EME 303
Mecânica Vetorial - Estática
- CAPÍTULO 5 -

Profa. Patricia
Email: patty_lauer@unifei.edu.br

IEM – *Instituto de Engenharia Mecânica*
UNIFEI – *Universidade Federal de Itajubá*

5 – CENTRO DE GRAVIDADE E CENTRÓIDE

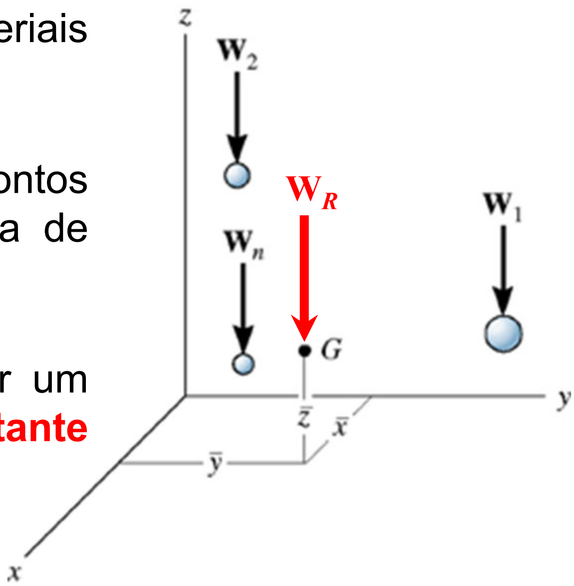
- **5.1 – Centro de Gravidade**
- **5.2 – Centro de Massa**
- **5.3 – Centróide**
- **5.4 – Corpos Compostos**
  - 5.4.1 – Centróide de corpos compostos.
- **5.5 – Momento Estático de Área**

5.1 – Centro de Gravidade

- **CENTRO DE GRAVIDADE:** ponto no qual se localiza o **peso resultante** de um sistema de pontos materiais.

- Seja o sistema de *n* pontos materiais fixos em uma região do espaço;
- Considerando que os pesos dos pontos materiais compreendem um sistema de forças paralelas;
- O sistema pode ser substituído por um único (equivalente) **peso resultante** aplicado em ***G***:

$$W_R = \sum_{i=1}^{n} W_i$$



EME303 – Mecânica Vetorial - ESTÀTICA

5.1 – Centro de Gravidade

- **CENTRO DE GRAVIDADE:** ponto no qual se localiza o **peso resultante** de um sistema de pontos materiais.

- **Já vimos que... (Teorema de Varignon)**

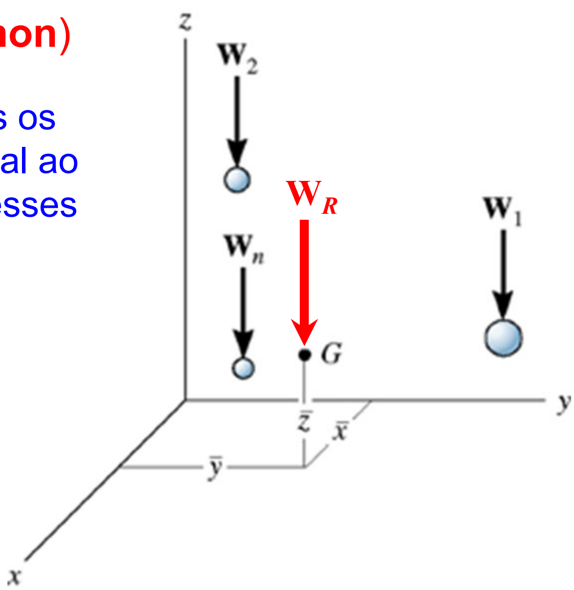
A soma dos momentos dos pesos de todos os pontos materiais em relação aos eixos é igual ao momento do peso resultante em relação a esses eixos.

- Em relação ao eixo *y*

$$\bar{x}W_R = \tilde{x}_1 W_1 + \tilde{x}_2 W_2 + \cdots + \tilde{x}_n W_n$$

- Em relação ao eixo *x*

$$\bar{y}W_R = \tilde{y}_1 W_1 + \tilde{y}_2 W_2 + \cdots + \tilde{y}_n W_n$$



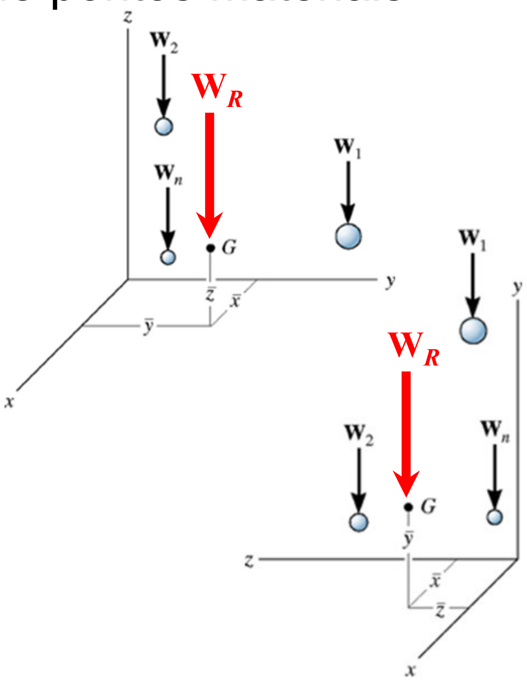
5.1 – Centro de Gravidade

- **CENTRO DE GRAVIDADE:** ponto no qual se localiza o **peso resultante** de um sistema de pontos materiais.

Mas os pesos não produzem um momento em torno do eixo z!!!

- Rotacionando em 90° apenas o sistema de coordenadas em torno do eixo *x* (pontos materiais fixos)

$$\bar{z}W_R = \tilde{z}_1 W_1 + \tilde{z}_2 W_2 + \cdots + \tilde{z}_n W_n$$



5.1 – Centro de Gravidade

- **CENTRO DE GRAVIDADE:** ponto no qual se localiza o **peso resultante** de um sistema de pontos materiais.

$$\boxed{\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(\tilde{x}_i W_i)}{\sum_{i=1}^{n} W_i}; \quad \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(\tilde{y}_i W_i)}{\sum_{i=1}^{n} W_i}; \quad \bar{z} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(\tilde{z}_i W_i)}{\sum_{i=1}^{n} W_i}}$$

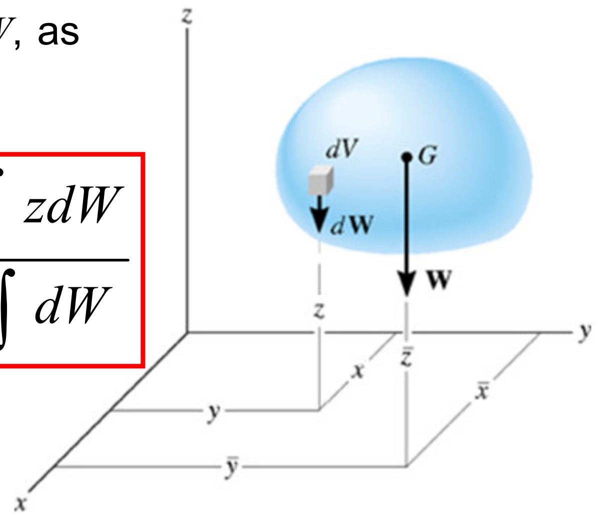
$\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ - coordenadas do centro de gravidade

$\tilde{x}_i, \tilde{y}_i, \tilde{z}_i$ - coord. de cada ponto material no sistema

5.1 – Centro de Gravidade

- Um corpo rígido possui um infinito número de partículas;
- No **corpo contínuo**, os somatórios são substituídos por integrais;
- Considerando uma partícula arbitrária localizada em (x, y, z), com peso dW, as equações resultantes são:

$$\boxed{\bar{x} = \frac{\int x dW}{\int dW}; \ \bar{y} = \frac{\int y dW}{\int dW}; \bar{z} = \frac{\int z dW}{\int dW}}$$



EME303 – Mecânica Vetorial - ESTÀTICA

5.1 – Centro de Gravidade

$$\boxed{\bar{x} = \frac{\int x dW}{\int dW}; \ \bar{y} = \frac{\int y dW}{\int dW}; \bar{z} = \frac{\int z dW}{\int dW}}$$

- Escrevendo o peso infinitesimal em termos do volume e do peso específico do corpo,

$$\mathrm{d}W = \gamma \mathrm{d}V$$

$$\bar{x} = \frac{\int_V x\gamma dV}{\int_V \gamma dV}; \quad \bar{y} = \frac{\int_V y\gamma dV}{\int_V \gamma dV}; \quad \bar{z} = \frac{\int_V z\gamma dV}{\int_V \gamma dV}$$

5.2 – Centro de Massa

- Agora, escrevendo o peso específico em termos da massa específica (massa por unidade de volume) e da aceleração da gravidade,

$$\gamma = \rho g$$

$$\bar{x} = \frac{\int_V x\rho g dV}{\int_V \rho g dV}; \quad \bar{y} = \frac{\int_V y\rho g dV}{\int_V \rho g dV}; \quad \bar{z} = \frac{\int_V z\rho g dV}{\int_V \rho g dV}$$

- Cancelando g do numerador e do denominador,

$$\boxed{\bar{x} = \frac{\int_V x\rho dV}{\int_V \rho dV}; \quad \bar{y} = \frac{\int_V y\rho dV}{\int_V \rho dV}; \quad \bar{z} = \frac{\int_V z\rho dV}{\int_V \rho dV}}$$

5.3 – Centróide

- **CENTRÓIDE:** ponto que define o centro geométrico de um objeto.
  - Se o material que compõe o corpo for **uniforme** ou **homogêneo**, a massa específica ou o peso específico será constante;
  - Logo,

$$\boxed{\bar{x} = \frac{\int_V x dV}{\int_V dV}; \quad \bar{y} = \frac{\int_V y dV}{\int_V dV}; \quad \bar{z} = \frac{\int_V z dV}{\int_V dV}}$$

5.3 – Centróide

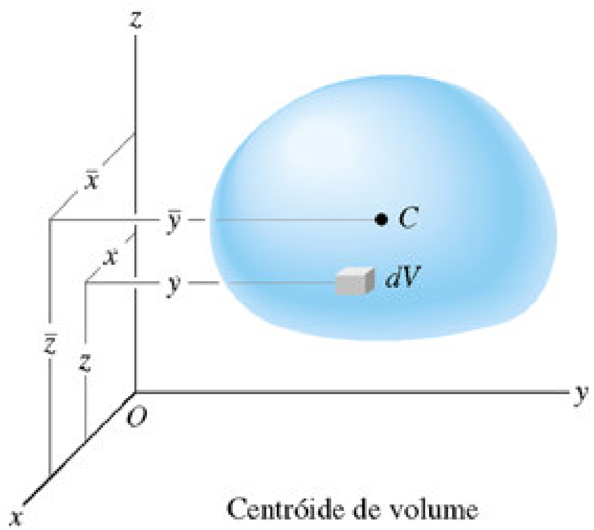
- **CENTRÓIDE:** ponto que define o centro geométrico de um objeto.

$$\bar{x} = \frac{\int_V x dV}{\int_V dV}; \quad \bar{y} = \frac{\int_V y dV}{\int_V dV}; \quad \bar{z} = \frac{\int_V z dV}{\int_V dV}$$

- As fórmulas resultantes dependem apenas da geometria do corpo. Três casos específicos serão considerados:
  - **Centróide de volume;**
  - **Centróide de área;**
  - **Centróide de linha.**

5.3 – Centróide

- **Centróide de volume**

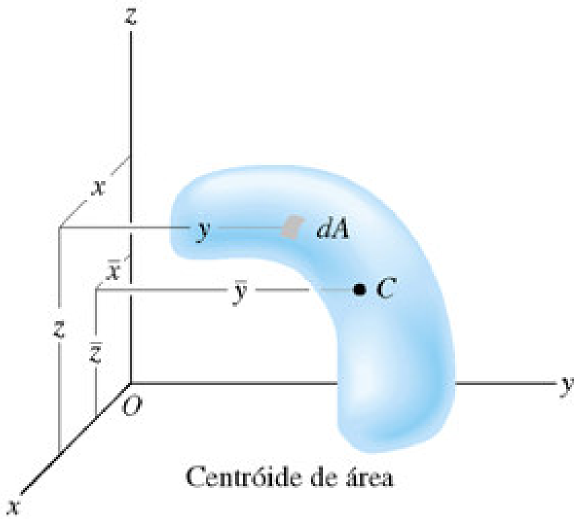


Centróide de volume

$$\bar{x} = \frac{\int_V x dV}{\int_V dV}; \quad \bar{y} = \frac{\int_V y dV}{\int_V dV}; \quad \bar{z} = \frac{\int_V z dV}{\int_V dV}$$

5.3 – Centróide

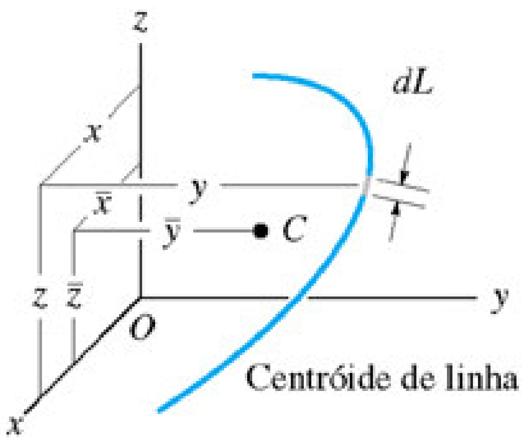
- **Centróide de área**
  - Área da superfície de um objeto (placa ou concha).



$$\bar{x} = \frac{\int_A x\,dA}{\int_A dA}; \quad \bar{y} = \frac{\int_A y\,dA}{\int_A dA}; \quad \bar{z} = \frac{\int_A z\,dA}{\int_A dA}$$

5.3 – Centróide

- **Centróide de linha**
  - Formato de um fio (barra fina ou fio).



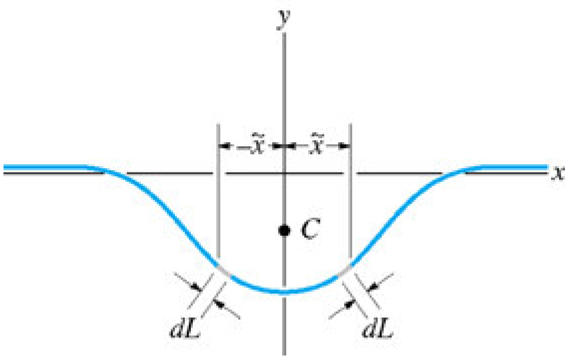
$$\bar{x} = \frac{\int_L x\,dL}{\int_L dL}; \quad \bar{y} = \frac{\int_L y\,dL}{\int_L dL}; \quad \bar{z} = \frac{\int_L z\,dL}{\int_L dL}$$

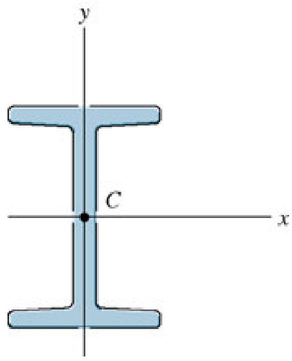
5.3 – Centróide

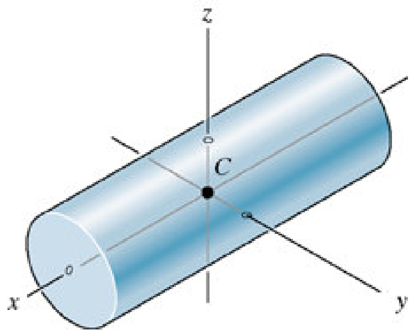
❑ **SIMETRIA**:

✓ Se a forma geométrica tem um eixo de simetria, o centróide dela ficará sobre esse eixo;

✓ Se a forma geométrica tem dois ou três eixos de simetria, o centróide se localizará na intersecção desses eixos.

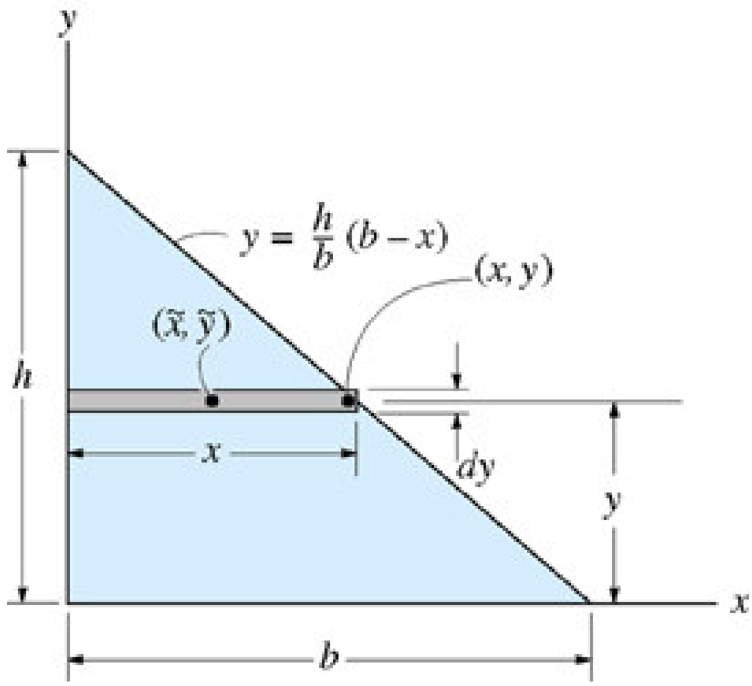






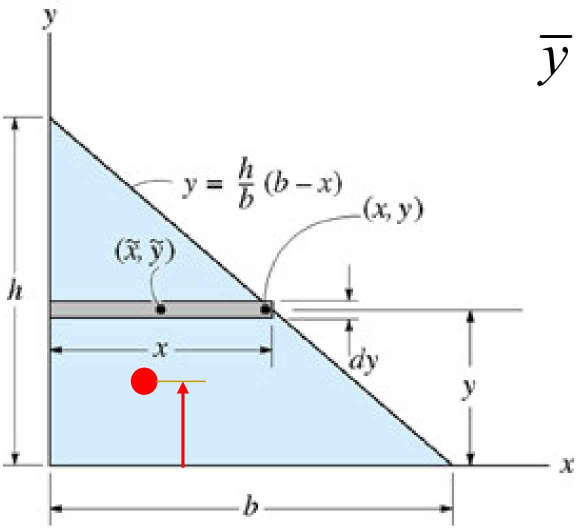
Exemplo 5.1

Calcular o centróide da chapa de aço triangular.



Exemplo 5.1 - *Solução*

- Cálculo da distância $\bar{y}$ do eixo *x* ao centróide da área do triângulo.



$$\bar{y} = \frac{\int_A y\,dA}{\int_A dA} = \frac{\int_0^h yx\,dy}{\int_0^h x\,dy} =$$

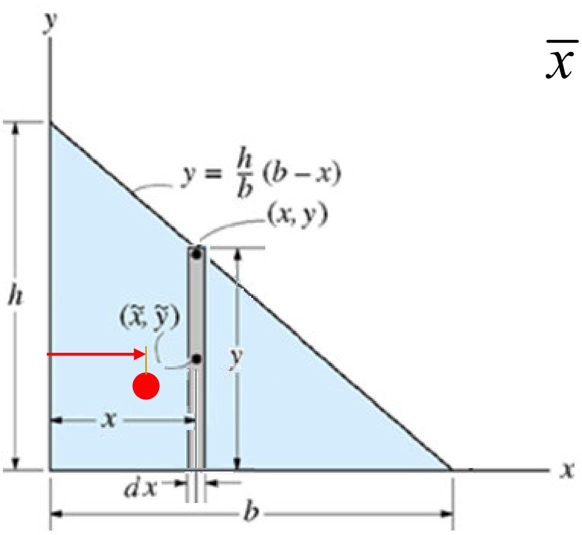
$$= \frac{\int_0^h y\frac{b}{h}(h-y)\,dy}{\int_0^h \frac{b}{h}(h-y)\,dy} = \frac{\frac{1}{6}bh^2}{\frac{1}{2}bh} =$$

$$= \frac{h}{3}$$

EME303 – Mecânica Vetorial - ESTÀTICA

Exemplo 5.1 - *Solução*

- Cálculo da distância $\bar{x}$ do eixo *y* ao centróide da área do triângulo.



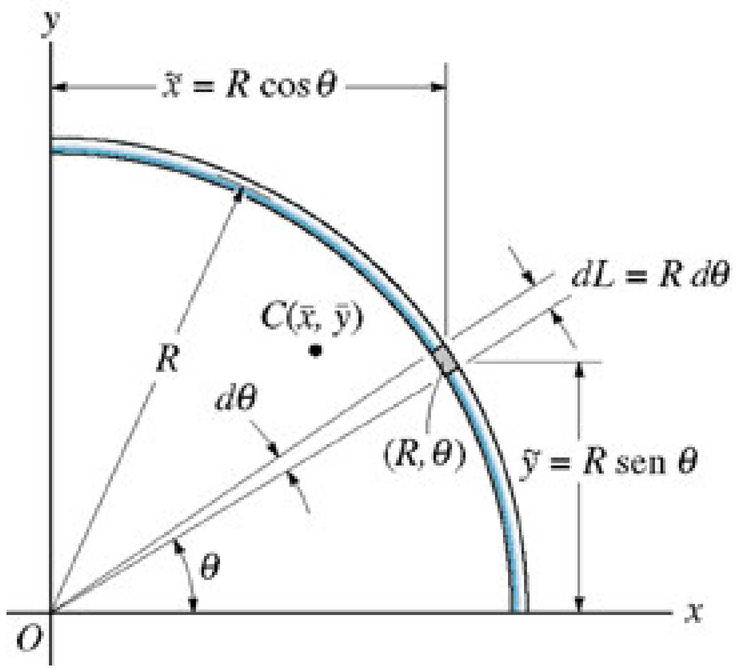
$$\bar{x} = \frac{\int_A x\,dA}{\int_A dA} = \frac{\int_0^b xy\,dx}{\int_0^b y\,dx} =$$

$$= \frac{\int_0^b x\frac{h}{b}(b-x)\,dx}{\int_0^b \frac{h}{b}(b-x)\,dx} = \frac{\frac{1}{6}hb^2}{\frac{1}{2}bh} =$$

$$= \frac{b}{3}$$

Exemplo 5.2

Calcular o centróide do segmento circular do fio.



Exemplo 5.2 - *Solução*

- Como o arco é circular, usaremos coordenadas polares.

$$\overline{x} = \frac{\int_L x dL}{\int_L dL} = \frac{\int_0^{\pi/2} (R\cos\theta) R d\theta}{\int_0^{\pi/2} R d\theta} = \frac{R^2 \int_0^{\pi/2} \cos\theta d\theta}{R\int_0^{\pi/2} d\theta} = \frac{2R}{\pi}$$

$$\overline{y} = \frac{\int_L y dL}{\int_L dL} = \frac{\int_0^{\pi/2} (R\,\text{sen}\,\theta) R d\theta}{\int_0^{\pi/2} R d\theta} = \frac{R^2 \int_0^{\pi/2} \text{sen}\,\theta d\theta}{R\int_0^{\pi/2} d\theta} = \frac{2R}{\pi}$$

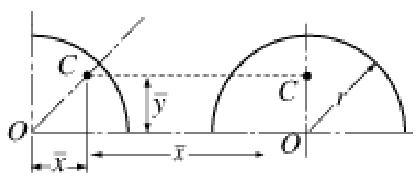
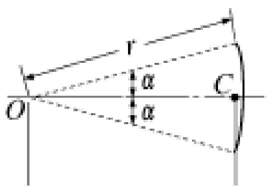
5.4 – Corpos Compostos

- Conjunto de corpos de formatos *mais simples* (retangulares, triangulares, semicirculares etc.);
  - Pode ser dividido em várias partes;
  - Cada parte terá seu peso W_i e a localização do seu centro de gravidade conhecidos.
    - Cada parte do corpo é tratada como uma partícula (Seção 5.1);
    - O peso resultante é aplicado no centro de gravidade do sólido composto.

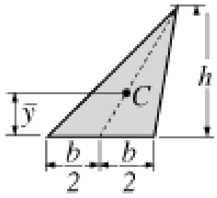
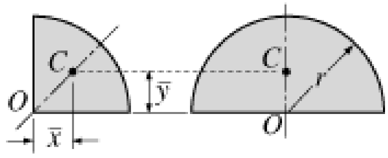
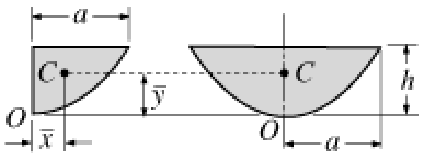
$$\boxed{\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(\tilde{x}_i W_i)}{\sum_{i=1}^{n} W_i}; \quad \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(\tilde{y}_i W_i)}{\sum_{i=1}^{n} W_i}; \quad \bar{z} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(\tilde{z}_i W_i)}{\sum_{i=1}^{n} W_i}}$$

5.4.1 – Centróide de corpos compostos

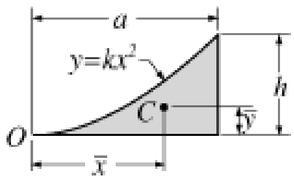
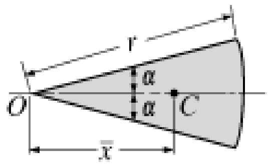
- Centróide de linhas e áreas planas

Shapes	Images	$\bar{x}$	$\bar{y}$	Area
Quarter-circular arc		$\frac{2r}{\pi}$	$\frac{2r}{\pi}$	$\frac{\pi r}{2}$
Semicircular arc		0	$\frac{2r}{\pi}$	πr
Arc of circle		$\frac{r \sin \alpha}{\alpha}$	0	$2\alpha r$

5.4.1 – Centróide de Corpos Compostos

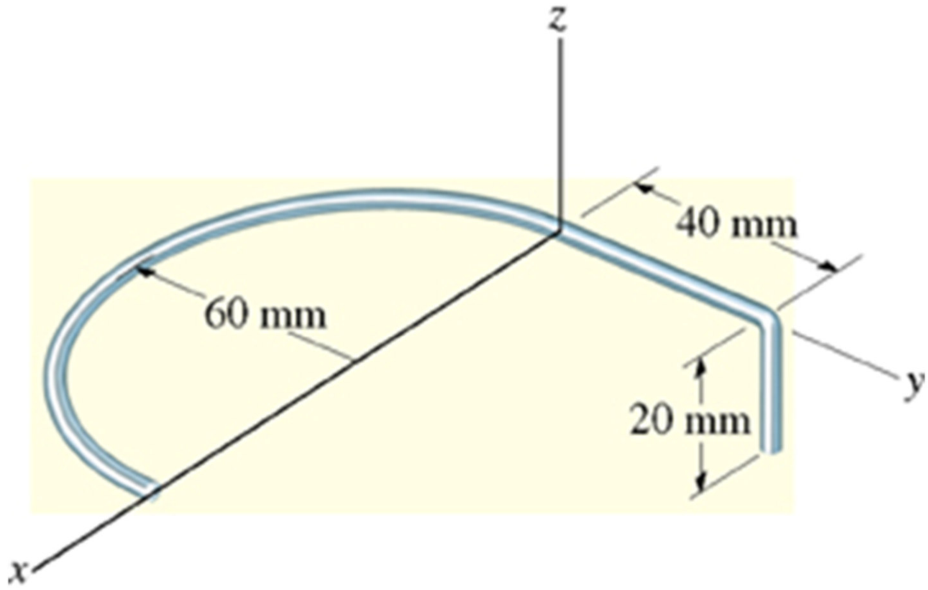
Shapes	Images	$\bar{x}$	$\bar{y}$	Area
Triangular Area			$\frac{h}{3}$	$\frac{bh}{2}$
Quarter–circular area		$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{4}$
Semicircular area		0	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{2}$
Semiparabolic area		$\frac{3a}{8}$	$\frac{3h}{5}$	$\frac{2ah}{3}$
Parabolic area		0	$\frac{3h}{5}$	$\frac{4ah}{3}$

5.4.1 – Centróide de Corpos Compostos

Shapes	Images	$\bar{x}$	$\bar{y}$	Area
Parabolic spandrel		$\frac{3a}{4}$	$\frac{3h}{10}$	$\frac{ah}{3}$
Circular Sector		$\frac{2r \sin \alpha}{3\alpha}$	0	αr^2

Exemplo 5.3

Localize o centróide do fio mostrado na figura.



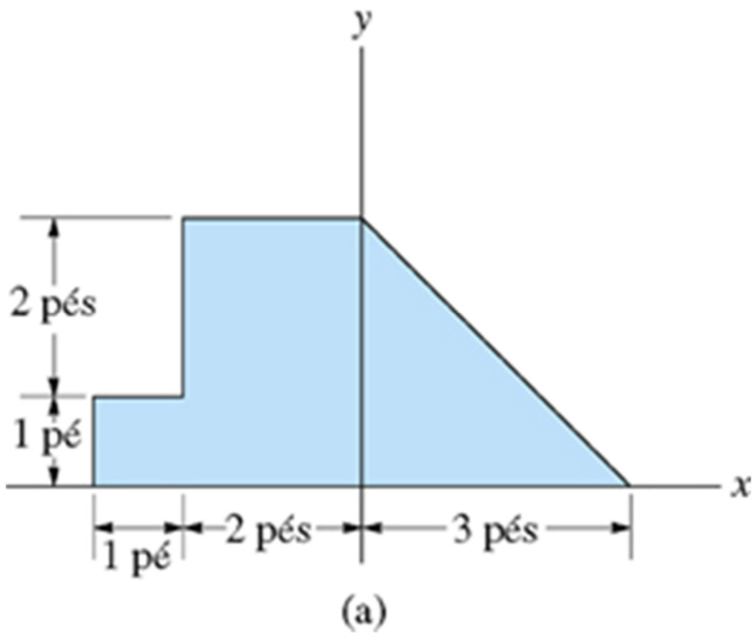
(a)

5.4.1 – Centróide de Corpos Compostos

FUROS ou CAVIDADES possuem *peso*, *volume* ou *área* NEGATIVOS!!!

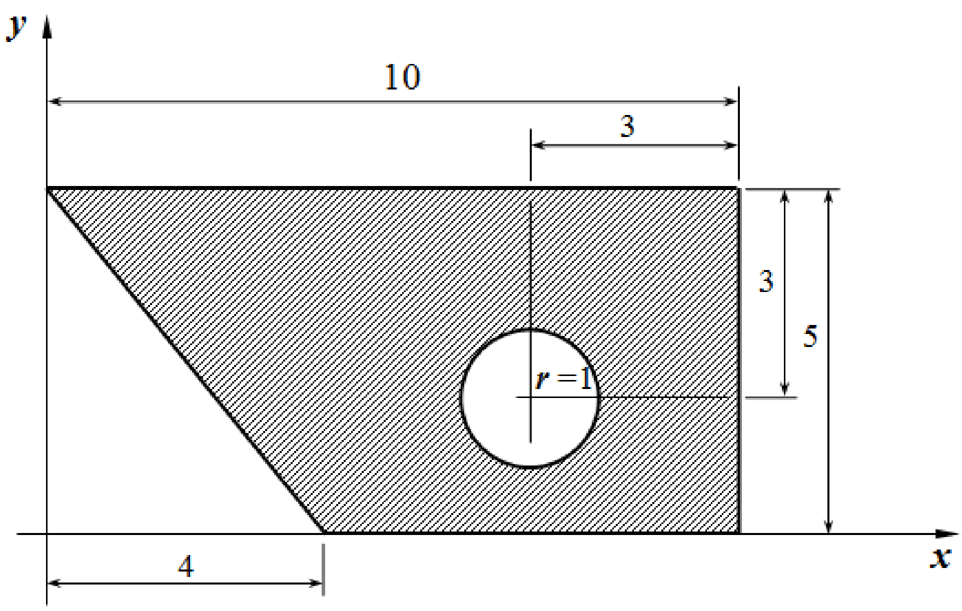
Exemplo 5.4

Localize o centróide da área plana da placa mostrada.



Exemplo 5.5

Determinar o centróide da chapa de alumínio cortada conforme a figura. Medidas em metros.



5.5 – Momento Estático de Área

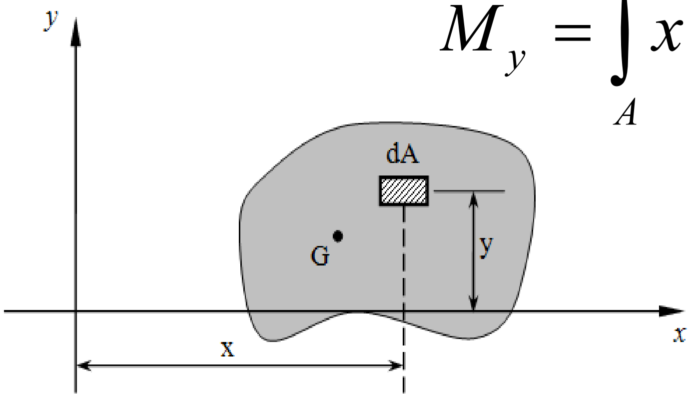
- Os momentos estáticos M_x e M_y de uma área em relação ao eixo x e ao eixo y, respectivamente, são definido como:

$$M_x = \int_A y\,dA$$

y é a distância da área elementar dA ao eixo Ox

$$M_y = \int_A x\,dA$$

x é a distância da área elementar dA ao eixo Oy



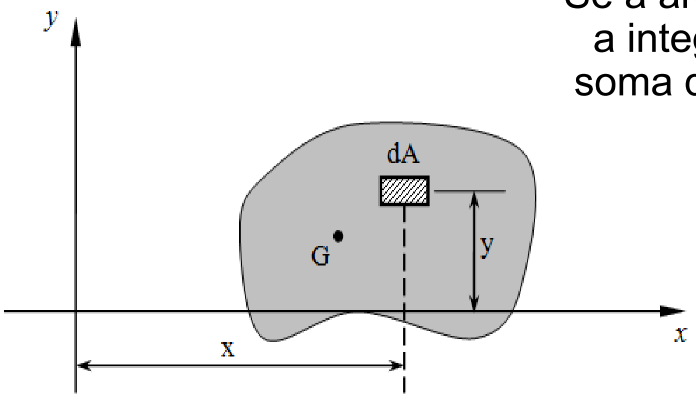
PRIMEIRO MOMENTO DE ÁREA

5.5 – Momento Estático de Área

$$M_x = \int_A y\,dA$$

$$M_y = \int_A x\,dA$$

- Podem ser _positivo_, _negativo_ ou _zero_.

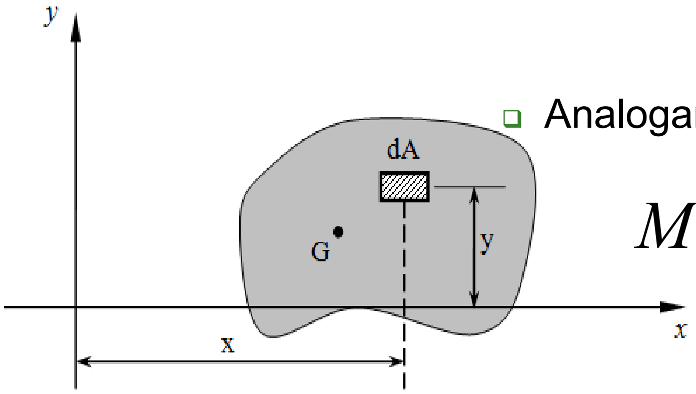


Se a área é identificada como uma “força”, a integral pode ser interpretada como a soma dos momentos das “forças” dA com relação ao eixo Ox.

5.5 – Momento Estático de Área

$$M_x = \int_A y\,dA$$

$$M_y = \int_A x\,dA$$



- Como: $\bar{y} = \dfrac{\int_A y\,dA}{\int_A dA} = \dfrac{\int_A y\,dA}{A}$
- Então, $\bar{y} = \dfrac{M_x}{A} \Rightarrow M_x = \bar{y}A$
- Analogamente:

$$M_y = \bar{x}A \quad \Rightarrow \quad \bar{x} = \frac{M_y}{A}$$

5.5 – Momento Estático de Área

- Quanto vale o momento estático de área com relação ao eixo Ox quando este eixo passar pelo centróide de uma área?

$$\bar{y} = \frac{M_x}{A} \qquad \boxed{\textbf{ZERO}}$$

- Ou com relação ao eixo Oy quando este eixo também passar pelo centróide de uma área?

$$\bar{x} = \frac{M_y}{A} \qquad \boxed{\textbf{ZERO}}$$