2020.5.11

P179. 2. $\underline{s}=(a_0,\cdots,a_n)$，$b$：一点，s.t. $\forall x,x'\in \underline{s}$，$\overline{bx}$和$\overline{bx'}$线段只交一点$b$，则 $\{b,a_0,\cdots,a_n\}$处于一般位置.

pf: 若$\{b,a_0,\cdots,a_n\}$不处于一般位置，则$\{b-a_0, a_i-a_0, i\in[n]\}$线性相关.

由$\{a_i-a_0\}$线性无关知.

$b-a_0=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(a_i-a_0) \Rightarrow b=\sum\lambda_i a_i+(1-\sum\lambda_i)a_0$

若$\lambda_i=0$，则$b=a_0$，取$x=a_1$，$x'=\frac{1}{2}(a_0+a_1)$，则$\overline{bx'}$与一半$\overline{bx}$完全重合，矛盾

若有$\lambda_i\neq 0$，则取$x=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2n}(a_i-a_0)+a_0=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2n}a_i+\frac{1}{2}a_0$.

$x'=\varepsilon b+(1-\varepsilon)x$，其中$\varepsilon$充分小使$x'\in \underline{s}$
(只须让$a_0\sim a_n$的系数仍正.)

则$\overline{bx}\supseteq\overline{bx'}$，矛盾.

$\therefore \{b,a_0,\cdots,a_n\}$处于一般位置. #

5. 证明若$\underline{s}$是n-dim单形，则$\partial \underline{s}\cong S^{n-1}$，$s\cong D^n$.

pf. 设$\underline{s}=(a_0,a_1,\cdots,a_n)$，取中心$p=\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}a_i$，则构造映射如下：

$$x\in\partial\underline{s} \xmapsto[①]{} x-p\in E^n\setminus\{0\} \xrightarrow[②]{\text{polar coordinate}} (r,\theta) \xmapsto[③]{} (1,\theta)\in S^{n-1}$$

①：有逆映射$y\mapsto y+p$，连续，且$x-p\in E^n\setminus\{0\}$是由于$x=\sum_{i=0}^{n}\lambda_i a_i$，$\exists\lambda_i=0 \Rightarrow x-p=\sum\mu_i a_i$
$\exists\mu_i=-\frac{1}{n}\neq 0$

②：极坐标变换，同胚映射.

③：一一映射是由于：若p、x、x'处于一直线上，由题2知$\{a_0,\cdots,a_n\}$不处于一般位置！
从而连续且有连续逆映射.

$\therefore \partial\underline{s}\cong S^{n-1}$

同样，对于$x\in s$，设$x-p=\alpha(y-p)$，$\alpha\in[0,1]$，$y\in\partial\underline{s}$，则映为$(\alpha,\theta)\in D^n$

由α、y选取唯一，逆映射可逆，且均连续. $\Rightarrow s\cong D^n$. #
(否则$\{a_0,\cdots,a_n\}$不构成单形)

6. 设K：单形的有限集合. K是复形 $\Leftrightarrow$

(1) 若$\underline{s}\in K$，则$\underline{s}$的面也在K中；(2) K中的单形内部不交.

pf: 复形定义②：$\forall\underline{s}\in K$，$\underline{t}<\underline{s}$，则$\underline{t}\in K$，即等价于(1)，只须证 定义① $\forall$K中两单形规则相处
$\Leftrightarrow$(2)内部不交.

($\Rightarrow$) 规则相处：不交 或 相交部分为公共面

$\Downarrow$ 内部不交

$\Downarrow$ 若$\underline{s}\cap\underline{s}'$含有$\underline{s}$内部 $\Rightarrow \underline{s}\cap\underline{s}'$为含有$\underline{s}$内部的公共面 $\Rightarrow \underline{s}\cap\underline{s}'=\underline{s}\Rightarrow\underline{s}\subset\underline{s}'$
若$\underline{s}\cap\underline{s}'$还有$\underline{s}'$内部，则$\underline{s}=\underline{s}'$，$\therefore$要么内部不交，要么为同一单形

($\Leftarrow$) $\forall$两单形，要么不交，要么交但内部不交 $\Rightarrow$ 设$x\in\underline{s}\cap\underline{s}'$，则$\mathrm{Car}_K x$ 由上面论证知 $\mathrm{Car}_K x<\underline{s}$和$\underline{s}'$为公共面$\Rightarrow$交于公共面. #

8. L：复形，a：一点，$\forall|L|$上不同点x,x'，$\overline{ax}\cap\overline{ax'}=\{a\}$. $\forall\underline{s}\in L$，记$a\underline{s}$为$a$与$\underline{s}$顶点张成单形.

$K=\{a\underline{s}:\underline{s}\in L\}\cup\{a\}\cup L$. 证明K是复形，且以a为锥顶的单纯锥.

pf: ① 任意K中两个单形$\underline{s}$、$\underline{s}'$，若$\underline{s}$、$\underline{s}'\in L$，则由L复形知它们规则相处
若$\underline{s}\in L$，$\underline{s}'=\{a\}$，则它们不交
若$\underline{s}$、$\underline{s}'=\{a\}$，则它们交于公共面$\{a\}$
若$\underline{s}=a\underline{s_0}$，$\underline{s}'=a\underline{s_0}'$，则它们交于$a\,\underline{s_0}\cap\underline{s_0}'$公共面.
若$\underline{s}=a\underline{s_0}$，$\underline{s}'=\{a\}$，则交于$\{a\}$为其公共面.
若$\underline{s}=a\underline{s_0}$，$\underline{s}'\in L$，则交于$\underline{s_0}\cap\underline{s}'=\phi$或$\underline{s_0}$与$\underline{s}'$公共面
$\Rightarrow\underline{s}$与$\underline{s}'$公共面.

$\Rightarrow\underline{s}$与$\underline{s}'$规则相处

② $\forall\underline{s}\in L$，$\underline{t}<\underline{s}$，则$\underline{t}\in L\subset K$.
$\forall\underline{s}=\{a\}$，$\underline{t}<\underline{s}$，则$\underline{t}=\underline{s}=\{a\}$
$\forall\underline{s}=a\underline{s_0}$，$\underline{t}<\underline{s}$，则$\underline{t}=a\underline{t_0}$，$\underline{t_0}<\underline{s}$ $\Rightarrow\underline{t_0}\in L\Rightarrow\underline{t}\in K$
或$\underline{t}=\{a\}\in K$或$\underline{t}\in L\subset K$.

$\Rightarrow\forall\underline{s}\in K$，$\underline{t}<\underline{s}$，有$\underline{t}\in K$ #

13. K：复形，则$|K|=\bigcup_{\underline{s}\in K}\mathring{\underline{s}}$

pf: $|K|=\bigcup_{\underline{s}\in K}\underline{s}\supseteq\bigcup_{\underline{s}\in K}\mathring{\underline{s}}$，且$\forall x\in|K|$，$\exists\,\mathrm{Car}_K x\in K$，s.t. $x\in\mathring{\mathrm{Car}}_K x$
$\Rightarrow|K|\subseteq\bigcup_{\underline{s}\in K}\mathring{\underline{s}}$ $\therefore|K|=\bigcup_{\underline{s}\in K}\mathring{\underline{s}}$. #

2020.5.14

P188. 1. G：交换群，对应 $\varphi_0: T_q(K) \to G$ 有 $\varphi_0(-s) = -\varphi_0(s), \forall s \in T_q(K)$.

证明 φ_0 可唯一扩张为 $C_q(K)$ 到 G 的同态.

Pf：设 $c \in C_q(K)$ 有 $c = \sum n_i s_i$，$s_i \in T_q(K)$，$n_i \in \mathbb{Z}$，$\{s_i\}$ 为 $T_q(K)$ 中每个单形取定一个定向

则定义 $\varphi_0(c) = \sum n_i \varphi_0(s_i)$，其中 $n_i \varphi_0(s_i) = \begin{cases} \sum_{j=1}^{n_i} \varphi_0(s_i), & n_i > 0 \\ 0, & n_i = 0 \\ \sum_{j=1}^{-n_i} -\varphi_0(s_i), & n_i < 0. \end{cases}$

下面验证 ① 同态：$\forall c' = \sum n_i' s_i$

$\varphi_0(c+c') = \sum (n_i + n_i') \varphi_0(s_i)$

$= \sum n_i \varphi_0(s_i) + \sum n_i' \varphi_0(s_i) = \varphi_0(c) + \varphi_0(c')$

② 唯一性：若 φ_0' 为另一 $C_q(K)$ 到 G 同态，s.t. $\varphi_0'(s) = \varphi_0(s), \forall s \in T_q(K)$.

由 $(\varphi_0' - \varphi_0)(c+c') = (\varphi_0'(c) - \varphi_0(c)) + (\varphi_0'(c') - \varphi_0(c'))$

$= (\varphi_0' - \varphi_0)(c) + (\varphi_0' - \varphi_0)(c')$

知 $\Delta\varphi_0 = \varphi_0' - \varphi_0$ 为 $C_q(K)$ 到 G 同态，且 $\Delta\varphi_0(s) \equiv 0$.

$\forall c \in C_q(K)$，$\exists n_i$，s.t. $c = \sum n_i s_i$

$\Rightarrow \Delta\varphi_0(c) \overset{\text{同态}}{=} \sum n_i \Delta\varphi_0(s_i) \equiv 0 \Rightarrow \varphi_0' \equiv \varphi_0$. #

2. 证明复形的每条1维闭链都为若干简单闭链的和.

Pf：设复形的0维单形为 $\{a_1, \cdots, a_m\}$.

则 $\forall c \in Z_1(K)$ 可表示为 $c = \sum_{i,j} n_{ij} a_i a_j$，其中 $n_{ij} \neq 0$ 仅当 $a_i a_j \in T_1(K)$. 且 $\sum_{j<i} n_{ij} = \sum_{j>i} n_{ij}$.

对 $\sum |n_{ij}|$ 作归纳.

下面给出一种贪婪地找一个简单闭链的做法：

① 取 $i_0 = i$，其中 n_{ij} 不全为0；否则，$c = 0$，无须证明

② 若记 $n_{ij} = -n_{ji}, \forall j < i$，则 $\sum_{j=1, j \neq i}^{m} n_{ij} = 0 \Rightarrow \exists j$，s.t. $n_{ij} > 0$，令 $i_1 = j$

③ 则 $n_{ji} = n_{i_1 i_0} < 0$，由 $\sum_{j \neq i_1} n_{i_1 j} = 0$ 知 $\exists i_2$，s.t. $n_{i_1 i_2} > 0$.

重复③直至 i_r，其中 $i_0, i_1, \cdots, i_{r-1}$ 互异，但 i_r 与之前的某个 i_s 相同，$r-s \geq 3$

则由 $m < \infty$ 知必有此简单闭链 $a_{i_s} a_{i_{s+1}} + \cdots + a_{i_{r-1}} a_{i_r = i_s}$.

对于 $c' = \sum_{i,j} n_{ij} a_i a_j - \sum_{j=s}^{r-1} a_{i_j} a_{i_{j+1}}$，有 $\sum |n_{ij}'| = \sum_{(i,j) \notin \{(i_j, i_{j+1})\}} |n_{ij}| + \sum_{j=s}^{r-1} (n_{i_j i_{j+1}} - 1)$

$= \sum_{i,j,(i,j) \notin \{(i_j, i_{j+1})\}_{j=s}^{r-1}} n_{ij} a_i a_j + \sum_{j=s}^{r-1} (n_{i_j i_{j+1}} - 1) a_{i_j} a_{i_{j+1}}$ $\quad = \sum |n_{ij}| - 3 < \sum |n_{ij}|$

由归纳假设，剩下 c' 为若干简单闭链之和.

$\Rightarrow c$ 为若干 $+ \sum a_{i_j} a_{i_{j+1}}$ #

3. K：n维复形，n维单形数 $\leq n+1$. 证明 $Z_n(K) = 0$

Pf：若 $c = \sum n_i s_i \in Z_n(K)$ 非0，则 $\exists n_j \neq 0$.

不妨设 $s_j = a_0 \cdots a_n$，则由 $\partial_n c = 0$

$\Rightarrow a_0 \cdots \hat{a_i} \cdots a_n$ 的系数为0，$i = 0, 1, \cdots, n$

$\Rightarrow \exists \tilde{s_i} = a_0 \cdots \hat{a_i} \cdots a_n \hat{a_i}$，$\hat{a_i} \neq a_i$，s.t. $\tilde{n_i} \neq 0$

且 $\tilde{s_i} \neq \tilde{s_{i'}}$，因为 $\{a_0, \cdots, \hat{a_i}, \cdots, a_n\} \cup \{a_0, \cdots, \hat{a_{i'}}, \cdots, a_n\}$

$= \{a_0, \cdots, a_n\}$ 只能为 s_j 的端点.

$\therefore$ K 中有相异 n维单形 s_j 和 $\tilde{s_i}$ 共 $n+2$ 个，矛盾！ #

$\therefore$ $Z_n(K) = 0$.

6. K：连通复形，$\alpha_q = |T_q(K)|$，$q \in \mathbb{Z}$. 证明 $Z_1(K)$ 的秩为 $\alpha_1 - \alpha_0 + 1$

Pf：设 L 为 K 的极大树，则由 $|K \setminus L|$ 个 $K \setminus L$ 中定向单形组成 $Z_1(K)$ 的基

知 $\mathrm{rank}(Z_1(K)) = |K \setminus L| = \alpha_1 - |L|$

下面证明 $|L| = \alpha_0 - 1$ 即可，

此即证连通图，若有 α_0 个顶点，则最大树长为 $\alpha_0 - 1$.

$\because$ 对长为 $\alpha_0 - 1$ 的树通过深度/广度优先遍历即得

若有长 $\geq \alpha_0$ 的树，先找到 $\alpha_0 - 1$（方法同上）的子树，

然后删去不在该子树中的1维单形，连通性不变，与

树定义矛盾！ #

7. K：连通复形，a, b：K 的顶点. 证明 $\exists$ 1维简单链以 a, b 为起、终点

Pf：由连通，$\exists$ 1-维链 $a = a_0 a_1 \cdots a_r = b$. 若简单则 OK；否则，不妨假设 $a_i \neq a, b$ $\forall 0 < i < r$

（否则，取从 a_i 到 a_j 的链，其中 $i = \max\{i : a_i = a\}$，$j = \min\{j : a_j = b\}$.）

重复如下"缩并"：若 $a_i = a_j$ $(1 \leq i < j \leq r-1)$，

则考虑 $a_0 a_1 \cdots a_{i-1} a_i a_{j+1} \cdots a_r$.

则由 r 有限，总能使"缩并"停止，

此时的链为1-维简单的. #