Optik Formelsammlung

August 14, 2020

Paraxiale Linsen

Brechungsgesetz

$$\begin{aligned} A &= n \sin i = n' \sin i' \; mit \; i = h \cdot c + u \\ &= n(hc + u) = n'(hc + u') \end{aligned}$$

Brechungsinvariante A
Brechzahl n
Brechwinkel i
Randstrahlwinkel u
Krümmung $c = \frac{1}{r}$
Strahlhöhe h

Linsenmacherformel

$$f' = \frac{nR_1R_2}{N(n-1)}$$

Hilfsgröße $N = d(n-1) + n(R_2 - R_1)$
Linsendicke d
Radius der Fläche i R_i

$$F = (n-1)(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{d(n-1)}{nR_1R_2})$$

Brechkräfte:

$$F_1 = (n-1) \cdot c_1$$

$$F_2 = -(n-1) \cdot c_2$$

Fall eine Seite plan ($R_1 = \infty$):

$$f' = -\frac{R_2}{n-1}$$

Für $R_2 = \infty -> \frac{R_1}{n-1}$

Mittendicke Plankonvexlinse d

$$d = R - \sqrt{R^2 - (\frac{D}{2})^2} + d_{rand}$$

Radius R
Linsendurchmesser D

Hauptebenen

$$\overline{V_1H} = \frac{-R_1 d}{N} = -d \cdot c_2 \cdot (\frac{n-1}{n}) \cdot f'$$

$$\overline{V_2H'} = \frac{-R_2 d}{N} = -d \cdot c_1 \cdot (\frac{n-1}{n}) \cdot f'$$

Scheitelpunkt der Fläche i V_i
Objektseitige Hauptebene H
Bildseitige Hauptebene H'
Hilfsgröße $N = d(n-1) + n(R_2 - R_1)$
Für $R_1 = \infty$und R_2negativ $\overline{S_1H} = \frac{d}{n}{}'$ $\overline{S_2H'} = 0$

Fall Linsensystem (zwei dünnen Linsen):

$$\overline{V_1H} = e\frac{f'_{ges}}{f'_2}$$

$$\overline{V_2H'} = e\frac{f'_{ges}}{f'_1}$$

Abstand zwischen den Linsen e

Brennweite

$$f' = -\frac{y'}{\tan u} = k \cdot D_{EP}$$

Durchmesser D
Eintrittspupille EP
Bildhöhe y'
Blendenzahl k

Brechende Fläche:

$$f' = \frac{r}{n' - n}$$

Flächenradius r

$$f' = \frac{1}{\frac{n'}{s'} - \frac{n}{s}}$$

$$s'_{F'} = \frac{1 - \frac{d}{n}F_1}{F} \quad s_F = \frac{1 - \frac{d}{n}F_2}{F}$$

Objektschnittweite (zu V_i) s
Bildschnittweite (zu V_i) s'

Zweilinser:

$$f' = \frac{f'_1 f'_2}{f'_1 + f'_2 - e}$$

Abbildungsgleichung

$$F = \frac{1}{f'} = \frac{1}{a'} - \frac{1}{a}$$

Brechzahl F
Brennweite f'
Objektweite (zu H) a
Bildweite (zu H') a'

Abbildungsmaßstab β' (Transversale (laterale) Vergrößerung)

$$\beta' = \frac{a'}{a} = \frac{s'}{s} = \frac{y'}{y} = \frac{D_{EP}}{D_{ABL}} = \frac{-f'_{ok}}{f'_{obj}}$$

Objekthöhe y
Bildhöhe y'
Durchmesser D
Eintrittspupille EP
Aperturblende ABL
Okular ok
Objektiv obj

Bei brechender Fläche:

$$\beta' = \frac{ns'}{n's}$$

Winkelvergrößerung (afokal) Γ

$$\Gamma = \frac{\Theta_{out}}{\Theta_{in}} = \frac{f'_1}{f'_2} = \frac{h'}{h}$$

Halber Öffnungswinkel Θ

Gesichtsfeldwinkel Θ

$$\tan\Theta = \frac{D_{AL}}{2f'}$$

Austrittsluke AL

Blendenzahl k

$$f/\# = k = \frac{f'_{ges}}{D_{EP}}$$

$$k_{eff} = (1 - \beta') \cdot k$$

Austrittspupille

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{a'_{XP}} - \frac{1}{a_{ABL}} \to a'_{XP} = (\frac{1}{f'} + \frac{1}{a_{ABL}})^{-1}$$

$$D_{XP} = D_{ABL}|\frac{a'_{XP}}{a_{ABL}}|$$

Randstrahlwinkel σ

$$\tan\sigma = \frac{D_{EP}}{2|a_{EP}|}$$

Abstand Objekt - Eintrittspupille a_{EP}

Numerische Apertur NA

Objektseitig

$$NA = n \cdot \sin u$$

Ranstrahlwinkel vor der ersten Fläche u

Bildseitig

$$NA = n' \cdot \sin u' = \frac{1}{2k_{eff}}$$

Randstrahlwinkel hinter der letzten Fläche u'
Effektive Blendenzahl k_{eff} für $s \to -\infty$ $k_{eff} = k$

Lagrangesche Invariante $\mathcal{H}$

$$\mathcal{H} = n(\bar{y}u - y\bar{u}) = n(\bar{y}\sin\Theta - y\sin\bar{\Theta}) = const$$

Abbe-Zahl ν

$$\nu = \frac{n_d - 1}{n_F - n_C}$$

Wellenlägngen $F, d, C = 486, 588, 656\,nm$ (rot, grün, blau)

Excentrizität E

An ABL $E = 0$; $d - Abstand\, i -> i + 1$

$$\mathcal{H} \cdot E = \frac{\bar{h}}{h}$$

$$\bar{A} = \frac{\mathcal{H}}{h} \cdot (A \cdot h \cdot E - 1) = n \cdot \bar{i}$$

$$E_{i+1} - E_i = \frac{-d}{n \cdot h_i \cdot h_{i+1}}$$

Kontrast M

$$M = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}$$

Intensität I

Aberrationen

Seidelkoeffizient S_i
Seidelkoeffizient der chromatischen Aberration C_i
Wellenkoeffizeint ${}_iw_{jk}$
Lage des Strahls in der Austrittspupille x
Lage des Strahls in der Austrittspupille y
Radius $r = \sqrt{x^2 + y^2}$
Brechungsinvariante des Randstrahls A
Brechungsinvariante des Hauptstrahls $\bar{A}$
Objektgröße η
$\delta n = n_F - n_C$ $\delta(\frac{\delta n}{n}) = \frac{\delta n'}{n'} - \frac{\delta n}{n}$ $\delta(\frac{u}{n}) = \frac{u'}{n'} - \frac{u}{n}$ $\delta(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n'} - \frac{1}{n}$

Defokus

$$\delta\eta' = -\frac{2 \cdot_0 w_{20} \cdot y_{rel}}{NA}$$

Sphärische Aberration (SPHA)

Kreisförmiger Spot - Sphärische Flächen erzeugen keinen eindeutigen Fokus

Korrektur:

- Für Plankonvexlinse: Planseite zur Bildebene orientieren.
- Asphären verwenden
- Abblenden (Bei erhöhung um eine Blendenstufe reduziert sich die sphärische Aberration um den Faktor $\sqrt{2}^3$)
- Linsenbiegen

$$S_1 = -A^2 \cdot h \cdot \delta(\frac{u}{n})$$

$$_0w_{40} = \frac{1}{8}S_1$$

Wellefrontaberrationen

$$W_{SPHA} = \frac{1}{8} \cdot S_1 \cdot (x^2 + y^2)^2 = \frac{1}{8} \cdot S_1 \cdot r^4$$

Queraberration:

$$\delta\eta' = -\frac{4 \cdot_0 w_{40} \cdot y_{rel}^3}{NA} = \frac{S_1}{2 \cdot n' \cdot u'}$$

Minimale Sphärische Aberration durch Linsenbiegen:

$$\gamma_{SA} = \frac{R_2 + R_1}{R_2 - R_1} = \frac{-2(n^2-1)(s'+s)}{(n+2)(s'-s)}$$

Für $s = -\infty$:

$$R_1 = R_2 \frac{-2(n^2-1) - n - 2}{-2(n^2-1) + n + 2}$$

Koma (COMA)

Kometenartiger Spot - Schiefes Bündel (AST) + kein eindeutiger Fokus (SPH)

Korrektur:

- Abblenden
- Positionierung der Blende: Aufbau möglichst symmetrisch zur Aperturblende
- Aplanat mit Bedingung $s = \frac{n+n'}{n}r$; $s' = \frac{n+n'}{n'}r$

$$S_2 = -A \cdot \bar{A} \cdot h \cdot \delta(\frac{u}{n}) = \frac{\bar{A}}{A} \cdot S_1$$

$$_1w_{31} = \frac{1}{2} \cdot S_2$$

Wellefrontaberrationen

$$W_{COMA} = \frac{1}{2} \cdot S_2 \cdot y \cdot (x^2 + y^2) \cdot \eta$$

Queraberration:

$$\delta\eta' = -\frac{3 \cdot_1 w_{31} \cdot \eta_{rel} \cdot y_{rel}}{NA} = \frac{3 \cdot S_2}{2 \cdot n' \cdot u'}$$

Astigmatismus (ASTI)

Stäbchenförmiger Spot - Schiefes Bündel trifft nur auf Teillinse: Brechkraft in Sagittal- und Tangentialebene unterschiedlich. (Tangential -> Ebene des Hauptstrahls und der optischen Achse und y-Richung | Saggital -> Senkrecht zu Tangentialebene, ändert sich mit Hauptstrahl)

Korrektur:

- Sagittale- und Tangentiale Bildschale = Petzvalschale
- "Anastigmat" z.B. Cooke Triplet

$$S_3 = -\bar{A}^2 \cdot h \cdot \delta(\frac{u}{n}) = (\frac{\bar{A}}{A})^2 \cdot S_1$$

$${}_2w_{22} = \frac{1}{2} \cdot S_3$$

Wellefrontaberrationen

$$W_{ASTI} = \frac{1}{2} \cdot S_3 \cdot y^2 \cdot \eta^2$$

Queraberration:

$$\delta\eta' = -\frac{2 \cdot {}_2\, w_{22} \cdot \eta_{rel}^2 \cdot y_{rel}}{NA} = \frac{3 \cdot S_3 + S_4}{2 \cdot n' \cdot u'}$$

Bildbeldwölbung (FCUR)

Bildschale auf flachem Sensor. Bildmitte oder Bildrand ist unscharf. Bildschale = Petzvalschale

Korrektur:

- Abblenden
- Bildfeldebnung - Bedingung: $f_1' = f_{ges}'(1 - \cdot\frac{n2}{n1})$; $f_2' = f_{ges}'(1 - \frac{n_1}{n_2})$
- Gekrümmter Sensor
- Field flattener Systeme

$$S_4 = -\mathcal{H}^2 \cdot c \cdot \delta(\frac{1}{n})$$

$$_2w_{20} = \frac{1}{4} \cdot (S_4)\ Petzval$$

$$_2w_{20} = \frac{1}{4} \cdot (S_3 + S_4)\ Sagittal$$

Wellenfrontaberrationen

$$W_{FCUR} = \frac{1}{4} \cdot (S_3 + S_4) \cdot (x^2 + y^2) \cdot \eta^2$$

Queraberration:

$$\delta\eta' = -\frac{2 \cdot_2 w_{20} \cdot \eta_{rel}^2 \cdot y_{rel}}{NA}\ Petzval$$

Verzeichnung (DIST)

Änderung des Abbildungsmaßstabs abhängig vom Feldwinkel durch Koma und sphärische Aberration des Hauptstrahls. Tonnenförmig oder Kissenförmig. Vertauschen von Bild und Objektebene dreht Verzeichung um. Vorderblende Plus (Minus) Linse tonnen- (kissen-) förmige Verzeichnung. Bei Hinterblende umgekehrt. Ein symmetrisch zur Aperturblende aufgebautes System mit $\beta' = -1$ ist verzeichnungsfrei.

Korrektur:

- Blendenposition ändern
- Nach digitalisierung korrigieren

$$S_5 = \frac{\bar{A}}{A} \cdot (S_3 + S_4)$$

$$_3w_{11} = \frac{1}{2} \cdot S_5$$

Wellenfrontaberrationen

$$W_{DIST} = \frac{1}{2} \cdot S_5 \cdot y \cdot \eta^3$$

Queraberration:

$$\delta\eta' = -\frac{_3w_{11} \cdot \eta_{rel}^3}{NA} = \frac{S_5}{2 \cdot n' \cdot u'}$$

Farblängsfehler (AXCL)

Brechzahl hängt von der Wellenlänge ab (Dispersion): Fokusposition ist farbabhängig.

Korrektur:

- Achromasiebedingung $f_1' = f_{ges}'(1 - \frac{\nu_2}{\nu_1})$; $f_2' = f_{ges}'(1 - \frac{\nu_1}{\nu_2})$ (nur bei Abstand der Linse e = 0)

$$C_1 = A \cdot h \cdot \delta(\frac{\delta n}{n})$$

Wellefrontaberration:

$$W_{AXCL} = \frac{1}{2} \cdot C_1 \cdot \delta n_{F \to c} \cdot (x^2 + y^2)$$

Queraberration:

$$\delta\eta' = -\frac{2 \cdot r \cdot C_1}{NA}$$

Farbquerfehler (LACL)

Brechzahl hängt von der Wellenlänge ab (Dispersion): Objektpunkt wird in der Bildebene zu farblich versetzten Punkten.

Korrektur:

- Achromasiebedingung siehe (AXCL)
- Digital

$$C_2 = \bar{A} \cdot h \cdot \delta(\frac{\delta n}{n}) = \frac{\bar{A}}{A} \cdot C_1$$

Wellefrontaberration:

$$W_{LACL} = C_2 \cdot \delta n_{F \to c} \cdot y$$

Aberrationen bei Verschieben der Blende

Koma

$$S_2^* = S_2 + [S_1 \cdot \mathcal{H} \cdot \Delta E];\ \Delta S_2$$

Astigmatismus

$$S_3^* = S_3 + [2 \cdot \mathcal{H} \cdot \Delta E \cdot S_2 + (\mathcal{H} \cdot \Delta E)^2 \cdot S_1];\ \Delta S_3$$

Verzeichnung

$$S_5^* = S_5 + [\mathcal{H} \cdot \Delta E \cdot (3 \cdot S_3 + S_4) + 3 \cdot (\mathcal{H} \cdot \Delta E)^2 \cdot S_2 + (\mathcal{H} \cdot \Delta E)^3 \cdot S_1];\ \Delta S_5$$

Farbquerfehler

$$C_2^* = C_2 + [\mathcal{H} \cdot \Delta E\} \cdot C_1];\ \Delta C_2$$

Wellenfrontaberrationen als Summe:

$$
\begin{aligned}
W =_0 & \, w_{20} \cdot r^2 \; Defocus \\
&+_1 w_{11} \cdot \eta \cdot r \cdot cos\Phi \; Change\ in\ Scale \\
&+_2 w_{00} \cdot \eta^2 \\
&+_0 w_{40} \cdot \eta^4 \; Spherical\ aberration \\
&+_1 w_{31} \cdot \eta \cdot r^3 \cdot cos\Phi \; Coma \\
&+_2 w_{22} \cdot \eta^2 \cdot r^2 \cdot cos^2\Phi \; Astigmatism \\
&+_2 w_{20} \cdot \eta^2 \cdot r^2 \; Fieldcurvature \\
&+_3 w_{11} \cdot \eta^3 \cdot r \cdot cos\Phi \; Distortion \\
&+_4 w_{00} \cdot \eta^4 \\
&+_0 w_{60} \cdot r^6 \; Sphericalaberration \\
&+ etc.
\end{aligned}
$$

Spezialfälle:

Afokaler Einlinser:

$$d = \frac{2 \cdot R \cdot n}{n-1}$$

$$f' = \frac{R}{n-1}$$

$$a = \frac{-2 \cdot n}{(n-1) \cdot (2 \cdot n - 1)} \cdot R$$

Kugellinse:

$$f' = \frac{n \cdot R}{2 \cdot (n-1)}$$

$$\overline{V_1 P} = -\overline{V_2 P'} = R$$

$$s' = \frac{1}{n-1} \cdot \frac{R_2 \cdot [n \cdot R_1 - (n-1) \cdot d]}{(n-1) \cdot d + n \cdot (R_2 - R_1)} = f' - R_1$$