Постановка задачи Линейного программирования

<u>Линейное программирование</u> - это раздел прикладной математики, изучающий теорию, приложения и методы решения конечных систем линейных неравенств с конечным числом вещественных неизвестных $x_1, \ldots, x_n$:

$$\left.\begin{array}{ll} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & \leq b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & \leq b_m \end{array}\right\} \qquad (1)$$

или в сокращенной записи $Ax \leq b$. Считаем, что матрица A не содержит нулевых строк a_i. Основная задача ЛП состоит в нахождении такого решения (1), которое максимизирует заданную линейную функцию $< c, x >$ = $c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$ вектора неизвестных x по всем вещественным x, удовлетворяющим системе (1):

$$\max_{x \in \mathbf{R}^n:\ Ax \leq b} \langle c, x \rangle; \qquad (2)$$

озЛП (2) с n неизвестными и m ограничениями называется задачей размерности (n, m) и задается числовой таблицей своих коэффициентов:

$$\left|\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \\ c_1 & c_2 & \ldots & c_n & 0 \end{array}\right| \qquad (3)$$

В частном случае $c = (0, \ldots, 0)$ задача (2) эквивалента (1), поэтому умение решать озЛП предполагает умение решать системы линейных неравенств (ЛН). В форме (2) может быть представлена любая задача ЛП с ограничениями равенствами и неравенствами, в том числе ***каноническая задача ЛП:***

$$\max_{Ax=b,\ x\geq\bar{0}} \langle c, x\rangle$$

<u>Определение:</u> Точка $x \in D$ называется угловой точкой, если представление $x = \alpha x^1 + (1 - \alpha)x^2$, где $x^1, x^2 \in D$; $0 < \alpha < 1$ возможно только при $x^1 = x^2$.

Другими словами, невозможно найти две точки в области, интервал проходящий через которые содержит x (т.е. x - не внутренняя точка).

Несмотря на то, что формально задачи ЛП не являются дискретными ($x \in R^n$), их решение нетрудно свести к перебору конечного числа угловых точек на основании *<u>принципа граничных решений</u>*:

Если задача (2) имеет решение, то найдется такая подматрица A_I матрицы A, что любое решение системы уравнений $A_I x = b_I$, т.е.

$$\{a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i \mid i \in I\}$$

реализует максимум в (2).

Отметим, что для невырожденных A_I решение соответствующей системы уравнений $A_I x = b_I$, удовлетворяющее ограничениям (1), является угловой точкой (1).

Из принципа граничных решений следует, что если угловая точка (1) существует, то разрешимая задача (2) имеет решение и в угловой точке (1), т.е. она эквивалентна максимизации $< c, x >$ на конечном множестве вершин полиэдра (1). Процедура решения системы линейных уравнений методом Гаусса требует не более полинома 3-й степени от $m,\ n$ (точнее, $max(m, n)[min(m, n)]^2$) арифметических операций с элементами A и b. Однако число возможных подматриц матрицы A экспоненциально, и метод полного их перебора не эффективен.

Симплекс-метод

Симплекс-метод позволяет эффективно найти оптимальное решение, избегая простой перебор всех возможных угловых точек. Основной принцип метода: вычисления начинаются с какого-то «стартового» базисного решения, а затем ведется поиск решений, «улучшающих» значение целевой функции. Это возможно только в том случае, если возрастание какой-то переменной приведет к увеличению значения функционала.

Необходимые условия для применения симплекс-метода:

1. Задача должна иметь каноническую форму.
2. У задачи должен быть явно выделенный базис.

Определение: Явно выделенным базисом будем называть вектора вида: $(..0100..)^T$, $(..010..)^T$, $(..0010)^T$ …, т.е. только одна координата вектора ненулевая и равна 1.

Замечание: Базисный вектор имеет размерность (m*1), где m – количество уравнений в системе ограничений.

Для удобства вычислений и наглядности обычно пользуются симплекс-таблицами:

Базис:	x_1	x_2	...	x_n	
x_n	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	b_1
x_{n-1}	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	b_2
...	...	...	...	...	...
x_{n-2}	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	b_m
Z	c_1	c_2	...	c_n	0

- В первой строке указывают «наименование» всех переменных.

- В первом столбце указывают номера базисных переменных, а в последней ячейке – букву Z (это строка функционала).
- В «середине таблицы» указывают коэффициенты матрицы ограничений — a_{ij}.
- Последний столбец – вектор правых частей соответствующих уравнений системы ограничений.
- Крайняя правая ячейка – значение целевой функции. На первой итерации ее полагают равной 0.

Замечание: Базис – это переменные, коэффициенты в матрице ограничений при которых образуют базисные вектора.

Замечание: Если ограничения в исходной задаче представлены неравенствами вида $\leq$, то при приведении задачи к канонической форме, введенные дополнительные переменные образуют начальное базисное решение.

Замечание: Коэффициенты в строке функционала берутся со знаком “-”.

Алгоритм симплекс-метода:

1. Выбираем переменную, которую будем вводить в базис. Это делается в соответствии с указанным ранее принципом: мы должны выбрать переменную, возрастание которой приведет к росту функционала. Выбор происходит по следующему правилу:

- Если задача на минимум – выбираем максимальный положительный элемент в последней строке.
- Если задача на максимум – выбираем минимальный отрицательный.

Такой выбор, действительно, соответствует упомянутому выше принципу: если задача на минимум, то чем большее число вычитаем – тем быстрее убывает функционал; для максимума наоборот – чем большее число добавляем, тем быстрее функционал растет.

Замечание: Хотя мы и берем минимальное отрицательное число в задаче на максимум, этот коэффициент показывает направление роста функционала, т.к. строка функционала в симплекс-таблице взята со знаком “-”. Аналогичная ситуация с минимизацией.

Определение: Столбец симплекс-таблицы, отвечающий выбранному коэффициенту, называется ведущим столбцом.

2. Выбираем переменную, которую будем вводить в базис. Для этого нужно определить, какая из базисных переменных быстрее всего обратится в нуль при росте новой базисной переменной. Алгебраически это делается так:

- Вектор правых частей почленно делится на ведущий столбец
- Среди полученных значений выбирают минимальное положительное (отрицательные и нулевые ответы не рассматривают)

Определение: Такая строка называется ведущей строкой и отвечает переменной, которую нужно вывести из базиса.

Замечание: Фактически, мы выражаем старые базисные переменные из каждого уравнения системы ограничений через остальные переменные и смотрим, в каком уравнении возрастание новой базисной переменной быстрее всего даст 0. Попадание в такую ситуацию означает, что мы «наткнулись» на новую вершину. Именно поэтому нулевые и отрицательные элементы не рассматриваются, т.к.

получение такого результата означает, что выбор такой новой базисной переменной будет уводить нас из области, вне которой решений не существует.

3. Ищем элемент, стоящий на пересечении ведущих строки и столбца.

Определение: Такой элемент называется ведущим элементом.

4. Вместо исключаемой переменной в первом столбце (с названиями базисных переменных) записываем название переменной, которую мы вводим в базис.

5. Далее начинается процесс вычисления нового базисного решения. Он происходит с помощью **метода Жордана-Гаусса**.

- Новая Ведущая строка = Старая ведущая строка / Ведущий элемент
- Новая строка = Новая строка – Коэффициент строки в ведущем столбце * Новая Ведущая строка

Замечание: Преобразование такого вида направлено на введение выбранной переменной в базис, т.е. представление ведущего столбца в виде базисного вектора.

6. После этого проверяем условие оптимальности. Если полученное решение неоптимально – повторяем весь процесс снова.

Постановка задачи Дискретного программирования

Рассматривается задача:

$$\min z = \min_{x \in G} \varphi(x), \quad (1)$$

где G – конечное множество.

Задача (1) называется задачей “Дискретного программирования”. В задачах дискретного программирования множество допустимых решений является невыпуклым и несвязным. Поэтому отыскание решения сопряжено со значительными трудностями. В частности, невозможно применение стандартных приемов, состоящих в замене дискретной задачи ее непрерывным аналогом, и в дальнейшем округлении найденного решения до ближайшего целочисленного.