Департамент образования города Москвы

Юго-Восточный административный округ

ГБОУ города Москвы «Школа на Юго-Востоке имени Маршала В.И.Чуйкова»

Создание тканевых оболочек для некоторых поверхностей

Выполнил:ученик 11 класса Михельсон Г.В.
Научный руководитель:Привалов А.А.

Москва
2018

Аннотация

В данной работе были рассмотрены сети Чебышёва и на их основании разработаны различные методы расчета объёмных изделий, полученных способом намотки ткани на стержень, и методы расчёта тканевых оболочек конуса, параболоида и сферы.

Ключевые слова: конус,параболоид,полусфера,сфера,сети Чебышёва,евклидово пространство,параметризация поверхности,внутренние координаты,координатная плоскость,координатные линии,координатной сеть поверхности,первая квадратичная форма поверхности,сетевой угол,изометричные поверхности,цилиндрическая система координат.

Основные темы исследования

- Определение „намотка“
- Сети Чебышёва
- Задача с одеванием поверхности на конус
- Построение сети Чебышёва на параболоиде вращения

Введение

В последние годы активно развивается технология армирования изделий настрачиванием лент или нитей на само изделие. Конструкции оболочек из композитных материалов с армирующей структурой могут найти применение в производстве защитной спецодежды, скафандров, космической и военной технологий, поэтому создаются специальные методы проектирования и производства легких и прочных конструкций из композитных материалов бытового и специального назначений.

Впервые задачу об одевании нитяной ткань поверхностей в XIX веке поставил великий русский ученый Пафнутий Львович Чебышёв, введя новую систему координат на поверхности под названием “сети Чебышёва”.

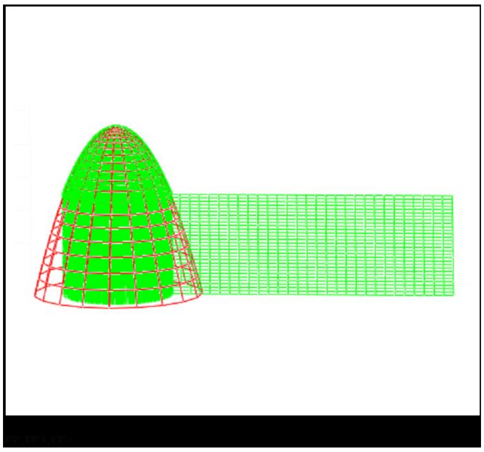
Цели нашей работы:

1. Создать тканевые оболочки для различных объёмных изделий.

2. Рассмотреть сети Чебышева и на их основании разработать различные методы расчёта тканевых оболочек для объёмных фигур.

1. Определение „намотка“

При наматывании полосы ткани на стержень высоты h получается круговой цилиндр высоты h. Если при этом мы будем разрезать ткань вдоль стержня, то в результате такого наматывания получится некоторое круговое тело. Обычно это разрезание производят по шаблону (по форме тела).



Таким образом приходим к следующей задаче.

Задача. По какой линии следует разрезать полосу ткани, чтобы в результате наматывания ее оставшейся части на стержень получить круговое тело заданной формы (близкое к заданной форме).

Для решения задачи введем определение.

Определение. Для тела T, полученного вращением убывающей* на $[0, R]$ функции $y = g(x)$, $g(0) = h$, $g(R) = 0$, вокруг оси Oy, назовем намоткой тела T, функцию $y = f(t)$:

$$f(t) = g(R\sqrt{t}), t \in [0, 1] \tag{1}$$

Поясним это определение. Пусть $f(t)$ – намотка и d – малая величина по сравнению с заданными величинами h, R и 1 (d это толщина ткани). Положим

$$X = t \cdot (N + 1)\pi R, N \cdot d = R, 0 \leq t \leq 1, \tag{2}$$

т.е. $\frac{1}{N} = o(1)$ при $d \to 0$. Для функции $f_1(X) = f(\frac{X}{\pi R(N+1)})$ введём семейство прямоугольников(полосок) $\delta_j = [0, X_{j-1}] \times [(j-1)d, jd], j = 1, 2, ..., m$, где X_j определяется равенством: $f_1(X_j) = (j-1) \cdot d$, а $m = [\frac{h}{d}]$- потолок(верхняя целая часть) числа $\frac{h}{d}$.

Далее каждую полоску δ_j будем наматывать на ось Oy, считая ее толщину равной d. Тогда, если при наматывании первой полоски δ_1, мы сделаем N оборотов, то получим цилиндр высотой d и радиусом основания R, т.к.

$$2\pi d + 4\pi d + ... + 2N\pi d = N(N+1)\pi d = \pi R(N+1) = X_0$$

(здесь радиус окружности первого оборота равен d). Аналогично поступим с остальными полосками δ_j. Каждый j-й цилиндр будет иметь высоту d и радиус основания $x_j = nd$, где, как и выше, $\pi n(n+1)d = X_j, j = 1, 2, ..., m$. Отсюда из 2 имеем

2. Сети Чебышёва

Обычно в евклидовом пространстве поверхность задается векторным уравнением $r = r(u, v)$, где u и v – *внутренние координаты поверхности* , а r – радиус-вектор текущей точки поверхности. Уравнение $r = r(u, v)$ соответствует *параметрическому способу задания поверхности* :

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases}$$

Такой способ задания поверхности называют также *параметризацией поверхности.* Каждой точке поверхности соответствуют параметры u и v или точка (u, v) плоскости Ouv. Числа u и v называются *внутренними координатами* или *координатами точки* . Плоскость Ouv – *координатной плоскостью.* Линии на поверхности, соответствующие перпендикулярным прямым $u = const$ и $v = const$ плоскости Ouv, называются *координатными линиями.* Множество координатных линий называется *координатной сетью поверхности.* То есть координатной сеть соответствует прямоугольной сети линий $\{u = const, v = const\}$ плоскости Ouv.

Далее, $dr = r_u du + r_v dv$ – дифференциал радиус-вектора r вдоль выбранного направления смещения из точки M в бесконечно близкую точку M_1. Тогда квадрат главной части приращения длины $|MM_1|$ выразится квадратом дифференциала:

$$dr^2 = r_u^2 du^2 + 2r_u \cdot r_v \cdot dudv + r_v^2 dv^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

и называется *первой квадратичной формой поверхности* или *линейным элементом поверхности* . Зная первую квадратичную форму поверхности, можно вычислять длины дуг кривых на поверхности, углы между кривыми и площади областей на поверхности. Например, если линия γ лежит на поверхности, то, по определению первой квадратичной формы, длина l_γ равна криволинейному интегралу первого рода:

$$l_\gamma = \int\limits_\gamma |dr|.$$

Если D – область, лежащая на поверхности $r = r(u, v)$, то ее площадь S находится как сумма длин векторных произведений $r_u \times r_v (|r_u \times r_v|$ – площадь параллелограмма, построенного на векторах r_u и $r_v)$:

$$S = \int\int\limits_D |r_u \times r_v| dudv = \int\int\limits_D \sqrt{EG - F^2} dudv$$

Последнее равенство следует из следующих соображений: пусть ϕ – угол между векторами r_u и r_v тогда

$$|r_u \times r_v| = |r_u||r_v| \sin\phi = |r_u||r_v|\sqrt{1 - \cos^2\phi} = \sqrt{r_u^2 r_v^2 - (r_u \cdot r_v)} = \sqrt{EG - F^2}$$

Сетевой угол ϕ (угол между координатными линиями $u = const$ и $v = const$) находится формулой:

$$\cos\phi = \frac{F}{\sqrt{EG}}$$

как как если $u = const$, то $du = 0$, а если $v = const$, то $dv = 0$.

В формулы, определяющие вышеуказанные величины, входят только лишь коэффициенты первой квадратичной формы. Поэтому, если известна первая квадратичная форма поверхности, можно исследовать геометрию на поверхности, не обращаясь к ее уравнениям, а лишь используя ее первую квадратичную форму.

Совокупность геометрических фактов, относящихся к поверхности, которые можно получить при помощи ее первой квадратичной формы, составляет так называемую *внутреннюю геометрию поверхности.*

Поверхности, имеющие одинаковые первые квадратичные формы и потому имеющие одинаковую внутреннюю геометрию, называются *изометричными* .

Координатная сеть поверхности называется *сетью Чебышёва* , если образованные ей криволинейные четырехугольники имеют равные противоположные стороны.

Если координатная сеть является сеть Чебышёва, то E и G являются постоянными величинами. Можно считать, что $E = G = 1$, тогда координатная сеть Чебышёва имеет вид:

$$dr^2 = du^2 + 2 \cdot \cos\omega \cdot du \cdot dv + dv^2, \tag{3}$$

где ϕ - угол между координатными линиями (сетевой угол). Таким образом, координатная сеть поверхности является сетью Чебышёва, если образованные ей координатные криволинейные четырехугольники имеют стороны, равные сторонам соответствующих им координатных прямоугольников плоскости Ouv.

Сети с первой квадратичной формой 3 впервые появились в сочинении П.Л.Чебышёва «О кройке одежды», доложенное им в Assjciation Francaise pour l'avancement des sciences 28 августа 1878 года.

П.Л. Чебышёв приходит к сети 3, решая задачу об одевании поверхности тканью, которая первоначально предполагается плоской, составленной из параллельных семейств нитей, пересекающихся ортогонально. При одевании поверхности нити изгибаются, сохраняя длину, меняя сетевой угол.

Сети Чебышёва оказались очень полезными для теории поверхностей, в частности, они тесно связаны с другим основным понятием современной дифференциальной геометрии – параллельным перенесением.

3. Задача об одеванием конуса тканью

В данной задаче целью является создание выкройки чехла для конуса, иначе говоря, выкройки такой поверхности, которая полностью облегала бы конус заданных размеров. При этом одна координатная линия (нить основы) и перпендикулярная ей (нить утка) должны лежать в перпендикулярных осевых сечений конуса.

Рассмотрим конус высоты h и радиусом основания R. Образующую конуса обозначим $l = \sqrt{R^2 + h^2}$. Тогда уравнение конуса в декартовой системе координат имеет вид:

$$z^2 = \frac{h^2}{R^2}(x^2 + y^2), 0 \leq z \leq h.$$

В цилиндрической системе координат уравнение нашего конуса таково:

$$\begin{cases} x = \rho \cdot \cos\alpha \\ y = \rho \cdot \sin\alpha \\ z = \frac{\rho}{R} \cdot h \end{cases}$$

где угол $\alpha \in [0, 2\pi]$ и $0 \leq \rho \leq h$. Мы же рассмотрим следующую параметризацию нашего конуса:

$$\begin{cases} x = \frac{R}{l} \cdot u \cdot \cos \frac{vl}{R} \\ \\ y = \frac{R}{l} \cdot u \cdot \sin \frac{vl}{R} \\ \\ z = \frac{h}{l} \cdot u \end{cases} \tag{4}$$

где $0 \leq v \leq \frac{2\pi R}{l}$ и $0 \leq u \leq l$.

Координатная сеть при способе задания 4 не является сетью Чебышёва, хотя является ортогональной (все линии поверхности соответствующие прямым $a = const$ и $\alpha = const$ перпендикулярны). В самом деле, из 4 имеем

$$r = r(u, v) = \begin{pmatrix} x = \frac{R}{l} \cdot u \cdot \cos \frac{vl}{R} \\ \\ y = \frac{R}{l} \cdot u \cdot \sin \frac{vl}{R} \\ \\ z = \frac{h}{l} \cdot u \end{pmatrix}$$

Отсюда найдем первую квадратичную форму конуса

$$r_u = \begin{pmatrix} \frac{R}{l} \cdot \cos \frac{vl}{R} \\ \\ \frac{R}{l} \cdot \sin \frac{vl}{R} \\ \\ \frac{h}{l} \end{pmatrix}$$

$$r_u^2 = \frac{R^2}{l^2} + \frac{h^2}{l^2} = 1$$

$$r_v = \begin{pmatrix} -u \cdot \sin \frac{vl}{R} \\ \\ u \cdot \cos \frac{vl}{R} \\ \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$r_v^2 = u^2$$

$$r_u r_v = -\frac{R}{l} \cos \frac{vl}{R} \cdot u \cdot \sin \frac{vl}{R} + \frac{R}{l} \sin \frac{vl}{R} \cdot u \cdot \cos \frac{vl}{R} + 0 = 0$$

$$dr^2 = du^2 + u^2 dv^2 = E du^2 + G dv^2$$

Значит $E = 1$ – постоянная величина, $F = 0$ и $G = u^2$ – не является постоянной функцией (зависит от u). То есть построенная сеть является ортогональной сетью; расстояния вдоль координатных линий $v = const$ не меняются, но расстояния вдоль линий $u = const$ зависит от u. Поэтому построенная сеть не является чебышёвской.

Для построения искомой сети заметим, что конус разворачивается на плоскость и его разверткой является сектор круга радиуса l и углом $\beta = \frac{2\pi R}{l}$.

В качестве поверхности рассмотрим плоскость $Oxy(z = 0)$ и параметризуем ее следующим образом:

$$r = \begin{pmatrix} u \cdot \cos v \\ u \cdot \sin v \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow r_u = \begin{pmatrix} \cos v \\ \sin v \\ 0 \end{pmatrix}, r_v = \begin{pmatrix} -u \cdot \sin v \\ u \cdot \cos v \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5}$$

Легко видеть, что первая квадратичная форма здесь равна:

$$dr^2 = du^2 + u^2 dv.$$

Точно такая же, как и у конуса, заданного системой уравнений 4. Это обстоятельство еще раз подтверждает что конус и плоскость изометричны, т.е. наложимые.

Перейдем теперь к построению сети Чебышёва на конусе. Развернем наш конус на плоскость и покроем его сетью маленьких параллелограммов, как показано на рисунке ниже. Острый угол каждого параллелограмма равен $\alpha = \frac{\beta}{4} = \frac{\pi R}{2l}$. Затем построенную конструкцию наложим на конус (рис. 1):

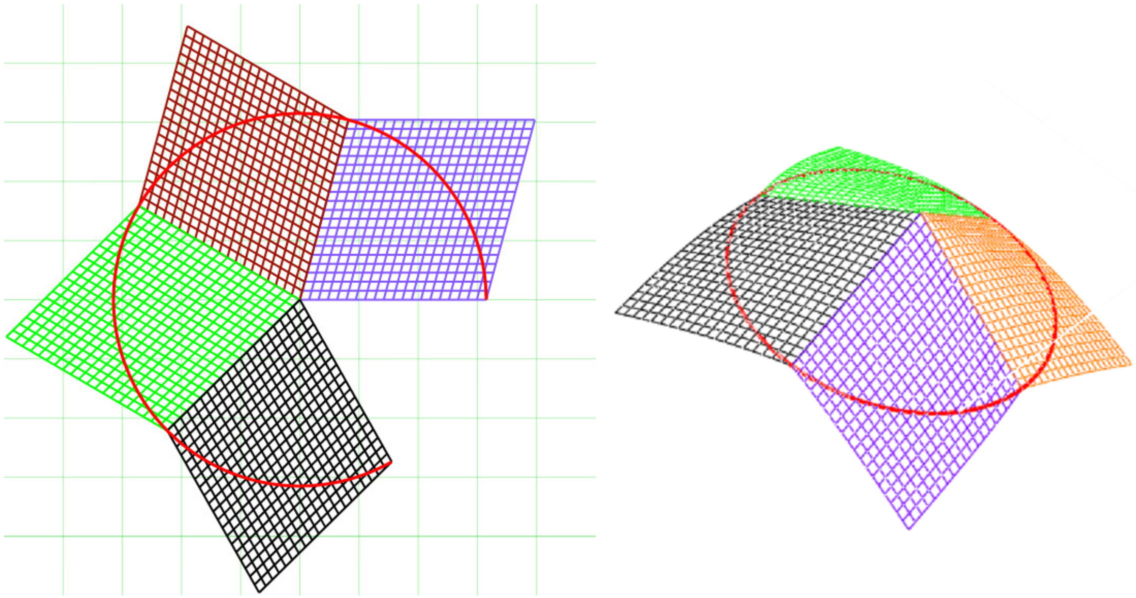


Рис.1 Развертка и конус с R=12 и h=8

Конус покроется сетью ячеек, которые будут иметь равные противоположные стороны. Это и есть геометрической представление искомой сети Чебышёва.

Для аналитического вывода искомой сети заметим, что в силу соображений симметрии достаточно рассмотреть четвертую часть конуса:

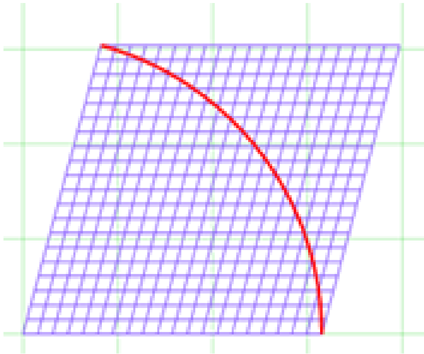


Рис.2 $\frac{1}{4}$ развертки конуса на плоскости Ost

Деформируем эту сеть, доводя углы параллелограммов до $\frac{\pi}{2}$ не изменяя длин их сторон. Для этого применим линейное преобразование плоскости, задаваемое матрицей:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \\ \\ 0 & \frac{1}{\sin\alpha} \end{pmatrix}$$

Это преобразование оставляет на месте вектор $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, а вектор $\begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$ переводит в вектор $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Четвертая часть границы нашей выкройки – дуга окружности радиуса l перейдет при этом преобразовании в кривую, векторное уравнение которой следующее:

$$\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} l \cdot \cos\phi \\ l \cdot \sin\phi \end{pmatrix} = l \cdot \begin{pmatrix} \cos\phi - \frac{\sin\phi\cos\alpha}{\sin\alpha} \\ \frac{\sin\phi}{\sin\alpha} \end{pmatrix} = \frac{l}{\sin\alpha} \cdot \begin{pmatrix} \sin(\alpha-\phi) \\ \sin\phi \end{pmatrix} \tag{6}$$

где $0 \le \phi \le \alpha$ – текущий параметр дуги окружности. Построим кривую 6 и три симметричные ей кривые, соответствующие другим частям конуса. Получим искомую выкройку.

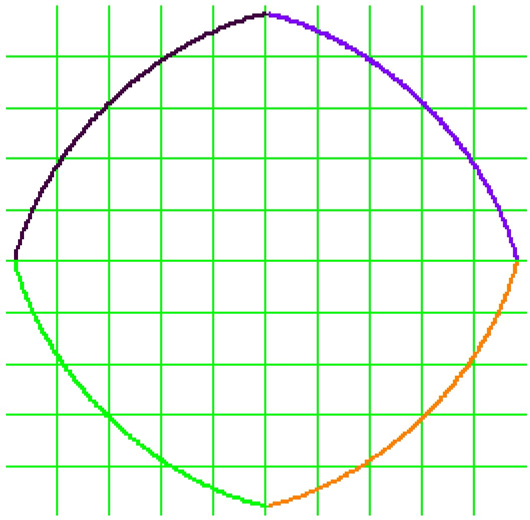


Рис. 3 Выкройка ткани для одевания конуса с радиусом основания $R = 12$ и высотой $h = 8$

В заключении этого раздела геометрический смысл кривой 5. Построенная сеть Чебышева выкладывается на плоскость (рис. 2), где векторы $l_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $l_2 = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$ образуют базис. Переходя к параметризации 5 или полярной системе координат, имеем:

$$s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u\cos v \\ u\sin v \end{pmatrix} \begin{cases} s + t\cos\alpha = u\cos v \\ t\sin\alpha = u\sin v \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{cases} u^2 = (s + t\cos\alpha)^2 + t^2 sin^2\alpha \\ \cos v = \frac{s+t\cos\alpha}{u} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = \sqrt{s^2 + t^2 + 2st\cos\alpha} \\ v = \arccos\frac{s+t\cos\alpha}{\sqrt{s^2+t^2+2st\cos\alpha}} \end{cases} \tag{7}$$

Уравнение кривой 6: $u = l$, поэтому из 7 следует, что ее уравнение в системе Ost выглядит так

$$s^2 + t^2 + 2st\cos\alpha = l^2$$

т.е. это кривая второго порядка. Чтобы выяснить ее тип повернем плоскость Ost на 45 градусов, т.е. введем новые координаты $s1$ и $t1$:

$$\begin{cases} s = \frac{s_1 - t_1}{\sqrt{2}} \\ t = \frac{s_1 + t_1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Подставляя их в наше уравнение получим

$$\left(\frac{s_1 - t_1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{s_1 + t_1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 2\left(\frac{s_1 - t_1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{s_1 + t_1}{\sqrt{2}}\right)\cos\alpha = l^2 \Rightarrow s_1^2 + t_1^2 + (s_1^2 - t_1^2)\cos\alpha = l^2 \Rightarrow$$

$\Rightarrow (1+\cos\alpha)s_1^2 + (1-\cos\alpha)t_1^2 = l^2 \Rightarrow \frac{s_1^2}{\frac{l^2}{(\sqrt{1+\cos\alpha})^2}} + \frac{t_1^2}{\frac{l^2}{(\sqrt{1-\cos\alpha})^2}} = 1$

А это уравнение эллипса с полуосями $\frac{l}{\sqrt{1+\cos\alpha}}$ и $\frac{l}{\sqrt{1-\cos\alpha}}$.

Таким образом, граница выкройки состоит из частей двух одинаковых эллипсов с общим центром и расположенных перпендикулярно (рис. 4).

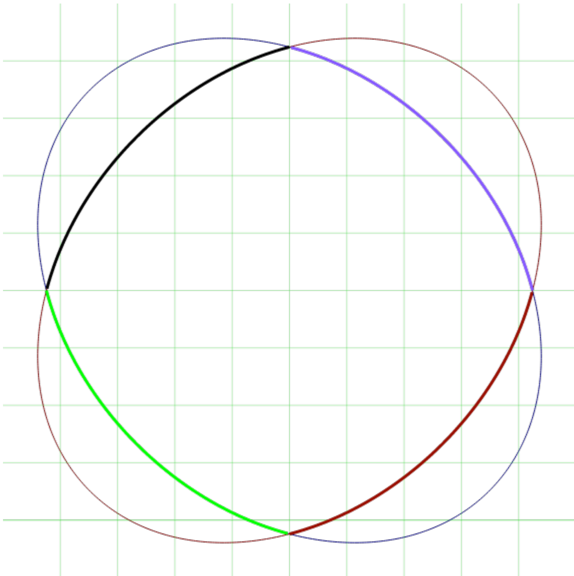


Рис. 4

Из 4 и 7 получаем аналитическую параметризацию сети Чебышёва на одной четвертой части конуса:

$$r = r(s,t) = \begin{pmatrix} \frac{R}{l}\cdot\sqrt{s^2+t^2+2st\cos\alpha}\cdot\cos\frac{l\cdot\arccos\frac{s+t\cos\alpha}{\sqrt{s^2+t^2+2st\cos\alpha}}}{R} \\ \frac{R}{l}\cdot\sqrt{s^2+t^2+2st\cos\alpha}\cdot\sin\frac{l\cdot\arccos\frac{s+t\cos\alpha}{\sqrt{s^2+t^2+2st\cos\alpha}}}{R} \\ \frac{h}{l}\cdot\sqrt{s^2+t^2+2st\cos\alpha} \end{pmatrix}$$

$\alpha = \frac{\beta}{4} = \frac{\pi R}{2l}$.

4. Сеть Чебышёва на параболоиде вращения

Рассмотрим параболоид вращения радиусом основания R и высотой h и его уравнение в декартовой системе координат и векторное уравнение имеют вид:

$$z = \frac{h}{R^2}(x^2+y^2) \tag{8}$$

и

$$r = r(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ \frac{h}{R^2}(u^2+v^2) \end{pmatrix}$$

Найдем первую квадратичную форму:

$$r_u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{2hu}{R^2} \end{pmatrix}, r_u^2 = 1 + \frac{4h^2u^2}{R^4} = \frac{R^4+4h^2u^2}{R^4};$$

$$r_v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{2hv}{R^2} \end{pmatrix}, r_v^2 = 1 + \frac{4h^2v^2}{R^4} = \frac{R^4+4h^2v^2}{R^4};$$

$$r_u \cdot r_v = \frac{4h^2uv}{R^4}$$

Отсюда получаем линейный элемент параболоида:

$$dr^2 = \frac{R^4+4h^2u^2}{R^4}du^2 + \frac{8h^2uv}{R^4}dudv + \frac{R^4+4h^2v^2}{R^4}dv^2 \tag{9}$$

Введем новую систему координат st следующим образом: каждой точке (u,v) ставим в соотвествие пару (s,t) так, чтобы

$$ds^2 = \frac{R^4+4h^2u^2}{R^4}du^2$$

и

$$dt^2 = \frac{R^4+4h^2v^2}{R^4}dv^2$$

Отсюда

$$s = s(u) = \int_0^u \sqrt{\frac{R^4+4h^2\tau^2}{R^4}}d\tau = \frac{R^2}{2h}\int_0^u \sqrt{1+\Big(\frac{2h\tau}{R^2}\Big)^2}d\Big(\frac{2h\tau}{R^2}\Big) =$$

$$= \frac{R^2}{2h}\Big(\frac{hu}{R^2}\sqrt{1+\Big(\frac{2hu}{R^2}\Big)^2} + \frac{1}{2}\ln\Big|\frac{2hu}{R^2} + \sqrt{1+\Big(\frac{2hu}{R^2}\Big)^2}\Big|\Big);$$

$$t = t(v) = \int_0^v \sqrt{\frac{R^4+4h^2\tau^2}{R^4}}d\tau = \frac{R^2}{2h}\int_0^v \sqrt{1+\Big(\frac{2h\tau}{R^2}\Big)^2}d\Big(\frac{2h\tau}{R^2}\Big) =$$

$$= \frac{R^2}{2h}\Big(\frac{hv}{R^2}\sqrt{1+\Big(\frac{2hv}{R^2}\Big)^2} + \frac{1}{2}\ln\Big|\frac{2hv}{R^2} + \sqrt{1+\Big(\frac{2hv}{R^2}\Big)^2}\Big|\Big); \tag{10}$$

Введем для удобства нечетную функцию g:

$$g(\tau)=\frac{R^2}{2h}\Big(\frac{h\tau}{R^2}\sqrt{1+\Big(\frac{2h\tau}{R^2}\Big)^2}+\frac{1}{2}\ln\Big|\frac{2h\tau}{R^2}+\sqrt{1+\Big(\frac{2h\tau}{R^2}\Big)^2}\Big|\Big);$$

и обратную к g функцию обозначим через f,т.е.$f(g(\tau))=\tau,\forall\tau$. Тогда в координатах st уравнение параболоида и его первая квадратичная форма примут вид:

$$r=r(s,t)\begin{pmatrix} f(s)\\ \\ f(t)\\ \\ \frac{h}{R^2}(f^2(s)+f^2(t)) \end{pmatrix}$$

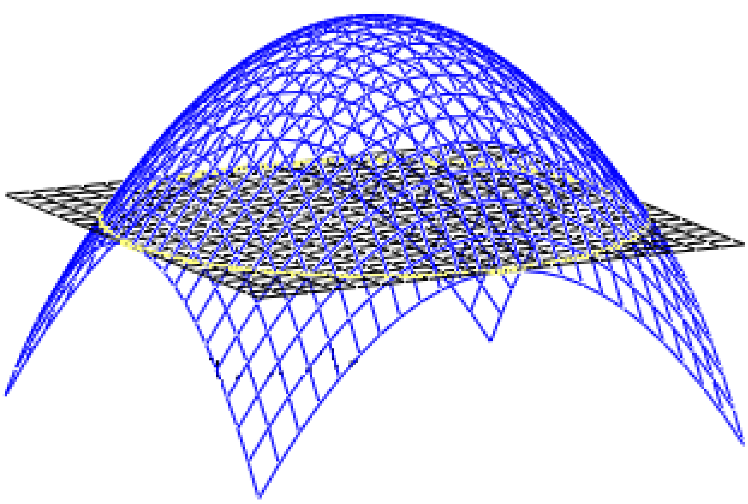
$$dr^2=ds^2+\frac{8h^2f(s)f(t)f'(s)f'(t)}{R^4}dsdt+dt^2$$

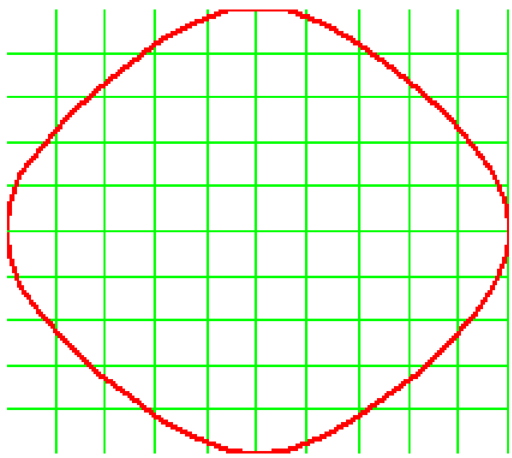
Здесь $s=g(u)$, $t=g(v)$,$u=f(s)$ и $v=f(t)$.

Геометрически $g(u)$ равна длине отрезка параболы в сечения параболоида плоскостью $y=v$ от вершины $P\ \Big(0,v,\frac{hv^2}{R^2}\Big)$ до точки $M\ \Big(u,v,h\frac{v^2+u^2}{R^2}\Big)$ при каждом фиксированном v, если $u>0$ и этому расстоянию взятому со знаком минус, если $u<0$. Аналогично, $g(v)$ – при каждом фиксированном u.

Уравнение границы выкройки γ задаем параметрически и строим на плоскости Ost:

$$\gamma:\begin{cases} s=g(l\cdot\cos\phi)\\ t=g(l\cdot\sin\phi)\end{cases}\quad ,0\le\phi\le 2\pi$$





5. Задача об одеванием сферы тканью

Рассмотрим сферу $x^2+y^2+z^2=1$ в сферических координатах:

$$\begin{cases} x=\cos\phi\sin\theta \\ y=\sin\phi\sin\theta \\ z=\cos\theta \\ 0\le\phi\le 2\pi, 0\le\theta\le\pi \end{cases} \tag{11}$$

При фиксированном $\phi=\phi_0$ линии $\{\phi=\phi_0, 0\le\theta\le\pi\}$ называются меридианами, а при фиксированном $\theta=\theta_0$: $\{\theta=\theta_0, 0\le\phi\le 2\pi\}$ – параллелями.

Первая сеть $\{u=const, v=const\}$ будем строить так, чтобы две линии $u=0$ и $v=0$ являлись перпендикулярными меридианами.

Для построения сети в первом октанте разобьем отрезки на осях $\left[0\le u\le\frac{\pi}{2}\right]$ и $\left[0\le v\le\frac{\pi}{2}\right]$ на n равных частей и будем достраивать их до криволинейных четырехугольников из условия равенства противоположных сторон. Длины сторон ячеек будут равными $a=\frac{\pi}{2n}$. В плоскости Ouv это будут квадратики

$$\left[\frac{\pi(i-1)}{2n},\frac{\pi i}{2n}\right]\times\left[\frac{\pi(j-1)}{2n},\frac{\pi j}{2n}\right], 1\le i,j\le n$$

Обозначим

$$r_{i,0}=\begin{pmatrix}\sin\frac{\pi i}{2n}\\ \\ 0\\ \\ \cos\frac{\pi i}{2n}\end{pmatrix}, r_{0,i}=\begin{pmatrix}0\\ \\ \sin\frac{\pi i}{2n}\\ \\ \cos\frac{\pi i}{2n}\end{pmatrix}, i=0,1,...,n \tag{12}$$

Это будут радиус-векторы точек на сфере – точек нашего разбиения. Через $r_{i,j}$, $1\le i,j\le n$, обозначим радиус-векторы других, пока не найденных, узлов сети. Для их последовательного нахождения решим следующую задачу:

Пусть A, B, C – точки на сфере с центром O, причем наименьшие дуги (дуги окружностей с центром в точке O) AB и AC равны (это значит, равны углы $\angle\, AOC=\angle\, AOB$). Требуется найти на сфере такую точку D, чтобы в, полученном криволинейном четырехугольнике, были бы равные стороны.

Пусть M – проекция точки A плоскость треугольника OBC. Тогда искомый радиус-вектор $\overline{OD}$ будет определяться равенством:

$$\overline{OD}=\overline{OA}+2\overline{AM}$$

Докажем это. Выразим вектор $\overline{OD}$ через векторы $\overline{OA}$,$\overline{OB}$ и $\overline{OC}$. Так как $OM=OA\cdot\cos\angle AOM$, а вектор $\overline{OM}$ коллинеарный вектору $\overline{OB}+\overline{OC}$, то

$$\overline{OM}=\frac{\overline{OB}+\overline{OC}}{|\overline{OB}+\overline{OC}|}\cdot\frac{\overline{OA}\cdot(\overline{OB}+\overline{OC})}{|\overline{OB}+\overline{OC}|}=(\overline{OB}+\overline{OC})\frac{\overline{OA}\cdot(\overline{OB}+\overline{OC})}{(\overline{OB}+\overline{OC})^2}$$

и

$$\overline{OD}=\overline{OA}+2(\overline{OM}-\overline{OA})=2(\overline{OB}+\overline{OC})\frac{\overline{OA}\cdot(\overline{OB}+\overline{OC})}{(\overline{OB}+\overline{OC})^2}-\overline{OA} \qquad (13)$$

Точка D лежит на сфере, т.к.

$$OD^2=4(\overline{OB}+\overline{OC})^2\frac{(\overline{OA}\cdot(\overline{OB}+\overline{OC}))^2}{(\overline{OB}+\overline{OC})^4}-4\frac{(\overline{OA}\cdot(\overline{OB}+\overline{OC}))^2}{(\overline{OB}+\overline{OC})^2}+OA^2=1$$

Дуги BD и CD также равны, т.к. стягивают равные хорды. Докажем, например, что $BD=AB$.

$$BD^2-AB^2=(\overline{OB}-\overline{OD})^2-(\overline{OB}-\overline{OA})^2=2-2\overline{OD}\cdot\overline{OB}-2+2\overline{OA}\cdot\overline{OB}=$$

$$=2\overline{OB}\cdot(\overline{OA}-\overline{OD})=4\overline{OB}\cdot\overline{OM}=0$$

т.к. $\overline{OM}\perp\overline{OB}$.

С помощью полученной формулы 13 получаем рекуррентные формулы для $r_{i,j}$, $1\leq i,\, j\leq n$.

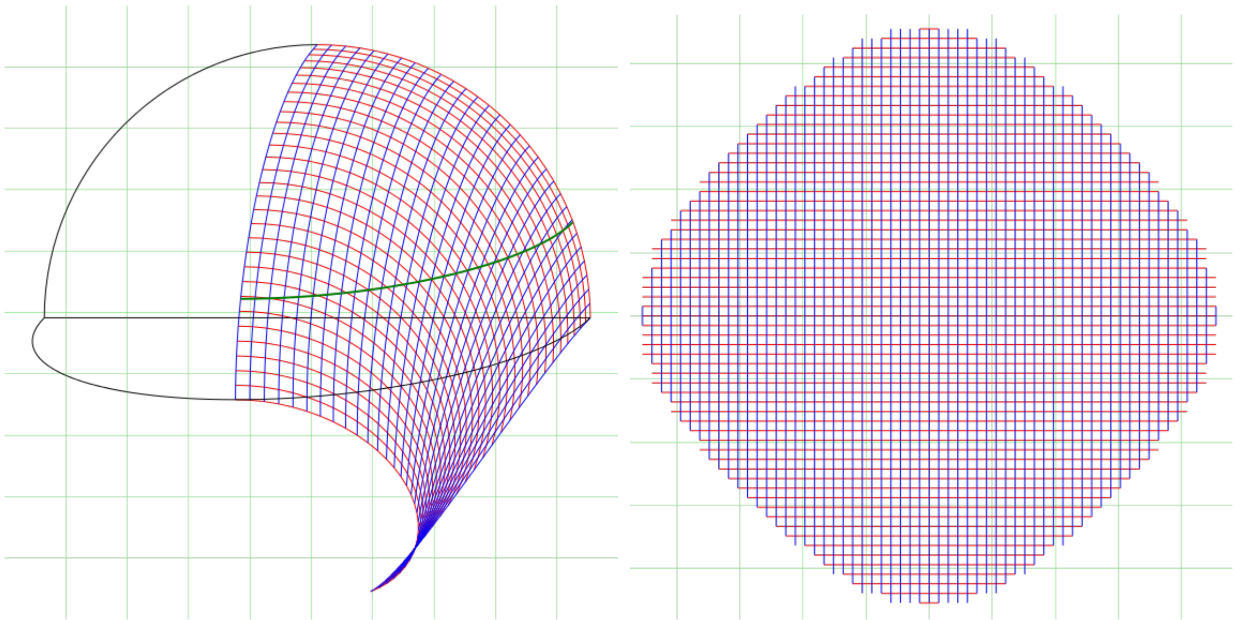
$$r_{i,j}=2(r_{i-1,j}+r_{i,j-1})\frac{(r_{i-1,j}+r_{i,j-1})\cdot r_{i-1,j-1}}{(r_{i-1,j}+r_{i,j-1})^2}-r_{i-1,j-1}\,;i,j=1,2,...,n \qquad (14)$$

где $r_{i,0}$, $i=0,1,\ldots,n$, и $r_{0,j}$, $j=0,1,\ldots,n$, определяются формулами 12 .

Заметим, что здесь меньшие углы ячеек уменьшаются и, в конце концов, координатные линии начинают «переплетаться», что при практическом применение соответствует образованию «складок».

Итак, мы построили сеть в первом октанте, в остальных октантах полупространства $z\geq 0$ сеть достраивается симметрично. Вершины наименьших углов ячеек лежат на биссектрисе $u=v$, оценить эти углы можно как углы между веторами $(r_{i,i+1}-r_{i,i})$ и $(r_{i+1,i}-r_{i,i})$. Обозначим эти углы α_i, i = 0,1,...,n - 1. Тогда

$$\alpha_i=arccos\frac{(r_{i+1,i}-r_{i,i})\cdot(r_{i,i+1}-r_{i,i})}{|r_{i+1,i}-r_{i,i}|\cdot|r_{i,i+1}-r_{i,i}|},i=0,1,2,...,n-1 \qquad (15)$$



Сеть Чебышева с двумя заданными перпендикулярными координатными линиями, являющимися геодезическими и выкройка для полусферы.

Построенная выше конструкции является приближением сети Чебышева. Спрашивается, а нельзя ли получить аналитическое представление какой-нибудь сети Чебышева на сфере, т.е. такой, что в выражении первой квадратичной форме $r_u^2 = r_v^2$ =1 ? Оказывается можно. Например, пусть $r = r(u, v)$, где

$$r(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(u+v)\,\mathrm{th}(u-v) \\ \sin(u+v)\,\mathrm{th}(u-v) \\ \frac{1}{\mathrm{ch}(u-v)} \end{pmatrix} \tag{16}$$

$\mathrm{ch}\, t = \frac{e^t+e^{-t}}{2}$, $\mathrm{sh}\, t = \frac{e^t-e^{-t}}{2}$, $\mathrm{th}\, t = \frac{e^t+e^{-t}}{e^t-e^{-t}}$ – гиперболические косинус, синус и тангенс t.

Докажем, что уравнение 16 задает полусферу радиуса 1. В самом деле

$$r^2(u,v) = \cos^2(u+v)\,\mathrm{th}^2(u-v) + \sin^2(u+v)\,\mathrm{th}^2(u-v) + \frac{1}{\mathrm{ch}^2(u-v)} =$$
$$= \mathrm{th}^2(u-v) + \frac{1}{\mathrm{ch}^2(u-v)} = \frac{\mathrm{sh}^2(u-v)+1}{\mathrm{ch}^2(u-v)} = \frac{\mathrm{ch}^2(u-v)}{\mathrm{ch}^2(u-v)} = 1$$

Теперь проверим выполнение условий $r_u^2 = r_v^2 = 1$:

$$r_u = \begin{pmatrix} -\sin(u+v)\,\mathrm{th}(u-v) + \cos(u+v)\frac{1}{\mathrm{ch}^2(u-v)} \\ \\ \cos(u+v)\,\mathrm{th}(u-v) + \sin(u+v)\frac{1}{\mathrm{ch}^2(u-v)} \\ \\ \frac{-\mathrm{sh}(u-v)}{\mathrm{ch}^2(u-v)} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r_u^2 = \operatorname{th}^2(u-v) + \frac{1}{\operatorname{ch}^4(u-v)} + \frac{\operatorname{sh}^2(u-v)}{\operatorname{ch}^4(u-v)} =$$

$$= \frac{\operatorname{sh}^2(u-v)}{\operatorname{ch}^2(u-v)} + \frac{1+\operatorname{sh}^2(u-v)}{\operatorname{ch}^4(u-v)} = 1$$

Аналогично, доказывается, что $r_v^2 = 1$. Найдем косинусы сетевых углов:

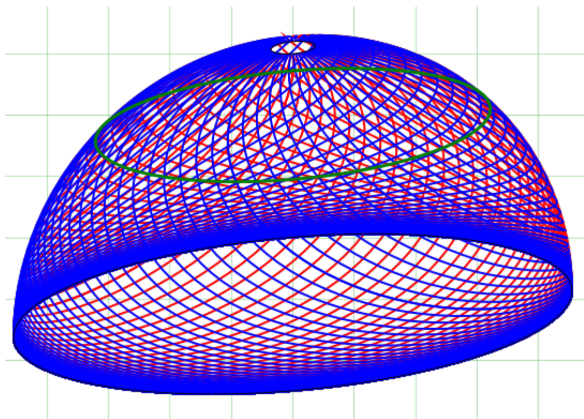
$$\cos\omega = r_u r_v = \sin^2(u+v)\operatorname{th}^2(u-v) - \frac{cos^2(u+v)}{\operatorname{ch}^4(u-v)} + \cos^2(u+v)\operatorname{th}^2(u-v) -$$

$$-\frac{\sin^2(u+v)}{\operatorname{ch}^4(u-v)} - \frac{\operatorname{sh}^2(u-v)}{\operatorname{ch}^4(u-v)} = \operatorname{th}^2(u-v) - \frac{1}{\operatorname{ch}^4(u-v)} - \frac{\operatorname{sh}^2(u-v)}{\operatorname{ch}^4(u-v)} = \qquad (17)$$

$= \frac{\operatorname{sh}^2(u-v)}{\operatorname{ch}^2(u-v)} - \frac{1}{\operatorname{ch}^2(u-v)} = 1 - \frac{2}{\operatorname{ch}^2(u-v)}$

Значит, средняя линия (линия, на которой сетевые углы прямые) – окружность на уровне $z = \frac{1}{\sqrt{2}}$, что соответствует параллели $\theta = \frac{\pi}{4}$ и одеванию на сферу цилиндра радиуса $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Таким образом, параметризация 16 задает в явном виде симметричную сеть Чебышева на полусфере:



Сеть Чебышева, полученная одеванием нитяного цилиндра с радиусом основания $\frac{\sqrt{2}}{2}R_{domain}$ на сферу

Заключение

1.Разработаны методики расчёта объёмных изделий, полученных способом намотки тканей на стержень.

2.Разработаны методики расчёта тканевых оболочек конуса,параболоида и сферы с использованием сетей Чебышёва.

Список литературы

1. Красный Чебышёв П.Л., Полное собрание сочинений. т.5, М.1951.
2. Каган В.Ф., Основы теории поверхностей. М., 1948. Ч. 2.
3. Новожилов В.В., Теория тонких оболочек., 2010.
4. Кривошапко С.Н., Торсовые поверхности и оболочки, 1991.