

Associações entre Geometria Analítica, Padrões Fractais e Computação: Possibilidades Para o Ensino Médio Técnico

Adriano Rodrigues de Melo^{ID}

Gustavo Vieira Ferreira¹

Weliton Dal Pizzol Maria

Resumo

Apresentamos neste trabalho uma proposta de integração entre Geometria Analítica, Geometria Fractal e programação de computadores. O objetivo, orientado pelo contexto do ensino médio técnico, consiste em representar os padrões geométricos de algumas formas fractais nas linguagens algébrica e computacional. Nestes termos, a perspectiva que adotamos se adere ao disposto na Teoria dos Registros de Representações Semióticas, devida à Raymond Duval, que do ponto de vista cognitivo, afirma que a coordenação entre diversos registros de representação é fundamental para a aprendizagem matemática. Embora vários tenham sido os padrões fractais estudados sobre esta ótica, focamos neste texto apenas na famosa curva de Koch.

Palavras-chave: Registros de Representação; Geometria Fractal; Geometria Analítica; Programação.

Abstract

We present in this work a proposal for integration between Analytical Geometry, Fractal Geometry and computer programming. The purpose is to represent some fractal patterns in algebraic and computational languages. We adopted the perspective of the theory on semiotic representations registers, due to Raymond Duval, that from the cognitive point of view, it establishes that coordination between different representation registers is fundamental for mathematical learning. We studied different fractal patterns from this perspective, but in this text we present only the discussions carried out on the famous Koch curve.

Keywords: Registers of Semiotic Representations; Fractal Geometry; Analytic Geometry; Programming.

1. Introdução

Existem diversas maneiras de se abordar ideias da Geometria Fractal no contexto do ensino básico e isto se deve ao fato de que a mesma, além de ser potencialmente interdisciplinar [1], possui diversas conexões com outros temas do currículo do ensino fundamental e médio. Este é talvez

¹Apoiado pelo IFC - Campus Araquari, nos termos do Edital nº 16/2019.

o principal motivo pelo qual muitos têm tomado como recurso motivador ou problematizador, para desenvolver estratégias voltadas ao ensino dos mais variados temas de matemática elementar.

Podemos, por exemplo, explorar as relações métricas de perímetro, área ou volume de objetos fractais, fazendo uso, para isso, de conexões com os conceitos de sequências e progressões geométricas [16, 2], além de noções intuitivas do conceito de limite [27, 3]. Para além da Geometria Fractal, podemos explorar fractais a partir da perspectiva de procura por padrões [11, 23]; desenvolver ou aplicar conceitos associados à razão, proporção [1, 30], figuras semelhantes [17], trigonometria ou teoria dos números [26], introduzir ou aplicar o estudo de probabilidade geométrica [20], ou mesmo desenvolver estudos de Geometria Euclidiana de maneira associada [17, 21], ou ainda adotar uma abordagem interdisciplinar [31, 12].

De fato, a Geometria Fractal constitui um campo fértil à ser explorado também no que concerne às tecnologias disponíveis para o desenvolvimento de estratégias didáticas. Além da possibilidade se poder construir figuras ou maquetes por materiais manipuláveis [24, 25, 29], dada a variedade de *softwares* gratuitos disponíveis atualmente, também é possível explorar as estruturas fractais, vasculhando as formas magníficas de seu interior interminável², por meio de aplicativos [24, 6, 13], sobretudo quando inserimos nesta discussão fractais altamente complexos, como os fractais de Mandelbrot e de Julia.

Esta característica computacional da Geometria Fractal pode ser explorada num nível de desenvolvimento tecnológico superior, quando *softwares* de geometria dinâmica são inseridos em propostas que incluem a construção virtual de alguns dos fractais clássicos ou pioneiros [30, 4], aqueles com configurações mais simples, como o conjunto de Cantor, a curva de Koch ou o triângulo de Sierpinsky.

Neste trabalho, buscamos mostrar que é possível elevar ainda mais o nível de abstração tecnológico, propondo a construção de fractais com o uso de uma genuína linguagem de programação (a linguagem `python`), em conexão com um tópico do currículo do ensino médio que, neste contexto, carece de ser explorado: a Geometria Analítica.

O arcabouço conceitual que utilizamos para justificar a ação pedagógica de combinar elementos das Geometrias Fractal e Analítica e ainda Computação é a Teoria dos Registros de Representações Semióticas, cuja descrição será dada na seção 2. Na seção 3, além de demarcarmos o contexto ao qual este trabalho foi desenvolvido, descrevemos a partir de um exemplo, ou melhor, de um fractal (a curva de Koch), uma maneira de abordar essas duas geometrias de forma integrada a uma linguagem de programação. À seção 4 reservamos as considerações finais.

2. Registros de Representações Semióticas

Os objetos aos quais a matemática se ocupa possuem a característica peculiar de possuírem uma gama diversa de representações. Duval [10], precursor da teoria que busca explicar o funcionamento cognitivo da aprendizagem matemática pelas representações dos objetos, a Teoria dos Registros de Representações Semióticas, classifica os registros de representações em quatro grandes tipos: registro na linguagem natural, registro simbólico (numérico, algébrico, operatório), registro gráfico e registro figural.

Considere, por exemplo, o conceito de reta. Uma imagem mental deste objeto toma forma tão logo se inicie o ato de pensar. Para acessar o conceito que lhe diz respeito, faze-mo-lo nos registros

²Do ponto de vista teórico, na prática existe o limite computacional.

[14]: i) da linguagem natural, escrevendo-se a palavra “reta”; ii) figural, desenhando-se um traço retilíneo sobre uma superfície plana; iii) simbólico, rico em diversidade, pois as equações

$$ax + by + c = 0, \quad y = mx + n, \quad \vec{v} = \beta\vec{u} + \vec{w} \quad \text{e} \quad \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad (1)$$

com $a, b, c, m, n, \beta \in \mathbb{R}$, $(x_A, y_A), (x_B, y_B) \in \mathbb{R}^2$ e $\vec{u}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$, são apenas alguns exemplos de equações que, cada qual em seu contexto, representam retas; e, finalmente, iv) registro gráfico, que traduz as relações algébricas em (1) a partir do sistema cartesiano ortogonal.

Dada esta multíplice de representações, nem perto de serem esgotadas, poderíamos nos perguntar afinal qual delas corresponde ao objeto reta. Para Duval [7], a resposta é nenhuma delas, pois afirma que “os objetos matemáticos não devem jamais serem confundidos com a representação que se faz deles” e defende que a “distinção entre um objeto e sua representação é, portanto, um ponto estratégico para a compreensão da matemática”. Isso por que, ao contrário de sua representação, o objeto em si é invariável.

Assim, Duval [8] assegura que as representações não se fazem necessárias apenas para fins de comunicação, mas também se constitui essencial para a atividade cognitiva do pensamento, como por exemplo, na produção de conhecimentos. Alguns trabalhos têm explorado esta ideia de produção de conhecimento, no contexto e no nível do ensino médio, como [14, 15] e [19, 28, 22] que abordam, respectivamente, o desenvolvimento do método computacional da bisseção (utilizado para estimar o valor numérico da raiz de uma função) e do método dos mínimos quadrados (utilizado para obter a curva que melhor se ajusta, no sentido dos mínimos quadrados, a um conjunto de pontos), a partir de suas representações semióticas.

Dois processos cognitivos principais são definidos e analisados por Duval: os tratamentos e as conversões. O primeiro diz respeito às transformações que ocorrem dentro de um mesmo registro de representação (o cálculo numérico ou algébrico, por exemplo, dentro do registro simbólico), enquanto que o segundo diz respeito à passagem de um registro de representação à outro (registro simbólico para o registro figural, por exemplo). Segundo este autor [7], a conversão desempenha um papel lateral na atividade matemática (acadêmica) intervindo somente na escolha do registro no qual os tratamentos serão mais econômicos ou potentes. Porém, do ponto de vista cognitivo, ela aparece como uma atividade fundamental e esclarece que a compreensão em matemática se assegura, além no reconhecimento dos objetos em suas diversas representações, na possibilidade de se transitar livremente entre pelo menos dois registros de representações [9].

Este trabalho atinge significância, na perspectiva desta teoria, na medida em que é guiado pelo objetivo de descrever objetos fractais em diferentes registros de representação. Este objetivo é, contudo, de caráter aparente uma vez que os fractais aqui se configuraram como motivadores para a exploração e aplicação de conteúdos elementares de geometria analítica plana. O fato é que os tratamentos e as conversões necessárias para as transformações das representações dos fractais estudados, passam necessariamente pelos tratamentos e conversões das representações dos conteúdos de geometria analítica utilizados. Esse olhar voltado para o currículo do ensino médio não diminui a importância que damos a apresentação dos fractais, sobretudo por que consideramos sua representação semiótica como algo crítico, afinal são objetos definidos de modo geral no infinito.

Na seção 3 a seguir, discorremos sobre uma possível integração entre formas fractais e um conteúdo de Geometria Analítica. Adiantamos que exploramos diversas formas fractais (ao final, na seção 3.5, elencamos uma lista contemplando alguns deles) e as possibilidades se mostraram inesgotáveis, seja

por que inúmeras abordagens ou caminhos florescem durante a busca por uma descrição algébrica, seja por que a escolha do fractal a ser estudado é arbitrário, isto é, as opções de escolha é ilimitada. Dito isto, optamos por descrever, no que segue, aquilo que desenvolvemos para o famoso fractal curva de Koch.

3. Geometria Analítica, Fractais e Computação

A Geometria Analítica se associa com a Computação de uma maneira muito natural, afinal a primeira se concentra na descoberta de representações algébricas para objetos essencialmente geométricos, enquanto que a segunda, acompanhada de uma boa biblioteca gráfica, com uns poucos comandos pode reverter a representação à forma inicial, isto é, a geométrica. O percurso das conversões é o dado conforme Figura 1.



Figura 1: Percurso das conversões dos registros de representações semióticas.

3.1. Geometria Analítica

Quais aspectos da Geometria Analítica são necessários para se estabelecer uma discussão razoável envolvendo fractais? É incrível que os conceitos iniciais básicos associados às coordenadas cartesianas no plano, combinadas com trigonometria básica, sejam suficientes para realizar a construção de alguns dos fractais mais famosos. A correspondência entre pontos do plano e pares ordenados, o fato de que segmentos de reta são definidos por seus pontos inicial e final, o cálculo de distância (cartesiana) entre pontos e das coordenadas do ponto divisor de um segmento, estão entre as ideias exploradas por esta apresentação.

3.2. Fractais e Geometria Analítica

Seguimos a prática padrão de abordar a Geometria Fractal no ensino médio a partir de exemplos de fractais [30, 3, 25, 24]. Dos vários fractais analisados, destacamos neste texto a famosa curva de Koch cuja construção se inicia como o apresentado na Figura 2. Vejamos os níveis de sua construção:

- i. De início (nível zero), temos um segmento de reta AB de comprimento $\overline{AB} = 1$ e que, por simplicidade, consideraremos paralelo ao eixo das abcissas, conforme Figura 2a. Usaremos a notação A_i^j e A_{i+1}^j , para designar os pontos inicial e final do i-ésimo segmento no j-ésimo nível. Neste caso, temos $A_1^0 = A$ e $A_2^0 = B$.
- ii. Para obter o nível 1 da curva de Koch, dividimos o segmento $A_1^0A_2^0$ em três partes de mesma medida, o que implica que cada novo segmento terá um comprimento de $1/3$. Assentamos a base de um triângulo equilátero de lado $1/3$ sobre o segmento central obtido a partir da divisão, ao mesmo tempo em que eliminamos esse segmento central, de modo que chegamos no primeiro nível da curva de Koch dada pela Figura 2b. Denotamos os pontos gerados por $A_1^1, A_2^1, A_3^1, A_4^1$ e A_5^1 , conforme Figura 2b. Pela regra de construção deste fractal, os quatro segmentos apresentam

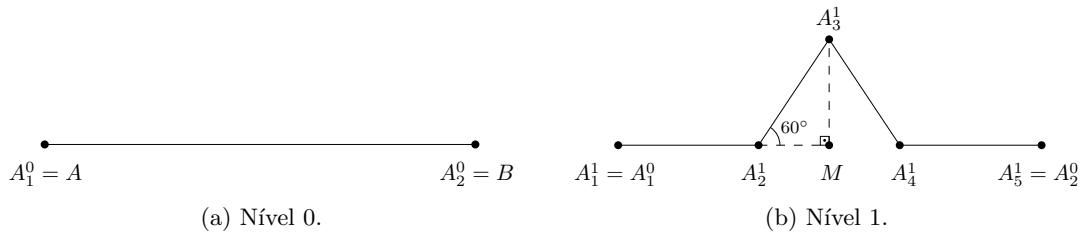


Figura 2: Esquema da construção do primeiro nível do fractal curva de Koch.

o mesmo tamanho $l/3$ e além disso, o triângulo $A_2^1 A_3^1 A_4^1$ é equilátero. Determinamos os pontos A_2^1 e A_4^1 a partir do fato de que eles dividem o segmento inicial $A_1^0 A_2^0$ na razão³ $1/2$ e 2 , respectivamente:

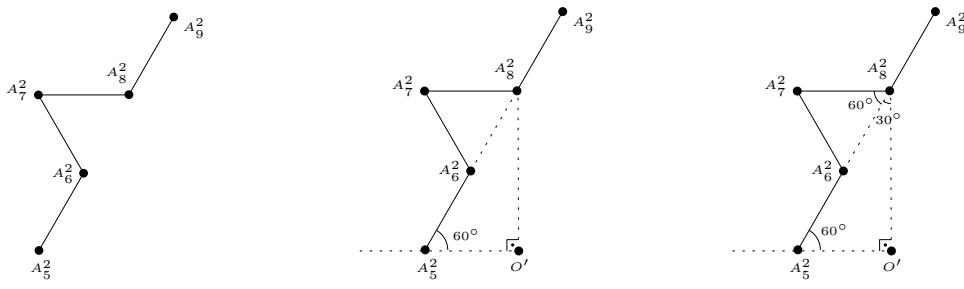
$$A_2^1 \left(\frac{2x_{A_1^0} + x_{A_2^0}}{3}, \frac{2y_{A_1^0} + y_{A_2^0}}{3} \right) \quad \text{e} \quad A_4^1 \left(\frac{x_{A_1^0} + 2x_{A_2^0}}{3}, \frac{y_{A_1^0} + 2y_{A_2^0}}{3} \right). \quad (2)$$

Resta apenas o ponto A_3^1 , que pode ser determinado a partir da altura $h = y_{A_3^1} - y_M$ do triângulo retângulo $A_2^1 M A_3^1$, em que M corresponde ao ponto médio do segmento inicial $A_1^0 A_2^0$:

$$y_{A_3^1} = y_M + \frac{1}{3} \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{3} \right) = \frac{y_{A_1^0} + y_{A_2^0}}{2} + \frac{\sqrt{3}l}{6}, \quad \text{então} \quad A_3^1 \left(\frac{x_{A_1^0} + x_{A_2^0}}{2}, y_{A_1^0} + \frac{\sqrt{3}l}{6} \right), \quad (3)$$

e todos os pontos da construção do nível 1 estão determinados.

iii. No nível 2, repetimos os passos do nível 1 em cada segmento $A_i^1 A_{i+1}^1$, $i = 1, \dots, 4$, obtendo os novos segmentos de reta $A_i^2 A_{i+1}^2$, $1 \leq i \leq 4^2$, todos com tamanho $l/9$. Ora, importa-nos investigar os segmentos inclinados, pois para os horizontais procederemos de maneira análoga ao item anterior. Na Figura 3a destacamos a construção, no segundo nível, sobre o segmento $A_2^1 A_3^1$. Os pontos A_6^2 e A_8^2 dividem tal segmento na razão $1/2$ e 2 , respectivamente, razão pela qual são determinados de maneira análoga ao disposto na equação (2).



(a) Construção sobre $A_2^1 A_3^1$. (b) Projeção sobre a paralela ao eixo x. (c) Relações angulares.

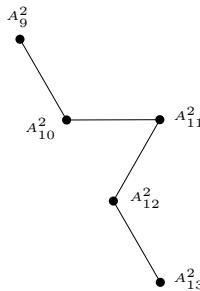
Figura 3: Padrão encontrado no segundo nível da construção sobre um segmento inclinado à 60° .

³O conteúdo presente aqui é aquele relacionado com o cálculo das coordenadas do ponto divisor $C(x_3, y_3)$ de um segmento definido por $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$ a uma razão r , cuja fórmula é [18]: $x_3 = \frac{x_1 + rx_2}{1+r}$ e $y_3 = \frac{y_1 + ry_2}{1+r}$.

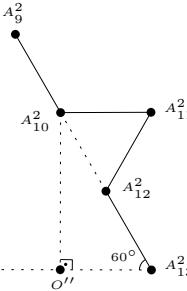
Encontramos o ponto A_7^2 analisando as relações angulares desses novos segmentos. Projetando o ponto A_8^2 ortogonalmente sobre a paralela ao eixo das abscissas passando por A_5^2 obtemos o ponto O' e o triângulo $A_5^2O'A_8^2$, conforme Figura 3b. Uma vez que o ângulo $\angle A_8^2A_5^2O'$ e o segmento $\overline{A_5^2A_8^2}$ medem 60° e $(2l)/9$, respectivamente, temos que da relação trigonométrica $\cos 60^\circ = \frac{A_5^2O'}{\overline{A_5^2A_8^2}}$, tiramos que $A_5^2O' = 1/9$, isto é, $\overline{A_5^2O'} = \overline{A_7^2A_8^2}$. Também encontramos o ângulo $\angle A_5^2A_8^2O' = 30^\circ$. Pela definição deste fractal, o ângulo $\angle A_6^2A_8^2A_7^2$ também mede 60° e disso concluímos que o segmento $A_7^2A_8^2$ é ortogonal ao segmento $O'A_8^2$ (veja Figura 3c).

Diante dessas observações, concluímos que o quadrilátero $A_5^2O'A_8^2A_7^2$ é um retângulo com lados paralelos aos eixos do Sistema Cartesiano, e por isso, o ponto A_7^2 possui abscissa idêntica à de A_5^2 e ordenada idêntica à de A_8^2 .

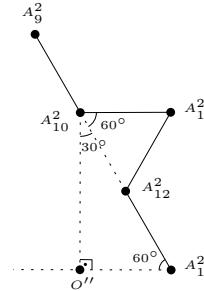
Considerações semelhantes podem ser obtidas com relação à construção realizada sobre o segmento $A_3^1A_4^1$ inclinado à 120° (veja Figura 4a). Os pontos divisores A_{10}^2 e A_{12}^2 podem ser calculados como em (2). Resta-nos o ponto A_{11}^2 . Começamos projetando A_{10}^2 ortogonalmente à paralela do eixo x que passa sobre A_{13}^2 obtemos o ponto O'' . Então, uma vez que $\angle A_{10}^2A_{13}^2O'' = 60^\circ$ e $\overline{A_{10}^2A_{13}^2} = (2l)/9$, da relação trigonométrica $\cos 60^\circ = \frac{O''A_{13}^2}{\overline{A_{10}^2A_{13}^2}} = (2l)/9$, concluímos que $O''A_{13}^2 = 1/6$, isto é, $O''A_{13}^2$ e $A_{10}^2A_{11}^2$ possuem mesma medida $1/9$.



(a) Construção sobre $A_3^1A_4^1$.



(b) Projeção sobre a paralela ao eixo x.



(c) Relações angulares.

Figura 4: Padrão encontrado no segundo nível da construção sobre um segmento inclinado à 120° .

Encontramos o ângulo $\angle A_{13}^2A_{10}^2O'' = 30^\circ$ do fato de que $\angle A_{10}^2A_{13}^2O'' = 60^\circ$, além disso, sabemos também que $\angle A_{12}^2A_{10}^2A_{11}^2$ também mede 60° . Desses fatos concluímos que o segmento $A_{10}^2A_{11}^2$ é ortogonal ao eixo das ordenadas (veja Figura 4c). Essas relações implicam que o quadrilátero $O''A_{13}^2A_{11}^2A_{10}^2$ trata-se de um retângulo com lados paralelos ao eixos das abscissas e das ordenadas, e por isso, as coordenadas de A_{11}^2 podem ser obtidas pela análise de A_{10}^2 e A_{13}^2 (ordenada de A_{10}^2 e abscissa de A_{13}^2).

iv. Os próximos níveis são todos casos particulares dos anteriores. Observe, por exemplo, que no nível 3, devemos realizar uma construção sobre o segmento $A_6^2A_7^2$ (vide Figura 3), cuja inclinação em relação à horizontal é de 120° e por isso pode ser tratado como o segmento $A_3^1A_4^1$ (Figura 4), de mesma inclinação.

Neste estágio, passamos da representação geométrica, o fractal no j-ésimo nível de construção, para uma sua representação algébrica (vide diagrama presente na Figura 1).

3.3. Computação

O próximo estágio é a conversão para o registro de representação computacional, isto é, a tradução e adaptação daquilo que foi descoberto na seção 3.2 a uma linguagem de programação. Da discussão anterior notamos que não fazemos outra coisa a não ser recursivamente operar sobre um segmento a fim de se produzir outros quatro novos segmentos. Basta então definirmos uma função (na linguagem de programação), que realize esta operação de gerar 4 segmentos a partir de outro dado e aplicá-la, tantas vezes quantas forem-nos conveniente ou possível, dado o limite computacional. O Algoritmo 1 expressa a estrutura dessa função recursiva ao mesmo tempo em que resume as discussões da seção 3.2.

Algoritmo 1: Algoritmo fundamental para a construção da curva de Koch.

Entrada: Vetores de abscissas $x = (x_A, x_B)$ e ordenadas $y = (y_A, y_B)$ das coordenadas do segmento (orientado) AB inicial, comprimento l do segmento inicial, nível n da construção

Saída: Vetores X e Y das coordenadas de cada segmento da nova curva.

início

$$\Delta x = x_2 - x_1, \Delta y = y_2 - y_1, \alpha = |\Delta x|/\Delta x$$

se $\Delta y = 0$ então

$$\left[\begin{array}{l} X = \left(x_1, \frac{2x_1 + x_2}{3}, \frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{x_1 + 2x_2}{3}, x_2 \right) \\ Y = \left(y_1, \frac{2y_1 + y_2}{3}, y_1 + \alpha \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{l}{3^n}, \frac{y_1 + 2y_2}{3}, y_2 \right) \end{array} \right]$$

senão

$$\left[\begin{array}{l} \text{se } \Delta x \Delta y > 0 \text{ então} \\ \quad X = \left(x_1, \frac{2x_1 + x_2}{3}, x_1, \frac{x_1 + 2x_2}{3}, x_2 \right) \\ \quad Y = \left(y_1, \frac{2y_1 + y_2}{3}, \frac{y_1 + 2y_2}{3}, \frac{y_1 + 2y_2}{3}, y_2 \right) \end{array} \right]$$

senão se $\Delta x \Delta y < 0$ então

$$\left[\begin{array}{l} X = \left(x_1, \frac{2x_1 + x_2}{3}, x_2, \frac{x_1 + 2x_2}{3}, x_2 \right) \\ Y = \left(y_1, \frac{2y_1 + y_2}{3}, \frac{2y_1 + y_2}{3}, \frac{y_1 + 2y_2}{3}, y_2 \right) \end{array} \right]$$

retorna X, Y.

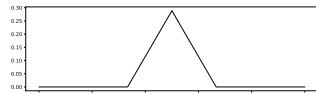
Conforme as discussões da seção anterior, existem três tipos de segmentos a serem considerados e que estão presentes no referido algoritmo e que, para fins de programação, foi conveniente considerá-los como segmentos orientados:

- Segmentos orientados horizontais ou de inclinação nula: estão expressos no Algoritmo 1 pela primeira condição $\Delta y = 0$, isto é, se a variação das ordenadas do segmento dado for nula, então trata-se de um segmento horizontal. Atenção ao coeficiente α representando o sinal de Δx . Este coeficiente ajusta o acréscimo da ordenada $y_{A_1^j}$: se $\alpha > 0$, então o segmento (orientado) avança para a direita e a ordenada $y_{A_1^j}$ deve aumentar em $(\sqrt{3}l)/(2 \cdot 3^n)$ (como na Figura 2b); por outro

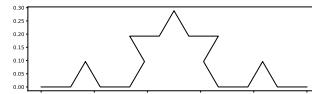
lado, no caso de $\alpha < 0$, situação que ocorrerá após o 3º nível, então o segmento (orientado) avança para a esquerda e devemos subtrair $(\sqrt{3}l)/(2 \cdot 3^n)$ da ordenada $y_{A_1^j}$;

- ii. Segmentos inclinados à 60° : expressos pela segunda condição $\Delta x \Delta y > 0$. Observemos junto à Figura 3a que, para o segmento (orientado) $A_5^2 A_6^2$, temos as seguintes variações: $\Delta x = x_{A_6^2} - x_{A_5^2} > 0$ e $\Delta y = y_{A_6^2} - y_{A_5^2} > 0$. Para o outro segmento (orientado) $A_{11}^2 A_{12}^2$ (Figura 4a), temos as seguintes variações: $\Delta x = x_{A_{12}^2} - x_{A_{11}^2} < 0$ e $\Delta y = y_{A_{12}^2} - y_{A_{11}^2} < 0$. Ambos os segmentos estão à 60° e satisfazem a condição avaliada;
- iii. Segmentos inclinados à 120° : expressos pela última condição $\Delta x \Delta y < 0$, seguem as mesmas observações do item anterior.

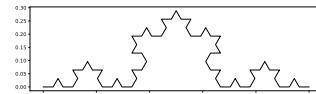
Na verdade, a função descrita pelo Algoritmo 1 fornece as coordenadas inicial e final dos novos segmentos. Assim, dado um segmento horizontal AB arbitrário definido pelos pontos inicial A e final B, tal função fornece as coordenadas dos 5 pontos que definem os 4 novos segmentos e, aplicada novamente nesses quatro segmentos, fornece os 17 pontos relativos aos 16 novos segmentos e assim por diante. Esse processo recursivo foi implementado na linguagem python de programação⁴ e requer como dados de entrada apenas as coordenadas do segmento inicial (horizontal) AB e o nível m de construção que se pretende observar. Na Figura 5 apresentamos os resultados gráficos produzidos pelo referido código computacional, entrando com as coordenadas A(0, 1) e B(0, 0) e níveis m = 1, 2, ..., 6.



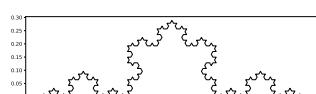
(a) Nível 1.



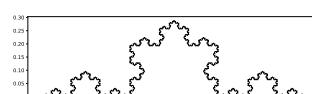
(b) Nível 2.



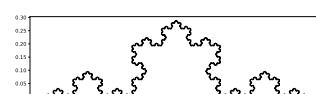
(c) Nível 3.



(d) Nível 4.



(e) Nível 5.



(f) Nível 6.

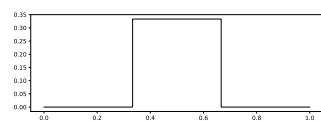
Figura 5: Níveis de construção relativos ao fractal curva de Koch, tomando o segmento inicial ou de nível 0 o disposto na Figura 2a, com coordenadas A(0, 1) e B(0, 0).

3.4. Generalização

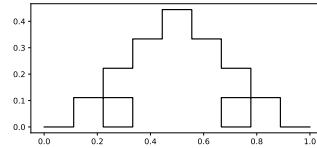
A própria natureza dos fractais assegura o exercício de busca por padrões e regularidades. A abordagem deste trabalho consiste em representar computacionalmente este padrão. Este é o significado do Algoritmo 1: ele resume o padrão computacional da formação do fractal curva de Koch, pois expressa a função que deve ser utilizada em cada nível de construção. A partir do programa desenvolvido, surgiu o interesse e a oportunidade de se realizar outro tipo de generalização: variar a curva de Koch a partir de uma modificação no primeiro nível de sua construção (mantendo-se, por tanto, o nível zero como um segmento de reta horizontal).

⁴O código relativo a esse fractal pode ser acessado no endereço: https://github.com/WelitonDPM/Projeto-Fractal/blob/master/fractais_prontos/fractal_curvadeKoch.py.

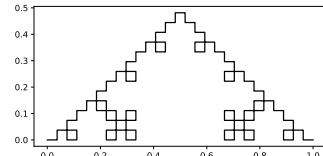
Perguntamo-nos o que aconteceria, ou melhor, que curva obteríamos se substituíssemos o salto triangular do primeiro nível (veja Figuras 2a e 2b), por um salto quadrangular, ou pentagonal, ou hexagonal, etc. Não apresentaremos o desenvolvimento desta generalização, apenas algumas das formas encontradas, que chamamos de curva n de Koch, onde $2 < n \in \mathbb{N}$ representa o número de lados do polígono regular utilizado no salto. Evidentemente, a função (computacional) generalista como deve ser, fornece a curva de Koch padrão e os gráficos constantes na Figura 5, caso n seja tomado como 3. Apresentamos, para fins de ilustração, junto às Figuras 6, 7, 8, 9, 10 e 11, as construções dos níveis 1, 2, ..., 6 das curvas n de Koch com $n = 4, 5, \dots, 9$. O leitor interessado pode acessar o código produzido⁵ e brincar com as formas geradas pelo programa (como seria o fractal gerado tomando-se n igual a 50 ou a 100 ou a 200?).



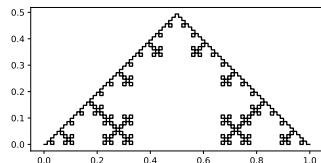
(a) Nível 1.



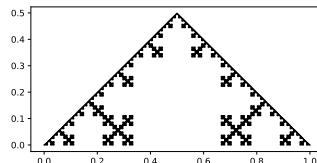
(b) Nível 2.



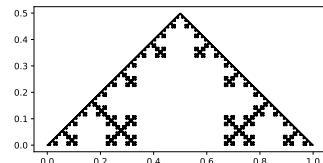
(c) Nível 3.



(d) Nível 4.



(e) Nível 5.



(f) Nível 6.

Figura 6: Níveis de construção relativos ao fractal curva 4 de Koch, tomando o segmento inicial ou de nível 0 o disposto na Figura 2a, com coordenadas A(0, 1) e B(0, 0).

3.5. Contexto de Desenvolvimento

Um questionamento natural que pode surgir, diante do exposto, é a viabilidade da sua execução no nível do ensino médio dada a complexidade do desenvolvimento apresentado, adicionada ainda a necessidade de habilidades de programação de computadores. De fato, as condições de trabalho em sala de aula associadas ao tempo, à recursos materiais ou mesmo a disposição de uma ementa por vezes rígida, não favorecem a implementação de atividades elaboradas da maneira como foram expostas acima.

Projetos extra-curriculares, no entanto, configuram-se como ambientes muito favoráveis para sua execução. Essa afirmação baseia-se no fato de que o exposto nestas notas correspondem à algumas das experiências adquiridas ao executarmos um projeto de iniciação científica em parceria com discentes do primeiro (atualmente segundo) ano do curso Técnico em Informática Integrado ao Ensino Médio. Salientamos que encontramos terreno fértil para sua implantação, visto que habilidades de programação são naturalmente desenvolvidas nesse curso, ao passo que as intuições e os programas foram todas desenvolvidas pelos discentes que trabalharam no projeto. O que fizemos neste texto

⁵O pseudocódigo programado em linguagem python de programação pode ser obtido e avaliado no endereço: https://github.com/WelitonDPM/Projeto-Fractal/blob/master/fractais_prontos/generaliza%C3%A7%C3%A3odekoch.py.

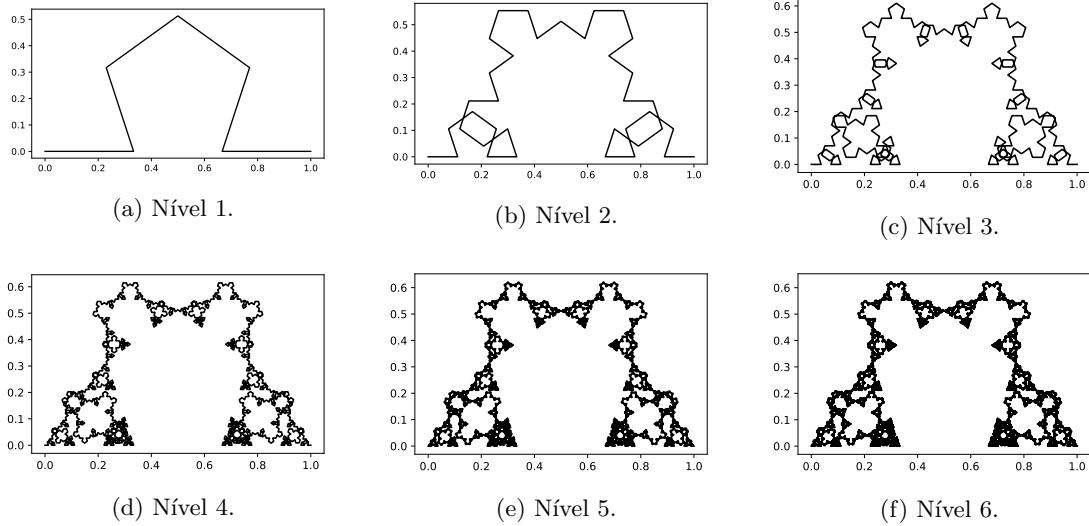


Figura 7: Níveis de construção relativos ao fractal curva 5 de Koch, tomando o segmento inicial ou de nível 0 o disposto na Figura 2a, com coordenadas A(0, 1) e B(0, 0).

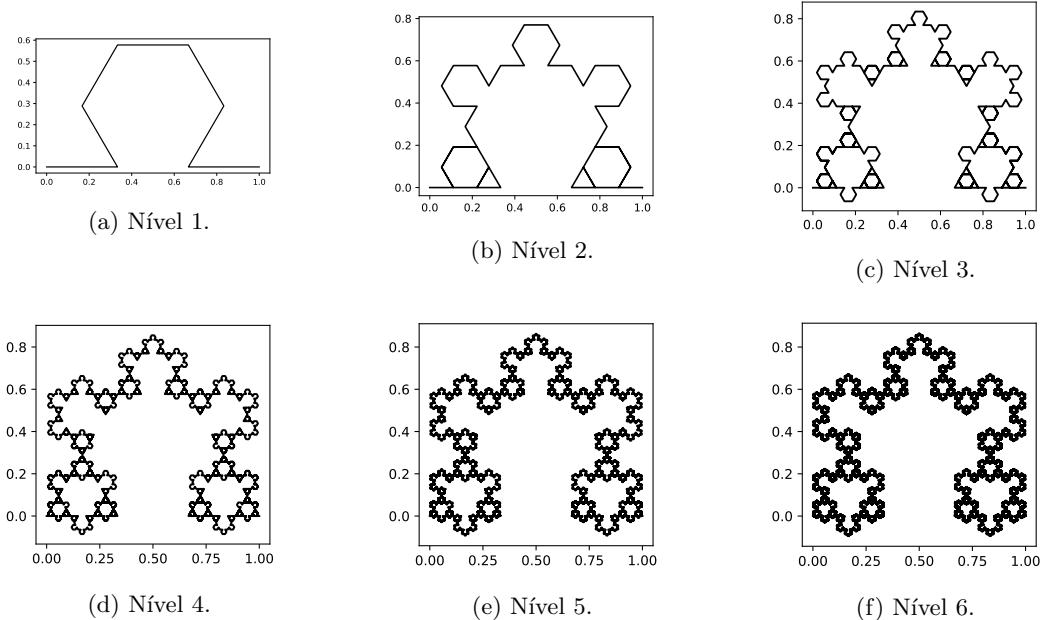


Figura 8: Níveis de construção relativos ao fractal curva 6 de Koch, tomando o segmento inicial ou de nível 0 o disposto na Figura 2a, com coordenadas A(0, 1) e B(0, 0).

foi apenas formalizar e descrever suas construções, no que tange apenas ao fractal curva de Koch (muitas outras formas fractais foram exploradas).

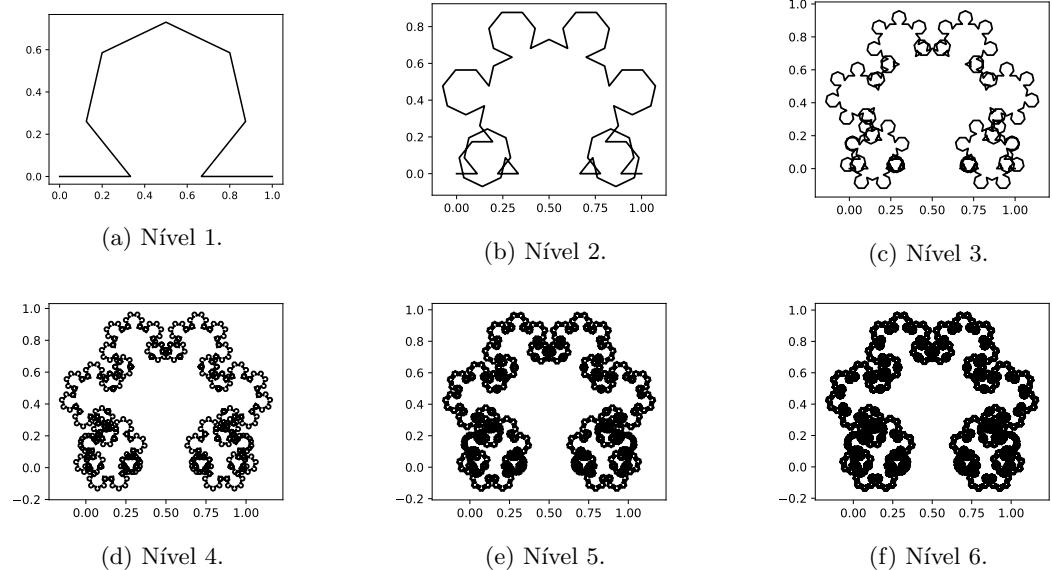


Figura 9: Níveis de construção relativos ao fractal curva 7 de Koch, tomando o segmento inicial ou de nível 0 o disposto na Figura 2a, com coordenadas A(0, 1) e B(0, 0).

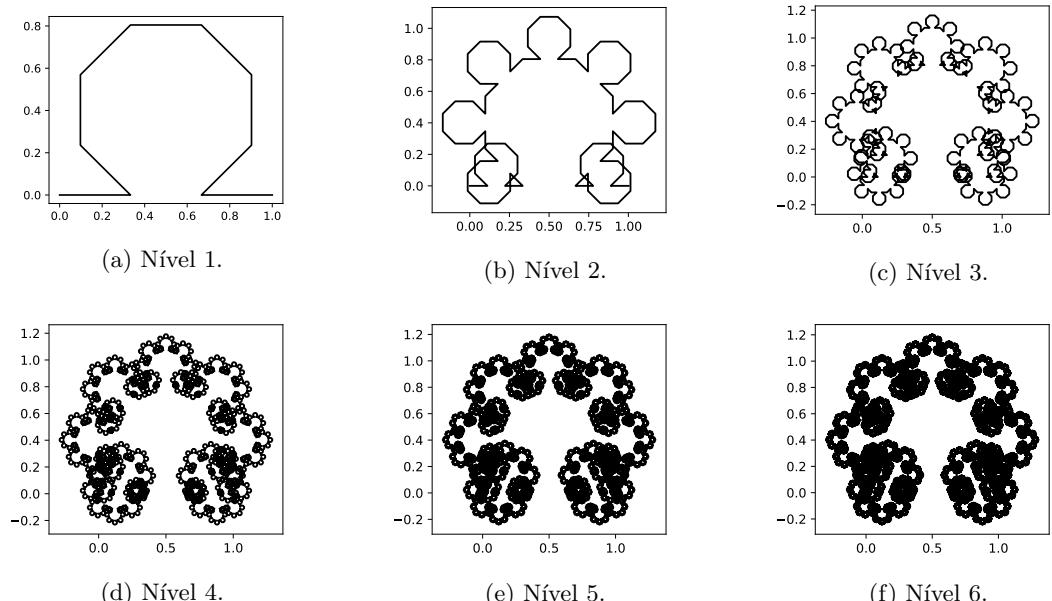


Figura 10: Níveis de construção relativos ao fractal curva 8 de Koch, tomando o segmento inicial ou de nível 0 o disposto na Figura 2a, com coordenadas A(0, 1) e B(0, 0).

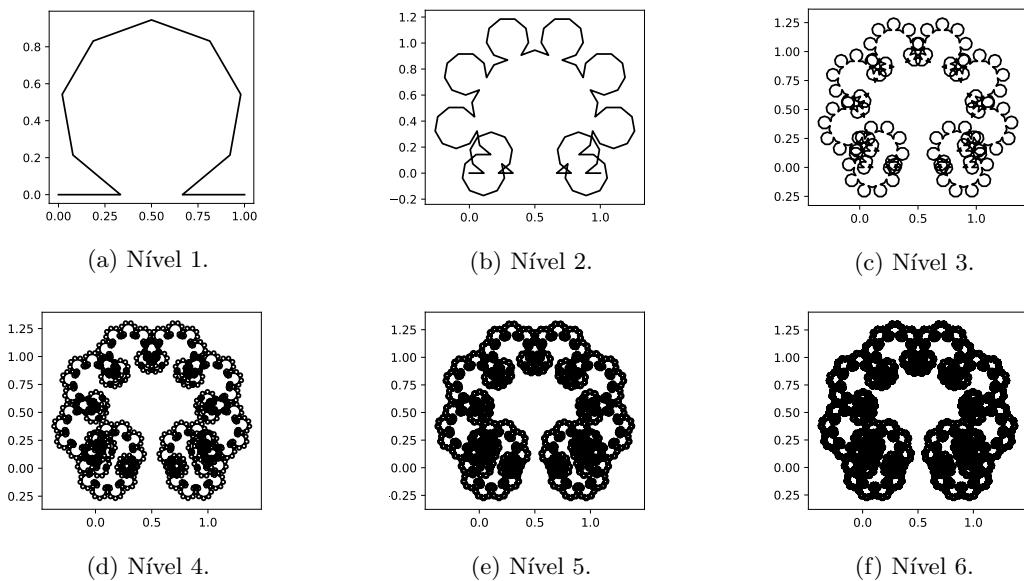


Figura 11: Níveis de construção relativos ao fractal curva 9 de Koch, tomando o segmento inicial ou de nível 0 o disposto na Figura 2a, com coordenadas A(0, 1) e B(0, 0).

Seguimos, resumidamente, o seguinte roteiro:

- Pelo fato do projeto estar associado ao ensino médio, a introdução ao tema seguiu o formato padrão: mostramos por meio de figuras e imagens, sobretudo da natureza, que existem objetos com propriedades que não se encaixam no que dispõe a Geometria Euclidiana e que são chamadas, por tanto, de Geometrias Não-Euclidianas, sendo a Geometria Fractal uma delas. Após a breve apresentação, cujo intuito era apenas o de contextualizar e fornecer palavras-chaves, os discentes realizaram uma pesquisa bibliográfica sobre: i) o que distingue a Geometria Euclideana da Geometria Fractal; ii) os fractais pioneiros ou clássicos; iii) conceitos associados a Geometria Analítica: sistema cartesiano, ponto, distância, reta, segmento de reta e circunferência;
- Caracterizar a estrutura dos fractais selecionados: cálculo da dimensão fractal, número de segmentos, comprimento de cada unidade de segmento, perímetro e área delimitada pelo fractal;
- Selecionar alguns dos fractais pesquisados para desenvolver expressões algébricas que determinem sua estrutura (conexão entre geometria fractal e geometria analítica), em seguida, construir programas em linguagem computacional `python` simulando-os. Na medida do possível, construir, por programação, fractais inéditos.

Durante a execução do projeto, os discentes construíram programas para uma variedade de fractais, dentre os principais podemos citar: conjunto de Cantor, triângulo de Sierpinski (quatro variações); tapete de Sierpinski, curva do Dragão; curva de Hilbert; curva de Koch (apresentada neste texto, com 4 reformulações/modificações, incluindo sua generalização também apresentada neste texto); floco de neve ou ilha de Koch (incluindo sua generalização); árvore fractal; esponja de Menger e conjunto de Mandelbrot. O leitor interessado pode acessar os códigos, destes e de alguns outros fractais, no repositório <https://github.com/Welitonpdm/Projeto-Fractal>.

4. Considerações Finais

Este trabalho buscou evidenciar a possibilidade de se articular as Geometrias Analítica e Fractal, a partir de um enfoque aliado à Computação. A proposta foi motivada pela razoabilidade de se abordar os fractais a partir de outra perspectiva, além daquela pautada na análise das formas ou das propriedades de dimensão, perímetro e área que, fazendo justiça, não julgamos apenas serem interessantes mas também necessários durante a introdução desta geometria.

Reconhecemos que o caráter interdisciplinar adotado, bem como as condições de trabalho numa sala de aula regular, poderiam traduzir-se em dificuldades de execução, visto que tempo e habilidades de programação são indiscutivelmente necessários. Uma maneira de mitigar estas questões seria (e foi o que fizemos) implementar essa proposta na forma de um projeto extra-curricular, em um curso técnico no qual a programação de computadores fosse natural. Dessa forma, justificamos e garantimos sua viabilidade, ao menos como projeto extra-curricular, a partir da experiência vivenciada, demonstrada e comprovada pelos diversos programas construídos e disponíveis ao público (conforme seção 3.5).

Amparados na Teoria dos Registros de Representações Semióticas de Raymond Duval, afirmamos que a proposta apresentada não se preocupa apenas com a inserção do discente do ensino médio no contexto da pesquisa científica em matemática, mas procura colaborar para que consigam utilizar as representações matemáticas e apreender as compreensões das ideias que elas expressam, ao passo que ao fazer a conversão entre elas, o estudante possa “dominar um conjunto de ferramentas que potencializa de forma significativa sua capacidade de resolver problemas, comunicar e argumentar, ampliando com isso sua capacidade de pensar matematicamente” [5, p. 538].

Agradecimentos

Os autores registram seus agradecimentos ao Instituto Federal Catarinense, Campus Araquari, pelo apoio oferecido na execução do presente projeto, nos temos do Edital nº 16/2019, e à egressa desta instituição, Keslene Lima, por suas contribuições, parceria e apoio que foram essenciais para a estruturação do projeto.

Referências

- [1] Alves, C. M. F. S. J. *Fractais: Conceitos Básicos, Representações Gráficas e Aplicações ao Ensino Não Universitário*. Dissertação (Mestrado em Matemática Para o Ensino), Universidade de Lisboa. Lisboa, p. 362, 2007.
- [2] Azeredo, C. M. R.; Souza, M. D.; Batista, S. C. F.; Barcelos, G. T. *Geometria Fractal e Progressões Geométricas: Análise de um Simulador de Fractais*. Revista Novas Tecnologias na Educação, v. 11, n. 1, p. 10, jul. 2013.
- [3] Bemfica, A.; Alves, C. *Fractais: Progressão e Série Geométrica. Uma Metodologia de Ensino*. Revista Modelos. Osório, v. 1, n. 1, p. 6-25, 2011.
- [4] Brandão, L. O. *Algoritmos e Fractais com Programa GD*. Revista do Professor de Matemática, v. 49, p. 27-34, 2002. Disponível em: <<http://www.rpm.org.br/cdrpm/49/5.htm>>. Acesso em: 02 de jun. de 2020.
- [5] BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília, 2017.
- [6] Côrtes, I. R. C.; Antunes, G. *Geometria Fractal no Ensino Médio: Teoria e Prática*. Revista PMO, v. 2, n. 1, p. 26-41, 2014.

- [7] Duval, R. *Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática*. In: MACHADO, S. D. A. (org.). Aprendizagem em Matemática. Campinas, São Paulo: Papirus, 2003. pp. 11-33.
- [8] Duval, R.; Moretti, Tradução: M. T. *Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento*. Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática, Florianópolis, v. 7, n. 2, p. 266-297, dez. 2012.
- [9] Duval, R.; Moretti, Tradução: M. T. *Questões epistemológicas e cognitivas para pensar antes de começar uma aula de matemática*. Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática, Florianópolis, v. 11, n. 2, p. 01-78, mar. 2016.
- [10] Duval, R. *How To Learn To Understand Mathematics?* JIEEM, v. 10, n. 2, p. 114-122, 2017.
- [11] Faria, R. W. S. *Padrões Fractais: Contribuições ao Processo de Generalização de Conteúdos Matemáticos*. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista. Rio Claro, p. 197, 2012.
- [12] Faria, R. W. S.; Maltempi, M. V. *Padrões Fractais: Conectando Matemática e Arte*. EccoS Revista Científica, n. 27, p. 33-53, 2012.
- [13] Freitas, R. C. O.; Santos, C. F. *Trabalhando Fractais no Logo: uma experiência no ensino fundamental*. In: Anais do Workshop de Informática na Escola, [S.l.], jan. 2005. Disponível em: <<https://www.br-ie.org/pub/index.php/wie/article/view/857/843>>. Acesso em: 04 jun. 2020.
- [14] Gastaldi, L. F.; Melo, A. R. *O Método da Bissecção Desenvolvido a Partir da Perspectiva da Teoria dos Registros de Representação Semiótica e Conteúdos do Ensino Médio*. In: Mostra Nacional de Iniciação Científica e Tecnológica Interdisciplinar, XII, 2019, Brusque, SC. Anais (online). Brusque: MICTI, 2019.
- [15] Gastaldi, L. F.; Melo, A. R. *Cálculo Numérico de Raízes de Funções com Aplicação na Matemática Financeira e no Contexto do Ensino Médio*. In: Semana de Ensino, Pesquisa e Extensão, IV, 2019, Araquari, SC. Anais (online). Araquari: SEPE, 2019. Disponível em: <<https://www.even3.com.br/anais/sepe2019/>>. Acesso em: 16 de jun. de 2020.
- [16] Gonçalves, A. G. N.; Misato, H.; Cruz, J.; Athanazio, V. *A utilização da Geometria Dinâmica para estudo da Progressão Geométrica via Fractais*. Revista Interdisciplinar de Tecnologias e Educação, v. 1, n. 1, p. 157-167, aug. 2015.
- [17] Gomes, A. N. *Uma Proposta de Ensino Envolvendo Geometria Fractal Para o Estudo de Semelhança de Figuras Planas*. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Exatas), Universidade Federal de São Carlos. São Carlos, p. 230, 2010.
- [18] Iezzi, G. *Fundamentos de Matemática Elementar. vol. 7. Geometria Analítica*. São Paulo: Editora Atual, 1977.
- [19] Lima, K.; Melo, A. R. *Ajuste Polinomial via Método de Mínimos Quadrados Desenvolvido a Partir de Conceitos do Ensino Médio*. In: Semana de Ensino, Pesquisa e Extensão, IV, 2019, Araquari, SC. Anais (online). Araquari: SEPE, 2019. Disponível em: <<https://www.even3.com.br/anais/sepe2019/>>. Acesso em: 16 de jun. de 2020.
- [20] Lopes, J. M.; Salvador, J. A.; Balieiro Filho, I. F. *O ensino de probabilidade geométrica por meio de fractais e da resolução de problemas*. Revista Eletrônica de Educação, São Carlos, v. 7, n. 3, p. 47-62, 2013.
- [21] Luz, E. V. *A Geometria Fractal Como Fator Minimizador das Dificuldades Referentes a Conceitos Geométricos*. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática), Universidade Estadual Paulista. São José do Rio Preto, p. 83, 2016.

- [22] Melo, A. R. *Mínimos quadrados lineares desenvolvidos no contexto do ensino médio*. Revista PMO, v. 7, n. 2, p. 157-165, 2019.
- [23] Mineli, J. P. *Fractais: Generalização de Padrões no Ensino Fundamental*. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), PUC-SP. São Paulo, p. 88, 2012.
- [24] Nascimento, M.; Silva, S. C. R.; Maciel, N. A. *Uma Proposta Didática Para o Ensino de Geometria Fractal em Sala de Aula na Educação Básica*. Revista VIDYA, v. 32, n. 2, p. 113-132, jul./dez. 2012.
- [25] Paula, C. E. S.; Souza, T. M. R. *Uma abordagem da geometria fractal para o ensino médio*. C.Q.D. - Revista Eletrônica Paulista de Matemática, Bauru, v. 10, n. 3, p. 135-148, dez. 2017.
- [26] Rabay, Y. S. F. *Estudo e Aplicações da Geometria Fractal*. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática), Universidade Federal da Paraíba. João Pessoa, p. 103, 2013.
- [27] Sallum, E. M. *Fractais no Ensino Médio*. Revista do Professor de Matemática, n. 57, 2008. Disponível em: <<http://www.rpm.org.br/cdrpm/57/1.htm>>. Acesso em: 02 de jun. de 2020.
- [28] Santos, M. E.; Melo, A. R. *Iniciação à Teoria da Aproximação: Técnica de Mínimos Quadrados Acessível ao Ensino Médio*. In: Mostra Nacional de Iniciação Científica e Tecnológica Interdisciplinar, XI, 2018, São Bento do Sul, SC. Anais (online). São Bento do Sul: MICTI, 2018. Disponível em: <<http://publicacoes.ifc.edu.br/index.php/micti/article/view/904>>. Acesso em: 16 de jun. de 2020.
- [29] Sonza, A. P.; Leivas, J. C. P. *Explorando a Geometria Fractal no Ensino Médio por meio de uma oficina pedagógica*. Revista THEMA, v. 15, n. 4, p. 1549-1561, 2018.
- [30] Valim, J. C. M.; Colucci, V. *Geometria Fractal no Ensino Fundamental e Médio*. In: Semana Acadêmica da Matemática, XXII, 2008, Cascavel, PR. Anais (online). Cascavel: SAM, 2008. Disponível em: <<http://projetos.unioeste.br/cursos/cascavel/matematica/xxiisam/artigos/13.pdf>>. Acesso em: 02 de jun. de 2020.
- [31] Weiss, K.; Pirola, D. L.; Fernandes, F.; Magnus, M. C. M. *Geometria Fractal: uma abordagem atualizada e interdisciplinar da Matemática no Ensino Médio*. In: Conferência Internacional de Educação Matemática, XIII CIAEM, 2011, Recife. Anais (online). Recife: CIAEM, 2011. Disponível em: <https://xiii.ciaem-redumate.org/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem>. Acesso em: 04 de jun. de 2020.

Adriano Rodrigues de Melo
Instituto Federal Catarinense, Araquari, SC.
<adriano.melo@ifc.edu.br>

Gustavo Vieira Ferreira
Curso Técnico em Informática, Instituto Federal Catarinense, Araquari, SC.
<gusferreira1203@gmail.com>

Weliton Dal Pizzol Maria
Curso Técnico em Informática, Instituto Federal Catarinense, Araquari, SC.
<welitonpdpm2003@gmail.com>

Recebido: 20/04/2020

Publicado: