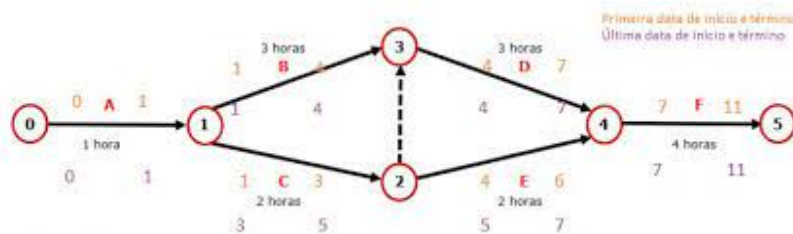


1º Aula dia 25/07/2022

Teoria dos Grafos

1- Introdução

A teoria dos grafos é uma ferramenta simples e poderosa que auxilia na resolução



de problemas com arranjos de objetos discretos. A tecnologia requer que muitos sistemas apresentem soluções que abranjam conceitos PERT/CPM, análise do caminho crítico, logística, redes, linguística, jogos e etc.

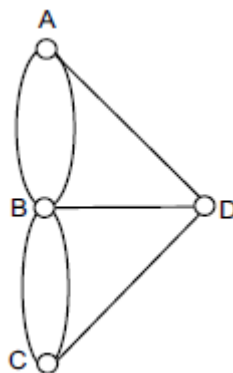
As técnicas de construção combinatorial para encontrar arranjos apropriados são diferentes dos processos aritméticos convencionais.

- CPM = Analise caminho crítico;
- PERT/CPM = Pesquisa operacional;

A teoria dos grafos está extremamente relacionada com a matemática, incluindo conjuntos, matrizes, análise numérica, análise combinatória, probabilidade, entre outros.

Teoria dos grafos é ainda um dos assuntos mais importantes ligados a matemática moderna, e baseia-se na ideia de pontos interligados por linhas

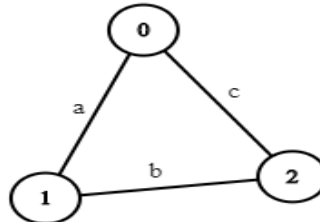
A teoria dos grafos surgiu nas mais diversas áreas do conhecimento,



sendo que a mais antiga refere-se a um trabalho de Euler em 1736. O problema consiste em percorrer todas as pontes de Königsberg de tal forma que elas não poderiam ser repetidas. No mesmo século Kirchhoff e Cayley desenvolveram a teoria das árvores baseado em estudos das redes elétricas e de compostos "Fórmulas da química orgânica"

### Definição de Grafo

Seja  $(V)$  um conjunto finito e não vazio e  $(E)$  um conjunto de pares ordenados  $(E_1, E_2)$ , onde  $(E_1)$  e  $(E_2)$  e  $(V)$ , sendo que  $(E_1, E_2)$  é representado por uma linha, diz-se que  $(G)$  é um grafo e sua denominação é  $G(V, E)$



$G(V, E)$

- $V = \{A, B, C\}$
- $E = \{(A, B), (B, C)\}$
- 

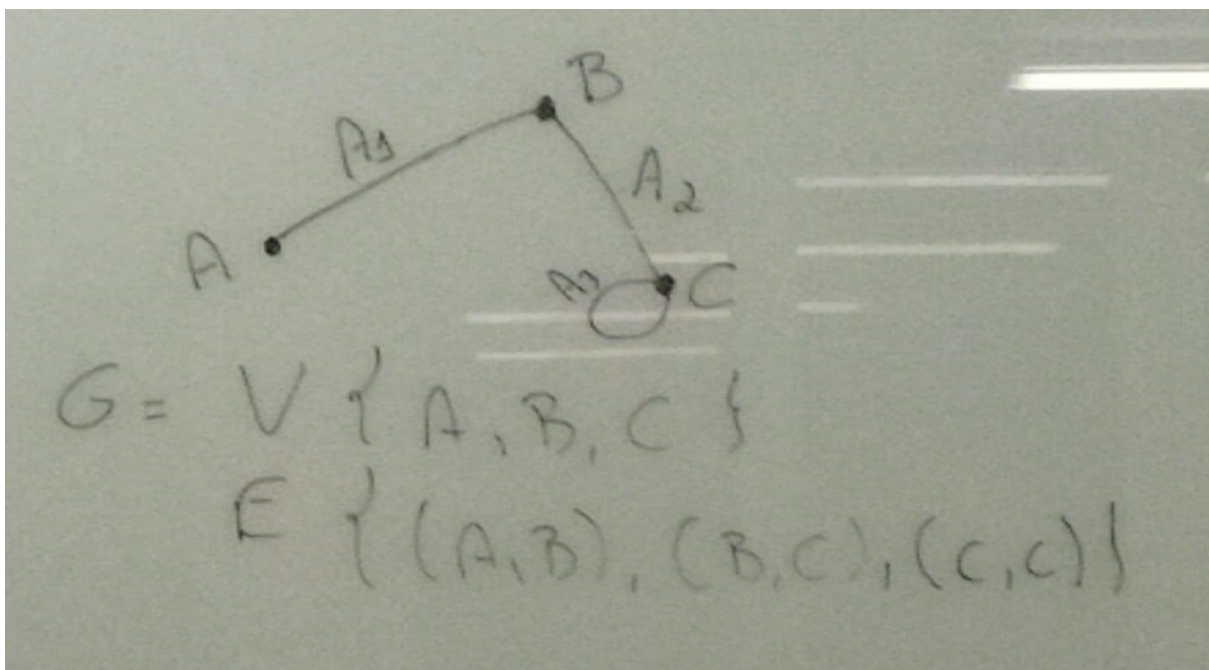
Grafos euleriano

Grafos hamiltoniano

### Continuando a definição de Grafos

Os elementos do conjunto  $(V)$  são denominados vértices, pontos ou nós, e os pares ordenados pertencentes ao conjunto  $(E)$  são denominados de arestas, linhas ou arcos do grafo. Uma aresta é dita incidente com os vértices que ela liga. Uma aresta que incida em um único vértice é denominado laço. Dois vértices são adjacentes se eles estão ligados por uma aresta, um vértice é isolado se não houver incidentes.

- PONTOS =  $(V)$  são denominados vértices, pontos ou nós;
- LINHAS =  $(E)$  são denominados de arestas, linhas ou arcos do grafo.



O cardinal  $|V|=N$  determina o número de ordem do grafo. No exemplo acima o  $N$  é igual a 3.

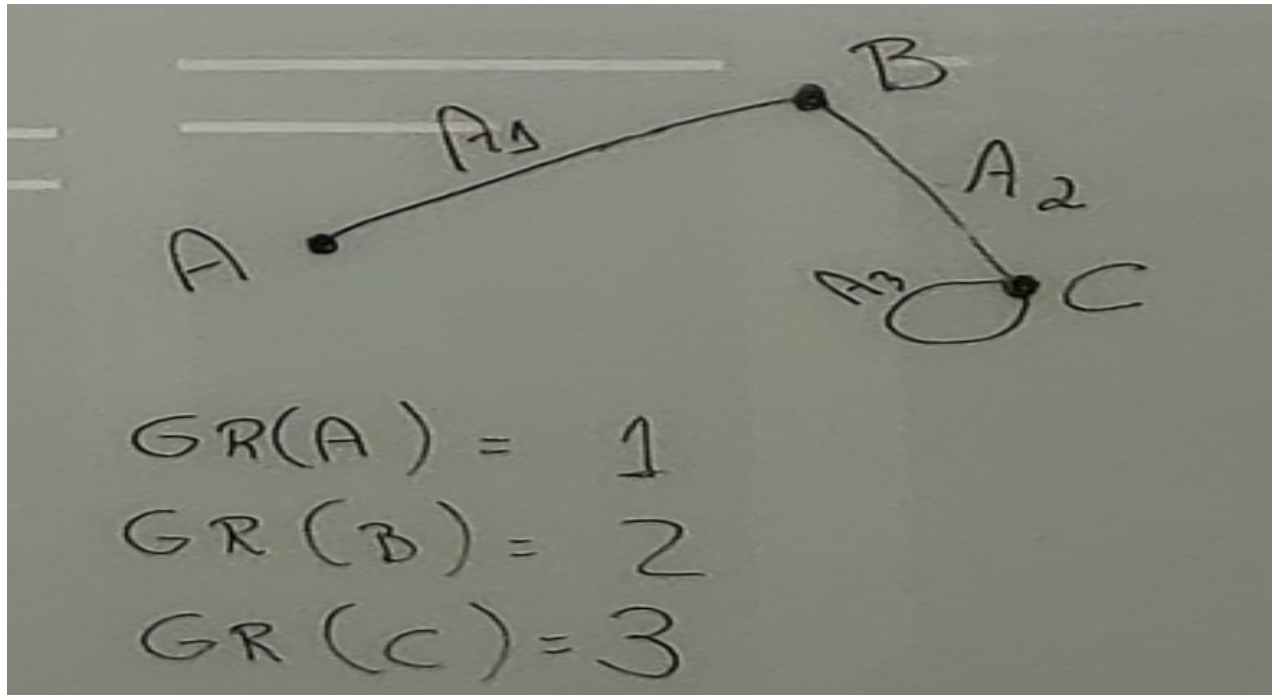
A quantidade de arestas é denotada pela letra “ $N$ ”.

O grau de um vértice é determinado pelo número de arestas que incidem sobre o mesmo.

$$GR(A) = 1$$

$$GR(B) = 2$$

$$GR(C) = 3$$



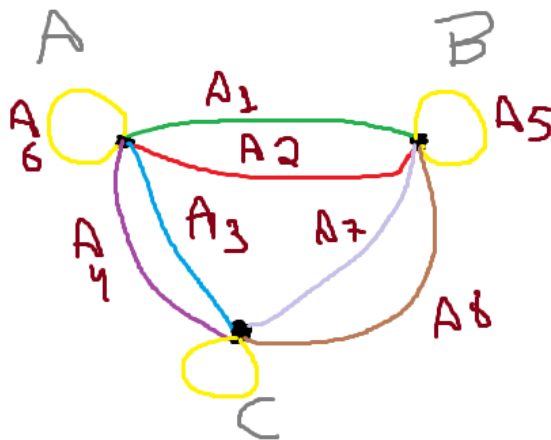
Um grafo que possui todos os vértices com o mesmo grau ( $R$ ) é dito regular de grau ( $R$ )

Duas arestas ( $E_1, E_2$ ) são ditas paralelas se ambas incidem sobre os mesmos vértices  $V, W$ .

Um grafo que possui arestas paralelas e/ou laços é chamado de multigrafo. Caso contrário é chamado de grafo simples.

## Exercícios

1 - Desenhe um multi grafo regular de grau 6 que possua pelo menos 2 laços e 3 arestas paralelas, que não tenha vértice isolado.

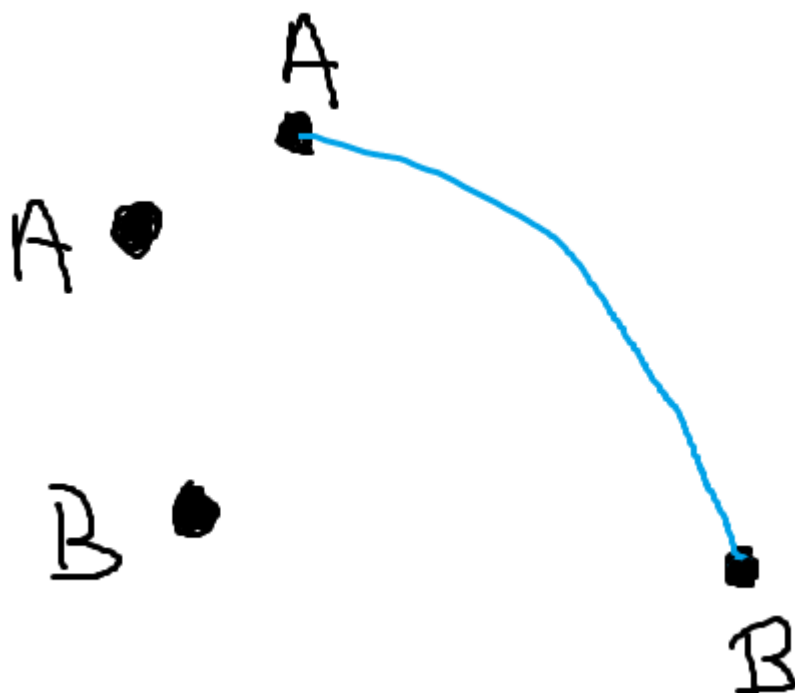


$$\begin{aligned} \text{GR}(A) &= 6 \\ \text{GR}(B) &= 6 \\ \text{GR}(C) &= 6 \end{aligned}$$

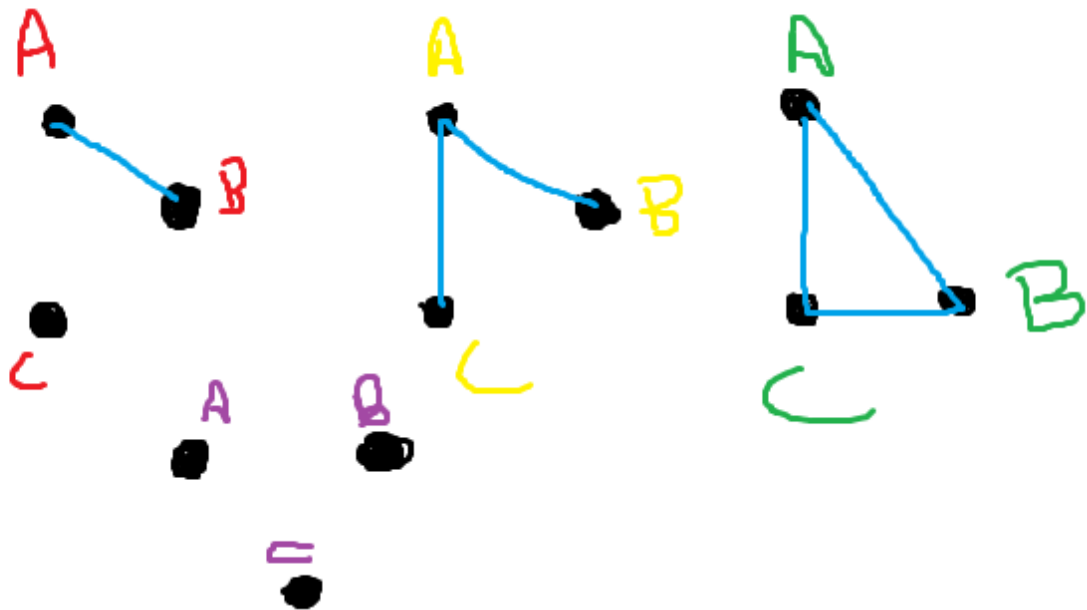
2 - Desenhe todos os grafos simples possíveis com um vértice.

R: ■

3 - Repita o exercício anterior com dois vértices.



4 - Repita o exercício anterior considerando 3 vértices.



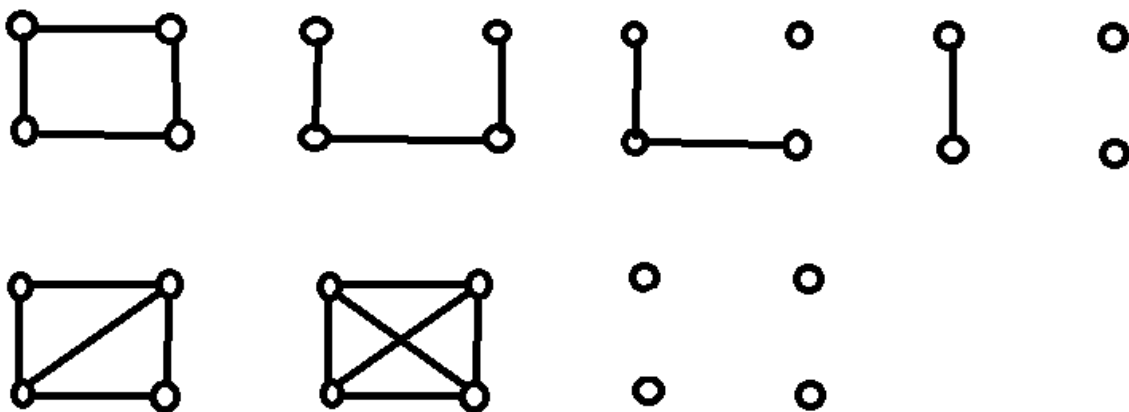
Definição de Vértice completo

Um grafo completo é aquele no qual todos os vértices são adjacentes entre si, ou seja, para todo e qualquer vértice do grafo existe uma aresta ligando a todos os outros vértices

5 - Em grafo completo de ordem N, qual o grau de cada vértice?

R: Grau =  $N - 1$ .

6 - Repita o exercício 4 considerando 4 vértices. (Fazem em casa)



7 - Em qualquer grafo, o número de vértices de grau ímpar é sempre par? Sim ou não? e Justifique sua resposta.

(x) SIM  
( ) NÃO

Nº VÉRTICES GRAU ÍMPAR  
É SEMPRE PAR

V	PAR	ÍMPAR
7	7	0 ✓
	5	2
	3	4
	5	2
	3	4

8 - Um grafo completo com 3 vértices possui 3 arestas, com 4 vértices possui 6 arestas. Quantas arestas possui um grafo completo com 10 vértices, e quantas arestas possuirá um grafo nas mesmas condições que possua Y vértices.

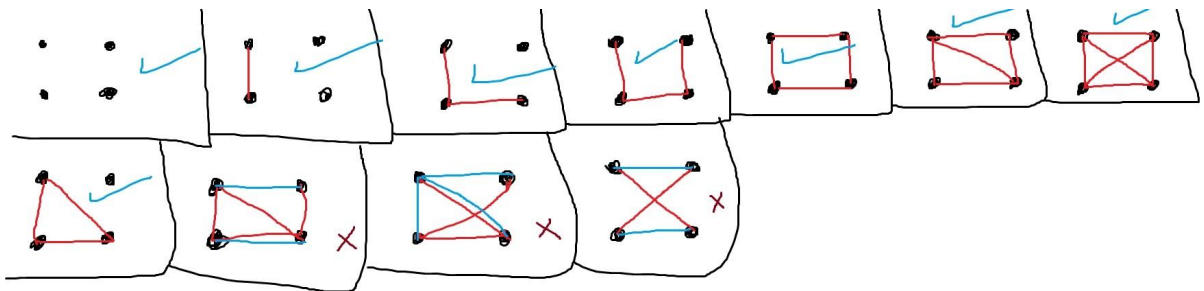
R: Fórmula  $(Y \times (Y - 1) / 2)$

$$\{[3 \text{ (Vértices)}] \times [3 - 1 = 2 \text{ (Arestas)}] / 2\} = 3$$

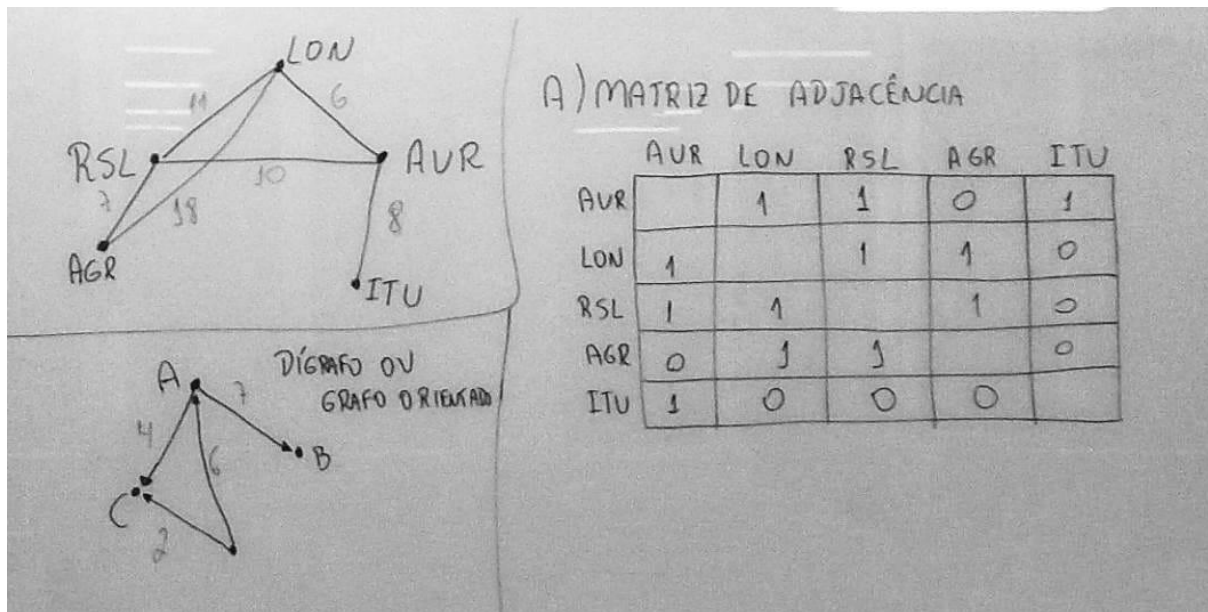
$$\{[4 \text{ (Vértices)}] \times [4 - 1 = 3 \text{ (Arestas)}] / 2\} = 6$$

$$\{[10 \text{ (Vértices)}] \times [10 - 1 = 9 \text{ (Arestas)}] / 2\} = 45$$

9 - Desenhe um grafo simples com 7 vértices, sendo que dois deles devem ter grau 2, outros dois grau 4 e os outros três devem ter grau 3.



## Matriz Adjacência'



A matriz adjacente é uma estrutura de dados através da qual é possível armazenar os vértices e arestas do grafo. Os vértices que são adjacentes são representados por 1 e as demais posições por 0. Caso seja um multigrafo os laços serão representados por 1 ou 2 na diagonal principal na posição de intersecção daquele vértice. Caso exista arestas paralelas coloca-se na matriz um único correspondente da quantidade de arestas paralelas. Estas especificações são usadas para grafos não orientados.

	A	B	C	D
A	0	1	1	1
B	0	0	0	0
C	0	0	0	0
D	1	0	1	0



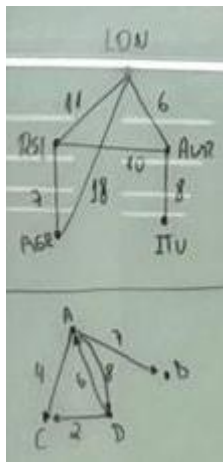
Para grafos orientados, grafos dirigidos ou dígrafos, coloca-se 1 no ponto de chegada da aresta, 0 nos demais. A regra para laços e arestas paralelas é a mesma de grafos não orientados.

### Matriz de Custos

Segue o mesmo regramento da matriz adjacência. Em se tratando de matriz as arestas paralelas deverão ter apenas um único valor armazenado de acordo com a aplicação.

### Listas de arestas

É uma estrutura de dados para representação de um grafo que consiste em duas listas (Vetores e ponteiros (listas encadeadas)), na qual a primeira lista representa os vértices iniciais e a segunda os vértices finais do grafo. Tem como vantagem o fato de otimizar o espaço ocupado em memória.



- $Li \{RSL, LON, AUR, RSL, RSL, AGR\}$
- $Lf \{LON, AUR, ITU, AUR, AGR, LON\}$

- $Li \{A, A, A, D, D\}$
- $Lf \{C, B, D, A, C\}$

### Estrutura de Adjacência

Consiste numa representação (Estrutura de Dados) na qual para cada vértice do grafo cria-se uma lista com seus sucessores. Esta representação tem maior eficiência quando aplicada em dígrafos dirigidos

$LON = \{RSL, AGR, AUR\}$

$RSL = \{LON, AGR, AUR\}$

$AGR = \{LON, RSL\}$

$AUR = \{LON, RSL, ITU\}$

$ITU = \{AUR\}$

$A = \{C, B, D\}$

$B = \{\}$

$C = \{\}$

$D = \{A, C\}$

#### ESTRUTURA DE ADJACÊNCIA

$LON \{RSL, AGR, AUR\}$

$RSL \{LON, AGR, AUR\}$

$AGR \{LON, RSL\}$

$AUR \{LON, RSL, ITU\}$

$ITU \{AUR\}$

$A - \{C, B, D\}$

$B - \{\}$

$C - \{\}$

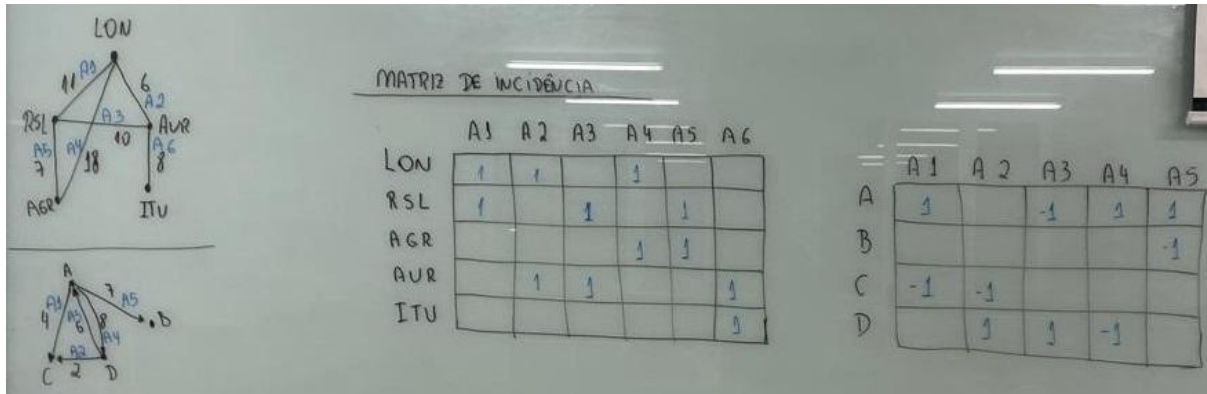
$D - \{A, C\}$



### Matriz de incidência

A matriz de incidência caracteriza-se por uma estrutura de ordem  $N \times M$ , na qual as linhas são representadas pelos vértices e as colunas representadas pelas arestas. Num grafo não orientado a matriz é preenchida pelo número 1 nos vértices aos quais cada aresta é incidente, e 0 nos demais casos.

Nos grafos orientados o raciocínio é análogo, entre tanto preenche-se com 1 o vértice inicial da aresta e com -1 o vértice final



Um grafo regular de grau ZERO é um grafo nulo

Um grafo conexo tem que ter chegado de um ponto (Vértice) a todos os vértices do grafo.

Um grafo completo é um grafo que liga todos os vértices a todos os vértices do grafo.

Um grafo isomorfo é um grafo representado de diferentes maneiras porém possuem o mesmo grau em cada vértice e tem a mesma representação em cada aresta.

Em um plano, consigo representar um grafo sem cruzar arestas um grafo de ordem 4, a partir de ordem 5 é impossível não cruzar arestas