

Zadanie domowe 3

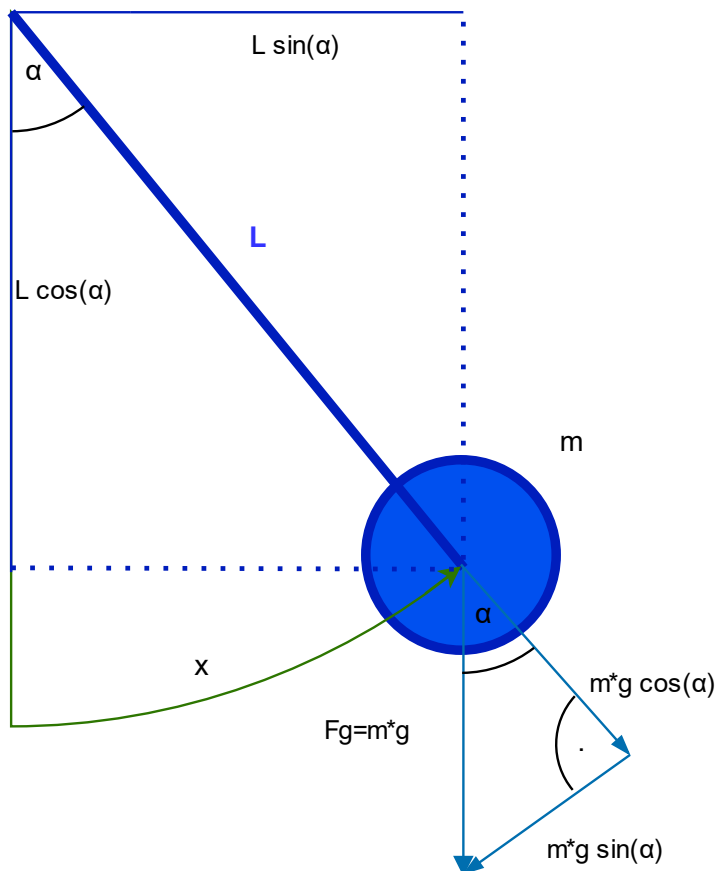
INFORMATYKA 2

EWA GABRYSZEWSKA (327521)

PROWADZĄCY - MGR INŻ. MARIUSZ RUTKOWSKI

TERMIN ODDANIA – 15.06.2023 R.

OPIS ZAGADNIENIA



Rysunek 1 - opis problemu

Wahadło zostało potraktowane jako nieskończenie mały obciążnik na nieważkiej nitce o długości L .
Oznaczenia używane w rysunkach i obliczeniach:

$g \left[\frac{m}{s^2} \right]$ – przyspieszenie ziemskie (przyjęto $\sim 9,81 \frac{m}{s^2}$)

$m [kg]$ – masa obciążnika (podawana przez użytkownika)

$x [m]$ – przemieszczenie obciążnika (układ współrzędnych biegunowych) $[m]$

$L [m]$ – długość nieważkiej nitki

$\alpha [^\circ]$ – kąt wychylenia

$\omega \left[\frac{^\circ}{s} \right]$ – prędkość kątowa

F_g – siła grawitacji działająca na obciążnik

F_n – siła naciągu nitki

RÓWNANIA RUCHU

Na obciążnik działają dwie siły – siła grawitacji i siła naciągu nici. Po rozłożeniu siły F_g na składową normalną do przemieszczenia i styczną zauważamy, że składowa normalna równoważona jest przez siłę naciągu nici (nie obserwujemy przemieszczenia w żadnej innej osi, zmienia ona jedynie kierunek prędkości) Po rozpisaniu powyższego układu równowagi otrzymujemy siłę działającą na obciążnik równą

$$F = -mg\sin(\alpha)$$

Jako że w naszym układzie wychylenie obciążnika jest duże, nie możemy traktować go jako układ harmoniczny Dla uproszczenia dalszych obliczeń wprowadzimy zmienną przyspieszenia $a = -g\sin(\alpha)$

Przyspieszenie a powoduje przebycie przez obciążnik przemieszczenia x po łuku

$$x = L * \alpha$$

$$v = \frac{dx}{dt} = L \frac{d\alpha}{dt} = L\omega$$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = L \frac{d^2\alpha}{dt^2} = L \frac{d\omega}{dt} = -g\sin(\alpha)$$

Po uproszczeniu otrzymujemy układ równań różniczkowych pierwszego rzędu

$$\begin{cases} \frac{d\omega}{dt} = -\frac{g}{l}\sin(\alpha) \\ \frac{d\alpha}{dt} = \omega \end{cases}$$

gdzie:

$$\begin{cases} \alpha(t_0) = \alpha_0 \\ \omega(t_0) = \omega_0 \end{cases}$$

Energia mechaniczna układu określona jest wzorem:

$$\begin{aligned} E_{mech} &= E_p + E_k \\ E_k &= \frac{mv^2}{2} = \frac{m(L\omega)^2}{2} \\ E_p &= m * g * (L - L\cos(\alpha)) = mgL(1 - \cos(\alpha)) \end{aligned}$$

METODA OBLICZENIOWA

Układ równań został scałkowany przy pomocy metody Runge-Kutta 4-tego rzędu. Czas całkowania: $t_k = 6s$.

Krok całkowania $h = \frac{1}{100} s$.

WYNIKI

Symulacja została przeprowadzona dla trzech zestawów danych

```

Prosze, podaj warunki poczatkowe wahadla
Masa kulki [kg]: 60

Dlugosc sznurka[m]: 5

Podaj wychylenie poczatkowe:(deg, != 0!) 50

Podaj poczatkowa predkosc katowa:(deg/s, !=0!) 10
  
```

Rysunek 2 Ekran konsoli programu z wpisanymi danymi przykładowymi

```

t      Kat      Predkosc katowa  Energia calkowita
0.000000  50.000000  10.000000  638.955010
0.010000  50.092820  8.563749  638.955010
0.020000  50.171269  7.125702  638.955010
0.030000  50.235329  5.686162  638.955010
  
```

Rysunek 3 Podgląd formatowania danych Zestawu 2 w wygenerowanym pliku tekstowym

T [s]	Kat[deg]	Prędkość kątowa [deg/s]	Energia całkowita[J]
0	50	10	638,95501
0,01	50,09282	8,563749	638,95501
0,02	50,171269	7,125702	638,95501
0,03	50,235329	5,686162	638,95501
0,04	50,284988	4,245432	638,95501
0,05	50,320235	2,803816	638,95501
0,06	50,341063	1,361614	638,95501
0,07	50,347466	-0,080873	638,95501
0,08	50,339445	-1,523342	638,95501
0,09	50,317001	-2,965493	638,95501
0,1	50,280137	-4,407026	638,95501

Tabela 1 Podgląd danych wyeksportowanych do programu Excel

ZESTAW DANYCH 1

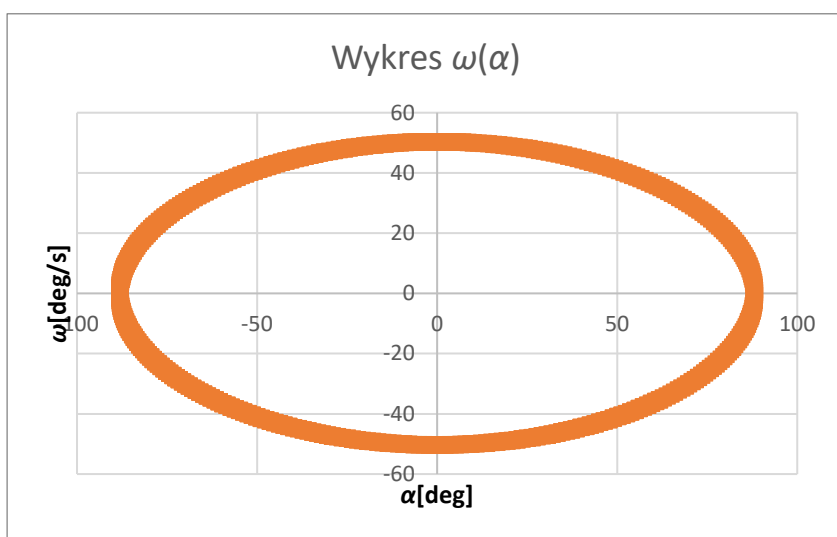
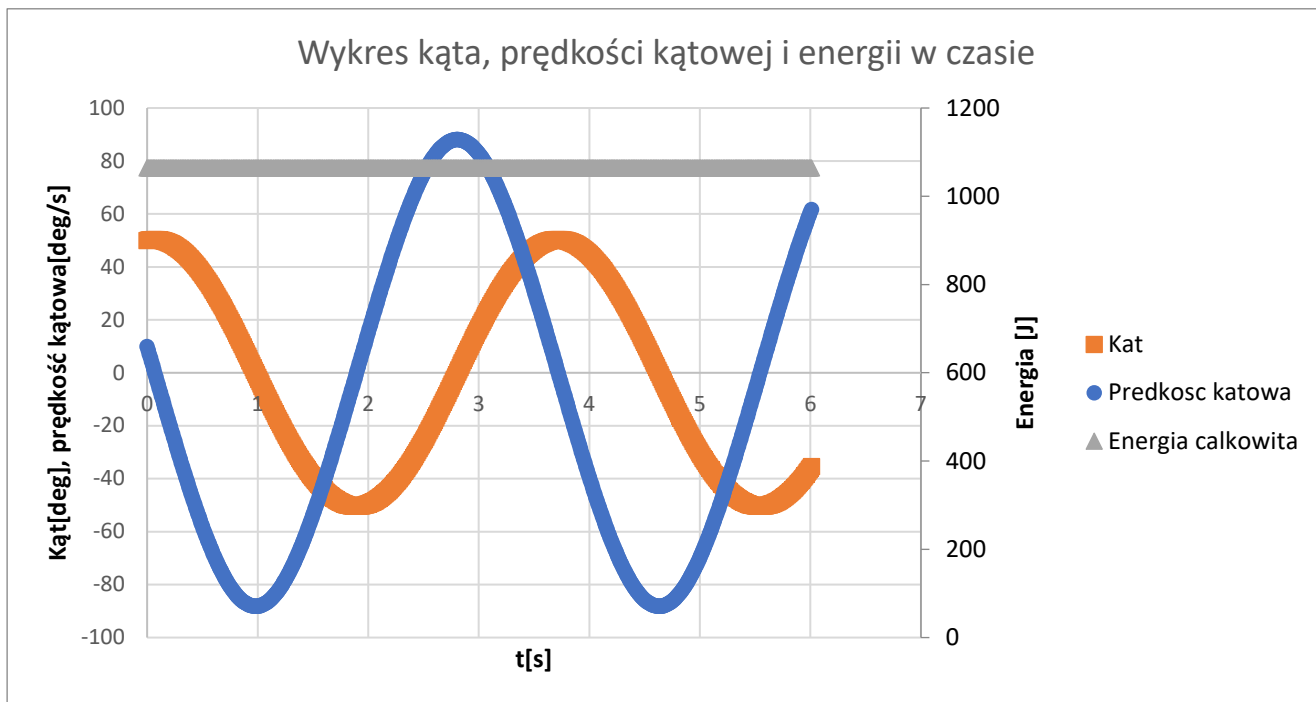
Symulacja pierwsza została przeprowadzona dla układu o zmiennych początkowych równych:

$$m = 60 \text{ kg}$$

$$L = 5 \text{ m}$$

$$\omega_0 = 10 \frac{\text{°}}{\text{s}}$$

$$\alpha_0 = 50^\circ$$



ZESTAW DANYCH 2

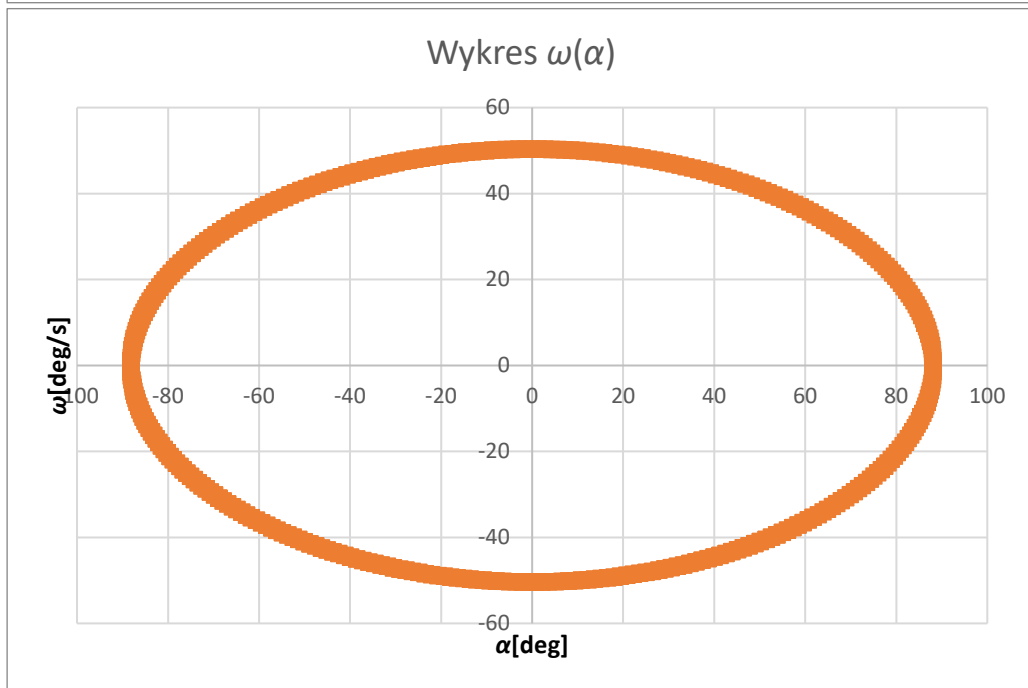
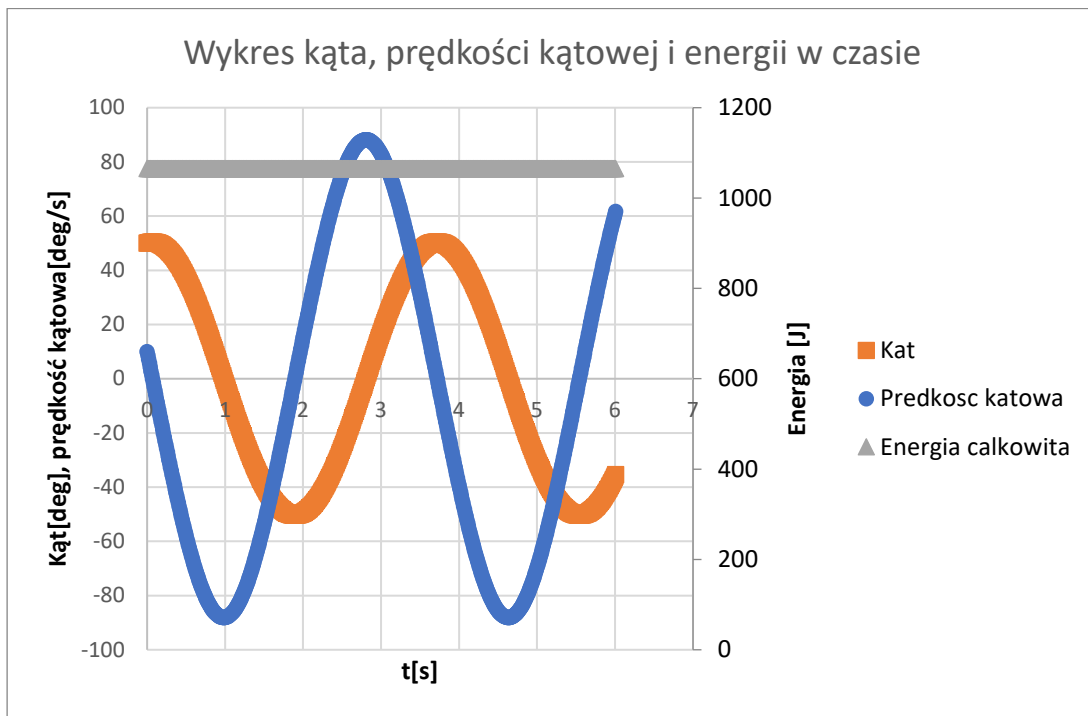
Symulacja druga przeprowadzona została dla danych identycznych do zestawu 1, poza zmianą długości sznurka.

$$m = 60 \text{ kg}$$

$$L = 3 \text{ m}$$

$$\omega_0 = 10 \frac{\circ}{\text{s}}$$

$$\alpha_0 = 50^\circ$$



ZESTAW DANYCH 3

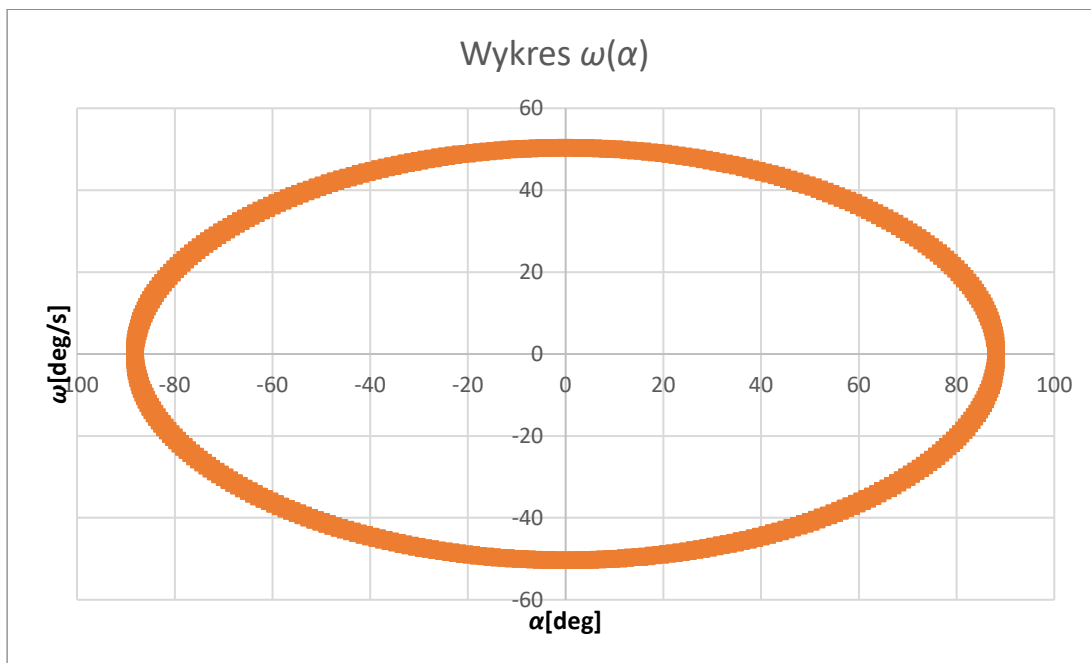
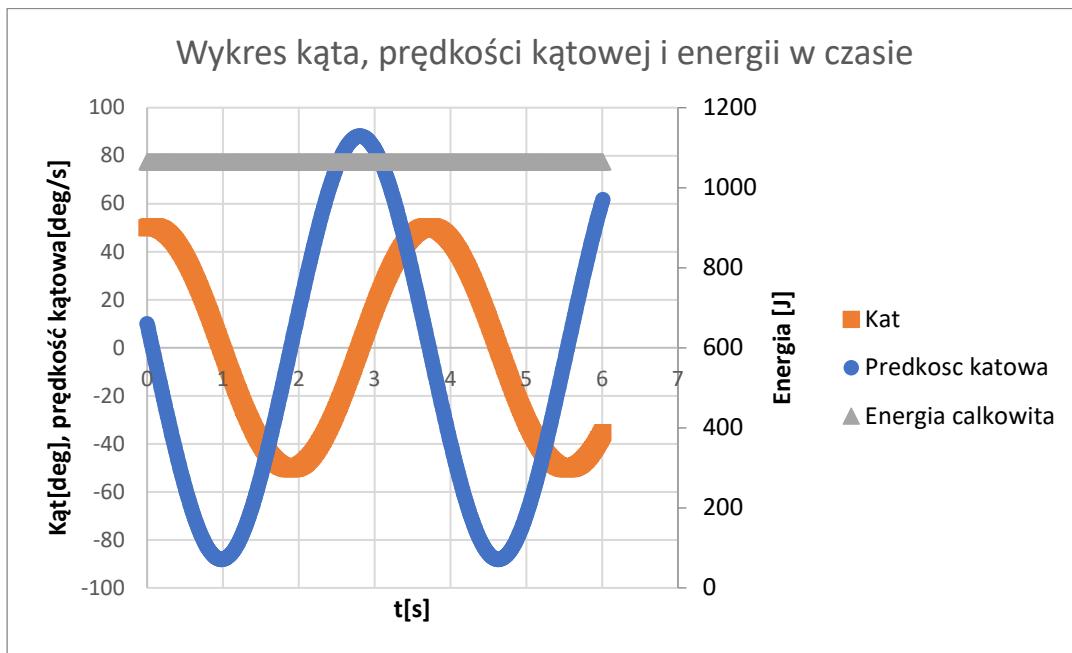
W zestawie danych 3 zwiększona została masa obciążnika:

$$m = 100 \text{ kg}$$

$$L = 3 \text{ m}$$

$$\omega_0 = 10 \frac{\circ}{\text{s}}$$

$$\alpha_0 = 50^\circ$$



OMÓWIENIE WYNIKÓW

Z uzyskanych wyników możemy wyciągnąć kilka wniosków

1. Symulacja spełnia założenia teoretyczne- przy braku oporów powietrza układ nie traci energii, co można zobaczyć zarówno na wykresie $E_{mech}(t)$, jak i zamkniętej ścieżce w wykresie przestrzeni fazowej $\omega(\alpha)$
2. Zmniejszenie długości sznurka skutkuje przyspieszeniem oscylacji obciążnika, co również zgadza się z obserwacjami empirycznymi
3. Masa obciążnika (również zgodnie z obserwacjami) nie wpływa na zmianę okresu wahania a jedynie na całkowitą energię mechaniczną układu

KOD PROGRAMU

```
#include <iostream>
#include <math.h>
#include <stdlib.h>
#include "rk4.h"
#define G 9.81
#pragma warning(disable:4996) //umożliwienie używania scanf w Visual
2019
double l=3, m=1;
void rhs_fun(double t, double* tab, double* prawa) //funkcja obliczająca prawą
stronę równania różniczkowego
{
    prawa[0]=tab[1];
    prawa[1]=-G/l*sin(tab[0]);
}
double energia(double a, double w) //obliczanie energii
{
    double wyn;
    wyn = (0.5 * m * powl(l, 2.)) * powl(w, 2.) + (m * G * l * (1 - cos(a)));
    return wyn;
}
int main()
{
    double h = 0.01; //Większa dokładność przy
mniejszym kroku różniczkowania
    int n = 2; //liczba zmiennych (u
nas alfa i omega wiec 2)
    double t = 0; //czas początkowy to 0s
    double tk = 6; //czas końcowy to 6s
    double a0 = 0, w0 = 0; //zmienne na kąt i prędkość
kątową początkowe
    double tabpocz[2], tabkonc[2]; //tabela na kąt i prędkość kątową przed i
po obliczeniach

    printf("Proszę, podaj warunki początkowe wahadła\n");
    printf("Masa kulki [kg]: ");
    scanf("%lf", &m);
    printf("\nDługość sznurka [m]: ");
    scanf("%lf", &l);
    while (a0 == 0) //sprawdzenie warunków
    początkowych
    {
        printf("\nPodaj wychylenie początkowe:(deg, != 0!) ");
        scanf("%lf", &a0);
    }

    a0 *= 3.1415/180.0; //zamiana kątów na radiany
    while (w0 == 0)
```



```

{
    printf("\nPodaj początkowa predkosc katowa:(deg/s, !=0!) ");
    scanf("%lf", &w0);
}

w0 *= 3.1415 / 180.0;
tabpocz[0] = a0;
tabpocz[1] = w0;
FILE* f = fopen("wyniki.txt", "w");
                //otwarcie pliku do zapisu

fprintf(f, "t\tKat\tPredkosc katowa\tEnergia calkowita\n");
                //naglowek pliku z danymi
fprintf(f, "%lf\t", t);
fprintf(f, "%lf\t%lf\t", a0 * 180.0 / 3.1415, w0 * 180.0 / 3.1415);
                //zapisywanie do pliku danych początkowych, dane kątowne przeliczone na
stopnie dla ułatwienia
fprintf(f, "%lf\n", energia(a0, w0));
while (t < tk)
{
    vrk4(t, tabpocz, h, n, rhs_fun, tabkonc);
                                //liczenie prawej strony
    rownania różniczkowego metodą Rungego-Kutty
    fprintf(f, "%lf\t", t + h);
    fprintf(f, "%lf\t%lf\t", tabkonc[0]*180.0 / 3.1415, tabkonc[1]*180.0
/ 3.1415);
                //zapisywanie do pliku poszczególnych wyników
    fprintf(f, "%lf\n", energia(tabkonc[0], tabkonc[1]));
    for (int i = 0; i < n; i++)
                                // wyniki jednego
kroku różniczkowania staja sie danymi wejsciowymi nastepnego
        tabpocz[i] = tabkonc[i];
        t += h;
}
fclose(f);
return 0;
}

```