

國立臺灣大學

2021 數位控制系統

Digital Control System

Project #2

組別：第十三組

Group #13

老師：楊士進 副教授

Group #13

組員：

D09522006

陳維霖

R08522847

陳鎮宇

R09522817

楊博淋

R09522849

陳品存



目錄

Question 1	2
Target	2
Solution	2
Result: Block Diagram	2
Question 2	3
Target	3
Solution	3
Check : Use Z-domain Root Locus	5
Result 1:	8
Result 2:	8
Question 3	9
Target	9
Solution	9
Check : Use Z-domain Root Locus	14
Result 1:	15
Result 2:	15
Question 4	16
Target	16
Solution	17
Results	19
Question 5	24
Target	24
Solution	24
Results	25
Question 6	30
Target	30
Results	30



Question 1

Target

以串聯的方式，繪出 $i_a^*(k)$ 、 $i_a(k)$ 、 $\omega_m(k)$ 、 $\theta_m(k)$ 、 $\omega_{avg}(k)$ 之間的訊號流程圖，並且以「數值解」的方式呈現。

Solution

Step1:

首先，先求出 Project #2 第一頁下方尚未計算完的數值： $\frac{I_a(z)}{I_a^*(z)}$ 。

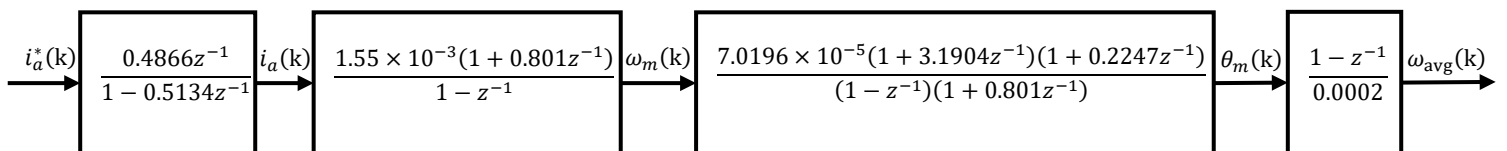
$$\begin{aligned}\frac{I_a(z)}{I_a^*(z)} &= (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left\{\frac{1}{s(\tau_i s + 1)}\right\} \\ &= (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left\{\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{\tau_i}}\right\} = (1 - z^{-1})\left(\frac{1}{1 - z^{-1}} - \frac{1}{1 - e^{-\frac{T}{\tau_i}}z^{-1}}\right) \\ &= 1 - \frac{1 - z^{-1}}{1 - e^{-\frac{T}{\tau_i}}z^{-1}} = \frac{1 - e^{-\frac{T}{\tau_i}}z^{-1} - 1 + z^{-1}}{1 - e^{-\frac{T}{\tau_i}}z^{-1}} = \frac{\left(1 - e^{-\frac{T}{\tau_i}}\right)z^{-1}}{1 - e^{-\frac{T}{\tau_i}}z^{-1}}\end{aligned}$$

且已知 $\tau_i = 0.0003 \text{ sec}$, $T = 0.0002 \text{ sec}$ ，代入計算後得到 $e^{-\frac{T}{\tau_i}} = e^{-\frac{0.0002}{0.0003}} = 0.5134$ ，
因此可計算得到 $\frac{I_a(z)}{I_a^*(z)} = \frac{0.4866z^{-1}}{1 - 0.5134z^{-1}}$ 。

Step2:

根據 Project #2 第一頁下方老師提供的 Z-domain 轉移函數畫出訊號流程圖。

Result: Block Diagram





Question 2

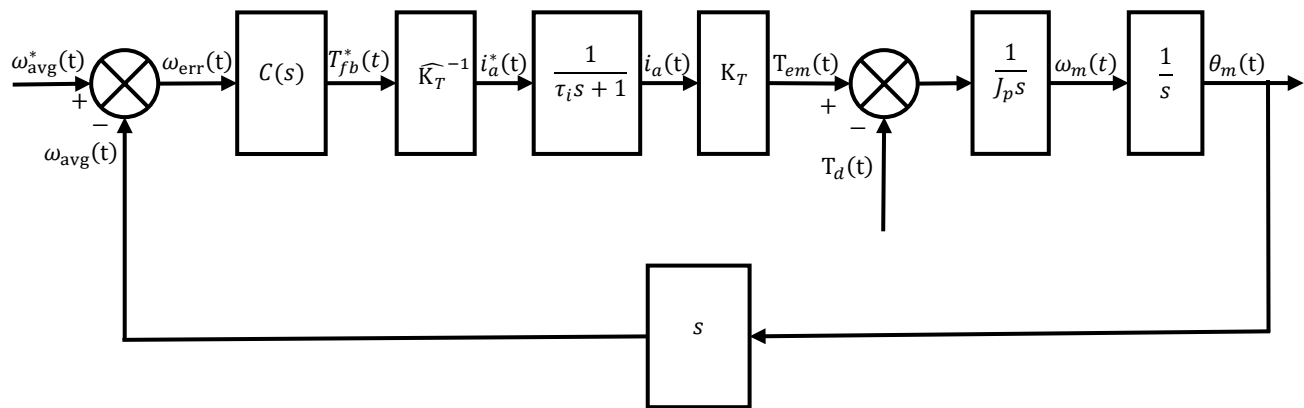
Target

使用 Method #1 Continuous Approximation 求出補償器 $C(Z)$ 的 Z-domain 轉移函式，並同時求出代數解與數值解。

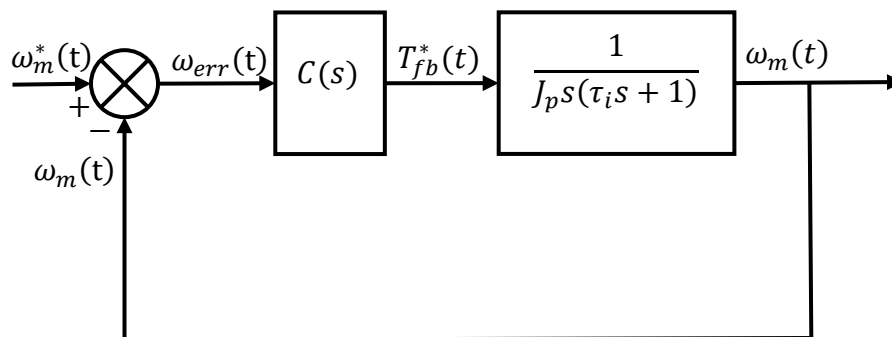
Solution

Step1:

先找出時域 (t-domain) 的方塊圖，如下方所示。



首先，我們令 $\widehat{K}_T = K_T$ ，以及 $T_d(t) = 0$ ，由於我們要使用 Method #1 Continuous Approximation，所以需另外假設 $\omega_{avg}(t) \approx \omega_{avg}^*(t) \approx \omega_m(t)$ ，因此方塊圖可簡化如下：





Step2:

透過上一頁最下方化簡後的方塊圖可知，閉迴路 s-domain 轉移函數為：

$$\frac{W_m(s)}{W_m^*(s)} = \frac{\frac{C(s)}{J_p s(\tau_i s + 1)}}{1 + \frac{C(s)}{J_p s(\tau_i s + 1)}}$$

因為要產生 Bandwidth，其閉迴路 s-domain 轉移函數必須為 $\frac{K}{s+K}$ 的形式（其中 K 即為 Bandwidth），也就是 $\frac{C(s)}{J_p s(\tau_i s + 1)}$ 能化簡成 $\frac{K}{s}$ 的形式。

基於這些原因，我們令 $C(s) = K\hat{f}_p(\hat{\tau}_i s + 1)$ 。為了方便運算，我們假設 $\hat{f}_p = J_p$ 且 $\hat{\tau}_i = \tau_i$ ，因此新的轉移函數為：

$$\frac{W_m(s)}{W_m^*(s)} = \frac{\frac{C(s)}{J_p s(\tau_i s + 1)}}{1 + \frac{C(s)}{J_p s(\tau_i s + 1)}} = \frac{\frac{K\hat{f}_p(\hat{\tau}_i s + 1)}{J_p s(\tau_i s + 1)}}{1 + \frac{K\hat{f}_p(\hat{\tau}_i s + 1)}{J_p s(\tau_i s + 1)}} = \frac{\frac{K}{s}}{1 + \frac{K}{s}} = \frac{K}{s + K} = \frac{BW}{s + BW}$$

其中 $BW = 100 \times 2\pi = 200\pi$ 。

Step3:

用 Method #1 Continuous Approximation 中的 Bilinear Transform 進行 Z 轉換。

其中 Bilinear Transform： $s = \frac{2}{T} \frac{1-Z^{-1}}{1+Z^{-1}}$ 。且 $C(s) = K\hat{f}_p(\hat{\tau}_i s + 1) = KJ_p(\tau_i s + 1)$ 。

$$\begin{aligned} C(s) = KJ_p(\tau_i s + 1) &\Rightarrow \mathbf{C(Z)} = KJ_p \left(\tau_i \times \frac{2}{T} \frac{1-Z^{-1}}{1+Z^{-1}} + 1 \right) \\ &= BW \times J_p \left[\frac{\frac{2\tau_i}{T}(1-Z^{-1}) + (1+Z^{-1})}{1+Z^{-1}} \right] \\ &= \mathbf{BW \times J_p \left[\frac{\left(\frac{2\tau_i}{T} + 1\right) + \left(1 - \frac{2\tau_i}{T}\right)Z^{-1}}{1+Z^{-1}} \right]} \dots\dots\dots \mathbf{(Parameter Value)} \end{aligned}$$

又因為

$$\frac{I_a^*(s)}{W_{err}(s)} = C(s) \times \widehat{K_T}^{-1} = \frac{C(s)}{K_T}$$



，因此

$$\frac{I_a^*(Z)}{W_{err}(Z)} = \frac{BW \times J_p}{K_T} \left[\frac{\left(\frac{2\tau_i}{T} + 1\right) + \left(1 - \frac{2\tau_i}{T}\right) Z^{-1}}{1 + Z^{-1}} \right] \dots\dots\dots (Parameter Value)$$

也就是說， $C(s)$ 、 $C(Z)$ 為一個 PD Compensator（補償器）！

Step4:

將 $BW = 200\pi$ 、 $J_p = 0.01$ 、 $K_T = 0.14$ 、 $\tau_i = 0.0003$ 、 $T = 0.0002$ 代入，可得：

$$\begin{aligned} C(Z) &= BW \times J_p \left[\frac{\left(\frac{2\tau_i}{T} + 1\right) + \left(1 - \frac{2\tau_i}{T}\right) Z^{-1}}{1 + Z^{-1}} \right] \\ &= 200\pi \times 0.01 \times \left[\frac{\left(\frac{2 \times 0.0003}{0.0002} + 1\right) + \left(1 - \frac{2 \times 0.0003}{0.0002}\right) Z^{-1}}{1 + Z^{-1}} \right] \\ &= \frac{(8\pi) - 4\pi Z^{-1}}{1 + Z^{-1}} = \frac{25.133 - 12.566Z^{-1}}{1 + Z^{-1}} \dots\dots\dots (Numerical Value) \\ \frac{I_a^*(Z)}{W_{err}(Z)} &= \frac{BW \times J_p}{K_T} \left[\frac{\left(\frac{2\tau_i}{T} + 1\right) + \left(1 - \frac{2\tau_i}{T}\right) Z^{-1}}{1 + Z^{-1}} \right] \\ &= \frac{200\pi}{0.14} \times 0.01 \times \left[\frac{\left(\frac{2 \times 0.0003}{0.0002} + 1\right) + \left(1 - \frac{2 \times 0.0003}{0.0002}\right) Z^{-1}}{1 + Z^{-1}} \right] \\ &= \frac{\left(\frac{400}{7}\pi\right) - \frac{200}{7}\pi Z^{-1}}{1 + Z^{-1}} = \frac{179.520 - 89.760Z^{-1}}{1 + Z^{-1}} \dots\dots\dots (Numerical Value) \end{aligned}$$

Check : Use Z-domain Root Locus

Step1:

找出 Z-domain 方塊圖，如下一頁所示。

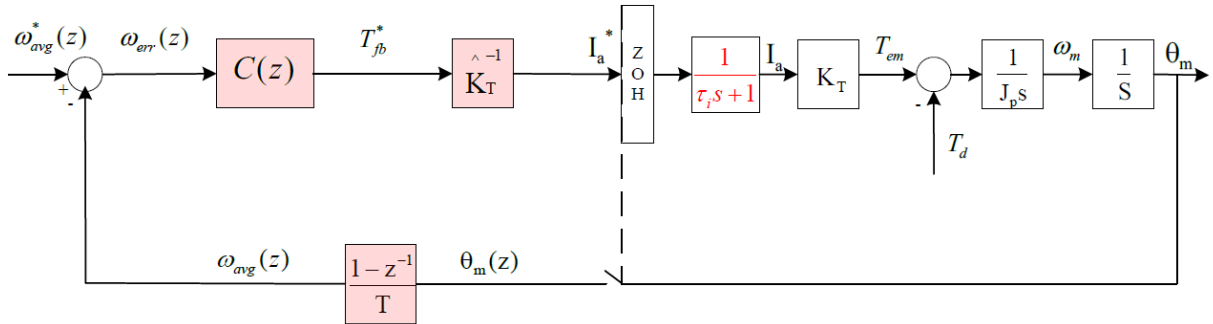
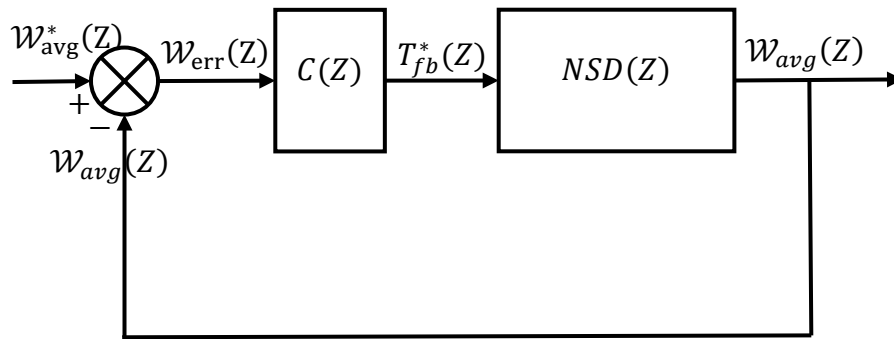


Fig. 3. Desired speed closed-loop control for motor drive system

接著，我們一樣如 Question 2，令 $\widehat{K}_T = K_T$ ，以及 $T_d(t) = 0$ ，因此 Z-domain 方塊圖可簡化如下：



其中

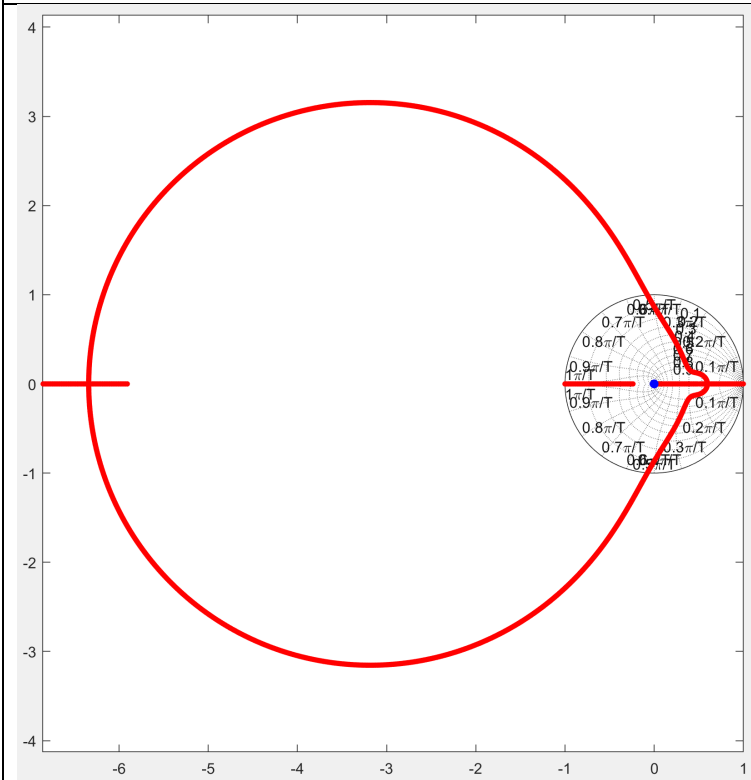
$$\begin{aligned}
 NSD(Z) &= \frac{\mathcal{W}_{avg}(z)}{I_a^*(z)} \times \widehat{K}_T^{-1} = \frac{I_a(z)}{I_a^*(z)} \times \frac{\mathcal{W}_m(z)}{I_a(z)} \times \frac{\Theta_m(Z)}{\mathcal{W}_m(z)} \times \frac{\mathcal{W}_{avg}(z)}{\Theta_m(Z)} \times \widehat{K}_T^{-1}, \widehat{K}_T = K_T \\
 &= \frac{0.4866z^{-1}}{1 - 0.5134z^{-1}} \times \frac{1.55 \times 10^{-3}(1 + 0.801z^{-1})}{1 - z^{-1}} \times \frac{7.0196 \times 10^{-5}(1 + 3.1904z^{-1})(1 + 0.2247z^{-1})}{(1 - z^{-1})(1 + 0.801z^{-1})} \times \frac{1 - z^{-1}}{0.0002} \times \frac{1}{0.14} \\
 &= 1.89085 \times 10^{-3} \times \frac{z^{-1}(1 + 3.1904z^{-1})(1 + 0.2247z^{-1})}{(1 - 0.5134z^{-1})(1 - z^{-1})}
 \end{aligned}$$



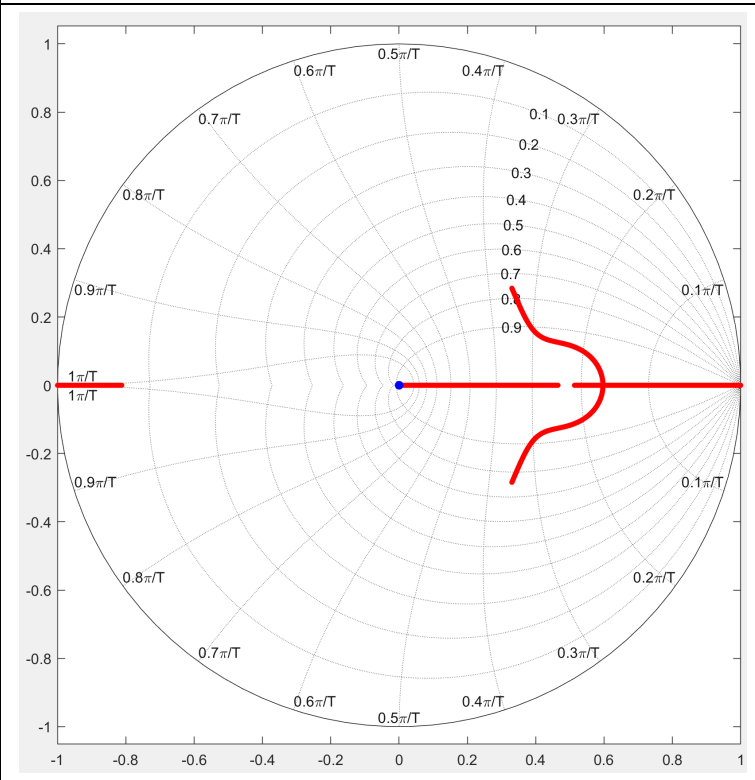
Step3:

用 MatLab 跑 $C(Z)NSD(Z)$ 的 Z-domain Root Locus (根軌跡)。

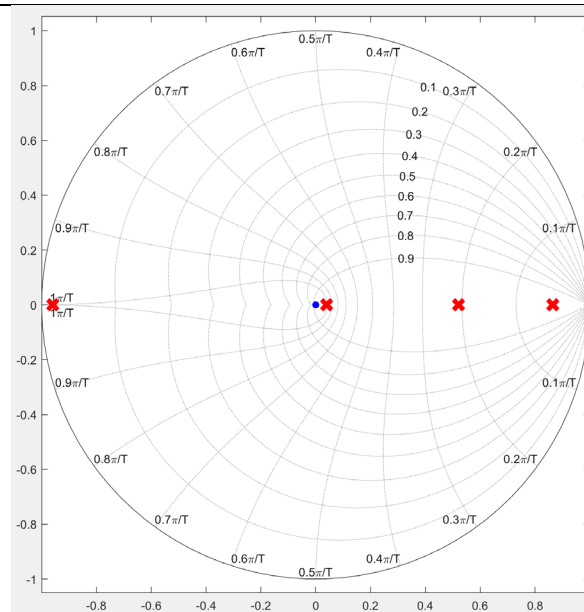
完整根軌跡，藍點為 Bandwidth 在 Z-domain 的映射



放大根軌跡，藍點為 Bandwidth 在 Z-domain 的映射



在我們設計的開迴路增益下，閉迴路極點位置，其中，藍點為 Bandwidth 在 Z-domain 的映射。



由上表可知，閉迴路極點位置與 Bandwidth 在 Z-domain 的映射（藍點）很接近
【理想狀態為重合】，因此我們認為設計的補償器效果還不錯，但不到十分精準！



Result 1:

$$C(Z)$$

✓ Parameter Value:

$$C(Z) = BW \times J_p \left[\frac{\left(\frac{2\tau_i}{T} + 1 \right) + \left(1 - \frac{2\tau_i}{T} \right) Z^{-1}}{1 + Z^{-1}} \right]$$

✓ Numerical Value:

$$C(Z) = \frac{(8\pi) - 4\pi Z^{-1}}{1 + Z^{-1}} = \frac{25.133 - 12.566Z^{-1}}{1 + Z^{-1}}$$

Result 2:

$$\frac{I_a^*(Z)}{\omega_{\text{err}}(Z)}$$

✓ Parameter Value:

$$\frac{I_a^*(Z)}{\omega_{\text{err}}(Z)} = \frac{BW \times J_p}{K_T} \left[\frac{\left(\frac{2\tau_i}{T} + 1 \right) + \left(1 - \frac{2\tau_i}{T} \right) Z^{-1}}{1 + Z^{-1}} \right]$$

✓ Numerical Value:

$$\frac{I_a^*(Z)}{\omega_{\text{err}}(Z)} = \frac{\left(\frac{400}{7} \pi \right) - \frac{200}{7} \pi Z^{-1}}{1 + Z^{-1}} = \frac{179.520 - 89.760Z^{-1}}{1 + Z^{-1}}$$



Question 3

Target

使用 Method #2 Direct Design 來直接求出補償器 $C(Z)$ 的 Z-domain 轉移函式，並同時求出代數解與數值解。（與 Question 2 很相近）

Solution

Step1:

找出 Z-domain 方塊圖，如下方所示。

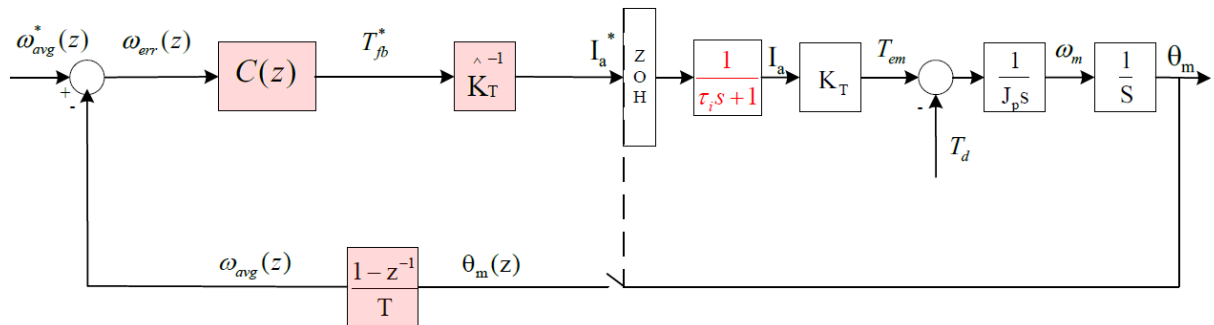
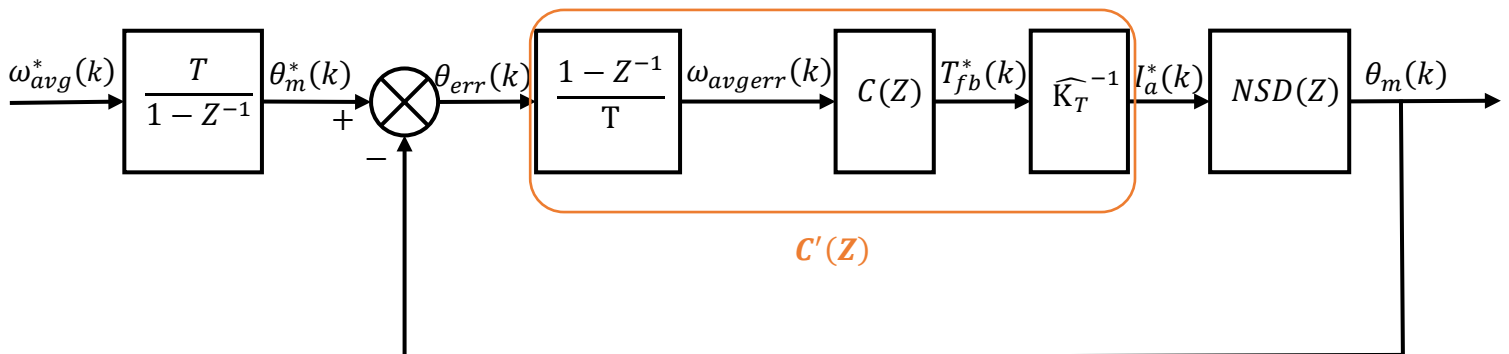


Fig. 3. Desired speed closed-loop control for motor drive system

Step2:

接著，我們一樣如 Question 2，令 $\widehat{K}_T = K_T$ ，以及 $T_d(t) = 0$ 。

同時，Reformulate as standard unit feedback control. 亦即將系統設計成單位負回授。





其中

$$\begin{aligned}
 NSD(Z) &= \frac{\Theta_m(Z)}{I_a^*(Z)} = \frac{I_a(Z)}{I_a^*(Z)} \times \frac{\mathcal{W}_m(Z)}{I_a(Z)} \times \frac{\Theta_m(Z)}{\mathcal{W}_m(Z)} \\
 &= \frac{0.4866z^{-1}}{1 - 0.5134z^{-1}} \times \frac{1.55 \times 10^{-3}(1 + 0.801z^{-1})}{1 - z^{-1}} \times \frac{7.0196 \times 10^{-5}(1 + 3.1904z^{-1})(1 + 0.2247z^{-1})}{(1 - z^{-1})(1 + 0.801z^{-1})} \\
 &= 5.29439 \times 10^{-8} \times \frac{z^{-1}(1 + 3.1904z^{-1})(1 + 0.2247z^{-1})}{(1 - z^{-1})^2(1 - 0.5134z^{-1})} \dots\dots (Numerical Value)
 \end{aligned}$$

推導NSD(Z) 的 Parameter Value :

$$\begin{aligned}
 NSD(s) &= \frac{\Theta_m(s)}{I_a^*(s)} = ZOH(s) \times \frac{1}{\tau_i s + 1} \times K_T \times \frac{1}{J_p s} \times \frac{1}{s} = \frac{1 - e^{-sT}}{s} \times \frac{K_T}{J_p s^2(\tau_i s + 1)} \\
 &= \frac{K_T}{J_p} (1 - e^{-sT}) \frac{1}{s^3(\tau_i s + 1)} = \frac{K_T}{J_p} (1 - e^{-sT}) \left(\frac{1}{s^3} + \frac{\tau_i^2}{s} - \frac{\tau_i}{s^2} - \frac{\tau_i^2}{s + \frac{1}{\tau_i}} \right) \\
 \Rightarrow NSD(Z) &= \frac{\Theta_m(Z)}{I_a^*(Z)} = Z \left\{ \frac{\Theta_m(s)}{I_a^*(s)} \right\} = Z \left\{ \frac{K_T}{J_p} (1 - e^{-sT}) \left(\frac{1}{s^3} + \frac{\tau_i^2}{s} - \frac{\tau_i}{s^2} - \frac{\tau_i^2}{s + \frac{1}{\tau_i}} \right) \right\} \\
 &= \frac{K_T}{J_p} (1 - Z^{-1}) \left[\frac{T^2(1 + Z^{-1})Z^{-1}}{2(1 - Z^{-1})^3} + \frac{\tau_i^2}{1 - Z^{-1}} - \tau_i \frac{TZ^{-1}}{(1 - Z^{-1})^2} - \tau_i^2 \frac{1}{1 - e^{-\frac{T}{\tau_i}Z^{-1}}} \right] \\
 &= \frac{K_T}{2J_p} \left[\frac{\left(T^2 + 2\tau_i^2 - 2\tau_i^2 e^{-\frac{T}{\tau_i}} - 2\tau_i T \right) Z^{-1} + \left(T^2 + 2\tau_i T + 4\tau_i^2 e^{-\frac{T}{\tau_i}} + 2\tau_i T e^{-\frac{T}{\tau_i}} - 4\tau_i^2 - T^2 e^{-\frac{T}{\tau_i}} \right) Z^{-2} + \left(2\tau_i^2 - 2\tau_i T e^{-\frac{T}{\tau_i}} - 2\tau_i^2 e^{-\frac{T}{\tau_i}} - T^2 e^{-\frac{T}{\tau_i}} \right) Z^{-3}}{(1 - Z^{-1})^2 \left(1 - e^{-\frac{T}{\tau_i}Z^{-1}} \right)} \right] \\
 &\dots\dots\dots (Parameter Value)
 \end{aligned}$$

由上面我們可知，NSD(Z)

$$\begin{cases} \text{有兩個零點 (Zero) : } Z = -3.1904, Z = -0.2247 \\ \text{有三個極點 (Pole) : } Z = 1, Z = 1, Z = 0.5134 \end{cases}$$

另外我們定義：

$$\begin{aligned}
 C'(Z) &= \frac{1 - Z^{-1}}{T} \times C(Z) \times \widehat{K_T}^{-1}, \widehat{K_T} = K_T \\
 \Rightarrow C'(Z) &= \frac{1 - Z^{-1}}{K_T T} C(Z)
 \end{aligned}$$



Step3:

上個步驟求出 $NSD(Z)$ 之後，接著我們要設計補償器 $C(Z)$ 。

由於有一個極點不穩定，此現象在「自動控制」中稱之為「內部不穩定」，因此我們無法直接使用極零點對消做補償便使其避迴路穩定。因此，透過老師在「DC_08_part.3—Closed-loop speed control including current regulator (review project 2)」這門課所教的法則，我們假設補償器 $C(Z)$ 如下：

$$\begin{aligned} C(Z) &= K_P + K_I \frac{T}{1 - Z^{-1}} = \frac{(K_P + K_I T) - K_P Z^{-1}}{1 - Z^{-1}} \\ &= (K_P + K_I T) \frac{1 - \frac{K_P}{K_P + K_I T} Z^{-1}}{1 - Z^{-1}} \\ &= K_C \frac{1 - \delta_C Z^{-1}}{1 - Z^{-1}}, \text{ where } K_C = K_P + K_I T, \delta_C = \frac{K_P}{K_P + K_I T} \end{aligned}$$

故

$$C'(Z) = \frac{1 - Z^{-1}}{K_T T} C(Z) = \frac{1 - Z^{-1}}{K_T T} \times K_C \times \frac{1 - \delta_C Z^{-1}}{1 - Z^{-1}} = \frac{K_C}{K_T T} \frac{Z - \delta_C}{Z}$$

結合 Step2，我們可知， $C'(Z)NSD(Z)$

$$\begin{cases} \text{有三個零點 (Zero): } Z = -3.1904, Z = -0.2247, Z = \delta_C \\ \text{有四個極點 (Pole): } Z = 1, Z = 1, Z = 0.5134, Z = 0 \end{cases}$$

畫出 Z-domain Root Locus 後，因為題目規定不能有 Steady-State Error，以及我們發現多了一個極點導致該閉迴路「完全」落在不穩定範圍，因此我們將欲設計的零點 δ_C 設為 0.9999，因為很接近 1 的關係，該零點能消除掉位於 $Z = 1$ 的極點所造成的影響。

因此目前

$$C'(Z) = \frac{K_C}{K_T T} \frac{Z - 0.9999}{Z} = K'_C \frac{Z - 0.9999}{Z}$$

Step4:

透過根軌跡性質求 K_C 。

因為其閉迴路轉移函數會通過極點 $Z_{BW} = e^{-200\pi \times T} = e^{-200\pi \times 0.0002} = e^{-0.04\pi} = 0.881911$ ，

也就是說，閉迴路轉移函數 $\frac{\Theta_m(Z)}{W_m^*(Z)} = \frac{T}{1 - Z^{-1}} \times \frac{C'(Z)NSD(Z)}{1 + C'(Z)NSD(Z)}$ ，會有一極點：



$$Z_{BW} = 0.881911。$$

又因為同為閉迴路分母的 $(1 - Z^{-1})$ 僅使得閉迴路極點為 $Z = 1$ ，因此我們可以知道： $1 + C'(Z)NSD(Z) = 0$ 代入 $Z_{BW} = 0.881911$ 後應滿足。

$$1 + C'(Z_{BW})NSD(Z_{BW}) = 0$$

$$C'(Z_{BW})NSD(Z_{BW}) = -1$$

$$\begin{aligned} C'(Z_{BW})NSD(Z_{BW}) &= K'_C \frac{Z_{BW} - 0.9999}{Z_{BW}} \times 5.29439 \times 10^{-8} \times \frac{Z_{BW}(Z_{BW} + 3.1904)(Z_{BW} + 0.2247)}{(Z_{BW} - 1)^2(Z_{BW} - 0.5134)} = -1 \\ \Rightarrow K'_C \frac{0.881911 - 0.9999}{\cancel{0.881911}} \times 5.29439 \times 10^{-8} \times \frac{\cancel{0.881911}(0.881911 + 3.1904)(0.881911 + 0.2247)}{(0.881911 - 1)^2(0.881911 - 0.5134)} &= -1 \\ \Rightarrow K'_C &= \frac{K_C}{K_T T} = 182547.5362 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow K_C = 182547.5362 \times K_T T = 182547.5362 \times 0.14 \times 0.0002 = 5.1113$$

$$\begin{cases} K_P + K_I T = K_C = 5.1113 \\ \frac{K_P}{K_P + K_I T} = \delta_C = 0.9999 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K_P = 5.1108 \\ K_I = 2.5 \end{cases}$$

$$C(Z) = K_P + K_I \frac{T}{1 - Z^{-1}} = 5.1108 + 2.5 \frac{T}{1 - Z^{-1}}$$

又因為

$$\frac{I_a^*(Z)}{\mathcal{W}_{err}(Z)} = C(Z) \times \widehat{K}_T^{-1} = \frac{C(Z)}{K_T}$$

$$\frac{I_a^*(Z)}{\mathcal{W}_{err}(Z)} = \frac{K_P + K_I \frac{T}{1 - Z^{-1}}}{K_T} = \frac{5.1108 + 2.5 \frac{T}{1 - Z^{-1}}}{0.14} = 36.5057 + 17.8571 \frac{T}{1 - Z^{-1}}$$

Step4:

同理，接著來設計 Parameter Value 的 K_C 。

由 Step2 我們已知：

$$N \Rightarrow NSD(Z) = \frac{\Theta_m(Z)}{I_a^*(Z)} = Z \left\{ \frac{\Theta_m(s)}{I_a^*(s)} \right\} = Z \left\{ \frac{K_T}{J_p} (1 - e^{-sT}) \left(\frac{1}{s^3} + \frac{\tau_i^2}{s} - \frac{\tau_i}{s^2} - \frac{\tau_i^2}{s + \frac{1}{\tau_i}} \right) \right\}$$



$$= \frac{K_T}{2J_p} \left[\frac{\left(T^2 + 2\tau_i^2 - 2\tau_i^2 e^{-\frac{T}{\tau_i}} - 2\tau_i T \right) Z^{-1} + \left(T^2 + 2\tau_i T + 4\tau_i^2 e^{-\frac{T}{\tau_i}} + 2\tau_i T e^{-\frac{T}{\tau_i}} - 4\tau_i^2 - T^2 e^{-\frac{T}{\tau_i}} \right) Z^{-2} + \left(2\tau_i^2 - 2\tau_i T e^{-\frac{T}{\tau_i}} - 2\tau_i^2 e^{-\frac{T}{\tau_i}} - T^2 e^{-\frac{T}{\tau_i}} \right) Z^{-3}}{(1 - Z^{-1})^2 \left(1 - e^{-\frac{T}{\tau_i}} Z^{-1} \right)} \right]$$

$$= \frac{K_T Z}{2J_p} \left[\frac{\left(T^2 + 2\tau_i^2 - 2\tau_i^2 e^{-\frac{T}{\tau_i}} - 2\tau_i T \right) Z^2 + \left(T^2 + 2\tau_i T + 4\tau_i^2 e^{-\frac{T}{\tau_i}} + 2\tau_i T e^{-\frac{T}{\tau_i}} - 4\tau_i^2 - T^2 e^{-\frac{T}{\tau_i}} \right) Z^1 + \left(2\tau_i^2 - 2\tau_i T e^{-\frac{T}{\tau_i}} - 2\tau_i^2 e^{-\frac{T}{\tau_i}} - T^2 e^{-\frac{T}{\tau_i}} \right)}{(Z - 1)^2 \left(Z - e^{-\frac{T}{\tau_i}} \right)} \right]$$

..... (Parameter Value)

且由 Step3 我們已知：

$$C(Z) = K_C \frac{1 - \delta_C Z^{-1}}{1 - Z^{-1}}, \text{ where } K_C = K_P + K_I T, \delta_C = \frac{K_P}{K_P + K_I T}$$

令

$$C'(Z) = \frac{K_C}{K_T T} \frac{Z - 0.9999}{Z} = K'_C \frac{Z - 0.9999}{Z}$$

$$Z_{BW} = e^{-BW \times T}$$

則

$$C'(Z_{BW}) NSD(Z_{BW})$$

$$= K'_C \frac{Z - 0.9999}{Z} \times \frac{K_T}{2J_p} \left[\frac{\left(T^2 + 2\tau_i^2 - 2\tau_i^2 e^{-\frac{T}{\tau_i}} - 2\tau_i T \right) Z_{BW}^2 + \left(T^2 + 2\tau_i T + 4\tau_i^2 e^{-\frac{T}{\tau_i}} + 2\tau_i T e^{-\frac{T}{\tau_i}} - 4\tau_i^2 - T^2 e^{-\frac{T}{\tau_i}} \right) Z_{BW}^1 + \left(2\tau_i^2 - 2\tau_i T e^{-\frac{T}{\tau_i}} - 2\tau_i^2 e^{-\frac{T}{\tau_i}} - T^2 e^{-\frac{T}{\tau_i}} \right)}{(Z_{BW} - 1)^2 \left(Z_{BW} - e^{-\frac{T}{\tau_i}} \right)} \right] = -1$$

$$\Rightarrow K'_C = \frac{-2J_p (Z_{BW} - 1) \left(Z_{BW} - e^{-\frac{T}{\tau_i}} \right)}{K_T \left[\left(T^2 + 2\tau_i^2 - 2\tau_i^2 e^{-\frac{T}{\tau_i}} - 2\tau_i T \right) Z_{BW}^2 + \left(T^2 + 2\tau_i T + 4\tau_i^2 e^{-\frac{T}{\tau_i}} + 2\tau_i T e^{-\frac{T}{\tau_i}} - 4\tau_i^2 - T^2 e^{-\frac{T}{\tau_i}} \right) Z_{BW}^1 + \left(2\tau_i^2 - 2\tau_i T e^{-\frac{T}{\tau_i}} - 2\tau_i^2 e^{-\frac{T}{\tau_i}} - T^2 e^{-\frac{T}{\tau_i}} \right) \right]}$$

$$\Rightarrow K_C = \frac{-2J_p T (Z_{BW} - 1) \left(Z_{BW} - e^{-\frac{T}{\tau_i}} \right)}{\left(T^2 + 2\tau_i^2 - 2\tau_i^2 e^{-\frac{T}{\tau_i}} - 2\tau_i T \right) Z_{BW}^2 + \left(T^2 + 2\tau_i T + 4\tau_i^2 e^{-\frac{T}{\tau_i}} + 2\tau_i T e^{-\frac{T}{\tau_i}} - 4\tau_i^2 - T^2 e^{-\frac{T}{\tau_i}} \right) Z_{BW}^1 + \left(2\tau_i^2 - 2\tau_i T e^{-\frac{T}{\tau_i}} - 2\tau_i^2 e^{-\frac{T}{\tau_i}} - T^2 e^{-\frac{T}{\tau_i}} \right)}$$

$$\Rightarrow C(Z) = \frac{2J_p T (1 - Z_{BW}) \left(Z_{BW} - e^{-\frac{T}{\tau_i}} \right)}{\left(T^2 + 2\tau_i^2 - 2\tau_i^2 e^{-\frac{T}{\tau_i}} - 2\tau_i T \right) Z_{BW}^2 + \left(T^2 + 2\tau_i T + 4\tau_i^2 e^{-\frac{T}{\tau_i}} + 2\tau_i T e^{-\frac{T}{\tau_i}} - 4\tau_i^2 - T^2 e^{-\frac{T}{\tau_i}} \right) Z_{BW}^1 + \left(2\tau_i^2 - 2\tau_i T e^{-\frac{T}{\tau_i}} - 2\tau_i^2 e^{-\frac{T}{\tau_i}} - T^2 e^{-\frac{T}{\tau_i}} \right)} \times \frac{Z - 0.9999}{Z - 1}$$

此框框為一個常數

又因為

$$\frac{I_a^*(Z)}{\mathcal{W}_{err}(Z)} = C(Z) \times \widehat{K_T}^{-1} = \frac{C(Z)}{K_T}$$

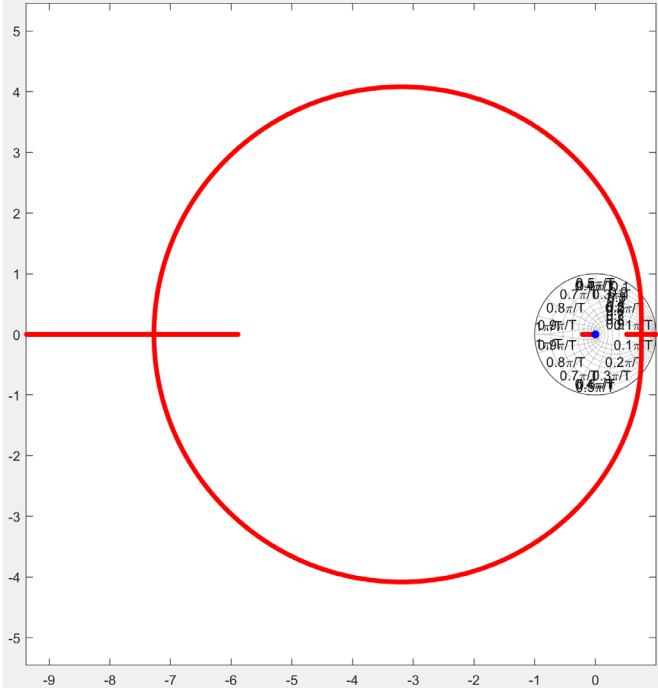
$$\Rightarrow \frac{I_a^*(Z)}{\mathcal{W}_{err}(Z)} = \frac{-2J_p T (Z_{BW} - 1) \left(Z_{BW} - e^{-\frac{T}{\tau_i}} \right)}{\left(T^2 + 2\tau_i^2 - 2\tau_i^2 e^{-\frac{T}{\tau_i}} - 2\tau_i T \right) Z_{BW}^2 + \left(T^2 + 2\tau_i T + 4\tau_i^2 e^{-\frac{T}{\tau_i}} + 2\tau_i T e^{-\frac{T}{\tau_i}} - 4\tau_i^2 - T^2 e^{-\frac{T}{\tau_i}} \right) Z_{BW}^1 + \left(2\tau_i^2 - 2\tau_i T e^{-\frac{T}{\tau_i}} - 2\tau_i^2 e^{-\frac{T}{\tau_i}} - T^2 e^{-\frac{T}{\tau_i}} \right)} \times \frac{Z - 0.9999}{Z - 1}$$



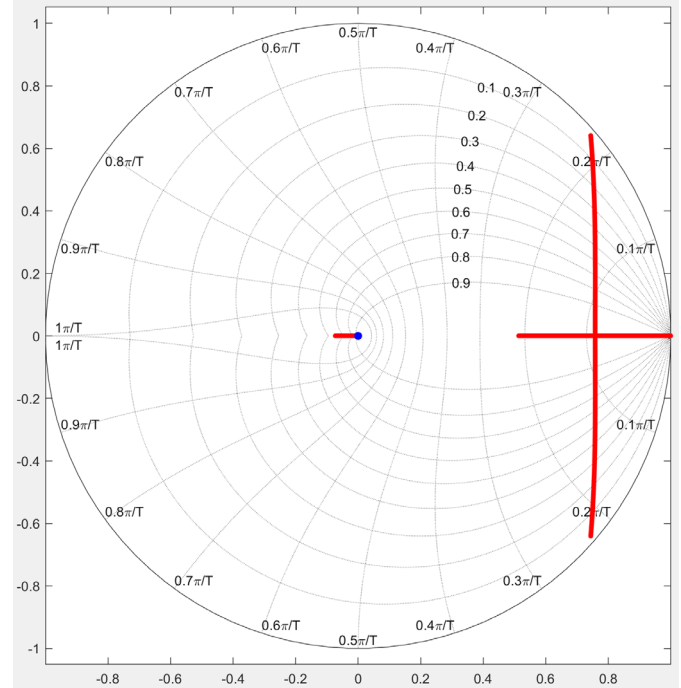
Check : Use Z-domain Root Locus

同 P.6-P.7 的概念，用 MatLab 跑 $C(Z)NSD(Z)$ 的 Z-domain Root Locus（根軌跡）。

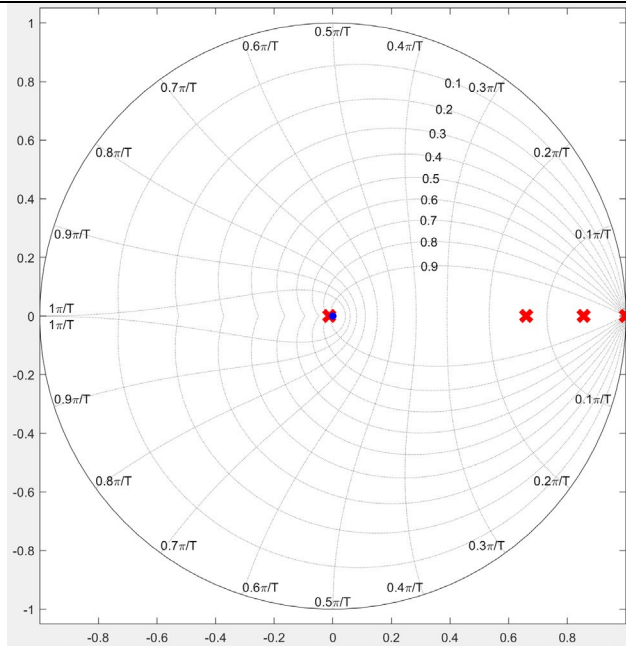
完整根軌跡，藍點為 Bandwidth 在 Z-domain 的映射



放大根軌跡，藍點為 Bandwidth 在 Z-domain 的映射



在我們設計的開迴路增益下，閉迴路極點位置，其中，藍點為 Bandwidth 在 Z-domain 的映射。



由上表可知，閉迴路極點位置與 Bandwidth 在 Z-domain 的映射（藍點）非常接近【理想狀態為重合】；另外，與 Question 2 Continuous Approximation 的設計方法相比，閉迴路極點與藍點靠得更近，由此可知此設計方法更佳！



Result 1:

$$C(Z)$$

✓ Parameter Value:

$$C(Z) = \frac{2J_p T(1 - Z_{BW}) \left(Z_{BW} - e^{-\frac{T}{\tau_i}} \right)}{\left(T^2 + 2\tau_i^2 - 2\tau_i^2 e^{-\frac{T}{\tau_i}} - 2\tau_i T \right) Z_{BW}^2 + \left(T^2 + 2\tau_i T + 4\tau_i^2 e^{-\frac{T}{\tau_i}} + 2\tau_i T e^{-\frac{T}{\tau_i}} - 4\tau_i^2 - T^2 e^{-\frac{T}{\tau_i}} \right) Z_{BW} + \left(2\tau_i^2 - 2\tau_i T e^{-\frac{T}{\tau_i}} - 2\tau_i^2 e^{-\frac{T}{\tau_i}} - T^2 e^{-\frac{T}{\tau_i}} \right)} \times \frac{Z - 0.9999}{Z - 1}$$

其中：

$$Z_{BW} = e^{-\text{Bandwidth} \times T} = e^{-BW \times T} = e^{-200\pi \times T} = e^{-200\pi \times 0.0002} = e^{-0.04\pi} = 0.881911$$

✓ Numerical Value:

$$C(Z) = K_P + K_I \frac{T}{1 - Z^{-1}} = 5.1108 + 2.5 \frac{T}{1 - Z^{-1}} = 5.1108 + \frac{0.0005}{1 - Z^{-1}}$$

Result 2:

$$\frac{I_a^*(Z)}{\omega_{\text{err}}(Z)}$$

✓ Parameter Value:

$$\frac{I_a^*(Z)}{\omega_{\text{err}}(Z)} = \frac{-2 \frac{J_p T}{K_T} (Z_{BW} - 1) \left(Z_{BW} - e^{-\frac{T}{\tau_i}} \right)}{\left(T^2 + 2\tau_i^2 - 2\tau_i^2 e^{-\frac{T}{\tau_i}} - 2\tau_i T \right) Z_{BW}^2 + \left(T^2 + 2\tau_i T + 4\tau_i^2 e^{-\frac{T}{\tau_i}} + 2\tau_i T e^{-\frac{T}{\tau_i}} - 4\tau_i^2 - T^2 e^{-\frac{T}{\tau_i}} \right) Z_{BW} + \left(2\tau_i^2 - 2\tau_i T e^{-\frac{T}{\tau_i}} - 2\tau_i^2 e^{-\frac{T}{\tau_i}} - T^2 e^{-\frac{T}{\tau_i}} \right)} \times \frac{Z - 0.9999}{Z - 1}$$

其中：

$$Z_{BW} = e^{-\text{Bandwidth} \times T} = e^{-BW \times T} = e^{-200\pi \times T} = e^{-200\pi \times 0.0002} = e^{-0.04\pi} = 0.881911$$

✓ Numerical Value:

$$\frac{I_a^*(Z)}{\omega_{\text{err}}(Z)} = \frac{K_P + K_I \frac{T}{1 - Z^{-1}}}{K_T} = 36.5057 + 17.8571 \frac{T}{1 - Z^{-1}} = 36.5057 + \frac{0.00357}{1 - Z^{-1}}$$



Question 4

Target

分別用 $\omega_m^*(t) = 5 \text{ rad/sec}$ 100 Hz Sine Wave 以及 $\omega_m^*(t) = 5 \text{ rad/sec}$ Step Function 當作輸入，同時將透過 Question #2 與 Question #3 所設計的補償後響應顯示在同一張圖片中。

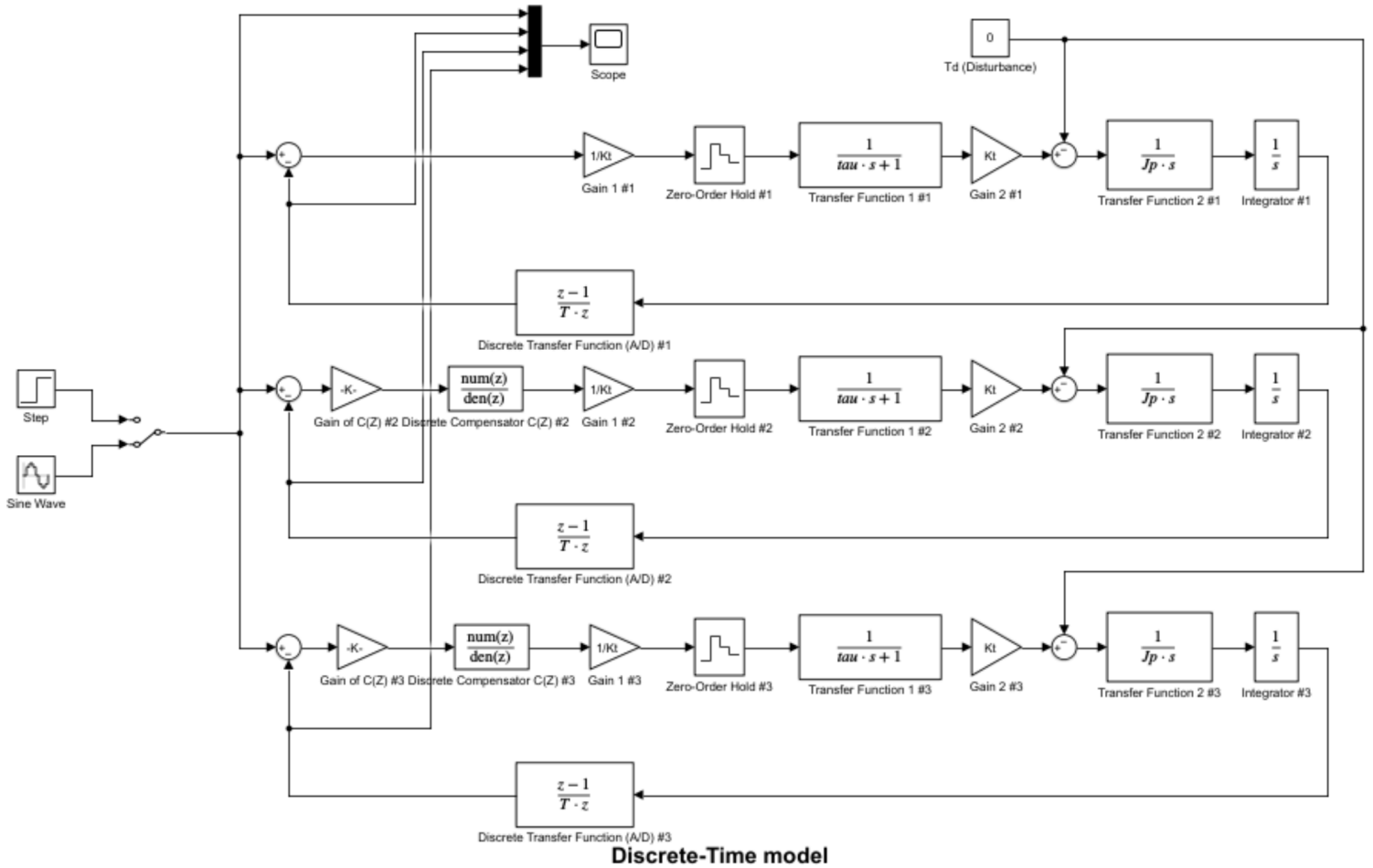
Announcement Item	
Subject	Project #2 adjustment
Date	2021-05-21
Due Date	Indefinite Duration
URL	
Attachment	
Content	<p>Dear all:</p> <p>For question 4 and 5, 2s sampling time can cause some simulation problems. Compare $T = 0.0002$ and $T = 0.0005$ instead. For tracking ability, you only need to show two to three cycles of traction wave form, if system cannot converge, please show the wave form and explain why. You can also explain the difference through bode plot or other tools.</p> <p>For question number#2 and 4 please explain the designing process and reasons in continuous-time and how to realize in digital domain. You have to show at least a step response figure and a 100Hz sine wave tracking figure.</p> <p>For question number#3 and 4 we recommend to use the method taught in lectures, delta C should be set really close to 1. Please explain:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Design trade-offs of delta C 2. How to design controller gain Kc' (hint: use root-locus) <p>You also need to show at least a step response figure and a 100Hz sine wave tracking figure. Please explain your figure, for example: If there is overshoot for step response, why? If feedback signal is higher than command, why? If there is steady state error, why? Try to explain through your designing process, such as delta C selection, root-locus plot...</p> <p>Bode plot is also recommended to show the performance of your controller, but please noted that bode plot is the result of your system, not the reason of your controller design.</p> <p>For question number#5 speed is controlled at constant speed (500 rad/s)</p> <p>If you have any questions please contact TA through e-mail.</p> <p>TA</p>

Announcement Item	
Subject	Project #2 adjustment 2
Date	2021-05-25
Due Date	Indefinite Duration
URL	
Attachment	<p>465764_Project2-Hint.pdf (Right click on the file and select "Save Link Target As...")</p>
Content	<p>Sorry there are still some adjustment for project 2.</p> <p>For question number 4, the speed command should be 100Hz 5rad/s sine wave command.</p> <p>Also, for question number 4&5, you need a new NSD for a different sample time. The attachment file is the analytical solution for discrete transfer functions.</p> <p>Question 5 request for disturbance rejection performance, speed command is set at 500 rad/s. You can set the initial state to 500 rad/s or add a step disturbance after motor operates steadily at 500 rad/s.</p> <p>Please e-mail to TA before 5/27 24:00.</p> <p>e-mail: chinglon.huang@gmail.com</p> <p>TA</p>



Solution

Block Diagram :



說明：

In Question #2 :

$$C(Z) = BW \times J_p \left[\frac{\left(\frac{2\tau_i}{T} + 1 \right) + \left(1 - \frac{2\tau_i}{T} \right) Z^{-1}}{1 + Z^{-1}} \right]$$

In Question #3 :

$$\frac{I_a^*(Z)}{W_{err}(Z)} = \frac{-2 \frac{J_p T}{K_T} (Z_{BW} - 1) \left(Z_{BW} - e^{-\frac{T}{\tau_i}} \right)}{\left(T^2 + 2\tau_i^2 - 2\tau_i^2 e^{-\frac{T}{\tau_i}} - 2\tau_i T \right) Z_{BW}^2 + \left(T^2 + 2\tau_i T + 4\tau_i^2 e^{-\frac{T}{\tau_i}} + 2\tau_i T e^{-\frac{T}{\tau_i}} - 4\tau_i^2 - T^2 e^{-\frac{T}{\tau_i}} \right) Z_{BW} + \left(2\tau_i^2 - 2\tau_i T e^{-\frac{T}{\tau_i}} - 2\tau_i^2 e^{-\frac{T}{\tau_i}} - T^2 e^{-\frac{T}{\tau_i}} \right)} \times \frac{Z - 0.9999}{Z - 1}$$



其中：

$$Z_{BW} = e^{-\text{Bandwidth} \times T} = e^{-BW \times T} = e^{-200\pi \times T} = e^{-200\pi \times 0.0002} = e^{-0.04\pi} = 0.881911$$

所以在我們 Simulink 中：

Gain of C(Z) #2 為： $BW \times J_p$ 。

Discrete Compensator C(Z) #2 為： $\frac{\left(\frac{2\tau_i}{T}+1\right)+\left(1-\frac{2\tau_i}{T}\right)Z^{-1}}{1+Z^{-1}}$ 。

Gain of C(Z) #3 為：

$$\frac{-2\frac{J_p T}{K_t}(Z_{BW}-1)\left(Z_{BW}-e^{-\frac{T}{\tau_i}}\right)}{\left(T^2+2\tau_i^2-2\tau_i^2e^{-\frac{T}{\tau_i}}-2\tau_i T\right)Z_{BW}^2+\left(T^2+2\tau_i T+4\tau_i^2e^{-\frac{T}{\tau_i}}+2\tau_i T e^{-\frac{T}{\tau_i}}-4\tau_i^2-T^2e^{-\frac{T}{\tau_i}}\right)Z_{BW}^1+\left(2\tau_i^2-2\tau_i T e^{-\frac{T}{\tau_i}}-2\tau_i^2e^{-\frac{T}{\tau_i}}-T^2e^{-\frac{T}{\tau_i}}\right)}$$

，其中： $Z_{BW} = e^{-\text{Bandwidth} \times T} = e^{-BW \times T} = e^{-200\pi \times 0.0002} = e^{-0.04\pi} = 0.881911$

Discrete Compensator C(Z) #3 為： $\frac{Z-0.9999}{Z-1}$ 。

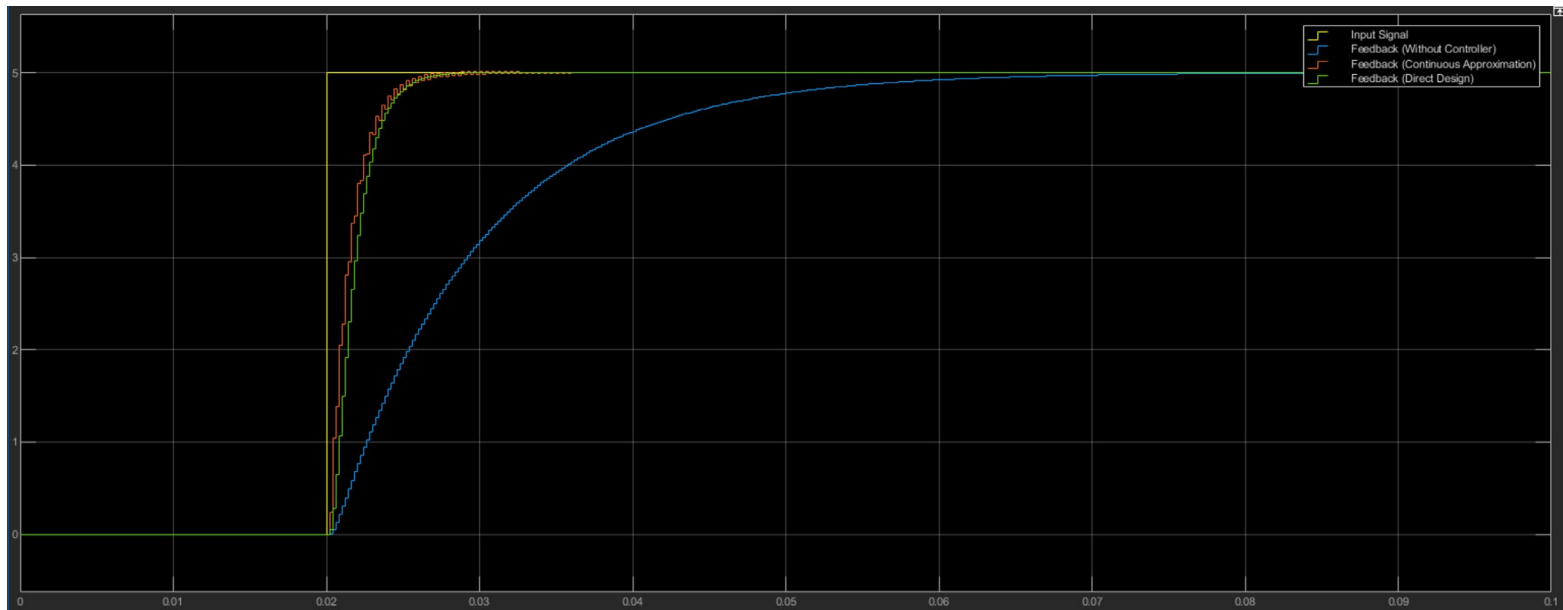
另外，我們寫了一個 Parameter.m，以利再變更取樣時間 T 時，可以不必重新 Key 轉移函數。Parameter.m 如下所示：

Parameter.m	
	parameter.m × +
1 -	clear;clc;close all;
2	%%
3 -	Jp = 0.01;
4 -	Kt = 0.14;
5 -	tau = 0.0003;
6 -	T = 0.0002;
7 -	BW = 100*2*pi;
8 -	Zbw = exp(-BW*T);

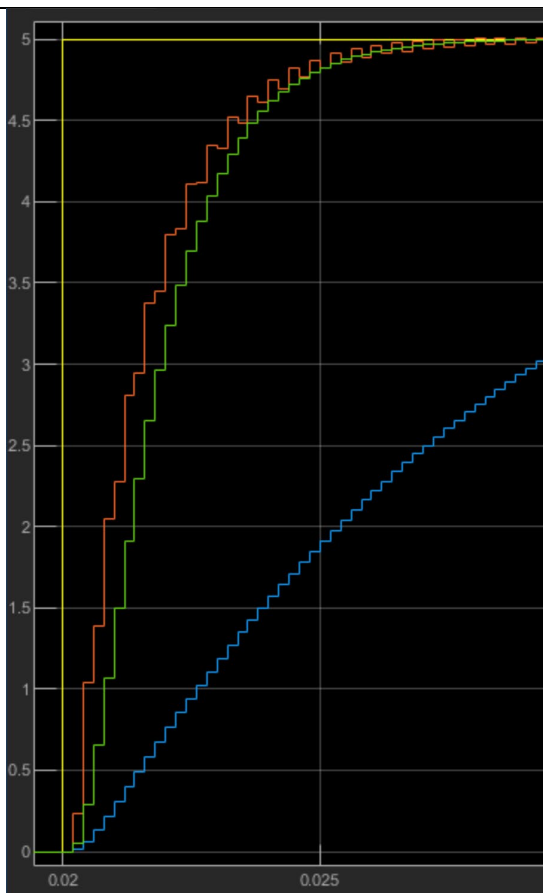


Results

一、 $\omega_m^*(t) = 5 \text{ rad/sec}$ Step Function, Sample time $T = 0.0002 \text{ sec}$ 。



放大後的波形：



黃色為：Input Signal

藍色為：Feedback (Without Controller)

橘色為：Feedback (Continuous Approximation)

綠色為：Feedback (Direct Design)

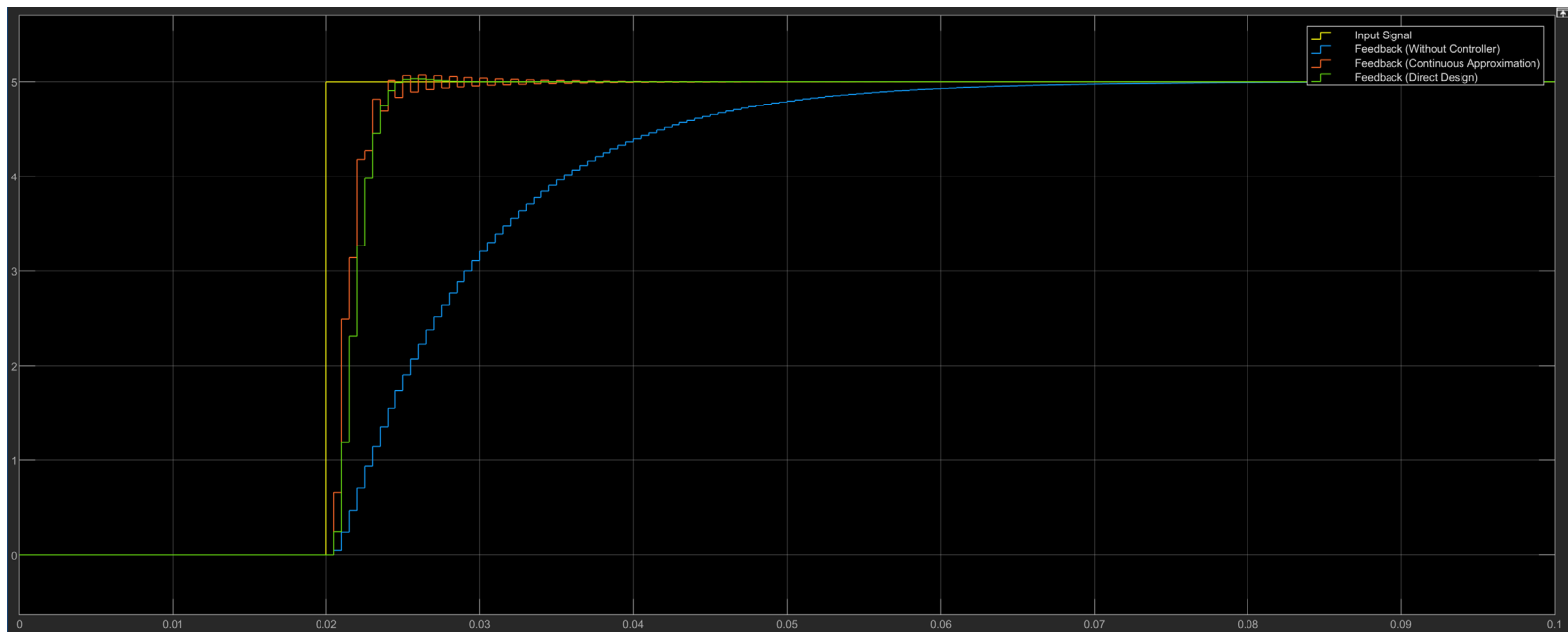
補償器/控制器之比較：

1. **【響應速度】**：可以發現輸入波形為步階函數時，#2 Continuous Approximation 所設計之控制器的響應速度快於 #3 Direct Design 所設計之控制器。
2. **【穩態誤差】**：兩者皆沒有穩態誤差。
3. **【Overshoot】**：兩種控制器皆沒有發生 Overshoot 的現象，但可以觀察到 #2 Continuous Approximation 的波形在快達到平衡的時候以振盪的方式趨於平衡，而 #3 Direct Design 的波形則是以逐漸上升的方式達到平衡。
(因為 Question #2 用到 PD 控制器，因此會加快系統響應時間，而 Question #3 則使用 PI 控制器，故響應時間沒這麼快，但可以減少穩態誤差。)
4. 由藍色波形可知，無論哪種控制器都比未加控制器來得快！(暫態響應更好、穩態響應一樣)

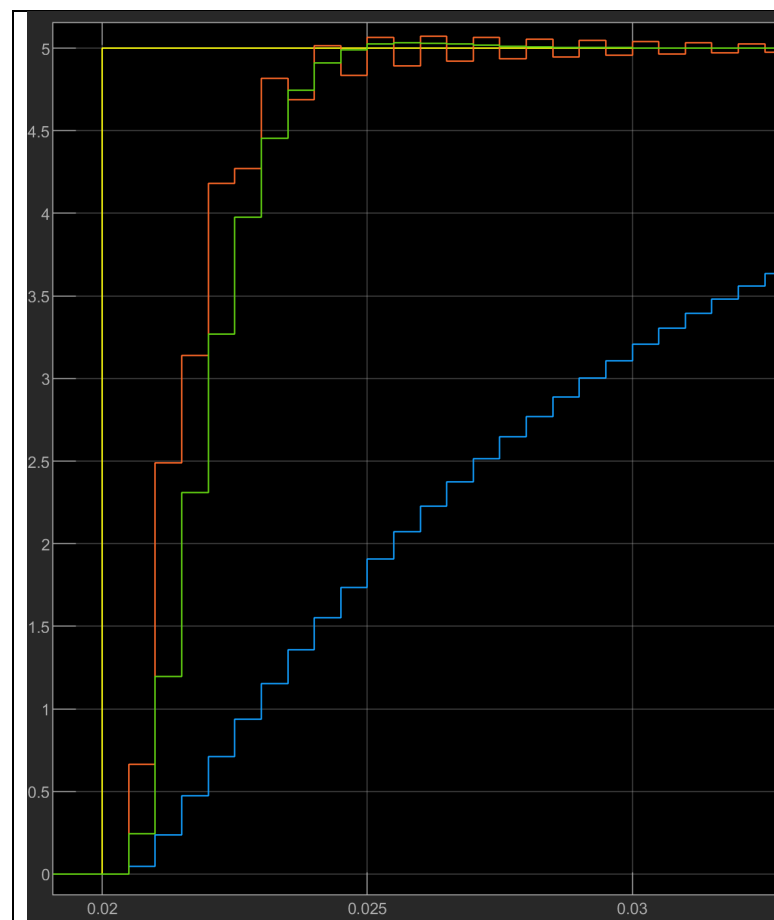


國立臺灣大學 Digital Control System Project #2 Group #13

二、 $\omega_m^*(t) = 5 \text{ rad/sec}$ Step Function, Sample time $T = 0.0005 \text{ sec}$ 。



放大後的波形：



黃色為：Input Signal

藍色為：Feedback (Without Controller)

橘色為：Feedback (Continuous Approximation)

綠色為：Feedback (Direct Design)

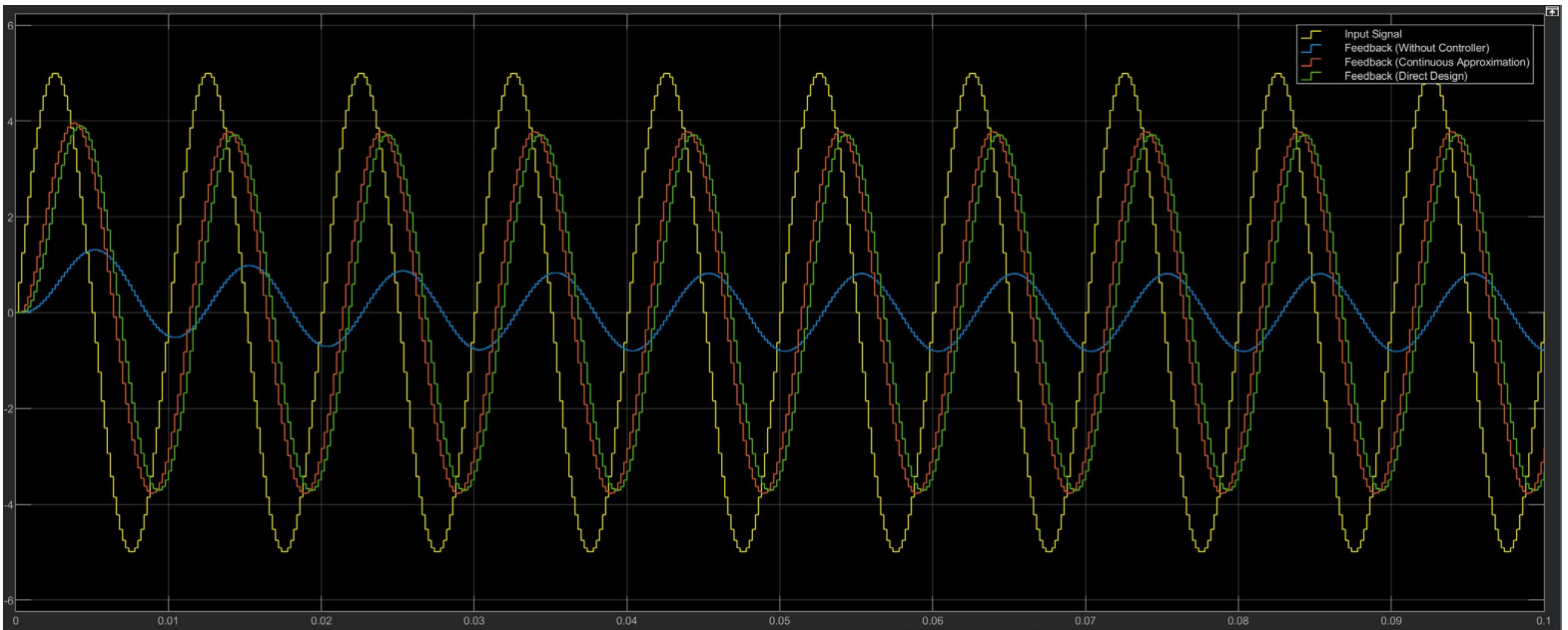
補償器/控制器之比較：

1. **【響應速度】**：可以發現輸入波形為步階函數時，# 2 Continuous Approximation 所設計之控制器的響應速度快於 # 3 Direct Design 所設計之控制器。
2. **【穩態誤差】**：兩者皆沒有穩態誤差。
3. **【Overshoot】**：兩種控制器皆沒有發生 Overshoot 的現象，但可以觀察到 # 2 Continuous Approximation 的波形在快達到平衡的時候以振盪的方式趨於平衡，而 # 3 Direct Design 的波形雖然有略為高出 5 rad/sec 一些些，但整體來說，是以逐漸上升的方式達到平衡。
4. 由藍色波形可知，無論哪種控制器都比未加控制器來得快！（暫態響應更好、穩態響應一樣）

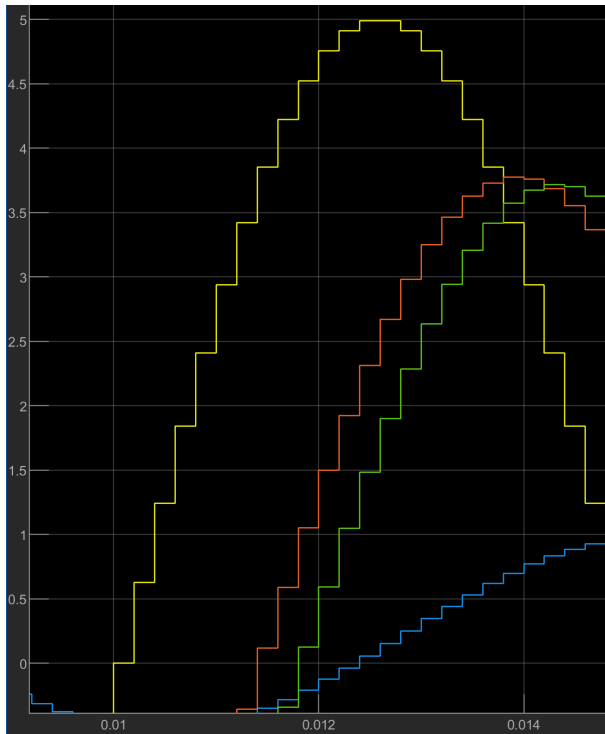


國立臺灣大學 Digital Control System Project #2 Group #13

三、 $\omega_m^*(t) = 5 \text{ rad/sec } 100 \text{ Hz Sine Wave}$, Sample time $T = 0.0002 \text{ sec}$ 。



放大後的波形：



黃色為：Input Signal

藍色為：Feedback (Without Controller)

橘色為：Feedback (Continuous Approximation)

綠色為：Feedback (Direct Design)

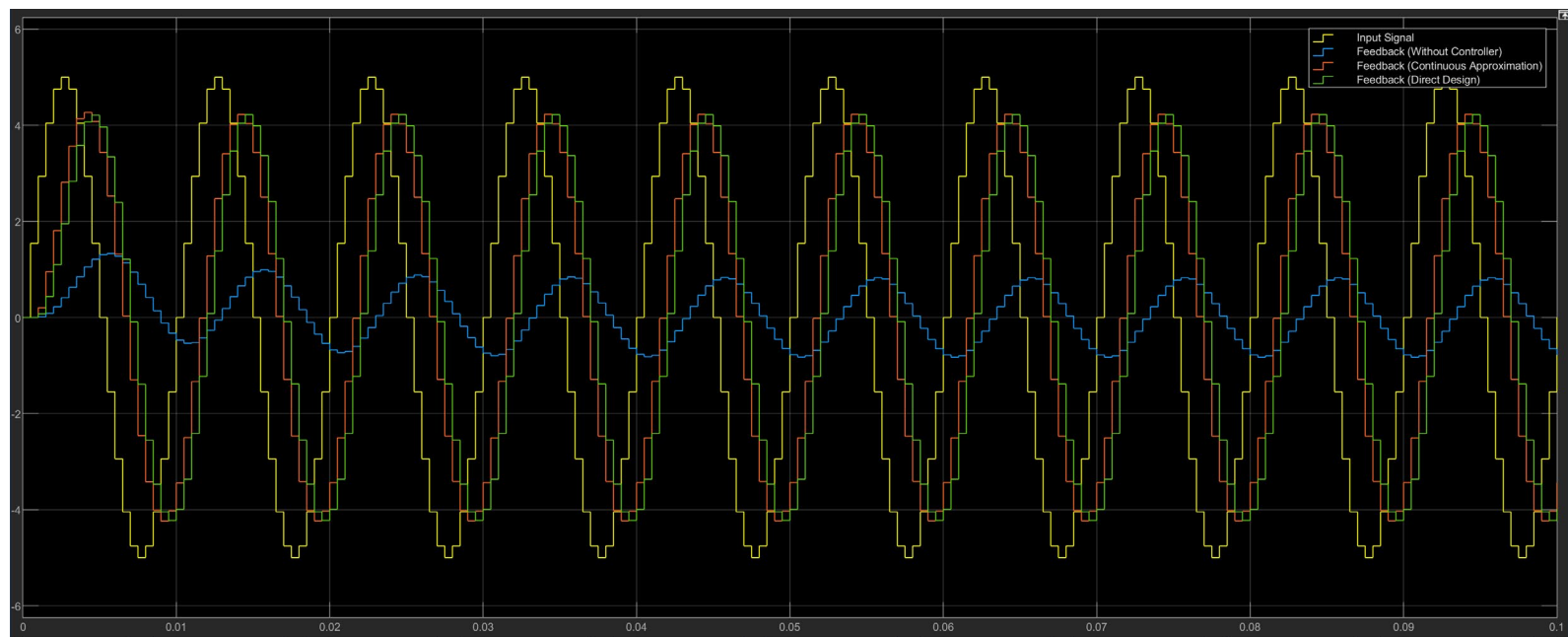
補償器/控制器之比較：

1. **【響應速度】**：可以發現輸入波形為正弦波時，#2 Continuous Approximation 所設計之控制器的響應速度仍然快於 #3 Direct Design 所設計之控制器。
2. **【頻寬】**：兩種設計方式皆無法達到輸入的最大振幅，其原因是因為受到控制器的頻寬所影響，由於當初設計控制器時的頻寬即為 100 Hz，因此我們可以發現在輸入為 100 Hz 波形的時候，其振幅都變成了原本的 $\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.707$ 倍。而使用 #3 Direct Design 所設計之控制器在頻寬 100 Hz 下，其振幅更接近 $\frac{1}{\sqrt{2}} \times 5 \approx 3.5355 \text{ rad/sec}$ ，因此在頻寬設計方面，#3 Direct Design 優於 #2 Continuous Approximation！
3. **【穩態誤差】**：兩者皆有穩態誤差，#2 Continuous Approximation 所設計之控制器的穩態誤差略小於 #3 Direct Design 所設計之控制器。
4. 由藍色波形可知，無論哪種控制器都比未加控制器來得好！（暫態與穩態響應皆更好）

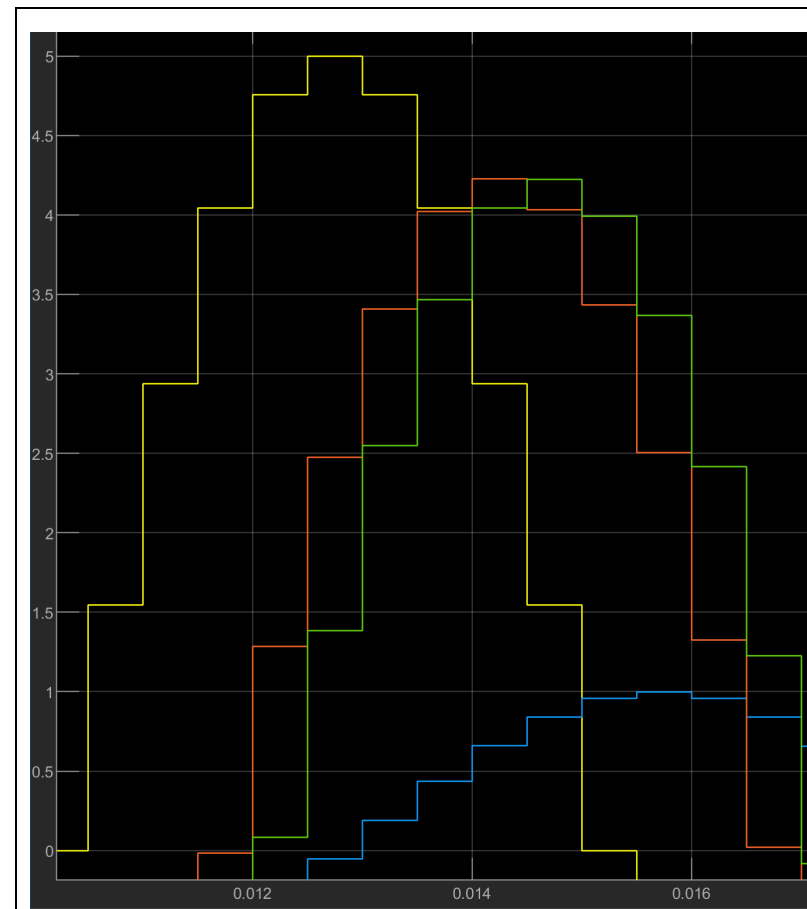


國立臺灣大學 Digital Control System Project #2 Group #13

四、 $\omega_m^*(t) = 5 \text{ rad/sec } 100 \text{ Hz Sine Wave}$, Sample time $T = 0.0005 \text{ sec}$ 。



放大後的波形：



黃色為：Input Signal

藍色為：Feedback (Without Controller)

橘色為：Feedback (Continuous Approximation)

綠色為：Feedback (Direct Design)

補償器/控制器之比較：

1. **【響應速度】**：兩者差不多，都有些許延遲。
2. **【頻寬】**：兩種設計方式皆無法達到輸入的最大振幅，其原因是因為受到控制器的頻寬所影響，由於當初設計控制器時的頻寬即為 100 Hz，因此我們可以發現在輸入為 100 Hz 波形的時候，其振幅都變成了原本的 $\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.707$ 倍。而使用 # 3 Direct Design 所設計之控制器在頻寬 100 Hz 下，其振幅更接近 $\frac{1}{\sqrt{2}} \times 5 \approx 3.5355 \text{ rad/sec}$ ，因此在頻寬設計方面，# 3 Direct Design 優於 # 2 Continuous Approximation !
3. **【穩態誤差】**：兩者皆有穩態誤差，且兩者穩態誤差非常接近。
4. 由藍色波形可知，無論哪種控制器都比未加控制器來得好！**（暫態與穩態響應皆更好）**



比較：

1. Input 同樣為 $\omega_m^*(t) = 5 \text{ rad/sec Step Function}$ ：

取樣時間 $T = 0.0002 \text{ sec}$ VS. $T = 0.0005 \text{ sec}$

由 P.19、P.20 的一、與二、來看，可以發現 #3 Direct Design (PI 補償器) 是以平滑的方式上升，所以取樣頻率改變所得到的結果較為類似；而 #2 Continuous Approximation (PD 補償器) 則是以振盪方式上升，故可以發現每個取樣點之間的變化幅度並非逐漸遞減，有時亦會取到比前個取樣點更低的值，因此在此我們認為那是一種「震盪」。

2. Input 同樣為 $\omega_m^*(t) = 5 \text{ rad/sec } 100 \text{ Hz Sine Wave}$ ：

取樣時間 $T = 0.0002 \text{ sec}$ VS. $T = 0.0005 \text{ sec}$

由 P.21、P.22 的三、與四、來看，可以發現無論 #3 Direct Design (PI 補償器) 還是 #2 Continuous Approximation (PD 補償器) 皆會受到取樣時間 T 的直接影響，當取樣時間 T 越短，所得到的波形越接近正弦波的形式，解析度與精確度也會高上許多。

3. 系統未加入任何控制器：

由 P.19~P.20 的一、~四、來看，可以發現，未加入控制器的系統（藍線），其暫態響應（反應速度與震盪）一定比有加入控制器來得差；至於穩態誤差的話，如若輸入 Step Function，無論是否加入控制器皆不影響穩態誤差，但若輸入 Sine Wave，則會有一個非常大的誤差！

老師 Youtube 上的影片在統整 Continuous Approximation 設計方法的時候，有提到：「此方法的 Controller 設計上跟 T 有很大的關係，當 T 非常小（理想狀態為 0）的情況，我們可以得到較好的精度，可是當 T 變大的時候，便會開始產生震盪，甚至造成不穩定的閉迴路系統。」從連續跟離散的關係也可以間接得知這樣的原因，因為在 Continuous Approximation 時，我們必須將開迴路的轉移函式近似成連續。將 Youtube 上影片的結論套用此題，將第二題結果代入 Simulink 進行模擬的時候，也會發現明顯的不同，當我們在 $T = 0.0002 \text{ sec}$ 的時候，可以跑出相對合理的結果，但在 $T = 0.0005 \text{ sec}$ 的時候便會出現些許震盪，而在未修改題目前，我們用 $T = 2 \text{ sec}$ 的時候，系統會整個發散，由此，我們可知 T 在這兩種設計方式的重要性。

因為 Question #2 Continuous Approximation 用到 PD 控制器，因此會加快系統響應時間，而 Question #3 Direct Design 則使用 PI 控制器，故響應時間沒這麼快，但可以減少穩態誤差。



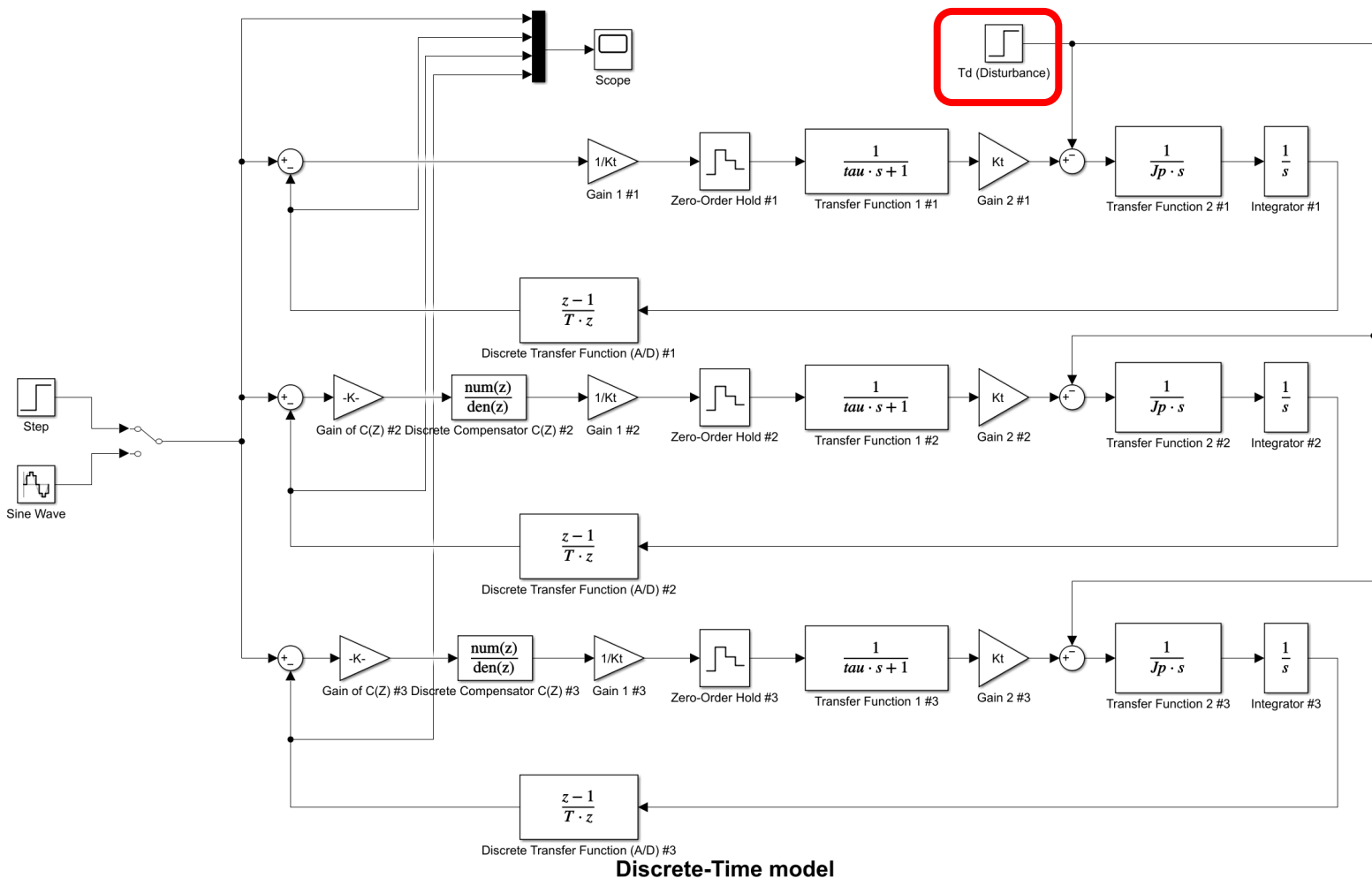
Question 5

Target

用 $\omega_m^*(t) = 500 \text{ rad/sec}$ Step Function 當作輸入，以及 30 rad/s 當作干擾 (Disturbance，即 Simulink 中的 T_d)，同時將透過 Question #2 與 Question #3 所設計的補償後響應顯示在同一張圖片中。

Solution

Block Diagram



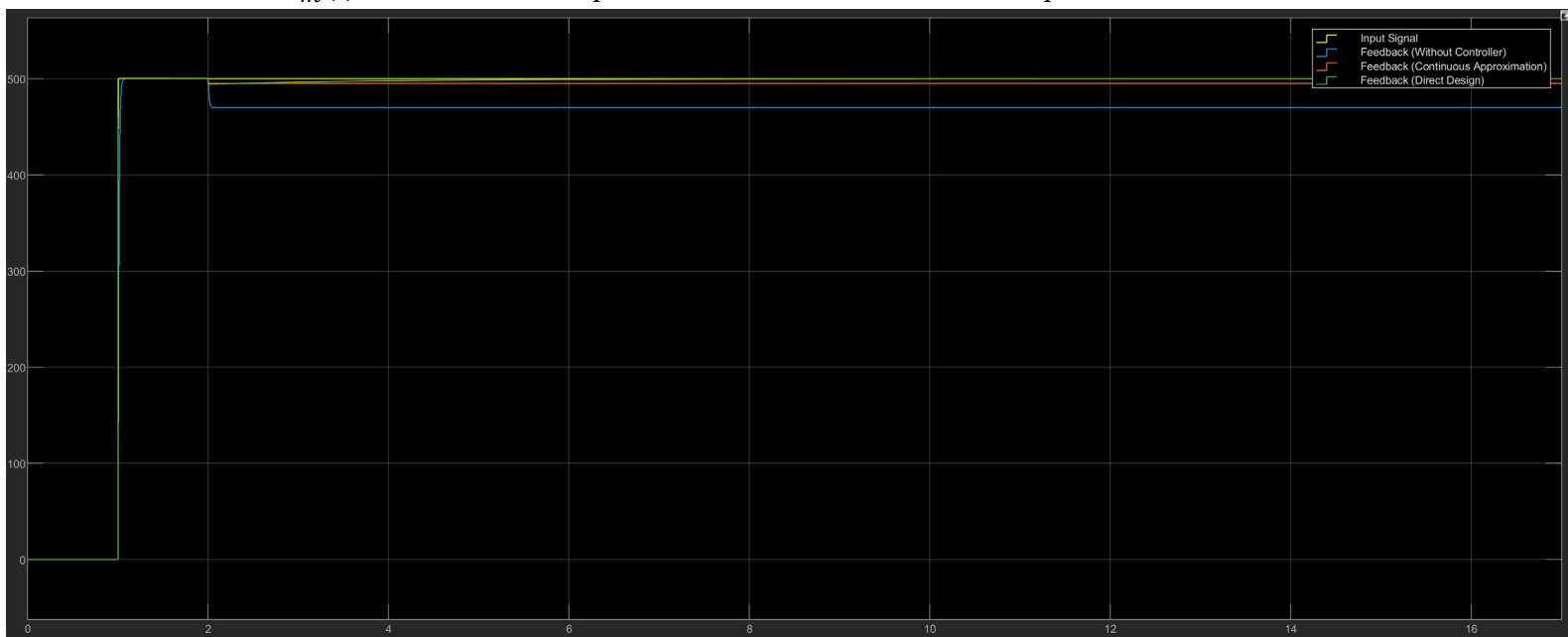
說明：

大部份同 P.17、P.18 之說明與設定。且由 Question #4 我們已知步階響應的穩態時間小於 1 sec ，因此我們設定在系統達穩態後再隔一秒，便加入干擾 $T_d = 30 \text{ rad/s}$ 。



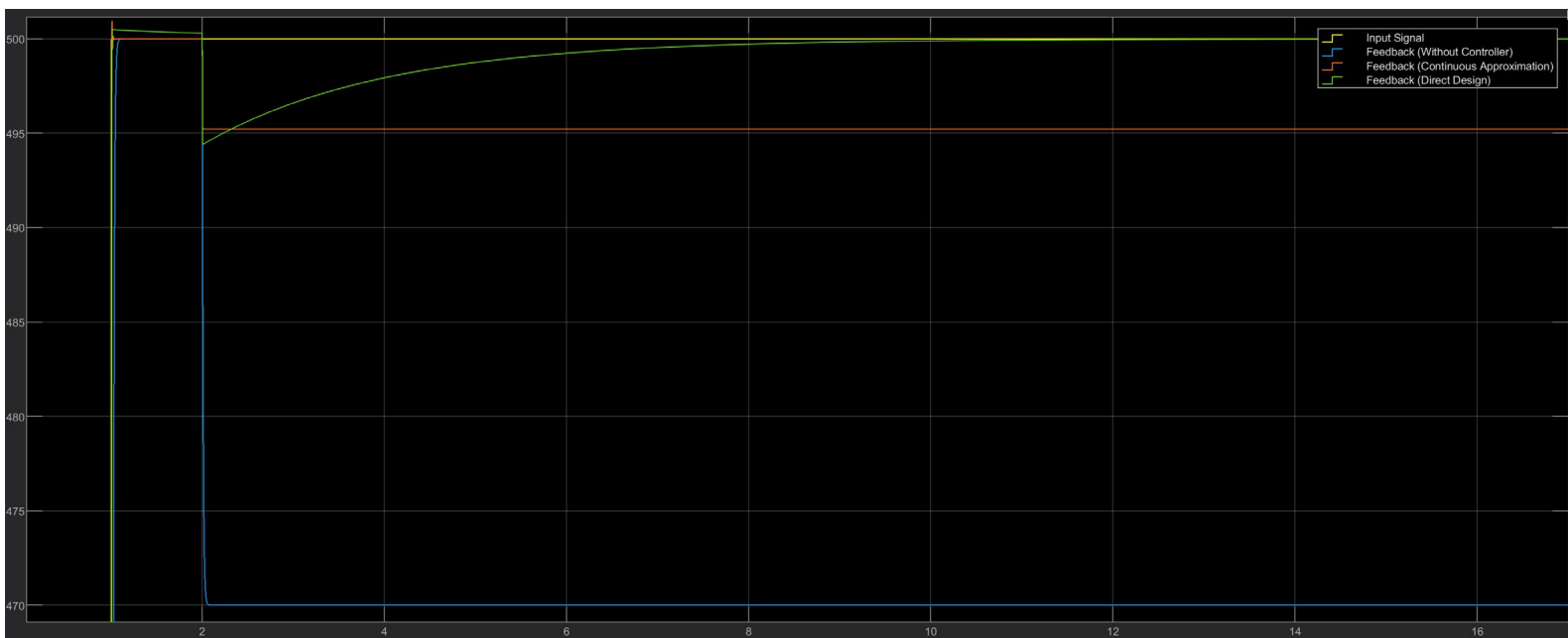
Results

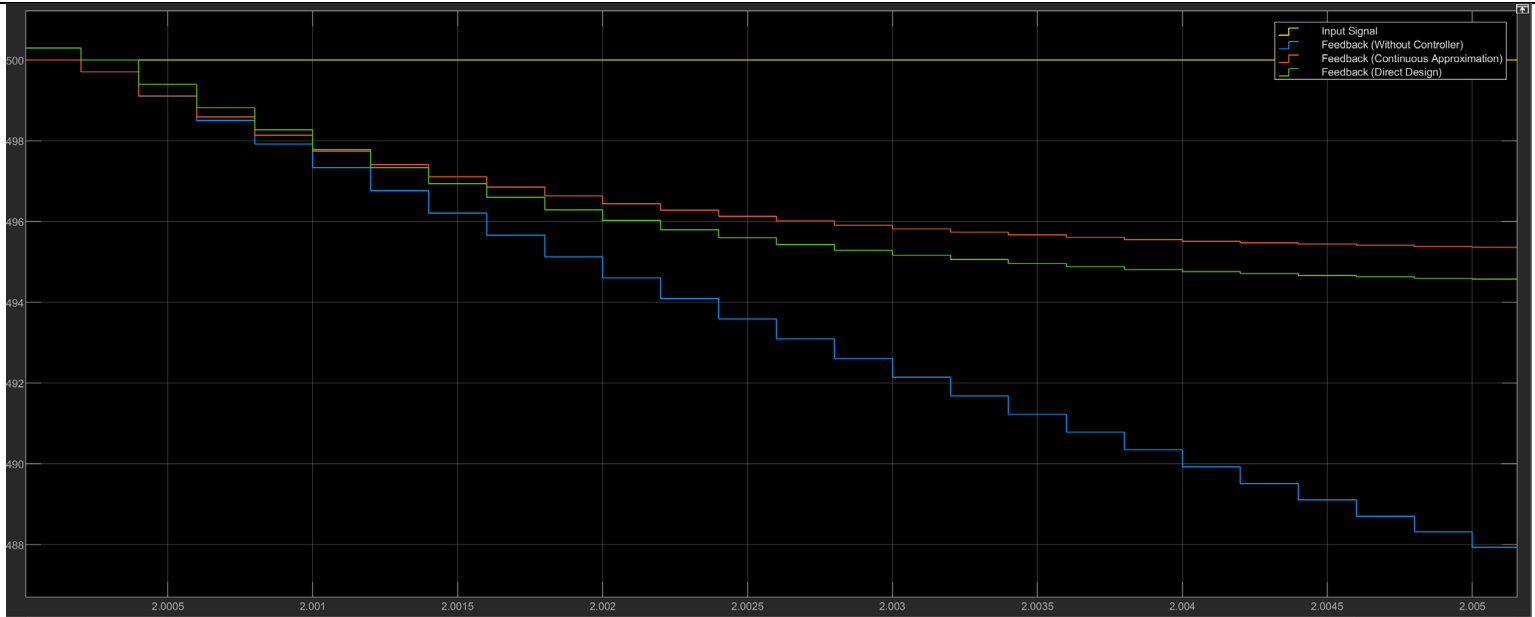
一、 $\omega_m^*(t) = 500 \text{ rad/sec}$ Step Function & $T_d = 30 \text{ rad/sec}$, Sample time $T = 0.0002 \text{ sec}$ 。



上圖為完整波形

下圖為放大後的部份波形





黃色為：Input Signal

藍色為：Feedback (Without Controller)

橘色為：Feedback (Continuous Approximation)

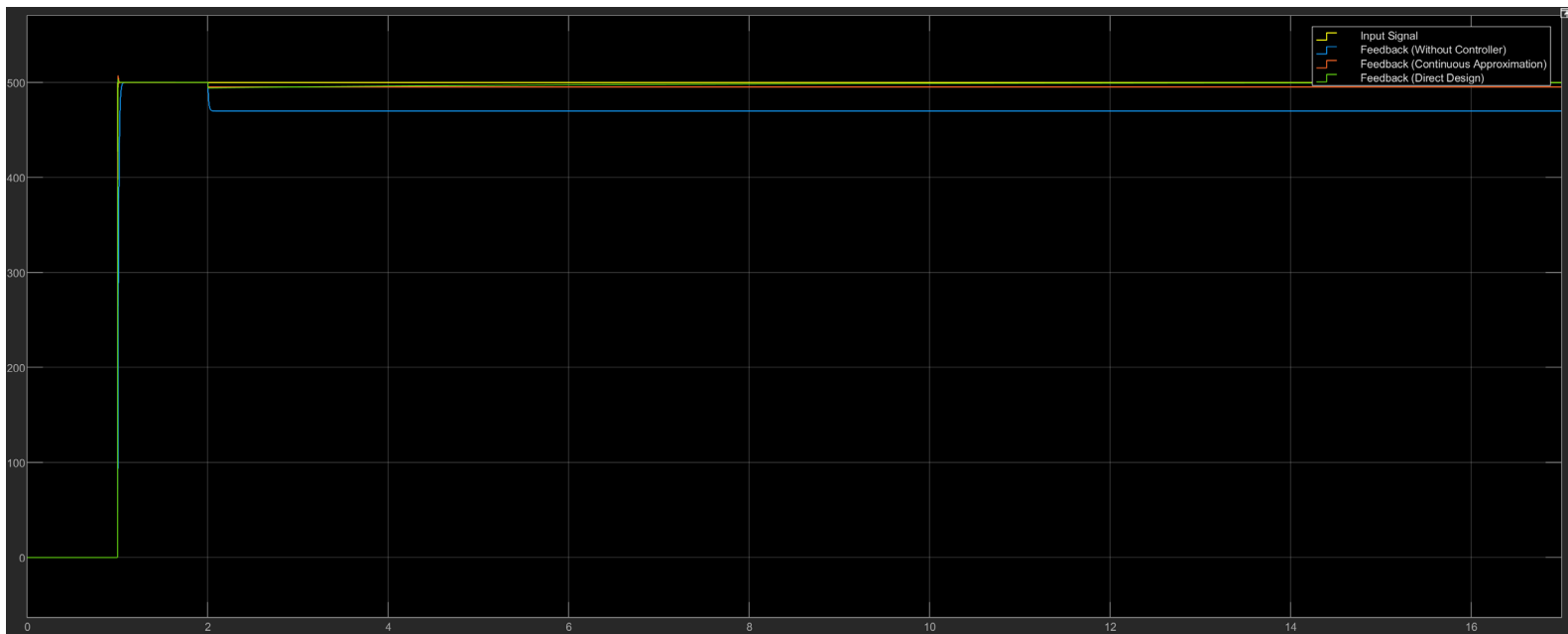
綠色為：Feedback (Direct Design)

補償器/控制器之比較：

1. 【響應速度】：由上圖及 Question #4 可以發現輸入波形為步階函數時，#2 Continuous Approximation 所設計之控制器的響應速度遠遠快於 #3 Direct Design 所設計之控制器，但在極短的秒數時會有很大的震盪。
2. 【穩態誤差】：由上圖可以發現，#3 Direct Design 的設計方式因為是 PI 控制器，所以可以消除輸入為步階函數的穩態誤差；而 #2 Continuous Approximation 所設計之控制器為 PD 控制器，因此即使響應速度再快，依舊有將近 5 rad/s 左右的穩態誤差。
3. 由藍色波形可知，未加入控制器的系統，其響應受 30 rad/s 的干擾 (T_d) 影響甚大，無論設計哪種控制器都比未加控制器的系統來得好！（暫態與穩態響應皆更好）

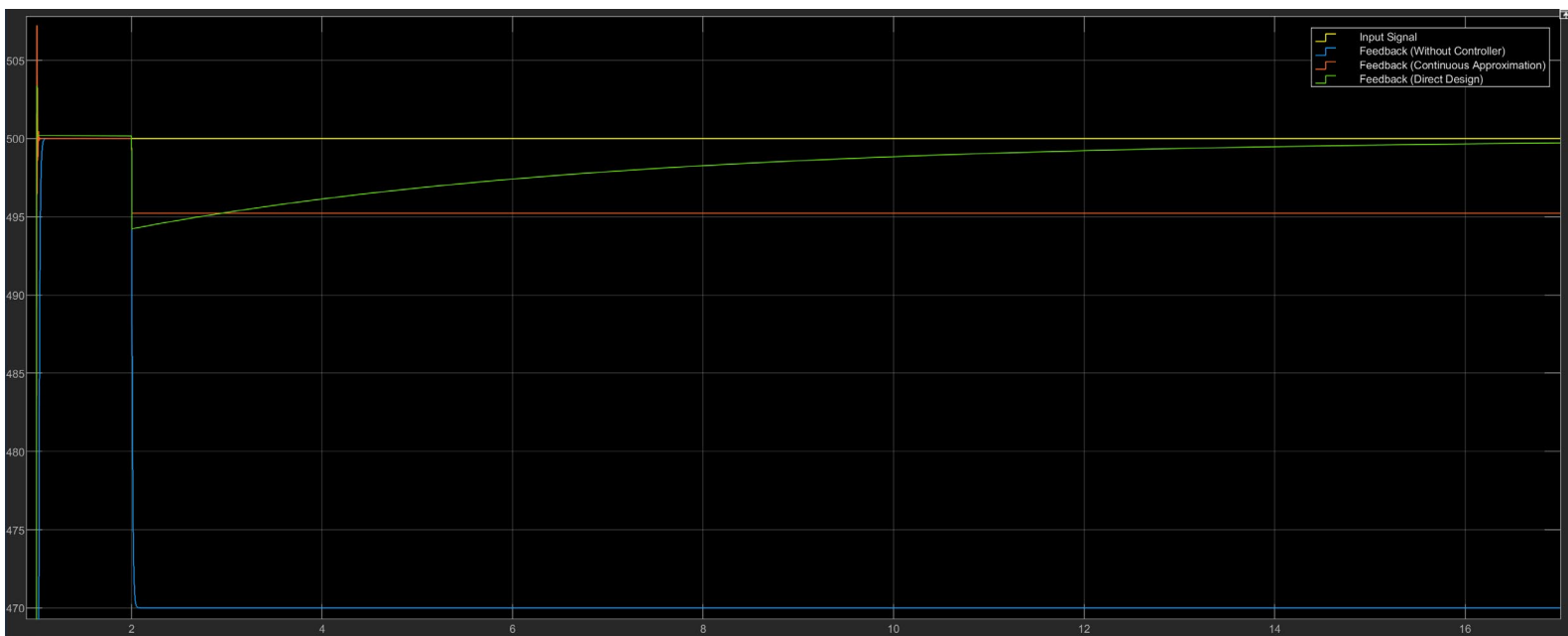


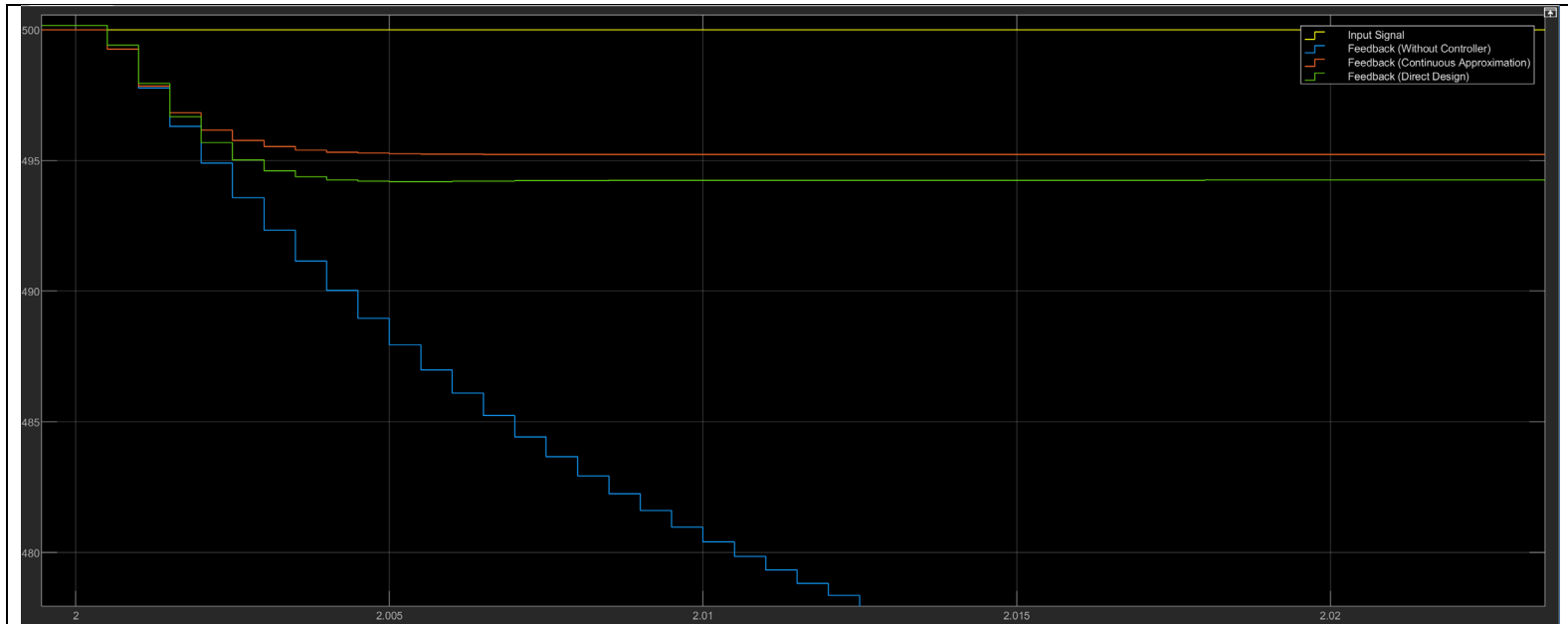
二、 $\omega_m^*(t) = 500 \text{ rad/sec}$ Step Function & $T_d = 30 \text{ rad/sec}$, Sample time $T = 0.0005 \text{ sec}$ 。



上圖為完整波形

下圖為放大後的部份波形





黃色為：Input Signal

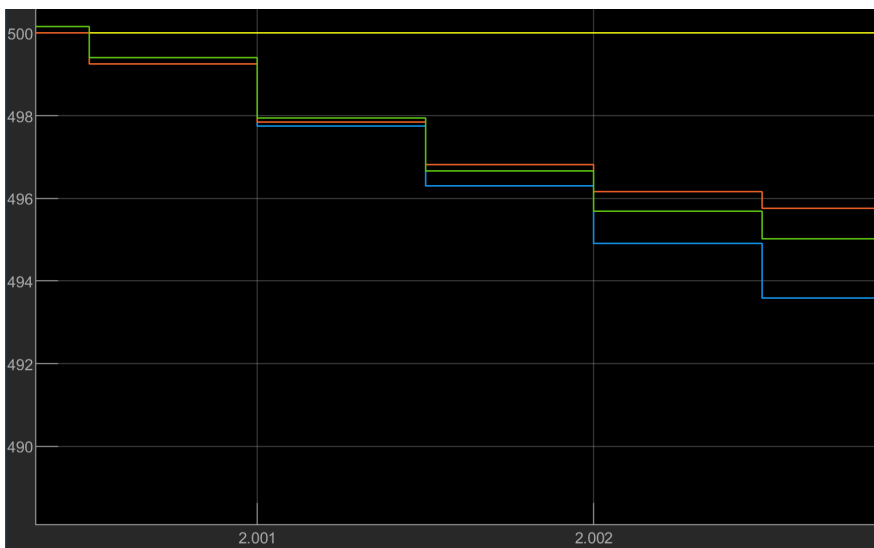
藍色為：Feedback (Without Controller)

橘色為：Feedback (Continuous Approximation)

綠色為：Feedback (Direct Design)

補償器/控制器之比較：

1. **【響應速度】**：由上圖及 Question #4 可以發現輸入波形為步階函數時，#2 Continuous Approximation 所設計之控制器的響應速度遠遠快於 #3 Direct Design 所設計之控制器，但在極短的秒數時會有很大的震盪。
2. **【穩態誤差】**：由上圖可以發現，#3 Direct Design 的設計方式因為是 PI 控制器，所以可以消除輸入為步階函數的穩態誤差；而#2 Continuous Approximation 所設計之控制器為 PD 控制器，因此即使響應速度再快，依舊有將近 5 rad/s 左右的穩態誤差。
3. 由藍色波形可知，未加入控制器的系統，其響應受 30 rad/s 的干擾 (T_d) 影響甚大，無論設計哪種控制器都比未加控制器的系統來得好！（暫態與穩態響應皆更好）





比較：

1. Input 同樣為 $\omega_m^*(t) = 500 \text{ rad/sec Step Function}$ 且 $T_d = 30 \text{ rad/sec}$ ：

取樣時間 $T = 0.0002 \text{ sec}$ VS. $T = 0.0005 \text{ sec}$

由 P.25~P.28 的一、與二、來看，可以發現 #3 Direct Design (PI 補償器) 是以平滑的方式上升，所以取樣頻率改變所得到的結果更為類似；而 #2 Continuous Approximation (PD 補償器) 則是以振盪方式上升，故可以發現每個取樣點之間的變化幅度並非逐漸遞減，有時亦會取到比前個取樣點更低的值，因此在此我們認為那是一種「震盪」。

就精準度來說，取樣時間 T 越短，其響應越接近連續域之圖型。

2. 系統未加入任何控制器：

由 P.25~P.28 的一、與二、來看，可以發現，未加入控制器的系統（藍線），其響應受 30 rad/s 的干擾 (T_d) 影響甚大，僅有 $500 - 30 = 470 \text{ rad/sec}$ ，由此我們可以推論出，在沒有加入任何控制器的系統中，只要受到外界干擾，便很有可能大大影響系統輸出，甚至導致其發散。

老師 Youtube 上的影片在統整 Continuous Approximation 設計方法的時候，有提到：「此方法的 Controller 設計上跟 T 有很大的關係，當 T 非常小（理想狀態為 0）的情況，我們可以得到較好的精度，可是當 T 變大的時候，便會開始產生震盪，甚至造成不穩定的閉迴路系統。」從連續跟離散的關係也可以間接得知這樣的原因，因為在 Continuous Approximation 時，我們必須將閉迴路的轉移函式近似成連續。

將 Youtube 上影片的結論套用此題，將第二題結果代入 Simulink 進行模擬的時候，也會發現明顯的不同，當我們在 $T = 0.0002 \text{ sec}$ 的時候，可以跑出相對合理的結果，但在 $T = 0.0005 \text{ sec}$ 的時候便會出現些許震盪，而在未修改題目前，我們用 $T = 2 \text{ sec}$ 的時候，系統會整個發散，由此，我們可知 T 在這兩種設計方式的重要性。

本題加入干擾 (T_d) 後，其暫態響應 (Transient Response) 會因此而受到 500 rad/sec 的強烈影響，但因為我們不管在 Question #2 或 Question #3 都有設計補償器/控制器，因此不至於影響太多。因為 Question #2 Continuous Approximation 用到 PD 控制器，因此會加快系統響應時間，而 Question #3 Direct Design 則使用 PI 控制器，故響應時間 (Settling Time) 沒這麼快，但由於有 I 控制器，因此在輸入為步階函數時不會有穩態誤差 (Steady State Error)。如若要真的去除掉干擾，我們認為應該要使用 PID 補償器/控制器才可以既沒有穩態誤差，暫態響應（響應時間）又可以很快！（與 Question #4 的答案有部份雷同）



Question 6

Target

Explain the performance difference between two controllers.

Results

1. 使用 Question # 2 Continuous Approximation 所設計之控制器系統
 - ✓ 此系統為一 PD 控制器，亦是一高通濾波器 (High Pass Filter)。
 - ✓ 優點 1：加快系統響應時間。（如 Question #4 & #5）
 - ✓ 優點 2：從 s-domain 來看，因為加入零點，所以會增加閉迴路相對穩定度。
 - ✓ 缺點 1：無法消除干擾 (T_d) 所帶來的影響。（如 Question #5）
 - ✓ 缺點 2：在輸入為步階函數且有干擾 (T_d) 時，無法去除穩態誤差 (Steady State Error)。（如 Question #5）
 - ✓ 缺點 3：因為 PD 控制器可視為「高通濾波器」，因此會放大「高頻雜訊」或「高頻干擾」，但因為 Question #5 的干擾屬於低頻干擾，因此會觀察出此現象。
2. 使用 Question # 3 Direct Design 所設計之控制器系統
 - ✓ 此系統為一 PI 控制器，亦是一低通濾波器 (Low Pass Filter)。
 - ✓ 優點 1：因為 PI 控制器可視為「低通濾波器」，因此可以**有效抑制「高頻雜訊」或「高頻干擾」**，即使如 Question #5 的低頻干擾依舊能夠抑制，故我們觀察出干擾 (T_d) 並沒有對穩態響應造成很大影響。（如 Question #5）
 - ✓ 優點 2：在輸入為步階函數且有干擾 (T_d) 時，可以完全去除穩態誤差 (Steady State Error)。（如 Question #5）
 - ✓ 優點 3：頻寬特性較為明顯。（如 Question #4）
 - ✓ 缺點 1：無法明顯地加快系統響應時間。（如 Question #4 & #5）
 - ✓ 缺點 2：從 s-domain 來看，因為加入的極點比零點更接近零，所以會降低閉迴路相對穩定度，有些時候甚至導致系統不穩定。



如若要真的去除掉干擾，我們認為應該要設計 PID 補償器/控制器才可以在輸入為步階函數且有干擾 (T_d) 時，既沒有穩態誤差，暫態響應（響應時間）又可以很快！