VRPTW определяется набором транспортных средств **V**, набором клиентов **C** и ориентированным графом **Q**. Обычно набор транспортных средств считается однородным, то есть все транспортные средства идентичны. Граф состоит из **|C| + 2** вершин, где клиенты обозначены 1,2,... ,n, а депо представлено вершинами 0 (**"начальное депо"**) и n + 1 (**"депо возвращения"**). Множество всех вершин, это 0,1,2, …, n+1 обозначается **N**. Набор дуг, **A**, представляет прямые связи между депо и клиентами, а также дуги между самими клиентами. Здесь нет дуг, заканчивающихся в вершине 0 или исходящей из вершины n + 1. С каждой дугой (i,j), где $i \neq j$ мы связываем стоимость $\mathbf{c_{ij}}$ и время $\mathbf{t_{ij}}$, которые могут включать время обслуживания у клиента i.

У каждого транспортного средства есть вместимость **q**, а у каждого клиента i - спрос $\mathbf{d_i}$. У каждого клиента i есть ***временное окно*** $\mathbf{[a_i, b_i]}$, и транспортное средство должно прибыть к клиенту до $\mathbf{b_i}$. Если транспортное средство прибудет до того, как откроется временное окно, то оно должно дождаться момента $\mathbf{a_i}$ для обслуживания клиента. Предполагается, что временные окна для обоих складов идентичны $\mathbf{[a_0, b_0]}$, которые представляют горизонт планирования. Транспортные средства не могут покинуть склад до $\mathbf{a_0}$ и должны вернуться не позднее момента времени $\mathbf{b_{n+1}}$.

Предполагается, что $\mathbf{q, a_i, b_i, d_i, c_{ij}}$ являются неотрицательными целыми числами, а $\mathbf{t_{ij}}$ - целыми положительными числами. Заметим, что это предположение необходимо для разработки алгоритма кратчайшего пути с ограничениями ресурсов, используемый в представленном ниже подходе генерации столбцов. Кроме того, предполагается, что неравенство треугольника выполняется как для $\mathbf{c_{ij}}$, так и для $\mathbf{t_{ij}}$.

Модель содержит два набора переменных решения **x** и **s**. Для каждой дуги (i, j) , где $i \neq j$, $i \neq n+1$, $j \neq 0$ и каждое транспортное средство k мы определяем $\mathbf{x_{ijk}}$ как

$$x_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{if vehicle } k \text{ drives directly from vertex } i \text{ to vertex } j, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Переменная решения $\mathbf{s_{ik}}$ определена для каждой вершины i и каждого транспортного средства k и обозначает ***время, когда транспортное средство k начинает обслуживать клиента i***. В случае, если транспортное средство **k** не обслуживает клиента i, $\mathbf{s_{ik}}$ **не имеет значения**, и, следовательно, его значение считается несущественным. Мы предполагаем, что $\mathbf{a_0 = 0}$ и, следовательно, $\mathbf{s_{0k} = 0}$ для всех **k**.

Цель состоит в том, чтобы составить набор маршрутов, который минимизирует общую стоимость, таким образом, чтобы

- каждый клиент обслуживается ровно один раз,
- каждый маршрут начинается в вершине 0 и заканчивается в вершине n + 1, и
- соблюдение временных рамок по обслуживанию клиентов и ограничения пропускной способности транспортных средств.

Это неофициальное описание ***VRPTW*** может быть сформулировано математически как проблема многомодового сетевого потока с временными окнами и ограничениями пропускной способности, т.е. постановка задачи ***CVRPTW***:

$$\min \sum_{k\in\mathcal{V}}\sum_{i\in\mathcal{N}}\sum_{j\in\mathcal{N}} c_{ij}x_{ijk} \ s.t., \tag{3.1}$$

$$\sum_{k\in\mathcal{V}}\sum_{j\in\mathcal{N}} x_{ijk} = 1 \quad \forall i \in \mathcal{C}, \tag{3.2}$$

$$\sum_{i\in\mathcal{C}} d_i \sum_{j\in\mathcal{N}} x_{ijk} \le q \quad \forall k \in \mathcal{V}, \tag{3.3}$$

$$\sum_{j\in\mathcal{N}} x_{0jk} = 1 \quad \forall k \in \mathcal{V}, \tag{3.4}$$

$$\sum_{i\in\mathcal{N}} x_{ihk} - \sum_{j\in\mathcal{N}} x_{hjk} = 0 \quad \forall h \in \mathcal{C},\ \forall k \in \mathcal{V}, \tag{3.5}$$

$$\sum_{i\in\mathcal{N}} x_{i,n+1,k} = 1 \quad \forall k \in \mathcal{V}, \tag{3.6}$$

$$x_{ijk}(s_{ik} + t_{ij} - s_{jk}) \le 0 \quad \forall i, j \in \mathcal{N},\ \forall k \in \mathcal{V}, \tag{3.7}$$

$$a_i \le s_{ik} \le b_i \quad \forall i \in \mathcal{N},\ \forall k \in \mathcal{V}, \tag{3.8}$$

$$x_{ijk} \in \{0, 1\} \quad \forall i,\ j \in \mathcal{N},\ \forall k \in \mathcal{V}. \tag{3.9}$$

1. Целевая функция **(3.1)** *минимизирует общую стоимость поездки*.
2. Ограничения **(3.2)** обеспечивает, что *каждый клиент посещается ровно один раз*, и **(3.3)** указывает, что *транспортное средство не может быть загружено больше его вместимости*.
3. Далее, уравнения **(3.4)**, **(3.5)** и **(3.6)** указывают, что *каждое транспортное средство должно покинуть депо 0*; *после прибытия транспортного средства к клиенту оно должно отправиться в другой пункт назначения*; и, наконец, *все транспортные средства должны прибыть в депо n + 1*.
4. Неравенство **(3.7)** *устанавливает взаимосвязь между временем отправления транспортного средства от клиента и его его непосредственным преемником*.
5. Ограничение **(3.8)** требует, чтобы *временные окна были соблюдены*.
6. Услоиве **(3.9)** является *ограничениями целочисленности*.

Стоит отметить, что не используемое транспортное средство моделируется путем движения по "пустому" маршруту (0,n + 1).

Модель также может включать ограничение, задающее верхнюю границу количества транспортных средств:

$$\sum_{k \in \mathcal{V}} \sum_{j \in \mathcal{N}} x_{0jk} \leq |V| \quad \forall k \in \mathcal{V},\ \forall j \in \mathcal{N} \tag{3.10}$$

Обратите также внимание, что нелинейные ограничения (3.7) могут быть определены как:

$$s_{ik} + t_{ij} - M_{ij}(1 - x_{ijk}) \leq s_{jk} \quad \forall i,\ j \in \mathcal{N},\ \forall k \in \mathcal{V}. \tag{3.11}$$

Большие константы $\mathbf{M_{ij}}$ могут быть уменьшены до $\max\{b_i + t_{ij} - a_j\}, (i, j) \in A$.

Для каждого транспортного средства переменные начала обслуживания задают уникальное направление маршрута, тем самым устраняя любые промежуточные маршруты. Следовательно, классические ограничения исключения подтуров задачи VRP становятся излишними. Наконец, целевая функция (3.1) повсеместно использовалась при решении VRPTW до оптимальности. В исследованиях по эвристике было принято сводить к минимуму количество транспортных средств, которое может привести к дополнительным расходам на проезд.

VRPTW - это обобщение как проблемы коммивояжера (***TSP***), так и ***VRP***. Когда временные ограничения (3.7) и (3.8) не являются обязательными,то проблема сводится к задаче ***(C)VRP***. Это может быть смоделировано, установив параметры $\mathbf{a_i = 0}$ и $\mathbf{b_i = M}$, где **M** - большой скаляр, для всех клиентов i. Если доступно только одно транспортное средство, проблема становится **TSP**. Если доступно несколько транспортных средств и структура затрат составляет: $\mathbf{c_{0j} = 1}$, j∈C и $\mathbf{c_{ij} = 0}$, в противном случае мы приходим к задаче об упаковке. Поскольку поездки между клиентами "свободны", порядок их посещения становится неважным, и цель сводится к тому, чтобы "втиснуть" как можно больше спроса в как можно меньшее количество транспортных средств (контейнеров). В случае, если ограничения пропускной способности (3.2) не являются обязательными, проблема становится ***m-TSPTW*** или, если доступно только одно транспортное средство, ***TSPTW***.