

Experimentalphysik, 5. Semester

Univ.-Prof. Dr. rer. nat. Martin Erdmann

Adresse:

Univ.-Prof. Dr. rer. nat. Martin Erdmann
RWTH Aachen Universität
Physikalisches Institut 3A
Otto-Blumenthal-Straße
D-52056 Aachen
Germany

© Copyright

Alle Rechte vorbehalten, kein Teil des Skripts darf ohne die schriftliche Genehmigung von Prof. Erdmann durch Photokopie oder irgendein anderes Verfahren reproduziert oder in eine durch Maschinen verwendete Sprache übertragen werden. Ein Exemplar des Skripts darf von jedem Hörer dieser Vorlesung auf einem nur ihr/ihm persönlich zugänglichen Computer gespeichert werden. Eine Weitergabe des Skripts ist nicht gestattet.

Haftungsausschluss:

Das Skript wurde sorgfältig erarbeitet. Für die Richtigkeit von Angaben, Hinweisen und für Druckfehler kann keine Haftung übernommen werden.

Inhaltsverzeichnis

I. Astrophysik	1
1. Bezugssysteme: Position & Zeit	3
1.1. Koordinatensysteme	3
1.2. Zeitmessung: Sonntag, Sternzeit	7
1.3. Entfernungsmessungen	9
2. Sterne	13
2.1. Zustandsgleichung für Materie unter Gravitation	13
2.2. Zustandsgleichung für normale Sternmaterie	15
2.3. Sternentstehung	16
2.4. Zeitdauer Gravitationskollaps	18
2.5. Kernfusion	19
2.6. Helligkeit von Sternen	24
2.7. Sternspektren	25
2.8. Klassifizierung von Sternen	26
3. Die Sonne	31
3.1. Masse	31
3.2. Radius	31
3.3. Mittlere Dichte	32
3.4. Leuchtkraft	32
3.5. Oberflächentemperatur	34
3.6. Temperatur in der Sonne	35
3.7. Energietransport in der Sonne	36
3.8. Häufigkeit der Elemente	37
4. Weißer Zerg, Neutronenstern, schwarzes Loch	40
4.1. Zustandsgleichung für entartete Materie	40
4.2. Neutronenstern	46
4.3. Schwarzes Loch	52
4.4. Supernova	53
5. Kosmologie	59
5.1. Dunkle Materie	59
5.2. Rotverschiebung	61
5.3. Hubble-Gesetz	66
5.4. Expansion des Universums	67
5.5. Entwicklung der Raumzeit bei Gravitation	69
5.6. Kosmische Hintergrundstrahlung	79

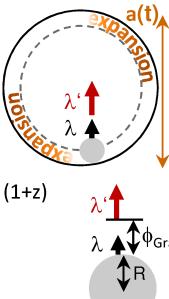
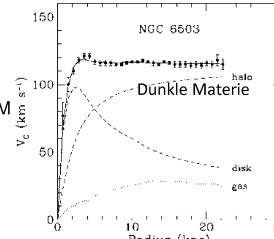
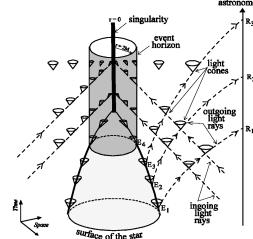
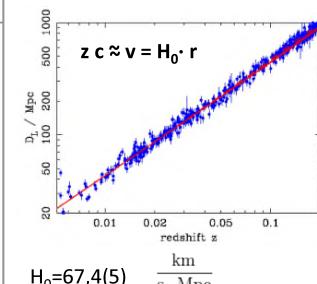
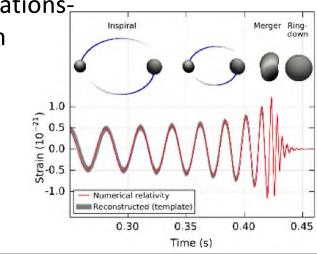
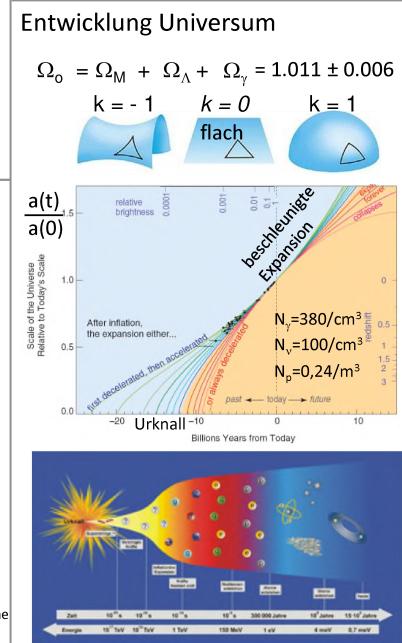
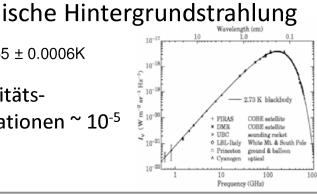
5.7. Gravitationswellen	84
5.8. Standardmodell der Kosmologie	85

Teil I.

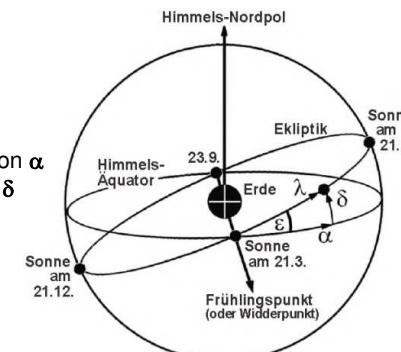
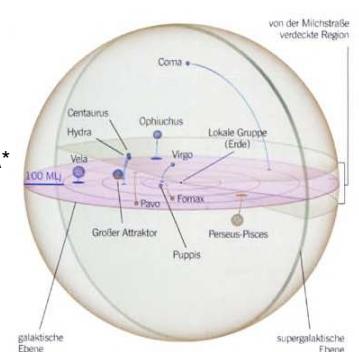
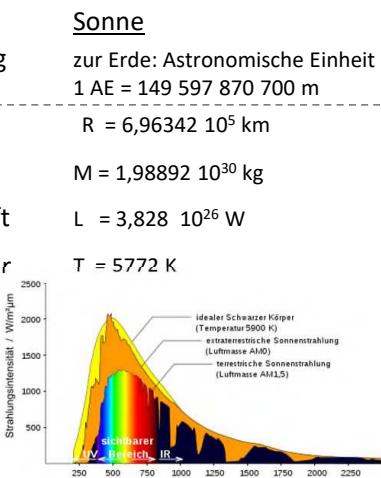
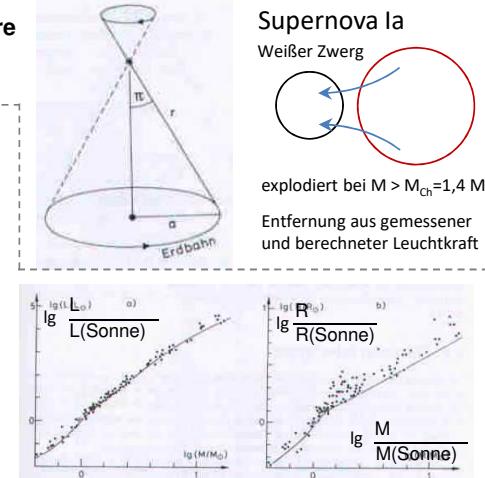
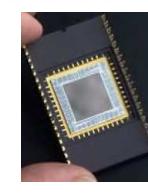
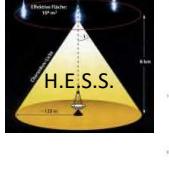
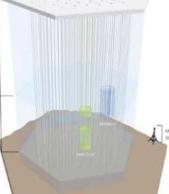
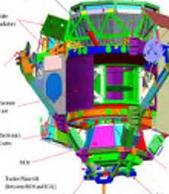
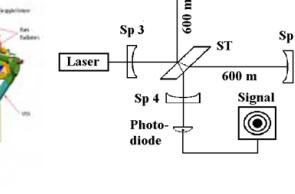
Astrophysik

Astrophysik & Kosmologie

Physik V, WS 2022/23 - 12.10.2022
Prof. Dr. Martin Erdmann

Relativitätstheorie		Kosmologisches Prinzip	homogenes, isotropes Universum
		Friedmann-Gleichung	$\left(\frac{da}{dt}\right)^2 - \frac{C(\Omega)}{a} + k = 0$
		Kosmologische Rotverschiebung	$z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} \approx \frac{v}{c}$
		Materiedichte	$\rho_m(t) \approx [a(t)]^{-3}$
		Strahlungsdichte	$\rho_s(t) \approx [a(t)]^{-4}$, $T=2,7K(1+z)$
		Gravitations-Rotverschiebung	$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{R_s}{2R}$
		Schwarzschild-Radius	$R_s = \frac{2GM}{c^2}$
			
Statistische Physik		Planck-Strahlungsgesetz	$I = \frac{2\pi\hbar c^2}{\lambda^5} \left(e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1\right)$
		Druckbalance mit Gravitation	$\frac{R_s}{R} \approx \frac{p}{\rho c^2} \begin{cases} \frac{kT}{m_p c^2} & \text{Ideales Gasgesetz} \\ \frac{E_F}{m_p c^2} & \text{Fermi-Energie} \end{cases}$
		Chandrasekhar-Grenze	$M_{Ch} \sim \alpha_G^{-3/2} m_p \approx 1.5M_{\text{Sonne}}$, $\alpha_G = \frac{G m_p^2}{\hbar c} \approx 6 \cdot 10^{-39}$
Wechselwirkungen			
Teilchenphysik Kernphysik	Starke] Fusionszyklen	$4 p \rightarrow He +$	
	Schwache]	$2\nu_e + 26.2 \text{ MeV}$	
	Elektromagnetische	$\Omega_\gamma = 5.38(15) \cdot 10^{-5}$	
	Gravitation		
	Dunkle Energie	$\Omega_\Lambda = 0.685(7)$	
	Materie	$\Omega_M = \Omega_B + \Omega_\nu + \Omega_{DM}$	
	Quarks (Baryonen) CP	$\Omega_B = 0.0493(6)$	
	Leptonen ν-Oszillationen	$0.0012 < \Omega_\nu < 0.003$	
	Dunkle Materie	$\Omega_{DM} = 0.265(7)$	
Hubble-Gesetz		$z c \approx v = H_0 \cdot r$	
Gravitationswellen			
Entwicklung Universum			
Kosmische Hintergrundstrahlung			

Anzahl Galaxien im Universum $\sim 10^{11}$
Anzahl Sterne pro Galaxie $10^9 - 10^{12}$

Koordinaten	Äquatoriale	Galaktische
	<p>Grundkreis: Äquator Nullpunkt: Frühlingspunkt Länge: längs Äquator Rektaszension α Breite: senkrecht dazu Deklination δ</p> <p>Siderischer Tag 23h 56m 4,0989 s</p> 	<p>Grundkreis: Galaktische Ebene Zentrum: Sonne Länge ℓ, $\ell=0$: Sonne->Sagittarius A* Breite b, $b=0$: galaktische Ebene</p> 
Messgrößen	<p>Sonne</p> <p>Entfernung zur Erde: Astronomische Einheit $1 \text{ AE} = 149\,597\,870\,700 \text{ m}$</p> <p>Radius $R = 6,96342 \cdot 10^5 \text{ km}$</p> <p>Masse $M = 1,98892 \cdot 10^{30} \text{ kg}$</p> <p>Leuchtkraft $L = 3,828 \cdot 10^{26} \text{ W}$</p> <p>Temperatur $T = 5772 \text{ K}$</p> <p>Spektrum</p> 	<p>$\pi = 1''$ definiert 1 Parsec = 1pc = 3,262 Lichtjahre</p> <p>$1 \text{ Lichtjahr} = \pi \cdot 10^7 \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ m} \sim 10^{16} \text{ m}$</p> <p>durch Interferometrie</p> <p>Kepler-Gesetz $T^2 \approx \frac{4\pi^2}{GM} \cdot a^3$</p> <p>$L = \int \int I d\theta d\phi \cdot 4\pi R^2 = \sigma T_{\text{eff}}^4 \cdot 4\pi R^2$</p> <p>Intensität Sternradius Stefan-Boltzmann</p> <p>Helligkeit (Magnitude)</p> $m = -2,5 \lg \left(\frac{I}{I_0} \right)$ $m - M = 5 \lg \left(\frac{r}{10 \text{ pc}} \right)$ 
Detektoren	<p>Optisches Teleskop Hubble</p>  <p>Radio-Teleskop Effelsberg</p>  <p>Luftschauer in Atmosphäre Pierre-Auger</p>  <p>Cerenkovlicht in Atmosphäre Photonen H.E.S.S.</p>  <p>Cerenkovlicht im Eis Neutrinos, ... IceCube</p>  <p>Teilchendetektor Raumstation (Anti-)Teilchen AMS</p>  <p>Michelson-Interferometer Gravitationswellen LIGO</p> 	

1. Bezugssysteme: Position & Zeit

Durch die Rotation der Erde um sich selbst und um die Sonne werden Positionsmessungen im Universum nicht-trivial. In diesem Kapitel beschreiben wir die wichtigsten geeigneten Koordinatensysteme für Positionsmeßungen von Planeten, Sternen und Galaxien. Bei der Messung von Zeit unterscheiden wir Sonnen- und Sterntage. Schließlich stellen wir ein Verfahren zur geometrischen Abstandsmessung vor, das auf die Grundeinheit von Abständen in der Astrophysik führt, die in sogenannten **Parsec**-Einheiten gemessen werden.

1.1. Koordinatensysteme

Die Eigendrehung der Erde führt dazu, dass ein Fixstern sich auf einer Kreisbahn bewegt (Abb. 1.1).

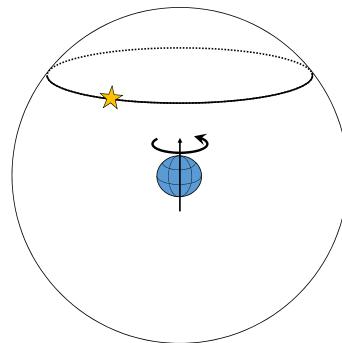


Abb. 1.1.

Für den Beobachter am Nordpol ist es eine scheinbare Bewegung des Sterns auf einer Kreisbahn senkrecht zur Ebene der Drehung (linke Abb. 1.2). Steht der Beobachter am Äquator kann ein beliebiger anderer Stern eine scheinbare Bewegung quer über den Himmel durchführen (rechte Abb. 1.2).

1. Bezugssysteme: Position & Zeit

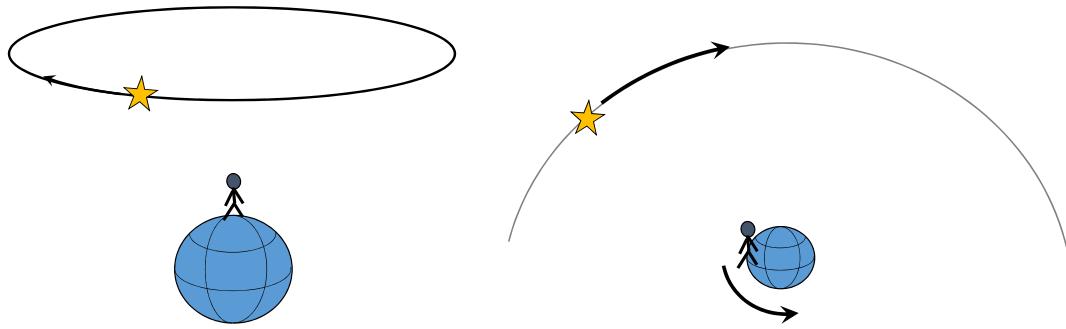


Abb. 1.2.

1.1.1. Äquatoralkoordinaten

Äquatoralkoordinaten sind Kugelkoordinaten mit $R = \text{const}, \theta, \varphi$. Die Himmelskugel wird außerhalb der Erde auf eine Kugeloberfläche projiziert, d.h. der Radius ist unerheblich, es kommt nur auf die Richtung an [3].

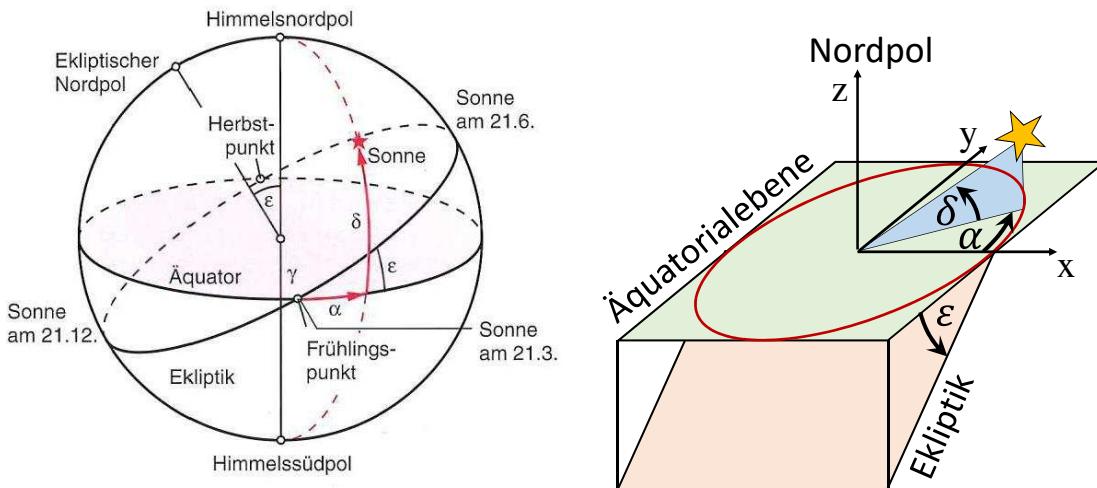


Abb. 1.3.

Der Azimutwinkel α wird als „Rektaszension“ bezeichnet, wobei $\alpha = 0$ zum Frühlingspunkt zeigt (Abb. 1.3). Den Winkelabstand vom Äquator δ nennt man „Deklination“, wobei positive Richtungen $\delta > 0$ zum Nordpol hinzeigen. Die Angabe der Einheiten ist je nach Winkel in Zeiteinheiten

$$h = \text{Stunden} \quad m = \text{Minuten} \quad s = \text{Sekunden} \quad (1.1)$$

oder in Grad ($^\circ$) mit einer Detaillierung über Bogenminuten ('') und Bogensekunden ('''):

$$\text{Winkel in Grad} = \text{Grad} + \frac{\text{Winkelminuten}}{60} + \frac{\text{Winkelsekunden}}{3600} \quad (1.2)$$

Für unsere beiden Winkel zur Beschreibung des Himmels sind üblich:

- Der Deklinationswinkel δ wird in Grad, Bogenminuten, Bogensekunden angegeben, z.B. $\delta = +27^\circ 24' 1''$
- Der Rektaszensionswinkel α wird in Stunden, Minuten, Sekunden angegeben, z.B. $\alpha = 12 \text{ h } 49 \text{ m}$. Dabei gelten die folgenden Zusammenhänge:
 - $24 \text{ h} = 360^\circ$
 - $1 \text{ h} = 15^\circ$
 - $1 \text{ Minute} = 15'$
 - $1 \text{ Sekunde} = 15''$

Relativ zur Umlaufbahn der Erde um die Sonne ist die Äquatorebene der Erde um $23,5^\circ$ geneigt, was als Ekliptik bezeichnet wird (Abb. 1.3).

1.1.2. Galaktische Koordinaten

Galaktische Koordinaten verwenden die Milchstraße als Bezugsebene. Die Sonne liegt im Ursprung, von hier aus werden die

$$\text{Galaktische Länge: } l \quad (1.3)$$

$$\text{Galaktische Breite: } b \quad (1.4)$$

bestimmt. Dabei gilt folgende Festlegung aus dem Jahr 1950: Der Nordpol $b = +90^\circ$ entspricht im Äquatorsystem $\alpha = 12 \text{ h } 49 \text{ m}$ und $\delta = 27^\circ 24'$. Der Nullpunkt der Galaktischen Länge $l = 0$, $b = 0$ zeigt in Richtung des galaktischen Zentrums

$$\alpha = 17 \text{ h } 42 \text{ m } 26,603 \text{ s} \quad (1.5)$$

$$\delta = -28^\circ 55' 0,45''. \quad (1.6)$$

Das eigentliche Zentrum der Milchstraße ist das massereiche schwarze Loch Sagittarius A*, das um Bruchteile eines Grads gegenüber dem galaktischen Nullpunkt verschoben liegt. Die Sonne ist $8,1(78) \text{ kpc}$ davon entfernt, rotiert um das Milchstraßenzentrum mit einer Geschwindigkeit von 220 km/s und einer Umlaufzeit von 240 Millionen Jahren.

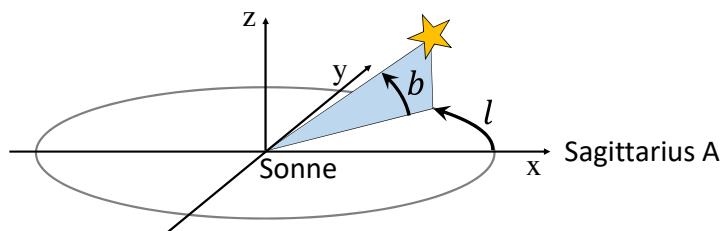


Abb. 1.4.

1. Bezugssysteme: Position & Zeit

Die Äquatorialebene der Erde ist relativ zu der Ebene der Milchstraße um $62,6^\circ$ geneigt, so dass die Milchstraße nachts in sehr dunkler Umgebung als Band im Nachthimmel zu sehen ist.

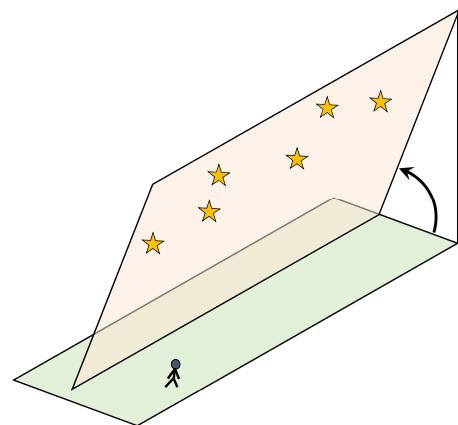


Abb. 1.5.

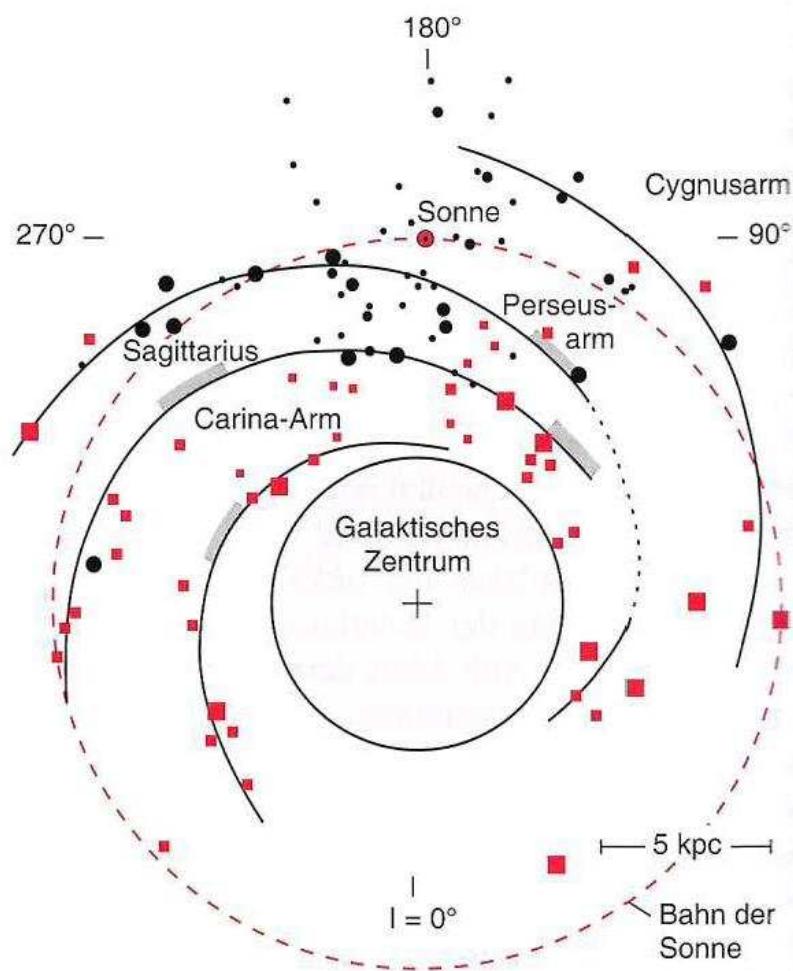


Abb. 1.6.

Beispiel 1: Himmelskarten

Die Hammer(-Aitoff)-Projektion ist eine flächentreue Abbildung einer Kugel auf eine Ellipse. Ein Observatorium auf der Südhalbkugel misst den in Abb. 1.7 gezeigten Himmelsausschnitt in Äquatorialkoordinaten.

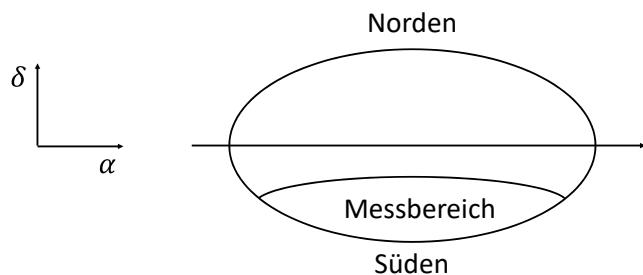


Abb. 1.7.

In Galaktischen Koordinaten übersetzt ist die Himmelskarte in Abb. 1.8 gezeigt.

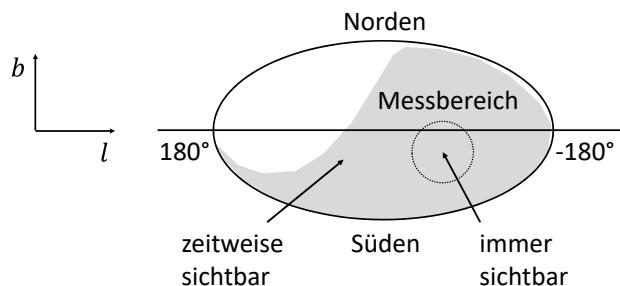


Abb. 1.8.

1.2. Zeitmessung: Sonnentag, Sterntag

Die Sekunde ist über das 9.192.631.770-fache der Schwingungsperiode festgelegt, die der Strahlung des Hyperfeinstrukturübergangs im Grundzustand des Caesium-Atoms ^{133}Cs entspricht.

1.2.1. Zeitmessung bezüglich der Sonne

Das *tropische Jahr* ist das Zeitintervall, in dem die Sonne zwei Mal den Frühlingspunkt trifft (Abb. 1.3). Es beträgt 365,24219 Tage der mittleren Sonnenzeit (Sonnentag) von

$$86.400 \text{ s.} \quad (1.7)$$

1. Bezugssysteme: Position & Zeit

Wegen der Nachkommastellen im tropischen Jahr wird unser *Kalenderjahr* über die sogenannten Schaltjahre korrigiert.

Als *Weltzeit* (englisch: universal time / UT) bezeichnen wir die Zeitmessung bezüglich eines Punktes in Greenwich, auf den sich die mittlere Sonnen-Ortszeit der Erde bezieht.

Eine nützliche Merkregel für die Anzahl der Sekunden pro Jahr ist:

$$1 \text{ Jahr} = \pi \cdot 10^7 \text{ s} \quad (1.8)$$

1.2.2. Zeitmessung in Bezug auf Fixsterne

Durch die Eigendrehung der Erde und ihre elliptische Bahn ist der Sonnentag von 86.400 s (1.7) etwas länger als ein Tag, der sich für eine lineare Flugbahn ergeben würde (Abb. 1.9). Nimmt man einen unendlich entfernten Fixstern als Bezugssystem, so dauert

$$1 \text{ siderischer Tag} = 86.164,099 \text{ s} \quad (1.9)$$

oder 23 h 56 min 4,091 s.

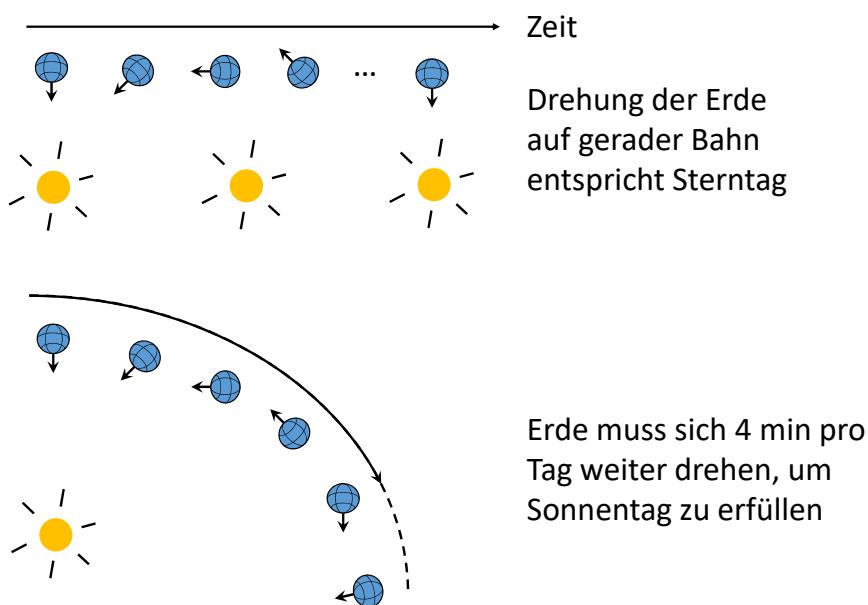


Abb. 1.9.

Das siderische Jahr beschreibt einen vollständigen Umlauf der Erde um die Sonne in einem Bezugssystem, das durch die Sonne und einen unendlich weit entfernten Fixstern definiert ist. Da sich auch die Sonne in der Milchstraße bewegt, ändert sich auch dieses Bezugssystem. Deswegen nimmt man als Basis den Umlauf der Erde im Jahr 2000 und erhält ein ca. 20 min. längeres

Jahr im Vergleich zum tropischen Jahr:

$$1 \text{ siderisches Jahr} = 365,2563604167 \text{ d} \quad (1.10)$$

$$= 31.558.149,54 \text{ s} \quad (1.11)$$

1.3. Entfernungsmessungen

1.3.1. Entfernung Erde-Sonne

Eine Messung der Entfernung zwischen Sonne und Erde ist z.B. durch Radar-signale an der Venus möglich. Dafür benötigen wir das 3. Keplersche Gesetz, das man aus der Gravitationskraft und der Zentripetalkraft einer Kreisbewegung herleiten kann [5]:

$$T_i^2 = \frac{4\pi^2}{G(M_{\text{Sonne}} + m_i)} a_i^3 \quad (1.12)$$

Dabei ist T_i die Umlaufzeit des Planeten, m_i seine Masse und a_i die große Halbachse der elliptischen Umlaufbahn.

Um zu sehen, dass die Berechnung im Prinzip möglich ist, verwenden wir den Kosinussatz wie in Abb. 1.10 gezeigt:

$$a_V^2 = a_E^2 + x^2 - 2a_Ex \cdot \cos \alpha \quad (1.13)$$

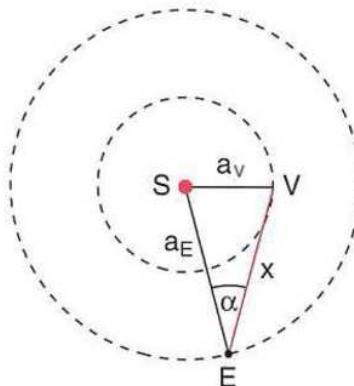


Abb. 1.10.

Aus dem 3. Kepler-Gesetz (1.12) bestimmen wir zunächst die Halbachse der Venus-Umlaufbahn:

$$\frac{a_V^3}{a_E^3} = \frac{T_V^2}{T_E^2} \quad (1.14)$$

$$a_V = \left(a_E^3 \frac{T_V^2}{T_E^2} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (1.15)$$

1. Bezugssysteme: Position & Zeit

Anschließend setzen wir in den Kosinussatz (1.13) ein und lösen nach der Entfernung a_E zwischen Sonne und Erde auf.

1.3.2. Astronomische Einheit

Die Entfernung zwischen der Erde und Sonne nennt man auch die „Astronomische Einheit“ AE. Zu ihrer Festlegung wurde früher der Kreisbahnradius eines hypothetischen Körpers mit verschwindend kleiner Masse verwendet, der in genau 365,2568983 Tagen die Sonne umläuft.

Im Jahr 2012 wurde die Astronomischen Einheit als Längeneinheit numerisch festgelegt:

$$1 \text{ AE} = 149\,597\,870\,700 \text{ m} \quad (1.16)$$

Diese Länge entspricht ungefähr der großen Halbachse der Erdellipse.

1.3.3. Entfernung von Sternen: Die Einheit Parsec

Die scheinbare Änderung der Position eines Objekts durch verschiedene Beobachterpositionen bezeichnet man als Parallaxe. Man kann sie folgendermaßen als trigonometrische Entfernungsmessung nutzen: Im Abstand von einem halben Jahr beobachten wir einen Stern bei $\delta = 90^\circ$. Die geometrische Berechnung der Sternentfernung r können wir Abb. 1.11 entnehmen [1]:

$$\sin \Pi = \frac{a}{r} \quad (1.17)$$

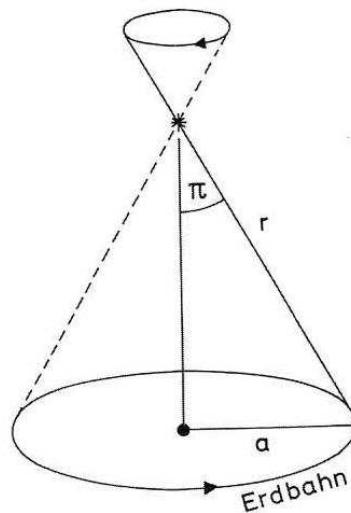


Abb. 1.11.

1.3. Entfernungsmessungen

Über den Abstand, der sich für eine Winkelsekunde $\Pi = 1''$ mit der Astronomischen Einheit $a = 1 \text{ AE}$ ergibt, definiert man die wichtige Entfernungseinheit **parsec** (kurz pc):

$$1 \text{ pc} \equiv r(1'') \quad (1.18)$$

$$= \frac{a}{\sin \Pi} = \frac{1 \text{ AE}}{\sin 1''} = 206265 \text{ AE} \quad (1.19)$$

Um ein verständliches Vergleichsmaß für eine solche Entfernung zu erhalten, fragen wir uns, wie lange das Licht von einem Stern in 1 parsec Entfernung zu uns unterwegs war. Dabei bezeichnen wir als Lichtjahr die Entfernung d , die das Licht mit der Vakuumlichtgeschwindigkeit

$$c = 2,99792458 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (1.20)$$

während eines Jahres zurücklegt:

$$d(1 \text{ LJ}) = c \cdot \tau_{\text{Jahr}} \approx 9,461 \cdot 10^{15} \text{ m} \quad (1.21)$$

In Lichtjahren ausgedrückt beträgt die Entfernung von 1 parsec:

$$1 \text{ pc} = 206265 \cdot \frac{149\,597\,870\,700 \text{ m}}{9,461 \cdot 10^{15} \text{ m}} = 3,262 \text{ LJ} \quad (1.22)$$

Das Licht des Nachbarsterns Proxima Cenauri in der Entfernung $r = 1,3 \text{ pc}$ benötigt demnach

$$t = 1,3 \cdot 3,262 \approx 4 \text{ LJ} v \quad (1.23)$$

um bei uns wahrgenommen zu werden.

Das Wichtigste zum Mitnehmen

Bezugssysteme

- Koordinatensysteme zur Beschreibung des Himmels entsprechen Kugelkoordinaten mit zwei Winkelkoordinaten. Das **Äquatorialsystem** bezieht sich auf die Äquatorebene der Erde mit der Erde im Zentrum. Die Winkelkoordinaten heißen **Rektaszension** α (Azimut) und **Deklination** δ :
 $\alpha = 0$ zeigt zum Frühlingspunkt, $\delta = 0$ liegt in der Äquatorebene, $\delta = 90^\circ$ zeigt zum Nordpol der Erde. Relativ zur Umlaufbahn der Erde um die Sonne ist die Äquatorebene der Erde um $23,5^\circ$ geneigt, was als Ekliptik bezeichnet wird.
- Das **galaktische Koordinatensystem** bezieht sich auf die Ebene der Milchstraße mit der Sonne im Zentrum. Die Winkelkoordinaten heißen **galaktische Länge** l (Azimut) und **galaktische Breite** b .
 $l = 0$ zeigt zum galaktischen Zentrum, $b = 0$ liegt in der Ebene, $b = 90^\circ$ zeigt zum galaktischen Nordpol. Die Äquatorialebene der Erde ist relativ zu der Ebene der Milchstraße um $62,6^\circ$ geneigt.
- Der **mittlere Sonnentag** beträgt 86.400s. Durch die Eigendrehung der Erde dauert er etwas länger als der **siderische Tag**, der sich auf einen Fixstern bezieht 86.164,099s.
- Typische Entfernungsgrößen sind:
 - Die **Astronomische Einheit** 1 AE = 149 597 870 700 m ist eine definierte Entfernung in der Astronomie. Sie entspricht ungefähr der großen Halbachse der Erdumlaufbahn.
 - Ein **Lichtjahr** bezeichnet die Entfernung, die ein Lichtquant innerhalb eines Jahres zurücklegt: 1 LJ $\approx 10^{16}$ m.
 - Die übliche Entfernungsmessung für Sterne und Galaxien wird in der Einheit **parsec** pc vorgenommen. 1 pc ergibt sich aus der Parallaxe von einer Bogensekunde, die sich bei einer Positionsmeßung im Abstand von einem halben Jahr ergibt. Ausgedrückt in Lichtjahren beträgt 1 pc = 3,262 LJ.

2. Sterne

Die mit dem Auge sichtbaren Sterne sind massive gasförmige Himmelskörper, deren Leuchtkraft durch Kernfusionsprozesse im Sterninneren gespeist wird. Wir stellen in diesem Kapitel zunächst eine Zustandsgleichung für Materie unter dem Einfluss der Gravitation vor und begründen damit das Prinzip einer Sternentstehung. Anschließend stellen wir Kernfusionsprozesse vor. Schließlich erläutern wir die Eigenschaften unserer Sonne und ordnen sie in ein Klassifizierungsschema für Sterne ein.

2.1. Zustandsgleichung für Materie unter Gravitation

Die zentrale Fragestellung für Gleichgewichtszustände eines Sterns lautet: Was hält dem Gravitationsdruck der Sternmaterie stand? Zunächst werden wir eine allgemeine Formulierung einer Zustandsgleichung motivieren, die einen Zusammenhang zwischen dem Gravitationsdrucks mit einem zunächst allgemeinen gehaltenen Gegendruck herstellt. Wir werden anschließend sehen, dass dieser Gegendruck thermische Ursachen haben kann, die im idealen Gasgesetz formuliert sind. Später werden wir auch eine Erzeugung von Gegendruck durch die Fermi-Energie im dichten und hochdichten Material kennenlernen.

Zunächst suchen wir einen geeigneten Ausdruck für den Gravitationsdruck in einer kugelförmigen Materieansammlung, wie sie in Abb. 2.1 gezeigt ist [2].

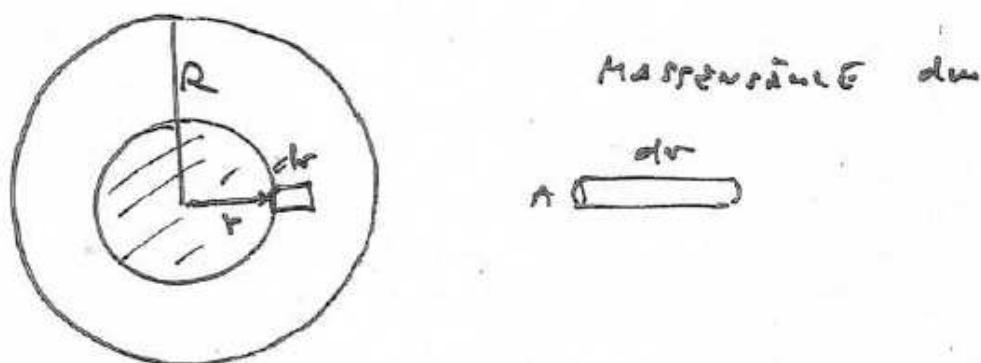


Abb. 2.1.

2. Sterne

Wie aus theoretischen Berechnungen in der Mechanik bekannt ist, spielt für die Berechnung der Gravitationskraft der Säule $dm = \rho(r) \cdot A \cdot dr$ nur die Masse $M(r)$ der innenerhalb vom Radius r liegenden Kugel eine Rolle. Die Gravitationskraft beträgt Newtons Gravitationsgesetz folgend:

$$dF = -G \frac{M dm}{r^2} \quad (2.1)$$

Der entsprechende Gravitationsdruck lautet dann:

$$dp = \frac{dF}{A} \quad (2.2)$$

$$= -G \frac{M \rho A dr}{r^2 A} \quad (2.3)$$

$$\frac{dp}{dr} = -G \frac{M}{r^2} \rho(r) \quad (2.4)$$

Um diese Differentialgleichung zu lösen machen wir folgende Vereinfachungen:

- a) Die Dichte $\rho(r)$ im Stern nehmen wir als konstant an: $\rho(r) = \rho = const.$
- b) Mit der mittleren Dichte ρ des Sterns ergibt sich die Sternmasse zu

$$M = 4\pi \int_0^R \rho(r) r^2 dr \approx \frac{4}{3}\pi R^3 \rho. \quad (2.5)$$

- c) Die Ableitung dp/dr nähern wir durch den Differenzenquotienten, um dann festzustellen, dass außen beim Sternradius R der Druck $p(R)$ vernachlässigbar ist:



$$\frac{dp}{dr} \approx \frac{p(R) - p(0)}{R} \quad (2.6)$$

$$= -\frac{p(0)}{R} \quad (2.7)$$

Abb. 2.2.

- d) Anstelle des Drucks $p(0)$ im Zentrum der Kugel verwenden wir einen mittleren Druck $p \equiv \langle p \rangle$ und beschreiben das radiale Druckgefälle über die Ableitung:

$$\frac{dp}{dr} \approx -\frac{p}{R} \quad (2.8)$$

2.2. Zustandsgleichung für normale Sternmaterie

Setzen wir diese Näherungen in (2.4) ein, so erhalten wir

$$\frac{dp}{dr} = -G \frac{M}{r^2} \rho \quad (2.9)$$

$$-\frac{p}{R} \approx -G \frac{M}{R^2} \rho \quad (2.10)$$

$$\frac{p}{\rho c^2} = \underbrace{\frac{2GM}{c^2}}_{\equiv R_S} \frac{1}{2R} \quad (2.11)$$

Dabei definiert R_S den sogenannten „**Schwarzschild-Radius**“:

$$R_S \equiv \frac{2GM}{c^2} \quad (2.12)$$

Wir erhalten somit eine **Zustandsgleichung** des Sterns, der Gravitation, Druck, Radius und Materiedichte miteinander verbindet:

$$\frac{p}{\rho c^2} \approx \frac{R_S}{2R} \quad (2.13)$$

Wie wir später sehen werden, gibt der Schwarzschild-Radius gravitationsbezogene Größenverhältnisse wieder, die für Effekte der allgemeinen Relativitätstheorie eine zentrale Rolle spielen.

2.2. Zustandsgleichung für normale Sternmaterie

Der Innenbereich eines normalen Sterns enthält Wasserstoffgas, dessen Druck p , Volumen V und Temperatur T durch das ideale Gasgesetz beschrieben werden:

$$pV_{\text{mol}} = N_A k T \quad (2.14)$$

Wir nutzen hier die repräsentative Größe 1 mol Wasserstoffgas und dementsprechend das Molvolumen V_{mol} und die Avogadrokonstante N_A . Die Boltzmannkonstante ist mit k bezeichnet.

Um in die Zustandsgleichung (2.13) einzusetzen, ersetzen wir im Folgenden das Molvolumen V_{mol} durch die inverse Dichte ρ , wofür wir die Molmasse $m_{\text{mol}} = N_A \cdot m_p$ mit der Protonmasse m_p für das Wasserstoffatom benötigen:

$$\rho = \frac{m_{\text{mol}}}{V_{\text{mol}}} = \frac{N_A \cdot m_p}{V_{\text{mol}}} \quad (2.15)$$

$$V_{\text{mol}} = \frac{N_A \cdot m_p}{\rho} \quad (2.16)$$

2. Sterne

Mit der inversen Dichte und einer Erweiterung mit dem Quadrat der Vakuumlichtgeschwindigkeit c^2 erhalten wir:

$$pV_{\text{mol}} = N_A kT \quad (2.17)$$

$$p \frac{N_A \cdot m_p}{\rho} = N_A kT \quad (2.18)$$

$$\frac{p}{\rho c^2} = \frac{kT}{m_p c^2} \quad (2.19)$$

Diese Form der idealen Gasgleichung zeigt sehr schön, dass der Gasdruck p von der kinetischen Energie $E \sim kT$ der Wasserstoffatome erzeugt wird. Die Gasdichte wird durch die Masse der Wasserstoffatome bzw. ihrer Protonen m_p bestimmt.

Für einen Gleichgewichtszustand im Stern soll nun der thermisch erzeugte Gasdruck p dem Gravitationsdruck entgegenstehen. Dafür setzen wir $p/(\rho c^2)$ aus der idealen Gasgleichung (2.19) in die linke Seite der Zustandsgleichung (2.13) ein:

$$\boxed{\frac{kT}{m_p c^2} = \frac{1}{2} \frac{R_S}{R}} \quad (2.20)$$

Setzen wir die Definition des Schwarzschild-Radius (2.12) ein, so ergibt sich ein Ausdruck, den wir weiter unten verwenden werden:

$$\frac{kT}{m_p c^2} = \frac{GM}{Rc^2} \quad (2.21)$$

2.3. Sternentstehung

Sterne können entstehen, wenn eine diffuse interstellare Gaswolke durch Gravitationswechselwirkung kollabiert. Die Dichte solcher Gaswolken ist im Allgemeinen gering. Sie besteht wesentlich aus Wasserstoff-Molekülen H_2 . Der Kollaps findet aber statt, wenn die Gravitationskraft größer als der abstoßende Gasdruck ist.

Für eine erste Abschätzung nutzen wir die Zustandsgleichung (2.21). Darin muss der Gravitationsanteil größer als die kinetischen Energie der Gasatome sein:

$$\frac{GM}{Rc^2} > \frac{kT}{m_p c^2} \quad (2.22)$$

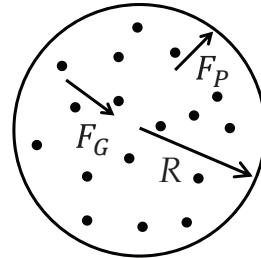


Abb. 2.3.

Die Bedingung für den Kollaps lässt sich in Form einer Mindestmasse ausdrücken:

$$M > \frac{1}{G m_p} \cdot kT \quad (2.23)$$

Deren Abhängigkeit können wir auf die Temperatur T und Dichte ρ zurückführen, indem wir den Radius R der als kugelförmig angenommenen Gaswolke ersetzen:

$$M = \rho \cdot V = \rho \cdot \frac{4}{3} \pi R^3 \quad (2.24)$$

$$R = \left(\frac{M}{\frac{4}{3} \pi \rho} \right)^{1/3} \quad (2.25)$$

Setzen wir für R in der Bedingungsgleichung (2.23) ein, so erhalten wir

$$M > \frac{1}{G m_p} \cdot \left(\frac{M}{\frac{4}{3} \pi \rho} \right)^{1/3} \quad (2.26)$$

$$M^{2/3} > \frac{1}{G m_p} \cdot \left(\frac{1}{\frac{4}{3} \pi \rho} \right)^{1/3}. \quad (2.27)$$

Durch Potenzieren mit $3/2$ erhalten wir als Mindestmasse für den Kollaps der Gaswolke:

$$M > \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cdot \left(\frac{k}{G m_p} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot T^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\rho}} \quad (2.28)$$

Die Mindestmasse für eine Sternentstehung hängt also nur von der Dichte ρ und der Temperatur T ab. Unsere Abschätzung ist wegen starker Näherungen um einen Faktor ~ 10 zu klein.

Genauere Berechnungen ergeben das „**Jeans’sche Kriterium**“:

$$M > \left(\frac{T}{50\text{K}} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{\rho}{10^{-20}\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}}}} \cdot 10^3 M_{\odot} \quad (2.29)$$

2. Sterne

Es wurde bereits so normiert, dass auf typische normierte Werte hingewiesen wird. Das Symbol \odot bezeichnet die Verhältnisse der Sonne, hier ist M_\odot die Sonnenmasse. Voraussetzung für das Zünden der Kernfusion (Kapitel 2.5) und damit die Entstehung eines Sterns ist eine ausreichend hohe Temperatur im Sterninneren. Der Prozess der Sternentstehung ist langsam und dauert 10^3 – 10^7 Jahre. In der Milchstraße gibt es 10^{11} Sterne, jährlich entstehen 3 – 5 neue Sterne.

Beispiel 2: Sternentstehung

Für eine Temperatur $T = 100\text{K}$ und eine Dichte der Wasserstoffatome von 100 Atomen pro cm^3 ergibt sich als Mindestmasse M , bei der ein Stern entstehen kann:

$$M > \left(\frac{100}{50}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{10^2 \cdot 1,7 \cdot 10^{-27}}{10^{-20}}}} \cdot 10^3 M_\odot \approx 10^3 \cdot M_\odot$$

Offensichtlich haben die meisten Sterne sehr viel kleinere Massen, so dass die Gaswolke fragmentiert und beim Kollaps eventuell mehrere Sterne entstehen.

2.4. Zeitdauer Gravitationskollaps

Die Gravitationskraft auf einen Probekörper mit der Masse m im Abstand R von der Masse M lautet:

$$F = \frac{m M G}{R^2} \quad (2.30)$$

Die Beschleunigung der Probemasse ist dann nach Newtons 2. Gesetz:

$$m \frac{d^2 R}{dt^2} = \frac{m M G}{R^2} \quad (2.31)$$

Es stellt sich als vorteilhaft heraus, die Fragestellung alternativ als Energiesatz formulieren:

$$\frac{d}{dt} \left[\underbrace{\frac{m}{2} \left(\frac{dR}{dt} \right)^2}_{=E_{kin}} - \underbrace{\frac{m M G}{R}}_{=E_{pot}} \right] = 0 \quad (2.32)$$

Die Probemasse starte im Abstand $R = R_{\circ}$ mit der Geschwindigkeit $dR/dt = 0$:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 - \underbrace{\frac{1}{2} \left(\frac{dR}{dt} (R_{\circ}) \right)^2}_{=0} = \frac{M G}{R} - \frac{M G}{R_{\circ}} \quad (2.33)$$

$$\frac{dR}{dt} = \sqrt{M G (R^{-1} - R_{\circ}^{-1})} \quad (2.34)$$

Zur Lösung der Differentialgleichung separieren wir die Variablen und erhalten:

$$\int_0^t dt = \int_{R_{\circ}}^R \frac{dR}{\sqrt{2 G M (R^{-1} - R_{\circ}^{-1})}} \quad (2.35)$$

Mit Hilfe tabellierter Integrale erhalten wir für $R = 0$ unter Beachtung der Dichte $\rho = M/R_{\circ}^3$ zur Zeit $t = 0$:

$$t = \pi \sqrt{\frac{R_{\circ}^3}{M 8 G}} \frac{1}{\rho} \approx \sqrt{\frac{1}{\rho G}} \quad (2.36)$$

Beispiel 3: Zeit für Gravitationskollaps

Für einen Stern mit typischer Materiedichte von $\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$ dauert der Kollaps nur:

$$t = \sqrt{\frac{1}{\rho G}} = \sqrt{\frac{1}{10^3 \cdot 7 \cdot 10^{-11}}} \sqrt{\frac{\text{m}^3 \text{ kg}^2}{\text{kg N m}^2}} \approx 10^3 \text{ s} \approx 1 \text{ h}$$

2.5. Kernfusion

Leichte Elemente erhalten durch Kernfusion einen Energievorteil in der Bindungsenergie. In der folgenden Abbildung ist die Bindungsenergie pro Nukleon als Funktion der Nukleonenzahl gezeigt.

Bis zum Element Eisen ergibt sich bei der Fusion ein Energievorteil. Für Elemente oberhalb von Eisen ergibt eine Kernspaltung einen Energievorteil.

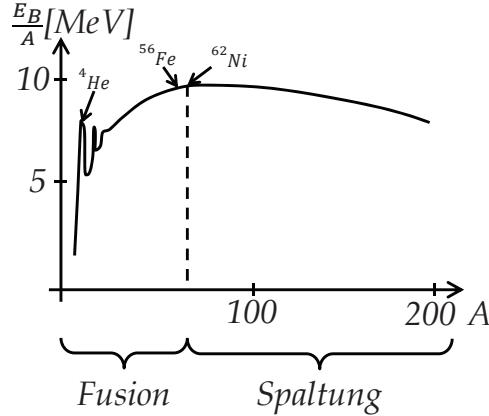


Abb. 2.4.

2.5.1. Wasserstoffbrennen

Wasserstoffbrennen findet bei hohen Temperaturen statt: $T = 5 - 15 \cdot 10^6 \text{ K}$. Im Folgenden werden wir zuerst die Proton-Proton-Reaktionsfolge ($p-p$ -Kette) kennenlernen:

- Der erste Prozess, der stattfindet, ist ein Prozess der schwachen Wechselwirkung. Die Reaktionsrate ist jedoch klein, da die Kopplungskonstante klein ist.

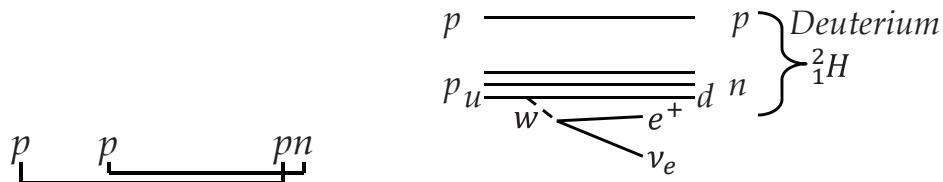
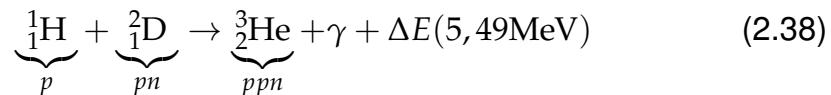


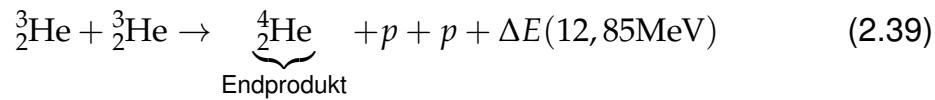
Abb. 2.5.

Alle nun folgenden Reaktionen sind Prozesse auf Basis der starken Wechselwirkung.

- Im zweiten Schritt fusioniert ein Deuteriumkern mit einem Proton zu einem Helium-3-Isotop:



3. Schließlich findet eine Fusion von zwei Helium-3-Isotopen statt, bei der Helium-4 entsteht und zwei Protonen frei werden:



Die freigesetzte Energie beträgt demnach:

$$\Delta E = [2 \cdot (1,19 + 5,49) + 12,85] \text{ MeV} = 26,2 \text{ MeV} \quad (2.40)$$

Es wurden insgesamt vier Protonen unter Zuhilfenahme der schwachen und starken Wechselwirkung zu Helium fusioniert. Der Energiegewinn pro Proton beträgt damit:

$$\Delta E(\text{Proton}) = 6,55 \text{ MeV} \quad (2.41)$$

Es gibt jedoch mehrere verschiedene Prozesswege um von $4p$ auf ${}_{2}^{4}\text{He}$ zu kommen, die in Abb. 2.6 und Abb. 2.7 gezeigt sind.

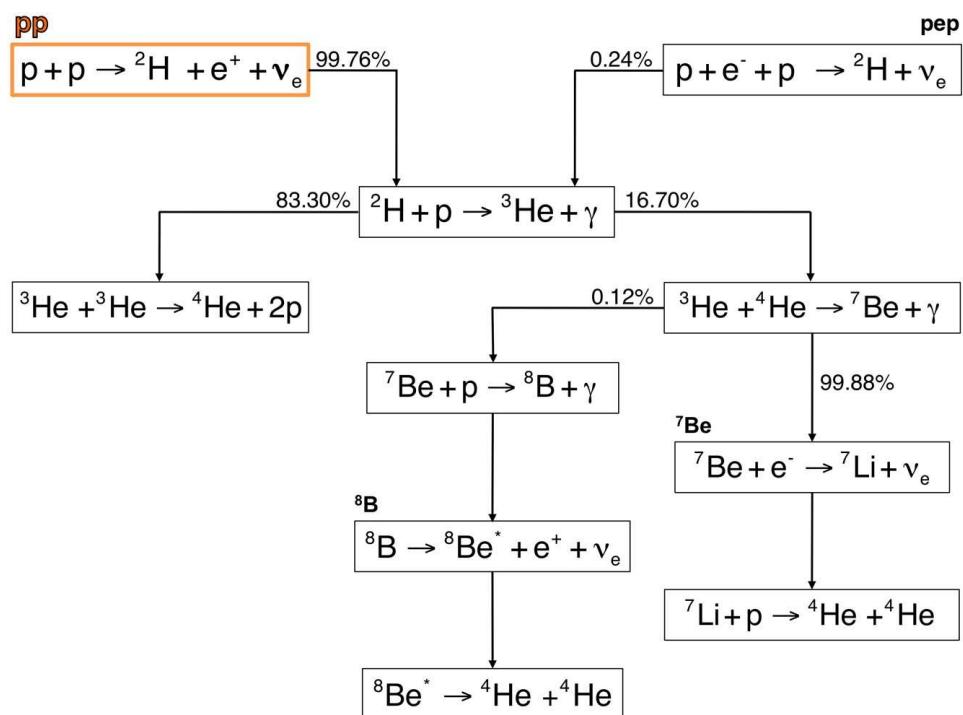


Abb. 2.6.

Ebenso möglich ist eine Fusionskette, die über die Elemente Kohlenstoff, Stickstoff und Sauerstoff läuft. Dieser sogenannte CNO-Zyklus verwendet verschiedene Elemente, um ebenfalls vier Protonen zum Endprodukt Helium zu fusionieren.

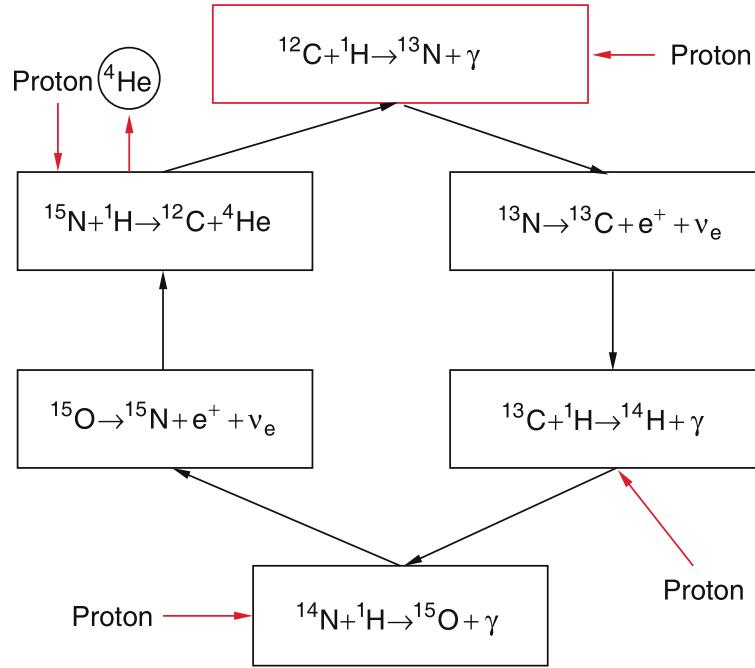


Abb. 2.7.

2.5.2. Fusionsprozesse schwererer Elemente

Wenn der Wasserstoffvorrat zu Helium fusioniert ist, erlischt das nukleare Brennen. Nur falls der Kern des Sterns weiter kollabiert und dabei die Temperatur auf $T \sim 10^8 \text{ K}$ ansteigt, kommt es zur Fusion von Heliumkernen, dem sogenannten Helium-Brennen:



1 kg ${}_{2}^{4}\text{He}$ freigegebene Energie entspricht ca. 1/10 der Energie von 1 kg ${}_{1}^{1}\text{H}$.

Steigt die Temperatur in ausreichend massiven Sternen am Ende einer nuklearen Brennphase genügend an, entsteht die nächste Brennstufe.

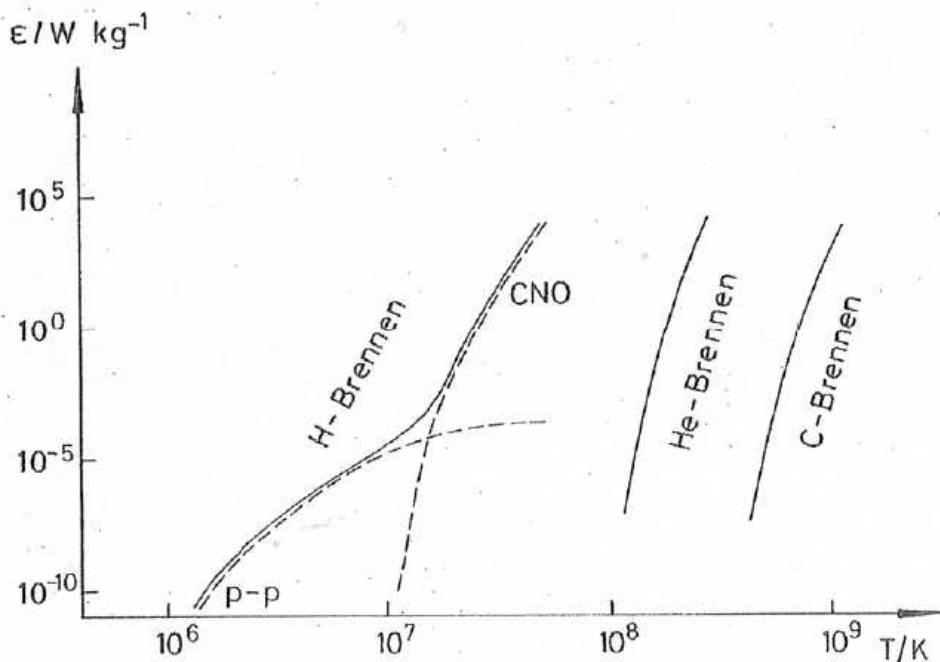


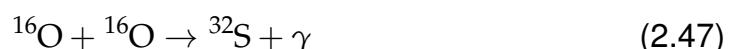
Abbildung 7-3: Energieerzeugungsraten ϵ in Abhängigkeit von der Temperatur T für verschiedene nukleare Brennen. Dabei sind für die Konzentrationen der brennenden Elemente und für die Dichte typische Werte in Sternzentren angesetzt.

Abb. 2.8.

Bei Temperaturen von $T = 5 - 10 \cdot 10^8$ K entsteht Kohlenstoffbrennen:



Mit Temperaturen von $T \geq 1,4 \cdot 10^9$ K startet Sauerstoffbrennen:



Temperaturen von $T \geq 2 \cdot 10^9$ K ermöglichen Siliziumbrennen, bei dem Eisenkerne entstehen. Dieses ist die letzte Brennstufe, da weitere Fusionsprozesse keinen Energievorteil bringen (Abb.2.4).



Sehr massive Sterne zünden also die verschiedenen Fusionsprozesse, wobei eine Zwiebelschalen-Struktur der verschiedenen Elemente entsteht:

2. Sterne

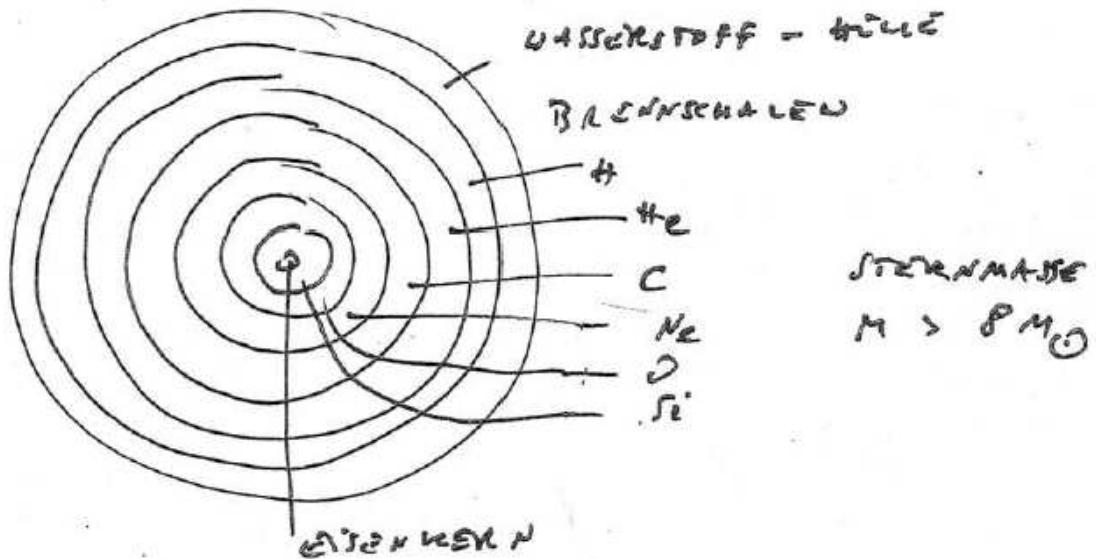


Abb. 2.9.

2.6. Helligkeit von Sternen

Wir unterscheiden im Folgenden scheinbare und absolute Helligkeiten.

2.6.1. Scheinbare Helligkeiten

Bereits Hipparchos (150 v. Chr.) hat Sterne in sechs Größenklassen bezüglich ihrer Helligkeit eingeteilt:

Klasse	Helligkeit
1	hellste Sterne
:	:
6	gerade noch sichtbare Sterne

Tab. 2.1.

Intensitätsunterschiede werden von unserem Auge logarithmisch wahrgenommen. Daher werden die Helligkeiten auf einer „**Magnitudenskala**“ beschrieben, die über den Logarithmus ihrer Intensität I definiert ist.

Den Vergleich der Helligkeiten m_1 und m_2 zweier Sterne, führen wir auf den Logarithmus Ihres Intensitätsverhältnisses zurück:

$$m_1 - m_2 = -2,5 \cdot \log_{10} \left(\frac{I_1}{I_2} \right) \quad (2.50)$$

Der Faktor $-2,5$ ergibt ungefähr die von Hipparchos vorgegebene Skala. Wichtig zu merken ist:

Je kleiner die Magnitude m ist, desto heller ist der Stern!

Als Bezugspunkt wird einer der hellsten Sterne „Wega“ genommen, ihm wurde $m(\text{Wega}) = 0$ mag zugewiesen. Einige Beispiele für Helligkeiten sind in Tabelle 2.2 aufgeführt.

Objekt	Magnitude m / mag
Polarstern	+ 2,12
Vollmond	-12,5
Sonne	-26,8
Wega (α Lyrae)	0

Tab. 2.2.

2.6.2. Absolute Helligkeiten

Die gemessene Intensität bzw. scheinbare Helligkeit eines Sterns hängt stark von seinem Abstand ab. Absolute Helligkeitswerte M bezieht man daher auf die Entfernung 10 pc und rechnet aus dem Sternabstand r die scheinbare Helligkeit m in die absoluten Helligkeit M um:

$$M = m - 2,5 \log_{10} \left(\frac{r}{10 \text{ pc}} \right)^2 \quad (2.51)$$

$$= m - 5 \lg \left(\frac{r}{10 \text{ pc}} \right) \quad (2.52)$$

Zum Beispiel hat die Sonne die absolute Helligkeit $M = 4,8$.

2.7. Sternspektren

Sternspektren weisen häufig zumindest Ähnlichkeiten mit der Form des Planckschen Strahlungsgesetzes für Schwarzkörperstrahlung auf:

$$u(\nu) d\nu = \frac{8 \pi h \nu^3}{c^3} \cdot \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \cdot d\nu \quad (2.53)$$

Darüber lassen sich Rückschlüsse auf die effektive Temperatur T auf ihrer Oberfläche erzielen. Der Zusammenhang zwischen dieser Temperatur und der Frequenz bzw. Wellenlänge λ_{max} , bei der die spektrale Energiedichte maximal ist, ist im Wienschen Verschiebungsgesetz formuliert:

$$\lambda_{max} \cdot T = const. \quad (2.54)$$

2. Sterne

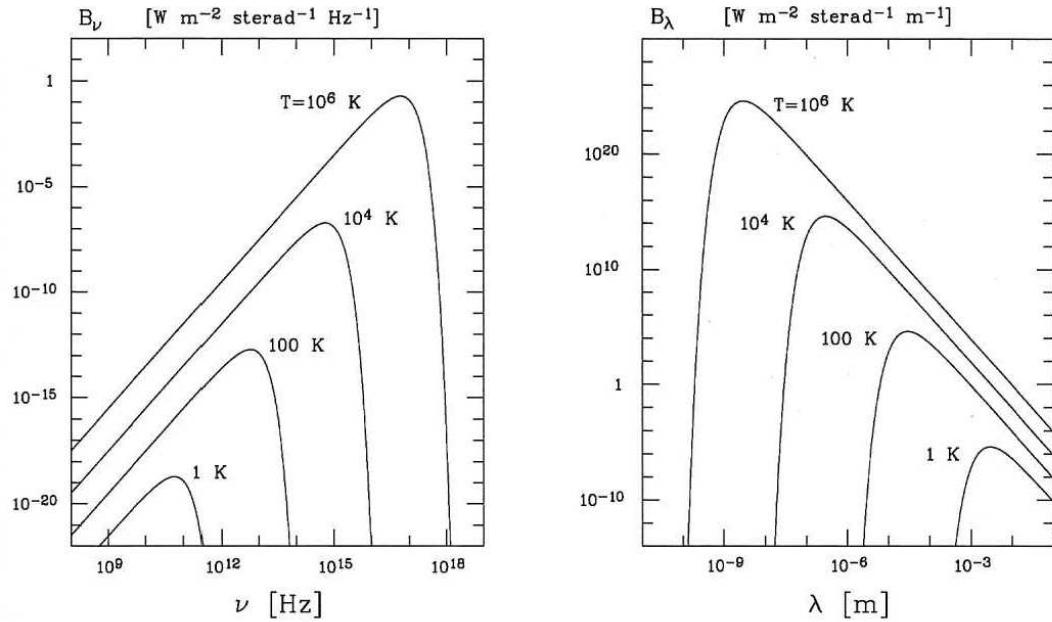


Abb. 2.10.

Wesentlich in Abhängigkeit von den effektiven Temperaturen werden neun **Spektralklassen** definiert **O,B,A,F,G,K,M,L,T**, wobei die Klasse **O** die höchste effektive Temperatur aufweist und **T** die niedrigste.

2.8. Klassifizierung von Sternen

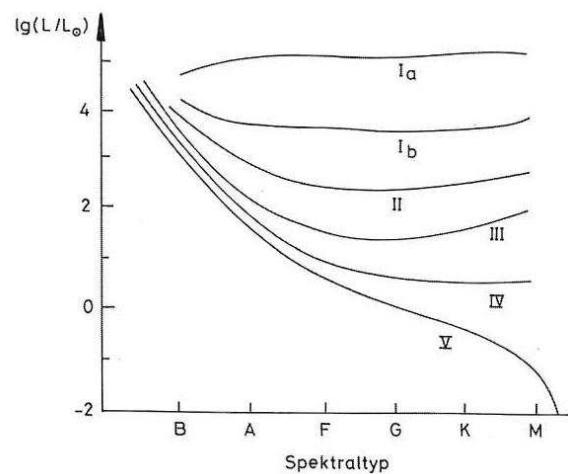
Zur Klassifizierung von Sternen verwendet man einerseits die **Spektralklassen** O,B,A,F,G,K,M,L,T und andererseits sogenannte **Leuchtkraftklassen**, die mit römischen Zahlen bezeichnet werden (Tabelle 2.3). Dabei bezeichnet die Leuchtkraft L die gesamte Strahlungsleistung eines Sterns (Energie pro Zeiteinheit in allen Frequenzen und in alle Richtungen).

Leuchtkraftklasse	Sterntyp
I	Überriesen
II	helle Riesen
III	Riesen
IV	Unterriesen
V	Zwerge (normale Sterne der Hauptsequenz)
VI	Unterzwerge

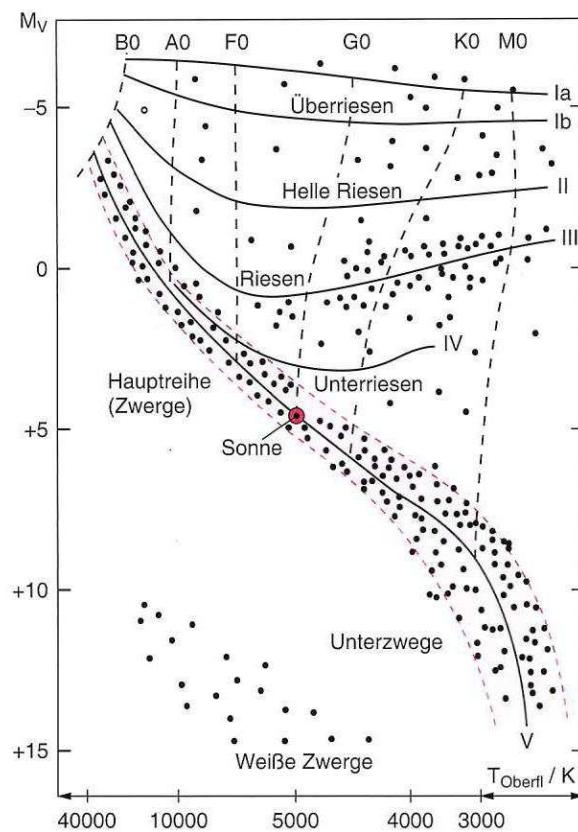
Tab. 2.3.

Die zweidimensionale Einteilung aus Leuchtkraft und effektiver Temperatur wird als **Hertzsprung-Russell-Diagramm** bezeichnet. Varianten des Diagramms

werden ebenfalls verwendet, wobei z.B. die Magnitude anstelle der Leuchtkraft oder der Spektraltyp anstelle der effektiven Temperatur aufgetragen wird (Abb. 2.11).


Abb. 2.11.

Die Hauptreihe der Zwerge enthält die normalen Sterne, zu denen auch die Sonne gehört (Abb. 2.12).


Abb. 2.12.

2. Sterne

Die Lebenszyklen der Sterne hängen stark von ihrer Masse ab. In Abb. 2.13 kann z.B. der Weg der Sonne zum roten Riesen verfolgt werden, bevor dieser zu einem weißen Zwerg übergeht (Kapitel 4.1.3).

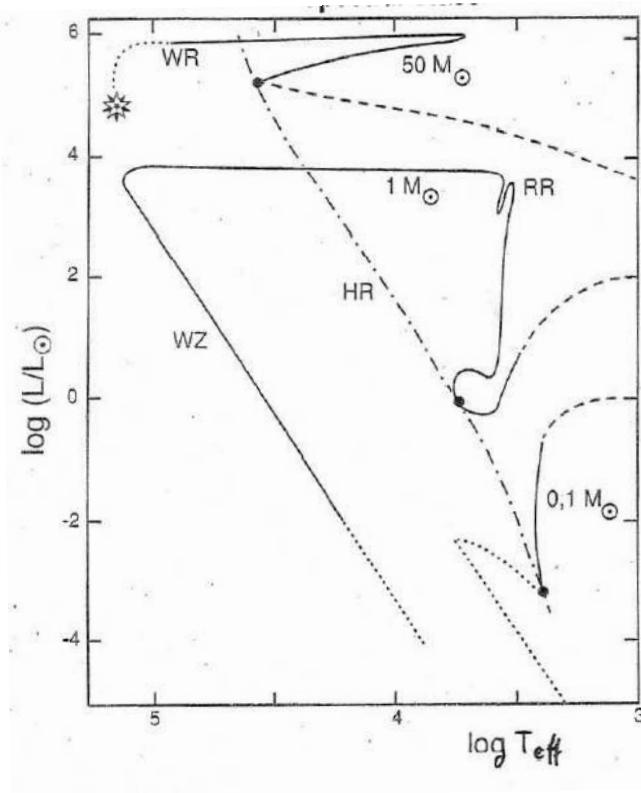


Abb. 2.13.

Schließlich sind folgende Zusammenhänge für Sterne der Hauptreihe interessant: Je größer ihre Masse ist, desto stärker ist ihre Leuchtkraft (linke Abb. 2.14). Ebenso steigt der Radius mit der Masse an.

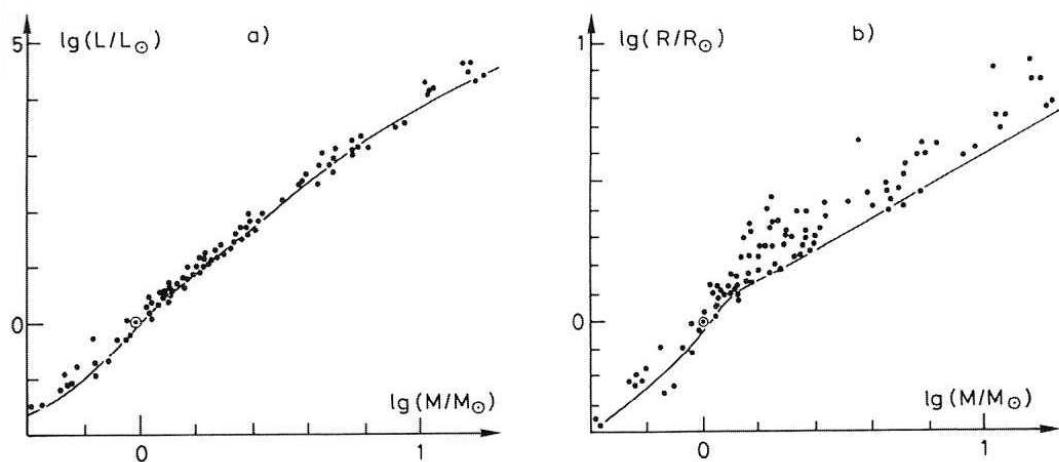


Abb. 2.14.

Das Wichtigste zum Mitnehmen

Sterne 1

- Für das Gleichgewicht einer Materieverteilung unter dem Einfluß der Gravitation ergibt sich folgende allgemeine Formulierung einer **Zustandsgleichung**:

$$\frac{p}{\rho c^2} \approx \frac{R_S}{2 R} \quad (2.13)$$

Sie verbindet Druck p (d.h. Druck gegen den Gravitationskollaps), Radius R und Materiedichte ρ mit dem sogenannten **Schwarzschild-Radius** R_S , der ein Maß für gravitationsbezogene Größenverhältnisse ist:

$$R_S \equiv \frac{2GM}{c^2} \quad (2.12)$$

- In **normaler Sternmaterie** wird der Druck p gegen einen gravitativen Kollaps durch die kinetische Energie bzw. Temperatur im idealen Gasgesetz $pV_{\text{mol}} = N_A kT$ (2.14) aufrecht erhalten, woraus sich die Zustandsgleichung ergibt:

$$\frac{kT}{m_p c^2} = \frac{GM}{R c^2} \quad (2.21)$$

Der Gasdruck p wird von der kinetischen Energie $E \sim kT$ der Gasatome erzeugt, die Gasdichte wird durch die Masse der Atome, im hier typischen Fall von Wasserstoff von deren Protonmasse m_p bestimmt.

- Das **Jeans'sche Kriterium** beschreibt, bei welcher Mindestmasse eine diffuse Wasserstoffwolke in Abhängigkeit der Dichte und Temperatur kollabiert und damit zu einem – oder durch Fragmentation zu mehreren – Sternen werden kann:

$$M > \left(\frac{T}{50 \text{K}} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{\rho}{10^{-20} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}}}} \cdot 10^3 M_\odot \quad (2.55)$$

Ein entsprechender Gravitationskollaps läuft innerhalb kurzer Zeit ab, typisch in Stunden.

- Leuchtkraft** L bezeichnet die gesamte Strahlungsleistung eines Sterns, d.h. Energie pro Zeiteinheit in allen Frequenzen und in alle Richtungen.

Sterne 2

- Die Leuchtkraft der Sterne entsteht durch **Kernfusion**, auch als nukleares Brennen bezeichnet. Oberhalb von Temperaturen $T = 5 \cdot 10^6$ K starten Proton-Proton-Fusionsprozesse, die als Endprodukt Helium erzeugen. Als Energievorteil der p - p -Kette ergeben sich insgesamt 6,55 MeV pro fusioniertem Proton, die überwiegend als elektromagnetische Strahlung emittiert werden.

Wegen der schwachen Wechselwirkungsprozesse bei der Bildung der Neutronen entstehen Neutrinos, die wegen ihrer großen mittleren freien Weglänge einen direkten Einblick in das Sonneninnere ermöglichen.

Kommen höhere Temperaturen zustande, setzen Fusionsprozesse schwererer Kerne ein. Zunächst Helium-Brennen, dann Kohlenstoff-, Sauerstoff- und schließlich Silizium-Brennen. Wegen der Bindungsenergie pro Nukleon wird maximal Eisen produziert.

- Scheinbare Helligkeiten** von Sternen werden auf der Magnitudenskala gemessen, wobei die Helligkeit von Wega (0 mag) als Referenz verwendet wird:

$$m_1 - m_2 = -2,5 \cdot \log_{10} \left(\frac{I_1}{I_2} \right) \quad (2.50)$$

Je kleiner die Magnitude m ist, desto heller ist der Stern!

- Absolute Helligkeiten** werden bei einem (fiktiven) Abstand von 10 pc angegeben und aus der Sterndistanz r und der scheinbaren Helligkeit berechnet:

$$M = m - 2,5 \log_{10} \left(\frac{r}{10 \text{ pc}} \right)^2 \quad (2.51)$$

- Sternspektren reflektieren die effektiven Temperaturen ihrer Oberflächen, die über das Wiensche Verschiebungsgesetz ermittelt werden können. Zur Klassifizierung von Sternen nutzt man zwei Größen:

- **Spektralklassen** O,B,A,F,G,K,M,L,T, die absteigenden Temperaturen entsprechen,
- **Leuchtkraftklassen** mit römischen Zahlen I,... VI, wobei I die Überriesen und V die Zwerge (normale Sterne auf der Hauptreihe) bezeichnen.

Die zweidimensionale Einteilung aus Leuchtkraft und effektiver Temperatur wird als **Hertzsprung-Russell-Diagramm** bezeichnet. Darin können die Sternenleben verfolgt werden. Für normale Sterne der Hauptreihe steigt der Radius und die Leuchtkraft mit der Sternmasse.

3. Die Sonne

In diesem Kapitel stellen wir Eigenschaften der Sonne vor.

3.1. Masse

Das dritte Keplersche Gesetz (1.12) für Planeten folgt aus der Gravitationskraft und der Zentripetalkraft der Kreisbewegung: $F_G = F_Z$.

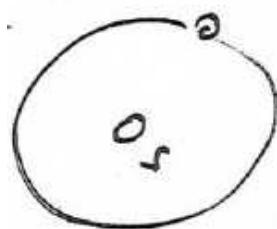


Abb. 3.1.

Dabei erhalten wir eine Beziehung zwischen der Umlaufzeit T der Erde, dem mittleren Abstand $a \sim 1 \text{ AE}$ (1.16) zur Sonne und den Massen M_\odot und M_{Erde} der Himmelskörper. Für die stark unterschiedlichen Massen $M_\odot \gg M_{\text{Erde}}$ können wir die Sonnenmasse M_\odot durch den Umlauf der Erde bestimmen:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{G(M_\odot + M_{\text{Erde}})} a^3 \quad (3.1)$$

$$M_\odot \approx \frac{4\pi^2}{G T^2} a^3 = 1,989 \cdot 10^{30} \text{ kg} \quad (3.2)$$

Eine genauere Angabe der Sonnenmasse beträgt (2022) [19]:

$$M_\odot = 1,988(92) \cdot 10^{30} \text{ kg} \quad (3.3)$$

3.2. Radius

Den Radius der Sonne können wir aus dem Beobachtungswinkel und dem Abstand $a \sim 1 \text{ AE}$ (1.16) zur Sonne berechnen.

3. Die Sonne

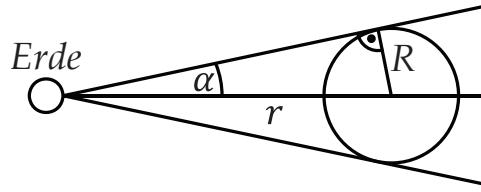


Abb. 3.2.

Mit $\alpha = 15'59''$ erhalten wir

$$\frac{R_{\odot}}{r} = \sin(\alpha) \quad (3.4)$$

$$R_{\odot} = 1AE \cdot \sin(\alpha) \quad (3.5)$$

$$= 6,96 \cdot 10^8 \text{ m} \quad (3.6)$$

Eine genauere Angabe des Sonnenradius ist (2022) [19]:

$$R_{\odot} = 6,963(42)10^8 \text{ m} \quad (3.7)$$

3.3. Mittlere Dichte

Die mittlere Dichte in der Sonne können wir aus der Sonnenmasse M_{\odot} (3.3) und dem Radius R_{\odot} (3.7) der kugelförmigen Sonne mit dem Volumen $V_{\odot} = (4/3)\pi R_{\odot}^3$ berechnen:

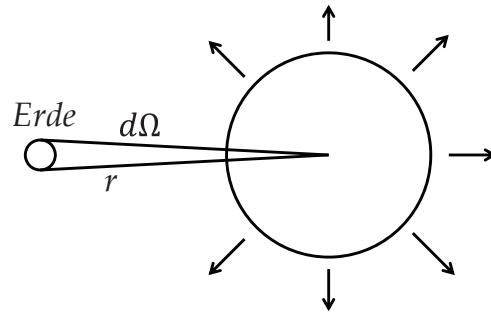
$$\rho = \frac{M_{\odot}}{V_{\odot}} \quad (3.8)$$

$$= \frac{1,989 \cdot 10^{30} \text{ kg}}{\frac{4}{3}\pi (6,96 \cdot 10^8)^3 \text{ m}^3} \approx \frac{2}{\frac{4}{3}\pi \cdot 350} \cdot 10^{30-24} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 1,4 \cdot 10^3 \frac{10^3 \text{ kg}}{\text{m}^3} \quad (3.9)$$

Diese Dichte liegt im Bereich der bekannten Materie: Wasser hat zum Vergleich eine Dichte von 10^3 kg/m^3 .

3.4. Leuchtkraft

Unter der Leuchtkraft L_{\odot} der Sonne versteht man die gesamte Strahlungsleistung, die in den gesamten Raumwinkel 4π abgestrahlt wird.


Abb. 3.3.

Die pro Quadratmeter empfangene Strahlungsleistung auf der Erde wird „Solarskonstante“ genannt:

$$S_k \approx 1,361 \cdot 10^3 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \quad (3.10)$$

Mit ihr können wir die Leuchtkraft der Sonne folgendermaßen ermitteln, wobei wir für den Abstand $r = 1 \text{ AE}$ (1.16) verwenden:

$$L_{\odot} = S_k \cdot 4\pi r^2 \quad (3.11)$$

$$= 1,361 \cdot 10^3 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \cdot 4\pi \cdot (1,496 \cdot 10^{11} \text{m})^2 \quad (3.12)$$

$$= 1,361 \cdot 4 \cdot \pi \cdot 2,238 \cdot 10^{22+3} \text{W} \quad (3.13)$$

$$= 3,83 \cdot 10^{26} \text{W} \quad (3.14)$$

Eine genauere Angabe der Sonnenleuchtkraft ist (2022) [19]:

$$L_{\odot} = 3,828 \cdot 10^{26} \text{W} \quad (3.15)$$

Das Alter des Sonnensystems beträgt etwa 4 – 5 Milliarden Jahre. Mit dem Jahr in Sekunden (1.8) erhalten wir:

$$t = 5 \cdot 10^9 \cdot \underbrace{\pi \cdot 10^7}_{1 \text{Jahr}} \text{s} = 1,6 \cdot 10^{17} \text{s} \quad (3.16)$$

Die gesamte abgestrahlte Energie der Sonne ergibt sich dann zu:

$$E_{\text{total}} = L_{\odot} \cdot t \quad (3.17)$$

$$= 3,8 \cdot 10^{26} \cdot 1,6 \cdot 10^{17} \text{J} \approx 6 \cdot 10^{43} \text{J} \quad (3.18)$$

Der Massenverlust ergibt sich aus $E = \Delta m \cdot c^2$:

$$\Delta m = \frac{6 \cdot 10^{43}}{(3 \cdot 10^8)^2} \frac{\text{J}}{\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}} = \frac{6}{9} \cdot 10^{43-16} \text{kg} = 6,7 \cdot 10^{26} \text{kg} \quad (3.19)$$

3. Die Sonne

Relativ zur Sonnenmasse gesehen ist der Massenverlust durch Kernfusion gering:

$$\frac{\Delta m}{M_{\odot}} = \frac{6,7 \cdot 10^{26}}{2 \cdot 10^{30}} = 3,35 \cdot 10^{-4} \quad (3.20)$$

Beruhigenderweise wird die Sonne weit über unsere Lebenszeit hinaus leuchten.

3.5. Oberflächentemperatur

Das Wellenlängenspektrum der Sonne folgt ungefähr dem Spektrum eines schwarzen Körpers und damit dem Planck-Strahlungsgesetz (2.53) (Abb. 3.4 [19]).

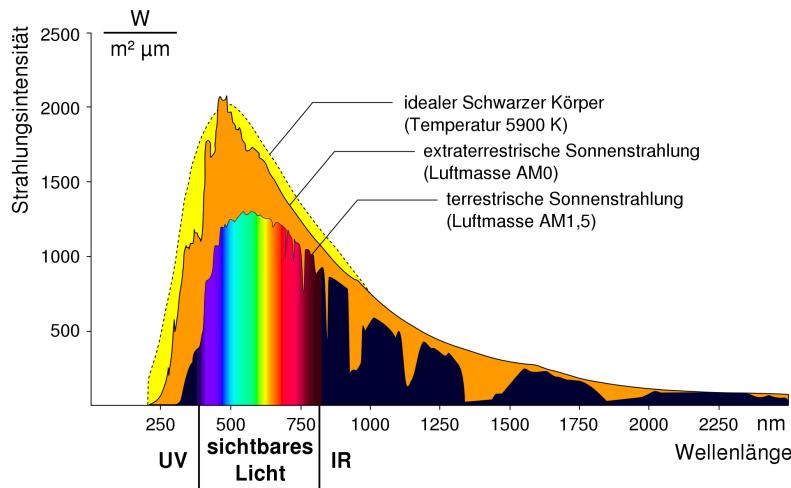


Abb. 3.4.

Das Stefan-Boltzmann Gesetz ist eine Näherung des Planck-Gesetzes und beschreibt die Strahlungsintensität I eines schwarzen Körpers bei einer bestimmten Temperatur T :

$$I = \sigma \cdot T^4 \quad (3.21)$$

Dabei bezeichnet σ die Stefan-Boltzmann-Konstante:

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k}{15h^3 c^2} = 5,67 \dots 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}^4} \quad (3.22)$$

Da die Intensität I eine pro Zeit durch eine Einheitsfläche transportierte Energie beschreibt, verwenden wir die Leuchtkraft der Sonne dividiert durch die Oberfläche der Sonne:

$$I = \frac{L_{\odot}}{4\pi R_{\odot}^2} = \sigma \cdot T^4 \quad (3.23)$$

Damit schließen wir auf die effektive Temperatur T , die das Sonnenspektrum aufgrund seiner Spektralverteilung an der Oberfläche besitzt:

$$T = \left(\frac{L_{\odot}}{4\pi R_{\odot}^2 \sigma} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (3.24)$$

$$= \left(\frac{3,828 \cdot 10^{26}}{4\pi (6,96 \cdot 10^8)^2 5,67 \cdot 10^{-8}} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (3.25)$$

$$= 5770 \text{ K} \quad (3.26)$$

Eine genauere Angabe der Temperatur ist (2022) [19] $T = 5772 \text{ K}$.

Diese Temperatur ist viel geringer als die für die Kernfusion erforderliche Temperatur im Sonneninneren ($T \approx 10^7 \text{ K}$).

3.6. Temperatur in der Sonne

Mit der Zustandsgleichung für normale Sternmaterie (2.21)

$$\frac{kT}{m_p c^2} = \frac{2GM}{2Rc^2} \quad (3.27)$$

erhalten wir eine Temperaturschätzung in der Sonne:

$$T = m_p \frac{G M}{k R} \quad (3.28)$$

$$= 1,4 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \cdot 6,7 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2} \cdot \frac{1}{1,4 \cdot 10^{-23}} \frac{\text{K}}{\text{J}} \cdot 2 \cdot 10^{30} \text{ kg} \cdot \frac{1}{7 \cdot 10^8 \text{ m}} \\ \approx 10^7 \text{ K} \quad (3.29)$$

Die mittlere kinetische Energie der Wasserstoffatome beträgt bei diesen Temperaturen:

$$\langle E_{\text{kin}} \rangle = \frac{3}{2} kT \quad (3.30)$$

$$= \frac{3}{2} \cdot 1,4 \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}} \cdot 10^7 \text{ K} \cdot \frac{1}{1,6 \cdot 10^{-19}} \frac{\text{eV}}{\text{J}} \quad (3.31)$$

$$= \frac{3 \cdot 5 \cdot 1,4}{2 \cdot 1,6} \cdot 10^{-23+6+19} \text{ eV} \quad (3.32)$$

$$\approx 1 \text{ keV} \quad (3.33)$$

Dies bedeutet, dass die Wasserstoffatome mit der Bindungsenergie $E_B = -13,6 \text{ eV}$ ionisiert sind. In der Sonne existiert also ein Plasma aus Protonen und Elektronen.

3. Die Sonne

Um abzuschätzen, wie groß die kinetische Energie der Protonen sein muss, um die Coulombschwelle zu überwinden, verwenden wir das Coulombpotential beim Abstand zweier Protonladungen e von $r = 1\text{fm}$:

$$E_{\text{kin}} \geq E_{\text{pot}} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (3.34)$$

$$= \frac{(1,6 \cdot 10^{-19})^2}{4\pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 10^{-15}} \frac{\text{C}^2 \text{Vm}}{\text{Asm}} \quad (3.35)$$

$$= 0,02 \cdot 10^{-2 \cdot 19+12+15} \frac{1}{1,6 \cdot 10^{-19}} \text{ eV} \approx 1 \text{ MeV} \quad (3.36)$$

Obwohl die mittlere kinetische Energie $E_{\text{kin}} \sim 1\text{keV}$ (3.33) bei weitem nicht hoch genug ist, um die Coulombschwelle der Proton-Abstoßung zu überwinden, kommt es in der Sonne zur Kernfusion. Die Geschwindigkeiten der Protonen folgen einer Boltzmannverteilung, deren Ausläufer zu hohen Geschwindigkeiten die Überwindung der Coulombschwelle ermöglichen (Abb. 3.5).

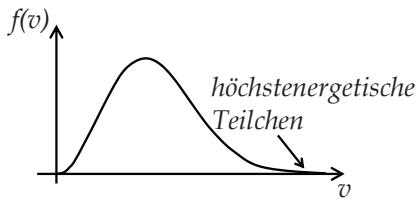


Abb. 3.5.

3.7. Energietransport in der Sonne

Die drei Mechanismen des Wärmetransports sind Konvektion (Bewegung von Materie), Wärmeleitung (Transport durch Materie) und Wärmestrahlung. Strahlung bildet den Hauptbeitrag zum Wärmetransport.

Bei der Kernfusion in der Sonne entstehen hochenergetische Photonen γ mit Energien im MeV-Bereich. Dabei haben die Photonen genügend Energie, um die Massen eines Elektron-Positron-Paares zu erzeugen. Ebenso können die Photonen elastisch mit Elektronen streuen (Comptonstreuung, [19]) und einen Teil ihrer Energie auf die Elektronen übertragen. Die Elektronen können wiederum Photonen abstrahlen (Bremsstrahlung), so dass sich insgesamt ein Transport der Fusionsenergie nach außen ergibt.

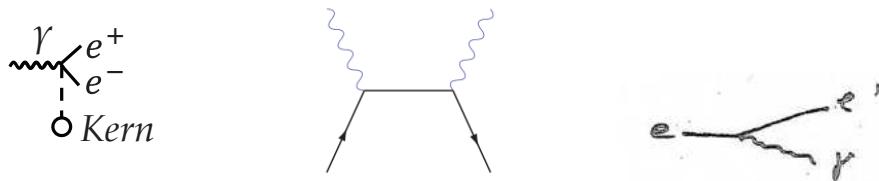


Abb. 3.6.

Insgesamt kann man den Prozess effektiv durch eine Diffusion der Photonen durch das Sonnenplasma beschreiben, wobei die mittlere freie Weglänge der Photonen kurz ist.

Wie lange der Transport dauert, können wir durch die gesamte in der Sonne vorhandene thermische Energie

$$E_{Th} = N \frac{3}{2} kT \quad (3.37)$$

$$= \frac{M_{\odot}}{m_{\text{Proton}}} \frac{3}{2} kT \quad (3.38)$$

$$= \frac{2 \cdot 10^{30}}{1,7 \cdot 10^{-27}} \frac{3}{2} 1,4 \cdot 10^{-23} \cdot 10^7 \text{ J} = 2,5 \cdot 10^{41} \text{ J} \quad (3.39)$$

im Vergleich zur Leuchtkraft $L_{\odot} = 3,828 \cdot 10^{26} \text{ W}$ abschätzen. Die Zeitdauer τ ergibt sich dabei mit $1\pi \cdot 10^7 \text{ s}$ (1.8) zu:

$$\tau = \frac{E_{Th}}{L_{\odot}} = \frac{2,5}{3,8} \cdot 10^{41-26} \text{ s} \approx 6 \cdot 10^{14} \text{ s} \approx 10^7 \text{ Jahre} \quad (3.40)$$

Damit dauert es sehr lange, um die Energie der Kernfusion über Wärmestrahlung nach außen zu transportieren. Lokale Konvektionsprozesse sind im Vergleich sehr viel schneller.

3.8. Häufigkeit der Elemente

Die Photosphäre ist eine dünne Randschicht von ca. 300 km Dicke, von der das sichtbare Licht emittiert wird. Wie wir in Abb. 3.4 gesehen haben, ergibt sich annähernd ein Spektrum wie bei der Strahlung eines Schwarzen Körpers nach dem Planck-Gesetz mit der Temperatur $T = 5772 \text{ K}$.

Im kontinuierlichen Spektrum werden Absorptionslinien beobachtet, die sogenannten „Fraunhofer-Linien“.

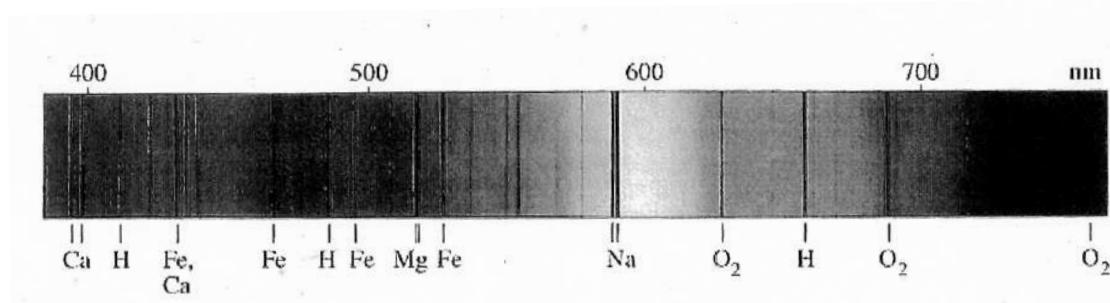


Abb. 3.7.

3. Die Sonne

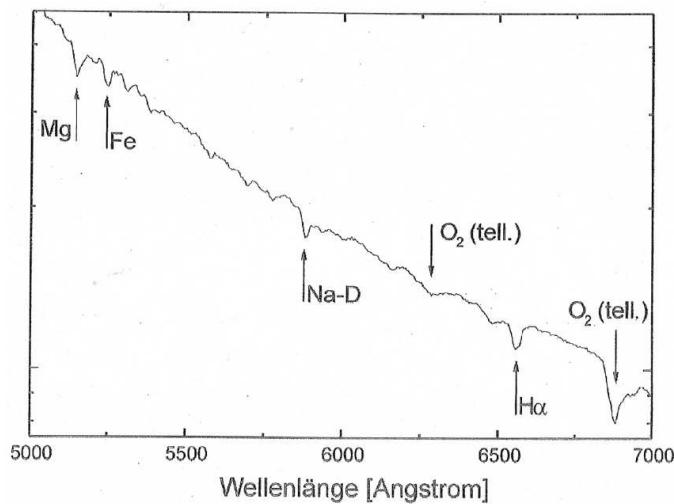


Abb. 3.8.

Sie zeigen die Elemente in der äußeren Photosphäre, wobei der Intensitätsverlust bzw. die Stärke der Absorption die relativen Häufigkeiten anzeigen.

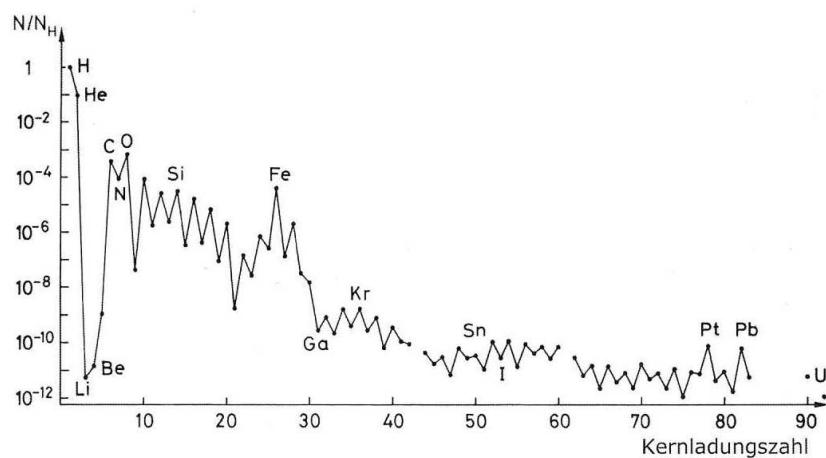


Abb. 3.9.

Das überwiegend häufigste Element ist Wasserstoff, am zweithäufigsten ist Helium. Alle schwereren Elemente folgen mit geringeren Anteilen (Tabelle 3.1).

Element	N / N_H
H	1
He	0,1
O	10^{-3}
:	
Fe	$3 \cdot 10^{-6}$

Tab. 3.1.

Das Wichtigste zum Mitnehmen

Die Sonne

- Die **Sonne** hat folgende Eigenschaften:
 - Masse $M_{\odot} = 1,988(92) \cdot 10^{30} \text{ kg}$
 - Radius $R_{\odot} = 6,963(42) \cdot 10^8 \text{ m}$
 - Mittlere Dichte $\rho = 1,4 \cdot 10^3 \frac{10^3 \text{ kg}}{\text{m}^3}$
 - Solarkonstante (Intensität pro 1 m^2) $S_k \approx 1,361 \cdot 10^3 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$
 - Leuchtkraft (Gesamtintensität) $L_{\odot} = 3,828 \cdot 10^{26} \text{ W}$
 - Alter ca. 4 – 5 Milliarden Jahre
 - Das Spektrum entspricht dem eines schwarzen Strahlers mit der effektiven Temperatur $T = 5772 \text{ K}$.
 - Temperatur in der Sonne 10^7 K
 - Wärmestrahlung dominiert den (langsamem) Energietransport innerhalb der Sonne nach außen ($\tau \approx 10^7 \text{ Jahre}$).
 - Die Absorptionslinien im Sonnenspektrum (Fraunhoferlinien) zeigen als das häufigste Element Wasserstoff (90%) und das zweithäufigste Element Helium (10%) sowie alle schwereren Elementen mit kleinem Anteil.
 - Nachdem der Wasserstoffvorrat der Sonne in einigen Milliarden Jahren aufgebraucht ist, reicht die Temperatur nicht für Fusionsprozesse schwererer Kerne. In der Endphase wird die Sonne zum roten Riesen, bevor dieser in einen weißen Zwerg übergeht (Abb. 2.13 und Kapitel 4.1.3).

4. Weißer Zerg, Neutronenstern, schwarzes Loch

In diesem Kapitel stellen wir Varianten der Zustandsgleichung vor, in denen die gasförmige Materie eines Sterns dem Gravitationsdruck nicht standhalten kann. Durch die Fermi-Energie der Elektronen der atomaren Materie entsteht eine weitere Möglichkeit des Gegendrucks gegen die Gravitation, der zu Sternformen mit sogenannter entarteter Materie führt. Entsteht der Druck durch die Fermi-Energie der Elektronen, sprechen wir von weißen Zwergen. Die daraufliegende Stufe des Gegendrucks ergibt sich durch die Fermi-Energie der Neutronen, die zu Neutronensternen führt, von denen einige als Pulsare beobachtet werden. Gibt es keine physikalische Möglichkeit für die Materie, den Gravitationsdruck zu kompensieren, entsteht ein schwarzes Loch.

Instabile Sternzustände können zu Sternexplosionen führen, die als Novae bezeichnet werden, sehr leuchtstarke Explosionen als Supernovae.

4.1. Zustandsgleichung für entartete Materie

Wenn der Brennstoff für die Kernfusion im Stern ausgeht und die Temperatur nicht ausreicht, um Fusionsprozesse schwererer Kerne in Gang zu setzen, kann der Druck durch die kinetische Energie kT der Atome gegen den Gravitationsdruck nicht aufrecht erhalten werden. Die Sternmaterie kollabiert, bis ein neuer Gegendruck dem Gravitationsdruck standhält. Der nächste mögliche Gleichgewichtszustand wird durch den sogenannten Fermi-Druck der Elektronen erreicht, den wir im Rahmen der Quantenmechanik erklären können. Liegt Materie in dieser Form vor, sprechen wir von **entarteter Materie**.

4.1.1. Fermi-Druck der Elektronen

Wegen des Pauli-Prinzips ist die Packungsdichte für Fermionen beschränkt. In Abb. 4.1 sind mögliche Kernabstände mit d bezeichnet. Für nicht-relativistische Geschwindigkeiten ist die Fermi-Energie E_F der Elektronen

$$E_F = \frac{p_e^2}{2m_e} \quad (4.1)$$

viel größer als die Fermi-Energie der Protonen, da E_F proportional zur inversen Masse ansteigt.

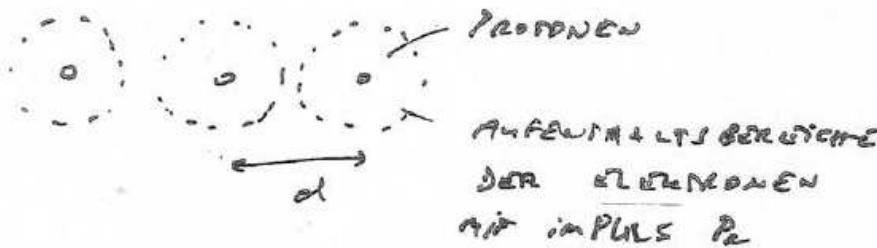


Abb. 4.1.

Wir schätzen den Impuls der Elektronen mit Hilfe der Heisenberg-Unschärfe ab:

$$p_e \cdot d \approx \hbar \quad (4.2)$$

Damit beträgt die Fermi-Energie der Elektronen:

$$E_F = \frac{p_e^2}{2m_e} \approx \frac{\hbar^2}{2m_e d^2} \quad (4.3)$$

Beispiel 4: Fermi-Energie nicht-relativistischer Elektronen

Wählen wir eine atomare Gittergröße $d = 10^{-9}$ m, so erhalten wir als Fermi-Energie der Elektronen nicht-relativistische Energien:

$$\begin{aligned} E_F &= \frac{\hbar^2 c^2}{2m_e c^2 d^2} \\ &= \frac{(0,2 \cdot 10^9 \text{ eV} \cdot 10^{-15} \text{ m})^2}{2 \cdot 0,5 \cdot 10^6 \text{ eV} (10^{-9})^2 \text{ m}^2} = 0,04 \cdot 10^{18-30+6+18} \text{ meV} = 40 \text{ meV} \end{aligned} \quad (4.4)$$

Beispiel 5: Fermi-Energie relativistischer Elektronen

Verkleinern wir den Abstand d auf die Compton-Wellenlänge des Elektrons und schätzen den Elektronimpuls mit der Beziehung von de Broglie

$$p_e \cdot \lambda_C \approx h \quad \text{mit} \quad \lambda_C = \frac{\hbar}{m_e c} \approx 2,4 \cdot 10^{-12} \text{ m} \quad (4.5)$$

$$p_e \cdot \frac{h}{m_e c} \approx h \quad \Rightarrow p_e \approx m_e c, \quad (4.6)$$

dann ist die Fermi-Energie der Elektronen bereits relativistisch:

$$E_F = \sqrt{p_e^2 c^2 + m_e^2 c^4} \approx p_e c \quad (4.7)$$

$$= m_e c^2 = 0,5 \text{ MeV} \quad (4.8)$$

4. Weißer Zwerg, Neutronenstern, schwarzes Loch

Die Dichte des Materials beträgt beim Abstand d der Compton-Wellenlänge des Elektrons $d = \lambda_C$ (4.5):

$$\rho_c = \frac{m_p}{\lambda_C^3} \quad (4.9)$$

$$\approx 1,7 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \frac{1}{(2,4)^3 \cdot 10^{-36} \text{ m}^3} \approx 10^8 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \quad (4.10)$$

Im Folgenden verwenden wir ρ_c als kritische Dichte, um den Übergang zwischen nicht-relativistischen und relativistischen Elektronenergien zu beschreiben. Die Dichte ρ_c ist sehr viel größer als unsere üblichen Materialdichten von $10^3 - 10^4 \text{ kg/m}^3$.

4.1.2. Zustandsgleichung

Wir kommen nun auf die allgemeine formulierte Zustandsgleichung für Materie unter dem Einfluss der Gravitation zurück (2.13):

$$\frac{p}{\rho c^2} \approx \frac{R_S}{2 R} \quad (2.13)$$

Da der Gasdruck der Sternmaterie nach dem Ende des nuklearen Brennens gegen den Gravitationskollaps nicht mehr ausreicht, soll nun die Fermi-Energie der Elektronen den Gleichgewichtsdruck p gegen die Gravitation erzeugen. Anstelle des kinetischen Energieterms kT in der Zustandsgleichung für ideale Gase (2.19) setzen wir die Fermi-Energie ein:

$$\frac{p}{\rho c^2} = \frac{E_F}{m_p c^2} \quad (4.11)$$

Hier wird Druck durch die Fermi-Energie E_F der Elektronen erzeugt, während die Dichte ρ weiterhin durch Protonen dominiert ist.

Damit erhalten wir eine Zustandsgleichung für die **entartete Materie**:

$$\frac{E_F}{m_p c^2} = \frac{R_S}{2 R} \quad (4.12)$$

Im Folgenden untersuchen wir die Massenansammlung der entarteten Materie als Funktion ihrer Dichte ρ . Dabei unterscheiden wir mit Hilfe der kritischen Dichte ρ_c (4.9), ob nicht-relativistische Fermi-Energien ($\rho < \rho_c$) oder relativistische Fermi-Energien ($\rho > \rho_c$) vorliegen.

Nicht-relativistische Fermi-Energie

Für kleine Dichten $\rho < \rho_c$ im Vergleich zur kritischen Dichte setzen wir in das Verhältnis von Fermi-Energie zu Dichte (4.11) die nicht-relativistische Fermi-Energie E_F (4.3) ein. Damit suchen wir Ausdrücke, die – soweit möglich – nur

4.1. Zustandsgleichung für entartete Materie

von der Dichte $\rho = m_p/d^3$ und der kritischen Dichte $\rho_c = m_p/\lambda_C^3$ (4.9) abhängen:

$$\frac{p}{\rho c^2} = \frac{E_F}{m_p c^2} \quad (4.13)$$

$$= \frac{\hbar^2}{2m_e d^2} \frac{1}{m_p c^2} \cdot \frac{m_e}{m_e} \left(\frac{m_p}{m_p} \right)^{2/3} \quad (4.14)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{m_e}{m_p} \underbrace{\frac{\hbar^2}{m_e^2 c^2} \frac{1}{m_p^{2/3}}}_{=\frac{1}{\rho_c^{2/3}}} \underbrace{m_p^{2/3} \frac{1}{d^2}}_{=\rho^{2/3}} \quad (4.15)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{m_e}{m_p} \left(\frac{\rho}{\rho_c} \right)^{\frac{2}{3}} \quad (4.16)$$

Relativistische Fermi-Energie

Für große Dichten $\rho > \rho_c$ setzen wir in das Verhältnis von Fermi-Energie zu Dichte (4.11) die relativistische Fermi-Energie E_F (4.7) ein. Auch hier suchen wir einen Ausdruck, der von der Dichte $\rho = m_p/d^3$ und der kritischen Dichte $\rho_c = m_p/\lambda_C^3$ (4.9) abhängt. Dafür verwenden wir wieder die Heisenbergsche Unschärfe $p_e \cdot d \approx \hbar$ (4.2):

$$\frac{p}{\rho c^2} = \frac{E_F}{m_p c^2} = \frac{p_e c}{m_p c^2} \quad (4.17)$$

$$= \frac{1}{m_p c} \frac{\hbar}{d} \quad (4.18)$$

$$= \frac{1}{m_p c} \hbar \left(\frac{\rho}{m_p} \right)^{1/3} \cdot \left(\frac{1}{\rho_c} \cdot m_p \frac{m_e^3 c^3}{\hbar^3} \right)^{1/3} \quad (4.19)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \frac{m_e}{m_p} \left(\frac{\rho}{\rho_c} \right)^{1/3} \quad (4.20)$$

Zusammenhang zwischen Fermi-Energie und Dichte

Für nicht-relativistische (4.16) und relativistische (4.20) Fermi-Energien im Vergleich zur Dichte finden wir bis auf einen Faktor π den Unterschied in der Potenz n des Dichteverhältnisses ρ/ρ_c wieder:

$$\frac{p}{\rho c^2} = \frac{m_e}{m_p} \left(\frac{\rho}{\rho_c} \right)^{n/3} \begin{cases} n = 2 & \rho < \rho_c \\ n = 1 & \rho > \rho_c \end{cases} \quad (4.21)$$

Diese Verhältnisse sind im Dichtebereich

$$10^4 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} < \rho < 10^{13} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \quad (4.22)$$

anwendbar [2].

4. Weißer Zwerg, Neutronenstern, schwarzes Loch

4.1.3. Weißer Zwerg

Unser Ziel ist jetzt, die Masse M eines Sterns aus entarteter Materie in Abhängigkeit seiner Dichte ρ zu berechnen. Dafür nutzen wir die Zustandsgleichung (2.13). Für den Gleichgewichtszustand der Fermi-Energie mit dem Gravitationsdruck setzen wir demnach (4.21) zusammen mit dem Schwarzschild-Radius $R_S = 2GM/c^2$ (2.12) ein:

$$\frac{p}{\rho c^2} = \frac{R_S}{2R} \quad (4.23)$$

$$\frac{m_e}{m_p} \left(\frac{\rho}{\rho_c} \right)^{n/3} = 2 \frac{G M}{c^2} \frac{1}{2R} \quad (4.24)$$

Zur weiteren Vereinfachung drücken wir den Radius R durch die Dichte und die Masse aus. Dabei nehmen wir eine kugelförmige Materieansammlung an $M = \rho (4\pi/3)R^3$ an, sodass wir R ersetzen können:

$$R = \left(\frac{3}{4\pi} \right)^{1/3} \left(\frac{M}{\rho} \right)^{1/3} \approx \left(\frac{M}{\rho} \right)^{1/3} \quad (4.25)$$

Damit berechnen wir die Masse in Abhängigkeit der Dichte in (4.24):

$$\frac{m_e}{m_p} \frac{\rho^{n/3}}{\rho_c^{n/3}} = \frac{G M}{c^2} \frac{\rho^{1/3}}{M^{1/3}} \quad (4.26)$$

$$M^{2/3} = \frac{m_e}{m_p} \frac{\rho^{n/3}}{\rho_c^{n/3}} \rho^{-1/3} \frac{c^2}{G} \quad (4.27)$$

$$= \frac{m_e c^2}{m_p G} \frac{\rho^{(n-1)/3}}{\rho_c^{n/3}} \quad (4.28)$$

$$M = \left(\frac{m_e c^2}{m_p G} \right)^{3/2} \frac{\rho^{(n-1)/2}}{\rho_c^{n/2}} \quad (4.29)$$

Wir erhalten zwei Lösungen, eine für niedrige Dichten ($n = 2$) und eine für hohe Dichten ($n = 1$):

$$M = \left(\frac{m_e c^2}{m_p G} \right)^{3/2} \cdot \begin{cases} \sqrt{\rho}/\rho_c & \text{für } \rho < \rho_c \\ 1/\sqrt{\rho_c} & \text{für } \rho > \rho_c \end{cases} \quad (4.30)$$

Während die Masse M unterhalb der kritischen Dichte ρ_c mit steigender Dichte ρ größer wird, bleibt sie oberhalb von ρ_c konstant (Abb. 4.2).

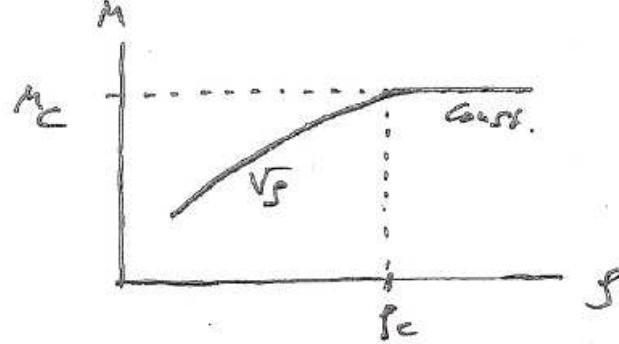


Abb. 4.2.

Sterne, die sich über den Druck der Elektronen im Gleichgewichtszustand befinden, heißen **weiße Zwerge**.

Wir berechnen nun die Masse M_c an der Stelle der kritischen Dichte ρ_c , die durch die Compton-Wellenlänge des Elektrons $\lambda_C = h/(m_e c)$ (4.5) bestimmt wird:

$$\rho_c = \frac{m_p}{\lambda_C^3} \quad (4.31)$$

$$= m_p \frac{m_e^3 c^3}{h^3} \quad (4.32)$$

Setzen wir die kritische Dichte in die Massenbestimmung (4.30) ein, erhalten wir die sogenannte **Chandrasekhar-Grenze**:

$$M_c = \left(\frac{m_e c^2}{m_p G} \right)^{3/2} \left(\frac{h^3}{m_p m_e^3 c^3} \right)^{1/2} \cdot \left(\frac{m_p}{m_p} \right)^{3/2} \quad (4.33)$$

$$= (2\pi)^{3/2} \underbrace{\left(\frac{\hbar c}{G m_p^2} \right)^{3/2}}_{\equiv \alpha_G^{-1}} \cdot m_p \quad (4.34)$$

Der zweite Term enthält fundamentale Konstanten und ist die **Feinstrukturkonstante der Gravitation**. Interessant ist, dass das Plancksche Wirkungsquantum \hbar den Aufbau entarteter Sternmaterie mitbestimmt:

$$\alpha_G = \frac{G m_p^2}{\hbar c} \approx 6 \cdot 10^{-39} \quad (4.35)$$

Die Maximalmasse für einen Gleichgewichtszustand heißt Chandrasekhar-Masse und ist nach einer genaueren (hier nicht gezeigten) Rechnung nur wenig größer als die Sonne:

$$M_c \approx 1,5 M_\odot \quad (4.36)$$

Oberhalb dieser Massengrenzen ist kein stabiler Gleichgewichtszustand eines weißen Zergs möglich.

4. Weißer Zwerg, Neutronenstern, schwarzes Loch

Unterhalb der kritischen Dichte können wir den Zusammenhang zwischen Masse und Dichte weißer Zwerge alternativ über M_c und ρ_c formulieren:

$$M = M_c \cdot \sqrt{\frac{\rho}{\rho_c}} \quad \text{für } \rho < \rho_c \quad (4.37)$$

Die Größe von weißen Zwergen erhalten wir über die kritische Dichte $\rho_c = M_c / R_c^3$. Der Radius R_c beträgt:

$$R_c = \left(\frac{M_c}{\rho_c} \right)^{1/3} \quad (4.38)$$

$$= \left((2\pi)^{3/2} \alpha_G^{-3/2} m_p \frac{\lambda_e^3}{m_p} \right)^{1/3} \quad (4.39)$$

$$= \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha_G}} \lambda_e \quad (4.40)$$

$$\approx \sqrt{\frac{1}{10^{-39}}} 2,4 \cdot 10^{-12} \text{m} \approx 8 \cdot 10^4 \text{km} \quad (4.41)$$

Der Radius R_c ist wenig größer als die Erde, allerdings bei der viel größeren Masse eines Sterns.

Die radiale Größe R des weißen Zwergs mit $R < R_c$ können wir aus den Dichten $\rho = M/R^3$ und $\rho_c = M_c/R_c^3$ entnehmen (4.37):

$$M = M_c \cdot \sqrt{\frac{\rho}{\rho_c}} = M_c \cdot \sqrt{\frac{M}{R^3} \frac{R_c^3}{M_c}} \quad (4.42)$$

$$\frac{M}{M_c} = \frac{R_c^3}{R^3} \quad (4.43)$$

$$R = R_c \left(\frac{M_c}{M} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (4.44)$$

Der Radius R eines weißen Zwergs nimmt mit zunehmender Masse M ab.

4.2. Neutronenstern

Bei noch größeren Dichten

$$10^{13} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} < \rho < 10^{20} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \quad (4.45)$$

ist Fermi-Energie der Elektronen so groß, dass inverser Beta-Zerfall stattfindet [2]:



Dadurch verschwinden die Elektronen, deren Fermi-Energien dem Gravitationsdruck standgehalten haben. Das heißt, der Stern kollabiert weiter, bis die

Fermi-Energie der Neutronen den Druck gegen den Gravitationskollaps erzeugt. Dieser Zustand des Sterns heißt **Neutronenstern**.

Wegen der größeren Masse der Neutronen (ca. gleich groß wie die Protonmasse) ist die Compton-Wellenlänge der Neutronen viel kleiner:

$$\lambda_n = \frac{h}{m_p c} \approx 1,3 \cdot 10^{-15} \text{ m} \quad (m_n \approx m_p) \quad (4.47)$$

Die kritische Dichte ist dadurch wesentlich höher:

$$\rho'_c = \frac{m_p}{\lambda_n^3} \approx 10^{18} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \quad (4.48)$$

Als Lösungen ergibt sich die Masse als Funktion der Dichte genau wie zuvor in (4.30), außer dass wir statt der Elektronmasse die Neutron- bzw. Protonmasse einsetzen. Die Chandrasekhar-Masse bleibt dieselbe wie in Gleichung (4.34).

$$M(\rho) = \begin{cases} M_c \sqrt{\rho/\rho'_c} & \rho < \rho'_c \\ M_c & \rho > \rho'_c \end{cases} \quad (4.49)$$

Der Radius R_c bei der kritischen Dichte berechnet sich wie für weiße Zwerge (4.40) aus der Compton-Wellenlänge hier der Neutronen und der Feinstrukturkonstanten:

$$R_c = \frac{\lambda_n}{\sqrt{\alpha_G}} \approx 10 \text{ km} \quad (4.50)$$

Neutronensterne sind vergleichsweise sehr klein, aber haben Sonnenmasse! Wie bei den weißen Zwergen (4.44) sinkt der Sternradius mit größer werdender Masse:

$$R = R_c \left(\frac{M_c}{M} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (4.51)$$

4.2.1. Pulsare

Im Jahr 1967 wurden kurze Strahlungspulse bei festen Himmelspositionen mit periodischen Zeitabständen T von 1 ms...4 s entdeckt, die als „Pulsare“ bezeichnet werden. Die Pulsdauer liegt bei ca. 5% der Periode T (Abb. 4.3) [13].

4. Weißer Zerg, Neutronenstern, schwarzes Loch

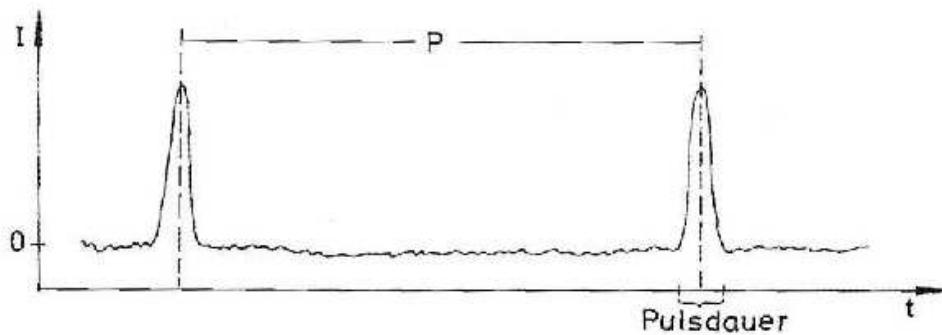


Abb. 4.3.

Die Perioden nehmen mit einer Zeitkonstanten ab.

Beispiel 6: Pulsar

Der Pulsar CP 1919 hat folgende Eigenschaften:

$$\text{Periode} \quad T = 1,33731109 \text{ s}$$

$$\text{Abnahme der Periode} \quad \frac{dT}{dt} = (1,1 \pm 0,5) \cdot 10^{-15}$$

Innerhalb eines Jahres beträgt die Abnahme der Periode $\Delta T = 10^{-15} \cdot \pi \cdot 10^7 \text{ s} \approx 30 \text{ ns}$, was gut messbar ist.

Im Folgenden argumentieren wir, dass es sich um rotierende Neutronensterne handelt, die in einer bestimmten Richtung Strahlung emittieren. Eine rotierende homogene Kugel besitzt das Trägheitsmoment J , die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$, den Drehimpuls \vec{L} und die Rotationsenergie E_{rot} (Abb. 4.4):

$$J = \frac{2}{5}MR^2 \quad (4.52)$$

$$\vec{L} = J\vec{\omega} \quad (4.53)$$

$$E_{\text{rot}} = \frac{1}{2}J\omega^2 \quad (4.54)$$

Die Tangentialgeschwindigkeit an der Kugeloberfläche beträgt maximal

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{R}. \quad (4.55)$$

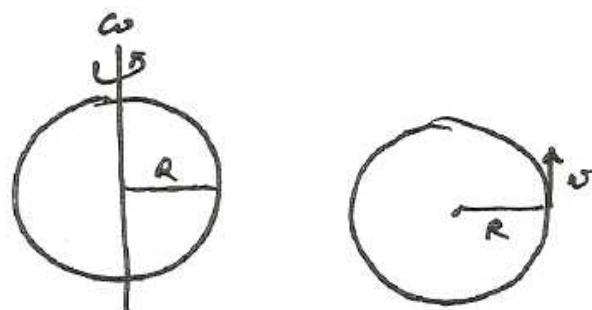


Abb. 4.4.

Materie auf der Kugeloberfläche rotiert höchstens mit der Lichtgeschwindigkeit $v = c$. Bei einer Periode von z.B. $T = 2 \text{ ms}$ kann der Kugelradius R wegen $\omega = 2\pi/T$ nicht größer sein als:

$$R_{max} = \frac{c}{\omega} = \frac{cT}{2\pi} \quad (4.56)$$

$$\approx \frac{3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 2 \cdot 10^{-3} \text{s}}{2\pi} \approx 10^5 \text{ m} = 100 \text{ km} \quad (4.57)$$

Nur Neutronensterne haben genügend kleine Radien, sie können die Pulsare bilden.

Um einen Eindruck der Rotationsenergie für Neutronensterne zu erhalten, nehmen wir als Beispiel die zweifache Sonnenmasse $M = 2 \cdot M_\odot$, den Radius $R = 10 \text{ km}$ und die Periodendauer $T = 2 \text{ ms}$:

$$E_{rot} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} \cdot 2 M_\odot R^2 \left(2\pi \frac{1}{T} \right)^2 \quad (4.58)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 10^{30} \text{ kg} \left(10^4 \right)^2 \text{ m}^2 \frac{4\pi^2}{4 \cdot 10^{-6} \text{ s}} \quad (4.59)$$

$$= 8 \cdot 10^{44} \text{ J} \approx 10^{45} \text{ J} \quad (4.60)$$

Dass diese Energie groß ist, sehen wir im Vergleich mit der bisher von der Sonne abgestrahlten Energie (3.18):

$$E_{tot} = 6 \cdot 10^{43} \text{ J} \quad (4.61)$$

Weiterhin interessieren wir uns dafür, ob die Umlaufzeiten ungewöhnlich groß sind. Die Sonne rotiert ebenfalls, aber langsam mit der Winkelgeschwindigkeit (25 Tage am Äquator):

$$\omega_\odot = 3 \cdot 10^{-6} \frac{1}{\text{s}} \quad (4.62)$$

Würde die Sonne vom Sonnenradius $R_i = R_\odot$ auf Neutronensterngröße $R_f = 10 \text{ km}$ kollabieren, so würde wegen der Drehimpulserhaltung die Winkelgeschwindigkeit von $\omega_i = \omega_\odot$ stark ansteigen auf ω_f . Mit dem Anfangsdrehimpuls L_i und dem finalen Drehimpuls L_f erhalten wir:

$$L_i = L_f \quad (4.63)$$

$$J_i \omega_i = J_f \omega_f \quad (4.64)$$

$$\frac{2}{5} M R_i^2 \omega_i = \frac{2}{5} M R_f^2 \omega_f \quad (4.65)$$

$$\omega_f = \omega_i \cdot \left(\frac{R_i}{R_f} \right)^2 \quad (4.66)$$

$$\approx 3 \cdot 10^{-6} \frac{1}{\text{s}} \left(\frac{7 \cdot 10^8}{10^4} \right)^2 = 3 \cdot 50 \cdot 10^{-6+18-8} \frac{1}{\text{s}} \approx 1,5 \cdot 10^4 \frac{1}{\text{s}} \quad (4.67)$$

4. Weißer Zwerg, Neutronenstern, schwarzes Loch

Die zugehörige Periode ist tatsächlich in der Größenordnung typischer Pulsare und zeigt, dass die hohe Rotationsgeschwindigkeit durch den Gravitationskollaps erreicht werden kann:

$$T_f = \frac{2\pi}{\omega_f} = \frac{2\pi}{1,5} \cdot 10^{-4} \text{ s} = 0,4 \text{ ms} \quad (4.68)$$

Die Gravitationskollaps hat ebenfalls Auswirkungen auf das Magnetfeld des Sterns. Magnetfelder werden durch Teilchenströme erzeugt.

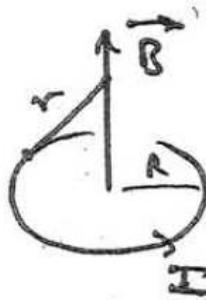


Abb. 4.5.

Auch die Sonne hat lokale Magnetfelder $B = 0,1 - 0,2 \text{ T}$. Ein anfänglicher magnetischer Fluss

$$\Phi_i = \int \vec{B} d\vec{A} \quad (4.69)$$

durch die Außenfläche $A_i = 4\pi R_i^2$ eines Sterns bleibt bei einem Gravitationskollaps erhalten, aber die Fläche verkleinert sich auf $A_f = 4\pi R_f^2$:

$$B_i \cdot R_i^2 = B_f \cdot R_f^2 \quad (4.70)$$

Verwenden wir wieder das Beispiel der Sonne mit $R_i = R_\odot$, $B_i = B_\odot$ und den Neutronensternradius $R_f = 10 \text{ km}$, so ergibt sich durch den Kollaps ein gigantisches Magnetfeld:

$$B_f = B_i \cdot \left(\frac{R_i}{R_f} \right)^2 \quad (4.71)$$

$$= 0,1 \text{ T} \cdot \left(\frac{7 \cdot 10^8}{10^4} \right)^2 = 50 \cdot 10^{-1+16-8} \text{ T} = 5 \cdot 10^8 \text{ T} \quad (4.72)$$

Die Magnetfeldachse muss dabei nicht mit der Rotationsachse des Neutronensterns zusammenfallen (Abb.4.6).

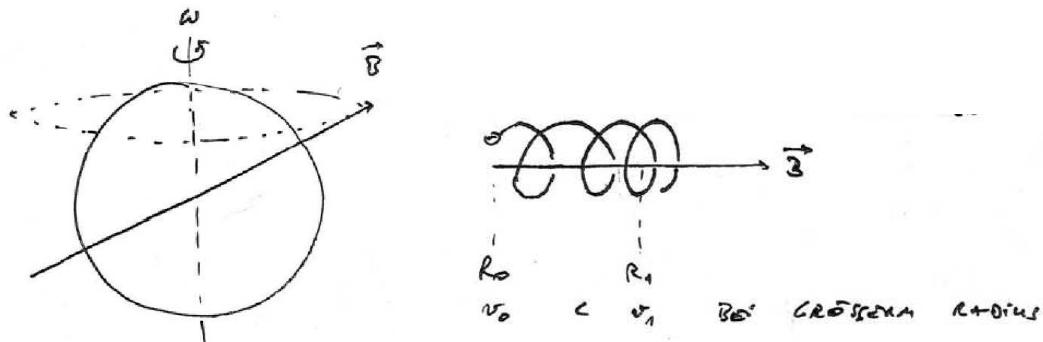


Abb. 4.6.

Ein Fluss von Elektronen nach außen wird durch das Magnetfeld auf Kreisbahnen gezwungen und strahlt Synchrotronstrahlung ab, die je nach Stellung des Pulsars wie ein Leuchtturm Strahlung in Richtung Erde emittiert.

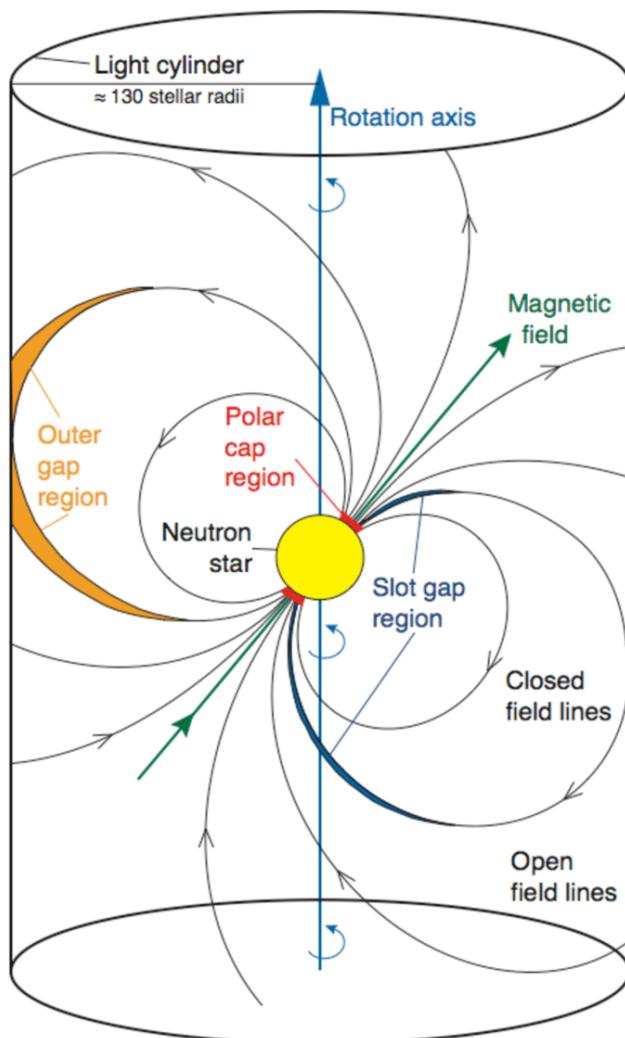


Abb. 4.7.

4.3. Schwarzes Loch

Wenn keiner der bislang besprochenen Mechanismen (thermisch, Fermi-Energien) ausreichend Druck gegen den gravitativen Kollaps eines Sterns erzeugen kann, kollabiert die Materie und es entsteht ein Schwarzes Loch. Dafür sind sehr große Massen erforderlich $M \geq 8 \dots 25 M_{\text{Sonne}}$. Schwarze Löcher emittieren selbst keine Strahlung oder Materie, können aber z.B. durch die Bahnen von Sternen in ihrer Nähe nachgewiesen werden.

In Abbildung 4.8 ist der Verlauf einer Flugbahn am Rand des kollabierenden Sterns durch den Beobachter 1 gezeigt. Ein weit weg positionierter zweiter Beobachter 2 empfängt Lichtsignale, die Beobachter 1 in regelmäßigen Zeitabständen aussendet. Durch die hohe Gravitation neigt sich der Lichtkegel, so dass die Zeit zwischen zwei Lichtpulsen für den Beobachter 2 steigt, bis kein Signal mehr ankommen kann. Da der Prozess für den Beobachter 2 immer langsamer zu werden scheint, spricht man in der russischen Übersetzung anstelle von einem schwarzen Loch vom gefrorenen Stern.

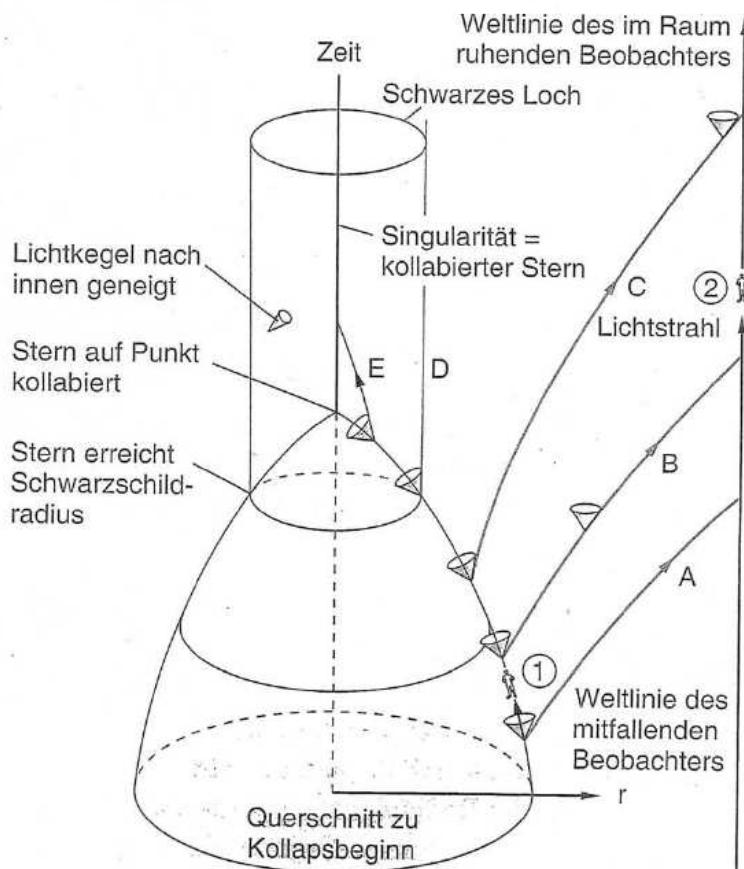


Abb. 11.38. Zeitlicher Verlauf des Kollapses eines Schwarzen Loches in einem x - t -Diagramm (Minkowski-Diagramm). Nach R. und H. Sexl: *Weisse Zwerge – Schwarze Löcher* (Vieweg, Braunschweig 1995)

Abb. 4.8.

4.4. Supernova

Die Explosion eines Sterns wird als Nova bezeichnet, sehr leuchtstarke Sternexplosionen werden entsprechend Supernovae genannt. Sie werden anhand von Linienspektren klassifiziert. Enthält das Spektrum Linien von Wasserstoff, so handelt es sich um eine Supernova vom Typ II. Ist keine Wasserstoff vorhanden, ist es eine Supernova vom Typ I. Besonders interessant sind Supernovae I, die Silizium enthalten. Diese sogenannten Supernovae Ia haben eine berechenbare Leuchtkraft und können als Entfernungsmessung auch für sehr weit entfernte Galaxien verwendet werden.

Die zeitlichen Entwicklungen der Leuchtkraft von Supernovae verschiedener Typen zeigen unterschiedliche Verläufe (Abb. 4.9).

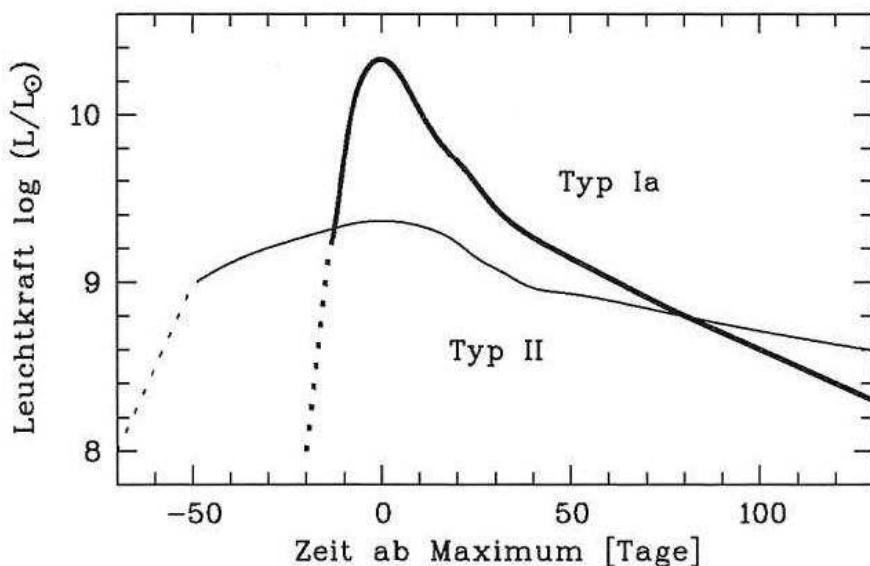


Abb. 4.9.

4.4.1. Supernovae Typ II

Sehr massive Sterne zünden die verschiedenen Fusionsprozesse, wobei eine in Abb. 2.9 gezeigte Zwiebelschalen-Struktur entsteht. Beim Erlöschen des Silizium-Brennens kollabiert der Innenteil des Stern und ein Neutronenstern mit $R \sim 10$ km bleibt zurück. Die nachstürzende Materie prallt daran zurück, wobei die Hülle des Sterns mit Geschwindigkeiten von 10^4 km/s abgeschleudert werden. Die Expansionsgeschwindigkeit ist viel größer als Schallgeschwindigkeit im interstellaren Gas. Eine typische freigesetzte Energiemenge beträgt:

$$E = 10^{45} \text{ J} \quad (4.73)$$

4. Weißer Zwerg, Neutronenstern, schwarzes Loch

Der Energieübertrag auf die Neutrinos aus dem inversen Beta-Zerfall (4.46) ist erheblich. Die kinetische Energie der Hülle ist sehr groß und erreicht bis zu

$$E = 10^{44} \text{ J}. \quad (4.74)$$

Beispiel 7: Supernova

Beispiele für Supernovae sind:

SN1987 A: Bei der Supernova 1987 in der Großen Magellanischen Wolke wurden zusätzlich zur Lichtemission Neutrinos gemessen.

SN1054 : Die Überreste der Supernova 1054 sind als Krebsnebel zu sehen, in dem ein Pulsar als Reststern verblieben ist (Abb. 4.10).

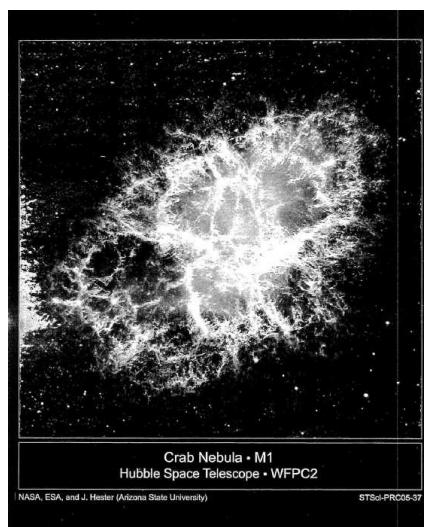


Abb. 4.10.

4.4.2. Supernovae Typ Ia

Für das Verständnis dieser Supernovae ist es zunächst nützlich, wenn wir ein Doppelsternsystem betrachten (Abb. 4.11).

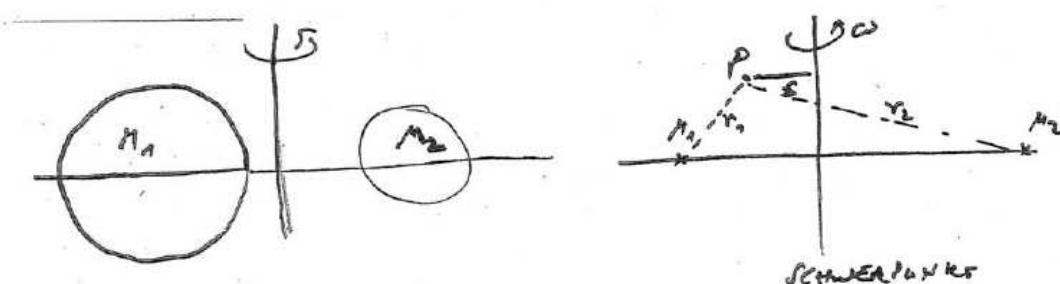


Abb. 4.11.

Zur Vereinfachung stellt man sich nach dem Vorschlag von Roche am Punkt P ein Gasteilchen vor, das die Rotationsenergie $E_{\text{rot}} = 1/2J\omega^2$ mit $J = ms^2$ besitzt. Für das gesamte Potential aus Gravitation und Rotation

$$\Phi = -\frac{GM_1}{r_1} - \frac{GM_2}{r_2} - \frac{1}{2}s^2\omega^2 \quad (4.75)$$

ergeben sich Äquipotentialflächen (Abb. 4.12), auf denen ein Massenstrom fließen kann.

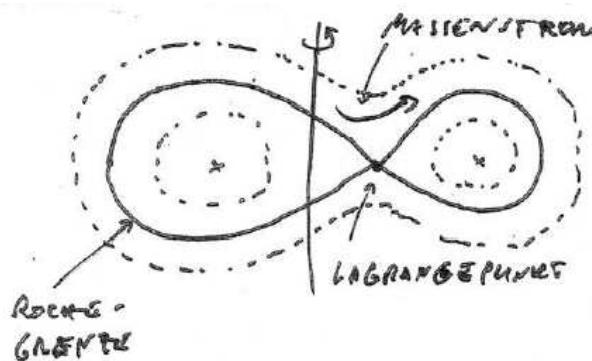


Abb. 4.12.

Eine Supernovae Typ Ia kann man sich wie folgt vorstellen. In Abbildung 4.13 ist ein Doppelsternsystem aus einem Riesenstern und einem weißen Zwerge gezeigt.

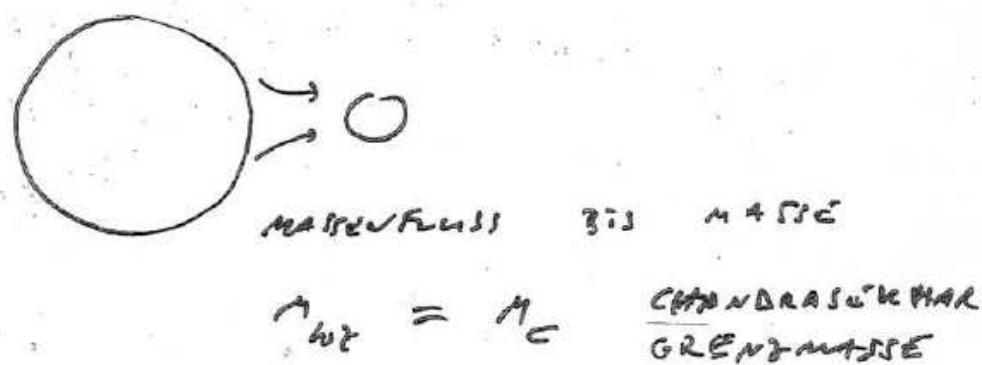


Abb. 4.13.

Zwischen dem Riesenstern und dem weißen Zerg findet ein Massenstrom statt, bei dem der weiße Zerg immer mehr Masse aufnimmt, bis er die Chandrasekhar-Grenze (4.36) erreicht. Hier verlässt der weiße Zerg den Gleichgewichtszustand und kollabiert. Die Temperaturen steigen auf bis zu 10^9 K, so dass Fusionsprozesse einsetzen. Die beobachteten Spektren enthalten Silizium. Im Inneren des weißen Zerags setzt die Neutronisierung ein. Vermutlich

4. Weißer Zwerg, Neutronenstern, schwarzes Loch

entsteht aber kein Reststern, sondern der Stern wird zerrissen, was als Supernova zu sehen ist.

Die freigesetzte Energie kann berechnet werden. Zusammen mit der beobachteten Helligkeit kann man eine gute Entfernungsmessung mit Genauigkeiten bis ca. 5 % erreichen. Die Supernova Typ Ia gehört daher zu den „Standardkerzen“ für Entfernungsmessungen.

Das Wichtigste zum Mitnehmen

Entartete Materie 1

- Das Pauli-Prinzip beschränkt die Packungsdichte von Fermionen. Durch die **Fermi-Energie** von Elektronen bzw. Neutronen in atomarer Materie erfolgt ein Druck gegen die Gravitation, der zu Sternformen mit sogenannter **entarteter Materie** führen kann. Basiert der Fermi-Druck auf den Elektronen, sprechen wir von **weißen Zwergen**. Verschwinden die Elektronen aufgrund des inversen Beta-Zerfalls, wird der Fermi-Druck von den Neutronen erzeugt, hier sprechen wir von **Neutronensternen**.
- Für die Stabilität eines entarteten Sterns ist entscheidend, ob die **Fermi-Energie** der Teilchen **relativistisch** ist oder **nicht-relativistisch**. Einen Grenzbereich können wir über die Compton-Wellenlänge $\lambda_c = h/(mc)$ der Teilchen abschätzen. Für eine **Dichte** ρ mit Abständen $d \ll \lambda_c$ sind die Fermionen nicht-relativistisch. Erreichen sie eine kritische Packungsdichte ρ_c bei $d = \lambda_c$, sind sie relativistisch.
- Mit der **Zustandsgleichung für entartete Materie**

$$\frac{E_F}{m_p c^2} = \frac{R_S}{2 R} \quad (4.12)$$

erhalten wir einen Zusammenhang zwischen der Masse M des Sterns und seiner Dichte ρ mit zwei Lösungen $\rho < \rho_c$ und $\rho > \rho_c$:

$$M(\rho) = \begin{cases} M_c \sqrt{\rho/\rho_c} & \rho < \rho_c \\ M_c & \rho > \rho_c \end{cases} \quad (4.76)$$

Dabei ist M_c die sogenannte **Chandrasekhar-Masse**

$$M_c = (2\pi)^{3/2} \alpha_G^{-3/2} \cdot m_p \quad (4.34)$$

mit der **Feinstrukturkonstanten der Gravitation**

$$\alpha_G = \frac{G m_p^2}{\hbar c} \approx 6 \cdot 10^{-39}. \quad (4.77)$$

Für Massen $M \geq M_c$ ist M unabhängig von der Dichte. Die Chandrasekhar-Masse M_c ist eine Grenzmasse oberhalb derer sich kein stabiler Stern ergibt.

4. Weißer Zerg, Neutronenstern, schwarzes Loch

Entartete Materie 2

- Der **Sternradius** sinkt mit größer werdender Masse der entarteten Materie:

$$R = R_c \left(\frac{M_c}{M} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (4.51)$$

Dabei ist R_c der Radius bei der kritischen Dichte ρ_c :

$$R_c = \frac{\lambda_c}{\sqrt{\alpha_G}} \quad (4.78)$$

Für weiße Zwerge beträgt er $R_c \approx 10^5$ km, für Neutronensterne $R_c \approx 10$ km. Sterne mit entarteter Materie sind vergleichsweise sehr klein, aber haben Sonnenmasse!

- Pulsare** sind rotierende Neutronensterne, die in einer bestimmten Richtung Strahlung emittieren. Ihr Strahlungskegel überstreicht periodisch die Erde. Die Zeitabstände T der Lichtpulse liegen bei 1 ms...4 s, die Pulsdauer liegt bei ca. 5% der Periode T . Pulsare haben sehr hohe Rotationsenergien und hohe Magnetfelder. Typische Werte sind $E_{\text{rot}} \approx 10^{45}$ J und $B = 5 \cdot 10^8$ T. Die Synchrotronstrahlung entsteht durch Elektronen, die durch das Magnetfeld auf Kreisbahnen gezwungen werden.
- Haben weder Elektronen noch Neutronen ausreichend Fermi-Energie, um den Gravitationskollaps aufzuhalten, entsteht ein **schwarzes Loch**. Dafür sind sehr große Massen erforderlich $M \geq 25 M_{\text{Sonne}}$. Schwarze Löcher emittieren selbst keine Strahlung oder Materie, können aber z.B. durch die Bahnen von Sternen in ihrer Nähe nachgewiesen werden.
- Die Explosion eines Sterns wird als **Nova** bezeichnet, sehr leuchtsstarke Sternexplosionen werden entsprechend **Supernovae** genannt.
Supernovae Typ II sind sehr massereiche Sterne mit Zwiebelschalenstruktur, die im Innenbereich einen Neutronenstern bilden, an der die nachstürzende Masse reflektiert.
Supernovae Typ Ia entstehen bei Doppelsternsystemen mit einem Riesenstern und einem weißen Zerg, wobei es einen Massenzufluss zum weißen Zerg gibt, bis die Chandrasekhar Grenzmasse M_c erreicht ist und der weiße Zerg explodiert. Die freigesetzte Energie kann berechnet werden, so dass mit der beobachteten Helligkeit eine gute Entfernungsmessung mit Genauigkeiten bis ca. 5% gelingt (Standardkerze für Entfernungsmessungen).

5. Kosmologie

In der Kosmologie interessieren wir uns für die Entwicklung des Universums. Entscheidend für unser Verständnis des Universums sind die Entdeckungen der Expansion des Universums und der kosmischen Hintergrundstrahlung. Damit eröffnet sich die Möglichkeit für die Zeitmessung auf kosmischen Skalen von den Anfängen bis zu Vorhersagen für die zukünftige Entwicklung des Universums.

Durch immer präzisere Messungen wird offensichtlich, dass das Universum nicht vorwiegend aus leuchtender Materie und Strahlung besteht, sondern erhebliche Anteile dunkler Materie und dunkler Energie besitzt, deren Physik noch unverstanden ist.

5.1. Dunkle Materie

Die Planeten unseres Sonnensystems folgen dem 3. Keplerschen Gesetz, so dass die Rotationsgeschwindigkeit v der Planeten mit dem inversen Radius abnimmt (linke Abb. 5.1).

$$F_{ZP} = F_G \quad (5.1)$$

$$m \frac{v^2}{R} = \frac{GmM}{R^2} \quad (5.2)$$

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R}} \quad (5.3)$$

Die Milchstraße rotiert um ihr Zentrum, das schwarze Loch Sagittarius A* (rechte Abb. 5.1). Die Sonne hat den Abstand $R = 8,1(78)$ kpc vom Zentrum, besitzt die Geschwindigkeit $v = 220$ km/s und benötigt für einen Umlauf 240 Millionen Jahre. Für eine große Zentralmasse im Zentrum einer Galaxie erwarten wir zunächst eine ähnliche Verteilung für die Sterne wie für die Planeten unseres Sonnensystems.

5. Kosmologie

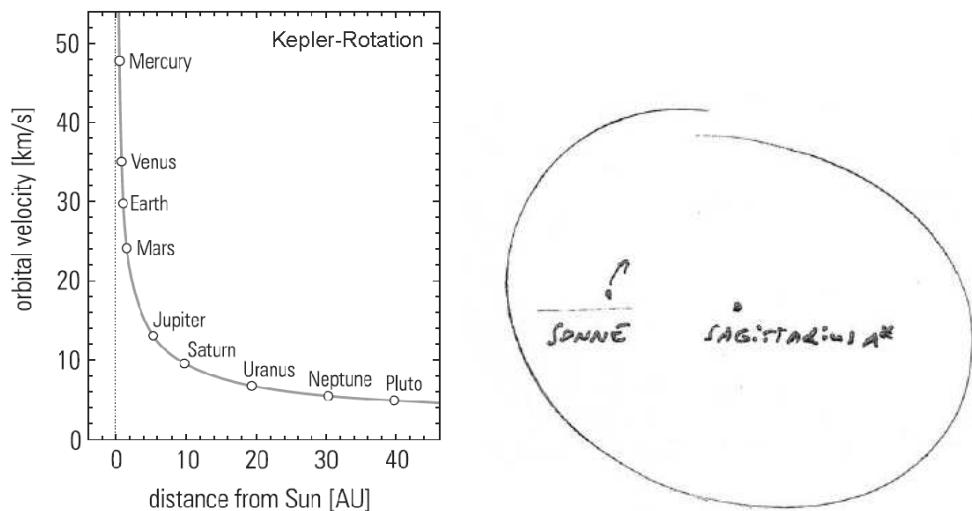


Abb. 5.1.

Allerdings zeigen die Messungen eine flache Geschwindigkeitsverteilung bei großen Abständen vom Zentrum (5.2).

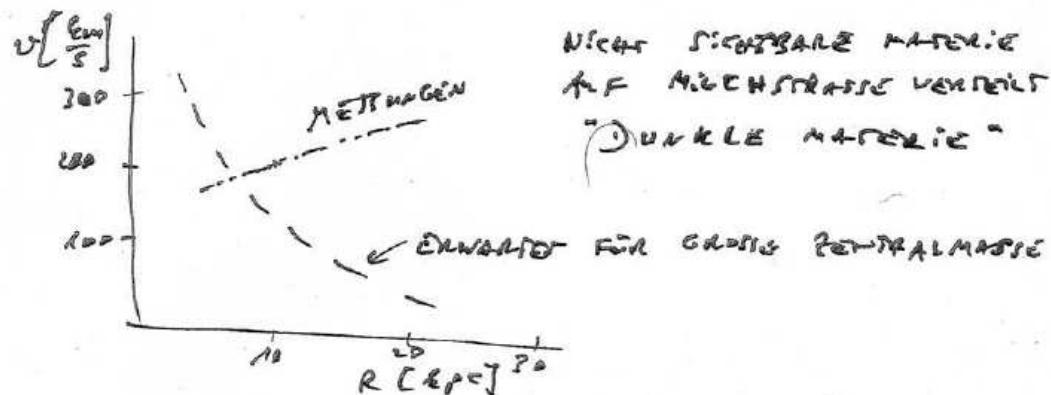


Abb. 5.2.

Solche Geschwindigkeitsverteilungen können an anderen Spiralgalaxien gut gemessen werden (Abb. 5.3). Selbst wenn man die gesamte sichtbare Materie der Sterne berücksichtigt, die in der Abbildung als galactic disk bezeichnet ist, sowie das interstellare Gas, reicht es zur Erklärung der gemessenen Rotationskurve nicht aus. Es muss also eine zusätzliche Komponente vorhanden sein, um die Rotationskurven zu erklären, in der Abbildung als halo bezeichnet. Er besteht aus nicht sichtbarer Materie, der sogenannten dunklen Materie („Dark Matter“), von der wir heute nicht wissen, woraus sie genau besteht. Die erhebliche Menge der dunklen Materie können wir aus der Differenz zwischen dem Rotationsanteil der sichtbaren Materie und der gemessenen Rotationskurve bestimmen.

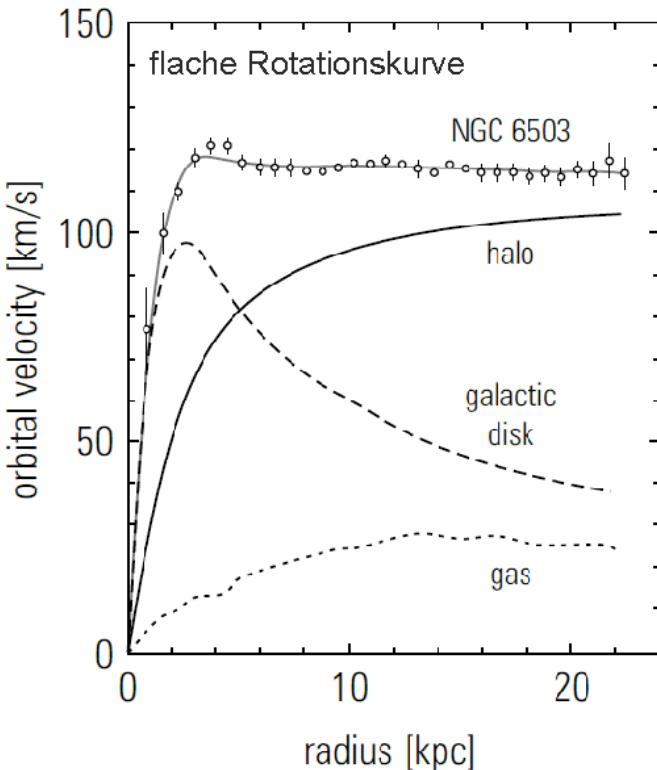


Abb. 5.3.

Es gibt weitere Belege für die Existenz von dunkler Materie wie z.B. bei der Ablenkung von Licht im Gravitationsfeld von Galaxien („Gravitationslinse“). Der Anteil dunkler Materie zur gesamten Materie beträgt 84%, wie man den später erklärten Dichteparametern Ω entnehmen kann.

5.2. Rotverschiebung

Wir kennen zwei Arten von „Rotverschiebungen“ von Licht, die eine Vergrößerung der Wellenlänge λ verursachen. Bei der Gravitationsrotverschiebung wird Lichtenergie für das Entweichen aus einem Gravitationsfeld verbraucht (linke Abb. 5.4). Mit der Geschwindigkeitsrotverschiebung ist der relativistische Dopplereffekt bei sich vom Beobachter B entfernenden Lichtquellen Q gemeint (rechte Abb. 5.4).



Abb. 5.4.

5.2.1. Gravitationsrotverschiebung

Um die Frequenzverschiebung zu verstehen, die einem Lichtstrahl (Photon) mit der ursprünglichen Frequenz ν beim Aufsteigen in einem Gravitationsfeld Φ widerfährt, beziehen wir uns auf das Massenäquivalent des Photons. Die Photonenergie $E = h\nu$ entspricht einer effektiven Masse (nicht zu verwechseln mit einer Ruhemasse, das Photon hat nämlich keine Ruhemasse):

$$m = \frac{E}{c^2} = \frac{h\nu}{c^2} \quad (5.4)$$

Entsprechend diesem Massenäquivalent leistet das Photon beim Aufstieg Arbeit im Gravitationsfeld des Himmelskörpers (linke Abb. 5.4):

$$W = m \cdot \Delta\Phi \quad (5.5)$$

Nach dem Aufstieg hat das Photon die neue Energie E beziehungsweise Frequenz ν' :

$$E' = E - W \quad (5.6)$$

$$h\nu' = h\nu - \frac{h\nu}{c^2} \Delta\Phi \quad (5.7)$$

$$\nu' = \nu \cdot \left(1 - \frac{\Delta\Phi}{c^2}\right) \quad (5.8)$$

Die relative Frequenzverschiebung $\Delta\nu$ beträgt:

$$\Delta\nu = \nu - \nu' \quad (5.9)$$

$$= \nu \cdot \left(1 - \left(1 - \frac{\Delta\Phi}{c^2}\right)\right) \quad (5.10)$$

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{\Delta\Phi}{c^2} \quad (5.11)$$

Um die Größe des Effekts abzuschätzen verwenden wir das Gravitationspotential eines Sterns mit Masse M und Radius R

$$\Phi(R) = -\frac{GM}{R} \quad (5.12)$$

und setzen $\Phi = 0$ bei der Beobachtung des Lichts auf der Erde. Dann beträgt die relative Frequenzverschiebung

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{\nu - \nu'}{\nu} = \underbrace{\frac{GM}{c^2}}_{\equiv R_S/2} \frac{1}{R} = \frac{R_S}{2R} \quad (5.13)$$

mit dem Schwarzschild-Radius:

$$R_S \equiv \frac{2GM}{c^2} \quad (2.12)$$

Wegen des Energieverlusts wird die Frequenz ν verringert. Ausgedrückt durch die Wellenlänge $\lambda = c/\nu$ erhalten wir bei der Beobachtung eine größere Wellenlänge λ' , woraus die Bezeichnung als „Rotverschiebung“ resultiert. Die relative Wellenlängendifferenz wird an vielen Stellen verwendet und mit dem Variablenamen z abgekürzt:

$$z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\lambda' - \lambda}{\lambda} = \frac{R_S}{2R} \quad (5.14)$$

Beispiel 8: Gravitationsrotverschiebung

Für die Erde ist der Effekt der Gravitationsrotverschiebung sehr gering:

$$M_E = 6 \cdot 10^{24} \text{ kg} \quad (5.15)$$

$$R_E = 6 \cdot 10^6 \text{ m} \quad (5.16)$$

$$R_S = 9 \cdot 10^{-3} \text{ m} \quad (5.17)$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{9 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 6 \cdot 10^6} \approx 10^{-9} \quad (5.18)$$

Dagegen ist die Rotverschiebung auf einem Neutronenstern erheblich:

$$M_N = 2 \cdot 10^{30} \text{ kg} \quad (5.19)$$

$$R_N = 10^4 \text{ m} \quad (5.20)$$

$$R_S = 3 \cdot 10^3 \text{ m} \quad (5.21)$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{3 \cdot 10^3}{10^4} = 0.3 \approx \frac{1}{3} \quad (5.22)$$

5.2.2. Rotverschiebung durch Doppler-Effekt

Die Rotverschiebung aufgrund sich entfernender Lichtquellen ist in der rechten Abb. 5.4 gezeigt [5]. Beim nicht-relativistischen Dopplereffekt breitet sich die Welle in einem Medium aus, z. B. Schallwellen in Luft oder Wasserwellen in Wasser.

Lichtwellen breiten sich dagegen im Vakuum mit konstanter Phasengeschwindigkeit c aus, ohne dass dafür ein Medium erforderlich ist. Allerdings gibt es auch hier Frequenzverschiebungen, wenn das Licht in verschiedenen Inertialsystemen beobachtet wird, die sich relativ zueinander mit der Geschwindigkeit v bewegen.

Wir konzentrieren uns auf Bewegungen der Inertialsysteme entlang der direkten Verbindungsgeraden zwischen Quelle und Beobachter. Wir messen Lichtwellen sowohl in einem Inertialsystem S als auch in einem zweiten System S' , das sich mit der Geschwindigkeit v von S weg bewegt (Abb. 5.5). Zum Zeitpunkt $t = t' = 0$ fallen die Ursprünge der beiden Systeme zusammen.

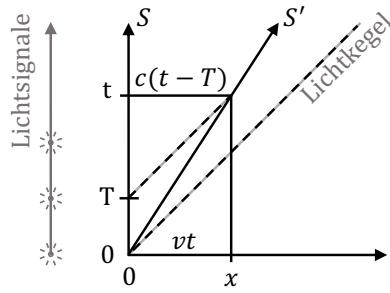


Abb. 5.5.: Raumzeit-Diagramm für das Inertialsystem S und Weltlinie des Inertialsystems S' zur Berechnung der Zeit t für die Ankunft eines bei $t = T$ gesendeten Lichtsignals in S' .

Im System S wird am Ort $x = 0$ zu den Zeiten $t = 0, T, 2T, \dots > 0$ jeweils ein Lichtsignal ausgesendet. Die Sendefrequenz beträgt demnach $\nu = 1/T$. Der Zeitpunkt beim Aussenden des ersten Lichtsignals wird in beiden Systemen gleich bestimmt.

Das zweite Lichtsignal wird erst ausgesendet, wenn das System S' aus Sicht von S schon eine Entfernung vT erreicht hat. Nach welcher Zeit t im System S erreicht das Signal S' ? Wir nutzen dafür einerseits den Lichtkegel, um die Entfernung x von S' bei Ankunft des Lichtsignals zu berechnen (Abb. 5.5, [4]):

$$x = c(t - T). \quad (5.23)$$

Andererseits können wir die Geschwindigkeit v von S' nutzen, um seine Entfernung x beim Eintreffen des Signals zu bestimmen:

$$x = vt \quad (5.24)$$

Durch Gleichsetzen der Entfernungen x erhalten wir die im System S ermittelte Zeit t , bei der das Lichtsignal vom Zeitpunkt T mit Verzögerung bei S' eintrifft. Wir verwenden hierbei $\beta = v/c$, die Geschwindigkeit v des S' -Inertialsystems relativ zur Lichtgeschwindigkeit c :

$$c(t - T) = vt \quad (5.25)$$

$$t(c - v) = cT \quad (5.26)$$

$$t = \frac{T}{1 - \beta} \quad (5.27)$$

Die Zeit zwischen dem ersten und dem zweiten Lichtsignal ist demnach für das System S' um $1/(1 - \beta)$ länger als die Periode T der Lichtblitze.

Zusätzlich gehen die Uhren des bewegten Beobachters im System S' wegen der Zeitdilatation $t = \gamma t'$ langsamer. Seine Zeitmessung für die Periode der

Lichtblitze beträgt mit beiden Effekten zusammen:

$$t' = \frac{t}{\gamma} \quad (5.28)$$

$$= t \sqrt{1 - \beta^2} \quad (5.29)$$

$$= \frac{T}{1 - \beta} \sqrt{(1 + \beta)(1 - \beta)} \quad (5.30)$$

$$= T \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} \quad (5.31)$$

Daher ist die Frequenzmessung im von der Lichtquelle wegbewegten System S' im Vergleich zur ausgesendeten Frequenz $\nu = 1/T$ zu kleineren Frequenzen hin verschoben:

$$\nu' = \nu \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} \quad (5.32)$$

Bewegen sich die Systeme aufeinander zu, so gelten die umgekehrten Vorzeichen und die Frequenz erhöht sich:

$$\nu' = \nu \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} \quad (5.33)$$

Schreiben wir den relativistischen Dopplereffekt für *sich entfernende Lichtquellen mit der Wellenlänge λ der Quelle und der beobachteten Wellenlänge λ'* auf, drehen sich die Vorzeichen ebenfalls. Die relative Wellenlängendifferenz wird häufig mit dem Variablenamen z abgekürzt:

$$z = \frac{\lambda' - \lambda}{\lambda} = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} - 1 \quad (5.34)$$

Für geringe Geschwindigkeiten $v \ll c$ der sich entfernenden Quelle im Vergleich zur Lichtgeschwindigkeit c erhalten wir mit z eine direkte Messung von $\beta = v/c$:

$$z = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} - 1 = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta} \frac{1 + \beta}{1 + \beta}} - 1 = \frac{1 + \beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} - 1 \underset{\beta \ll 1}{\approx} \beta \quad (5.35)$$

Die beobachtete Verschiebung der Wellenlängen bekannter atomarer Spektren ergibt demnach eine direkte Messung der Geschwindigkeit v der Quelle, falls $v \ll c$:

$$z(v \ll c) = \frac{\lambda' - \lambda}{\lambda} = \frac{v}{c} \quad (5.36)$$

5.3. Hubble-Gesetz

Bei der Messung der Rotverschiebungen z (5.36) von Galaxien stellte Hubble 1929 fest, dass sich Galaxien in größerer Entfernung D schneller bewegen. Diese Beobachtung ergab sich für alle Richtungen. Für Galaxien mit $D \geq 40$ Mpc ergibt sich ein linearer Zusammenhang, der mit aktuellen Messdaten in Abb. 5.6 gezeigt ist.

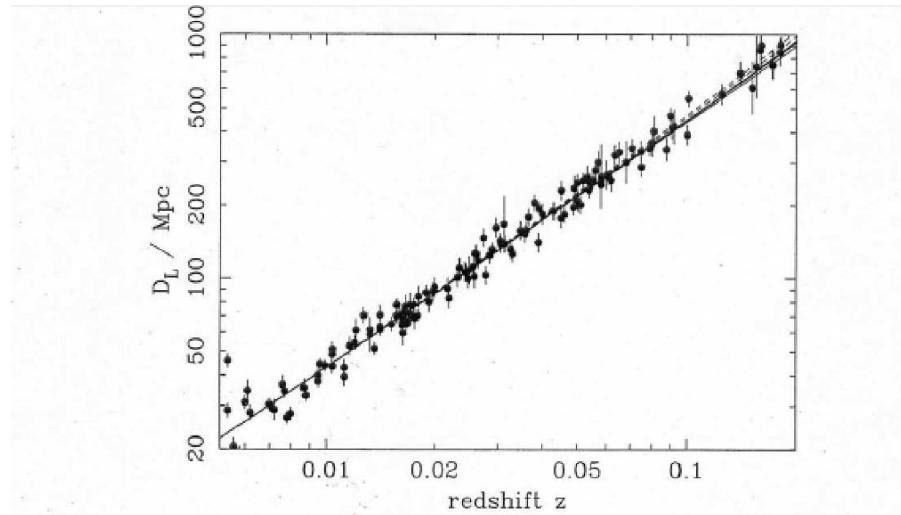


Figure 21.1: The type Ia supernova Hubble diagram [26–30]. The first panel shows that for $z \ll 1$ the large-scale Hubble flow is indeed linear and uniform;

Abb. 5.6.

Aus solchen Messungen ergibt sich die Geschwindigkeit v der Galaxien als Funktion ihrer Entfernung D :

$$D = b \cdot z \quad (5.37)$$

$$= b \cdot \frac{v}{c} \quad (5.38)$$

$$v = \underbrace{\frac{c}{b}}_{\equiv H_0} \cdot D \quad (5.39)$$

Dieses ist das sogenannte **Hubble-Gesetz**

$$v = H_0 \cdot D \quad (5.40)$$

mit dem Hubble-Parameter H_0 , dessen Wert auf die heutige Zeit bezogen

$$H_0 = 70 \pm 3 \frac{\text{km}}{\text{s} \cdot \text{Mpc}} \quad (5.41)$$

beträgt. Es gibt mehrere sehr genaue Messungen, die um diesen Wert herum schwanken.

5.4. Expansion des Universums

Die große Bedeutung des Hubble-Gesetzes (5.40) ist, dass sie die Expansion des Universums anzeigen. Das bedeutet, dass die Raumzeit des Universums sich vergrößert. Stellen wir uns das Leben in einer zweidimensionale Welt auf einer Luftballonoberfläche vor, wie in Abb. 5.7 gezeigt ist. Im Laufe der Zeit wird der Luftballon größer und der Abstand zwischen den beiden Personen wächst.

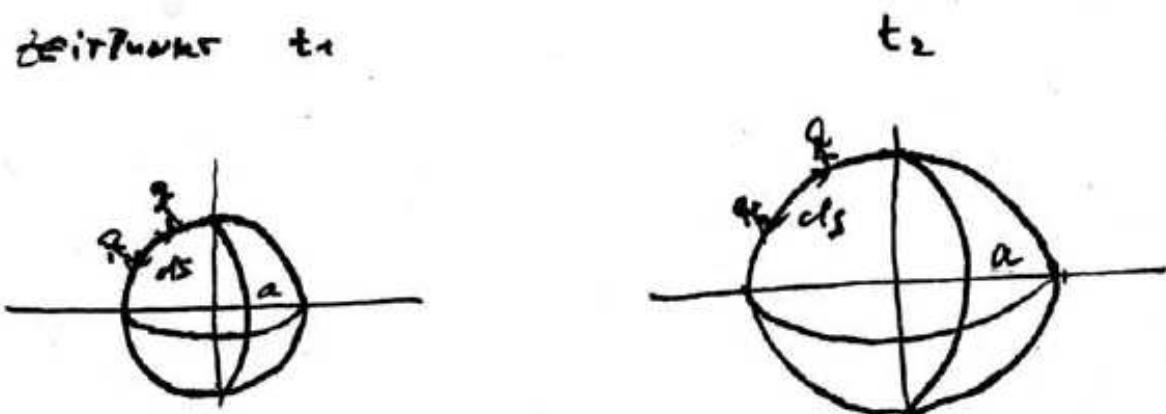


Abb. 5.7.

Den Zeitabhängigkeit des Abstands $ds(t)$ der beiden Personen bei ihren konstanten Winkelkoordinaten θ, φ

$$ds^2(t_1) = a^2(t_1) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (5.42)$$

$$ds^2(t_2) = a^2(t_2) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (5.43)$$

können wir durch einen einzelnen „Skalenparameter“ $a(t)$ erfassen. Er beschreibt nur die Raumeigenschaften, hat aber mit dem Geschehen auf der Oberfläche nichts zu tun.

Auf der Ballonoberfläche gibt es keinen ausgezeichneten Punkt, hier sind alle Punkte gleichwertig. Es gibt also keinen Rand des Ballon-Universums. Allerdings gibt es für jeden Beobachter wegen der begrenzten Lichtgeschwindigkeit einen Ereignishorizont.

In der folgenden Abbildung 5.8 ist die Expansion der Raumzeit in zwei Dimensionen visualisiert. Es gibt keine ausgezeichnete Position, sondern von jeder beliebigen Position werden wir das Hubble-Gesetz beobachten.

5. Kosmologie

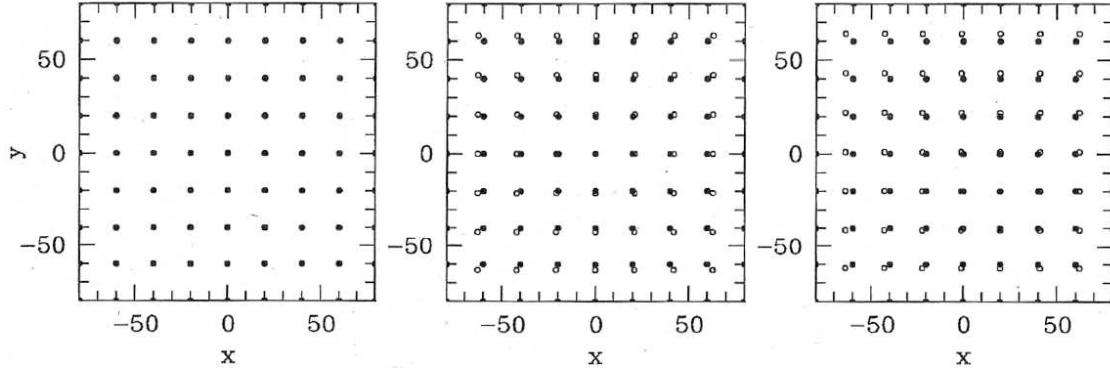


Abbildung 13-1: Zur Ableitung des Hubble-Gesetzes für eine allgemeine Expansion. Die Positionen der „Galaxien“ im linken Bild ändern sich so, dass die Abstände proportional mit der Zeit wachsen. Es ergibt sich $v_r \propto d$ (mittleres Bild). Das gleiche Muster ergibt sich für Beobachter an einem beliebigen anderen Standort (rechts).

Abb. 5.8.

Allgemein formulieren wir für die vierdimensionale Raumzeit den Abstand $r(t)$ der beiden Beobachter beziehungsweise zweier Galaxien zu einem Zeitpunkt t relativ zu einem Zeitpunkt t_0 liegt, durch

$$r(t) = r(t_0) \frac{a(t)}{a(t_0)} \quad (5.44)$$

und führen damit die Veränderung des Abstands direkt auf den zeitabhängigen Skalenparameter $a(t)$ des Raums zurück. Das Hubble-Gesetz (5.40) beschreibt dann ebenfalls einen Zusammenhang zwischen der Expansionsgeschwindigkeit da/dt des Skalenparameters und dem Skalenparameter a . Allgemein kann der Hubble-Parameter H (5.41) von der Zeit abhängen:

$$v(t) = \frac{dr(t)}{dt} = H(t) \cdot r(t) \quad (5.45)$$

$$\frac{r(t_0)}{a(t_0)} \frac{da(t)}{dt} = H(t) \cdot \frac{r(t_0)}{a(t_0)} a(t) \quad (5.46)$$

$$\frac{da(t)}{dt} = H(t) \cdot a(t) \quad (5.47)$$

Die durch die Expansion des Universums erzeugte Rotverschiebung z , die Hubble beobachtete (Abb. 5.6), wird als **kosmologische Rotverschiebung** bezeichnet. Gelegentlich hilfreich ist der Zusammenhang zwischen der Rotverschiebung und dem Skalenparameter a :

$$\frac{a_0}{a(t)} = 1 + z$$

(5.48)

$z = 0$ entspricht der heutigen Situation.

Die Gleichförmigkeit der vierdimensionalen Raumzeit auf großen Längenskalen wird als Postulat formuliert, dem sogenannten **kosmologischen Prinzip**:

Das Universum ist auf großen Skalen homogen und isotrop (Materie, Strahlung)

Damit sind große Abstandsskalen $\mathcal{O}(100 \text{ Mpc})$ gemeint, denn lokal beobachten wir durch die Gravitationswechselwirkungen ausgeprägte Strukturen in Form von Galaxien in Galaxienhaufen. Die kosmische Hintergrundstrahlung ist ein weiteres Beispiel für die Gleichförmigkeit der Raumzeit auf großen Längenskalen (Kapitel 5.6).

5.5. Entwicklung der Raumzeit bei Gravitation

In diesem Kapitel wollen wir verstehen, wie sich Raumzeit unter dem Einfluss der Gravitation entwickelt. Dafür untersuchen wir die Dynamik einer Galaxie, die sich nach dem Hubble-Gesetz von uns entfernt, aber gleichzeitig aufgrund von Gravitationswechselwirkungen zurückgehalten wird (Abb. 5.9).

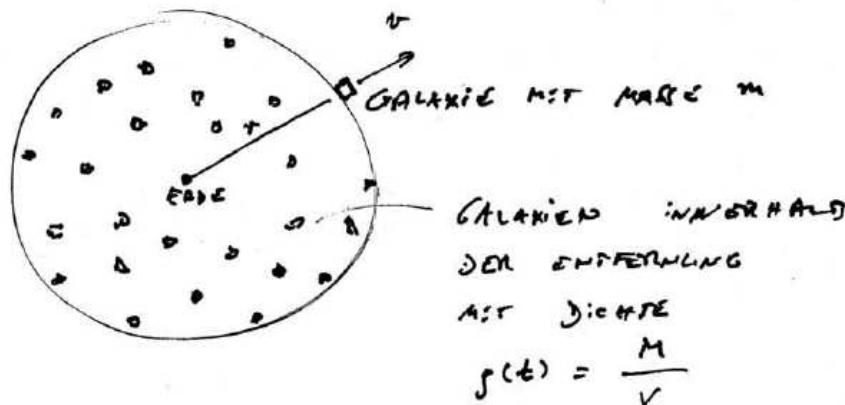


Abb. 5.9.

5.5.1. Friedmann-Gleichung

Diese Galaxie mit Masse m wird durch eine Gravitationskraft gebremst, die durch die Masse $M(r)$ aller Galaxien innerhalb der Kugelschale mit der Erde als Zentrum erzeugt wird. Die entsprechende Newtonschen Bewegungsgleichung lautet:

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = -G \frac{M(r)m}{r^2} \quad (5.49)$$

Anstatt alle Massen in dem Kugelvolumen zusammenzuzählen, verwenden wir die Massendichte $\rho = M/V$ mit dem Kugelvolumen $V = (4/3)\pi r^3$ und erwei-

5. Kosmologie

tern dafür mit $(4/3)\pi r$:

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -G \underbrace{\frac{M}{\frac{4}{3}\pi r^3}}_{=\rho} \cdot \frac{4}{3}\pi r \quad (5.50)$$

$$= -\frac{4}{3}\pi G \rho r \quad (5.51)$$

Wir berücksichtigen nun die Expansion des Raums. Die Masse M im wachsenden Kugelvolumen bleibt erhalten, aber die Dichte ρ ändert sich. Wir beschreiben sie mit dem Skalenparameter a (5.44) zu zwei Zeiten t und t_0 durch:

$$M(t) = M(t_0) \quad (5.52)$$

$$\rho(t) \cdot a^3 = \rho_0 \cdot a_0^3 \quad (5.53)$$

Genauso ersetzen wir in (5.51) den Abstand r durch den Skalenparameter a (5.44). Damit lautet die Bewegungsgleichung der Galaxie:

$$\frac{d^2r(t)}{dt^2} = -\frac{4}{3}\pi G \cdot \rho(t) \cdot r(t) \quad (5.54)$$

$$\frac{r_0}{a_0} \frac{d^2a(t)}{dt^2} = -\frac{4}{3}\pi G \cdot \rho_0 \frac{a_0^3}{a^3(t)} \cdot \frac{r_0}{a_0} a(t) \quad (5.55)$$

$$\frac{d^2a(t)}{dt^2} = -\frac{4}{3}\pi G \rho_0 a_0^3 \cdot \frac{1}{a^2(t)} \quad (5.56)$$

$$2 \frac{d^2a(t)}{dt^2} = -2 \underbrace{\frac{4}{3}\pi G \rho_0 a_0^3}_{\equiv C} \cdot \frac{1}{a^2(t)} \quad (5.57)$$

Mit der Abkürzung der Konstanten durch

$$C \equiv \frac{8}{3}\pi G \rho_0 a_0^3 \quad (5.58)$$

erhalten wir eine Differentialgleichung für den Skalenparameter a :

$$2 \frac{d^2a}{dt^2} + \frac{C}{a^2} = 0 \quad (5.59)$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich ein Energiesatz mit einem Parameter k

$$\left(\frac{da}{dt} \right)^2 - \frac{C}{a} + k = 0,$$

(5.60)

wie wir durch Ableiten nach der Zeit überprüfen können:

$$2 \frac{d^2a}{dt^2} \frac{da}{dt} + C \frac{1}{a^2} \frac{da}{dt} = 0 \quad (5.61)$$

Die Gleichung (5.60) heißt Friedmann-Gleichung mit dem Energieparameter k . Aus der relativitätstheoretischen Rechnung ergibt fast dieselbe Gleichungsform, dabei charakterisiert der Parameter k die Geometrie des Raums.

5.5. Entwicklung der Raumzeit bei Gravitation

Die Friedmann-Gleichung (5.60) lässt sich für den Parameter $k = 0$ durch Trennung der Variablen lösen:

$$\left(\frac{da}{dt}\right)^2 = \frac{C}{a} \quad (5.62)$$

$$\int \sqrt{a} da = \int \sqrt{C} dt \quad (5.63)$$

$$\frac{2}{3}a^{3/2} = \sqrt{C} t \quad (5.64)$$

$$a(t) = \left(\frac{9}{4}C\right)^{1/3} \cdot t^{2/3} \quad (5.65)$$

Auch die Lösungen für $k > 0$ und $k < 0$ lassen sich analytisch berechnen und sind in Abb. 5.10 gezeigt. Für $k \leq 0$ expandiert das Universum für immer, während es für $k > 0$ durch die Gravitationswechselwirkung der Materie wieder in sich zusammenfällt.

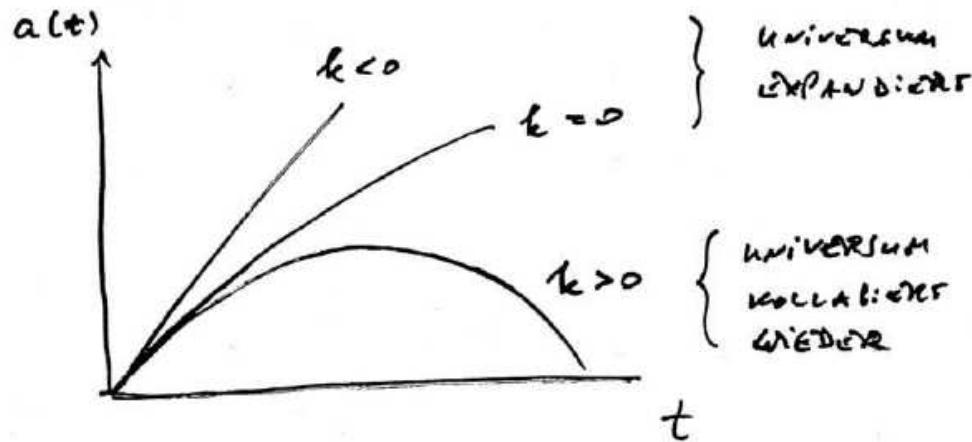


Abb. 5.10.

5.5.2. Dichte und Expansion

Um zu verstehen, ob unser Universum für immer expandiert oder schließlich kollabiert, benötigen wir einen Zusammenhang mit der gesamten Dichte im Universum.

Zunächst wollen wir wissen, bei welcher kritischen Dichte ein Universumskollaps beginnt. Dazu dividieren wir die Friedmann-Gleichung (5.60) durch a^2 und setzen den Parameter C (5.58) ein:

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} - \underbrace{\frac{8\pi}{3} G \rho_0 a_0^3}_{\equiv C} \cdot \frac{1}{a^3} = -\frac{k}{a^2} \quad (5.66)$$

5. Kosmologie

Zum heutigen Zeitpunkt entspricht der Skalenparameter $a = a_0$ und die Hubble-Konstante ist H_0 (5.41). Mit dem Hubble-Gesetz (5.47)

$$\dot{a}_0 = H_0 \cdot a_0 \quad (5.67)$$

erhalten wir

$$\frac{(H_0 \cdot a_0)^2}{a_0^2} - \frac{8\pi}{3} G \rho_0 a_0^3 \cdot \frac{1}{a_0^3} = -\frac{k}{a_0^2} \quad (5.68)$$

$$H_0^2 - \underbrace{\frac{8\pi G \rho_0}{3}}_{\text{wenn } < 0, \text{ dann } k > 0} = -\frac{k}{a_0^2} \quad (5.69)$$

Wenn die linke Seite der Gleichung kleiner als Null ist, dann ist der Parameter $k > 0$. Die kritische Dichte für einen Universumskollaps beträgt demnach:

$$\rho_{0,c} = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \quad (5.70)$$

Sehr häufig wird eine Dichte ρ auf diese kritische Dichte $\rho_{0,c}$ normiert und als Dichteparameter Ω bezeichnet:

$$\Omega = \frac{\rho}{\rho_{0,c}} \quad (5.71)$$

Verwenden wir diesen Dichteparameter in der Friedmann-Gleichung für den heutigen Zeitpunkt (5.69), so erhalten wir die kurze Schreibweise

$$H_0^2 - \underbrace{\frac{8\pi G}{3}}_{=H_0^2/\rho_{0,c}\rho_0} = -\frac{k}{a_0^2} \quad (5.72)$$

$$H_0^2 \cdot \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho_{0,c}}\right) = -\frac{k}{a_0^2} \quad (5.73)$$

$$\Omega - 1 = \frac{k}{a_0^2 H_0^2} \quad (5.74)$$

und damit die in Tabelle 5.1 gezeigten Zusammenhänge zwischen Dichte und Perspektive für das Universum:

$\Omega = 1 \rightarrow$	$k = 0 \rightarrow$	Expansion
$\Omega < 1 \rightarrow$	$k < 0 \rightarrow$	Expansion
$\Omega > 1 \rightarrow$	$k > 0 \rightarrow$	Kollaps

Tab. 5.1.

Der Dichte-Parameter wird zusammengesetzt aus der Materiedichte Ω_M , die normale Materie und dunkle Materie umfasst, die sogenannte dunkle Energiedichte Ω_Λ und die Strahlungsdichte Ω_γ . Die Summe ergibt aktuell (2022)

$$\Omega_{\text{tot}} = 1,011 \pm 0,006 \quad (5.75)$$

und wird als Indikator für ein expandierendes Universum angesehen.

5.5.3. Alter des Universums

Die Friedmann-Gleichung hatten wir für $k = 0$ bereits gelöst (5.64):

$$t = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{a^3}{C}} \quad (5.76)$$

Um das Alter des Universums zu schätzen, drücken wir in der Konstanten C (5.58) die Dichte ρ durch den aktuellen Dichteparameter Ω aus. Dazu benötigen wir die kritische Dichte $\rho_{0,c} = 3H_0^2 / (8\pi G)$ (5.70) und den Skalenparameter $a = a_0$ zur heutigen Zeit:

$$C = \frac{8\pi G}{3} \rho_0 a_0^3 \cdot \frac{1}{\rho_{0,c}} \frac{3H_0^2}{8\pi G} \quad (5.77)$$

$$= \underbrace{\frac{\rho_0}{\rho_{0,c}}}_{=\Omega} H_0^2 a_0^3 \quad (5.78)$$

Damit beträgt das Alter des Universums:

$$t_0 = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{a_0^3}{\Omega H_0^2 a_0^3}} \quad (5.79)$$

$$= \frac{2}{3} \frac{1}{H_0} \underbrace{\sqrt{\frac{1}{\Omega}}}_{\approx 1} \quad (5.80)$$

$$\approx \frac{2}{3} \frac{1}{H_0} \quad (5.81)$$

Beispiel 9: Alter des Universums

Mit dem aktuellen Hubble Parameter

$$H_0 = 70 \frac{\text{km}}{\text{s} \cdot \text{Mpc}} = 70 \frac{10^3}{10^6 \cdot 3,262 \cdot 3 \cdot 10^8} \frac{1}{\text{y}} = \frac{7,2 \cdot 10^{-11}}{\text{y}} \quad (5.82)$$

ergibt sich das Alter des Universums in Jahren zu:

$$t_0 = \frac{2}{3} \frac{1}{H_0} = \frac{2}{3} \frac{1}{7,2 \cdot 10^{-11}} \text{y} = 9 \cdot 10^9 \text{y} \quad (5.83)$$

Genauere Berechnungen für das Alter des Universums ergeben aktuell (2020) [12]:

$$t_0 = (13,797 \pm 0,023) \cdot 10^9 \text{y} \quad (5.84)$$

5.5.4. Geometrie der Raumzeit

Nach Newtons Gravitationsgesetz ist die Masse Quellpunkt für Gravitation:

$$\vec{F} = -G \frac{M \cdot m}{r^2} \vec{e}_r \quad (5.85)$$

Das Konzept von Einstein ist vollkommen anders, hier wird der Raum durch die Anwesenheit von Masse gekrümmmt. Diese Raumkrümmung durch Gravitation erfordert prinzipiell eine andere Metrik für die Raumzeit (Abb. 5.11). Nach dem Fermatschen Prinzip nimmt ein Lichtstrahl die Bahn, die am schnellsten von A nach B führt, was in der Nähe einer großen Masse eine gekrümmte Bahn bedeutet.

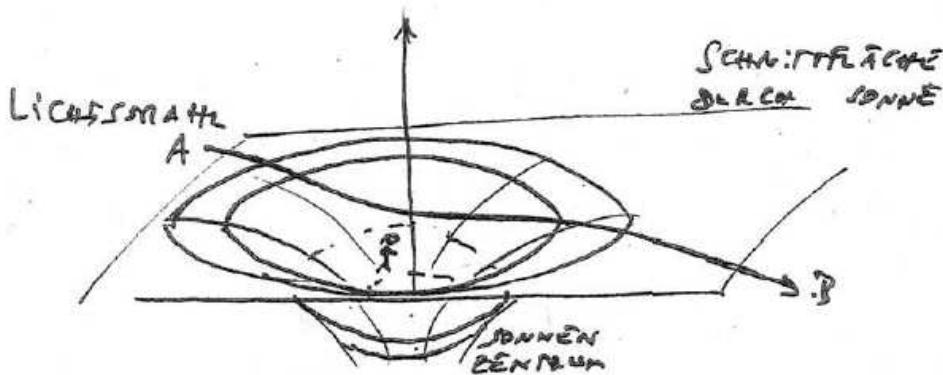


Abb. 5.11.

Für einen Beobachter auf der Sonne gehen die Uhren langsamer. Gleichzeitig sind die Längenmaßstäbe kürzer, sodass die Lichtgeschwindigkeit $c = \Delta L / \Delta t$ unverändert gegenüber einer Messung im leeren Raum bleibt.

Bevor wir Einsteins Gleichung für Gravitation aufschreiben ist es hilfreich, sich zunächst an Linienelementen und Längenmessungen in verschiedenen Räumen zu erinnern.

5.5.5. 3-Dimensionaler Ortsraum

Im dreidimensionalen Raum beschreiben wir Vektoren mit infinitesimaler Länge in verschiedenen Koordinatensystemen wie folgt:

Kartesisch	$d\vec{s} = dx \cdot \vec{e}_x + dy \cdot \vec{e}_y + dz \cdot \vec{e}_z$
Polarkoord.	$d\vec{s} = dr \cdot \vec{e}_r + rd\varphi \cdot \vec{e}_\varphi + dz \cdot \vec{e}_z$
Kugelkoord.	$d\vec{s} = dr \cdot \vec{e}_r + rd\theta \cdot \vec{e}_\theta + r \sin \theta d\varphi \cdot \vec{e}_\varphi$

Als Beispiel ist in Abb. 5.12 ein Vektor für Kugelkoordinaten visualisiert.

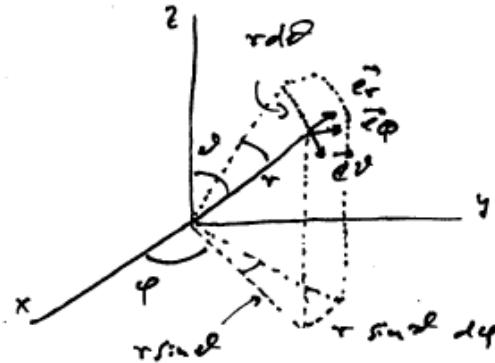


Abb. 5.12.

Eine Längenmessung in kartesischen Koordinaten erhalten wir durch

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (5.86)$$

und in Kugelkoordinaten mit:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad (5.87)$$

In den komplexen Zahlen lautet ein Vektor

$$d\vec{s} = dx \cdot \vec{e}_x + dy \cdot i\vec{e}_y \quad (5.88)$$

und seine Längenmessung beträgt:

$$ds^2 = d\vec{s} \cdot (d\vec{s})^* = dx^2 + dy^2 \quad (5.89)$$

In einer alternativen Schreibweise verwenden wir eine Metrik g und erhalten dasselbe Ergebnis:

$$ds^2 = \underbrace{(dx, idy)}_{(d\vec{s})^T} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{g = \text{Metrik}} \begin{pmatrix} dx \\ idy \end{pmatrix} \quad (5.90)$$

$$= (d\vec{s})^T \cdot g \cdot d\vec{s} \quad (5.91)$$

$$= dx^2 + dy^2 \quad (5.92)$$

5.5.6. 4-Dimensionale Raumzeit

In der vierdimensionalen Raumzeit wird die Länge ds eines Linienelements mit Hilfe der vierdimensionalen Metrik bestimmt:

$$(ds^2) = (d\vec{s})^T g d\vec{s} \quad (5.93)$$

$$= (cdt, dx, dy, dz) \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cdt \\ dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} \quad (5.94)$$

$$= c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad (5.95)$$

5. Kosmologie

Punkte mit gleichem „Abstand“ $ds = \text{const.}$ vom Ursprung

$$c dt = \pm \sqrt{ds^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2} \quad (5.96)$$

sind in Abb. 5.13 visualisiert.

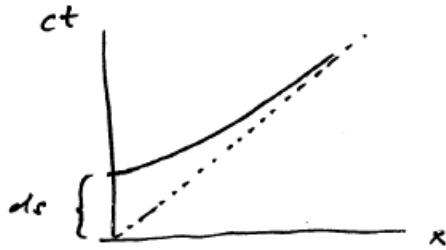


Abb. 5.13.

Unser Hier-und-Jetzt befindet sich innerhalb des Lichtkegels einer Raumzeit (Abb. 5.14).

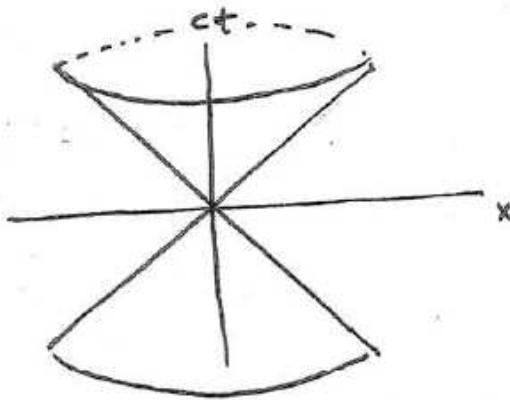


Abb. 5.14.

5.5.7. Einstein-Gleichung

Einstiens Gravitationsgleichung enthält die Geometrie $G_{\mu\nu}$ der Raumzeit und den Energie-Impuls Tensor $T_{\mu\nu}$ von Materie und Strahlung sowie Einsteins Gravitationskonstante κ :

$$G_{\mu\nu} = \kappa \cdot T_{\mu\nu} \quad (5.97)$$

Außerhalb von Materie ergeben sich daraus die Vakuumfeldgleichungen:

$$G_{\mu\nu} = 0 \quad (5.98)$$

5.5.8. Schwarzschild-Metrik

Es gibt verschiedene Lösungsansätze für Einsteins Gleichung. Die Schwarzschild-Lösung formuliert das Linienelement bezogen auf eine kugelförmige Masse M mit dem r = Abstand vom Kugelmittelpunkt:

$$ds^2 = \gamma'^2 c^2 dt^2 - \frac{1}{\gamma'^2} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad (5.99)$$

Dabei modifiziert der Vorfaktor γ' das Linienelement in Abhängigkeit des Schwarzschild-Radius R_S (2.12):

$$\gamma' = \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2r}} = \sqrt{1 - \frac{R_S}{r}} \quad (5.100)$$

Für $r \rightarrow \infty$ ergibt sich das vierdimensionale Linienelement in Kugelkoordinaten für den leeren Raum.

5.5.9. Robertson-Walker Metrik

In der relativitätstheoretischen Berechnung der Friedmann-Gleichung (5.60) charakterisiert der Parameter k die Geometrie des Raums. Die Robertson-Walker Metrik beschreibt den vierdimensionalen gekrümmten Raum mit den Koordinaten t, r, θ, φ :

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right] \quad (5.101)$$

Die Metrik erfasst die Expansion im Skalenparameter a und die Krümmung des Raums im Parameter k . Für $k = 0$ und $a(t) \equiv 1$ ergibt sich die Minkowski-Metrik in Kugelkoordinaten.

Im Zweidimensionalen können wir uns gekrümmte Räume recht gut vorstellen, wie sie in Abb. 5.15 gezeigt sind.

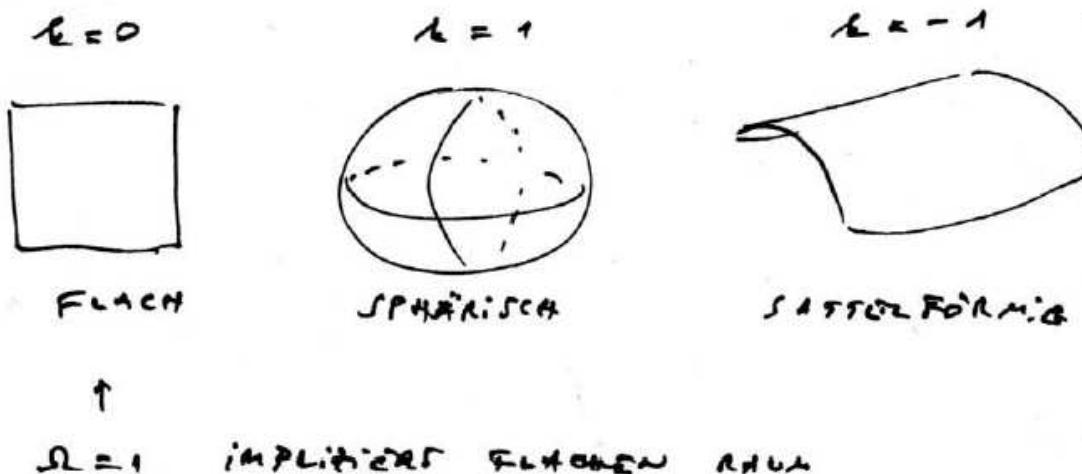


Abb. 5.15.

5. Kosmologie

Aus den Messungen von Supernovae Typ Ia (Nobelpreis 2011) ergibt sich insgesamt ein flaches Universum mit $k = 0$ bzw. (siehe Tabelle 5.1)

$$\Omega_{\text{tot}} = 1,011 \pm 0,006. \quad (5.75)$$

Weiterhin zeigen aktuelle Daten die folgenden Zahlenwerte: Der Dichteparameter Ω_{tot} (5.75) im Universum wird von dem Anteil

$$\Omega_{\Lambda} = 0,685(7) \quad (5.102)$$

dominiert, der die Vakuum-Energie beschreibt. Dies führt zu einem beschleunigt expandierenden Universum. Der Materieanteil hat einen kleineren Anteil. Für die gesamte Materie ist

$$\Omega_M = 0,315 \quad (5.103)$$

Dabei hat die baryonische Materie (normale Materie)

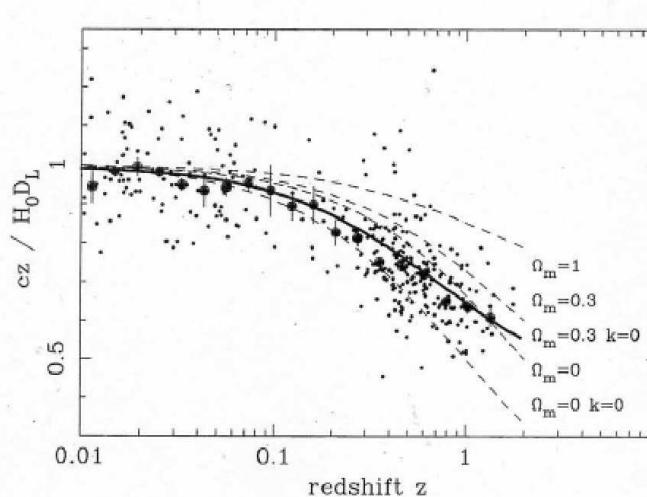
$$\Omega_b = 0,0493(6) \quad (5.104)$$

und die Dunkle Materie

$$\Omega_{\text{DM}} = 0,265(7) \quad (5.105)$$

überwiegt. Strahlung trägt nur einen sehr geringen Anteil bei:

$$\Omega_{\text{rad}} = 5,38(15) 10^{-5}. \quad (5.106)$$



the second panel shows an expanded scale, with the linear trend divided out, and with the redshift range extended to show how the Hubble law becomes nonlinear. ($\Omega_r = 0$ is assumed.) Larger points with errors show median values in redshift bins. Comparison with the prediction of Friedmann-Lemaître models appears to favor a vacuum-dominated Universe.

Abb. 5.16.

In den Abbildungen 5.16 und 5.17 ist die Entwicklung des Universums für verschiedene Zusammensetzungen des Dichteparameters Ω gezeigt.

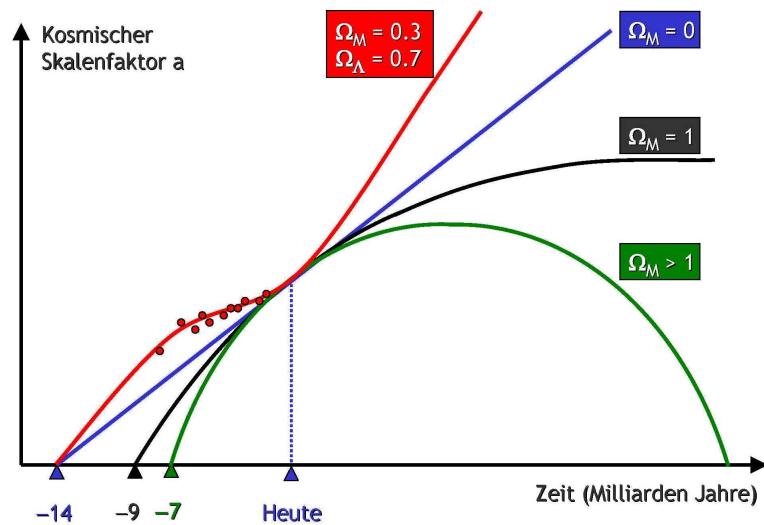


Abb. 5.17.

5.6. Kosmische Hintergrundstrahlung

5.6.1. Messungen

Die kosmische Hintergrundstrahlung (Cosmic Microwave Background, „CMB“) wurde 1965 von Penzias und Wilson entdeckt. Eigentlich suchten sie nach Satellitensignalen und fanden dabei einen isotropen Hintergrund mit Wellenlängen im 1 mm Bereich (Abbildungen 5.18 und 5.19).

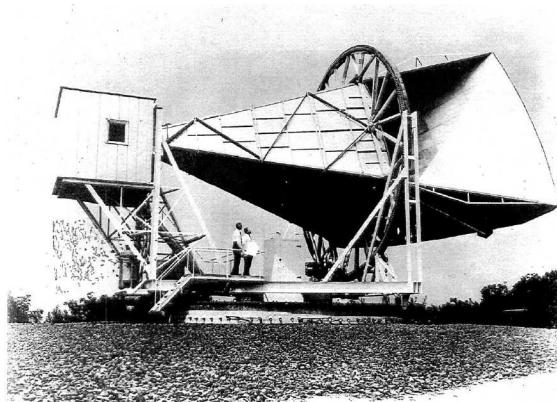


Abb. 5.18.

5. Kosmologie

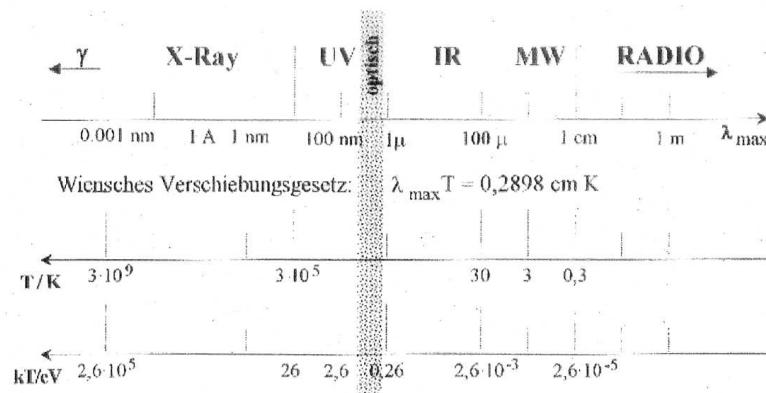


Abb. 5.19.

Diese Strahlung folgt perfekt dem Planck-Strahlungsgesetz (2.53), hier mit Wellenlängen λ geschrieben (Abb. 5.20):

$$I = \frac{2\pi \hbar c^2}{\lambda^5 \left(e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1 \right)} \quad (5.107)$$

Die Temperatur beträgt

$$T = 2,7255 \pm 0,0006 \text{ K} \quad (5.108)$$

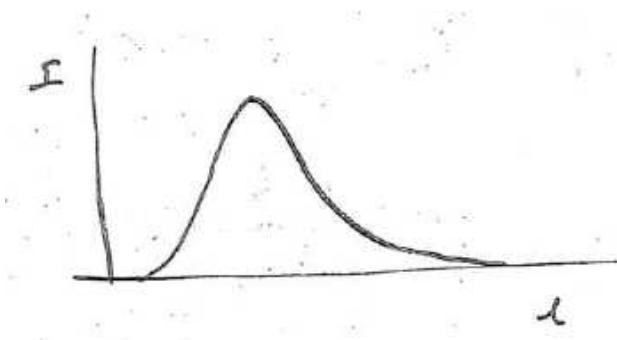


Abb. 5.20.

Diese Hintergrundstrahlung gibt Hinweise auf eine Frühphase des Universums: Durch Expansion des Universums ist die Temperatur der Strahlung auf 3 K abgekühlt. Gemessen über den ganzen Himmel ist die Strahlung extrem isotrop. Fluktuationen erscheinen erst auf dem 10^{-5} -Niveau.

Diese Fluktuationen geben Informationen über die Frühphase des Universums und zeigen die Bildung von Galaxien an. Die präzisen Messungen des Planck-Satelliten (2013) sind in Abb. 5.21 als Himmelskarte gezeigt.

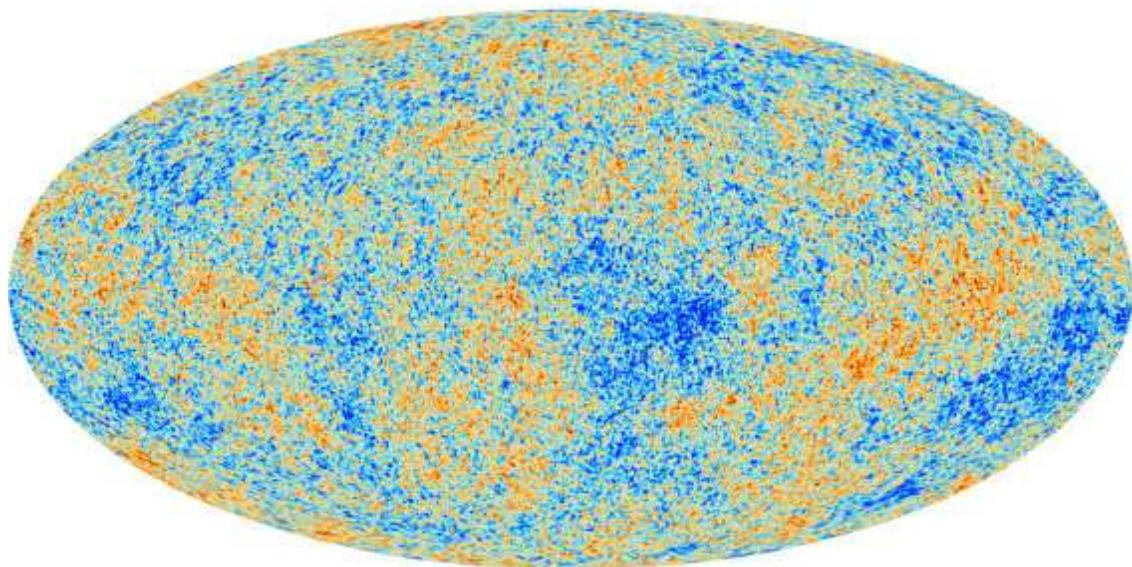


Abb. 5.21.

Wie großflächig die Temperaturfluktuationen sind, wird mit einer Zerlegung in Multipolmomente analysiert (Abb. 5.22). Die Oszillationen der Multipole auf der Winkelskala geben entscheidende Informationen über die Parameter unseres Universums im Rahmen der Kosmologie.

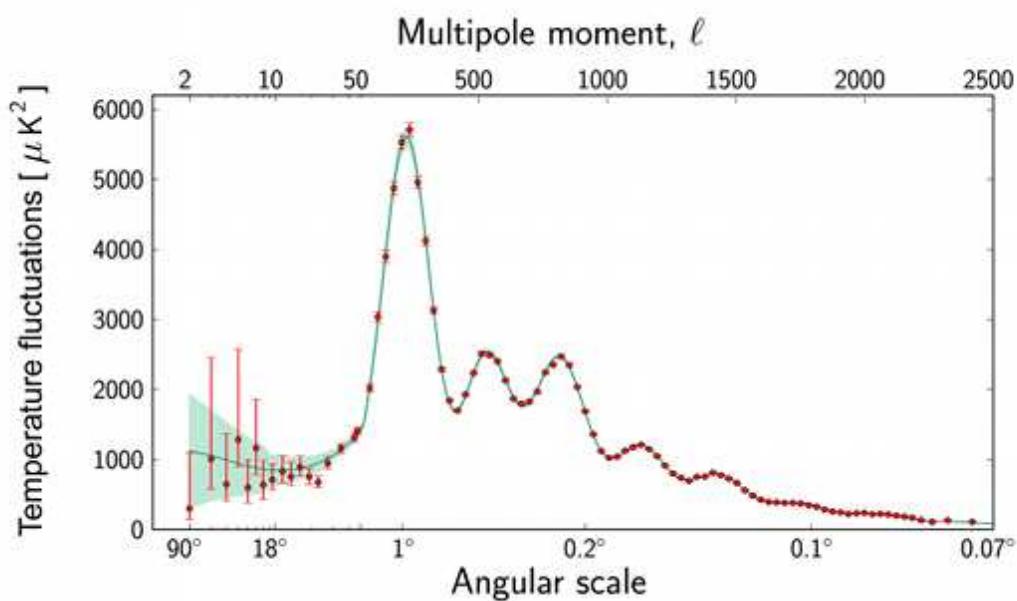


Abb. 5.22.

5.6.2. Kosmologie der Strahlung

Aus der Expansion des Universums bei gleichzeitiger Erhaltung der Masse konnten wir bereits darauf schließen, dass die Materiedichte im Verlauf der Zeit gesunken ist (5.53). Um die Entwicklung der Strahlungs dichte zu verstehen, betrachten wir in Abb. 5.23 einen Lichtblitz, der zum Zeitpunkt t_1 von der Galaxie zur Erde gesandt wurde. Während der Lichtstrahl unterwegs ist, dehnt sich das Universum aus. Zur Zeit t_0 erreicht der Lichtstrahl die Erde. Dabei ist t_0 die heutige Zeit mit dem Skalenparameter $a = a_0$.

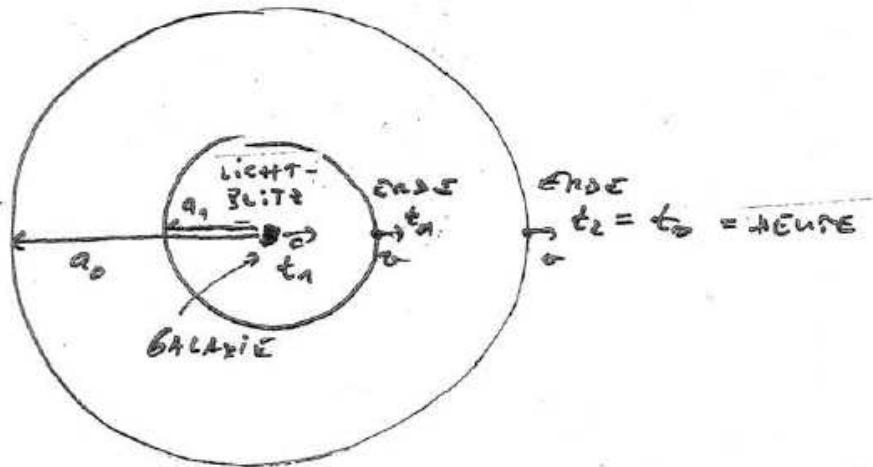


Abb. 5.23.

Das Photon hatte bei Aussenden zur Zeit t_1 die Wellenlänge λ_1 , hat aber bei der Messung auf der Erde wegen des Dopplereffekts (5.34) eine vergrößerte Wellenlänge λ_0 :

$$z = \frac{\lambda_0}{\lambda_1} - 1 \quad (5.109)$$

Gleichzeitig wird der Dopplereffekt durch die Expansion des Universums verursacht, sodass wir mit Hilfe von (5.48)

$$\frac{a_0}{a(t)} = 1 + z \quad (5.110)$$

Wellenlänge und Skalenparameter in Relation bringen können:

$$\frac{a_0}{a_1} = \frac{\lambda_0}{\lambda_1} \quad (5.111)$$

Die vergrößerte Wellenlänge führt wegen $E_\gamma = h\nu = hc/\lambda$ zum Energieverlust für das Photon:

$$\frac{E_{\gamma 0}}{E_{\gamma 1}} = \frac{a_1}{a_0} \quad (5.112)$$

5.6. Kosmische Hintergrundstrahlung

Während die Materiedichte wegen $\rho = \frac{M}{V}$ durch die Expansion des Universums mit

$$\rho_M(t) \propto a^{-3}(t) \quad (5.113)$$

sinkt (5.53), zählen wir auch die Photonen. Die Energien der Photonen sinken zusätzlich, sodass sich die Strahlungsdichte stärker reduziert:

$$\rho_S(t) \propto a^{-4}(t) \quad (5.114)$$

Zu einem früheren Zeitpunkt war das Universum strahlungsdominiert und wird heute von Materie dominiert (Abb. 5.24).

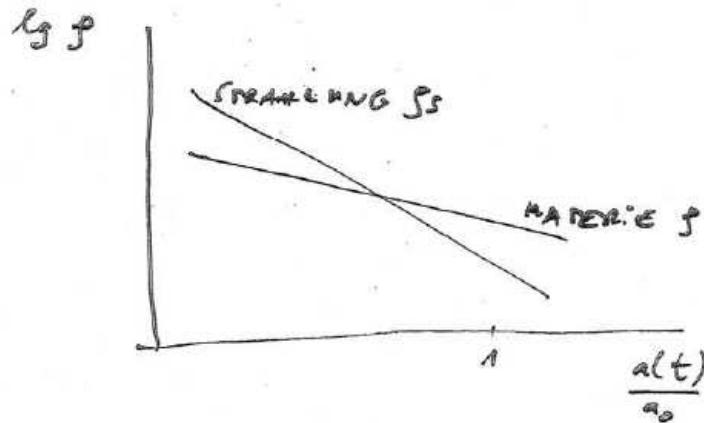


Abb. 5.24.

Die Entwicklung der Temperatur der Hintergrundstrahlung ergibt ein Zeitmaß für die Entwicklung des Universums. Das Stefan-Boltzmann-Gesetz (3.21) verbindet die Strahlungsintensität, also Energie pro Zeit und durchstrahlte Fläche, mit der Temperatur:

$$I = \sigma T^4 \quad (5.115)$$

Wir können also die Strahlungsdichte ρ_S (5.114) auf die Intensität I zurückführen und mit dem Stefan-Boltzmann-Gesetz auf die Temperaturentwicklung im Universum zurückführen:

$$\rho_S \propto a^{-4} \propto I \propto T^4 \quad (5.116)$$

Diese Temperaturentwicklung der Strahlung können wir mit den Verhältnissen heute verbinden:

$$T(t) = T_0 \frac{a_0}{a(t)} \quad (5.117)$$

$$= 2,7 \text{ K} \cdot \frac{a_0}{a(t)} \quad (5.118)$$

Damit erhalten wir auch den nützlichen Zusammenhang zwischen Temperatur T und kosmologischer Rotverschiebung z :

$$T(z) = 2,7 \text{ K} (1 + z) \quad (5.119)$$

5.7. Gravitationswellen

Gravitationswellen sind Schwingungen in der Raumzeit. Das Prinzip des Michelson-Interferometers hat in den letzten Jahrzehnten für die Suche nach Gravitationswellen eine wichtige neue Anwendung gefunden [6]. Die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit wird ausgenutzt um kleinste Dehnungen und Stauchungen der Lichtwege nachzuweisen, die von Gravitationswellen hervorgerufen werden. Dazu musste die Genauigkeit der Messung um viele Größenordnungen verbessert werden. Wie schon beim Michelson-Morley-Versuch kann das zunächst durch eine Vergrößerung der Lichtwege erreicht werden. Dazu verlängert man nicht nur die Armlänge l auf mehrere km , sondern lässt sehr intensives Laserlicht die Strecke l in Form eines Fabry-Perot-Interferometers mehrere 100-mal durchlaufen. Außerdem müssen die Spiegel gegen kleinste Erschütterungen geschützt sein. Hierbei wird inzwischen durch Kühlung, Vakuum und aufwändige Aufhängung eine unglaubliche Stabilität von Bruchteilen des Protodurchmessers erreicht. Das größte und empfindlichste Gerät dieser Art ist *LIGO*.

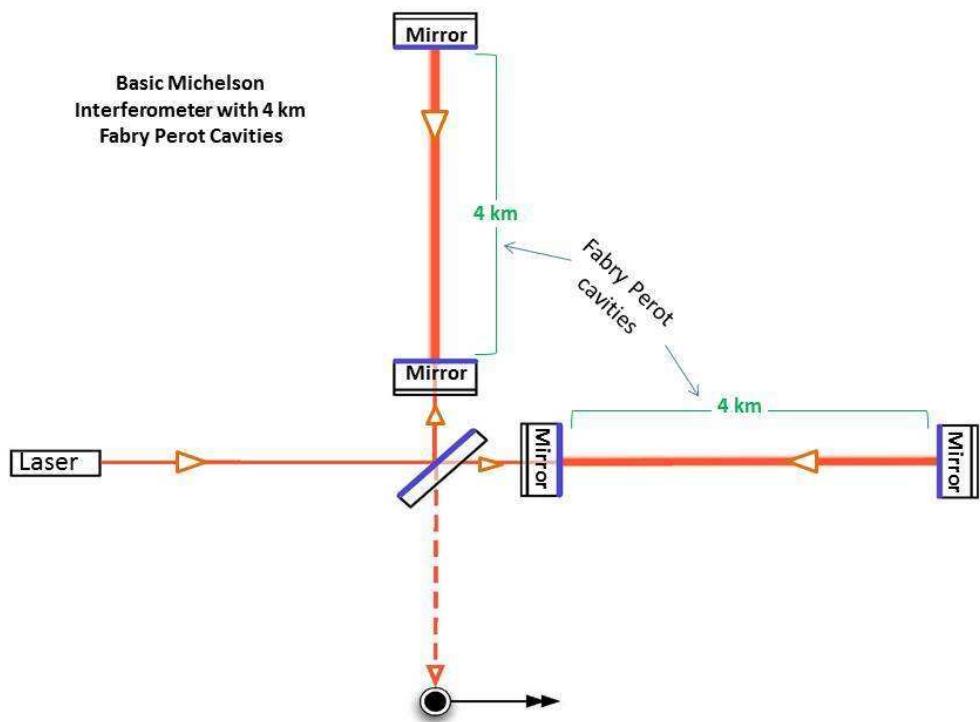


Abb. 5.25.

Es besteht aus zwei Observatorien, die in Hanford (Washington) und in Livingston (Louisiana) etwa 3000 km voneinander entfernt sind. Durch die Laufzeitunterschiede zwischen den beiden und mindestens einem weiteren Observatorium kann grob auf die Position der Quelle der Gravitationswellen ge-

schlossen werden. Mit der Empfindlichkeit der Geräte von 10^{-22} konnten 2015 zum ersten mal Gravitationswellen von der Verschmelzung zweier schwarzer Löcher nachgewiesen werden. Ein Beispielsignal ist in der Abbildung gezeigt [15]. Dafür wurde 2017 der Nobelpreis verliehen.

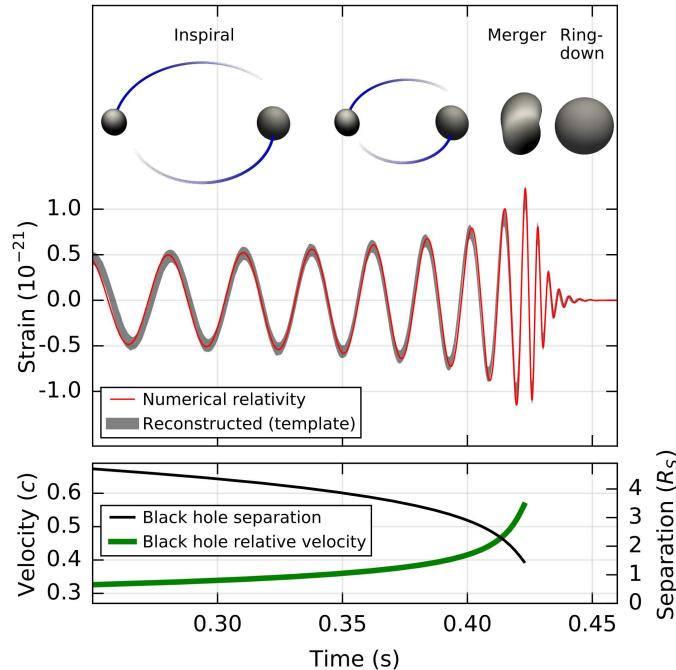


Abb. 5.26.

Mit dem *Einstein-Teleskop* ist eine weitere Steigerung der Sensitivität um eine Größenordnung geplant. Einer der möglichen Standorte ist das Limburger Land nahe Aachen.

5.8. Standardmodell der Kosmologie

Die kosmische Hintergrundstrahlung zeigt, dass das Universum auf großen Skalen homogen und isotrop erscheint. Mit Hubbles Beobachtung eines expandierenden Universums und der entsprechenden Abkühlung der kosmischen Hintergrundstrahlung liegt es nahe, die Entwicklung des Universums zu einem Urknall („Big Bang“) zurückzuverfolgen. Dementsprechend ist unser heutiges Standardmodell der Kosmologie eine Urknall-Theorie bzw. Big Bang Theory (Abb. 5.27).

Die zeitliche Entwicklung ist in Abbildung 5.28 als Funktion der Temperatur bzw. des Skalenparameters a (hier als R bezeichnet) gezeigt. Tabelle 5.29 spezifiziert die Phasen [3].

5. Kosmologie

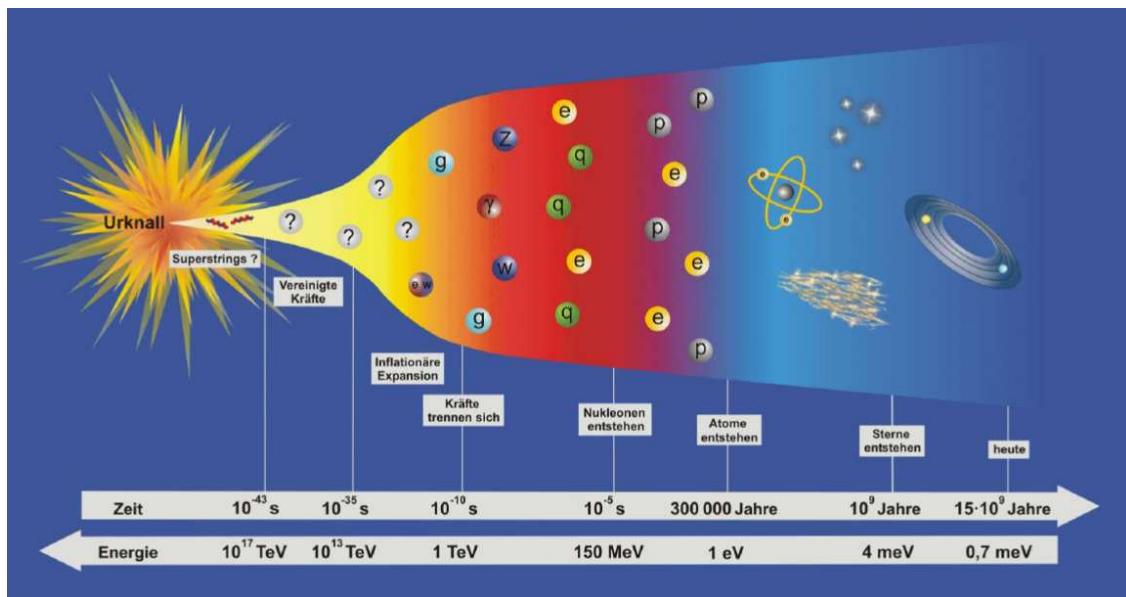


Abb. 5.27.

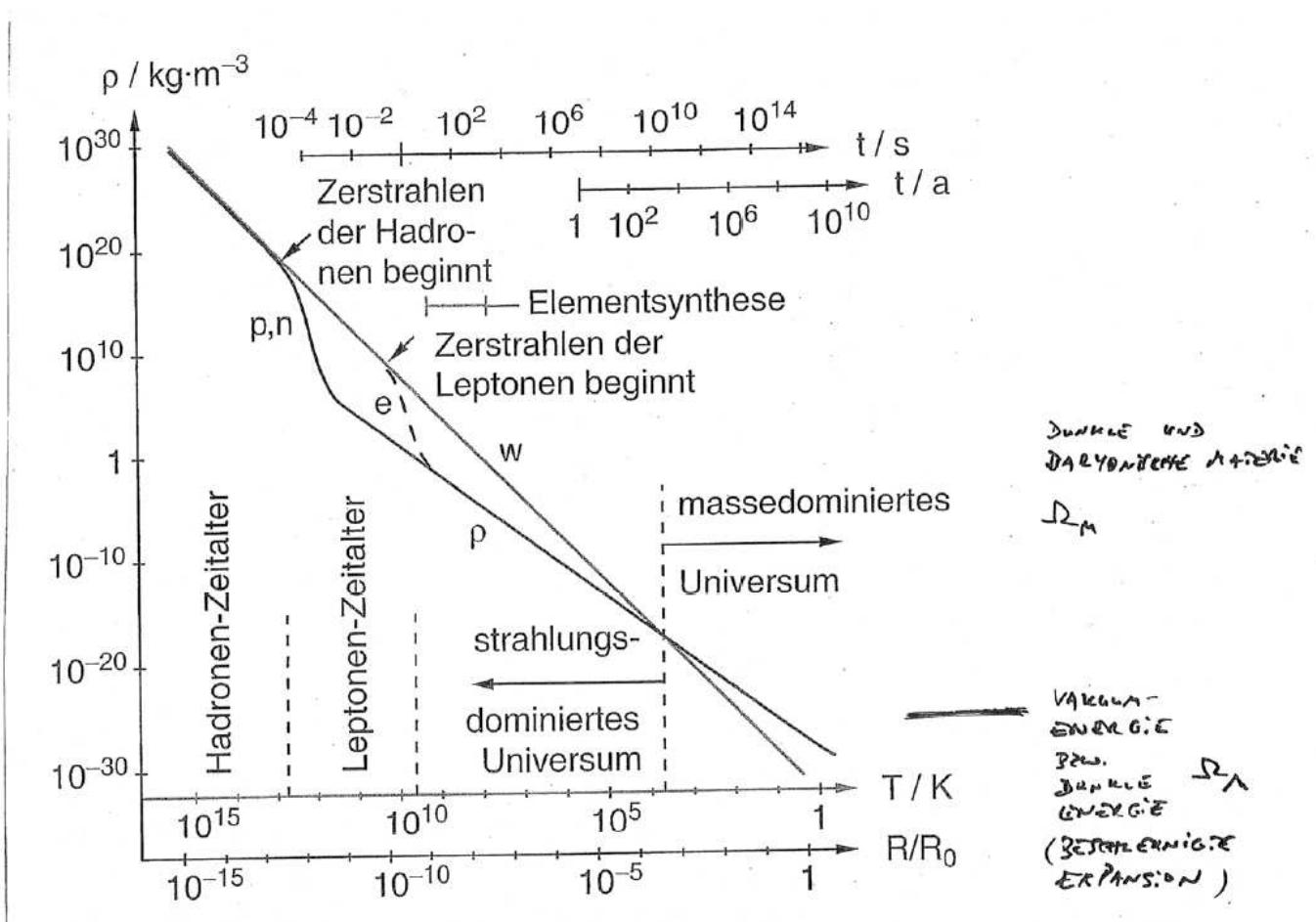


Abb. 5.28.

Zeitabschnitt	Zeit/s	Temperatur in K	Zustand
Planck-Ära	$t = 0$?	Urknall
	$t = 10^{-43}$	$T = 10^{32}$	Alle 4 Wechselwirkungen sind vereinigt, d.h. nicht unterscheidbar
GUT-Ära	$t = 10^{-35}$	$T = 10^{28}$	Gravitation entkoppelt die übrigen 3 Wechselwirkungen sind noch vereinigt (Grand Unification)
Inflationäre Phase			Starke und elektroschwache Wechselwirkungen separieren Universum vergrößert sich um den Faktor $q = 10^{40} - 10^{50}$
Quark-Ära	$t = 10^{-32}$	$T = 10^{25}$	
	$t = 10^{-12}$		Das Quark-Gluon-Plasma besteht aus Quarks, Leptonen und Photonen
Hadronen-Ära	$t = 10^{-7}$		
	$t = 10^{-4}$	$T = 10^{12}$	Protonen und Neutronen und ihre Antiteilchen bilden sich Neutrinos entkoppeln
Leptonen-Ära	$t = 10^{-4}$	$T = 10^{10}$	Elektronen und Positronen zerstrahlen, Myonen zerfallen
	$t = 10$	$T = 3 \cdot 10^9$	
Nukleosynthese	$t = 3 \text{ min}$	$T \approx 10^9$	He-, D-, und Li-Kerne werden gebildet

Abb. 5.29.

- Zum Zeitpunkt $t = 0$ geschieht der Urknall.
- Bis zur **Planck-Zeit** $t = 10^{-43}$ s ist die Physik unbekannt. Die Temperatur $T \geq 10^{32}$ K entspricht Energien von

$$E_{Kin} = \frac{3}{2} kT = \frac{3}{2} \cdot 8,6 \cdot 10^{-5} \frac{eV}{K} \cdot 10^{32} K \approx 1,3 \cdot 10^{28} eV \quad (5.120)$$

$$\gg 10^{21} \text{ eV} \text{ größer als bisher beobachtete Energien} \quad (5.121)$$

Alle 4 Wechselwirkungen Gravitation, Starke, Elektromagnetische, Schwache sind vereinigt, d.h. ununterscheidbar.

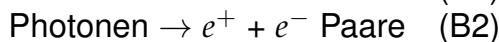
- Bei $t = 10^{-43}$ s passiert ein Phasenübergang. Die Gravitation wird unterscheidbar. Das Universum besteht aus Quark-Gluon-Plasma, wobei die heute bekannten Elementarteilchen noch nicht unterschieden werden können.
- Bei $t = 10^{-35}$ s ist die Temperatur 10^{28} K. Hier passiert ein weiterer Phasenübergang und es trennen sich starke von elektroschwacher Wechselwirkung. Zu diesem Zeitpunkt können Quarks und Leptonen unterscheiden werden.

5. Kosmologie

- Das Universum dehnt sich in der Zeit zwischen $10^{-35} - 10^{-33}$ s um den Faktor $10^{40} - 10^{50}$ aus. Mit dieser Idee einer **Inflationshypothese** von Guth wird das sogenannte „Horizont-Problem“ gelöst.
- Bis $t = 10^{-5}$ s besteht ein „Feuerball“, bei dem sich die heute bekannten Teilchen Hadronen, Leptonen, Photonen im thermischen Gleichgewicht befinden.



- Wenn die Temperatur unter $T < 10^{13}$ K sinkt, dann ist die Energie für den Prozess (A2) nicht ausreichend. Es gibt nur den Zerstrahlungsprozess (A1). Eigentlich sind alle Prozesse symmetrisch, Materie und Antimaterie gleichwertig. Woher die heute beobachtete Materie/Antimaterie-Asymmetrie entsteht ist noch nicht geklärt. Jedenfalls besteht die „Rettung“ der Materie auf dem Niveau $1/10^9$, d.h. 10^9 Protonen $\leftrightarrow (10^9 - 1)$ Antiprotonen: $0,24 \frac{1}{\text{m}^3}$. Die heute beobachteten Baryonen (Protonen, Neutronen) stammen von 10^{-4} s nach Urknall. Zu diesem Zeitpunkt „entkoppeln“ die Neutrinos mit einer Dichte von $10^8 \frac{1}{\text{m}^3}$.
- Bei der Zeit $t = 10^{-4}$ s sind Leptonen noch im Gleichgewicht mit Strahlungsfeld der Photonen, d.h. diese Prozesse laufen:



- Beim Zeitpunkt $t = 1$ s und Temperatur $T = 10^{10}$ K ($E_{Kin} = 1,3$ MeV) reicht die Energie nicht für den Prozess (B2). Die Leptonenpaare zerstrahlen (B1) und Leptonen nehmen an schwachen Wechselwirkungsprozessen teil:



- Nun bilden sich **leichte Kerne**: Deuterium wird bei $T < 10^9$ K bzw. $t > 10^2$ s stabil. Ebenfalls bilden sich Helium, Lithium nach nun $t = 3$ Minuten. Hier gibt es immer noch kosmisches Plasma mit Wechselwirkung zwischen Photonen und Materie, wobei das Plasma überwiegend ionisiert ist.
- Ca. 400 000 Jahre nach Urknall bei $T = 3000$ K bilden Baryonen und Elektronen neutrale Atome. Man spricht davon, dass Materie und Strahlung „entkoppeln“. Die Photonen bilden jetzt die Hintergrundstrahlung, die durch die Expansion des Universums auf $T = 3$ K abkühlt. Das Universum ist ab hier transparent, die Photonendichte beträgt $3,8 \cdot 10^8 \frac{1}{\text{m}^3}$.

5.8.1. Anzahldichten

Manchmal ist es nützlich, die Anzahldichten der verschiedenen Teilchen zur heutigen Zeit zu wissen, die hier zusammengefasst sind:

- Photonen $N_\gamma = 380/\text{cm}^3$
- Neutrinos $N_\nu = 100/\text{cm}^3$
- Protonen $N_p = 0,24/\text{m}^3$

Die Anzahl der Galaxien und Sterne:

- Anzahl Galaxien im Universum 10^{11}
- Anzahl Sterne pro Galaxie $10^9 - 10^{11}$

Das Wichtigste zum Mitnehmen

Kosmologie 1

- **Dunkle Materie** (englisch Dark Matter) beschreibt nicht sichtbare Materie, die einen großen Teil der im Universum vorhandenen Materie ausmacht. Sie wird z.B. durch Rotationskurven von Galaxien und Gravitationslinsen nachgewiesen. Der Anteil dunkler Materie zur gesamten Materie beträgt 84%, wie man den Dichteparametern für gesamte Materie $\Omega_M = 0,315$ (5.126), Dunkle Materie $\Omega_{DM} = 0,2661$ und baryonische Materie (normale Materie) $\Omega_b = 0,0489 \pm 0,00062$ entnehmen kann.
- Rotverschiebung beschreibt die Vergrößerung der Lichtwellenlänge λ , die von Gravitation oder vom Dopplereffekt entstehen kann. Bei der **Gravitationsrotverschiebung** wird Lichtenergie für das Entweichen aus einem Gravitationsfeld verbraucht, dabei vergrößert sich die Wellenlänge zu:

$$z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\lambda' - \lambda}{\lambda} = \frac{R_S}{2R} \quad (5.14)$$

Dabei beschreibt R den Radius der Masse, von der der Stern entweicht, und R_S den Schwarzschildradius (2.12).

- **Rotverschiebung beim relativistischen Dopplereffekt** für *sich entfernende Lichtquellen mit der Wellenlänge λ der Quelle und der beobachteten Wellenlänge λ'* beträgt:

$$z = \frac{\lambda' - \lambda}{\lambda} = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} - 1 \quad (5.34)$$

Für Geschwindigkeiten $v \ll c$ ist die Rotverschiebung:

$$z(v \ll c) = \frac{\lambda' - \lambda}{\lambda} = \frac{v}{c} \quad (5.36)$$

- Das **Hubble-Gesetz** zeigt einen linearen Zusammenhang zwischen der Geschwindigkeit sich entfernder Galaxien und ihrem Abstand:

$$v = H_0 \cdot D \quad (5.40)$$

Dabei ist der Hubble-Parameter H_0 mit dem auf die heutige Zeit bezogenen Wert:

$$H_0 = 70 \pm 3 \frac{\text{km}}{\text{s} \cdot \text{Mpc}} \quad (5.41)$$

Kosmologie 2

- Das Hubble-Gesetz zeigt die **Expansion des Universums**, d.h. die Raumzeit selbst expandiert mit dem **Skalenparameter** $a(t)$. Abstände zwischen Galaxien steigen anhand

$$r(t) = r(t_0) \frac{a(t)}{a(t_0)}, \quad (5.44)$$

wobei der Index $_0$ die Zeit heute angibt. Das Hubble-Gesetz kann auch für den Skalenparameter formuliert werden:

$$\frac{da(t)}{dt} = H(t) \cdot a(t) \quad (5.47)$$

Nützlich ist der Zusammenhang zwischen dem Skalenparameter a und der Rotverschiebung z , wobei $z = 0$ der heutigen Situation entspricht.

$$\frac{a_0}{a(t)} = 1 + z \quad (5.48)$$

- Die Dynamik einer Galaxie, die sich nach dem Hubble-Gesetz von uns entfernt, aber gleichzeitig aufgrund von Gravitationswechselwirkungen zurückgehalten wird, wird von der **Friedmann-Gleichung** beschrieben:

$$\left(\frac{da}{dt} \right)^2 - \frac{C}{a} + k = 0 \quad (5.60)$$

In der klassischen Berechnung repräsentiert k einen Energieparameter, in der relativitätstheoretischen Rechnung charakterisiert k die **Geometrie des Raums**. Für $k \leq 0$ expandiert das Universum für immer, während es für $k > 0$ durch die Gravitationswechselwirkung der Materie wieder in sich zusammenfällt.

- Aussagen über die verschiedenen **Dichten im Universum (Materie, Strahlung)** werden durch den **Dichtheparameter**

$$\Omega = \frac{\rho}{\rho_{0,c}} \quad (5.124)$$

formuliert, wobei

$$\rho_{0,c} = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \quad (5.70)$$

die kritische Dichte ist, aber der das Universum irgendwann wieder kollabiert.

Kosmologie 3

- Mit der Friedmann-Gleichung ausgedrückt mit dem Dichteparameter

$$\Omega - 1 = \frac{k}{a_0^2 H_0^2} \quad (5.74)$$

lässt sich die Entwicklung des Universums erfassen

$\Omega = 1 \rightarrow$	$k = 0 \rightarrow$	Expansion
$\Omega < 1 \rightarrow$	$k < 0 \rightarrow$	Expansion
$\Omega > 1 \rightarrow$	$k > 0 \rightarrow$	Kollaps

und auf ein **flaches, expandierendes Universum** schließen:

$$\Omega_{\text{tot}} = 1,011 \pm 0,006 \quad (5.75)$$

- Die **Anteile am Dichteparameter**: Ω_{tot} wird von dem Anteil

$$\Omega_\Lambda = 0,685(7) \quad (5.125)$$

dominiert, der die Vakuum-Energie beschreibt. Dies führt zu einem beschleunigt expandierenden Universum. Für die gesamte Materie ist

$$\Omega_M = 0,315, \quad (5.126)$$

wobei die baryonische Materie (normale Materie) nur

$$\Omega_b = 0,0493(6) \quad (5.127)$$

beiträgt und die Dunkle Materie überwiegt:

$$\Omega_{\text{DM}} = 0,265(7) \quad (5.128)$$

Strahlung trägt nur einen sehr geringen Anteil bei:

$$\Omega_{\text{rad}} = 5,38(15) 10^{-5}. \quad (5.129)$$

- Das **kosmologischen Prinzip** besagt:

Das Universum ist auf großen Skalen homogen und isotrop (Materie, Strahlung)

Damit sind große Abstandsskalen $\mathcal{O}(100 \text{ Mpc})$ gemeint, denn lokal beobachten wir ausgeprägte Strukturen in Form von Galaxien in Galaxienhaufen.

Kosmologie 4

- Das **Alter des Universums** lässt sich aus der Lösung der Friedmann-Gleichung abschätzen:

$$t_0 \approx \frac{2}{3} \frac{1}{H_0} \quad (5.81)$$

Genaue Berechnungen ergeben:

$$t_0 = (13,797 \pm 0,023) 10^9 \text{ y} \quad (5.84)$$

- Die **kosmische Hintergrundstrahlung** (englisch Cosmic Microwave Background, „CMB“) folgt perfekt dem Planck-Strahlungsgesetz (2.53) und hat eine effektive Temperatur:

$$T = 2,7255 \pm 0,0006 \text{ K} \quad (5.108)$$

Die Richtungsverteilung ist sehr homogen, Fluktuationen auf dem 10^{-5} -Niveau geben Informationen über die Frühphase des Universums und zeigen die Bildung von Galaxien an. Die Analyse von Multipolmomenten geben entscheidende Informationen über kosmologische Parameter an.

- Die **Materiedichte** $\rho = M/V$ sinkt durch die Expansion des Universums mit

$$\rho_M(t) \propto a^{-3}(t) \quad (5.113)$$

während die **Strahlungsdichte** der Photonen (Zählung von Photon) wegen der kosmologischen Rotverschiebung (Energieverlust durch Dopplereffekt) schneller sinkt:

$$\rho_S(t) \propto a^{-4}(t) \quad (5.114)$$

Dadurch hat sich das Universum von einem Strahlungs-dominierten zu einem Materie-dominierten Universum entwickelt. Durch das Stefan-Boltzmann-Gesetz $I = \sigma T^4$ kann die zeitliche Entwicklung des Universums auf die Temperaturänderung der kosmischen Hintergrundstrahlung zurückgeführt werden:

$$T(z) = 2,7 \text{ K}(1+z) \quad (5.119)$$

Kosmologie 5

- **Gravitationswellen** sind Schwingungen in der Raumzeit, die von Einstein im Rahmen der Allgemeinen Relativitätstheorie vorhergesagt wurden und 2015 erstmalig mit einem Michelson-Interferometer nachgewiesen wurden.
- Das Standardmodell der Kosmologie beschreibt die zeitliche Entwicklung des Universums beginnend vom **Urknall**. Dabei können sämtliche Phasen aufgrund der Kenntnisse über Elementarteilchen, Atome und Kosmologie schlüssig analysiert werden. Atomkerne entstanden bereits nach drei Minuten. Bemerkenswert ist, dass nach 400.000 Jahren neutrale Atome entstanden und damit Materie und Strahlung entkoppelten. Die heutigen **Anzahldichten** der Teilchen und Galaxien betragen:
 - Photonen $N_\gamma = 380/\text{cm}^3$
 - Neutrinos $N_\nu = 100/\text{cm}^3$
 - Protonen $N_p = 0,24/\text{m}^3$
 - Anzahl Galaxien im Universum 10^{11}
 - Anzahl Sterne pro Galaxie $10^9 - 10^{11}$

Literaturverzeichnis

- [1] Weigert, H.J. Wendker, L. Wisotzki, Astronomie & Astrophysik , Wiley-VCH
- [2] R.u.H. Sexl, Weiße Zwerge - Schwarze Löcher, Vieweg Verlag, 1979
- [3] W. Demtröder: Exp.physik 4, Kern-, Teilchen- & Astrophysik, Springer Verlag
- [4] F. Embacher,
<https://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/SRT/Dopplereffekt.html>
(29-Dec-2021)
- [5] M. Erdmann, G. Flügge, Experimentalphysik 1, Mechanik und Wärme, Pearson Deutschland GmbH, 2022
- [6] M. Erdmann, G. Flügge, M. Risse, Experimentalphysik 2, Felder und Wellen, Pearson Studium, ISBN 978-3-8689-4418-1 (2021)
- [7] M. Thomson, Modern Particle Physics, Cambridge University Press
- [8] D.H. Perkins, Introduction to High Energy Physics, Cambridge University Press
- [9] C. Berger, Elementarteilchenphysik, Springer Verlag
- [10] D. Griffiths, Introduction to Elementary Particles, Wiley-VCH
- [11] B. Povh, K. Rith, C. Scholz, F. Zetsche, Teilchen und Kerne, Springer Verlag
- [12] P.A. Zyla et al. (Particle Data Group), The Review of Particle Physics, Prog. Theor. Exp. Phys. 2020, 083C01 (2020). <https://pdg.lbl.gov/2020>
- [13] E. Aliu et al., Observation of Pulsed gamma-Rays Above 25 GeV from the Crab Pulsar with MAGIC. SCIENCE 322 (2008) 1221-1224.
- [14] Günter Flügge, Private communication, 2020
- [15] B.P. Abbott et al., GW150914: First results from the search for binary black hole coalescence with Advanced LIGO, Physical Review D 93 (2016) 122003
- [16] O.Yu. Smirnov et al., Measurement of neutrino flux from the primary proton-proton fusion process in the Sun with Borexino Detector, Phys.Part.Nucl. 47 (2016) 6, 995-1002

Literaturverzeichnis

- [17] R. Horsley et al., Isospin breaking in octet baryon mass splittings, Phys.Rev.D 86 (2012) 114511
- [18] E.O. Bloom and C.W. Peck, Ann. Rev. Nucl. Part. Science 33, 143 (1983)
- [19] Wikipedia, Die freie Enzyklopädie, <https://de.wikipedia.org>