i=1}^n x_iy_i$

$x,y\in\mathbb{C}^n\simeq\mathbb{R}^{2n}$, $\langle x,y\rangle\triangleq\mathrm{Re}(x,y)$, $(x,y)\triangleq\sum_{i=1}^n x_i\overline{y_i}$

在一般的 $\mathbb{C}$ 上内积空间 X, 也可定义向量夹角.

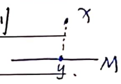
<u>Thm</u>. (最佳逼近元的刻画) $(X,(\cdot,\cdot))$ 内积空间, $C\subset X$ 闭凸子集, $\forall x\in X$, 则



y 是 x 在 C 上的最佳逼近元 $\Leftrightarrow \langle x-y,z-y\rangle=\mathrm{Re}(x-y,z-y)\leq 0$, $\forall z\in C$.

i.e. $\alpha\geq\frac{\pi}{2}$

<u>Cor1</u>. $(X,(\cdot,\cdot))$ Hilbert 空间, $M\subset X$ 闭线性子流形. $\forall x\in X$, 则



$y\in M$ 是 x 的最佳逼近元 $\Leftrightarrow x-y\perp M-\{y\}$.

特别, M 是闭线性子空间, y 最佳逼近 $\Leftrightarrow x-y\perp M$.

<u>Cor2</u>. X Hilbert 空间, $M\subset X$ 闭线性子空间. $\forall x\in X$, $\exists! y\in M, z\in M^\perp$, s.t. $x=y+z$.

Pf of 连续三等价：$1^\circ \Rightarrow 2^\circ$ (✓)

$2^\circ \Rightarrow 3^\circ$：反证. $\forall n\in\mathbb{N}$, $\exists x_n$, s.t. $\|Tx_n\|_Y > n\|x_n\|_X$.

令 $y_n = \frac{x_n}{\|Tx_n\|_Y}$，则 $\|y_n\|_X = \frac{\|x_n\|_X}{\|Tx_n\|_Y} < \frac{1}{n} \to 0$.

但 $\|Ty_n\|_Y = 1$ 矛盾！

$3^\circ \Rightarrow 1^\circ$：设 $x_n \to x_0 \in X$, $\|Tx_n - Tx_0\|_Y = \|T(x_n - x_0)\|_Y$

$\leq M\cdot\|x_n - x_0\|_X \to 0$ $\therefore Tx_n \xrightarrow{\|\cdot\|_Y} Tx_0$ #

Pf of Prop (3)：设 $\{T_n\}\subset\mathcal{L}(X,Y)$ 基本列：$\forall x\in X$，令 $y_n = T_n x \in Y$,

则 $\|y_{n+p} - y_n\|_Y = \|(T_{n+p} - T_n)x\|_Y \leq \|T_{n+p} - T_n\|\cdot\|x\|_X \to 0$ $(n\to\infty, \forall p\in\mathbb{N})$

$\therefore \{y_n\}$ 是基本列. 由 Y 是Banach，$\exists y\in Y$, s.t. $y_n \to y$

作 $T: X \to Y$，则 T 线性.

$x \mapsto Tx = y$.

下证 T 有界：$\|Tx\|_Y \leq \|Tx - T_n x\|_Y + \|T_n x\|_Y$

$\leq \|T - T_n\|\cdot\|x\|_X + \|T_n\|\,\|x\|_X$

$\therefore \|T\| \leq \|T - T_n\| + \|T_n\|$ 有界. #

eg (1) X, Y 有限维赋范空间，$T: X\to Y$ 线性算子，则 T 连续（有界）.

Pf：不妨 $X = \mathbb{K}^n$, $Y = \mathbb{K}^m$，取标准范数，T 有矩阵表示 $(t_{ij})_{m\times n}$

则 $\|Tx\|_Y = \left(\sum_{i=1}^m \left|\sum_{j=1}^n t_{ij}x_j\right|^2\right)^{\frac12}$

$\leq \left(\sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n |t_{ij}|^2 \cdot \sum_{j=1}^n |x_j|^2\right)\right)^{\frac12}$

$= \left(\sum_{i,j} |t_{ij}|^2\right)^{\frac12}\ \|x\|_X$

$= M\cdot\|x\|_X$ #.

(2) 正交投影算子. X Hilbert, $M\subset X$ 闭线性子空间. $\forall x\in X$, $\exists 1\, y\in M$, $z\in M^\perp$, s.t. $x = y + z$.

映射 $P: X \to M$ 线性.

$x \mapsto Px = y$

$\left.\begin{array}{l}\|Px\| = \|y\| \leq \|x\| \\ \text{取 } x\in M \text{ 得 } \|Px\| = \|x\|\end{array}\right\} \Rightarrow \|P\| = 1$

第二章 线性算子与线性泛函.

§1 线性算子.

1.定义

Def.（线性算子）线性空间 X, Y. 称映射 $T: \overset{\text{线性子空间}}{D} \subset X \to Y$ 为线性算子，若

$T(\alpha x + \beta z) = \alpha T(x) + \beta T(z)$, $\forall \alpha,\beta\in\mathbb{K}$, $x, z\in D$.

称 D 为 T 的定义域，记为 $D(T)$；$R(T) \triangleq \{Tx \mid x\in D\}$ 为 T 的值域.

特别，$D = X$, $Y = \mathbb{K}$ 时，称 T 为 X 上的线性泛函.

Def.（连续性）X, Y 赋范空间，$T: X\to Y$ 线性算子. 称 T 在 x_0 处连续，若当 $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_X} x_0$ 时 $(x_n, x_0\in X)$，有

$Tx \xrightarrow{\|\cdot\|_Y} Tx_0$.

称 T 有界，若 $\exists M > 0$, $\forall x\in X$, $\|Tx\|_Y \leq M\cdot\|x\|_X$.

Prop.（连续等价）X, Y 赋范空间，$T: X\to Y$ 线性算子，则下面等价：

1° T 连续

2° T 在 $x=0$ 连续

3° T 有界.

2.有界线性算子空间.

Def. X, Y 赋范空间，$\mathcal{L}(X,Y) \triangleq \{T \mid T: X\to Y \text{ 有界线性算子}\}$. $\forall T_i\in\mathcal{L}(X,Y)$, $\alpha, \beta\in\mathbb{K}$.

定义 1° 加法数乘：$(\alpha T_1 + \beta T_2)x \triangleq \alpha\cdot T_1 x + \beta\cdot T_2 x$

2° 范数：$\|T\| \triangleq \sup\limits_{x\in X\setminus\{0\}} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X} = \sup\limits_{\|x\|_X = 1} \|Tx\|_Y$

Prop. (1) $\mathcal{L}(X,Y)$ 由 1° 定义构成 K 上的线性空间.

(2) $\|\cdot\|$ 是 $\mathcal{L}(X,Y)$ 上范数.

(3) 若 Y 是Banach空间，则 $\mathcal{L}(X,Y)$ 也是Banach空间.

注：$\mathcal{L}(X) \triangleq \mathcal{L}(X,X)$

$X^* \triangleq \mathcal{L}(X,\mathbb{K})$.

• $(X, (\cdot,\cdot))$ Hilbert，固定 $y\in X$，$f_y: X\to\mathbb{K}$ 是 X 上的线性泛函，且 $|f_y(x)| \overset{\text{Cauchy}}{\leq} \|y\|\cdot\|x\|$

$x \mapsto (x,y)$ $\Rightarrow f_y$ 是 X 上有界线性泛函

$\|f_y\| = \|y\|_X$（取 $x = y$，$f_y(y) = \|y\|^2$）

Q：$\forall f\in X^*$，是否 $\exists y\in X$, s.t. $f(x) = (x,y)$, $\forall x\in X$?

A：§2. Riesz 表示定理！

分析. 考虑有限维. $X=\mathbb{K}^n$, $(\cdot,\cdot)$ 标准内积. $f:\mathbb{K}^n\to\mathbb{K}$ 线性函数.

$\forall \xi\in\mathbb{K}$, $f(\xi)=\sum_{k=1}^{n}\xi_i f(e_i)$. 令 $a_i=f(e_i)$, 则 $f(\xi)=\sum_{k=1}^{n}\xi_i\overline{\overline{a_i}}=(\xi,\overline{a})$

$M\triangleq\{\xi\in\mathbb{K}^n \mid f(\xi)=(\xi,\overline{a})=0\}$, 则 $a\perp M\subset\mathbb{K}^n$ 子空间.

Pf of Riesz: 假设 $f\neq0$, 令 $M\triangleq\{x\in X \mid f(x)=0\}$, 则 $M\subset X$ 闭子空间. 不妨 $M\subsetneq X$ (否则取 $y=0$ 即可)

由正交分解定理, 1° $\exists x_0\in X$, s.t. $x_0\perp M$, $\|x_0\|=1$

2° $\forall x\in X$, $x\overset{\exists}{=}y+\xi$, $y\in M^\perp$, $\xi\in M$.

$\therefore f(x)=f(y)=f\left(\frac{f(y)}{f(x_0)}x_0\right)$ $\Rightarrow y-\frac{f(y)}{f(x_0)}x_0\in M\cap M^\perp=\{0\}$ $\Rightarrow y=\frac{f(y)}{f(x_0)}x_0$

$\therefore f(x)=\left(\frac{f(y)}{f(x_0)}x_0+\xi, \overline{f(x_0)}x_0\right)$ 即取 $y_f=\overline{f(x_0)}x_0$ 即可.

下证唯一性. 若 $\exists y, y'$, s.t. $f(x)=(x,y)=(x,y')$, $\forall x\in X$.

则 $(x,y-y')=0$, $\forall x\in X$. 取 $x=y-y'$ 得 $y=y'$. #

Pf of 双线性型表示: $\forall y\in X$, $f_y(\cdot)\triangleq a(\cdot,y)$ 有界线性算子.

由 Riesz 表示 Thm, $\exists \xi=\xi(y)\in X$, s.t. $a(x,y)=(x,\xi(y))$, $\forall x\in X$

定义 $A: X\to X$

$y\mapsto \xi(y)\triangleq Ay$.

则 1° A 线性: $\forall \alpha,\beta\in\mathbb{K}$, $y_1,y_2\in X$, $x\in X$.

$\because (x, A(\alpha y_1+\beta y_2)) = a(x,\alpha y_1+\beta y_2)$

$\overset{\text{共轭双线性}}{=} \overline{\alpha}a(x,y_1)+\overline{\beta}a(x,y_2)$

$=\overline{\alpha}(x,Ay_1)+\overline{\beta}(x,Ay_2)$

$=(x,\alpha Ay_1+\beta Ay_2)$

$\therefore$ 取 $x=A(\alpha y_1+\beta y_2)-(\alpha Ay_1+\beta Ay_2)$ 即得 A 线性

2° A 有界: $\underset{\|y_f\|=\|f_y\|}{\|Ay\|} \overset{\text{Riesz}}{=} \sup_{x\neq0}\frac{|a(x,y)|}{\|x\|} \leq M\cdot\|y\|$ $\Rightarrow \|A\|\leq M$

$\therefore A\in\mathcal{L}(X)$ 且 $\|A\|\triangleq\sup_{y\neq0}\frac{\|Ay\|}{\|y\|}=\sup_{x,y\neq0}\frac{|a(x,y)|}{\|x\|\cdot\|y\|}$ #.

§2. Riesz 表示定理

Thm (Riesz) $(X,(\cdot,\cdot))$ Hilbert. $\forall f\in X^*$, $\exists 1: y_f\in X$, s.t. $f(x)=(x,y_f)$, $\forall x\in X$.

Rmk. $\|f\|=\|y_f\|_X$.

Thm (双线性型表示) $(X,(\cdot,\cdot))$ Hilbert, $a(\cdot,\cdot)$ 是 X 上共轭双线性型, 满足 $|a(x,y)|\leq M\|x\|\cdot\|y\|$, $\forall x,y\in X$.

则 $\exists A\in\mathcal{L}(X)$, s.t. $a(x,y)=(x,Ay)$ 且 $\|A\|=\sup_{x,y\neq0}\frac{|a(x,y)|}{\|x\|\cdot\|y\|}$

e.g. (1) $E=\{p_1,\cdots,p_n\}\subset\mathbb{R}^n$ 疏集

(2) Cantor 集是疏集

(3) $\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$ 是第一纲集

$\bigcup_{n=1}^{\infty} q_n$

(4) $E=\{x_n \mid n=1,2,\cdots\}\subset(X,\rho)$ 第一纲集.

Pf of Lem (疏集等价的球刻画):

($\Rightarrow$) 由 $\bar{E}$ 无内点, $B_{r_0}(x_0)\not\subset\bar{E}$ $\therefore \exists x\in B_{r_0}(x_0)$, s.t. $x\notin\bar{E}$

由 $\bar{E}$ 闭 ($\bar{E}^c$ 开), $\exists r_1>0$, s.t. $B_{r_1}(x)\subset X\setminus\bar{E}$

取 r 充分小, s.t. $B_r(x)\subset B_{r_0}(x_0)$ 且 $\overline{B_r(x)}\subset B_{r_1}(x)$ $\Rightarrow \overline{B_r(x)}\cap\bar{E}=\phi$.

($\Leftarrow$) 即证 $\bar{E}$ 无内点. $\forall x_0\in\bar{E}$, $\forall r_0>0$, $\exists B_r(x)\subset B_{r_0}(x_0)$ 且 $B_r(x)\cap\bar{E}\subset\overline{B_r(x)}\cap\bar{E}=\phi$

$\therefore B_{r_0}(x_0)$ 不完全包含在 $\bar{E}$ 中

由 r_0 任意性, x_0 不是内点 $\Rightarrow\bar{E}$ 无内点. #

Pf of Baire: (反证) 设 (X,ρ) 完备, $X=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$, E_n 疏.

$\forall B_{r_0}(x_0)\subset X$, $\exists B_{r_1}(x_1)\subset B_{r_0}(x_0)$, 且 $\overline{B_{r_1}(x_1)}\cap\bar{E_1}=\phi$, $r_1<1$.

$\exists B_{r_2}(x_2)\subset B_{r_1}(x_1)$, 且 $\overline{B_{r_2}(x_2)}\cap(\bar{E_1}\cup\bar{E_2})=\phi$, $r_2<\frac{1}{2}$

$\cdots$

$\exists B_{r_n}(x_n)\subset B_{r_{n-1}}(x_{n-1})$, 且 $\overline{B_{r_n}(x_n)}\cap(\bar{E_1}\cup\cdots\cup\bar{E_n})=\phi$, $r_n<\frac{1}{n}$.

考虑 $\{x_n\}$, $\rho(x_{n+p},x_n)\le r_n<\frac{1}{n}\to0$, $\forall p\Rightarrow\{x_n\}$ 基本列.

由 X 完备, $x=\lim_{n\to\infty}x_n\in X$

$\rho(x,x_n)=\lim_{p\to\infty}\rho(x_{n+p},x_n)\le r_n \Rightarrow x\in\overline{B_{r_n}(x_n)}$, $\forall n$

但 $x\notin\bigcup_{n=1}^{\infty}\bar{E_n}=X$. 矛盾! #

Pf of App: E 第二纲 $\overset{X完备}{\Leftarrow}$ E^c 第一纲

$\forall n\in\mathbb{N}$, $A_n\triangleq\{f\in X \mid \exists s\in[0,1], |h|\le\frac{1}{n}$ 时有 $|f(s+h)-f(s)|\le n|h|\}$

则 $\forall f\in E^c$, $\exists n_0\in\mathbb{N}$, s.t. $f\in A_{n_0}$ $\Rightarrow E^c\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$

下证 A_n 疏即可.

1° A_n 闭 ($\Leftrightarrow A_n^c$ 开). $\forall f\in A_n^c$, $\forall s\in[0,1]$, $\exists |h_s|\le\frac{1}{n}$, s.t. $|f(s+h_s)-f(s)|>n|h_s|$.

由连续, $\exists \varepsilon_s$, $\forall t\in I_s$ (包含 s 的开区间), $|f(t+h_s)-f(t)|>n|h_s|+2\varepsilon_s$ $(0<\varepsilon_s\ll1)$

$\because [0,1]\subset\bigcup_{s\in[0,1]}I_s$ $\therefore$ 由有限cover定理, $\exists\{s_1,\cdots,s_k\}$, s.t. $[0,1]=\bigcup_{n=1}^{k}I_{s_n}$

§3 纲与开映射定理

1.纲集.

Def. 度量空间 (X,ρ), $E\subset X$. 称 E 是疏集, 若 $\bar{E}$ 无内点.

称 E 是第一纲集, 若 $E=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$, E_n 疏.

不是第一纲的集称为第二纲集.

(疏集的球刻画)

Lem. 度量空间 (X,ρ). $E\subset X$ 疏集 $\Leftrightarrow\forall B_{r_0}(x_0)\subset X$, $\exists B_r(x)\subset B_{r_0}(x_0)$ 且 $\overline{B_r(x)}\cap\bar{E}=\phi$.

Rmk. $E_1,E_2\subset(X,\rho)$ 疏, 则 $E_1\cup E_2$ 也疏.

Pf: $\forall B_{r_0}(x_0)\subset X$, 由Lem. $\exists B_{r_1}(x_1)\subset B_{r_0}(x_0)$ 且 $\overline{B_{r_1}(x_1)}\cap\bar{E_1}=\phi$

再对 $B_{r_1}(x_1)$ 用Lem. $\exists B_r(x)\subset B_{r_1}(x_1)$ 且 $\overline{B_r(x)}\cap\bar{E_2}=\phi$

$\Rightarrow\overline{B_r(x)}\cap(\bar{E_1}\cup\bar{E_2})=\phi$ $\overset{Lem}{\Rightarrow}$ $E_1\cup E_2$ 是疏集 #.

Thm (Baire 纲) 完备度量空间是第二纲集.

Application $C[0,1]$ 中处处不可微函数集 E 是第二纲集. 特别, E^c 第一纲集.

$E^c=\{f\in C[0,1] \mid f$ 在某点可微$\}$.

(续 pf) 2° A_n 疏. ($\Leftarrow\forall f\in A_n$, $\forall\varepsilon>0$, $\exists F\in B_\varepsilon(f)$ 但 $F\notin A_n$.)

由 Weierstrass 定理, $\exists$ 多项式 P, s.t. $\|f-p\|<\frac{\varepsilon}{2}$

由 P 多项式, $\exists M>0$, s.t. $|p(s+h)-p(s)|\le M\cdot|h|$

设分段线性函数 g, s.t. $\|g\|<\frac{\varepsilon}{2}$, $|$每段斜率$|>M+n$.

令 $F=p+g$, $\|F-f\|\le\|f-p\|+\|g\|<\varepsilon$. $\Rightarrow F\in B_\varepsilon(f)$.

但 $|F(t+h)-F(t)|\ge|g(t+h)-g(t)|-M|h|>n|h|$ (在 g 的可微之 t 处.)

$\therefore F\notin A_n$. #

2.开映射定理.

Thm. (开映射). X,Y Banach, $T\in\mathcal{L}(X,Y)$ 满射, 则 T 是开映射. (把 X 开集映为 Y 开集.)

分析 有限维 $T:X\to Y$ 适当选基, $T\sim\begin{pmatrix}I_{r} & \\ & 0\end{pmatrix}$

$\{e_1,\cdots,e_m\}\mapsto\{\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n\}$

1° $m=n$ $T\sim I_n$: 把单位球 $\mapsto$ 单位球, $T^{-1}\in\mathcal{L}(Y,X)$

2° $m>n$, $rank(T)=n$, $T\sim\begin{pmatrix}I_n\\0\end{pmatrix}$: 把开集 $\mapsto$ 开集 ($\forall W$ 开 X, $\forall x_0\in W$, $\exists U\subset Y$, $V\subset Y^{\perp}$, s.t. $x_0\in U\times V\subset W$.)

$U\times V\mapsto V$.

分析. (i) $B_r(x_0)=x_0+B_r(0)$, $U_\delta(Tx_0)=Tx_0+U_\delta(0)$, 其中 $B_r(x_0)\subset X$, $U_\delta(y_0)\subset Y$.

(ii) T 线性: $U_\delta(0)\subset TB_r(0)\Leftrightarrow U_{\varepsilon\delta}(0)\subset TB_{\varepsilon r}(0)$, $\forall\varepsilon>0$.

要证: $\forall W$ 开 X, TW 开 $Y\Leftrightarrow\forall x_0\in W$, $\exists\delta>0$, s.t. $U_\delta(Tx_0)\subset TW\Leftrightarrow\exists\delta>0$, s.t. $U_\delta(0)\subset TB_1(0)$ (证明下方)

(续左) 令 $\varepsilon=\min\{\varepsilon_{s_n}\}$, $\forall g\in B_\varepsilon(f)\subset X$, $\forall t\in I_{s_n}$, 有 $|g(t+h_{s_n})-g(t)|\ge|f(t+h_{s_n})-f(t)|-2\varepsilon>n|h_{s_n}|$

$\therefore g\in A_n^c$ $\therefore B_\varepsilon(f)\subset A_n^c$ $\therefore A_n^c$ 开.

Pf of 开映射：即证：$\exists \delta>0$, s.t. $U_\delta(0) \subset T(B_1(0))$

1° $\exists \delta>0$, s.t. $U_{3\delta}(0) \subset \overline{T(B_1(0))}$

由 T 满，$Y=\bigcup_{n=1}^{\infty} TB_n(0) = TX$.

由 Y 完备，$\exists n$, $TB_n(0)$ 不是疏集. $\Rightarrow \exists U_r(y_0) \subset \overline{TB_n(0)}$

由 $\overline{TB_n(0)}$ 对称凸，$U_r(-y_0) \subset \overline{TB_n(0)}$ (对称)

$U_r(0) \subset \overline{TB_n(0)}$ (凸)

取 $\delta = \frac{r}{3n}$，则 $U_{3\delta}(0) \subset \overline{TB_1(0)}$

2° $U_\delta(0) \subset TB_1(0)$，即：$\forall y_0 \in U_\delta(0)$, $\exists x_0 \in B_1(0)$, s.t. $Tx_0 = y_0$

$\forall y_0 \in U_\delta(0)$，由1°，$\exists x_1 \in B_{\frac{1}{3}}(0)$, s.t. $\|y_0 - Tx_1\| < \frac{\delta}{3}$

$y_1 \triangleq y_0 - Tx_1 \in U_{\frac{\delta}{3}}(0)$. 由1°，$\exists x_2 \in B_{\frac{1}{3^2}}(0)$, s.t. $\|y_1 - Tx_2\| < \frac{\delta}{3^2}$

…… $y_{n+1} \triangleq y_n - Tx_{n+1} \in U_{\frac{\delta}{3^{n+1}}}(0)$，其中 $x_{n+1} \in B_{\frac{1}{3^{n+1}}}(0)$ ……

得 $\{x_n\}$，$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| \le \frac{1}{2}$

由 X 完备，$x_0 \triangleq \sum_{n=1}^{\infty} x_n \in X$，$x_0 \in B_1(0)$

$\|y_n\| = \|y_{n-1} - Tx_n\| = \cdots = \|y_0 - T(\sum_{k=1}^{n} x_k)\| < \frac{\delta}{3^n} \to 0$ $(n\to\infty)$

$\therefore \|y_0 - Tx_0\| = 0 \Rightarrow y_0 = Tx_0$. #.

Pf of Banach thm：由开映射定理，$\exists \delta>0$, $U_\delta(0) \subset TB_1(0)$.

$\Leftrightarrow U_1(0) \subset TB_{\frac{1}{\delta}}(0)$

$\Leftrightarrow T^{-1}(U_1(0)) \subset B_{\frac{1}{\delta}}(0)$.

$\forall y \in U_1(0)$, $\|T^{-1}(y)\|_X < \frac{1}{\delta}$，$\therefore T$ 有界 $\frac{1}{\delta}$. #.

($\because \forall y \in Y, y \ne 0$, $\|T^{-1}(\frac{y}{\|y\|(1+\varepsilon)})\|_X < \frac{1}{\delta} \Rightarrow \|T^{-1}(y)\|_X < \frac{1+\varepsilon}{\delta}\|y\| \xRightarrow{\varepsilon\to 0} \|T^{-1}y\|_X \le \frac{1}{\delta}\|y\|_Y$)

Pf of 范数等价 thm：令 $Id: (X, \|\cdot\|_2) \to (X, \|\cdot\|_1)$
$x \mapsto x$

由 $\|\cdot\|_2$ 比 $\|\cdot\|_1$ 强，$Id \in \mathcal{L}((X,\|\cdot\|_2),(X,\|\cdot\|_1))$ $\quad \exists C_2>0, \forall x \in X, \|x\|_1 \le C_2\|x\|_2$

由 Banach thm，$Id^{-1} \in \mathcal{L}((X,\|\cdot\|_1),(X,\|\cdot\|_2))$ $\Leftrightarrow \exists C_1>0, \forall x \in X, \|x\|_2 \le C_1\|x\|_1$ #

Pf of 闭算子等价定义：$P(T) = \{(x,Tx) \mid x \in D(T)\}$ 闭 $\Leftrightarrow$ 基本列 $\{(x_n, Tx_n)\} \longrightarrow (x,y) \in P(T)$

$\Leftrightarrow x_n \to x$, $Tx_n \to y \Rightarrow y = Tx$ #.

Thm (Banach逆算子) X, Y Banach，$T \in \mathcal{L}(X,Y)$ 且 T 既单又满，则 $T^{-1} \in \mathcal{L}(Y,X)$.

(f 连续 $\Leftrightarrow$ 开集的原像是开集：$\forall Y$ 中开集 $W = TV$, $V \overset{开}{\subset} X$, $T^{-1}W = T^{-1}(TV) = V \overset{开}{\subset} X$)

Cor. (范数等价) 设 $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ 是 X 的完备范数，且 $\|\cdot\|_2$ 比 $\|\cdot\|_1$ 强，则 $\|\cdot\|_2$ 与 $\|\cdot\|_1$ 等价.

3. 闭图像定理

Def. (乘积空间 $X\times Y$) X, Y 赋范空间，定义 $\|\cdot\|: X \times Y \to \mathbb{R}$，则称赋范空间 $(X\times Y, \|\cdot\|)$ 为
$(x,y) \mapsto \|x\|_X + \|y\|_Y$
X 与 Y 的乘积空间.

Rmk. X, Y 完备 $\Rightarrow X \times Y$ 完备.

Def. (闭算子) X, Y 赋范空间，$T: X \to Y$ 线性算子称为是闭算子，若 T 的图像

$P(T) \triangleq \{(x,Tx) \mid x \in X\} \subset X \times Y$ 是闭集.

Prop. (等价定义) $T: X \to Y$ 闭算子 $\Leftrightarrow \forall \{x_n\} \subset X$, $x \in X$. 若 $x_n \to x$, $Tx_n \to y$，则 $x \in D(T)$, $Tx = y$.

Thm (闭算子与连续(有界)算子关系) X-B^*, Y-Banach，$T \in \mathcal{L}(X,Y)$，则 $\exists \widetilde{T}: \overline{D(T)} \to Y$, s.t.
(B.L.T.) $\quad$ (1) $\widetilde{T}|_{D(T)} = T$
(2) $\|\widetilde{T}\| = \|T\|$

Rmk. 连续算子定义可看成闭集，$\Rightarrow \widetilde{T}(T)$ 是闭算子.

Pf: $\forall x \in \overline{D(T)}$, $\exists \{x_n\} \subset D(T) \to x$, $\because \|Tx_n - Tx_m\|_Y \le \|T\| \cdot \|x_n - x_m\|_X \to 0$ $(m,n\to\infty)$

$\therefore \{Tx_n\} \subset Y$ 基本列，$\exists y \in Y$, $Tx_n \to y$

CLAIM: y 与 x_n 选取无关. $\because x_n' \to x$, $Tx_n' \to y'$，则 $\|y-y'\| \le \|y - Tx_n\| + \|Tx_n - Tx_n'\| + \|Tx_n' - y'\|$

$\le \|y - Tx_n\| + \|T\|(\|x_n - x\| + \|x - x_n'\|) + \|y' - Tx_n'\|$
$\to 0$ $(n\to\infty)$.

$\therefore y = y'$.

定义 $\widetilde{T}: \overline{D(T)} \to Y$，则 $\widetilde{T}|_{D(T)} = T$，$\|\widetilde{T}x\| = \|y\| = \lim_{n\to\infty}\|Tx_n\| \le \lim_{n\to\infty}\|T\|\cdot\|x_n\| = \|T\|\cdot\|x\|$.
$x \mapsto y$

$\Rightarrow \|\widetilde{T}\| \le \|T\|$. 显然 $\|T\| \le \|\widetilde{T}\|$. #.

Thm (闭图像，闭算子 $\Rightarrow$ 连续算子) X, Y-Banach，$T: X \to Y$ 闭算子. 若 $D(T) \overset{闭}{\subset} X$，则 T 连续(有界).

Pf: $P(T) \overset{闭}{\subset} X$，在 $D(T)$ 定义新范数 $\|x\|_G \triangleq \|x\|_X + \|Tx\|_Y$，下证 $(D(T), \|\cdot\|_G)$ 完备.

设基本列 $\{x_n\} \subset (D(T), \|\cdot\|_G)$，则 $\|x_n - x_m\|_G = \|x_n - x_m\|_X + \|Tx_n - Tx_m\|_Y \to 0$ $(n,m\to\infty)$

$\therefore$ $\|x_n - x_m\|_X \to 0 \Rightarrow \{x_n\} \subset (D(T), \|\cdot\|_X)$ 基本列 $\Rightarrow x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_X} x \in D(T)$.

$\|Tx_n - Tx_m\|_Y \to 0 \xRightarrow{Y\text{-Banach}} Tx_n \to y \in Y$.

由 T 闭，$Tx = y$, $Tx_n \to Tx$ $\Rightarrow \|x_n - x\|_G = \|x_n - x\|_X + \|T(x_n - x)\|_Y \to 0$. $\Rightarrow (D(T), \|\cdot\|_G)$ 完备

$\because \|\cdot\|_G$ 比 $\|\cdot\|_X$ 强，由范数等价，$\exists c>0$, s.t. $\|Tx\|_Y \le \|x\|_G \le c\|x\|_X \Rightarrow T$ 有界 #

4. 共鸣(一致有界)定理

Pf of 共鸣：在 X 上定义新范数 $\|x\|_W \triangleq \|x\|_X + \sup\limits_{A\in W}\|Ax\|_Y$，则 $\|\cdot\|_W$ 是 X 上范数，下证 $(X,\|\cdot\|_W)$ 完备.

设基本列 $\{x_n\} \subset (X,\|\cdot\|_W)$

则 $\begin{cases} \{x_n\}\text{是}(X,\|\cdot\|_X)\text{基本列} \Rightarrow \exists x\in X,\ s.t.\ x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_X} x \\ \sup\limits_{A\in W}\|Ax_n - Ax_m\|_Y \to 0\ (n,m\to\infty) \end{cases}$

$\forall \varepsilon>0$, $\exists N$, s.t. $\forall n>N$, $\|Ax_n - Ax_m\|<\varepsilon$, $\forall A\in W$

令 $m\to\infty$，由 $A\in\mathcal{L}(X,Y)$，$\|Ax_n - Ax\|\le\varepsilon \Rightarrow Ax_n\to Ax$

$\therefore \|x_n - x\|_W = \|x_n - x\|_X + \sup\limits_{A\in W}\|Ax_n - Ax\| \to 0\ (n\to\infty) \Rightarrow (X,\|\cdot\|_W)$ 完备.

由 $\|\cdot\|_X$ 比 $\|\cdot\|_W$ 弱和范数等价，$\sup\limits_{A\in W}\|Ax\|\le\|x\|_W \overset{\exists M}{\le} M\|x\| \Rightarrow \|A\|\le M$. #

Pf of Banach-Steinhaus：$(\Rightarrow)$ 显然，由共鸣.

$(\Leftarrow)$：$\exists C>0$, s.t. $\|A_n\|\le C$.

$\forall\varepsilon>0$, $\forall x\in X$, $\exists y\in X_0$, s.t. $\|x-y\|<\varepsilon$.

$\|A_n x - Ax\| \le \|A_n(x-y)\| + \|A_n y - Ay\| + \|A(x-y)\|$

$\le (\|A_n\|+\|A\|)\cdot\|x-y\| + \|A_n y - Ay\|$

$\overset{\exists N,\forall n>N}{<} (C+\|A\|)\varepsilon + \varepsilon$

$\therefore A_n x\to Ax$, $\forall x\in X$. #

Pf of Lax-Milgram：由Riesz表示定理，$A\in\mathcal{L}(X)$ 存在唯一，s.t. $a(x,y)=(x,Ay)$，下证：

1° A 是单射.

若 $Ay_1 = Ay_2$，则 $a(x,y_1)=a(x,y_2)$ 取 $x=y_1-y_2$ $\overset{\text{由(2)}}{\text{得}}$ $y_1=y_2$

2° A 是满射（① $R(A)$ 闭，② $R(A)^\perp=\{0\}$.）若无闭，只能说明 $R(A)$ 稠密

$\forall w\in\overline{R(A)}$，$\exists\{x_n\}\subset X$, s.t. $Ax_n\to w$

$\delta\|x_{n+p}-x_n\|^2 \le |(x_{n+p}-x_n, A(x_{n+p}-x_n))|$

$\overset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\le} \|x_{n+p}-x_n\|\cdot\|Ax_{n+p}-Ax_n\|$

$\therefore \|x_{n+p}-x_n\| \le \frac{1}{\delta}\|Ax_{n+p}-Ax_n\|\to 0$. $\Rightarrow \{x_n\}$ 基本列 $\xrightarrow[X\text{-Hilbert}]{\exists} x\in X$

由 A 连续，$w=Ax \Rightarrow \overline{R(A)}=R(A)$. ……①

$\forall w\in R(A)^\perp$，$(w,Ax)=0$，$\forall x\in X$. $\Rightarrow a(w,x)=0$ 取 $x=w$ 得 $w=0$

$\Rightarrow R(A)^\perp=\{0\}$ ……②

3° $\|A^{-1}\|\le\frac{1}{\delta}$：$\delta\|x\|^2 \overset{\text{Cauchy}}{\le} \|x\|\cdot\|Ax\|$

$\Rightarrow \delta\|A^{-1}y\|\le\|y\|$

$\Rightarrow \|A^{-1}\|\le\frac{1}{\delta}$ #

Thm（一致有界/共鸣）. X-Banach，Y-B^*. $W\subset\mathcal{L}(X,Y)$. 若 $\forall x\in X$，$\sup\limits_{A\in W}\|Ax\|<\infty$，则

$\exists M>0$, s.t. $\|A\|\le M$，$\forall A\in W$.

Rmk.（逆否）：若 $\sup\limits_{A\in W}\|A\|=\infty$，则 $\exists x_0\in X$, s.t. $\sup\limits_{A\in W}\|Ax_0\|=\infty$.

Thm.（Banach-Steinhaus）X-Banach，Y-B^*，$\{A_n\}\subset\mathcal{L}(X,Y)$，$A\in\mathcal{L}(X,Y)$.

$\forall x\in X$，有 $A_n x\to Ax \iff$ (1) $\{A_n\}$ 一致有界

(2) $\exists X_0\subset X$ 稠密，在 X_0 上 $A_n x\to Ax$.

5. Lax-Milgram 定理.

Thm.（Lax-Milgram）X：Hilbert，$a(\cdot,\cdot)$：X 上共轭双线性型. 若

(1) $\exists M>0$，$|a(x,y)|\le M\|x\|\cdot\|y\|$

(2) $\exists\delta>0$，$|a(x,x)|\ge\delta\|x\|^2$

则 $\exists A\in\mathcal{L}(X)$, s.t. $a(x,y)=(x,Ay)$ 且 $A^{-1}\in\mathcal{L}(X)$，$\|A^{-1}\|\le\frac{1}{\delta}$.

启发：线性 V . $\dim V = n < +\infty$.

则 $V^* = \{f \mid f$ 是 V 上线性泛函$\}$ 为线性空间.

$\because$ 取基 $\{e_i\}_{i=1}^n$ 定义 $f^i(e_j) = \delta_{ij} \in V^*$

$\forall f \in V^*$, $x = \sum x^i e_i \in V$, $f(x) = \sum x^i f(e_i)$

$= \sum f^i(x) f(e_i)$

$= (\sum f(e_i) f^i)(x)$

$\therefore f = \sum f(e_i) f^i$ #.

Pf of 实 H-B：

Step1 延拓 f_0 到高一维空间.

$\forall x_0 \in X \setminus X_0$, $X_1 \triangleq X_0 \oplus \mathrm{span}\{x_0\} = \{x + \lambda x_0 \mid x \in X_0, \lambda \in \mathbb{R}\}$

$\because \forall y, z \in X_0$, $f_0(y) - f_0(z) = f_0(y-z) \le p(y-z) \le p(y-x_0) + p(x_0 - z)$

$\Leftrightarrow f_0(y) - p(y-x_0) \le f_0(z) + p(x_0 - z)$

$\Rightarrow \sup\limits_{y \in X_0} \{f_0(y) - p(y-x_0)\} \le \inf\limits_{z \in X_0} \{f_0(z) + p(x_0 - z)\}$

$\therefore$ 取 $C \in [\sup\limits_{y \in X_0} \{f_0(y) - p(y-x_0)\}, \inf\limits_{z \in X_0} \{f_0(z) + p(x_0-z)\}]$,

令 $f_1 : X_1 \to \mathbb{R}$ ，则 $f_1 \in X_1^*$ 且 (1) $f_1|_{X_0} = f_0$

$x + \lambda x_0 \mapsto f_0(x) + \lambda C$ (2) $f_1(y) \le p(y)$, $y \in X_1$ (下证之!)

① $\lambda > 0$, 要证 $f_1(z + \lambda x_0) \le p(z + \lambda x_0)$.

$\because \lambda C \le \lambda (f_0(x) + p(x_0 - x))$

$\Rightarrow -\lambda f_0(x) + \lambda C \le p(-\lambda x + \lambda x_0)$

$\Rightarrow f_0(-\lambda x) + \lambda C \le p(-\lambda x + \lambda x_0)$

取 $-\lambda x = z$ 即得①式.

② $\lambda < 0$, 要证 $f_1(z + \lambda x_0) \le p(z + \lambda x_0)$

$\because \lambda (f_0(y) - p(y - x_0)) \ge \lambda C$

$\Rightarrow (-\lambda) p(y - x_0) \ge \lambda C - f_0(\lambda y)$

$\Rightarrow p(\lambda x_0 - \lambda y) \ge \lambda C + f_0(-\lambda y)$

取 $-\lambda y = z$ 即得②式.

Step2 利用 Zorn 引理，延拓到 X 上.

记 $\mathcal{F} \triangleq \{(\tilde{X}, \tilde{f}) \mid X_0 \subset \tilde{X} \subset X$ 子空间, $\tilde{f} \in \tilde{X}^*$, $\tilde{f}|_{X_0} = f_0$, $\tilde{f} \le p\}$.

引入偏序 $(X_1, f_1) \le (X_2, f_2)$, if $X_1 \subset X_2$ 且 $f_2|_{X_1} = f_1$.

设全序集 $M = \{(X_\lambda, f_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda\}$, 则 $X_M \triangleq \bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \subset X$. $f_M : X_M \to \mathbb{R}$, $\underset{\in X_\lambda}{x} \mapsto f_\lambda(x)$, 有 $f_M \le p$, $(X_\lambda, f_\lambda) \le (X_M, f_M)$

$\therefore M$ 有上界 (X_M, f_M) . 由 Zorn, $\mathcal{F}$ 有极大元 (X_Δ, f_Δ)

若 $X_\Delta \ne X$, 则取 $x_0 \in X \setminus X_\Delta$, 由 Step1 构造更大元，矛盾！ #.

§4 Hahn-Banach 定理.（研究无穷维空间上线性泛函有多少）

$\boxed{f_0 \le p, X}$

1.线性空间泛函的延拓.

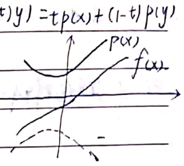
Thm (实 Hahn-Banach.) X : 实线性空间, $X_0 \subset X$ 子空间, p 是 X 上次线性泛函, 是 X_0 上线性泛函

则 $\exists X$ 上线性泛函 f 满足 (1) $f|_{X_0} = f_0$; (2) $\underset{(控制)}{f(x) \le p(x)}$.

Rmk ① 次线性泛函 p 定义: $p(x+y) \le p(x) + p(y)$; $p(\lambda x) = \lambda p(x)$, $\forall \lambda \ge 0$.

推论: $p(x)$ 是凸函数 : $\because p(tx + (1-t)y) \le p(tx) + p((1-t)y) = t p(x) + (1-t) p(y)$

② $f(x) \le p(x)$, $\forall x \in X \Leftrightarrow -p(-x) \le f(x) \le p(x)$.



Thm (复 Hahn-Banach) X : 复线性空间, $X_0 \subset X$ 子空间, p 是 X 上半模,

$f_0 \in X_0^*$ 且 $|f_0| \le p$, 则 $\exists f \in X^*$, s.t.

(1) $f|_{X_0} = f_0$; (2) $|f| \le p$.

Rmk. ① 半模 p 定义: $p(x) \ge 0$, $p(x+y) \le p(x) + p(y)$, $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$, $\alpha \in \mathbb{K}$.

Pf: X 看成实线性空间, $X_0 \subset X$ 实子空间

令 $g_0(x) = \mathrm{Re} f_0(x)$, 则 $g_0(x) \le |f_0(x)| \le p(x)$. , $g_0 \in X_0^*$ (实)

由 Hahn-Banach (实), $\exists g \in X^*$ (实), s.t. $g|_{X_0} = g_0$. $g \le p$.

令 $f(x) \triangleq g(x) - i g(ix)$, 则 f 复线性. ($\because f(ix) = g(ix) - i g(-x) = i[g(x) - i g(ix)] = i f(x)$)

(1) $\forall x \in X_0$, $f(x) = g(x) - i g(ix)$ (2) $\forall x \in X$, $f(x) = |f(x)| \cdot e^{i\theta_x}$

$= \mathrm{Re} f_0(x) - i \mathrm{Re} f_0(ix)$ $|f(x)| = e^{-i\theta_x} f(x)$

$= \mathrm{Re} f_0(x) + i \mathrm{Re}(i f_0(x))$ $= f(e^{-i\theta_x} x)$

$= \mathrm{Re} f_0(x) + i \mathrm{Im}(f_0(x)) = f_0(x)$. $= g(e^{-i\theta_x} x) \le p(e^{-i\theta_x} x) = p(x)$. #

Cor. X 复线性空间. 若 X 上存在均衡吸收凸集，则 X 上存在非零线性泛函.
($\Rightarrow$ minkowski 半模)

2.赋范空间泛函的延拓.

Thm (Hahn-Banach). $X : B^*$, $X_0 \subset X$ 子空间, $f_0 \in X_0^*$. 则 $\exists f \in X^* = \mathcal{L}(X, \mathbb{K})$, s.t. (1) $f|_{X_0} = f_0$; (2) $\|f\| = \|f_0\|$ (保范)

Pf: 令 $p(x) = \|f_0\|_0 \cdot \|x\|$, 则 p 为 X 上半模. 由复 Hahn-Banach , $\exists f \in X^*$, s.t. $f|_{X_0} = f_0$, 且

$|f(x)| \le p(x) = \|f_0\|_0 \cdot \|x\|$ $\Rightarrow \|f\| \le \|f_0\|_0 \overset{(X_0 \subset X)}{\le} \|f\|$. ($\|f_0\|_0$ 表示 $\sup\limits_{x \in X_0 \setminus \{0\}} \frac{|f_0(x)|}{\|x\|}$) . #

Proposition $(X, \|\cdot\|)$. $\forall x \ne y \in X$, $\exists f \in X^*$, $\|f\| = 1$, s.t. $f(x) \ne f(y)$

Pf: 记 $z = x - y \ne 0$, $X_0 = \mathrm{span}\{z\}$, $f_0(\lambda z) \triangleq \lambda \|z\| \in X_0^*$ $\Rightarrow \|f_0\|_0 = 1$.

由 Hahn-Banach , $\exists f \in X^*$, s.t. $f|_{X_0} = f_0$ 且 $\|f\| = \|f_0\|_0 = 1$. 此时 $f(x) - f(y) = f(z) = \|z\| \ne 0$.

Rmk. 1° $X : B^*$ 上有足够多的 $f \in X^*$ 来区分 X 上的点

2° $X : B^*$. $\forall x \in X \setminus \{0\}$, $\exists f \in X^*$, s.t. $f(x) = \|x\|$, $\|f\| = 1$.

Pf: 令 $X_0 = M \oplus \mathrm{span}\{x_0\} = \{x+\lambda x_0 \mid x\in M, \lambda\in \mathbb{K}\}$

$f_0: X_0 \to \mathbb{K}$ 　则 f_0 线性，满足 (1)(2)，$\|f_0\|_0 = 1$.

$x+\lambda x_0 \mapsto \lambda d$

由 Hahn-Banach，$\exists f\in X^*$, s.t. $f|_M = f_0|_M = 0$, $f(x_0) = f_0(x_0) = d$, $\|f\| = \|f_0\|_0 = 1$.

($|f_0(x+\lambda x_0)| = |\lambda d| \le |\lambda|\cdot\|\frac{x}{\lambda}+x_0\| = \|x+\lambda x_0\| \Rightarrow \|f_0\|_0 \le 1$

$d = d(x_0, M) > 0 \Rightarrow \exists \{x_n\}\subset M$, s.t. $d(x_0, x_n) \le d+\frac{1}{n} \Rightarrow d \le \|f_0\|_0 d(x_0,M) \Rightarrow \|f_0\|_0 \ge 1$.)

Pf of 超平面解释：($\Rightarrow$) $L = x_0 + M$，$M\subset X$ 为极大子空间，即 $X = M\oplus\mathrm{span}\{y\}$，$y\in X\setminus M$.

1° $x_0 \in M$.

作 $f: M\oplus \mathrm{span}\{y\} \to \mathbb{K}$

$x+\lambda y \mapsto \lambda$

则 $L = M = H_f^0$

2° $x_0 \notin M$

$X = M\oplus\mathrm{span}\{x_0\}$

作 $f: x+\lambda x_0 \mapsto \lambda$，则 $L = H_f^1 = x_0 + M$.

($\Leftarrow$): $H_f^0 = \{x\in X \mid f(x) = 0\} \subset X$ 为子空间.

$\forall x_0 \in X\setminus H_f^0$，$f(x_0)\ne 0$，则 $\forall x\in X$，

$f(x) - f\left(\frac{f(x)}{f(x_0)}x_0\right) = 0 \Rightarrow x - \frac{f(x)}{f(x_0)}x_0 \triangleq y \in H_f^0$

$\therefore X = H_f^0 \oplus \mathrm{span}\{x_0\}$.

$\therefore H_f^0$ 为极大子空间，

而 $H_f^r = \frac{r}{f(x_0)}x_0 + H_f^0$，故 $L = H_f^r$ 是超平面. #.

Pf of x_0 与 E 分离：设 $p(x)$ 是 E 的 Minkowski 泛函，则 p 连续，且 $p(x)\le 1$，$\forall x\in E$.

下证 $p(x_0)\ge 1$. ($p(x)<1 \Rightarrow x\in E^\circ$)

若 $p(x)<1$，$x = \frac{x}{p(x)+(1-p(x))}\in E$

由 $p(x)$ 连续，$\exists\delta$, s.t. $\forall y\in B_\delta(x)$ 有 $p(y)<1$. $\Rightarrow y\in E \Rightarrow x\in E^\circ$

$\therefore x_0\in X\setminus E \Rightarrow p(x_0)\ge 1$.

作 $f_0: X_0 = \mathrm{span}\{x_0\} \to \mathbb{R}$ 　则 $f_0\in X_0^*$，$f_0(x_0)\ge 1$，$f_0(\lambda x_0) = \lambda p(x_0) \le p(\lambda x_0)$

$\lambda x_0 \mapsto \lambda p(x_0)$

由 Hahn-Banach，$\exists f\in X^*$, s.t. $f(x_0) = f_0(x_0)\ge 1$，且 $f(x)\le p(x)$.

$\therefore f(x_0)\ge 1$ 且 $f(x)\le 1$，$\forall x\in E$. $\therefore H_f$ 分离 x_0 与 E. #

Thm. $(X, \|\cdot\|)$，$M\subset X$ 子空间，$x_0\in X$，$d = d(x_0, M) > 0$，则 $\exists f\in X^*$, s.t.

(1) $f|_M = 0$，(2) $f(x_0) = d$，(3) $\|f\| = 1$

Cor. $(X, \|\cdot\|)$，$M\subset X$ 子集，$x_0 \in \overline{\mathrm{span}M} \Leftrightarrow \forall f\in X^*$，若 $f|_{\overline{\mathrm{span}M}} = 0$，则 $f(x_0) = 0$.

3. 凸集分离. 什么是分离？分割它的直线/平面是什么？

Def. (极大性) 线性空间 X，$X_0 \subsetneq X$ 子空间. 若 $\exists x_0\in X$, s.t. $X = X_0\oplus\mathrm{span}\{x_0\}$，

则称 X_0 为 X 的一个极大子空间

称 $L\subset X$ 是一个超平面，若 $\exists$ 极大子空间 $X_0\subset X$，$x_0\in X$, s.t. $L = x_0 + X_0$.

(超平面解释) Thm. L 是超平面 $\Leftrightarrow \exists 0\ne f\in X^*$，$r\in\mathbb{R}$, s.t. $L = \{x\in X \mid f(x) = r\} \triangleq H_f^r$

Def. (分离) 实线性空间 X. $A, B\subset X$ 子集，$f\in X^*$. 若 $\exists r\in\mathbb{R}$, s.t. $f(x)\begin{cases}\ge r, & x\in A\\ \le r, & x\in B\end{cases}$ 或反号

则称超平面 H_f^r 分离 A、B (f 分离 A, B).

Thm. (点与凸集分离) $(X, \|\cdot\|)$. $E\subset X$ 凸真子集，$0\in E^\circ$，$x_0\in X\setminus E$. 则 $\exists 0\ne f\in X^*$, s.t.

$f(x)\le f(x_0)$，$\forall x\in E$ (即 $\exists H_f^r$ 分离 x_0 与 E.)

Rmk. 1. 由平移，可推广至任意有内点凸集与 x_0.

2. 由 p 连续，f 线性 $\Rightarrow f$ 连续 $\Rightarrow H_f^r$ 闭 ($\because -p(-x)\le f(x) \Rightarrow |f(x)| \le \max\{p(x), p(-x)\}$)

Thm. (凸集分离) $(X, \|\cdot\|)$，$E_1, E_2 \overset{凸}{\subset} X$，$E_1^\circ \ne \phi$，$E_1\cap E_2 = \phi$，则 $\exists H_f^r$ 分离 E_1、E_2.

Pf: $E \triangleq E_1 - E_2$ 凸. 有内点，$0\notin E$.

由点与凸集分离，$\exists f\in X^*$, s.t. $f(E) \le f(0) = 0$

$\therefore \forall x\in E_1, y\in E_2$，$f(x-y)\le 0 \Leftrightarrow f(x)\le f(y)$，$\forall x\in E_1, y\in E_2$

取 $r = \left[\sup_{x\in E_1} f(x), \inf_{y\in E_2} f(y)\right]$，则 H_f^r 分离 E_1 与 E_2. #

Rmk. 由 f 连续，"$E_1\cap E_2 = \phi$" 可改为 "$E_1^\circ \cap E_2 = \phi$"

Cor. (Ascoli) $(X, \|\cdot\|)$，$E\subset X$ 闭凸. $\forall x_0\in X\setminus E$，$\exists 0\ne f\in X^*$，$r\in\mathbb{R}$, s.t. $f(E) < r < f(x_0)$

Pf: E 闭 $\Rightarrow X\setminus E$ 开 $\Rightarrow \exists B_\delta(x_0)\subset X\setminus E$

由凸集分离，$\exists 0\ne f\in X^*$, s.t. $\sup_{y\in E} f(y) \le \inf_{x\in B_\delta(x_0)} f(x)$

下证 $\inf_{x\in B_\delta(x_0)} f(x) < f(x_0)$.

由 $f\ne 0$，$\exists y_0\in B_\delta(x_0)$, s.t. $f(y_0)\ne f(x_0)$. 令 $x_t = x_0 + t\cdot\frac{y_0 - x_0}{\|y_0 - x_0\|}$，$t\in(-\delta, \delta)$

则 $f(x_t) = f(x_0) + t f\left(\frac{y_0-x_0}{\|y_0-x_0\|}\right)$ 总有小于 $f(x_0)$ 的. #.

Cor. (Mazur) $(X, \|\cdot\|)$，$E\subset X$ 闭凸，$E^\circ\ne\phi$，$F\subset X$ 线性流形，$E^\circ\cap F = \phi$，则

$\exists f\in X^*$，$r\in\mathbb{R}$, s.t. $f(E)\le r$，$F\subset H_f^r$

Pf: 由凸集分离，$\exists 0\ne f\in X^*$, s.t. $f(E)\le r_0 \le f(F)$

设 $F = x_0 + X_0$，$X_0\subset X$ 子空间，则 $\forall x\in X_0$，$f(x)\ge r_0 - f(x_0)$，$f(-x)\ge r_0 - f(x_0)$ $\Rightarrow r_0 - f(x_0) \le f(x) \le -(r_0 - f(x_0))$ $\Rightarrow f(x)\equiv 0$.

取 $r = f(x_0) \ge r_0$，则 $f(E)\le r$，$F\subset H_f^r$ #

E.g. $(X,\|\cdot\|)$ $B_r(0)$在$\forall x_0\in X, \|x_0\|=r$处有承托超平面.

Pf: 由Hahn-Banach, $\exists f\in X^*$, s.t. $f(x_0)=\|x_0\|$, $\|f\|=1$.

$\forall x\in B_r(0)$, $f(x)\le\|f\|\cdot\|x\|\le r=f(x_0)$

$\therefore H_f^r$是$B_r(0)$的承托超平面.

Pf of 闭凸的承托: 由Masur, 取$F=\{x_0\}$线性流形, 则$\exists f\in X^*$, s.t.

$f(E)\le f(x_0)=r$, $\{x_0\}=F\subset H_f^r$, 则H_f^r是E在x的承(托超平面.

Def (承托超平面). X线性空间, $f\in X^*$, 超平面$L=H_f^r\subset X$. $E\overset{凸}{\subset}X$, $x_0\in E\cap L$.

称L为E在x_0处的承托超平面, 若$\forall x\in E$, $f(x)\le \underset{\|}{f(x_0)}$或$f(x)\ge f(x_0)$.

Thm (闭凸的承托) $E\subset X$闭凸, $E^\circ\ne\phi$, 则$\forall x\in\partial E$, E在x处有承托超平面.

Pf of $X \subset X^{**}$: 作 $T: X \to X^{**}$

$x \mapsto (Tx)(f) \triangleq f(x)$

1° T线性: $T(\alpha x+\beta y)(f)=f(\alpha x+\beta y)=\alpha f(x)+\beta f(y)=\alpha(Tx)(f)+\beta(Ty)(f)$

$\therefore T(\alpha x+\beta y)=\alpha Tx+\beta Ty$.

2° 保模长: $\|x\|=\|Tx\|$.

$(Tx)(f)=|f(x)| \le \|f\|\cdot\|x\|$

$\Rightarrow \|Tx\| \le \|x\|$

由Hahn-Banach, $\exists f \in X^*$, s.t. $f(x)=\|x\|$, $\|f\|=1$

$\|x\| = f(x)=(Tx)(f) \le \|Tx\|\cdot\|f\| = \|Tx\|$

$\Rightarrow \|x\| \le \|Tx\|$. #

E.g. (1) $(H,(\cdot,\cdot))$ Hilbert, 由Riesz表示定理, $H^{**}=H$.

($\forall f \in H^*$, $\exists 1\, y \in H$, s.t. $\forall x \in H$, $f(x)=(y,x)$. 且 $\|f\|=\|y\|$.)

(2) $(L^p[0,1])^* = L^q[0,1]$, $1 \le p < \infty$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

证: Step 1 $\forall g \in L^q$, $\exists F_g \in (L^p)^*$:

定义 $F_g(f) \triangleq \int_0^1 fg\,d\mu$ 则 F_g 线性且

$|F_g(f)| \overset{\text{Hölder}}{\le} \|f\|_p \|g\|_q \Rightarrow \|F_g\| \le \|g\|_q \Rightarrow F_g \in (L^p)^*$.

Step 2. $\forall F \in (L^p)^*$, $\exists g \in L^q$, s.t. $F=F_g$:

$\text{span}\{\chi_{[0,t]}, t\in[0,1]\}$ 构成所有简单函数, 在 $L^p[0,1]$ 中稠密.

$\forall F \in (L^p)^*$, $G(t) \triangleq F(\chi_{[0,t]})$, 下证 $g(t) \triangleq G'(t)$ 满足要求.

① $G(t)$ 绝对连续

$\forall \overset{\text{互不相交}}{(a_i,b_i)_{i=1}^n}$, $\sum|G(b_i)-G(a_i)|$

$=\sum \varepsilon_i (F(\chi_{[0,b_i]})-F(\chi_{[0,a_i]}))$, $\varepsilon_i = 1$ 或 -1

$=F(\sum \varepsilon_i(\chi_{[0,b_i]}-\chi_{[0,a_i]}))$

$\le \|F\|\cdot\|\sum \varepsilon_i(\chi_{[0,b_i]}-\chi_{[0,a_i]})\|_p$

$=\|F\|\cdot(\sum(b_i-a_i))^{\frac{1}{p}}$

$\therefore G(t) \in AC \Rightarrow G(t) \in BV$, $g(t)$ a.e.存在, 良定.

② $F(f)=\int_0^1 fg\,d\mu$.

若 f 简单 $=\sum_{i=1}^m c_i \chi_{[t_{i-1},t_i]}$

$F(f) = \sum c_i F(\chi_{t_i}-\chi_{t_{i-1}}) = \sum c_i (G(t_i)-G(t_{i-1})) = \sum c_i \int_{t_{i-1}}^{t_i} g\,d\mu = \int_0^1 fg\,d\mu$

若 f 有界可测, 则∃简单 f_n, $M>0$, s.t. $|f_n| \le M$, $|f| \le M$, $\lim_{n\to\infty} f_n \overset{a.e.}{=} f$.

由MCT, $\|f_n-f\|_p \to 0$, $F(f)=\lim F(f_n)=\int_0^1 \lim f_n g = \int_0^1 fg\,d\mu$.

作 $f_{\Delta,\varepsilon} = \sum f(t_i)\chi_{[t_{i-1},t_i]} + \chi_0 f(0)$

$\therefore |F(f)-F_g(f)| \le |F(f)-F_{\Delta,\varepsilon}(f)|+|F_{\Delta,\varepsilon}(f)-F_g(f)| \le |F(f-f_{\Delta,\varepsilon})|+\frac{\varepsilon}{2} \le \|F\|\cdot\|f-f_{\Delta,\varepsilon}\|+\frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. #

§5 共轭空间、弱收敛.

1.共轭空间.

Def. (共轭空间) $(X,\|\cdot\|)$, 称 $X^*=\mathcal{L}(X,\mathbb{K})$ 为 X 的共轭空间 $\overset{\text{dual space}}{(\text{对偶空间})}$

称 $X^{**} \triangleq (X^*)^*$ 为 X 的第二共轭空间.

Rmk. X^* 在 $\|f\|=\sup_{\|x\|=1}|f(x)|$ 范数下是Banach空间.

Thm. X 与 X^{**} 的子空间等距同构.

Rmk. 1° 在 $T: X\to X^{**}$ 下, 不区分 x 与 Tx

2° 称 X 是自反的, 若 $TX=X^{**}$, i.e. $X=X^{**}$.

(续左下) ③ $g \in L^q$ (F_g 良定 for $f \in L^p$.)

记 $h_n(t) \triangleq \begin{cases} |g|^{q-1}\text{sgn}(g), & |g|^q \le n \\ 0, & |g|^q > n \end{cases}$ $E_n \triangleq \{t: |g|^q(t) \le n\}$.

则 $\int_{E_n}|g|^q = F(h_n) \le \|F\|\cdot\|h_n\|_p = \|F\|\cdot(\int_{E_n}(g)^{(q-1)p})^{\frac{1}{p}}$

令 $n\to\infty$ 得 $\int_0^1 |g|^q \le \|F\|\cdot\|g\|_q^{q-1} \Rightarrow \|g\|_q \le \|F\|$

④ $F(f)=\int_0^1 fg\,d\mu$, 对 $\forall f \in L^p$ 成立.

∃有界可测 f_n, s.t. $\|f_n-f\|_p \to 0$.

$F(f) \overset{F\text{连续}}{=} \lim_{n\to\infty} F(f_n) \overset{(2)}{=} \lim_{n\to\infty} F_g(f_n) = F_g(f)$, $\forall f \in L^p \Rightarrow F=F_g$. #

Rmk. 1° ③只证了 $p>1$ 情形. $p=1$, $q=\infty$ 时类似可证

2° 特别, 当 $1<p<+\infty$, L^p 自反, $(L^p)^{**}=L^p$.

Def. (变差) g 是 $[0,1]$ 上函数, $\Delta: 0=t_0<t_1<\cdots<t_n=1$ 是 $[0,1]$ 的一个划分. 称 $V_\Delta=\sum_{i=1}^n|g(t_i)-g(t_{i-1})|$ 为g变差

称 $V(g) \triangleq \sup_\Delta\{V_\Delta: \Delta\text{是}[0,1]\text{划分}\}$ 为 g 的全变差.

称 $g \in BV[0,1]$, 若 $V(g)<+\infty$. ($BV[0,1]=\{g \mid V(g)<+\infty\}$)

在BV上定义范数: $\|g\| \triangleq g(0)+V(g)$

E.g. $(C[0,1])^* = BV_0([0,1]) \triangleq \{g \in BV \mid g(0)=0, g\text{右连续 (i.e., } g(t)=g(t+0), \forall t)\}$

证: step 1 $\forall g \in BV_0([0,1])$, $\exists F_g \in (C[0,1])^*$:

$\forall f \in C[0,1]$, $F_g(f) \triangleq \int_0^1 f\,dg$, 则 $|F_g(f)| \le \|f\|\cdot\int_0^1 dg \le \|f\|\cdot V(g) \Rightarrow F_g \in (C[0,1])^*$

Step 2 由 $C[0,1] \overset{\text{闭}}{\subset} L^\infty[0,1]$ & Hahn-Banach, $\forall F \in (C[0,1])^*$, $\exists \hat{F} \in (L^\infty[0,1])^*$, s.t. $\|F\|=\|\hat{F}\|$

定义 $h(t)=\hat{F}(\chi_{[0,t]})$

① $h(t) \in BV([0,1])$: $\forall$划分Δ, $\sum_{i=1}^n|h(t_i)-h(t_{i-1})| = \sum \varepsilon_i(h(t_i)-h(t_{i-1}))$, $\varepsilon_i=1$ 或 -1

$\le \|\hat{F}\|\cdot\|\sum \varepsilon_i(\chi_{[t_{i-1},t_i]})\|_\infty \le \|\hat{F}\| = \|F\|$

② $\exists 1\, g \in BV_0([0,1])$, s.t. $g(0)=h(0)=0$, $g(1)=h(1)$, 在h连续点处 $g=h$, $V(g) \le V(h) \le \|F\|$ (证略)

③ Check g 满足: $F=F_g$, $\forall f \in C([0,1])$: $\forall \varepsilon>0$, 由 f 一致连续, ∃划分Δ, s.t. $|f(t)-f(t')| \le \frac{\varepsilon}{2\|F\|}$, $\forall t,t' \in [t_{i-1},t_i]$

$|\int_0^1 f\,dg - \sum_{i=1}^n f(t_i)(g(t_i)-g(t_{i-1}))| = |\sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i}(f(t)-f(t_i))\,dg| \le \frac{\varepsilon}{2\|F\|}V(g) \le \frac{\varepsilon}{2\|F\|}\cdot\|F\| = \frac{\varepsilon}{2}$ (接上)

启发：$\dim U=n$，$\dim V=m$ 线性space

$$\begin{tikzcd} U^* & V^* \arrow[l, "\mathscr{A}^*"'] \\ U \arrow[u, leftrightarrow] \arrow[r, "\mathscr{A}"] & V \arrow[u, leftrightarrow] \end{tikzcd}$$

$(\mathscr{A}^*V^*)(u) \triangleq V^*(\mathscr{A}(u))$

设 $U=\{e_i\}_{i=1,\cdots,n}$　$U^*=\{e_i^*\}$　$e_j^*(e_i)=\delta_{ij}$

$V=\{\varepsilon_k\}_{k=1,\cdots,m}$　$V^*=\{\varepsilon_k^*\}$　$\varepsilon_k^*(\varepsilon_l)=\delta_{kl}$

$\mathscr{A}(e_i)=\sum a_{ik}\varepsilon_k \Rightarrow \mathscr{A} \leftrightarrow A=(a_{ik})_{n\times m}$

设 $\mathscr{A}^*(\varepsilon_k^*)=\sum_{j=1}^{n} b_{kj} e_j^*$，则 $\mathscr{A}^*(\varepsilon_k^*)(e_i)=\varepsilon_k^*(\mathscr{A}(e_i))=\sum_{l=1}^{m} a_{il}\delta_{kl}=a_{ik}$

$\therefore b_{ki}=a_{ik} \Rightarrow \mathscr{A}^* \leftrightarrow A^T$

Pf of $T^*\in\mathcal{L}(Y^*,X^*)$：1° T^*线性：$\forall f_1,f_2\in Y^*$，$\alpha,\beta\in\mathbb{K}$，$x\in X$，

$$[T^*(\alpha f_1+\beta f_2)](x)=(\alpha f_1+\beta f_2)(Tx)=\alpha(T^*f_1)(x)+\beta(T^*f_2)(x)$$
$$=(\alpha T^*f_1+\beta T^*f_2)(x),\ \forall x\in X.$$

2° T^*有界：$\|(T^*f)(x)\|=|f(T(x))|\le\|f\|\cdot\|Tx\|\le\|f\|\cdot\|T\|\cdot\|x\|$

$$\Rightarrow \|T^*f\|\le\|T\|\cdot\|f\|$$
$$\Rightarrow \|T^*\|\le\|T\|.$$ #

Pf of $*$等距同构：1° $*$线性：$\forall T_1,T_2\in\mathcal{L}(X,Y)$，$\alpha,\beta\in\mathbb{K}$，$x\in X$，$f\in Y^*$

$$[(\alpha T_1+\beta T_2)^*f](x)=f(\alpha T_1x+\beta T_2x)$$
$$=\alpha f(T_1x)+\beta f(T_2x)$$
$$=\alpha(T_1^*f)(x)+\beta(T_2^*f)(x)$$
$$=[(\alpha T_1^*+\beta T_2^*)f](x)$$
$$\Rightarrow(\alpha T_1+\beta T_2)^*=\alpha T_1^*+\beta T_2^*$$

2° 等距，只须 $\|T\|\le\|T\|^*$

不妨 $T\ne0$，$\exists x\in X$，$0\ne Tx\in Y$，

由Hahn-Banach，$\exists f\in Y^*$，s.t. $\|f\|=1$，$f(Tx)=\|Tx\|$

$$\|Tx\|=f(Tx)=(T^*f)(x)\le\|T^*f\|\,\|x\|\le\|T^*\|\cdot\|f\|\cdot\|x\|$$
$$\Rightarrow \|Tx\|\le\|T^*\|\cdot\|x\|,\ \forall x\in X$$
$$\Rightarrow \|T\|\le\|T^*\|.$$ #

2.共轭算子

Def. $X,Y:B^*$，$T\in\mathcal{L}(X,Y)$．称 $T^*:Y^*\to X^*$ 为算子T的共轭算子.
$f\mapsto(T^*f)(x)=f(Tx)$

$$\begin{tikzcd} X^* & Y^* \arrow[l, "T^*"'] \\ X \arrow[r, "T"] & Y \end{tikzcd}$$

Prop. $T^*\in\mathcal{L}(Y^*,X^*)$.

Thm 映射 $*:\mathcal{L}(X,Y)\to\mathcal{L}(Y^*,X^*)$ 是等距同构.
$T\mapsto T^*$

e.g. 测度空间 $(\Omega,\mathcal{B},\mu)$．设 $K(x,y)$ 是 $\Omega\times\Omega$ 上实函数，$M\triangleq\iint_{\Omega\times\Omega}|K(x,y)|^2d\mu_x d\mu_y<\infty$.

定义 $T:L^2\to L^2(\Omega,\mu)$：

$u\mapsto Tu(x)=\int_\Omega K(x,y)u(y)dy$，求 T^*.

解：1° $T\in\mathcal{L}(L^2(\Omega,\mu))$

$$\|Tu\|_2^2=\int_\Omega|Tx|^2d\mu_x$$
$$=\int_\Omega\left[\int_\Omega K(x,y)u(y)d\mu_y\right]^2d\mu_x$$
$$\overset{\text{Hölder}}{\le}\int_\Omega\left[\int_\Omega|K(x,y)|^2d\mu_y\int_\Omega|u(y)|^2d\mu_y\right]d\mu_x$$
$$\le\|u\|_2^2\iint_\Omega|K(x,y)|^2d\mu_x d\mu_y=\|u\|_2^2M$$
$$\Rightarrow\|T\|\le\sqrt{M}\Rightarrow T\in\mathcal{L}(L^2(\Omega,\mu))$$

2° 求 T^*：

$\forall v\in L^2=(L^2)^*$，$\forall u\in L^2$，$(T^*v)(u)=v(Tu)=\int_\Omega(Tu)(x)v(x)d\mu_x$
$$=\int_\Omega\left(\int_\Omega K(x,y)u(y)d\mu_y\right)v(x)d\mu_x$$
$$\overset{\text{Fubini}}{=}\int_\Omega\left(\int_\Omega K(x,y)v(x)d\mu_x\right)u(y)d\mu_y$$
$$\Rightarrow T^*v=\int_\Omega K(x,y)v(x)d\mu_x$$ #

e.g. $K(x)\in L^1(\mathbb{R})$，$\forall u\in L^p(\mathbb{R})$，$1\le p\le\infty$.

$(Tu)(x)\triangleq(K*u)(x)\triangleq\int_{\mathbb{R}}K(x-y)u(y)dy$，求 T^*.

解：1° 证明 $Tu\in L^p(\mathbb{R})\Rightarrow T\in\mathcal{L}(L^p)$

考虑 $1<p<+\infty$ 情形．$\left|\int_{\mathbb{R}}K(x-y)u(y)dy\right|$
$$\le\int_{\mathbb{R}}|K(x-y)|^{\frac1q}|K(x-y)|^{\frac1p}|u(y)|dy$$
$$\overset{\text{Hölder}}{\le}\left(\int|K(x-y)|dy\right)^{\frac1q}\left(\int|K(x-y)||u(y)|^pdy\right)^{\frac1p}$$
$$=\|K\|_1^{\frac1q}\cdot\left(\int_{\mathbb{R}}|K(x-y)||u(y)|^pdy\right)^{\frac1p}$$

$\because\|Tu\|_p^p=\int_{\mathbb{R}}|Tu|^pdx\le\|K\|_1^{\frac pq}\cdot\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}}|K(x-y)|\cdot|u(y)|^pdy\right)dx\overset{\text{Fubini}}{=}\|K\|_1^{\frac pq}\cdot\|K\|_1\cdot\|u\|_p^p$

$\Rightarrow\|Tu\|_p\le\|K\|_1\cdot\|u\|_p$.　(Young：$\|K*u\|_p\le\|K\|_1\cdot\|u\|_p$.)　$\Rightarrow\|T\|\le\|K\|_1$，$T\in\mathcal{L}(L^p)$

2° 求 T^*：$(T^*v)(u)=v(Tu)=\int_{\mathbb{R}}v(x)(Tu)(x)dx=\int_{\mathbb{R}}v(x)\int_{\mathbb{R}}K(x-y)u(y)dy$
$$\overset{\text{Fubini}}{=}\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}}K(x-y)v(x)dx\right)u(y)dy,\ \forall v\in L^q,\ u\in L^p.$$
$$\Rightarrow T^*v=\int_{\mathbb{R}}K(x-y)v(x)dx$$ #

Pf of 弱极限唯一性：

若 $x_n \rightharpoonup x$, $x_n \rightharpoonup y$,

$\forall f \in X^*$, $f(x) = \lim f(x_n) = f(y)$.

$\Rightarrow f(x-y) = 0, \forall f \in X^*$

$\overset{\text{Hahn-Banach}}{\Rightarrow} x-y=0 \Rightarrow x=y$. #.

c.e.g. $x_n \rightharpoonup x \not\Rightarrow x_n \to x$.

解：$x_n = \sin(n\pi t)$, $x=0 \in L^2[0,1]$

$\forall f \in L^2[0,1]$, $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f(t)\sin(n\pi t)\,dt = 0$ (Riemann-Lebesgue).

但 $\|x_n\|_{L^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \not\to 0$. #

Pf of Mazur: 记 $E = \overline{co\{x_n\}} \subset X$ 闭凸. 若 $x \notin E$ (反证), 由Ascoli,

$\exists f \in X^*$, s.t. $f(E) < \alpha < f(x)$

与 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$ 矛盾. #.

c.e.g. $T_n \to T$ but $T_n \not\rightrightarrows T$: $\ell^2 = \{x=(x_1,\cdots) \mid \sum |x_i|^2 < \infty\}$.

$Tx \triangleq (x_2, x_3, \cdots)$ $T_n(x) \triangleq (T\circ\cdots\circ T)(x) = (x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots)$

$T_n \to 0$ but $\|T_n e_{n+1}\| = 1 \Rightarrow \|T_n\| \geq 1 \Rightarrow T_n \not\rightrightarrows 0$

$T_n \rightharpoonup T$ but $T_n \not\to T$: ℓ^2.

$Tx \triangleq (0, x_1, x_2, \cdots)$ $T_n \triangleq (T\circ\cdots\circ T)$

$\forall \underset{y}{\underset{\shortparallel}{f}} \in (\ell^2)^*$, $f(T_n x) = \sum y_k (T_n x)_k \overset{C-S}{\leq} \left(\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} |y_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \|x\| \to 0$

$\Rightarrow T_n \rightharpoonup 0$

but $\|T_n x\| = \|x\| \Rightarrow T_n \not\to 0$.

3. 弱收敛，*弱收敛.

Def (弱收敛) $X: B^*$, $\{x_n\} \subset X$, $x \in X$. 若 $\forall f \in X^*$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$, 则称 $\{x_n\}$ 弱收敛于 x,

记 $x_n \rightharpoonup x$.

Rmk. 1° 若 $x_n \to x$, 则 $x_n \rightharpoonup x$ $\left(|f(x_n) - f(x)| = |f(x_n - x)| \leq \|f\| \cdot \|x_n - x\| \to 0\right)$

2° 若 $\dim X = n < \infty$, 则强弱等价.

Pf: 取 X 的基 $\{e_i\}_{i=1}^n$, 得 X^* 的基 $\{f^i\}_{i=1}^n$, s.t. $f^i(e_j) = \delta_{ij}$.

$\forall x_k = \sum\limits_{i=1}^n \xi_k^i e_i$, $x = \sum\limits_{i=1}^n \xi^i e_i$

若 $x_k \rightharpoonup x$, 取 $f = f^l$, 则 $\lim\limits_{k\to\infty} f^l(x_k) = \lim\limits_{k\to\infty} \xi_k^l \Rightarrow \xi_k^l \to \xi^l \Rightarrow x_n \to x$. #.

$\shortparallel$

$f^l(x) = \xi^l$

Prop. 弱极限若存在必唯一

Thm (Mazur) $X: B^*$, $x_n \rightharpoonup x$, 则 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x' \in C_0\{x_n\}$, s.t. $\|x' - x\| < \varepsilon$.

Rmk. 弱收敛点列的凸组合在范数意义下可逼近弱极限.

Def (*弱) $X: B^*$, $\{f_n\} \subset X^*$, $f \in X^*$. 若 $\forall x \in X$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, 则称 $\{f_n\}$ *弱收敛于 f,

记 $f_n \xrightarrow{*w} f$.

Rmk. 1° f_n 弱收敛 $\Rightarrow$ *弱收敛. [$f_n \rightharpoonup f \Rightarrow \forall x^{**} \in X^{**}$, $x^{**}(f_n) \to x^{**}(f)$. 取 $x^{**} = x \in X$, $f_n(x) \to f(x)$

2° X 自反, 则 $\{f_n\}$ 弱收 $\Leftrightarrow$ *弱收.

Thm. (特殊Banach-Steinhaus) $X: B^*$, $x_n \rightharpoonup x \Leftrightarrow \begin{cases} (1)\ \|x_n\| \text{有界} \\ (2)\ \overline{M^*} = X^*,\ f(x_n) \to f(x), \forall f \in M^*. \end{cases}$ 取B-S中 $(X,Y) = (X^*, \mathbb{R})$

(Recall: Banach-Steinhaus: X-Banach, $Y: B^*$, $A_n, A \in \mathcal{L}(X,Y)$, 则 $A_n x \to Ax, \forall x \in X$ $\Leftrightarrow \begin{cases} \|A_n\| \text{有界} \\ A_n x \to Ax,\ \forall x \in M,\ \overline{M} = X. \end{cases}$)

Thm. X: Banach, $f_n \xrightarrow{*w} f \Leftrightarrow \begin{cases} (1)\ \|f_n\| \text{有界} \\ (2)\ f_n(x) \to f(x), \forall x \in M, \overline{M} = X. \end{cases}$ 取B-S中 $(X,Y) = (X, \mathbb{R})$

Def. (算子收敛) $X, Y: B^*$, $T_n, T \in \mathcal{L}(X,Y)$:

1° $T_n \rightrightarrows T$: 若 $\|T_n - T\| \to 0$, 称 T_n 一致收敛于 T

2° $T_n \to T$: 若 $\overset{\forall x \in X}{\|T_n x - Tx\|_Y} \to 0$, 称 T_n 强收敛于 T

3° $T_n \rightharpoonup T$: 若 $\forall x \in X, f \in Y^*$, $|f(T_n x) - f(Tx)| \to 0$, 称 T_n 弱收敛于 T.

Rmk: $\rightrightarrows \Rightarrow \to \Rightarrow \rightharpoonup$

4. 弱列紧性, *弱列紧性.

Recall: $\dim X = \infty$, 有界点列无列紧性.

Pf of X可分 $\Rightarrow X^*$有界列*弱列紧:

X可分 $\Rightarrow \exists \{x_m\} \subset X$ 稠密

$\{f_n(x_m)\}_{n=1,\dots} \in \mathbb{K}$ 有界. 由对角线法则, $\exists \{f_{n_k}\}$, s.t. $\forall x_m$, $\{f_{n_k}(x_m)\}$收敛.

$\forall x \in X$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x_{m_0} \in \{x_m\}$, s.t. $\|x_{m_0} - x\| < \varepsilon$.

$\forall p \in \mathbb{N}$. $|f_{n_k}(x) - f_{n_{k+p}}(x)| \le 2 \cdot \sup\|f_n\| \cdot \varepsilon + |f_{n_k}(x_{m_0}) - f_{n_{k+p}}(x_{m_0})|$

$\overset{\exists k \text{充分大}}{<} (2\sup\|f_n\| + 1)\varepsilon$. $\Rightarrow \{f_{n_k}(x)\}$收敛.

令 $f(x) = \lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x)$, 则线性, $\|f\| \le \sup\|f_{n_k}\| < \infty \Rightarrow f \in X^*$ 且 $f_n \xrightarrow{*w} f$. #

Pf of Banach:

1° $S = \{f \in X^* \mid \|f\| = 1\}$ 可分.

$\because X^*$可分 $\Rightarrow \exists \{f_n\} \subset X^*$稠密

$\forall f \in S$, $\exists \{f_{n_k}\}$ s.t. $\|f_{n_k} - f\| \to 0$ (但 f_{n_k}可能$\notin S$).

令 $g_k = \frac{f_{n_k}}{\|f_{n_k}\|}$, $\|g_k - f\| \le \|f_{n_k} - f\| + \left|\frac{1}{\|f_{n_k}\|} - 1\right| \cdot \|f_{n_k}\| < 2\varepsilon \to 0$.

即 $\{g_k\} \subset S$ 稠密.

2° 由 $\|g_n\| = 1$, $\exists x_n$, s.t. $|g_n(x_n)| \ge \frac{1}{2}$, $\|x_n\| = 1$. 则 $X_0 \triangleq \overline{\mathrm{span}\{x_n\}} \subseteq X$ 闭、可分

3° 下证 $X_0 = X$. 反证. 若 $\exists x \in X \setminus X_0$, 则 $\rho(x, X_0) > 0$

由H-B, $\exists f \in X^*$, s.t. $\|f\| = 1$, $f(x) = \rho(x, X_0) > 0$, $f|_{X_0} = 0$

$\|g_n - f\| \ge |g_n(x_n) - f(x_n)| = |g_n(x_n)| \ge \frac{1}{2}$ 与$\{g_n\}$稠密矛盾! $\therefore X_0 = X$, X可分 #.

Pf of Pettis: X_0 自反 $\Leftrightarrow \forall \xi_0 \in X^{**}$, $\exists x \in X$, s.t. $\xi_0(f) = f(x)$, $\forall f \in X^*$

作 $T: X^* \to X_0^*$ 　　则 $\|T\tilde{f}\| \le \|\tilde{f}\|$, 即 $T \in \mathcal{L}(X^*, X_0^*)$

$\tilde{f} \mapsto \tilde{f}|_{X_0} = T\tilde{f}$

$T^* \in \mathcal{L}(X_0^{**}, X^{**})$

记 $\xi \triangleq T^*(\xi_0) \in X^{**} = X$ $\Rightarrow \exists x \in X$, s.t. $\forall f \in X^*$, $\xi(f) = f(x)$.

1° CLAIM: 这个 $x \in X_0$.

反证: $x \in X \setminus X_0$, $\rho(x, X_0) > 0$. 由H-B, $\exists \tilde{f} \in X^*$, s.t. $\|\tilde{f}\| = 1$, $\tilde{f}|_{X_0} = 0 < \tilde{f}(x) = \rho(x, X_0)$

$0 = \xi_0(T\tilde{f}) = (T^*\xi_0)(\tilde{f}) = \xi(\tilde{f}) = \tilde{f}(x) > 0$. 矛盾.

2° $\forall f \in X_0^*$, $\xi_0(f) = f(x)$

由H-B, $\forall f \in X_0^*$, $\exists \tilde{f} \in X^*$, s.t. $T\tilde{f} = f$

$x \in X_0 \Rightarrow f(x) = \tilde{f}(x) = \xi(\tilde{f}) = T^*(\xi_0)(\tilde{f}) = \xi_0(T\tilde{f}) = \xi_0(f)$. #

Aim $\begin{cases} X\text{可分}, X^* \text{有界列}*\text{弱列紧} \\ X\text{自反}, X \text{有界列 弱列紧} \end{cases}$

Def. $X: B^*$. 弱列紧集 A中 $\forall$点列有弱收敛子列.

弱列紧 $A \subset X$中 $\forall$点列有-弱收敛子列.

Thm. $X: B^*$可分, $\{f_n\} \subset X^*$ 有界, 则$\{f_n\}$有*弱收敛子列.

Thm (Banach) $X: B^*$, 则 X^*可分 $\Rightarrow X$可分.

Thm (Pettis) X 自反, $X_0 \subset X$ 闭, 则X_0自反.

Thm (Eberlein-Smulian) X自反(B^*), 则 X中 $\forall$有界列有弱收敛子列.

pf: 设$\{x_n\} \subset X$ 有界.

令 $X_0 = \overline{\mathrm{span}\{x_n\}} \subset X$ 闭. 由Pettis, X_0自反.

$\therefore \exists \{g_n\} \subset X_0^{**}$, s.t. $g_n(f) = f(x_n)$, $\forall f \in X_0^*$, $\|g_n\| = \|x_n\|$.

又由 X_0可分, X_0^{**}可分. 由Banach, X_0^*可分.

取 $M_0^* = \{f_m\} \overset{\text{稠密}}{\subset} X_0^*$, $\forall m$, $|g_n(f_m)| \le \|g_n\| \cdot \|f_m\|$ 有界.

由对角线法则, $\exists \{g_{n_k}\}$, $g \in X_0^{**}$, s.t. $g_{n_k}(f_m) \to g(f_m)$, $\forall m$.

由$\|g_n\|$有界, $g_{n_k}(f) \to g(f)$, $\forall f \in X_0^*$

由自反性, $f(x_{n_k}) \to f(x)$, $\forall f \in X_0^* \supset X^*$

($\forall f \in X^*$, 考虑 $f|_{X_0} \in X_0^*$即可.) #

Rmk. X自反, X中单位闭球弱自列紧.

Pf: 只须证 $x_{n_k} \rightharpoonup x$, $\|x_{n_k}\| \le 1 \Rightarrow \|x\| \le 1$.

$\because$ 由 H-B, $\exists f \in X^*$, s.t. $\|f\| = 1$, $f(x) = \|x\|$.

$\therefore \|x\| = f(x) \leftarrow f(x_{n_k}) \le \|f\| \cdot \|x_{n_k}\| = 1$. #

Pf of $R_\lambda(A)$ 解析：

1° $\forall \lambda, \mu \in \rho(A)$，$R_\lambda(A) - R_\mu(A) = (\mu-\lambda) R_\lambda(A) R_\mu(A)$ （第一预解公式）

$\because R_\lambda(A) = R_\lambda(A) \cdot (\mu I - A) R_\mu(A)$

$= R_\lambda(A)(\lambda I - A + (\mu-\lambda) I) R_\mu(A)$

$= R_\mu(A) + (\mu-\lambda) R_\lambda(A) R_\mu(A)$.

2° $R_\lambda(A)$ 连续.

$\forall \lambda, \lambda_0 \in \rho(A)$，$R_\lambda(A) - R_{\lambda_0}(A) = (\lambda_0-\lambda) R_\lambda(A) R_{\lambda_0}(A) \leq 2\|R_{\lambda_0}(A)\|^2 \cdot |\lambda_0-\lambda|$

($\because (\lambda I - A) = (\lambda_0 I - A)(I - (\lambda_0-\lambda)(\lambda_0 I - A)^{-1})$

$\Rightarrow R_\lambda(A) = T^{-1} R_{\lambda_0}(A)$，$\|T^{-1}\| \leq \frac{1}{1-|\lambda_0-\lambda| \cdot \|R_{\lambda_0}(A)\|}$

$\Rightarrow \|R_\lambda(A)\| \leq \|T^{-1}\| \|R_{\lambda_0}(A)\| \leq 2\|R_{\lambda_0}(A)\|$ 当$|\lambda-\lambda_0|$充分小.)

$\therefore R_\lambda(A)$ 连续.

3°. $\lim\limits_{\lambda\to\lambda_0} \frac{R_\lambda(A) - R_{\lambda_0}(A)}{\lambda-\lambda_0} = \lim\limits_{\lambda\to\lambda_0} -R_\lambda(A) R_{\lambda_0}(A) \overset{\text{连续性}}{=} -R_{\lambda_0}(A)^2$ $\Rightarrow R_\lambda(A)$解析 #

Pf of $\sigma(A) \neq \phi$：反证. $\sigma(A) = \phi$，则 $\rho(A) = \mathbb{C}$，则 $R_\lambda(A)$ 在 $\mathbb{C}$ 上解析

$\because R_\lambda(A) = (\lambda I - A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}(I - \frac{A}{\lambda})^{-1} = \frac{1}{\lambda}\sum(\frac{A}{\lambda})^k = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{\lambda^{k+1}}$

$\|R_\lambda(A)\| \leq \frac{1}{|\lambda|} \cdot \frac{1}{1-\|\frac{A}{\lambda}\|} = \frac{1}{|\lambda| - \|A\|}$ $\Rightarrow R_\lambda(A)$ 有界，$R_\lambda(A) \in \mathcal{L}(X)$

$\forall f \in \mathcal{L}(X)^*$，令 $F(\lambda) \triangleq f(R_\lambda(A))$ 为 $\mathbb{C}$ 上有界解析函数.

由 Liouville 定理 $F(\lambda) \equiv const$.

由 f 任意性，$R_\lambda(A)$ 与 λ 无关.（否则由H-B，若有两相点，则∃f 将它们分开）

与第一预解公式矛盾！

#

Pf of Gelfand：1° $\lim \|A^n\|^{\frac{1}{n}}$ 存在 且 $= \inf\limits_n \{\|A^n\|^{\frac{1}{n}}\} \triangleq r$.

首先，$\underline{\lim} \|A^n\|^{\frac{1}{n}} \geq r$

$\forall \varepsilon > 0$，$\exists m \in \mathbb{N}$，s.t. $\|A^m\|^{\frac{1}{m}} < r + \varepsilon$.

$\forall n = p_n \cdot m + q_n$，$0 \leq q_n < m$，

$\|A^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \|A^{p_n \cdot m}\|^{\frac{1}{n}} \cdot \|A^{q_n}\|^{\frac{1}{n}}$

$\leq \|A^m\|^{\frac{p_n}{n}} \cdot \|A\|^{\frac{q_n}{n}}$

$\leq (r+\varepsilon)^{\frac{p_n \cdot m}{n}} \cdot \|A\|^{\frac{q_n}{n}}$

$\Rightarrow \overline{\lim} \|A^n\|^{\frac{1}{n}} \leq r + \varepsilon$ $\overset{\varepsilon\text{任意}}{\Rightarrow} \overline{\lim} \|A^n\|^{\frac{1}{n}} \leq r$

$\therefore \lim \|A^n\|^{\frac{1}{n}} = r = \inf\limits_n \|A^n\|^{\frac{1}{n}}$

2° $r_\sigma(A) \leq \lim \|A^n\|^{\frac{1}{n}}$

$\because \mathbb{C}$上幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \|A^n\| z^n$

收敛半径为 $\frac{1}{\lim \|A^n\|^{\frac{1}{n}}}$

$\therefore$ 当 $|\lambda| > \lim \|A^n\|^{\frac{1}{n}}$

级数 $\underbrace{\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{\lambda^{n+1}}}_{R_\lambda(A)}$ 绝对收敛，且 $\|R_\lambda(A)\| \leq \frac{1}{|\lambda| - \|A\|}$

$\Rightarrow R_\lambda(A) \in \mathcal{L}(X)$

$\Rightarrow r_\sigma(A) \leq \lim \|A^n\|^{\frac{1}{n}}$

3° $r_\sigma(A) \geq \lim \|A^n\|^{\frac{1}{n}}$

$\forall \lambda \in \rho(A)$，$|\lambda| > r_\sigma(A)$

$R_\lambda(A) = (\lambda I - A)^{-1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{\lambda^{n+1}}$

$\forall f \in \mathcal{L}(X)^*$，$F(\lambda) \triangleq f(R_\lambda(A)) = \sum \frac{f(A^n)}{\lambda^{n+1}}$ 是$\rho(A)$上解析.

Thm. $R_\lambda(A)$ 是 $\rho(A) \subset \mathbb{C}$ 的解析函数

Thm $\sigma(A) \neq \phi$.

3. 谱半径的估计

Def.（谱半径）$r_\sigma(A) \triangleq \sup\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma(A)\}$.

Thm (Gelfand) $r_\sigma(A) = \lim\limits_{n\to\infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}}$

e.g. $A: \ell^2 \to \ell^2$，求 $\sigma_p(A), \sigma_c(A), \sigma_r(A)$

$x = (x_1, \cdots) \mapsto (0, x_1, \cdots)$

解：1° 求 $\sigma_p(A)$：$Ax = \lambda x$

$(0, x_1, \cdots) = \lambda(x_1, x_2, \cdots)$

$\Leftrightarrow x = 0$ $\therefore \sigma_p(A) = \phi$

2° 注意 $\|A^n\| = 1$ 由 Gelfand，$r_\sigma(A) = 1$.

$\forall |\lambda| = 1$，$\forall z \in R(\lambda I - A)^\perp$

$0 = ((\lambda I - A) e_n, z) = \lambda \overline{z_n} - \overline{z_{n+1}}$ $\overset{|\lambda|=1}{\Rightarrow} |z_n| = |z_{n+1}|$ $\overset{z \in \ell^2}{\Rightarrow} z = 0$.

$\therefore R(\lambda I - A)^\perp = \{0\}$. $\Rightarrow \overline{R(\lambda I - A)}^\perp = \{0\}$ $\Rightarrow \lambda \in \sigma_c(A)$，$\forall |\lambda| = 1$

3° $\forall |\lambda| < 1$.

$\forall x \in \ell^2$，$(\lambda I - A)x = (\lambda x_1, \lambda x_2 - x_1, \lambda x_3 - x_2, \cdots)$

令 $z = (1, \bar\lambda, \bar\lambda^2, \cdots)$，则 $((\lambda I - A)x, z) = 0$ $\Rightarrow z \in R(\lambda I - A)^\perp$

$\overset{\text{连续}}{\Longrightarrow} z \in \overline{R(\lambda I - A)}^\perp$ $\Rightarrow \lambda \in \sigma_r(A)$，$\forall |\lambda| < 1$.

综上. $\sigma_p(A) = \phi$，$\sigma_r(A) = \{|\lambda| < 1\}$，$\sigma_c(A) = \{|\lambda| = 1\}$.

$\therefore$ 由幂级数收敛半径关系，$\forall \varepsilon > 0$，$\sum \frac{|f(A^n)|}{(r_\sigma(A)+\varepsilon)^{n+1}} < \infty$

$\Rightarrow \frac{f(A^n)}{(r_\sigma(A)+\varepsilon)^n}$ 有界 $\Rightarrow$ 由共鸣 $\frac{\|A^n\|}{(r_\sigma(A)+\varepsilon)^n} \leq M$ $\Rightarrow \|A^n\|^{\frac{1}{n}} \leq M^{\frac{1}{n}} \cdot (r_\sigma(A)+\varepsilon)^{1+\frac{1}{n}}$ $\Rightarrow$ 由 ε 任意，$\lim \|A^n\|^{\frac{1}{n}} \leq r_\sigma(A)$ #

Pf of Prop (1): $\forall A\in \mathscr{C}(X,Y)$, $\forall x\in B_1(0)\subset X$

由 $\overline{A(B_1(0))}$ 紧，$\overline{A(B_1(0))}$ 有界，$M\triangleq \sup\limits_{x\in B_1(0)}\|Ax\|<\infty \Rightarrow A\in \mathcal{L}(X,Y)$

设 $T_n\in \mathscr{C}(X,Y)$，$T\in \mathcal{L}(X,Y)$，$\|T_n-T\|\to 0$，下证 $T\in \mathscr{C}(X,Y)$.

即证 $\overline{T(B_1(0))}$ 有穷 ε-网存在.

$\forall \varepsilon>0$，$\exists n$, s.t. $\|T_n-T\|<\frac{\varepsilon}{3}$. 由 $\overline{T_n(B_1(0))}$ 紧，$\exists$ $\overline{T_n(B_1(0))}$ 的 $\frac{\varepsilon}{3}$-网 $\{y_1,\cdots,y_n\}$

$\because \forall y\in \overline{T(B_1(0))}$，$\exists x\in B_1(0)$, s.t. $\|y-Tx\|<\frac{\varepsilon}{3}$ （即 $\forall x\in B_1(0)$ $\exists y_i$, s.t. $\|T_nx-y_i\|<\frac{\varepsilon}{3}$）

$\therefore \|y-y_i\|\le \|y-Tx\|+\|Tx-T_nx\|+\|T_nx-y_i\|<\varepsilon$.

$\therefore \{y_1,\cdots,y_n\}$ 是 $\overline{T(B_1(0))}$ 的 ε-网 $\Rightarrow T$ 是紧算子. #

Pf of T 与 T^* 关系定理.

($\Rightarrow$): $B_1^*(0)\triangleq\{f\in Y^*\mid \|f\|<1\}$，下证 $\overline{T^*(B_1^*(0))}$ 紧. 即证 $\{f_n\}\subset B_1^*(0)$，$\{T^*f_n\}$ 有收敛子列.

$\because \overline{T(B_1(0))}$ 紧，$f_n\in C(\overline{T(B_1(0))})$ 可看作紧集上连续函数列. $\Rightarrow$ $\{f_n\}$ 有收敛子列是充分的.

由 Arzela-Ascoli，只须证 $\{f_n\}$ 一致有界 + 等度连续.

$(\because)$ $\forall y\in \overline{T(B_1(0))}$，$\|f_n(y)\|\le \|y\|\le \|T\|$ $\Rightarrow$ 一致有界

$\forall y,y'\in \overline{T(B_1(0))}$，$|f_n(y)-f_n(y')|\le \|y-y'\|$ $\Rightarrow$ 等度连续

$\Rightarrow \{f_n\}$ 有收敛子列 $\xRightarrow{T^*\text{连续}}$ $\{T^*f_n\}$ 有收敛子列.

($\Leftarrow$): 由 $X\subset X^{**}$，$T^{**}\in\mathcal{L}(X^{**},Y^{**})$，$T^{**}|_X=T$

由上述证明及 X 是闭子空间，$T\in \mathscr{C}(X,Y)$. #

E.g. $\Omega\subset \mathbb{R}^n$ 有界闭，$X=Y=C(\Omega)$

$K(x,y)\in C(\Omega\times\Omega)$ $T: X\to X$ 则 T 是紧算子.

$u\mapsto \int_\Omega K(x,y)u(y)dy$

Pf: 只须 $T(B_1(0))$ 一致有界 + 等度连续

令 $M=\max\limits_{\Omega\times\Omega}|K(x,y)|<\infty$

$|Tu|\le M\|u\||\Omega|\Rightarrow \|Tu\|\le M|\Omega|$，$\forall u\in B_1(0)$ $\Rightarrow$ 一致有界.

$\because K(x,y)$ 在 $\Omega\times\Omega$ 上一致连续：$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta$, s.t. $\forall |x-x'|<\delta$，$|K(x,y)-K(x',y)|<\varepsilon$.

$\therefore |Tu(x)-Tu(x')|\le\int|K(x,y)-K(x',y)||u(y)|dy\le \varepsilon\cdot\|u\|\cdot|\Omega|<\varepsilon|\Omega|$，$\forall u\in B_1(0)$

$\Rightarrow$ 等度连续 #

第四章 紧算子与 Fredholm 算子.

§1 紧算子.

Def (紧算子) X,Y: Banach 空间，$A: X\to Y$ 线性，若 $\overline{A(B_1(0))}\subset Y$ 紧，则称 A 是紧算子.

所有紧算子构成的集合记为 $\mathscr{C}(X,Y)$. 记 $\mathscr{C}(X)\triangleq \mathscr{C}(X,X)$

Rmk. $A\in \mathscr{C}(X,Y)\Leftrightarrow A$ 把 X 中有界集映为 Y 中紧集.

$\Leftrightarrow$ $\forall$ 有界列 $\{x_n\}\subset X$，$\{Ax_n\}$ 有列紧子列.

Prop (1) $\mathscr{C}(X,Y)\subset \mathcal{L}(X,Y)$ 闭

(2) $\alpha A+\beta B\in \mathscr{C}(X,Y)$，$\forall \alpha,\beta\in\mathbb{C}$，$A,B\in\mathscr{C}$

(3) $X_0\subset X$ 闭子空间，则 $A|_{X_0}\in \mathscr{C}(X_0,Y)$.

(4) $R(A)\subset Y$ 可分. （$\overline{A(B_1(0))}$ 可分（由完全有界）$\Rightarrow R(A)=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} nA(B_1(0))$ 可分.）

(5) $A\in\mathcal{L}(X,Y)$，$B\in\mathcal{L}(Y,Z)$ 且其中一个紧，则 $BA\in\mathscr{C}(X,Z)$. （连续：有界 $\to$ 有界；紧：有界 $\to$ 紧.）

Thm. (T 与 T^* 关系) $T\in\mathscr{C}(X,Y)\Leftrightarrow T^*\in\mathscr{C}(Y^*,X^*)$

2. 有穷秩算子.

Def (有穷秩算子) X,Y: Banach，$T\in\mathcal{L}(X,Y)$ 若 $R(T)$ 有限维，则称 T 是有穷秩算子. 记 $F(X)$ 所有 $X\to X$ 有穷秩算子全体.

Rmk 1° $f\in X^*$，$y\ne 0\in Y$. 定义 $f\otimes y: X\to Y$，$x\mapsto f(x)y$，则 $f\otimes y$ 是秩 1 算子

2° $f_i\in X^*$，$y_i\in Y$. $T=\sum\limits_{i=1}^m f_i\otimes y_i$ 是有穷秩算子.

Thm. T 是有穷秩算子 $\Leftrightarrow \exists f_i\in X^*$，$y_i\in Y$, s.t. $T=\sum\limits_{i=1}^m f_i\otimes y_i$.

Pf: ($\Rightarrow$): 取基 $\{y_1,\cdots,y_m\}\subset R(T)$.

$\forall x\in X$，$Tx=\sum\limits_{i=1}^m f_i(x)y_i$

由 $\{y_i\}$ 是基可知 f_i 关于 x 线性.

$\because \sum\limits_{i=1}^m|f_i(x)|$ 与 $\|Tx\|$ 都是 $R(T)$ 范数

由有限维范数等价，$\sum\limits_{i=1}^m|f_i(x)|\le M\cdot\|Tx\|\le M\cdot\|T\|\cdot\|x\|\Rightarrow f_i\in X^*$ #

Rmk. 有穷秩算子是紧算子.

问题: $\forall T\in\mathscr{C}(X)$，是否 $\exists T_\varepsilon\in F(X)$, s.t. $\|T-T_\varepsilon\|<\varepsilon$? i.e., $\overline{F(X)}\overset{?}{=}\mathscr{C}(X)$.

Thm. X: Hilbert，则 $\overline{F(X)}=\mathscr{C}(X)$.

Pf: $\forall T\in\mathscr{C}(X)$，$\overline{T(B_1(0))}\subset X$ 紧. $\forall\varepsilon>0$，$\exists$ $\overline{T(B_1(0))}$ $\frac{\varepsilon}{2}$-网 $\{y_1,\cdots,y_n\}$, s.t.

$\forall x\in B_1(0)$ 有 $\|Tx-y_{i_0}\|<\frac{\varepsilon}{2}$

令 $X_\varepsilon=\mathrm{span}\{y_i\}$，则 $\dim X_\varepsilon=n<\infty$. 令 $P_\varepsilon: X\to X_\varepsilon$ 正交投影，则 $P_\varepsilon\circ T\in F(X)$.

$\|P_\varepsilon\circ Tx-Tx\|\le\|P_\varepsilon\circ Tx-y_{i_0}\|+\|y_{i_0}-Tx\|$ $\Rightarrow \|P_\varepsilon\circ T-T\|\le\varepsilon$. #

$=\|P_\varepsilon\circ Tx-P_\varepsilon y_{i_0}\|+\|y_{i_0}-Tx\|$

$<\varepsilon$.

<u>Pf</u> of Schauder 中 $\overline{F(X)} = \mathfrak{C}(X)$:

1° $C_k: X \to \mathbb{K}$ 是线性的，下证 $C_k \in X^*$

$x \mapsto C_k(x)$

$\forall x \in X$，记 $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k(x) e_k$，$\|x\|_1 \triangleq \sup_{n\in\mathbb{N}} \|S_n(x)\|$，则 $\|\cdot\|_1$ 是 X 上范数.

下证 $(X, \|\cdot\|_1)$ 完备.

若 $\{x_l\} \subset (X, \|\cdot\|_1)$ 是基本列，由 $\|S_n(x)\| \le \|x\|_1$ 知 $\{S_n(x_l)\}$ 是 $(X, \|\cdot\|)$ 中基本列 $\xrightarrow{\text{设}} y_n$

$\because \|y_{n+p} - y_n\| \le \underbrace{\|y_{n+p} - S_{n+p}(x_l)\|}_{\to 0} + \underbrace{\|S_{n+p}(x_l) - S_n(x_l)\|}_{\to 0} + \underbrace{\|S_n(x_l) - y_n\|}_{\to 0}$

$\therefore \{y_n\} \subset (X, \|\cdot\|)$ 是基本列 $\xrightarrow{\text{设}} y$.

$\because \|S_n(x_l) - S_n(y)\| \le \underbrace{\|S_n(x_l) - y_n\|}_{\xrightarrow{l\to\infty} 0} + \underbrace{\|y_n - y\|}_{\xrightarrow{n\to\infty} 0} + \underbrace{\|y - S_n(y)\|}_{\xrightarrow{n\to\infty} 0}$

当 l 充分大时，$\|S_n(x_l) - S_n(y)\|$ 充分小 $\Rightarrow x_l \xrightarrow{\|\cdot\|_1} y$. $\Rightarrow (X, \|\cdot\|_1)$ 完备

又由 $\|x\| \le \|x\|_1$ 知（范数等价）$\exists M$, s.t. $\|x\|_1 \le M\|x\|$

$\therefore \|C_n(x) e_n\| = \|S_n(x) - S_{n-1}(x)\| \le 2M\|x\|$

$\Rightarrow |C_n(x)| \le 2M \cdot \|e_n\|^{-1} \cdot \|x\| \quad \Rightarrow C_n \in X^*$.

2° $\forall T \in \mathfrak{C}(X)$, $\varepsilon > 0$, $\exists T_\varepsilon \in F(X)$, s.t. $\|T_\varepsilon - T\| < \varepsilon$.

$\because \forall x \in X$，$\|S_n(x)\| \le \|S_n(x) - x\| + \|x\|$ 知 $\|S_n(x)\| < \infty$

由共鸣，$\|S_n\| < M$.

由 $\overline{T(B_1(0))}$ 紧，$\exists \frac{\varepsilon}{3(M+1)}$ 网 $\{y_1, \cdots, y_m\}$，s.t.

$\forall x \in B_1(0)$，$\exists y_i$, s.t. $\|Tx - y_i\| < \frac{\varepsilon}{3(M+1)} < \frac{\varepsilon}{3}$

$\|S_n Tx - S_n y_i\| \le M \cdot \frac{\varepsilon}{3(M+1)} < \frac{\varepsilon}{3}$

由 Schauder 基定义，$\exists n$, s.t. $\|S_n(y_i) - y_i\| < \frac{\varepsilon}{3}$

$\therefore \|S_n Tx - Tx\| \le \|S_n Tx - S_n y_i\| + \|S_n y_i - y_i\| + \|y_i - Tx\| < \varepsilon$

故取 $T_\varepsilon = S_n T$ 即可.

#

<u>Def</u>. (Schauder 基) X：可分 Banach. 称 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ 为 X 的一组 <u>Schauder 基</u>，

若 $\forall x \in X$，$\exists 1\ \{C_n(x)\} \subset \mathbb{K}$, s.t. $x = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} C_n(x) e_n = \sum_{n=1}^{\infty} C_n(x) e_n$.

<u>Rmk</u>. 不是所有可分 Banach 都有 Schauder 基

<u>Thm</u>. 若 X：可分 Banach 且有 Schauder 基，则 $\overline{F(X)} = \mathfrak{C}(X)$.

(证明有限维性质)

e.g. $\dim V = n < \infty$, $\operatorname{rank} T = r$

$T: V \to V$

可取$\{e_i\}$, $\{\varepsilon_i\}$, s.t. $T(e_i) = \begin{cases} \varepsilon_i, & i \le r \\ 0, & i > r \end{cases}$

取V^*基$\{f^i\}$, $\{g^i\}$, $f^i(e_j) = \delta_{ij}$, $g^i(\varepsilon_j) = \delta_{ij}$

则 $T^* g^i(x) = g^i(Tx)$ $\Rightarrow$ $T^* g^i = \begin{cases} f^i, & i \le r \\ 0, & i > r \end{cases}$

$\therefore \ker T = \{e_{r+1}, \cdots, e_n\}$　　$R(T) = \{\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_r\}$

$\ker T^* = \{g^{r+1}, \cdots, g^n\}$　　$(\ker(T^*))^\perp = \{\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_r\}$

由此可证右边 prop.

Pf of $R(T)$与$\ker T^*$关系等 prop:

① $R(T)^\perp = \{f \in X^* \mid f(Tx) = 0, \forall x \in X\}$

$= \{f \in X^* \mid (T^* f)(x) = 0, \forall x \in X\}$

$= \{f \in X^* \mid T^* f = 0\} = \ker T^*$

② $\forall Tx \in R(T)$, $\forall f \in \ker T^*$, $f(Tx) = (T^* f)(x) = 0$

$\therefore R(T) \subset (\ker T^*)^\perp$

$\because (\ker T^*)^\perp$闭 $\Rightarrow \overline{R(T)} \subset (\ker T^*)^\perp$

由①, $(\ker T^*)^\perp = (R(T)^\perp)^\perp$

下证$(R(T)^\perp)^\perp \subset \overline{R(T)}$即可.

($\because x \in \overline{M} \Leftarrow \forall f \in X^*, f(M) = 0$, 有$f(x) = 0$, 这见Hahn-Banach.)

$\forall x \in (R(T)^\perp)^\perp$, $\forall f \in X^*$, $f(R(T)) = 0 \Rightarrow f \in R(T)^\perp \Rightarrow f(x) = 0$　　#.

§2. Riesz-Fredholm 理论.

V: 线性空间, $\dim V = n < \infty$　$\mathscr{A}: V \to V$　$\mathscr{A}^*: V^* \to V^*$

基 $\{e_i\}_{i=1}^n$　　$\{f^i\}_{i=1}^n$: $f^i(e_j) = \delta_{ij}$

若 $\mathscr{A}(e_i) = \sum_j a_{ij} e_j$, $A = (a_{ij})$

则 $\mathscr{A}^*(f^i) = \sum_j b_{ij} e_j$

$\because \mathscr{A}^*(f^i)(e_k) = b_{ik}$　　$\therefore B = A^T$.

$\phantom{\because \mathscr{A}^*(f^i)(e_k)} \| $

$f^i(\mathscr{A}(e_k)) = a_{ki}$

Prop. ① $\ker \mathscr{A} = \{0\} \Rightarrow R(\mathscr{A}) = V$

② $\sigma(\mathscr{A}) = \sigma(\mathscr{A}^*)$　特征值相同.

③ $n - \dim R(\mathscr{A}) = \dim \ker \mathscr{A} = \dim \ker \mathscr{A}^*$

④ $R(\mathscr{A}) = \ker(\mathscr{A}^*)^\perp \triangleq \{x \in V \mid f(x) = 0, \mathscr{A}^* f = 0\}$.

$R(\mathscr{A}^*) = \ker(\mathscr{A})^\perp$

Rmk. $A \in \mathfrak{C}(X)$, 则 $T = I - A$ 满足①~④.

如无说明, 则 X: Banach, $A \in \mathfrak{C}(X)$, $T \triangleq I - A$.

1. 商空间及记号约定.

Def. (商空间) $X: B^*$, $X_0 \subset X$ 闭子空间, 定义等价关系 $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in X_0$.

所有等价类集合记为X/X_0, x所在等价类记为$[x]$.

定义 $\|[x]\| \triangleq \inf_{y \in [x]} \|y\| = \inf_{y \in X_0} \|x - y\|$

称$\dim(X/X_0)$为X_0的余维数, 记为 $\operatorname{codim} X_0 \triangleq \dim(X/X_0)$

Rmk. 若X完备, 则$(X/X_0, \|\cdot\|)$完备.

记号. ① $T: X \to X$, $R(T) \triangleq \{Tx \mid x \in X\}$, $\ker T \triangleq \{x \in X \mid Tx = 0\}$.

② $M \subset X$, $M^\perp \triangleq \{f \in X^* \mid f(x) = 0, \forall x \in M\} \subset X^*$

③ $N \subset X^*$, $N^\perp \triangleq \{x \in X \mid f(x) = 0, \forall f \in N\} \subset X$.

Prop. ① $R(T)^\perp = \ker T^*$, $R(T^*)^\perp = \ker T$

② $\overline{R(T)} = (\ker T^*)^\perp$, $\overline{R(T^*)} = (\ker T)^\perp$.

Thm. (Fredholm) X: Banach, $A \in \mathfrak{C}(X)$, $T \triangleq I - A$, 则

① $R(T) = (\ker T^*)^\perp$, $R(T^*) = (\ker T)^\perp$

② $\ker T = \{0\} \Rightarrow R(T) = X$

③ $\sigma(T) = \sigma(T^*)$

④ $\dim \ker T = \dim \ker T^* < \infty$

$\operatorname{codim} R(T) = \dim \ker T$

Pf of proposition ①: 由 prop ②, 只须证 $R(T)=\overline{R(T)}$

$\ker T\subset X$ 闭, 作 $\tilde{T}: X/\ker T\to X$, 则 $\tilde{T}$ 线性, $\ker\{\tilde{T}\}=\{[0]\}$ $\Rightarrow$ $\tilde{T}^{-1}$ 存在.

$[x]\mapsto Tx$ (有界 $\because \|\tilde{T}[x]\|\le\|T\|\cdot\|y\|$ 关于所有 $y\in[x]$)

1° $\tilde{T}^{-1}$ 连续. (反证) $\exists [x_n]\subset X/\ker T$, s.t. $\|[x_n]\|=1$, $\tilde{T}[x_n]\to 0$.

$\exists x_n\in[x_n]$, s.t. $\|x_n\|<2$.

$\tilde{T}[x_n]=Tx_n=x_n-Ax_n$

$\because A\in\mathcal{C}(X)$ $\therefore \{Ax_n\}$ 有收敛 subseq $\{Ax_n\}\to y$

又 $\because \tilde{T}[x_n]\to 0$ $\therefore x_n\to y$. $\Rightarrow (I-A)y=0\Rightarrow y\in\ker T$.

但 $x_n-y\in[x_n]$, $\|x_n-y\|\to 0$, 与 $\|[x_n]\|=1$ 矛盾

2° 由 $X/\ker T$ 完备, $\tilde{T}^{-1}$ 连续, 故 $\tilde{T}^{-1}$ 可延拓定义在 $\overline{R(T)}$ 上 (B.L.T.)

$\forall y\in\overline{R(T)}$, $\exists \tilde{T}[x_n]\to y$ $\Rightarrow$ $[x_n]=\tilde{T}^{-1}(\tilde{T}[x_n])\to\tilde{T}^{-1}y$

$\|\tilde{T}\tilde{T}^{-1}y-y\|\le\|\tilde{T}\tilde{T}^{-1}y-\tilde{T}[x_n]\|+\|\tilde{T}[x_n]-y\|$

$\le\|\tilde{T}\|\cdot\|\tilde{T}^{-1}y-[x_n]\|+\|\tilde{T}[x_n]-y\|\to 0$

$\Rightarrow \tilde{T}\tilde{T}^{-1}y=y$. 记 $\xi=\tilde{T}^{-1}y$, 则 $\tilde{T}\xi=y$ $\Rightarrow y\in R(T)\Rightarrow\overline{R(T)}\subset R(T)$. #

Pf of proposition ②: $\ker T=\{0\}\Rightarrow T$ 是 1-1 的.

记 $X_0=X$, $X_k=T(X_{k-1})$, $k=1,2,\cdots$

(反证) 若 $R(T)\ne X$, 则由 T 1-1 知 $X_0\supsetneq X_1\supsetneq\cdots$

由 Riesz 引理, $\exists y_k\in X_k\setminus X_{k+1}$, s.t. $\|y_k\|=1$, $\rho(y_k,X_{k+1})>\frac{1}{2}$

$\|Ay_n-Ay_{n+p}\|=\|y_n-\underbrace{Ty_n-y_{n+p}+Ty_{n+p}}_{\in X_{n+1}}\|>\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \{y_k\}$ 无收敛子列, 与 A 紧矛盾! #

Pf of proposition ③: $\Leftrightarrow \rho(T)=\rho(T^*)$

$\Leftrightarrow$ "$(\lambda I-T)^{-1}\in\mathcal{L}(X)\Leftrightarrow(\lambda I-T^*)^{-1}\in\mathcal{L}(X^*)$."

用 T 代替 $\lambda I-T$.
$\Leftrightarrow$ "$T^{-1}\in\mathcal{L}(X)\Leftrightarrow(T^*)^{-1}\in\mathcal{L}(X^*)$"

step1 若 $T^{-1}\in\mathcal{L}(X)$, $\forall x\in X$, $f\in X^*$

$\left.\begin{aligned}&(T^{-1})^*T^*f(x)=T^*f(T^{-1}x)=f(TT^{-1}x)=f(x)\\&T^*(T^{-1})^*f(x)=(T^{-1})^*f(Tx)=f(T^{-1}Tx)=f(x)\end{aligned}\right\}\Rightarrow (T^{-1})^*T^*=T^*(T^{-1})^*=I \Rightarrow (T^*)^{-1}=(T^{-1})^*\in\mathcal{L}(X^*)$

step2 若 $(T^*)^{-1}\in\mathcal{L}(X)$, 由 step1, $(T^{**})^{-1}\in\mathcal{L}(X^{**})$,

由 $T=T^{**}|_X$, T 是单射. 下证 $R(T)$ 闭.

$\because$ 若 $Tx_n\to y\in X$, 则 $x_n=(T^{**})^{-1}T^{**}x_n=(T^{**})^{-1}Tx_n\to(T^{**})^{-1}y\overset{X\text{完备}}{\in}X$.

$\Rightarrow T(T^{**})^{-1}y=T^{**}(T^{**})^{-1}y=y\Rightarrow y\in R(T)$.

2. 定理的证明.

Proposition ①. $R(T)=\ker(T^*)^{\perp}$, $R(T^*)=(\ker T)^{\perp}$

Proposition ② $\ker T=\{0\}\Rightarrow R(T)=X$.

Proposition ③ X: Banach, $T\in\mathcal{L}(X)$, 则 $\sigma(T)=\sigma(T^*)$.

Proposition ④.1 $\operatorname{codim}R(T)\le\dim\ker T$.

pf: 1° $\dim\ker T<\infty$ (claim).

(反证) 若 $\dim\ker T=\infty$. 记 $B_1(0)$ 是 $\ker T$ 中单位球, 则 $A(B_1(0))=B_1(0)$ 紧 矛盾

2° $\exists P: X\to\ker T$, s.t. $PX=\ker T$, $P^2=P$.

设 $\ker T$ 的基 $\{e_1,\cdots,e_n\}$, $M_i=\{e_1,\cdots,e_{i-1},e_{i+1},\cdots,e_n\}$.

由 H-B, $\exists f\in X^*$, s.t. $f_i(e_j)=\delta_{ij}$

记 $P(x)=\sum f_i(x)e_i$

3° $\operatorname{codim}R(T)\le\dim\ker T$.

(反证) 若 $\operatorname{codim}R(T)=\dim(X/R(T))>\dim\ker T.=n$.

取 $\{x_1,\cdots,x_{n+1}\}\subset X$ 线性无关, s.t. $[x_1],\cdots,[x_{n+1}]$ 在 $X/R(T)$ 线性无关

记 $N=\operatorname{span}\{x_1,\cdots,x_n\}$, 则 $N\cap R(T)=\{0\}$ 且 $x_{n+1}\notin R(T)\oplus N$.

取线性同构 $V:\ker T\to N$, 作 $\tilde{T}\triangleq T+VP=I-(A-VP)$, 其中 $A-VP$ 紧算子

下证 $\ker\tilde{T}=\{0\}$: $\because \forall x\in\ker\tilde{T}$, $Tx=-VPx$, 由 $R(T)\cap N=\{0\}$ 知 $Tx=0$.

$\Rightarrow x\in\ker T$, $-VPx=-Vx=0\overset{V\text{同构}}{\Longrightarrow}x=0\Rightarrow\ker\tilde{T}=\{0\}$

由 Proposition ②, $R(\tilde{T})=X$. 但 $R(\tilde{T})\le R(T)\oplus N$, 与 $x_{n+1}\notin R(T)\oplus N$ 矛盾. #

Lem X: B^*, $M\subset X$ 闭子空间, 则 $(X/M)^*\simeq M^{\perp}$

Pf: 1° $\forall f\in M^{\perp}$, 作 $\tilde{f}: X/M\to\mathbb{K}$ 线性, $|\tilde{f}([x])|\le\|f\|\cdot\|y\|$, $\forall y\in[x]$. $\overset{\text{取下确界}}{\Rightarrow}\|\tilde{f}\|\le\|f\|$
$[x]\mapsto f(x)$.

2° $\forall\tilde{f}\in(X/M)^*$, 作 $f: X\to\mathbb{K}$ 线性, $|f(x)|\le\|\tilde{f}\|\cdot\|[x]\|\le\|\tilde{f}\|\cdot\|x\|\Rightarrow\|f\|\le\|\tilde{f}\|$
$x\mapsto\tilde{f}([x])$

$\Rightarrow$ 作出 $(X/M)^*$ 到 $M^{\perp}$ 的对应 #

Proposition ④.2 $\operatorname{codim}R(T)=\dim\ker(T)$

Pf: $\operatorname{codim}R(T)=\dim X/R(T)=\dim(X/R(T))^*\overset{\text{Lem}}{=}\dim R(T)^{\perp}=\dim(\ker(T^*)^{\perp})^{\perp}\ge\dim\ker T^*$

同理, $\operatorname{codim}R(T^*)\ge\dim\ker T$

$\Rightarrow$ prop. ④.1 $\operatorname{codim}R(T)\le\dim\ker T\le\operatorname{codim}R(T^*)\overset{\text{prop ④.1}}{\le}\dim\ker T^*\le\operatorname{codim}R(T)$. #

最后证 $R(T)=X$ 即可由 Banach 得 $T^{-1}\in\mathcal{L}(R(T))=\mathcal{L}(X)$.

(反证). 若 $R(T)\ne X$, 由 H-B, $\exists f\in X^*$, $f\ne 0$, $f(R(T))=0$, $\Rightarrow f\in R(T)^{\perp}=\ker T^*$, 而 $\ker T^*\ne\{0\}$

与 $(T^*)^{-1}\in\mathcal{L}(X^*)$ 矛盾.

Pf of 紧算子的谱：(1) 若 $0\notin\sigma(A)$，则 $A^{-1}\in\mathcal{L}(X)\Rightarrow I=A^{-1}A$ 紧 $\Rightarrow \dim X<\infty$

(2) 由 Fredholm Proposition②，若 $\ker T=\{0\}$，则 $R(T)=X$.

若 $0\neq\lambda\in\sigma(A)\setminus\sigma_p(A)$，$\ker(\lambda I-A)=\{0\}\Rightarrow\ker(I-\frac{A}{\lambda})=\{0\}\Rightarrow R(I-\frac{A}{\lambda})=X$

与 $\lambda\in\sigma(A)\setminus\sigma_p(A)$ 矛盾．∴ A 无非 0 的剩余谱．连续谱．

(3) 设 $\{\lambda_n\}\subset\sigma_p(A)\setminus\{0\}\to\lambda\neq0$.

取 $x_n\in\ker(\lambda_n I-A)$，则 $x_1,\cdots,x_n$ 线性无关．

记 $E_n=\mathrm{span}\{x_1,\cdots,x_n\}$，则 $E_n\subsetneq E_{n+1}$

由 Riesz 引理，$\exists y_n\in E_{n+1}$, s.t. $\|y_n\|=1$，$\rho(y_{n+1},E_n)\geq\frac{1}{2}$

由 $\lambda_n\to\lambda$ 知 $\{\frac{y_n}{\lambda_n}\}$ 有界，由紧有收敛子列

$\|A\frac{y_{n+p}}{\lambda_{n+p}}-A\frac{y_n}{\lambda_n}\|$

$=\|y_{n+p}-\underbrace{(y_{n+p}-\frac{1}{\lambda_{n+p}}Ay_{n+p}+\frac{1}{\lambda_n}Ay_n)}_{\in E_{n+p-1}}\|\geq\frac{1}{2}$ 与 A 紧性矛盾！ #

Pf of 不变子空间存在性：不妨 $A\neq0$，$\|A\|=1$，$\dim X=\infty$，$\sigma_p(A)\setminus\{0\}=\phi$.

取 $x_0\in X$, s.t. $\|Ax_0\|>1$，则 $\|x_0\|>1\Rightarrow 0\notin B_1(x_0)$

记 $C\triangleq\overline{AB_1(x_0)}$，由 0 不是 A 的点谱，$0\notin C$.

(反证) 设 A 无非平凡的不变子空间，则 $\forall 0\neq y\in X$，$\overline{L_y}=X$.

$\exists$ A 的多项式 T_y, s.t. $\|T_y y-x_0\|<1$

由连续，$\exists\delta_y>0$, s.t. $\forall z\in B_{\delta_y}(y)$，$\|T_y z-x_0\|<1$.

由 C 紧，$\exists\{y_1,\cdots,y_n\}$, s.t. $C\subseteq\bigcup_{k=1}^{n}B_{\delta_{y_k}}(y_k)$

对 $\forall y\in C$ ∴ $\exists i_1$, s.t. $\|T_{y_{i_1}}y-x_0\|<1$ 记 $T_{y_{i_1}}=T_{i_1}$，则 $T_{i_1}y\in B_1(x_0)$，$AT_{i_1}y\in C$.

$\exists i_2$, s.t. $\|T_{i_2}AT_{i_1}y-x_0\|\overset{T_{i_1}\text{是A的多项式}}{=}\|T_{i_2}T_{i_1}Ay-x_0\|<1$

$\exists\cdots$, s.t. $\|\prod_{l=1}^{k+1}T_{i_l}(A^k y)-x_0\|<1$.

$\Rightarrow\|x_0\|-1\leq\|\prod_{l=1}^{k+1}T_{i_l}(A^k y)\|\leq\prod_{l=1}^{k+1}\|T_{i_l}\|\|A^k y\|$

令 $\mu\triangleq\max_{1\leq i\leq n}\|T_i\|$，则 $\|x_0\|-1\leq\mu^{k+1}\|A^k y\|$

∴ $\frac{1}{\mu}\left(\frac{\|x_0\|-1}{\mu}\right)^{\frac{1}{k}}\leq\|A^k\|^{\frac{1}{k}}\|y\|^{\frac{1}{k}}$

令 $k\to\infty$，$\frac{1}{\mu}\leq0$ (Gelfand, $r_\sigma(A)=0$.) 矛盾． #

§3 Riess-Schauder 理论．

1. 紧算子的谱．

Thm. X: Banach，$A\in\mathfrak{C}(X)$，则．

(1) $\dim X=\infty\Rightarrow 0\in\sigma(A)$

(2) $\sigma(A)\setminus\{0\}=\sigma_p(A)\setminus\{0\}$ (除了 0，都是点谱.)

(3) 只有 0 可能为 $\sigma(A)$ 聚点．

2. 不变子空间存在性．

Def. X: B^*，$M\subset X$ 子空间，$T\in\mathcal{L}(X)$．若 $T(M)\subseteq M$，则称 M 为 T 的不变子空间．

Prop. (1) M 是 T 的不变子空间 $\Rightarrow\overline{M}$ 是不变子空间

(2) $\lambda\in\sigma_p(A)\Rightarrow\ker(\lambda I-A)$ 是 A 不变子空间

(3) $\forall y\in X$，$L_y\triangleq\{p(A)y$. p 是 K-多项式$\}$ 是 A 的不变子空间．

问：X: Banach，$T\in\mathcal{L}(X)$ 是否有非平凡子空间？ 否！

X: Hilbert 呢？ DK！ 但 T 紧是肯定的！

Thm. X: Banach，$\dim X\geq2$，$A\in\mathfrak{C}(X)$，则 A 有非平凡的不变子空间．

3. 紧算子的结构．

Def. X: B^*，$T\in\mathcal{L}(X)$．称 $X\supseteq R(T)\supseteq R(T^2)\supseteq\cdots$ 为 T 的像链．

$\{0\}\subseteq\ker T\subseteq\ker(T^2)\subseteq\cdots$ 为 T 的零链．

Rmk. 1° 若 $R(T^{n+1})=R(T^n)$，则 $\forall k\geq n$，$R(T^k)=R(T^n)$.

若 $\ker T^{n+1}=\ker T^n$，则 $\forall k\geq n$，$\ker T^k=\ker T^n$

2° 最小的整数 n 称为像链长/零链长，记为 q/p.

Lem X: Banach，$A\in\mathfrak{C}(X)$，$T\triangleq I-A$，则 $p=q<\infty$.

Pf: 1° $q<\infty$. (反证) 若 $q=\infty$，即 $R(T)\supsetneq R(T^2)\supsetneq\cdots$ 均为闭线性子空间

由 Reisz 引理，与 A 的紧性矛盾．($\exists y_k\in R(T^k)$，$\|y_k\|=1$，$\rho(y_k,R(T^{k+1}))\geq\frac{1}{2}$.)

2° $p\leq q$. $I-T^k=A\cdot(I+T+\cdots+T^{k-1})$ $T^k=I+\sum_{l=1}^{k}\binom{k}{l}(-A)^l$.

$\dim\ker(T^q)=\mathrm{codim}\,R(T^q)=\mathrm{codim}\,R(T^{q+1})=\dim\ker T^{q+1}<\infty$.

∴ $\ker T^q=\ker T^{q+1}\Rightarrow p\leq q$.

3° $q\leq p$ $\dim\ker T^p=\mathrm{codim}\,R(T^p)\Rightarrow R(T^p)=R(T^{p+1})\Rightarrow q\leq p$

$\dim\ker T^{p+1}=\mathrm{codim}\,R(T^{p+1})$ (☺ $X/R(T^p)\simeq\frac{X/R(T^{p+1})}{R(T^p)/R(T^{p+1})}$)

#

Pf of thm：取 p 为零链长

1° $\ker(T^p)\cap R(T^p)=\{0\}$.

$\forall y\in\ker(T^p)\cap R(T^p)$，$\exists x\in X$，$y=T^p x$ $\Rightarrow T^{2p}x=0 \Rightarrow x\in\ker(T^{2p})=\ker(T^p)$

$\Rightarrow y=0$.

2° $X=\ker(T^p)\oplus R(T^p)$

$\forall x\in X$，$T^p x\in R(T^p)=R(T^{2p}) \Rightarrow \exists z\in X$, s.t. $T^p x=T^{2p}z$

记 $y=x-T^p z$（即 $x=y+T^p z$），则 $T^p y=0 \Rightarrow x=y+T^p z\in\ker T^p\oplus R(T^p)$

3° $\tilde{T}$ 有有界逆. $\tilde{T}: R(T^p)\to R(T^{p+1})$

$\because R(T^p)=R(T^{p+1})$ 且为闭 $\therefore \tilde{T}$ 为满射.

下证单射. $\forall y\in\ker\tilde{T}$，$\exists x\in X$, s.t. $y=T^p x$ 且 $T^{p+1}x=0 \Rightarrow x\in\ker T^{p+1}=\ker T^p$

$\Rightarrow y=0$

由 Banach 逆算子 thm，$\tilde{T}$ 有有界逆. #

<u>Thm</u>（紧算子的结构）X: Banach. $A\in\mathcal{C}(X)$，$T=I-A$，$\exists p\in\mathbb{N}$, s.t. $X=\ker(T^p)\oplus R(T^p)$，

<u>且</u> $\tilde{T}\triangleq T|_{R(T^p)}$ 有有界逆.（p 取零链长）.

E.g. $(X,(\cdot,\cdot))$ Hilbert 空间, $M\subset X$ 闭子空间. 则正交投影算子 $P_M: X\to M$ 是对称算子.

pf: $X = M\oplus M^\perp$

$\forall x,y\in X$, $x=x_1+x_2$, $x_1\in M$, $x_2\in M^\perp$

$y=y_1+y_2$, $y_1\in M$, $y_2\in M^\perp$

$(P_M x, y) = (x_1,y) = (x_1,y_1) = (x,y_1) = (x, P_M y)$ #.

Pf of Prop: 1° $a(x,y)\triangleq(Ax,y)$ 是 X 上共轭双线性型. $\Leftrightarrow q(x)=a(x,x)\in\mathbb{R}. \Leftrightarrow (Ax,x)\in\mathbb{R}$.

A对称 $\Leftrightarrow a(x,y)=\overline{a(y,x)}$ $\Leftrightarrow q(x)=a(x,x)\in\mathbb{R}. \Leftrightarrow (Ax,x)\in\mathbb{R}$.

2° $\forall\lambda=a+ib\in\mathbb{C}$, $b\neq0$.

$\|(\lambda I-A)x\|^2 \overset{1°}{=} \|(aI-A)x\|^2+|b|^2\|x\|^2 \ge |b|^2\|x\|^2$.

$\Rightarrow (\lambda I-A)^{-1}$ 存在, $\|(\lambda I-A)^{-1}y\|\le \frac{1}{|b|}\|y\|$

$\Rightarrow (\lambda I-A)^{-1}$ 连续 $\Rightarrow R(\lambda I-A)$ 闭

$R(\lambda I-A)^\perp = \{y\in X \mid ((\lambda I-A)x,y)=0, \forall x\in X\}$

$=\{y\in X\mid (x,(\bar\lambda I-A)y)=0,\forall x\in X\}$

$=\ker(\bar\lambda I-A)\overset{b\neq0}{=}\{0\}$

$\Rightarrow R(\lambda I-A)^\perp=\{0\} \Rightarrow \overline{R(\lambda I-A)}=X \Rightarrow R(\lambda I-A)=X \Rightarrow \lambda\notin\sigma(A)$

5° 令 $C\triangleq\sup\limits_{\|x\|=1}|(Ax,x)|$, 由Cauchy-Schwarz, $|(Ax,x)|\le\|Ax\|\cdot\|x\|\le\|A\|$

$\therefore C\le\|A\|$ 下证 $\|A\|\le C$.

由 $\mathrm{Re}(Ax,y)=\frac14[(A(x+y),x+y)-(A(x-y),x-y)]$

$\le\frac{C}{4}(\|x+y\|^2+\|x-y\|^2)=C$, $\forall\|x\|=\|y\|=1$.

给定 $\|x\|=\|y\|=1$, $\exists\alpha\in\mathbb{C}$, $|\alpha|=1$, s.t.

$|(Ax,y)|=\alpha(Ax,y)=(A(\alpha x),y)=\mathrm{Re}(A(\alpha x),y)\le C$.

$\Rightarrow \forall x,y\in X$, $|(Ax,y)|\le C\|x\|\cdot\|y\|$

由Riesz表示定理, $\|A\|\le C$. #.

Pf of 极值性质: 记单位球面 $S=\{\|x\|=1\}$, 不妨设 $\lambda=\sup\limits_{\|x\|=1}(Ax,x)$ (否则取 $-A$ 即可)

$\because |(Ax,x)|\le\|A\|$ $\therefore (A\cdot,\cdot): S\to\mathbb{R}$ 有界. $\Rightarrow \exists x_n\in S$, s.t. $(Ax_n,x_n)\to\lambda$

由 X 自反, (Eberlein) $\exists$ 弱收敛子列, 不妨记 $x_n\rightharpoonup x_0\in X$.

由 A 紧, ($\{Ax_n\}$强收敛) 不妨记 $Ax_n\to y$

由习题2.5.14 $\|x_0\|\le\underline{\lim}\|x_n\|=1$

$\because \|Ax_0-y\|^2\le|(Ax_0-Ax_n,Ax_0-y)|+|(Ax_n-y,Ax_0-y)|$

$=|(x_0-x_n,A^2x_0-Ay)|+|(Ax_n-y,Ax_0-y)|\to0$ $\quad\therefore Ax_0=y\leftarrow Ax_n$.

§4 Hilbert-Schmidt 定理 (考虑 Hilbert space $(X,(\cdot,\cdot))$

1. 对称算子.

Def. $(X,(\cdot,\cdot))$: Hilbert, $A\in\mathcal{L}(X)$. 称 A 是 X 上对称算子, 若 $\forall x,y\in X$, $(Ax,y)=(x,Ay)$

Prop. 1° A 对称 $\Leftrightarrow \forall x\in X, (Ax,x)\in\mathbb{R}$

2° $\sigma(A)\subseteq\mathbb{R}$, 且 $\|(\lambda I-A)^{-1}x\|\le\frac{1}{|\mathrm{Im}\lambda|}\|x\|$, $\forall\lambda\in\mathbb{C}$, $\mathrm{Im}\lambda\neq0$, $x\in X$.

3° $X_0\subset X$ 闭, $AX_0\subseteq X_0$, 则 $A|_{X_0}$ 也对称.

4° $\lambda\neq\mu\in\sigma_p(A)$, 则 $\ker(\lambda I-A)\perp\ker(\mu I-A)$

5° $\sup\limits_{\|x\|=1}|(Ax,x)|=\|A\|$

2. 紧对称算子的谱.

·Recall: X: Banach, $A\in\mathfrak{L}_c(X)$.

$\dim X<\infty$ $\quad\sigma(A)=\sigma_p(A)=\{\lambda_1,\cdots,\lambda_n\}$, $\lambda_i\in\mathbb{C}$.

$\dim X=\infty$ $\quad\sigma(A)=\{0\}$

或 $\{0,\lambda_1,\cdots,\lambda_n\}$

或 $\{0,\lambda_1,\cdots,\lambda_n,\cdots\}$ $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n=0$.

Thm (极值性质). X: Hilbert, A: 紧对称, 则 $\exists x_0\in X$, $\|x_0\|=1$, s.t. $\lambda\triangleq\sup\limits_{\|x\|=1}|(Ax,x)|=|(Ax_0,x_0)|$ 且 $Ax_0=\lambda x_0$.

Thm (Hilbert-Schmidt) X: Hilbert, A: 紧对称, 则 $\exists\{\lambda_i\}$ 至多可数及一组 $\underset{\boxed{\text{正交规范}}}{\text{基}}$ $\{e_i\}$, s.t.

$\forall x\in X$, 有 $x=\sum(x,e_i)e_i$

$Ax=\sum\lambda_i(x,e_i)e_i$

Pf: $\forall\lambda\in\sigma_p(A)\setminus\{0\}$, $\ker(\lambda I-A)$ 有限维, 取正交规范基 E_λ. 把所有 E_λ 并在一起记为 $\{\varepsilon_i\}$

若 $0\in\sigma_p(A)$, 取 $\ker(A)$ 中正交规范基 $\{\tilde\varepsilon_i\}$ (可能不可数)

令 $\{e_i\}\triangleq\begin{cases}\{\varepsilon_i\}, & 0\notin\sigma_p(A)\\ \{\varepsilon_i\}\cup\{\tilde\varepsilon_i\}, & 0\in\sigma_p(A)\end{cases}$

记 $M=\mathrm{span}\{e_i\}=\{\sum_{l=1}^n a_{i_l}e_{i_l}\mid n\in\mathbb{N}, a_{i_l}\in\mathbb{K}\}$, 下证 $\overline{M}=X$.

(反证) 由 $\overline{M}^\perp\subset M^\perp\Rightarrow\{0\}\neq M^\perp$. 令 $\hat{A}=A|_{M^\perp}$, 则 $\hat{A}$ 在 $M^\perp$ 上无特征值.

这和极值性质中 $\lambda=\sup\limits_{x\in M^\perp, \|x\|=1}(\hat{A}x,x)$ 是 $\hat{A}$ 特征值矛盾. #.

Rmk. 按特征值绝对值大小排序并计其重数:

$|\lambda_1|\ge|\lambda_2|\ge\cdots\ge0$.

正特征值: $\lambda_1^+\ge\cdots\ge0$

负特征值: $\lambda_1^-\le\cdots\le0$.

1° $(Ax_0,x_0)=\lambda$

$|(Ax_0,x_0)-(Ax_n,x_n)|\le|(A(x_0-x_n),x_n)|+|(Ax_0,x_0-x_n)|$

$\le\|Ax_n-Ax_0\|+|(Ax_0,x_0-x_n)|\to0$

2° $\|x_0\|=1$. (反证).

若 $\|x_0\|<1$, $(Ax_0,x_0)\le\lambda\|x_0\|^2<\lambda$ 矛盾!

3° $Ax_0=\lambda x_0$

$\forall y\in X$, $\varphi_y(t)=\frac{(A(x_0+ty),x_0+ty)}{(x_0+ty,x_0+ty)}$

在 $|t|\ll1$ 时, $t=0$ 处取极大.

$\Rightarrow\varphi_y'(0)=0$

$\Rightarrow\mathrm{Re}(y,Ax_0-\lambda x_0)=0$

取 iy $\Rightarrow(y,Ax_0-\lambda x_0)=0$

$\forall y\Rightarrow Ax_0=\lambda x_0$ #

只证 λ_n^+

Pf (Minimax): $x = \sum a_i^+ e_i^+ + \sum a_i^- e_i^-$

$Ax = \sum \lambda_i^+ a_i^+ e_i^+ + \sum \lambda_i^- a_i^- e_i^-$

$$\frac{(Ax,x)}{(x,x)} = \frac{\sum \lambda_i^+ |a_i^+|^2 + \sum \lambda_i^- |a_i^-|^2}{\sum |a_i^+|^2 + \sum |a_i^-|^2}$$

1° LHS ≤ RHS.

$\forall E_{n-1}$，取 $\operatorname{span}\{e_1^+, \cdots, e_n^+\}$ 中与 E_{n-1} 垂直的 $x_n \neq 0$.

则 $\sup\limits_{x \in E_{n-1}^{\perp} \setminus \{0\}} \frac{(Ax,x)}{(x,x)} \geq \frac{(Ax_n,x_n)}{(x_n,x_n)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^+ |a_i^+|^2}{\sum_{i=1}^{n} |a_i^+|^2} \geq \lambda_n^+$

2° LHS ≥ RHS

取 $E_{n-1} = \operatorname{span}\{e_1^+, \cdots, e_{n-1}^+\}$ #

Thm. (Minimax) X: Hilbert，A: 对称紧，则 $\lambda_n^+ = \inf\limits_{E_{n-1}} \sup\limits_{x \in E_{n-1}^{\perp} \setminus \{0\}} \frac{(Ax,x)}{(x,x)}$，其中 E_{n-1} 为 X 中 $n-1$ 维闭子空间

$$\lambda_n^- = \sup_{E_{n-1}} \inf_{x \in E_{n-1}^{\perp} \setminus \{0\}} \frac{(Ax,x)}{(x,x)}.$$

Pf of Fredholm 刻画：

(1) ∵ $\dim \mathrm{Ker}T$，$\mathrm{codim}R(T)=\dim Y/R(T)<\infty$

把 $Y/R(T)$ 看成 Y 中有穷维子空间，且 $Y=R(T)\oplus Y/R(T)$.

由§2. Proposition ⓚ，∃有穷秩算子(从而紧) $A_1: X\to \mathrm{Ker}T$　$A_2: Y\to Y/R(T)$.

(构造P那一段)　　s.t. $A_1|_{\mathrm{Ker}T}=id$.　$A_2|_{Y/R(T)}=id$.

作 $\widetilde{T}: X/\mathrm{ker}T\to R(T)$ 同构 ⇒ $\widetilde{T}^{-1}$ 存在

$[x]\mapsto Tx$

作 $S\triangleq\widetilde{T}^{-1}(I_Y-A_2)$.

则 ① $T=\widetilde{T}(I_X-A_1)$

② $\widetilde{T}=(I_Y-A_2)\widetilde{T}$

③ $\widetilde{T}^{-1}=(I_X-A_1)\widetilde{T}^{-1}$

∴ $ST\overset{①}{=}\widetilde{T}^{-1}(I_Y-A_2)\widetilde{T}(I_X-A_1)$

$\overset{②}{=} I_X-A_1$

$TS\overset{①}{=}\widetilde{T}(I_X-A_1)\widetilde{T}^{-1}(I_Y-A_2)$

$\overset{③}{=} I_Y-A_2$.

(2) $\mathrm{Ker}T\subset \mathrm{Ker}(S_1T)=\mathrm{Ker}(I_X-A_1)<\infty$.

$R(T)\supset R(TS_2)$ 闭　$\mathrm{codim}R(T)\le \mathrm{codim}R(TS_2)=\mathrm{codim}(I_Y-A_2)=\dim\mathrm{ker}(I_Y-A_2)<\infty$

∴ $\exists N\subset R(T)$ 有限维，s.t. $R(T)=\underbrace{R(TS_2)}_{闭}\oplus\underbrace{N}_{有限维}$　⇒ $R(T)$ 闭　#

§5. Fredholm 算子

Def. X,Y: Banach，称 $T\in\mathscr{L}(X,Y)$ 为一个 Fredholm算子，若：

(1) $\dim\mathrm{Ker}T<\infty$

(2) $\mathrm{codim}R(T)<\infty$

(3) $R(T)$ 闭.

Fredholm算子全体.记为 $\mathscr{F}(X,Y)$．记 $\mathscr{F}(X)\triangleq\mathscr{F}(X,X)$.

Def.(指标) 称 $\mathrm{ind}(T)\triangleq\dim\mathrm{ker}T-\mathrm{codim}R(T)$ 为 Fredholm 算子 T 的指标.

Rmk. 1° $A\in\mathscr{C}(X)$，$T=I-A\in\mathscr{F}(X)$，$\mathrm{ind}(T)=0$.

2° 若 $T^{-1}\in\mathscr{L}(Y,X)$，$\mathrm{ind}(T)=0$.

1. Fredholm 算子的刻画

Thm. (1) $T\in\mathscr{F}(X,Y)$，则 $\exists S\in\mathscr{L}(Y,X)$，$A_1\in\mathscr{C}(X)$，$A_2\in\mathscr{C}(Y)$，s.t.

$ST=I_X-A_1$，$TS=I_Y-A_2$.

(2) $T\in\mathscr{L}(X,Y)$ 若∃ $S_1,S_2\in\mathscr{L}(Y,X)$，$A_1\in\mathscr{C}(X)$，$A_2\in\mathscr{C}(Y)$，s.t.

$S_1T=I_X-A_1$，$TS_2=I_Y-A_2$.　则 $T\in\mathscr{F}(X)$.

Rmk. 由(2)知(1)中 $S\in\mathscr{F}(Y,X)$ (取 $S_1=S_2=T$).

2. Fredholm 算子的性质.

Thm. $T_1\in\mathscr{F}(X,Y)$，$T_2\in\mathscr{F}(Y,Z)$，则 $T_2T_1\in\mathscr{F}(X,Z)$ 且 $\mathrm{ind}(T_2T_1)=\mathrm{ind}(T_1)+\mathrm{ind}(T_2)$

Thm. $T\in\mathscr{F}(X,Y)$. $\exists\varepsilon>0$，对 $\forall S\in\mathscr{L}(X,Y)$，$\|S\|<\varepsilon$ 时，$T+S\in\mathscr{F}(X,Y)$ 且 $\mathrm{ind}(T+S)=\mathrm{ind}(T)$.

即 Fredholm 小扰动还是 Fredholm，且不改变指标.